Швлев А.Д 3824 М1ПМвм

Д/з №4

№45 $Y = f^*(X)$ $f(x, D)$, где $D = (x^{(1)}, \dots, x^{(N)})$

$x^{(i)}$ - независимые реализации X

$E_D((f(x,D) - f^*(x))^2)$

$(f(x,D) - f^*(x))^2 = f^2(x,D) - 2f^*(x)f(x,D) + f^{*2}(x)$

$D_D(f(x,D)) = \cancel{E(f^2(x,D))} = E_D((f(x,D) - E_D(f(x,D)))^2) = E(f^2(x,D)) - E^2(f(x,D))$

$(E_D(f(x,D) - f^*(x)))^2 = (E_D(f(x,D)) - f^*(x))^2 = E_D^2(f(x,D)) -$
$- 2f^*(x)E_D(f(x,D)) + f^{*2}(x)$

$\Rightarrow E_D((f(x,D) - f^*(x))^2) = E_D(f^2(x,D)) - 2f^*(x)E_D(f(x,D)) + f^{*2}(x)$

$D_D(f(x,D)) + (E_D(f(x,D) - f^*(x)))^2 = E_D(f^2(x,D)) - \cancel{E_D^2(f(x,D))} +$
$+ \cancel{E_D^2(f(x,D))} - 2f^*(x)E_D(f(x,D)) + f^{*2}(x)$

$\Rightarrow E_D((f(x,D) - f^*(x))^2) = D_D(f(x,D)) + (E_D(f(x,D) - f^*(x)))^2$

№46 $\mu_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\mu_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\Sigma = I$ $Pr\{Y=0\} = Pr\{Y=1\} = \frac{1}{2}$

1) $Corr(X_1, X_2) = \dfrac{cov(X_1, X_2)}{\sqrt{D(X_1)D(X_2)}}$

$cov(X_1, X_2) = E((X_1 - EX_1)(X_2 - EX_2))$

$f_{X|Y=0}(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu_0)^T(x-\mu_0)} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}((x_1+1)^2 + (x_2+1)^2)}$

$f_{X|Y=1}(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}((x_1-1)^2 + (x_2-1)^2)}$

$\Rightarrow f_X(x) = f_{X|Y=0}(x)Pr\{Y=0\} + f_{X|Y=1}Pr\{Y=1\} = \frac{1}{4\pi}(e^{-\frac{1}{2}((x_1+1)^2 + (x_2+1)^2)} +$
$+ e^{-\frac{1}{2}((x_1-1)^2 + (x_2-1)^2)})$

$\Rightarrow EX_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx_2\right)dx_1 = 0$ $EX_2 = 0$

$\Rightarrow cov(X_1, X_2) = E(X_1X_2) = \int_{\mathbb{R}^2} f_x(z)dz = 1$

$D(X_1) = E(X_1^2) - E^2(X_1) = EX_1^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx_2\right)dx_1 = 2$

$\Rightarrow D(X_2) = 2 \quad \Rightarrow corr(X_1, X_2) = \frac{1}{2}$

2) $f_{X_1|Y=0}(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y=0}(x)\,dx_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_1+1)^2}{2}}$

$f_{X_1|Y=1}(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_1-1)^2}{2}}$

$\Rightarrow Pr\{Y=i|x_1\} = \frac{f_{X_1|Y=i}(x_1)\, Pr\{Y=i\}}{f_{X_1}(x_1)}$

$f^*(x) = \arg\max_{y\in\{0,1\}} Pr\{Y=y|x_1\} = \begin{cases} 0, & f_{X_1|Y=0}(x_1) \geq f_{X_1|Y=1}(x_1) \\ 1, & f_{X_1|Y=0}(x_1) < f_{X_1|Y=1}(x_1) \end{cases} =$

$= \begin{cases} 0, & x_1 \leq 0 \\ 1, & x_1 > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow R(f^*) = \int_{\substack{x_1\leq 0 \\ x_2\in\mathbb{R}}} (1 - Pr\{Y=0|x_1\}) f_X(x)\,dx_1 dx_2 +$

$+ \int_{\substack{x_1>0 \\ x_2\in\mathbb{R}}} (1 - Pr\{Y=1/x\}) f_X(x)\,dx_1 dx_2 =$

$= \frac{1}{2}\left(\int_{x_1\leq 0} f_{X_1|Y=1}(x_1)\,dx_1 + \int_{x_1>0} f_{X_1|Y=0}(x_1)\,dx_1 \right) =$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{(x_1+1)^2}{2}}\,dx_1 \approx 0{,}28120912$

