Corrigée d'examen d'analyse S_2

Mr Menguelti Ali

Corrigée de l'exercice 1 (6 points)

Calculons le DL à l'ordre 2 en 0 de la fonction

$$f(x) = \frac{x}{(e^x - 1)}$$

On a

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right) \quad (\mathbf{1\ points})$$

donc

$$(e^x - 1) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$$

alors

$$f(x) = \frac{x}{(e^x - 1)} = \frac{x}{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)}$$

donc

$$f(x) = 1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right)^2 + o\left(x^2\right)$$

alors

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{1}{12}x^2 + o\left(x^2\right) \ (\mathbf{1\ points})$$

Calculons le DL à l'ordre 3 en 1 de la fonction

$$g(x) = \ln(x)$$

On pose $y = x - 1$ alors

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln(x) = \ln(y+1) = \ln[(y+1)] \\ &= y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 + o\left(y^3\right) \ (\mathbf{1\ points}) \end{aligned}$$

donc

$$g(x) = \ln(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + o\left((x-1)^3\right) \quad (\textbf{1 points})$$

Calculons le DL à l'ordre 1 en $+\infty$ de la fonction

$$h(x) = \sqrt{x^2+3x+2} - x$$

On pose

$$y = \frac{1}{x} \Longrightarrow x = \frac{1}{y}$$

alors

$$h(x) = \sqrt{x^2+3x+2} - x = \sqrt{\left(\frac{1}{y}\right)^2 + 3\frac{1}{y} + 2} - \frac{1}{y} = \frac{1}{y}\left[\sqrt{3y+1+2y^2} - 1\right] \ (\textbf{1 points})$$

On pose

$$u = \left(3y + 2y^2\right)$$

donc

$$\sqrt{3y+1+2y^2} - 1 = \sqrt{u+1} - 1 = \left(1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2\right) - 1 = \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + o\left(u^2\right)$$

alors

$$\begin{aligned} \sqrt{3y+1+2y^2} - 1 &= \frac{1}{2}\left(3y+2y^2\right) - \frac{1}{8}\left(3y+2y^2\right)^2 + o\left(\left(3y+2y^2\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(3y+2y^2\right) - \left(\frac{1}{2}y^4 + \frac{3}{2}y^3 + \frac{9}{8}y^2\right) + o\left(\left(3y+2y^2\right)^2\right) \\ &= \frac{3}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + o\left(y^2\right) \end{aligned}$$

finalement

$$\frac{1}{y}\left[\sqrt{3y+1+2y^2} - 1\right] = \frac{1}{y}\left[-\frac{1}{8}y^2 + \frac{3}{2}y + o\left(y^2\right)\right] = \frac{3}{2} - \frac{1}{8}y + o(y)$$

d'où

$$h(x) = \sqrt{x^2+3x+2} - x = \frac{3}{2} - \frac{1}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \quad (\textbf{1 points})$$

Corrigée de l'exercice 2 (6 points)

Pour

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+3x}-\sin(x)-1}{1-\cos(x)}$$

On a

$$\sqrt[3]{1+3x}=1+\frac{1}{3}(3x)-\frac{1}{9}(3x)^2+o\left(x^2\right)=1+x-x^2+o\left(x^2\right)\quad(\mathbf{1\ points})$$

donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+3x}-\sin(x)-1}{1-\cos(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-x^2+o\left(x^2\right)-x-1}{\dfrac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)}=-2\quad(\mathbf{1\ points})$$

Pour

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{3-x}\right)^{\frac{1}{(1-x)}}$$

on pose $y=x-1$ alors

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{3-x}\right)^{\frac{1}{(1-x)}}=\lim_{y\to 0}\left(\frac{2+y}{2-y}\right)^{-\frac{1}{y}}=\lim_{y\to 0}\exp\left[-\tfrac{1}{y}\left[\ln\frac{2+y}{2-y}\right]\right]$$

donc

$$\begin{aligned}\lim_{y\to 0}\exp\left[-\tfrac{1}{y}\left[\ln\frac{2+y}{2-y}\right]\right] &= \lim_{y\to 0}\exp\left[-\tfrac{1}{y}\left[\ln(2+y)-\ln(2-y)\right]\right]\\ &= \lim_{y\to 0}\exp\left[-\tfrac{1}{y}\left[\ln\left(1+\frac{y}{2}\right)-\ln\left(1-\frac{y}{2}\right)\right]\right]\end{aligned}$$

on a

$$\ln\left(1+\frac{y}{2}\right)=\frac{y}{2}+o\left(\frac{y}{2}\right)\ \ et\ \ \ln\left(1-\frac{y}{2}\right)=-\frac{y}{2}+o\left(\frac{y}{2}\right)\quad(\mathbf{1\ points})$$

alors

$$\lim_{y\to 0}\exp\left[-\tfrac{1}{y}\left[\ln\left(1+\frac{y}{2}\right)-\ln\left(1-\frac{y}{2}\right)\right]\right]=\lim_{y\to 0}\exp\left[-\tfrac{1}{y}\left[y+o\left(\frac{y}{2}\right)\right]\right]$$

donc

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{3-x}\right)^{\frac{1}{(1-x)}}=e^{-1}\ \ (\mathbf{1\ points})$$

