МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского» (ННГУ)

Институт информационных технологий, математики и механики

Кафедра: высокопроизводительных вычислений и системного программирования

Направление подготовки: «Прикладная математика и информатика»
Магистерская программа: «Вычислительные методы и суперкомпьютерные технологии»

ОТЧЕТ

по пятой лабораторной работе

на тему:
«Динамический хаос на примере логистического отображения»

Выполнил: студент
группы 3824М1ПМвм
Ивлев А.Д.

Нижний Новгород
2025

Оглавление

1. Введение и постановка задачи

Важность отображения с дискретным временем обусловлена уникальными свойствами, практической применимостью и способностью моделировать сложное поведение простыми методами, например с помощью перехода от непрерывных систем к дискретным с помощью секущих Пуанкаре. Также они являются простейшими системами, где возникает динамический хаос.

Под отображением с дискретным временем подразумевают однозначные отображения $x_{n+1} = f(x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}^N$. Неподвижной точкой отображения называют состояние x^*, такое что $x^* = f(x^*)$. Устойчивость неподвижной точки в одномерном случае определяют с помощью значения модуля мультипликатора $\mu = f'(x^*)$. Так при $|\mu| < 1$ неподвижная точка устойчива, при $|\mu| > 1$ неустойчива, а при $|\mu| = 1$ требуются дополнительные исследования.

Неподвижной точкой отображения порядка p называют состояние x^*, такое что $x^* = F(x^*, p)$, где $F(x^*, p)$ – задаёт последовательное применение функции $f(x)$ p раз. Устойчивость неподвижной точки порядка p определяется аналогично по значению $\left|F'^{(x^*,p)}\right| = |\prod_{k=1}^{p} f'(x^*)|$.

Для апериодических траекторий для оценки устойчивости используется показатель Ляпунова: $\lambda = \ln(<\mu>) = \lim\limits_{M \to +\infty}(\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} \ln(|f'(x_m)|))$. Если $\lambda < 0$, то траектории в среднем сходятся, при $\lambda > 0$ в среднем расходятся, а при $\lambda = 0$, требуются дополнительные исследования, но обычно при $\lambda = 0$ происходят бифуркационные переходы.

Динамический хаос — фундаментальное явление, при котором системы демонстрируют непредсказуемое, непериодическое поведение с чувствительностью к начальным условиям. Для дискретных отображений его можно характеризовать асимптотической неустойчивостью ($\lambda > 0$), наличием аттрактора, наличием бесконечных множеств апериодический и квазислучайных траекторий.

Простейшим примером системы с динамическим хаосом является логистическое отображение:

$$x_{n+1} = f(x_n, r) = rx_n(1 - x_n), x_i \in [0, 1] \qquad (1)$$

Оно имеет только один параметр r. Предлагается исследовать поведение данной системы в зависимость от данного параметра. Для этого необходимо:

- Построить диаграмму неподвижных точек x^* в зависимости от параметра r
- Построить график показателя Ляпунова λ в зависимости от параметра r
- На основе полученных данных оценить изменения в поведении системы с ростом параметра r

2. Методика проведения и результаты экспериментов

Программная реализация выполнялась на языке python. Полный код доступен по ссылке: https://github.com/Faert/NLD_Lab.

Для построения диаграммы зависимости состояний равновесия x^* в зависимости от параметра r используется функция states, которая просчитывает N итераций отображения, которое задаётся функцией func и строит диаграмму на основе последних M элементах последовательности. Исследование по параметру r происходит в отрезке [start, end] с шагом step.

```python
def states(func, start, end, step, N, M):
    for r in np.arange(start, end, step):
        y=[x0]
        for i in range(N):
            y.append(func(y[i], r))
        n = len(y)
        m = min(len(y), M)
        y=y[n-m:n]
        x=[r ]*m
        plt.plot(x, y, color='black', linestyle=' ', marker='.', markersize =0.75)
    plt.grid(True)
    plt.xlabel('Параметр r')
    plt.ylabel('x*')
    plt.show()
```