3) $Pr\{Y=i|X\} = \frac{f_{X|Y=i}(x)\, Pr\{Y=i\}}{f_X(x)}$

$f^* = \arg\max_{y\in\{0,1\}} Pr\{Y=y|X\} = \begin{cases} 0, & f_{X|Y=0}(x) \geq f_{X|Y=1}(x) \\ 1, & f_{X|Y=0}(x) < f_{X|Y=1}(x) \end{cases} =$

$= \begin{cases} 0, & x_1+x_2 \leq 0 \\ 1, & x_1+x_2 > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow R(f^*) = \frac{1}{2}\left(\int_{x_1+x_2\leq 0} f_{X|Y=1}(x)\,dx + \int_{x_1+x_2>0} f_{X|Y=0}(x)\,dx \right) =$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{x_1+x_2>0} e^{-\frac{1}{2}((x_1+1)^2+(x_2+1)^2)}\,dx \approx 0{,}07864960$$

г) использование двух переменных улучшило байесовскую ошибку при на корреляции в $\frac{1}{2}$

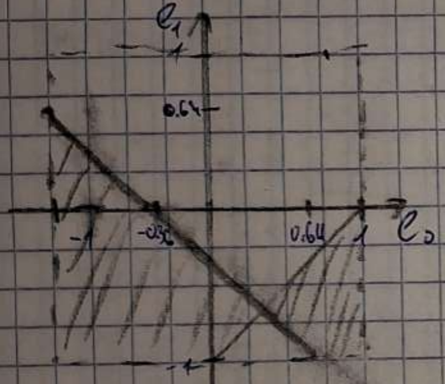
№48 $x^{(0)}=0,\ x^{(1)}=1$ $\quad \left(x=(0.32, 0)?\right) \quad x = 0.32$

$\exists\ e_0, e_1$ равномерно на $[-1;1]$

$\Rightarrow \tilde{x}^{(0)} = e_0 \in [-1;1] \qquad \tilde{x}^{(1)} = 1+e_1 \in [0;2]$

$\rho(\tilde{x}^{(1)}, x) < \rho(\tilde{x}^{(0)}, x) \Rightarrow |1+e_1-0{,}32| < |e_0-0{,}32|$

$\Rightarrow (0{,}68+e_1)^2 < (e_0-0{,}32)^2 \Rightarrow \Pr\{\rho(\tilde{x}^{(1)}, x) < \rho(\tilde{x}^{(0)}, x)\} =$



$= \frac{S}{4}$, где $S = (1+0.64)^2/2 + 1/2 - 0.64^2/2 = 1{,}64$

$\Rightarrow \Pr\{\rho(\tilde{x}^{(1)}, x) < \rho(\tilde{x}^{(0)}, x)\} = 0.41$

№49 Выпуклый полиэдр в $\mathbb{R}^d$ — мн-во решений $Ax \le b$, где $b \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m\times d}$

$x \in \mathbb{R}^d$ $\exists\ x^{(i)}$ $i \in \{1, k\}$ — ближайшие соседи для x $\Rightarrow$

$\Rightarrow \max\limits_{i=\overline{1,k}} \{\rho(x, x^{(i)})\} \le \min\limits_{\tilde{x} \in D\setminus\{x^{(1)},\dots,x^{(k)}\}} \{\rho(x, \tilde{x})\}$, где D — мн-во всех x

$\exists\ D$ — конечное и $|D| = n$

$\Rightarrow \rho(x, x^{(i)}) \le \rho(x, x^{(j)}) \quad i = \overline{1,k} \quad j = \overline{k+1, n}$

$\Rightarrow (x - x^{(i)}, x - x^{(i)}) \le (x - x^{(j)}, x - x^{(j)})$

$\Rightarrow (x,x) - 2(x^{(i)}, x) + (x^{(i)}, x^{(i)}) \le (x,x) - 2(x^{(j)}, x) + (x^{(j)}, x^{(j)})$

$\Rightarrow \underbrace{(x^{(i)} - x^{(j)}, x)}_{a_{ij} \in \mathbb{R}^d \text{ - строка в } A} \le \underbrace{-\frac{1}{2}\left(\cancel{(x^{(j)} - x^{(i)}, x^{(j)} - x^{(i)})}\,(x^{(j)}, x^{(j)}) - (x^{(i)}, x^{(i)})\right)}_{b_{ij} \in \mathbb{R}}$

$\Rightarrow Ax_z \le b$, где $A \in \mathbb{R}^{k(n-k)\times d}$, $b \in \mathbb{R}^{k(n-k)}$