

Реализация алгоритма подготовки произвольного начального состояния системы кубитов с учетом ограничений современных квантовых компьютеров

ВЫПОЛНИЛ: СТУДЕНТ ГРУППЫ 382003_3

ИВЛЕВ А.Д.

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ: К.Т.Н., ДОЦЕНТ

МЕЕРОВ И.Б.

Постановка задачи

1. Разработка алгоритма построения квантовой схемы, выполняющей перевод системы кубитов в произвольное заданное начальное состояние
2. Разработка симулятора идеального квантового компьютера
3. Реализация алгоритма аппроксимации произвольного унитарного оператора
4. Рассмотрение влияния ограничений современных квантовых компьютеров на построение квантовых схем и адаптация вышеописанных алгоритмов под структуру квантовых компьютеров облачной платформы IBM Quantum
5. Выполнение экспериментов, оценивающих точность работы полученных схем, с использованием симулятора идеального квантового компьютера и квантовых компьютеров IBM

Симулятор идеального квантового компьютера

Состояние квантового компьютера описывается комплексным нормированным вектором длины 2^N , где N – количество кубитов.

Базовые операции исполняемые на квантовом компьютере традиционно называют квантовыми гейтами. Они задаются некоторыми унитарными матрицами.

Нулевой кубит считаем младшим. Квантовые схемы построены придерживаясь синтаксиса QASM (Quantum Assembly Language)

$$(I \otimes U)|\psi\rangle = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & 0 & 0 \\ u_3 & u_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ 0 & 0 & u_3 & u_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1\psi_1 + u_2\psi_2 \\ u_3\psi_1 + u_4\psi_2 \\ u_1\psi_3 + u_2\psi_4 \\ u_3\psi_3 + u_4\psi_4 \end{pmatrix} \quad (1)$$

1 и 2 строки результирующего вектора состояния будут получены путём преобразования $U \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$

3 и 4 строки из $U \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$

Алгоритм подготовки начального состояния системы кубитов

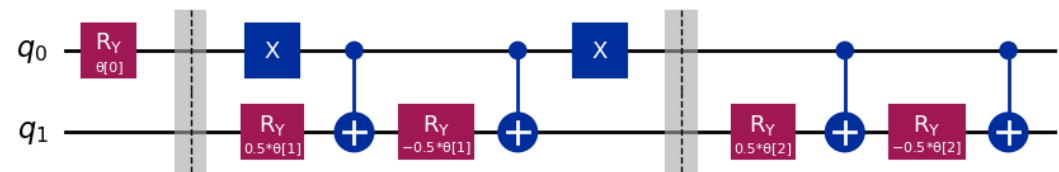
Необходимо построить квантовую схему, которая задаёт унитарное преобразование U , которое переводит исходное состояние $|0\rangle^{\otimes N}$ (все кубиты в состоянии 0) в желаемое $|\psi\rangle$, то есть $U|0\rangle^{\otimes N} = |\psi\rangle$.

Разделим первую часть алгоритма на N итераций. Задача i -й итерации распределить значения из первой половины на весь под вектор из 2^i значений.

Сведём задачу итерации к переходу пар из состояния $(c, 0)$ к (a, b) .

$$Ry(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\varphi}{2}) & -\sin(\frac{\varphi}{2}) \\ \sin(\frac{\varphi}{2}) & \cos(\frac{\varphi}{2}) \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c \\ d \end{pmatrix} \quad (3)$$



Общий вид схемы подготовки вектора модулей начального состояния системы из двух кубитов

Алгоритм подготовки начального состояния системы кубитов

Определим углы φ для применения гейтов $R_y(\varphi)$.

При рассмотрении отдельных пар получим $\varphi = 2\arccos(\frac{a}{c})$ при $c \neq 0$ ($\varphi = 0$ при $c = 0$), где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Добавим фазу к полученному вектору модулей с помощью гейта R_z .

