Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное   
учреждение высшего образования

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Институт информационных технологий, математики и механики

**Лабораторная работа 1**

**Динамические системы на плоскости**

**Выполнил**:

студент группы 382003\_3

**Ивлев А. Д.**

Нижний Новгород

2023

**Содержание**

1. Постановка задачи
2. Часть 1. Консервативные системы
3. Часть 2. Диссипативные системы
4. Заключение
5. Приложение

**Постановка задачи**

**Вариант 5:**

**Часть 1. Консервативные системы**

Частица массы движется без трения по прямой в потенциале .

1. Построить уравнения движения частицы с помощью уравнения Лагранжа.
2. Построить фазовый портрет системы (векторное поле + основные траектории):
   1. Состояния равновесия. Устойчивые состояния равновесия обозначить синими круглыми маркерами, неустойчивые – красным крестообразными маркерами;
   2. Автоматизировать построение сепаратрис (через собственные векторы матрицы Якоби). Сепаратрисы рисовать желтым цветом;
   3. Замкнутые траектории рисовать зеленым цветом; траектории, уходящие на бесконечность – красным.
3. Построить для характерных траекторий разных типов системы в каждом из случаев.

**Часть 2. Диссипативные системы**

В консервативную систему, рассмотренную в рамках Части 1 данной лабораторной работы, вводится линейная диссипация, описываемая слагаемым ( – положительное трение, – отрицательное трение).

1) Исследовать на тип и устойчивость состояния равновесия диссипативную систему в зависимости от параметра (письменно).

2) Построить фазовые портреты для всевозможных вариантов конфигураций состояний равновесия в системе. Например, когда при : - устойчивый фокус, - седло; при : - устойчивый узел, - седло; и т.д. Направления сепаратрис определять программно.

3) Построить для характерных траекторий разных типов системы в каждом из случаев.

**Часть 1. Консервативные системы**

Частица массы движется без трения по прямой в потенциале .

1. Уравнения Лагранжа: , где L = K – U.

Для движения без трения по прямой в потенциале U состояние системы описывается (x, ), кинетическая энергия , потенциальная энергия . Следовательно, .

Уравнение Лагранжа: , где ,

.

Тогда уравнение движения примет вид: .

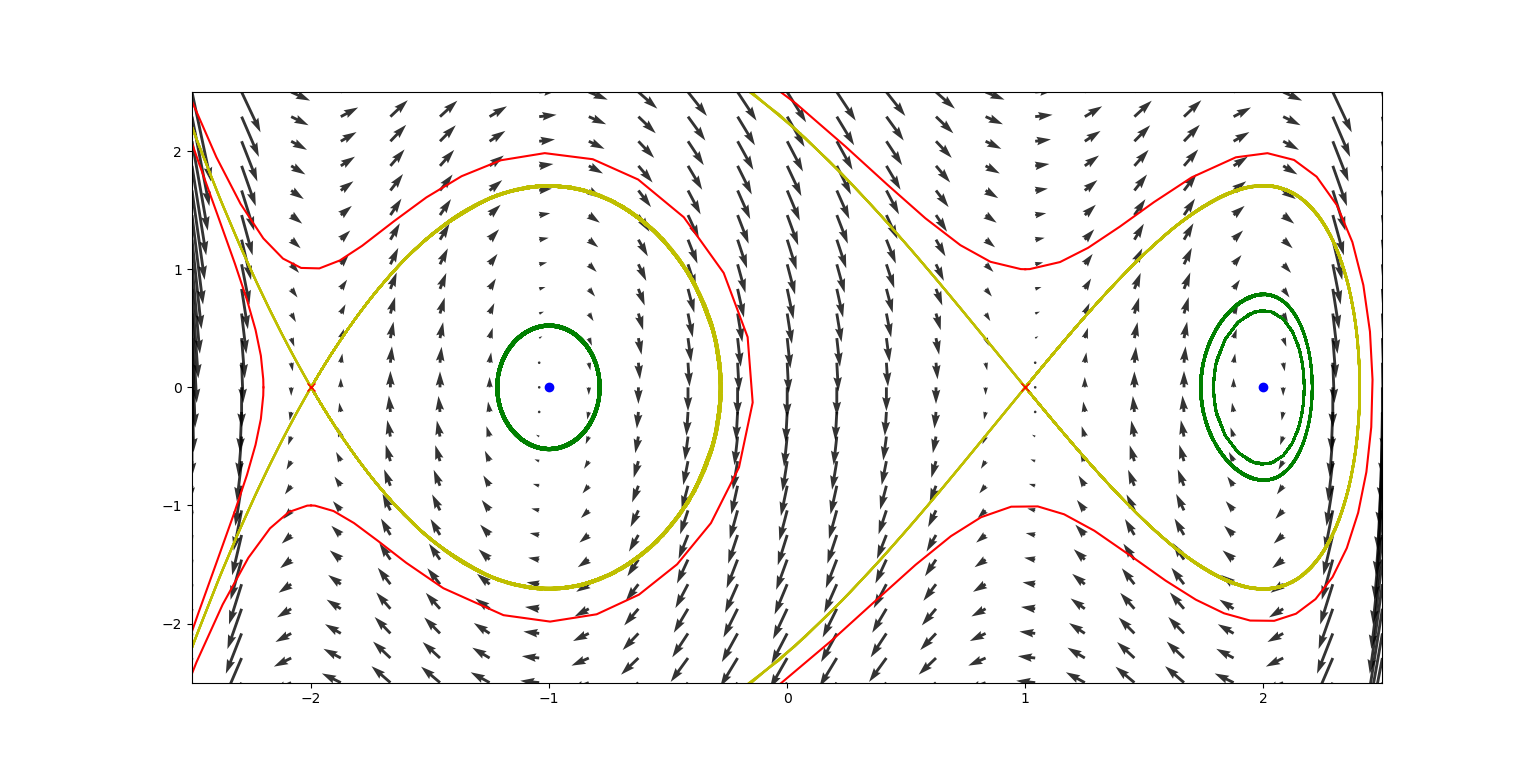
1. Обозначим , тогда при m = 1 получим систему ДУ: .