Для построения графика показателя Ляпунова λ в зависимости от параметра r используется функция la_, которая ввиду невозможности точного подсчёта предела уточняет результат пока изменение показателя Ляпунова $|\Delta\lambda| > 10^{-6}$ или количество итераций не превышает N. Расчет происходит на основе производной исходной функции df, а исследование по параметру r происходит в отрезке [start, end] с шагом step.

```python
def la_(df, start, end, step, N):
    ll = []
    rl = []
    for r in np.arange(start, end, step):
        la = 0
        dla = 1
        x = x0
        k = 1
        while(abs(dla) > 1e-6 and k < N):
            dla = np.log(abs(df(x, r)))
            x = f(x, r)
            if(x > 1 or x < 0):
                break
            k+=1
            la+=dla
        rl.append(r)
        ll.append(la/k)
        if(abs(ll[-1]) < 1e-2):
            print(r)
    plt.plot(rl, ll)
    plt.xlabel('Параметр r')
    plt.ylabel('Показатель Ляпунова λ')
    plt.grid(True)
    plt.show()
```

Для всех последующих экспериментов зафиксируем параметры $N = 8192$, $M = 64$, $step = 10^{-3}$ и начальную точку $x_0 = 0.77$. Также в ходе экспериментов было замечено, что при $r > 4$ для любых начальных условий последовательность становится неограниченной, осциллируя с возрастающей амплитудой, поэтому будут рассмотрены только $r \in [0, 4]$.

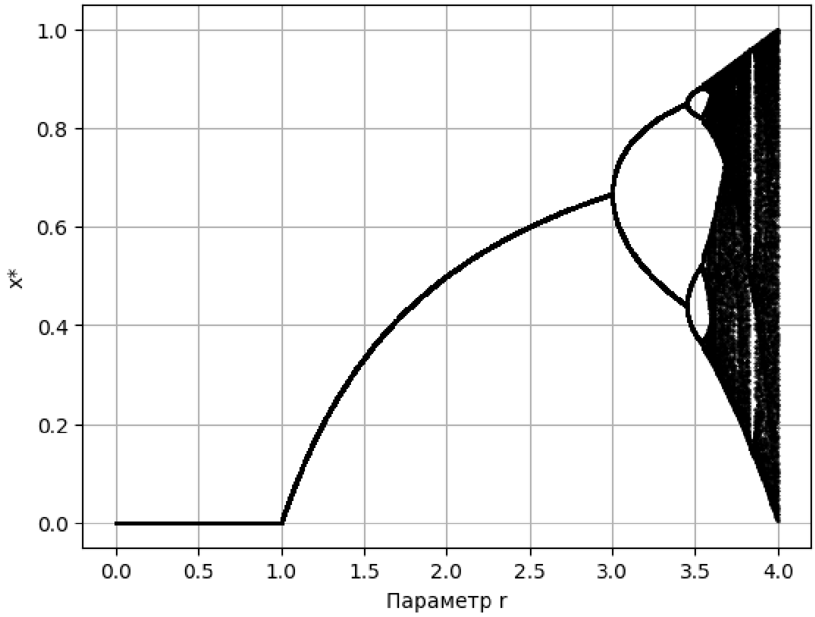

Рисунок 1. Диаграмма зависимости состояний равновесия x^* в зависимости от параметра $r \in [0, 4]$