У данного алгоритма большая теоретическая сложность $O(2^N)$ в худшем случае, но при этом он обеспечивает высокую точность.

$$\begin{pmatrix} \cos(\frac{\varphi}{2}) & -\sin(\frac{\varphi}{2}) \\ \sin(\frac{\varphi}{2}) & \cos(\frac{\varphi}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi/2} \end{pmatrix} \quad (5)$$

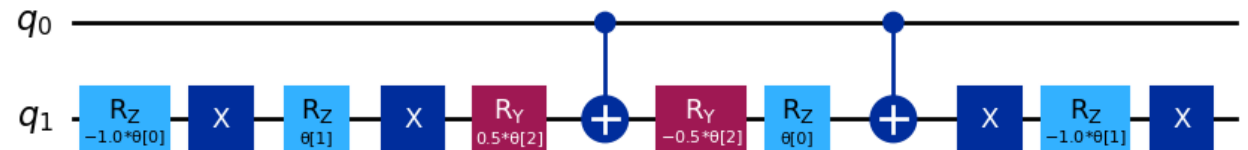
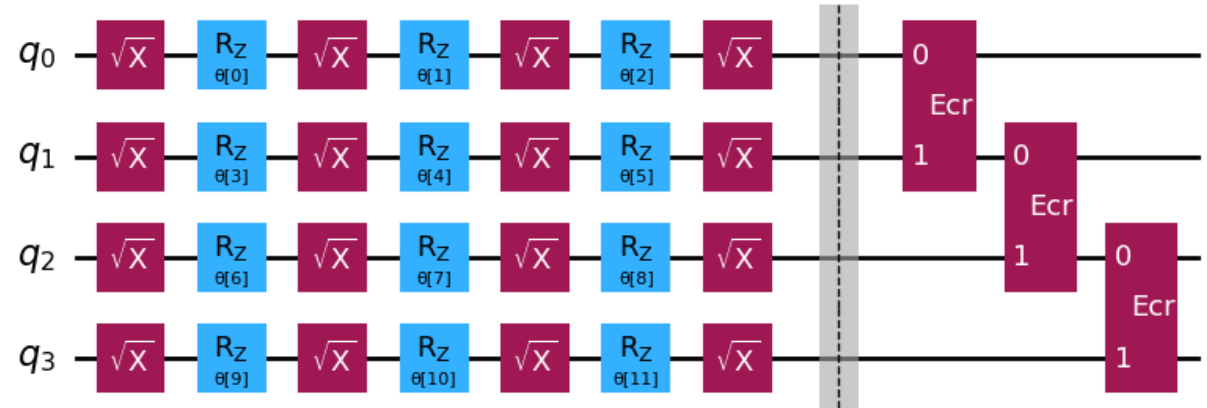


Схема блока последней итерации алгоритма подготовки начального состояния системы из двух кубитов

Аппроксимация произвольного унитарного оператора

Аппроксимируем произвольный унитарный оператор U размера $2^n \times 2^n$ конечной квантовой схемой на основе конечного набора базовых гейтов.

Подбор оптимальных параметров будет происходить, как решение задачи оптимизации: $\min_p ||U - M(p)||$, где $M(p)$ — матрица параметризованной схемы с набором параметров p — соответственно, и используется норма Фробениуса.