Pour

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\exp\left(\frac{1}{x}\right)-\exp\left(\frac{1}{x+1}\right)\right)$$

On pose

$$y=\frac{1}{x}$$

alors

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\exp\left(\frac{1}{x}\right)-\exp\left(\frac{1}{x+1}\right)\right)=\lim_{y\to0}\frac{1}{y^2}\left(\exp(y)-\exp\left(\frac{1}{\frac{1}{y}+1}\right)\right)$$

Calculons

$$\lim_{y\to0}\frac{1}{y^2}\left(\exp(y)-\exp\left(\frac{y}{y+1}\right)\right)$$

on a

$$\frac{y}{y+1}=y\left(1-y+o(y)\right)$$

donc

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{y}{y+1}\right) &= \exp\left[\left(y-y^2+o\left(y^2\right)\right)\right]=1+y-y^2+\frac{1}{2}\left(y-y^2\right)^2+o\left(y-y^2\right)^2\\ &= 1+y-\frac{1}{2}y^2+o\left(y^2\right)\quad(\mathbf{1\ points})\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\lim_{y\to0}\frac{1}{y^2}\left(\exp(y)-\exp\left(\frac{y}{y+1}\right)\right) &= \lim_{y\to0}\frac{1}{y^2}\left(1+y+\frac{y^2}{2}-\left(1+y-\frac{1}{2}y^2\right)+o\left(y^2\right)\right)\\ &= 1\end{aligned}$$

finalement

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\exp\left(\frac{1}{x}\right)-\exp\left(\frac{1}{x+1}\right)\right)=1\quad(\mathbf{1\ points})$$

Corrigée de l'exercice 3 (8 points)

Calculons l'intégrale

$$\int_3^5\frac{3(x+2)}{x^2-x-2}dx$$

on a

$$\frac{3(x+2)}{x^2-x-2}=\frac{3(x+2)}{(x+1)(x-2)}=\frac{A}{(x+1)}+\frac{B}{(x-2)} \quad (\mathbf{1\ points})$$

on obtien

$$A=-1 \quad et\ B=4$$

d'où

$$\begin{aligned}\int_3^5 \frac{3(x+2)}{x^2-x-2}dx &= \int_3^5 \left[\frac{4}{(x-2)}-\frac{1}{x+1}\right]dx=\left[4\ln(x-2)-\ln(x+1)\right]_3^5 \\ &= 2\ln 2+4\ln 3-\ln 6 \quad (\mathbf{1\ points})\end{aligned}$$

Pour

$$\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^3}\cos\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

on pose

$$u=\frac{1}{x}\Longrightarrow du=-\frac{1}{x^2}dx \quad (\mathbf{1\ points})$$

donc

$$\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^3}\cos\left(\frac{1}{x}\right)dx=-\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} u\cos(u)\,du=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} u\cos(u)\,du$$

par itegration par partie on obtien

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} u\cos(u)\,du=\left[\cos u+u\sin u\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=-\frac{\pi}{2}-1 \quad (\mathbf{1\ points})$$

Pour

$$\int_0^1 \frac{1-2x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

on a

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1-2x}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx-\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}dx \ \ (\mathbf{1\ points}) \\ &= \arcsin(x)\Big|_0^1-\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}dx\end{aligned}$$

on pose

$$u = 1 - x^2 \Longrightarrow du = -2xdx$$

donc

$$-\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_1^0 \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u}\Big|_1^0$$

alors

$$\int_0^1 \frac{1-2x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin(x)|_0^1 + 2\sqrt{u}\Big|_1^0 = \frac{\pi}{2} - 2 \quad (\mathbf{1\ points})$$

On consdère l'integrale suivante

$$I_n = \int (\ln x)^n \, dx, \quad n \geq 1 \quad et \ a \in \mathbb{R}^*$$

trouvons une relation entre I_n et I_{n-1} pour tout $n \geq 1$. *Par* integration par partie on a

$$\int (\ln x)^n \, dx = x (\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} \, dx$$

alors

$$I_n = x (\ln x)^n - nI_{n-1} \ \ (\mathbf{1\ points})$$

Pour tout $n \geq 2$ en déduire une relation entre I_n et I_{n-2}. *On a*

$$I_n = x (\ln x)^n - nI_{n-1} \Longrightarrow I_{n-1} = x (\ln x)^{n-1} - (n-1) I_{n-2}$$

donc

$$\begin{aligned} I_n &= x (\ln x)^n - n \left(x (\ln x)^{n-1} - (n-1) I_{n-2}\right) \\ &= x (\ln x)^n - nx (\ln x)^{n-1} - n(n-1) I_{n-2} \\ &= x (\ln x)^{n-1} (\ln x - n) - n(n-1) I_{n-2} \end{aligned}$$

Alors

$$I_n = x (\ln x)^{n-1} (\ln x - n) - n(n-1) I_{n-2} \quad (\mathbf{1\ points})$$