Найдем состояния равновесия . Из первого уравнения y = 0. Решим второе сделав замену и решив квадратное уравнение относительно t. Получим t = 1, 4, тогда у данной системы 4 состояния равновесия (±1, 0), (±2, 0).

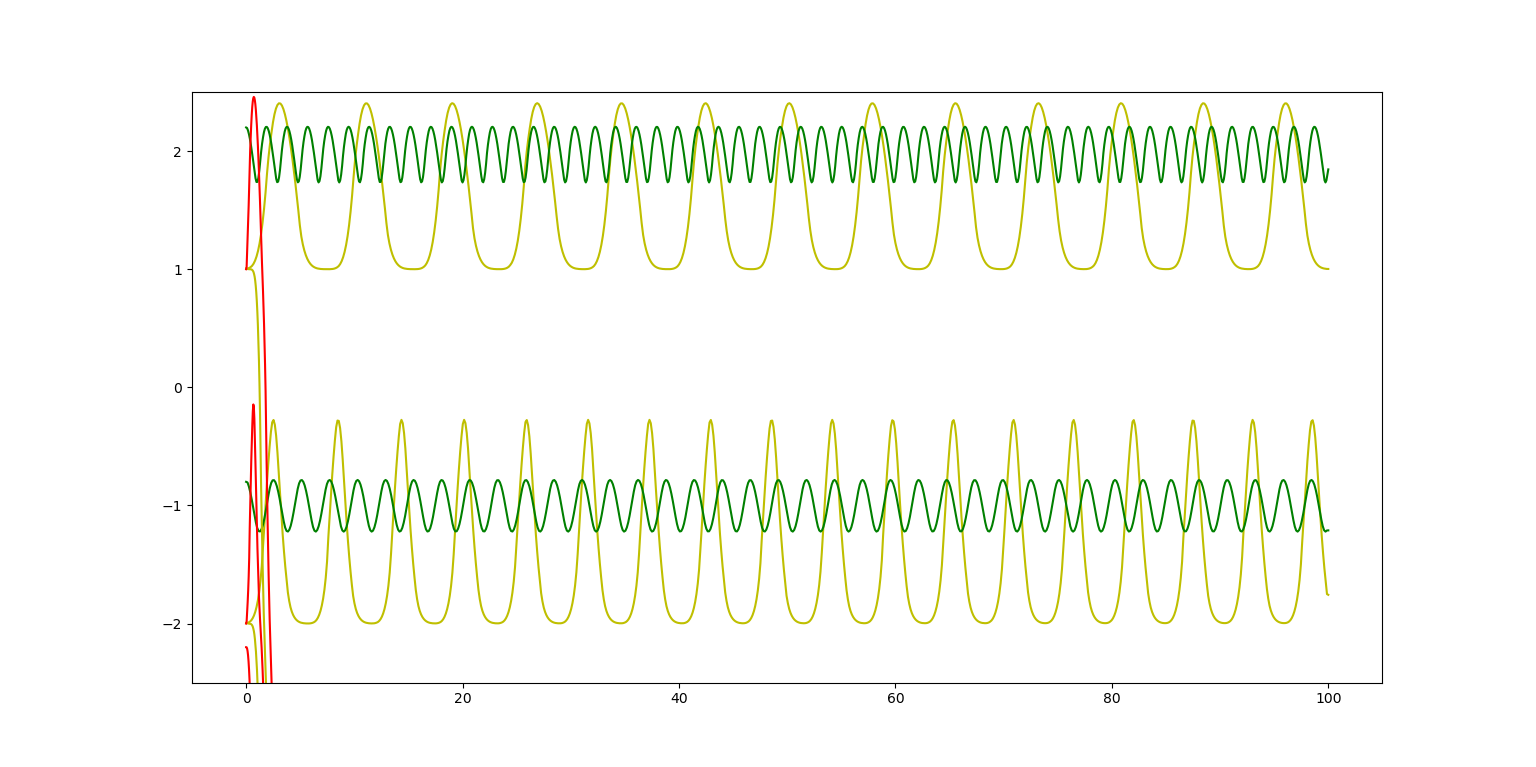
Для исследования типов состояний равновесий линеаризуем систему с помощью матрицы Якоби: . Найдём собственные числа данной системы: , .

