

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования

**«Национальный исследовательский  
Нижегородский государственный университет им. Н.И.  
Лобачевского»  
(ННГУ)**

**Институт информационных технологий, математики и механики**

**Кафедра: высокопроизводительных вычислений и системного  
программирования**

Направление подготовки: «Прикладная математика и информатика»  
Магистерская программа: «Вычислительные методы и  
суперкомпьютерные технологии»

## **ОТЧЕТ**

по третьей лабораторной работе

на тему:

**«Численное интегрирование систем обыкновенных  
дифференциальных уравнений»**

**Выполнил:** студент  
группы 3824М1ПМвм  
Ивлев А.Д.

Нижний Новгород  
2024

## Оглавление

1. Введение и постановка задачи .....	3
2. Численные методы решения ОДУ .....	4
2.1 Метод Эйлера .....	4
2.2 Метод Рунге-Кутты 4-го порядка .....	4
3. Результаты экспериментов .....	6
3.1 Реализация метода Эйлера и метода Рунге-Кутты 4-го порядка .....	6
3.2 Локальная погрешности методов на примерах 1–3 .....	6
3.2 Локальная погрешности методов на примере хаотического аттрактора .....	8
4. Заключение .....	10

## 1. Введение и постановка задачи

В данной работе будет исследоваться численное решение задачи Коши, которое задаётся системой ОДУ 1-го порядка и начальными условиями  $x_0$ :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, x \in \mathbb{R}^n, t \geq t_0 \geq 0 \quad (1)$$

Для этого будут рассмотрены и реализованы метод Эйлера и метод Рунге-Кутты 4-го порядка. Будет проведено сравнение точности и сложности вычислений данных методов.

Проверка работоспособности и сравнение методов будет проводиться на 4 примерах:

1.  $\dot{x} = f(t, x) = -x$

Для данного примера известно аналитическое решение  $x = x_0 e^{-t}$ . И система имеет единственное устойчивое состояние равновесия  $x^* = 0$ .

2.  $\dot{x} = f(t, x) = x$

Для данного примера известно аналитическое решение  $x = x_0 e^t$ . И система имеет единственное неустойчивое состояние равновесия  $x^* = 0$ .

3.  $\ddot{z} + z = 0$

Сначала, с помощью замены  $y = \dot{z}$  приведём ОДУ 2-го порядка к системе ОДУ 1-го порядка разрешенных относительно производной.

$$\begin{cases} \dot{y} = -z \\ \dot{z} = y \end{cases}$$

Тогда  $x = x(y, z) \in \mathbb{R}^2$ , а преобразование  $f(t, x)$  задаётся оператором:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Для данного примера известно аналитическое решение  $x = (\sin(t), \cos(t))x_0$ . Характеристическое уравнение системы:  $\lambda^2 + 1 = 0$ . То есть  $\lambda = \pm i$  – чисто мнимые и состояние равновесия типа центр.

4. Хаотический аттрактор Рёсслера

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + z(x - c) \end{cases}, \text{ где } a = b = 0.2, c = 5.7$$

Для данного примера неизвестно аналитическое решение. Данная система нелинейна, определение состояния равновесия и его устойчивость требуют дополнительных исследований.

В рамках данной работы необходимо:

- Реализовать метод Эйлера и метод Рунге-Кутты 4-го порядка
- Для примеров 1–3 построить зависимость погрешности методов от времени при шагах методов  $h = 0.1, 0.01, 0.001$ .
- Для примера 4 построить траектории в плоскостях  $\{x, y\}$ ,  $\{x, z\}$ . Также построить зависимость погрешности методов для каждой координаты от времени при шагах методов  $h = 0.1, 0.01, 0.001$ .

## 2. Численные методы решения ОДУ

В данной работе будут рассмотрены два итерационных численных метода для приближенного вычисления решения задачи Коши заданной системой ОДУ 1-го порядка, которое можно описать формулами (1): метод Эйлера и метод Рунге-Кутта 4-го порядка (РК4).

Оба метода вычисляют значения на отрезке интегрирования  $[t_0, T]$  с шагом  $h$ , используя только значение предыдущего шага, то есть являются одношаговыми. Погрешность методов можно разделить на два вида локальную и глобальную:

Глобальная погрешность – погрешность на всём отрезке интегрирования:  $E = |x(T) - \tilde{x}(T)|$ , где  $\tilde{x}$  – приближённо вычисленное решение.