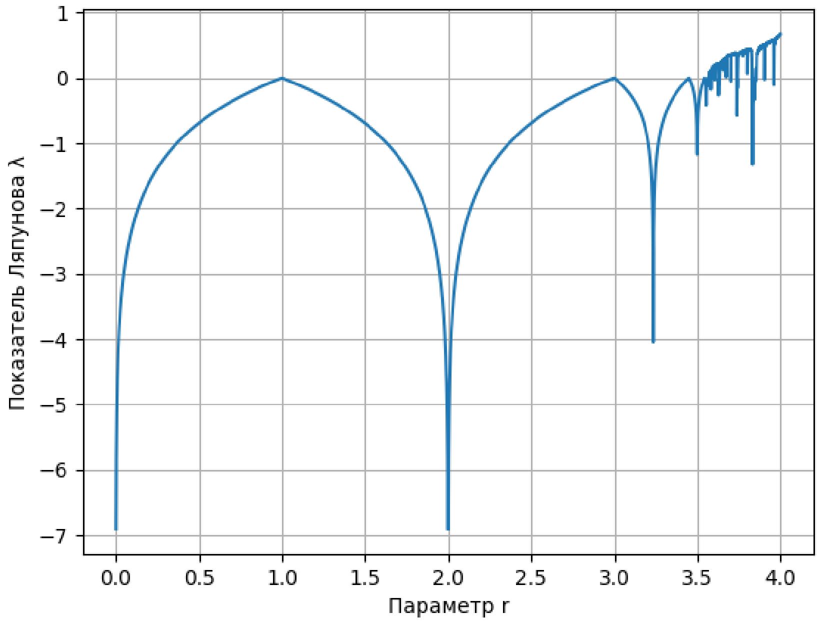

Рисунок 2. График показателя Ляпунова λ в зависимости от параметра $r \in [0, 4]$

На основе данных графиков можно явно выделить три участка:

- $r \in [0, 1)$: Единственная устойчивая неподвижная точка $x^* = 0$.
- $r \in [1, 3)$: При $r = 1$, происходит бифуркация, что также видно по показателю Ляпунова $\lambda = 0$. Неподвижная точка $x^* = 0$ становится

неустойчивой, но появляется новая устойчивая неподвижная точка $x^* = 1 - \frac{1}{r}$.

- $r \in [3, 3.45)$: При $r = 3$, происходит бифуркация удвоения, что также видно по показателю Ляпунова $\lambda = 0$. Неподвижная точка $x^* = 1 - \frac{1}{r}$ теряет устойчивость. Возникает устойчивый цикл периода 2.

Для дальнейшего исследования отмасштабируем графики на $r \in [3.4, 4]$.

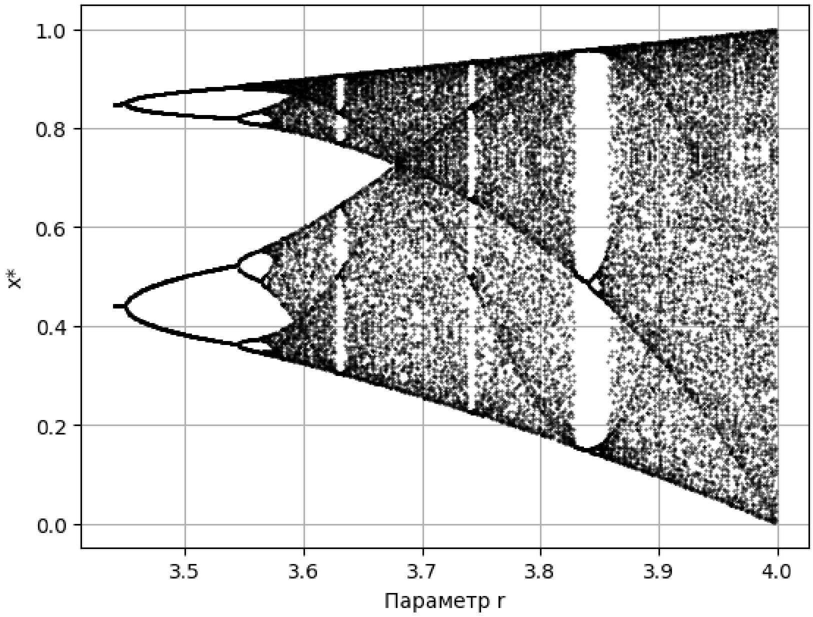

Рисунок 3. Диаграмма зависимости состояний равновесия x^* в зависимости от параметра $r \in [3.44, 4]$