Следовательно, состояние равновесия (-2, 0) – седло, так как . Аналогично (-1, 0) – центр (), (-1, 0) – седло (), (-1, 0) – центр ().

Сепаратрисы вблизи сёдел: .

Фазовый портрет от x системы с цветами, соответствующими заданию:

1. для траекторий системы в каждом из случаев соответственно:



**Часть 2. Диссипативные системы**

В консервативную систему, рассмотренную в рамках Части 1 данной лабораторной работы, вводится линейная диссипация, описываемая слагаемым ( – положительное трение, – отрицательное трение).

1. Тогда уравнение движения примет вид: .

Обозначим , тогда при m = 1 система ДУ:

Состояния равновесия не зависят от , так как y = 0.

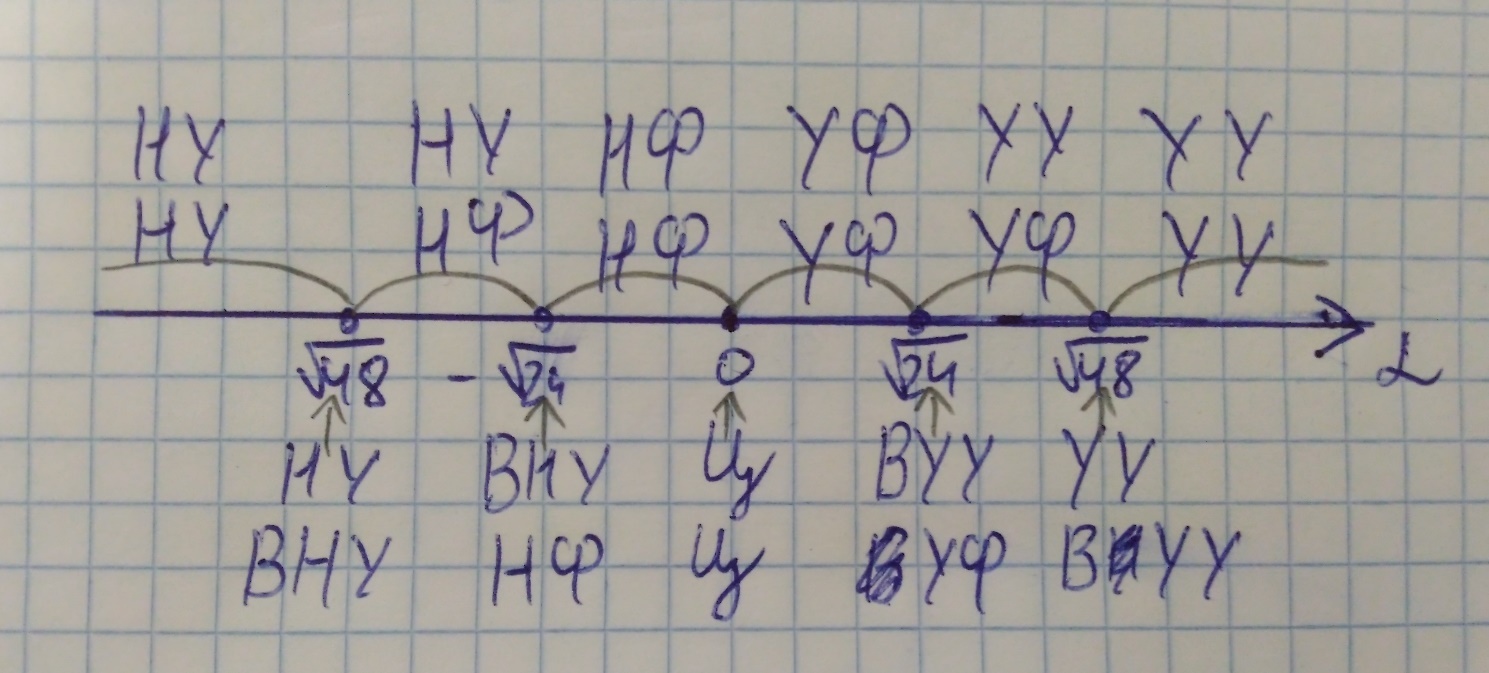
Линеаризованная система: . Тогда общий вид собственных чисел: .

Следовательно, состояние равновесия (-2, 0) – седло для всех , так как всегда вещественные разных знаков. Аналогично (-1, 0) – седло для всех ( ). Сепаратрисы вблизи сёдел: .

Тип состояния равновесия (-1, 0) будет зависеть от . При – вырожденный узел (неустойчивый и устойчивый соответственно знаку), – центр, – неустойчивый узел, – устойчивый узел, – неустойчивый фокус, – устойчивый фокус.

Тип состояния равновесия (2, 0) будет зависеть от аналогично (-1, 0), но с границами при .

На основе этих сведений можно построить бифуркационный портрет системы: (-2, 0) и (1, 0) – седла независимо от , а изменение типа состояний равновесий (-1, 0) и (2, 0) от можно изобразить, как:



Где введены краткие обозначения, например УФ – устойчивый фокус, а ВНУ – вырожденный неустойчивый узел.

Для фазовый портрет и построены выше. Для 6 промежутков фазовые портреты и поведение траекторий приведены в приложении при определённых входящих в эти промежутки. Для граничных точек фазовый портрет качественно не меняется, поэтому опустим их, но можно построить графики дополнительно в приложенной программе.