Локальная погрешность – погрешность на итерации:  $e_i = |x(t_0 + ih) - \tilde{x}(t_0 + ih)|$ , где  $\tilde{x}$  – приближённо вычисленное решение,  $i$  – номер итерации.

### 2.1 Метод Эйлера

**Условия применимости:**

- Функция  $f(t, x)$  должна быть непрерывной и дифференцируемой до 2 порядка в области определения. Иначе могут не выполняться оценки погрешности.

**Алгоритм**

- **Инициализация:**
  - Задать отрезок интегрирования  $[t_0, T]$ , начальное значение  $x(t_0) = x_0$  и шаг метода  $h > 0$
- **Итерационный процесс:**
  - $x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n)$
  - $t_{n+1} = t_n + h$
- **Критерий остановки:**
  - Достижение конца отрезка интегрирования  $T$

**Плюсы:**

- Низкие вычислительные затраты
- Простота реализации

**Минусы:**

- Низкая точность: локальная погрешность  $O(h^2)$ , глобальная  $O(h)$

### 2.2 Метод Рунге-Кутта 4-го порядка

### Условия применимости:

- Функция  $f(t, x)$  должна быть непрерывной и дифференцируемой до 5 порядка в области определения. Иначе могут не выполняться оценки погрешности.

### Алгоритм

- **Инициализация:**
  - Задать отрезок интегрирования  $[t_0, T]$ , начальное значение  $x(t_0) = x_0$  и шаг метода  $h > 0$
- **Итерационный процесс:**
  - Вычислить коэффициенты:
    - $k_1 = f(t_n, x_n)$
    - $k_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}k_1)$
    - $k_3 = f(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}k_2)$
    - $k_4 = f(t_n + h, x_n + hk_3)$
  - $x_{n+1} = x_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$
  - $t_{n+1} = t_n + h$
- **Критерий остановки:**
  - Достижение конца отрезка интегрирования  $T$

### Плюсы:

- Высокая точность: локальная погрешность  $O(h^5)$ , глобальная  $O(h^4)$

### Минусы:

- Большие вычислительные затраты (4 вычисления  $f(t, x)$  на шаг)

### 3. Результаты экспериментов

Программная реализация выполнялась на языке python. Полный код доступен по ссылке: [https://github.com/Faert/NLD\\_Lab](https://github.com/Faert/NLD_Lab).

Далее точность решения будет оцениваться по локальной погрешности методов. Но поскольку для примера 4 не известно точное решение, то будет подсчитана верхняя оценка погрешности в виде  $e_i = |\tilde{x}_i - \bar{x}_{2i}|$ , где  $\tilde{x}_i$  – приближенное решение на  $i$ -ом шаге вычисленное с шагом  $h$ , а  $\bar{x}_{2i}$  – приближенное решение в той же точке вычисленное с шагом  $\frac{h}{2}$ .

#### 3.1 Реализация метода Эйлера и метода Рунге-Кутты 4-го порядка

**Метод Эйлера:**

```
0 | def Euler(func, x0, t0, T, h, history, func_error = None):
1 |     xs = x0
2 |     while t0 < T:
3 |         x1=x0+h*func(x0)
4 |         t0+=h
5 |         if(func_error!=None):
6 |             history.append([t0, x1, func_error(t0, xs, x1)])
7 |         else:
8 |             history.append([t0, x1])
9 |         x0 = x1
10 |     return x0
```

**Метод Рунге-Кутты 4-го порядка:**

```
0 | def RK4(func, x0, t0, T, h, history, func_error = None):
1 |     xs = x0
2 |     while t0 < T:
3 |         k1=func(x0)
4 |         k2=func(x0+h/2*k1)
5 |         k3=func(x0+h/2*k2)
6 |         k4=func(x0+h*k3)
7 |         x1=x0+h/6*(k1+2*k2+2*k3+k4)
8 |         t0+=h
9 |         if(func_error!=None):
10 |             history.append([t0, x1, func_error(t0, xs, x1)])
11 |         else:
12 |             history.append([t0, x1])
13 |         x0 = x1
14 |     return x0
```

Где func – функция  $f(t, x)$ ,  $x_0$  – значение  $x = x(t_0)$ ,  $t_0$  и  $T$  границы отрезка интегрирования,  $h$  – шаг итерационного метода, history – ссылка на список, где храниться история вычислений, func\_error – функция подсчета локальной погрешности.