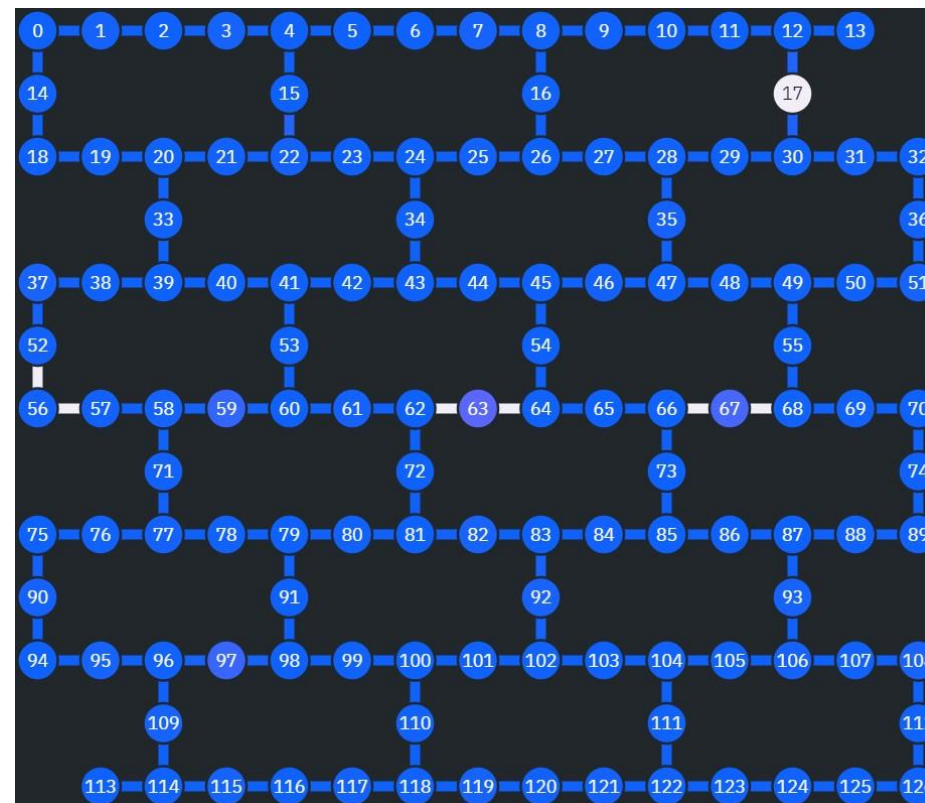


Универсальная шаблонная схема

Ограничения современных квантовых компьютеров

Рассмотрим квантовые компьютеры, находящиеся в открытом доступе через сервис IBM Quantum:

- Базовый набор гейтов ECR, I, Rz, SX, X
- Неполная топология
- Средние значения ошибок для `ibm_sherbrooke` (на 13.05.2024): ECR - $7.432e-3$, SX - $2.279e-4$, ошибка считывания - $1.180e-2$

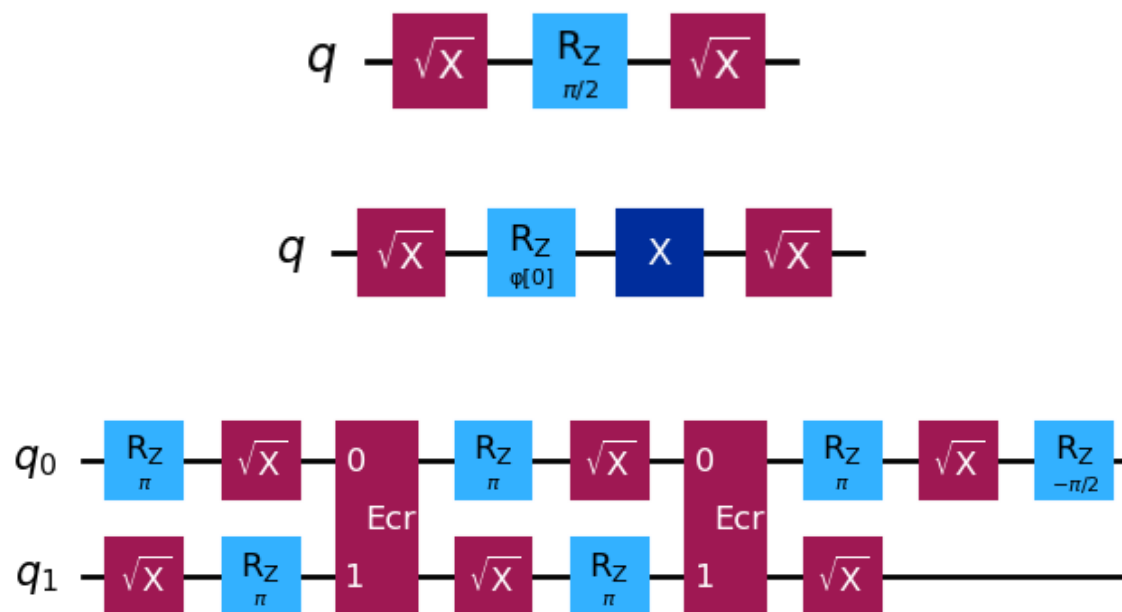


Топология квантового компьютера `ibm_sherbrooke`

Адаптация алгоритма подготовки начального состояния под квантовые компьютеры IBM

Алгоритм подготовки начального состояния использовал гейты X, H, Ry, Rz, CNOT. Аппроксимируем данный набор с помощью гейтов ECR, I, Rz, SX, X, используемых на квантовых машинах IBM.

Для этого применим алгоритм аппроксимации произвольного унитарного оператора. Данный подход увеличит размер схемы в несколько раз.