**Заключение**

Из данной лабораторной работы можно сделать несколько общих выводов для поведения частица при движении по прямой в потенциале и наличии линейной диссипация, описываемой слагаемым ( – нет трения, – положительное трение, – отрицательное трение).

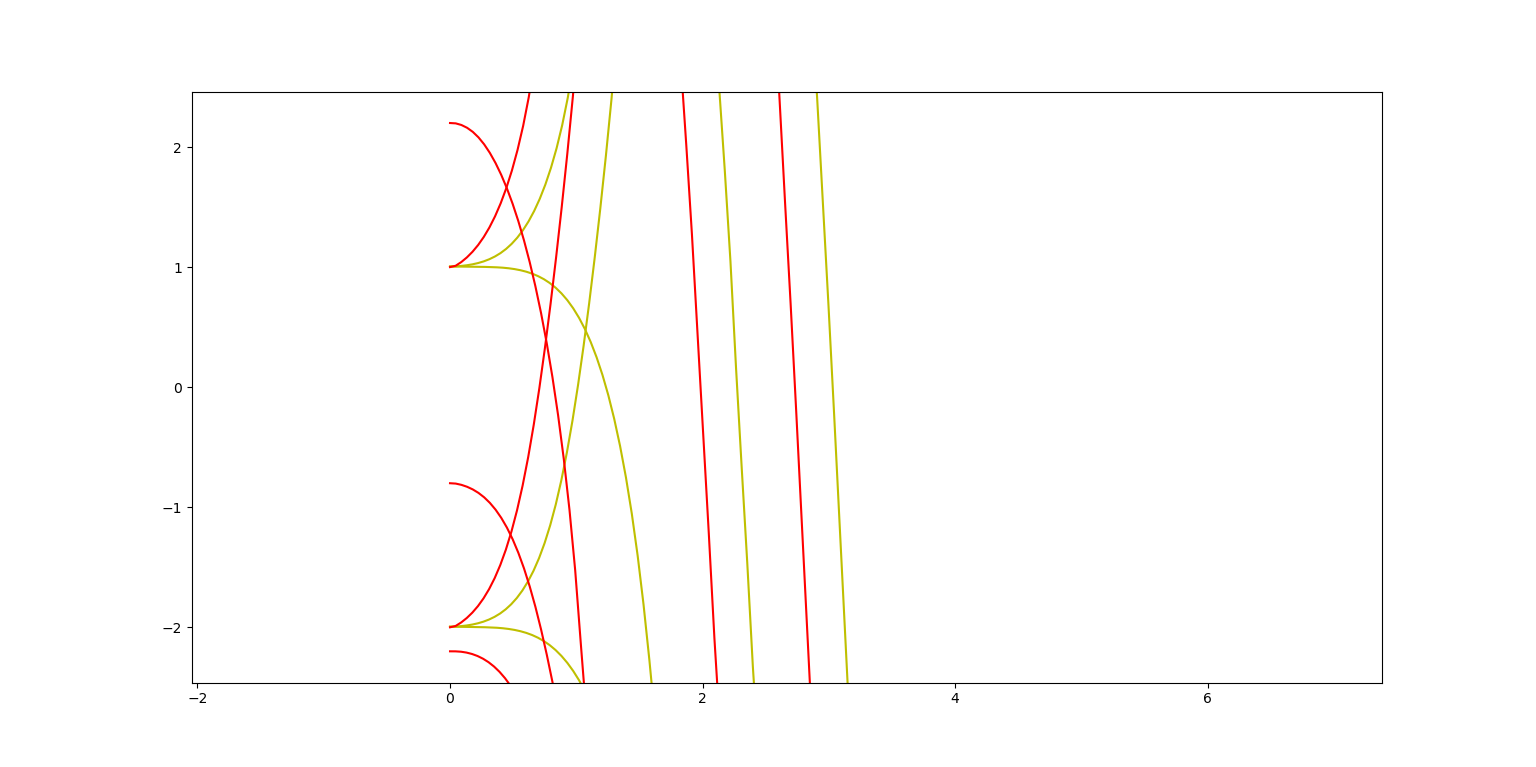
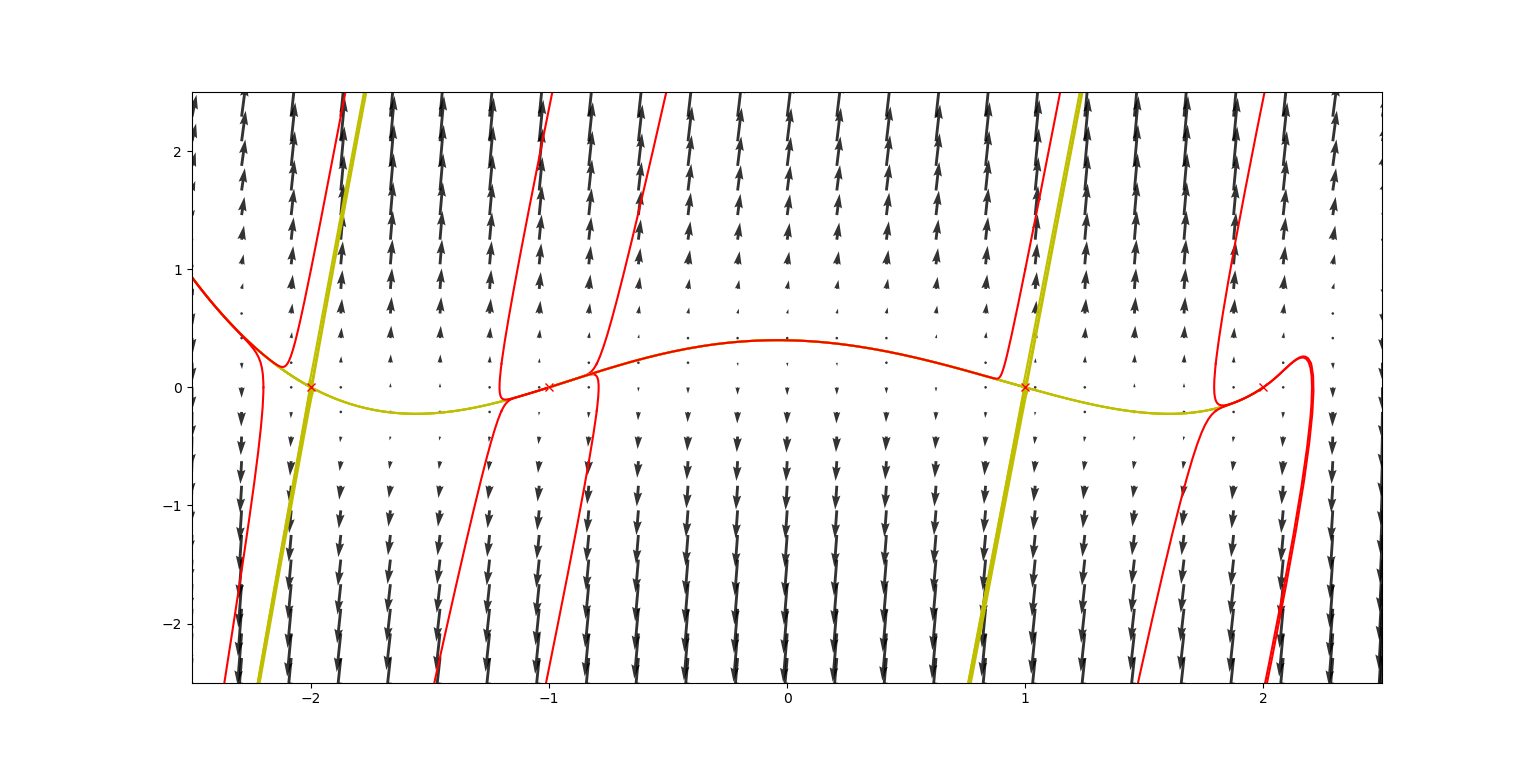
* Для любой подобной консервативной системы возможны только состояния равновесия типа седло и центр.
* При введении диссипации количество и расположение состояний равновесия не меняется.
* При изменении параметра диссипации состояния равновесия типа седло не меняют свой тип, но изменяются их сепаратрисы.
* При введении параметра диссипации состояния равновесия типа центр изменяются соответственно физическому смыслу, то есть при положительном трении () все траектории стремятся к состоянию равновесия, энергия убывает, при отрицательном трении () все траектории стремятся из данных состояний к бесконечности, то есть происходит накачка в систему энергии.