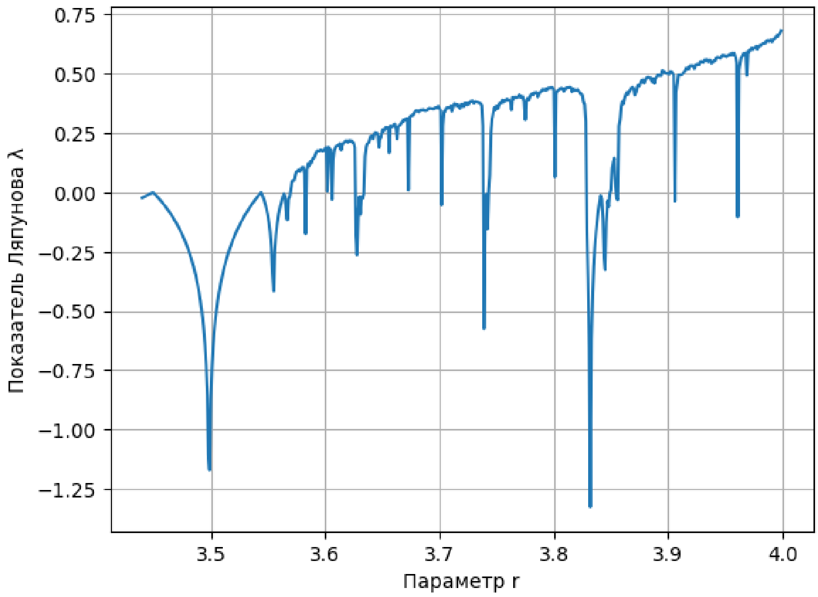

Рисунок 4. График показателя Ляпунова λ в зависимости от параметра $r \in [3.44, 4]$

- При $r \approx 3.45$ Происходит вторая бифуркация удвоения периода. Цикл периода 2 теряет устойчивость. Возникает устойчивый цикл периода 4.
- При $r \approx 3.54$ Происходит третья бифуркация удвоения периода и возникает цикл периода 8.

- Далее происходит серия удвоений периода. При дальнейшем увеличении r последовательно возникают циклы периода 16, 32, 64 и так далее. Интервалы значений r, где существуют устойчивые циклы определенного периода, становятся все меньше, а точки бифуркации стремятся к предельному $r_\infty \approx 3.56$.
- После $r_\infty \approx 3.56$ наступает динамический хаос с аттрактором $[0, 1]$, что видно из графика показателя Ляпунова, так как его значение становится больше нуля.

Для дальнейшего исследования отмасштабируем графики на $r \in [3.56, 4]$ и возьмём шаг равный 10^{-5}.

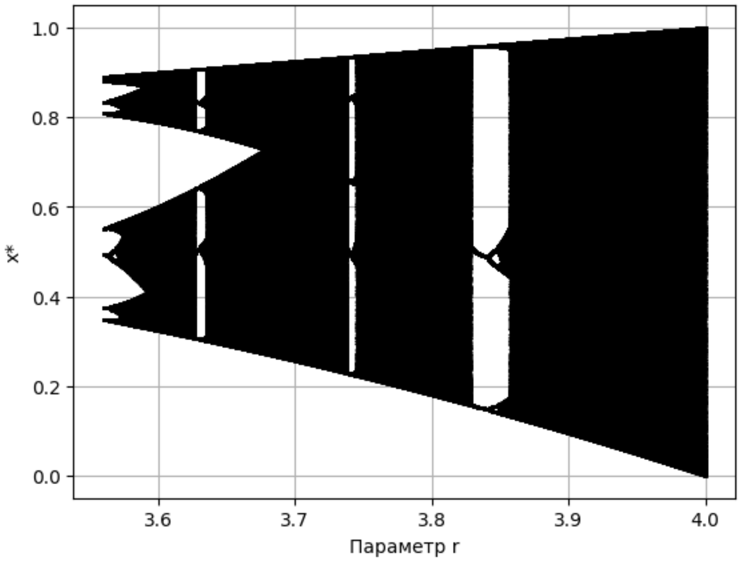

Рисунок 5. Диаграмма зависимости состояний равновесия x^* в зависимости от параметра $r \in [3.56, 4]$

На основе данной диаграммы видно, что среди хаоса есть окна периодичности. Попробуем найти окна с периодами 3 и 5 для этого ещё уменьшим масштаб.

