МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
**«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»
(ННГУ)**

Институт информационных технологий, математики и механики

Кафедра: высокопроизводительных вычислений и системного программирования

Направление подготовки: «Прикладная математика и информатика»
Магистерская программа: «Вычислительные методы и суперкомпьютерные технологии»

ОТЧЕТ

по второй лабораторной работе

на тему:
«Численное исследование авторепрессора с задержкой»

Выполнил: студент
группы 3824М1ПМвм
Ивлев А.Д.

Нижний Новгород
2024

Оглавление

1. Введение

В данной работе будет исследоваться модель авторепрессора с задержкой, которая задаётся нелинейным ДУ 1-го порядка:

$$\dot{x} = f(x(t), x(t-\tau)) = \frac{\alpha}{1+x^n(t-\tau)} - x \qquad (1)$$

Где $x = x(t)$ – концентрация белка, t - время, τ – задержка обратной связи в синтезе белка, n – степень олигомера, α – коэффициент скорости синтеза белка.

Следовательно, из постановки задачи получим ограничения на модель авторепрессора: $x \geq 0$, $\alpha \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$, $\tau \geq 0$. При этом данная система является бесконечномерной, так как начальные условия необходимые для постановки и решения задачи Коши задаются всеми значениями x в промежутке $[0, \tau]$.

Из определения состояния равновесия x^* можно сделать вывод, что если оно существует, то, находясь в нём, с некоторого момента t^* будет верно равенство $x(t^*) = x(t^* - \tau) = x^*$. Следовательно, состояние равновесия модели авторепрессора с задержкой совпадает с моделью без задержки. Оно существует и единственно, а найти его можно найти из решения уравнения:

$$g(x) = x^{n+1} + x - \alpha = 0 \qquad (2)$$

Но при этом добавление задержки влияет на устойчивость и вид состояния равновесия. Дальнейшая работа направлена на определения типа устойчивости данной модели.

2. Постановка задачи

Как было сказано выше для модели авторепрессора с задержкой состояние равновесия x^* будет единственным. И оно может быть найдено числено как решения уравнения (2).

Для определения типа устойчивости линеаризуем систему (1) вблизи состояния равновесия с помощью замены: $x(t) = x^* + \xi(t)$, при $\left|\frac{\xi(t)}{x^*}\right| \ll 1$. Тогда $\dot{\xi}(t) = \dot{x}(t) = f\big(x^* + \xi(t), x^* + \xi(t-\tau)\big) \approx f(x^*, x^*) + \frac{\partial f}{\partial x}\xi(t) + \frac{\partial f}{\partial x_\tau}\xi(t-\tau)$. По определению $f(x^*, x^*) = 0$ и пусть обозначим $a = \frac{\partial f}{\partial x} = -1$, $b = \frac{\partial f}{\partial x_\tau} = -\frac{\alpha n x^{n-1}(t-\tau)}{\left(1+x^n(t-\tau)\right)^2}$. В состоянии равновесия можно преобразовать коэффициент b, используя соотношение $g(x^*) = 0$: $b = -\frac{\alpha n x^{n-1}(t-\tau)}{\left(1+x^n(t-\tau)\right)^2} = -\alpha n (x^*)^{n-1}\frac{(x^*)^2}{\alpha^2} = -\frac{n(x^*)^{n+1}}{\alpha}$.

После преобразований исследуемое уравнение примет вид:

$$\dot{\xi}(t) \approx a\xi(t) + b\xi(t-\tau) \qquad (3)$$

Тогда будем искать решение в виде $\xi(t) = e^{\lambda t}$. Тогда после подстановки получим характеристическое уравнение $\lambda = a + be^{-\lambda\tau} \epsilon\, \mathbb{C}$. Существует бесконечное количество решений, поэтому исследуем зависимость изменения устойчивости от параметров системы. Необходимым условием бифуркации является условие $Re\lambda = 0$, то есть λ чисто мнимые. Тогда пусть $\lambda = \pm iw = a + be^{\mp iw\tau} = a + b\cos(w\tau) \mp b\sin(w\tau)$. Сравнивая действительную и мнимую часть уравнения, получим систему:

$$\begin{cases} -\dfrac{a}{b} = \cos(w\tau) \\ -\dfrac{w}{b} = \sin(w\tau) \end{cases}$$