**Приложение**

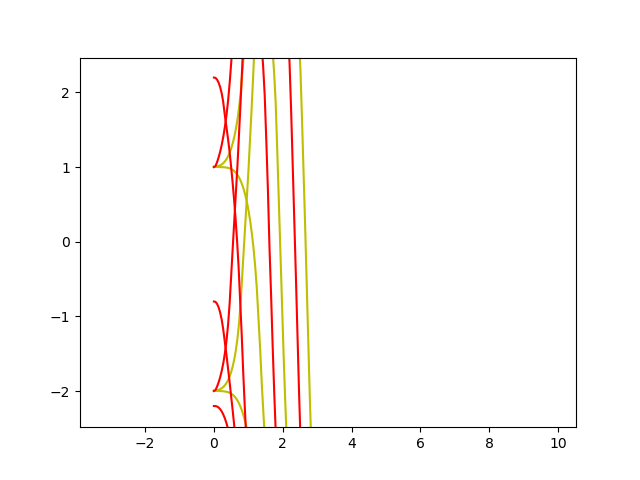
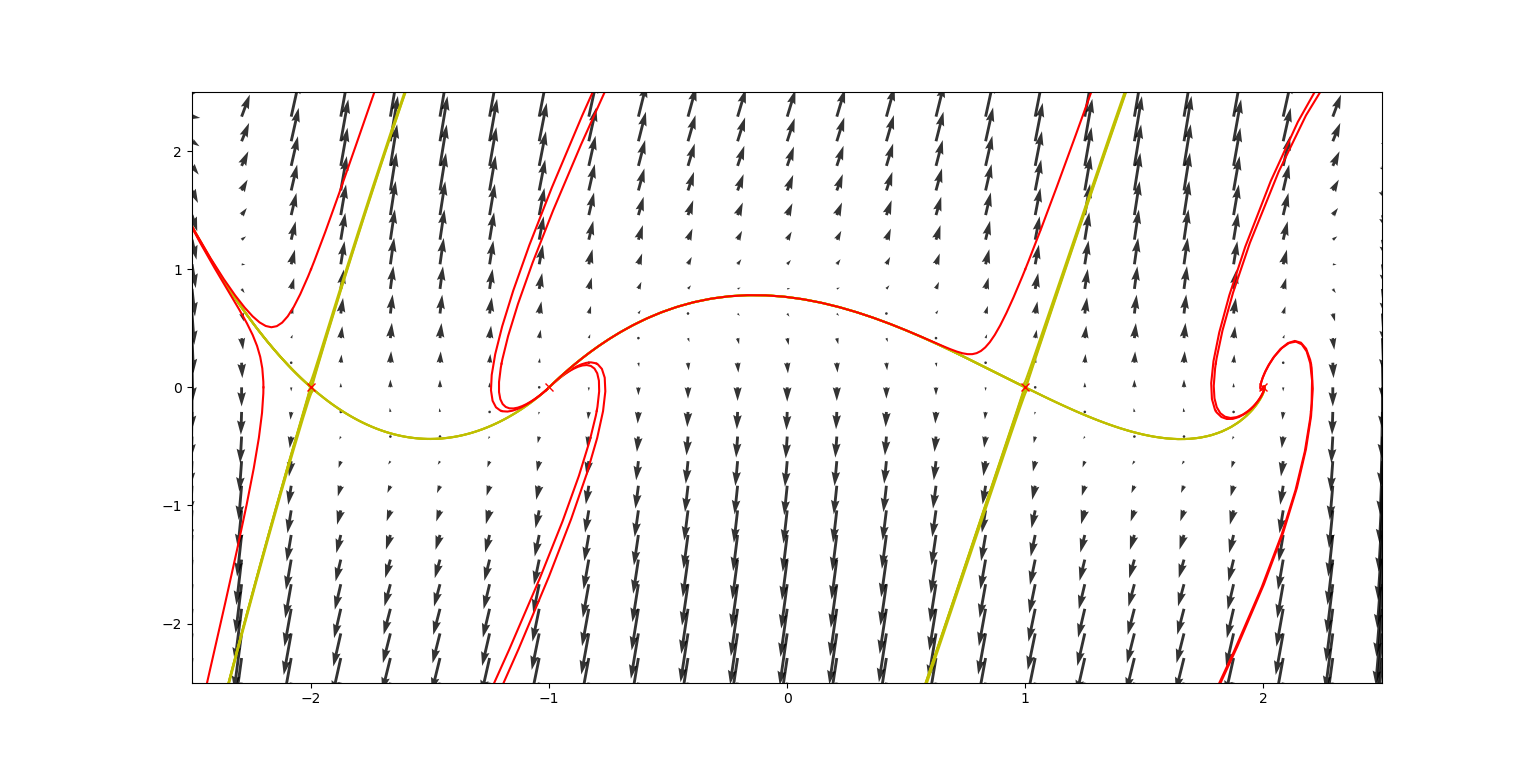
Код программы для построения фазовых можно найти по ссылке <https://github.com/Faert/Modern-natural-science-lab.git> .

Для промежутков 1-3 дополнительные траектории из точек: (-2.2, 0), (-2, 1), (1, 1), для 4-6 дополнительные траектории из точек: (-2.2, 0), (-2, -1), (1, 1).