#### 3.2 Локальная погрешности методов на примерах 1–3

Так как для данных примеров нам известно точное решение, то мы можем вычислить локальную погрешность:  $e_i = |x(t_0 + ih) - \tilde{x}(t_0 + ih)|$ , где  $\tilde{x}$  – приближённо вычисленное решение,  $i$  – номер итерации. На графиках же будет изображён десятичный логарифм данной погрешности для более детального исследования.

Для первого примера (Рисунок 1) наблюдается ожидаемое поведение состояние системы стримится к асимптотически устойчивому состоянию  $x = 0$ . И локальная погрешность стримиться к 0. Для метода РК4 при  $h = 0.001$  наблюдаются небольшие пики падения погрешности, возможно это связано с тем, что  $h^4 = 10^{-12}$ , что близко к машинной точности вычислений. Также наблюдается ожидаемое поведение погрешности: при уменьшении шага в 10 раз локальная погрешность метода Эйлера

уменьшается примерно на порядок, а погрешность метода Рунге-Кутты на 4, что соответствует оценкам.

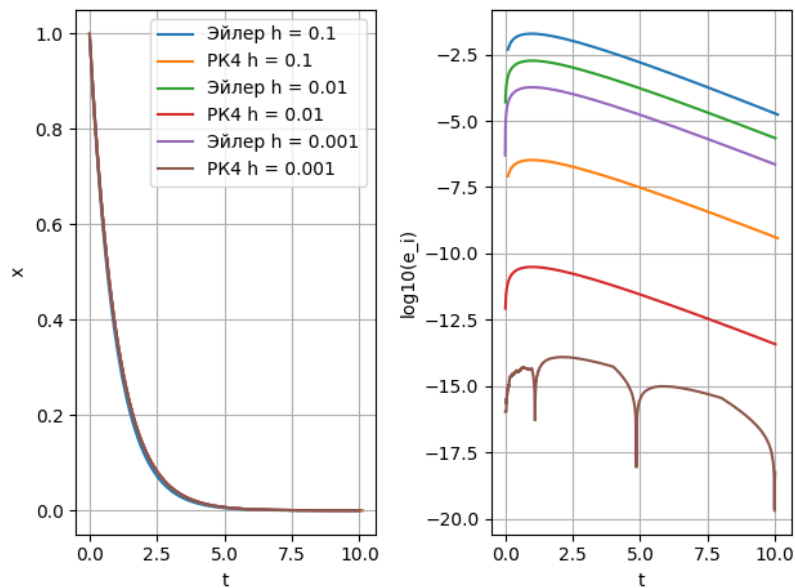


Рисунок 1. Приближенное решение  $\tilde{x}$  и локальная погрешность  $e^*$  от параметра  $t \in [0, 10]$  для первого примера  $\dot{x} = -x$  при  $x_0 = 1$ .

Для второго примера (Рисунок 2) также наблюдается ожидаемое поведение состояние системы уходит от неустойчивого состояния  $x = 0$ . И погрешность увеличивается со временем.

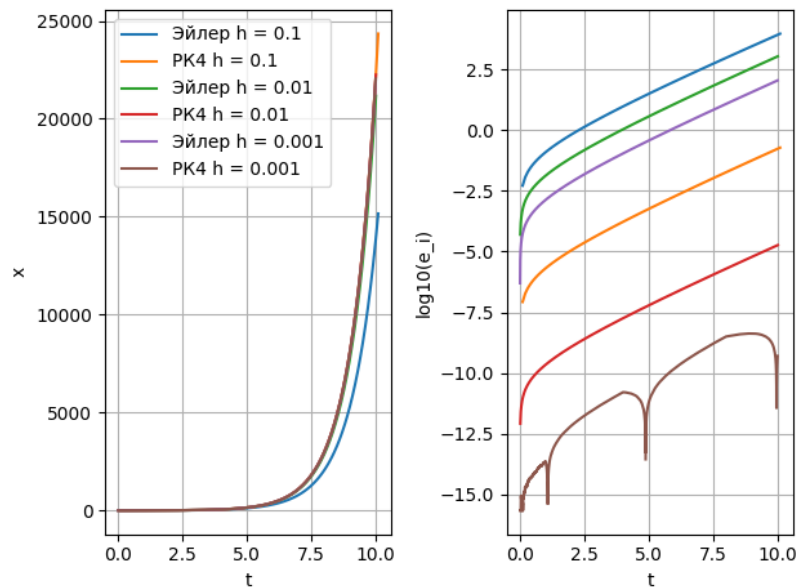


Рисунок 2. Приближенное решение  $\tilde{x}$  и локальная погрешность  $e^*$  от параметра  $t \in [0, 10]$  для второго примера  $\dot{x} = x$  при  $x_0 = 1$ .