Её можно переписать в виде:

$$\begin{cases} -\dfrac{a}{b} = \cos(w\tau) \\ w^2 = b^2 - a^2 \end{cases}$$

Путём возведения в квадрат первого выражения и подстановки второго можно вывести соотношение: $\frac{a^2}{a^2 - w^2} = \cos^2(w\tau)$, после подстановки a можно получить взаимосвязь w и τ: $\frac{1}{1-w^2} = \cos^2(w\tau)$.

Также, после подстановки a и b в первое уравнение можно выразить зависимость τ от параметров: $\cos(w\tau) = \frac{1}{\left(-\frac{n(x^*)^{n+1}}{\alpha}\right)}$. Если явно выразить τ, подставив w, получим выражение:

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{n(x^*)^{n+1}}{\alpha}\right)^2 - 1}}\left(\arccos\left(\frac{-\alpha}{n(x^*)^{n+1}}\right) + 2\pi p\right), p\epsilon\mathbb{Z} \qquad (4)$$

Причём состояние равновесия x^* зависит только от параметров α, n и не зависит от τ. Следовательно, $\tau = \tau(\alpha,\ n)$ – бифуркационная граница устойчивости, которая существует при $|b| = |-\frac{n(x^*)^{n+1}}{\alpha}| > 1$.

- В рамках данной работы необходимо построить данную бифуркационную кривую $\tau = \tau(\alpha, n)$ при фиксированных $n = 2, 4, 6$ и $p = 0$. И исследовать области параметров $\{\tau, \alpha\}$ на устойчивость состояния равновесия.
- Исследовать поведение системы при $p \neq 0$.

3. Результаты экспериментов

Программная реализация выполнялась на языке python. Полный код доступен по ссылке: https://github.com/Faert/NLD_Lab.

Для вычисления $\tau = \tau(\alpha, n)$ по формуле (4) необходимо сначала вычислить состояние равновесия $x^* = x^*(\alpha, n)$ из решения уравнения (2). Вычисления будут проводиться численно методом деления отрезка пополам. График состояния равновесия $x^* = x^*(\alpha, n)$ представлен на рисунке 1.

Метод деления отрезка пополам:

```
def Div_2(func, a = 0, b = 1, max_iter = 1000, eps = 0.001, history = None):
    for i in range(max_iter):
        c = (a+b)/2
        res_c = func(c)
        if(history != None):
            history[0].append(abs(a-b))
            history[1].append(abs(res_c))
        #if(abs(a-b) < eps):
        if(abs(res_c) < eps):
            return c
        if (np.sign(res_c) == np.sign(func(a))):
            a = c
        else:
            b = c
    return c
```

Где func – функция, у которой ищутся корни, a и b – границы отрезка поиска, max_iter -–максимальное количество итераций, eps – желаемое значение точности, history – ссылка на список, где храниться история изменение точности.

Для дальнейшего исследования зафиксируем параметр желаемую точность $\varepsilon = 10^{-6}$, максимальное количество итераций $N_{max} = 1000$, а критерий остановки по значению функции. Исследование зависимости от параметра α будет проводиться в диапазоне (0, 10]. Можно заметить, что $x^* \leq \alpha$, поэтому возьмём границы метода деления пополам: a = 0, b = 10.