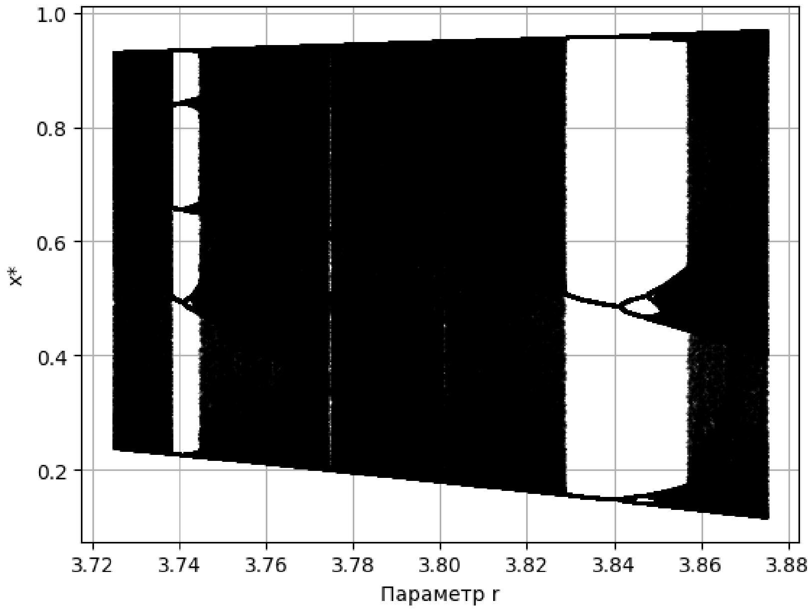

Рисунок 6. Диаграмма зависимости состояний равновесия x^* в зависимости от параметра $r \in [3.725, 3.875]$

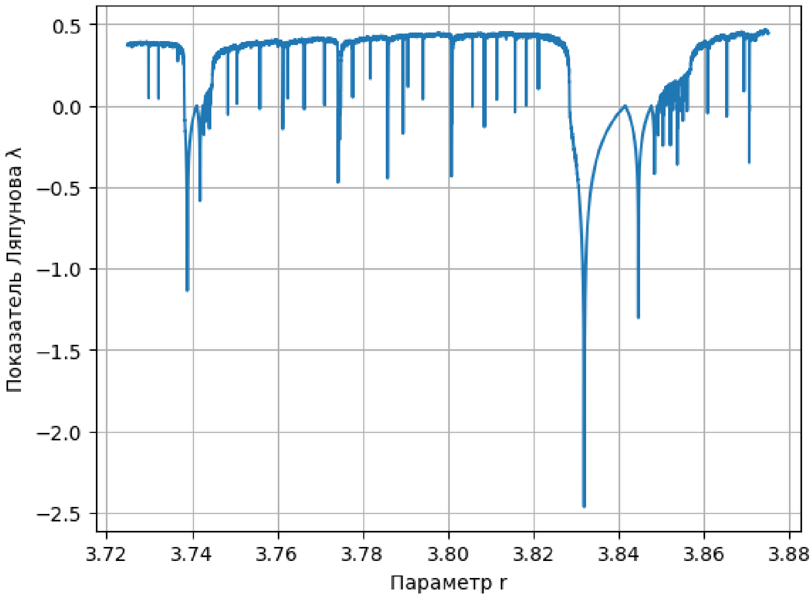

Рисунок 7. График показателя Ляпунова λ в зависимости от параметра $r \in [3.725, 3.875]$

Исходя из графиков окно с периодом 5 начинается при $r \approx 3.74$, а окно с периодом 3 при $r \approx 3.83$, что также подтверждается равенством показателя Ляпунова нулю при данных значениях. Также можно заметить, что на графиках присутствуют интервалы с другими периодами.

3. Заключение

В рамках данной работы были построены диаграммы зависимости состояний равновесия x^* и показателя Ляпунова λ в зависимости от параметра r. На основе полученных данных были сделаны выводы о изменении в поведении системы в зависимости от параметра r. Интервалом с наиболее интересным поведением является $r \in [3.56, 4]$, где наблюдается динамический хаос с окнами периодичности.