Для третьего примера (Рисунок 3) ожидаемое поведение цикл с центром в 0. Что подтверждается графиками, но из-за растущей погрешностей состояние со временем удаляется от истинной траектории. Так же выявлена периодичность с частотой  $2\pi$  в поведении локальной погрешности, что на графике отображено фиолетовыми линиями.

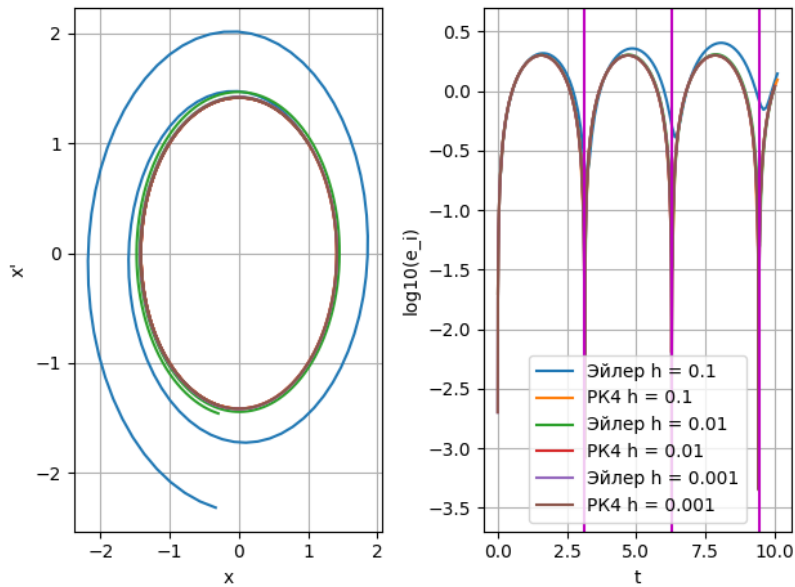


Рисунок 3. Приближенное решение  $\tilde{x}$  в плоскости  $\{x, \dot{x}\}$  и локальная погрешность  $e^*$  от параметра  $t \in [0, 10]$  для третьего примера  $\ddot{x} + x = 0$  при  $x_0 = (1, 1)$

Поведение графиков соответствует теоретическим выкладкам. Метод Рунге-Кутты 4-го порядка показывает лучшую точность, чем метод Эйлера при больших затратах на вычисления.

### 3.2 Локальная погрешности методов на примере хаотического аттрактора

Сначала рассмотрим, как изменяется состояние системы с течением времени. Для более точных вычислений был выбран метод Рунге-Кутты с шагом  $h = 0.001$ .

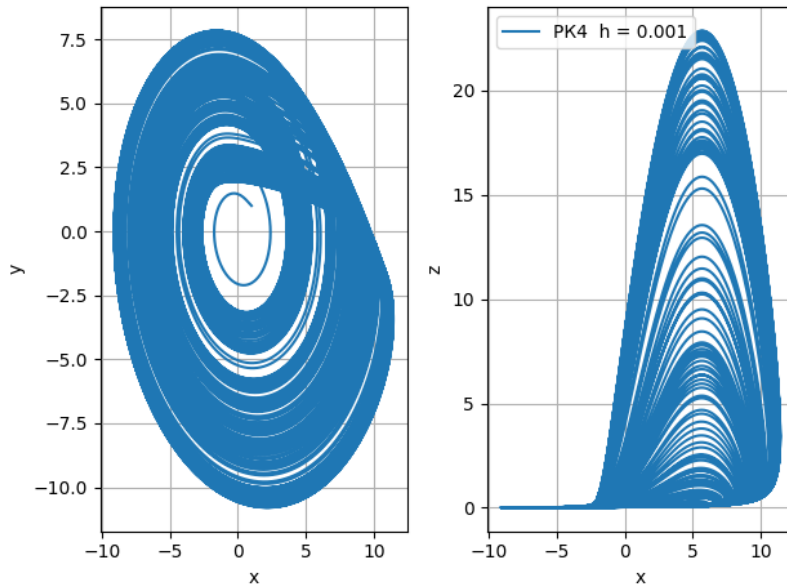


Рисунок 4. Поведения решение  $\tilde{x}$  системы хаотического аттрактора Рёсслера в плоскости  $\{x, y\}$ ,  $\{x, z\}$  при  $x_0 = (1, 1, 1)$  на отрезке  $t \in [0, 1000]$