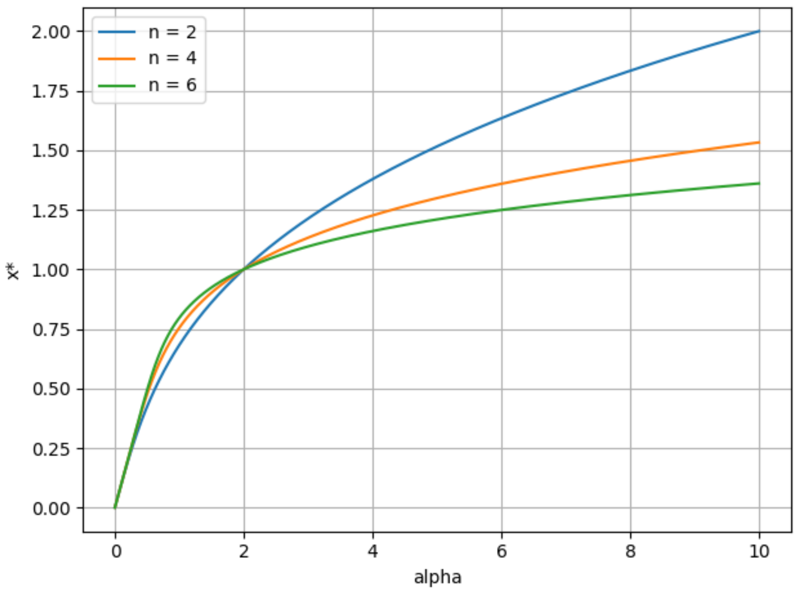

Рисунок 1. Зависимость состояния равновесия x^* от параметра $\alpha \in (0, 10]$ при $n = 2, 4, 6$, $p = 0$

Исследуем существование бифуркационной кривой. Условие её существования $|b| > 1$, поэтому числено вычислим $b = b(\alpha, n)$. На рисунке 2 можно заметить, что условие существования бифуркационной кривой не выполняется при малых α. Но при этом порог существования уменьшается с ростом параметра n.

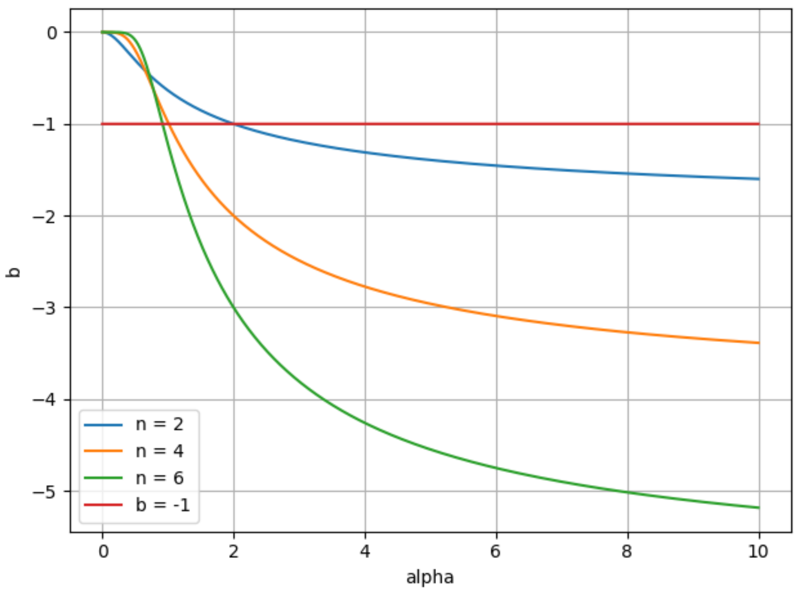

Рисунок 2. Зависимость условия параметра b от параметра $\alpha \in (0, 10]$ при $n = 2, 4, 6$, $p = 0$

Теперь с учетом условия существования построим бифуркационную кривую (Рисунок 3). В близи границы существования она стремиться в бесконечность, а при увеличении α она стремится к некоторому постоянному значению, которое больше 0. То есть данная кривая разбивает плоскость параметров $\{\tau, \alpha\}$ на две области.