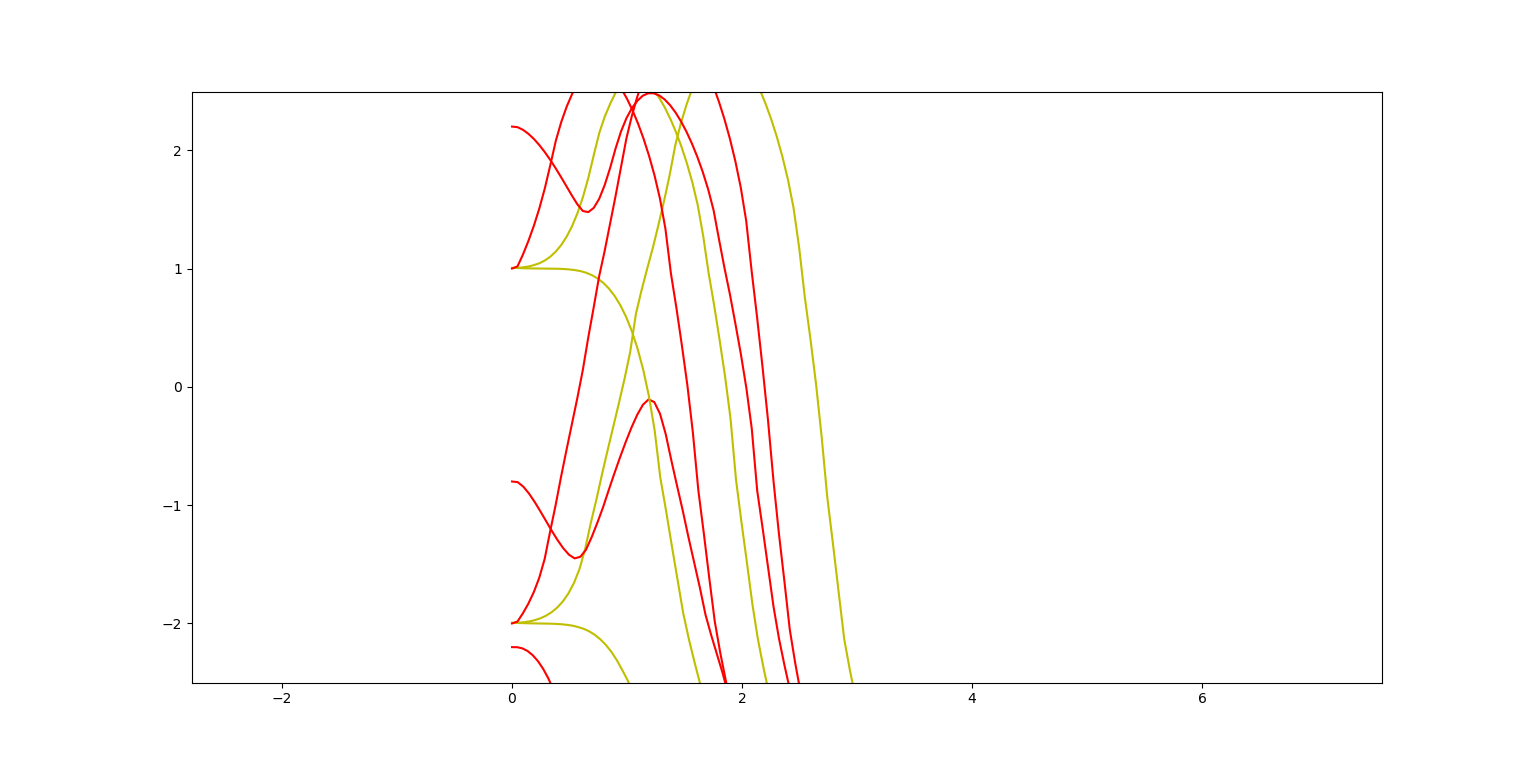
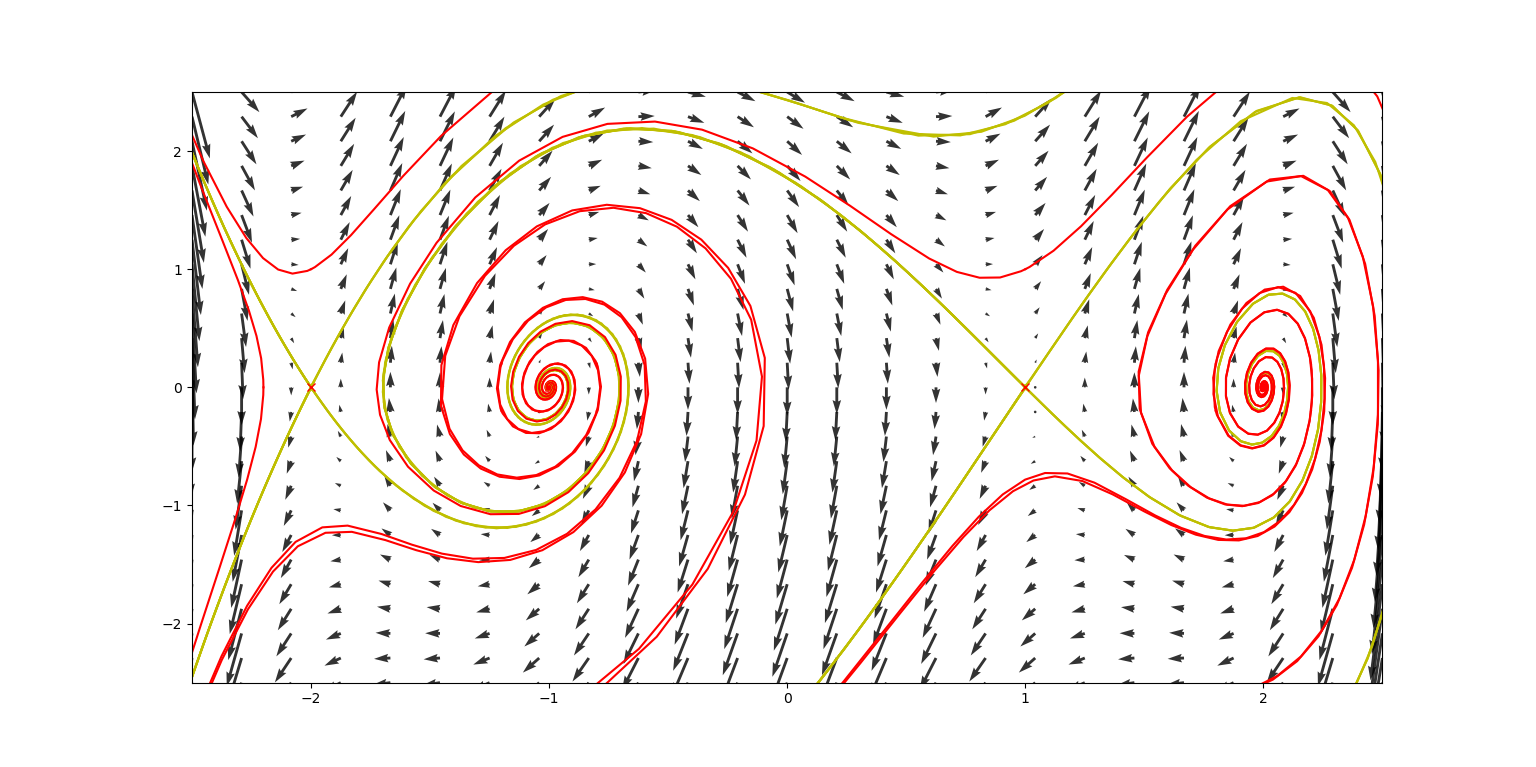
1. Промежуток . Пусть :