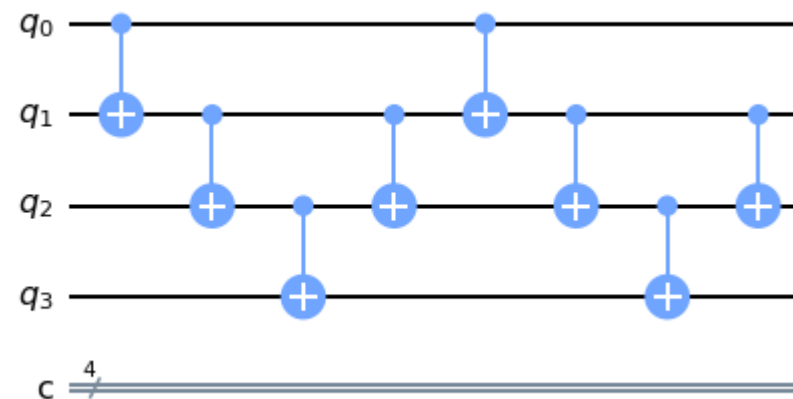
Схемы гейтов H, Ry, CNOT в новом базисном наборе

Адаптация алгоритма подготовки начального состояния под квантовые компьютеры IBM

Пусть два кубита a , b соединяет цепочка из $n-1$ кубитов ($a \neq b$ следовательно $n \neq 0$). Для удобства перенумеруем все кубиты цепочки от $a = 0$, до $b = n$. Тогда алгоритм $\text{CNOT}(0, n)$:

- Если $n = 1$, то $\text{CNOT}(0, 1)$ и алгоритм завершается
- Последовательно применяем CNOT между ближайшими кубитами в цепочке, начиная с 0 и заканчивая n
- Проводим обратные действия предыдущему шагу, исключая $\text{CNOT}(n-1, n)$ и $\text{CNOT}(0, 1)$.
- Один раз повторяем предыдущие два шага, для возврата состояний промежуточных кубитов в исходные

Такой подход будет использовать $4(n-1)$ гейтов CNOT , при $n \geq 2$.



Пример гейта CNOT между 0 и 3 кубитом

Результаты экспериментов на идеальном квантовом компьютере

Для аппроксимирующего алгоритма точность оценивается в виде: $\|U - M\|_F$, где U – желаемая унитарная матрица, а M – матрица аппроксимирующей схемы.

Аналогично для алгоритма подготовки начального состояния: $\|\psi - V\|_2$, где ψ – желаемый вектор состояния, а V – вектор полученный после применения схемы.

Кол-во кубитов\повторений	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.426	1.203e-8	7.857e-9	-	-	-	-	-
2	1.427	0.895	0.145	4.062e-8	2.499e-8	-	-	-
3	3.06	2.641	2.325	1.62	1.389	0.954	0.481	3.28e-6

Средняя точность аппроксимации в зависимости от количества кубитов и повторений шаблонной схемы

Количество кубитов	1	2	3	4	5	6
Точность с фазой	0.747	1.055e-15	2.092e-14	2.237e-13	1.721e-12	1.145e-11
Точность без фазы	1.586e-16	8.941e-16	2.119e-14	2.255e-13	1.734e-12	1.123e-11

Средняя точность подготовки начального состояния в зависимости от количества кубитов

Количество кубитов	1	2	3
Явный алгоритм	0.818	1.15e-15	2.153e-14
Аппроксимация	0.818	1.41e-08	4.54e-07

Сравнение точности явного алгоритма подготовки начального состояния и схемы его аппроксимирующей

Результаты на квантовом компьютере IBM

Все эксперименты были произведены на квантовом компьютере `ibm_sherbrooke`, с количеством измерений 4096.

Ввиду невозможности отследить эволюцию квантового оператора на реальной системе, будем оценивать погрешность самым простым способом, то есть нормой разницы результатов при применении гейта к нулевому начальному состоянию, поделённую на количество измерений.

Симулятор	Квантовый компьютер	Погрешность
[3310, 786]	[3269, 827]	0.014
[1554, 2542]	[1548, 2548]	0.002
[2755, 1341]	[2692, 1404]	0.021
[1603, 214, 1676, 603]	[1662, 235, 1520, 679]	0.044
[2057, 2039]	[2068, 2028]	0,004
[2059, 0, 0, 2037]	[2162, 90, 54, 1790]	0,071

Результаты экспериментов алгоритма аппроксимации произвольного унитарного оператора

Симулятор	Квантовый компьютер	Погрешность
[2017, 2079]	[1982, 2114]	0.012
[2067, 0, 0, 2029]	[2035, 111, 124, 1826]	0.065

Результаты экспериментов алгоритма подготовки произвольного начального состояния системы кубитов