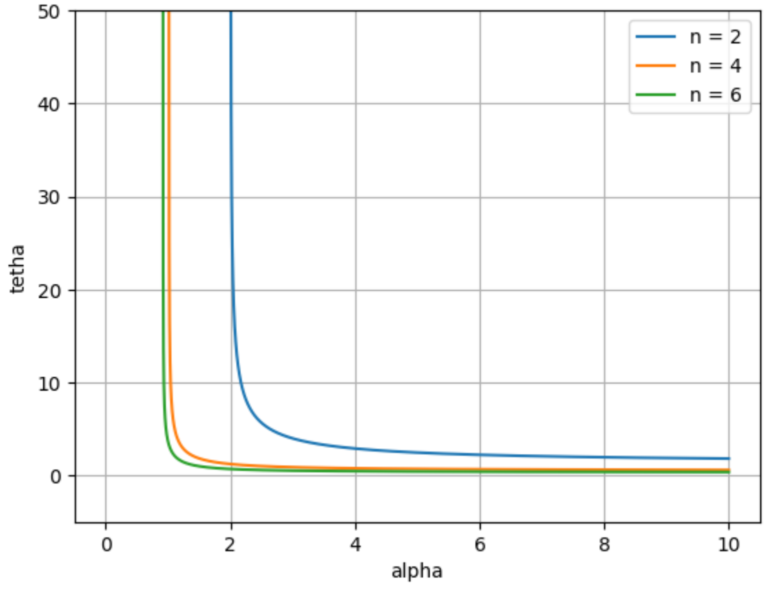

Рисунок 3. Бифуркационная кривая $\tau = \tau(\alpha, n)$ при $\alpha \in (0, 10]$ и $n = 2, 4, 6$, $p = 0$

Сначала рассмотрим область под кривой. Можно заметить, что туда входит прямая $\tau = 0$. При данных значения параметра задача сводится к рассмотренной в первой лабораторной, где существует единственное устойчивое состояние равновесия. Следовательно, устойчивость будет наблюдаться и для всех прочих точек из данной области.

При переходе через бифуркационную кривую из области под кривой. Появляется неустойчивость состояния равновесия и возникают автоколебания. Далее исследуем, что происходит при переходе через другие кривые при $p \neq 0$. Для этого зафиксируем $n = 4$.

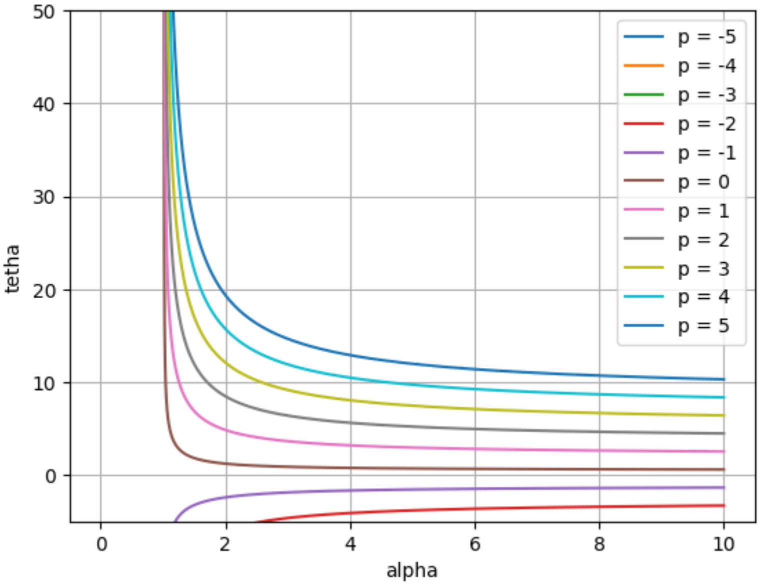

Рисунок 4. Бифуркационная кривая $\tau = \tau(\alpha, n)$ при $\alpha \in (0, 10]$ и $n = 4$, $p = \overline{-5, 5}$

При рассмотрении рисунка 4 можно отбросить кривые, заданные параметром $p < 0$, так как они находятся в области $\tau < 0$. Прочие же кривые не пересекаются и располагаются друг над другом в соответствии с возрастанием p. Но после повторного перехода ничего не измениться, так как мы уже перешли от устойчивого состояния к автоколебаниям.

4. Заключение

Для исследования устойчивости системы с задержкой была числено построена бифуркационная кривая (4) и выведено условия её существования: $|b| = |\frac{-n(x^*)^{n+1}}{\alpha}| > 1$.

Данная кривая разделила плоскость параметров $\{\tau, \alpha\}$ на две области, где область под кривой задаёт устойчивое состояние равновесия, а над кривой автоколебательный процесс.