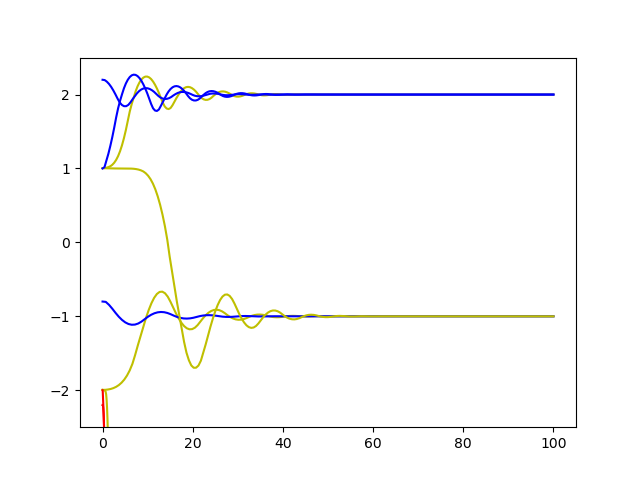
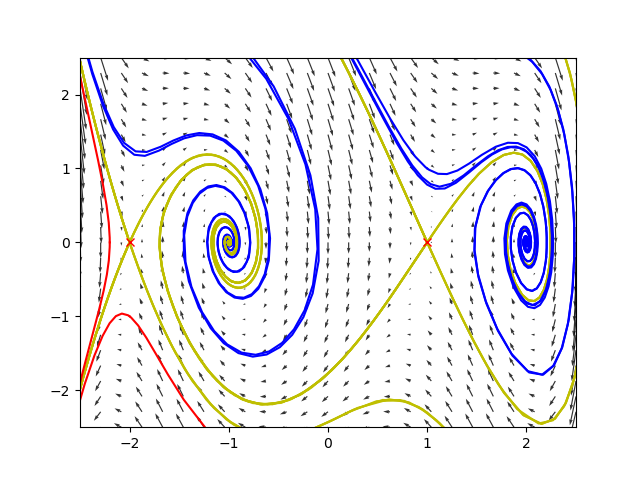
1. Промежуток . Пусть :



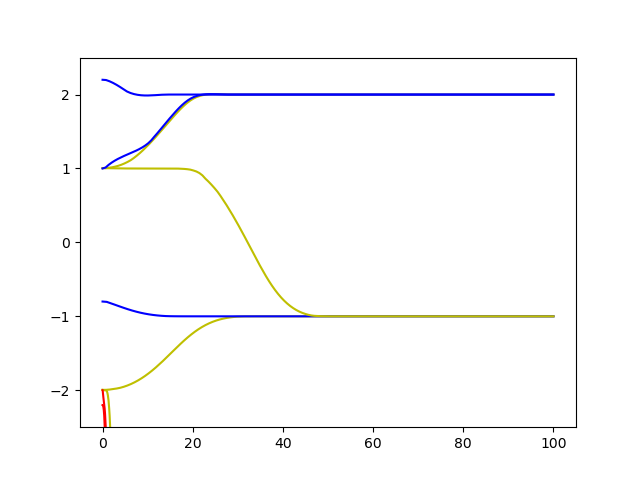
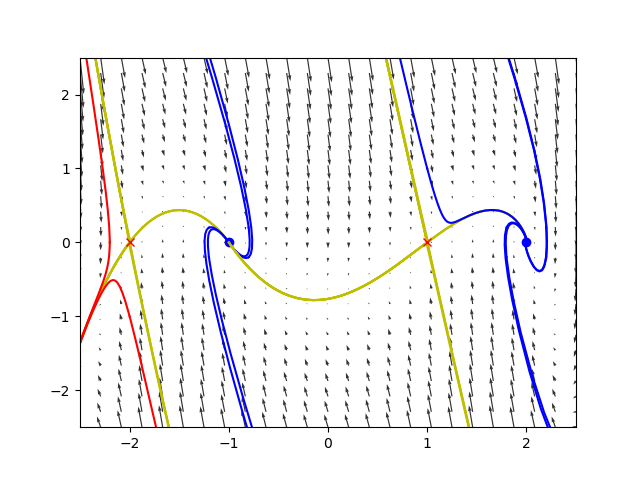
1. Промежуток . Пусть :



1. Промежуток . Пусть :



1. Промежуток . Пусть :



1. Промежуток . Пусть :