Можно заметить, что состояние в плоскости  $\{x, y\}$  выходит на некоторую кривую, описанную вокруг начала координат. А из графика плоскости  $\{x, y\}$  можно заметить, что



со временем  $z$  стремиться колеблется в диапазоне от 0 до 25 причём пик находится в  $x = 5.7$  – значению параметра  $c$ .

Теперь рассмотрим поведение оценок локальной погрешности для каждой координаты.

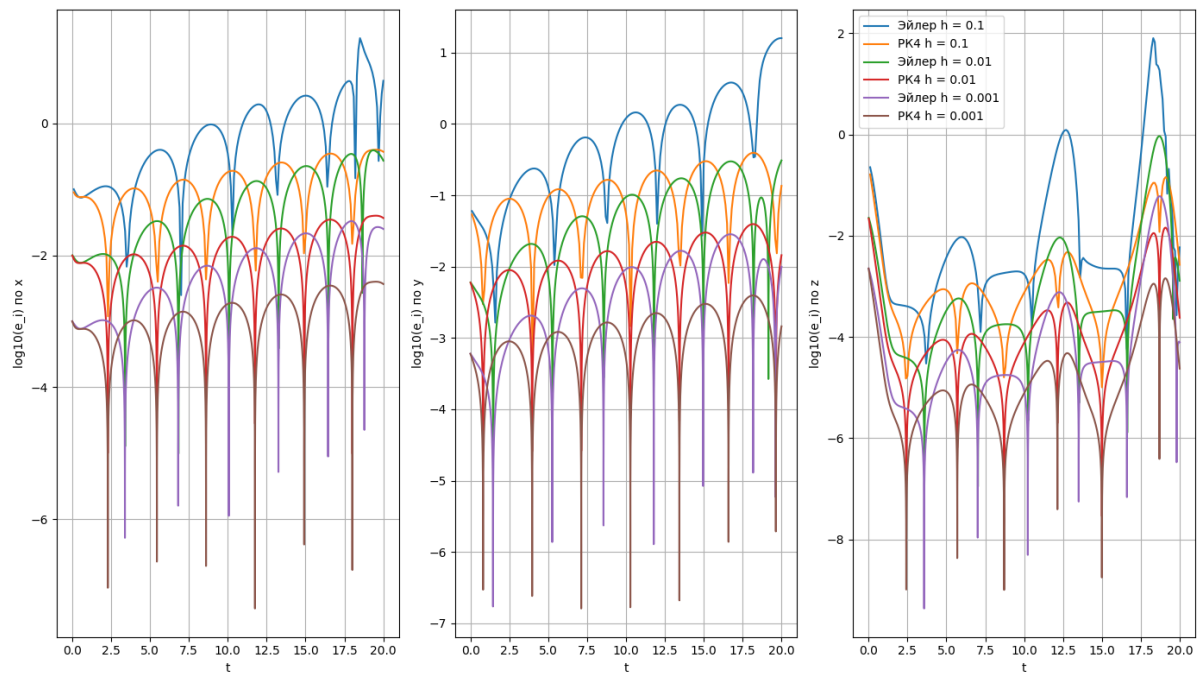


Рисунок 5. Оценки локальной погрешности для координат системы хаотического аттрактора Рёсслера при  $x_0 = (1, 1, 1)$  на отрезке  $t \in [0, 20]$

Из рисунка 5 можно заметить, что оценка локальной погрешности возрастает для всех координат. Также можно заметить некоторую периодичность в её поведении, но период различен для всех методов и выборов их шага.

## 4. Заключение

В данной работе были рассмотрены и реализованы два итерационных численных метода для приближенного вычисления решения задачи Коши (1): метод Эйлера и метод Рунге-Кутты 4-го порядка.

С их помощью были исследованы 4 различные системы. Теоретический анализ которых был подтверждён результатами экспериментов. Также было показано, что метод Рунге-Кутты 4-го порядка имеет большую точность, взамен на большую трудоёмкость.