



**Institute for Advanced Studies
in Basic Sciences
GavaZang, Zanjan, Iran**

Exercise 1 (Proving the formula and activation functions)

Prof. Mahdi Vasighi

Report for Project <1>

Faeze Ahmadi

14044141

Winter 2026

(A) نشان دهید که معادله زیر درست است:

$$\frac{1 - \tanh x}{1 + \tanh x} = e^{2x}$$

برای اثبات از این فرمول ها استفاده میکنیم:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\Rightarrow \frac{1 - \tanh x}{1 + \tanh x} = \frac{1 - \frac{\sinh x}{\cosh x}}{1 + \frac{\sinh x}{\cosh x}} = \frac{\frac{\cosh x - \sinh x}{\cosh x}}{\frac{\cosh x + \sinh x}{\cosh x}}$$

$$\frac{\cosh x - \sinh x}{\cosh x + \sinh x} = \frac{\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) - \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})}{\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) + \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})}$$

$$\frac{\frac{1}{2}(e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x})}{\frac{1}{2}(e^x + e^{-x} + e^x - e^{-x})} = \frac{e^{-x} + e^{-x}}{e^x + e^x} = \frac{2e^{-x}}{2e^x} = \frac{e^{-x}}{e^x} = e^{-x-x} = e^{-2x}$$

از ما خواسته شده بود، این تساوی رو اثبات کنیم:

$$\frac{1 - \tanh x}{1 + \tanh x} = e^{2x}$$

برای اینکه نشون بدیم این تساوی برقراره، فقط از این سه فرمول استفاده کردیم:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

برای اثبات، تنها کافی بود این فرمول‌ها را در $\frac{1-\tanh x}{1+\tanh x}$ جایگذاری کنیم؛ ادامه اثبات تنها حل ریاضی و کمی خلاقیت در حذف و ساده‌سازی است.

ابتدا به جای $\tanh(x)$ از تعریف $\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$ استفاده می‌کنیم؛ سپس سعی می‌کنیم 1 را از بین ببریم، چون حل کردن $\frac{1-\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}}{1+\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}}$ کار دشواری است و اصلاً نیازی نیست درگیر شویم؛ پس 1 را به کسری تبدیل می‌کنیم که مخرج آن با $\cosh(x)$ امکان جمع و تفریق داشته باشد، تنها کسر برابر 1 که این شرایط را فراهم کند هم $\frac{\cosh(x)}{\cosh(x)}$ است. پس یعنی داریم:

$$\frac{\frac{\cosh(x) - \sinh(x)}{\cosh(x)}}{\frac{\cosh(x) + \sinh(x)}{\cosh(x)}} = \frac{\cosh(x) - \sinh(x)}{\cosh(x) + \sinh(x)}$$

که با یک ساده‌سازی به کسر مذکور تبدیل می‌شود. سپس به جای سینوس و کسینوس هم از فرمول‌های گفته شده استفاده می‌کنیم و جایگذاری را انجام می‌دهیم تا به این کسر برسیم:

$$\frac{\frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}} = \frac{e^{-x}}{e^x}$$

در اینجا هم با فاکتور گرفتیم $\frac{1}{2}$ ها و ساده‌سازی آن‌ها از صورت و مخرج، به کسر $\frac{e^{-x}}{e^x}$ می‌رسیم. در اینجا دیگر می‌دانیم که در صورت برابر بودن پایه‌ها در تقسیم، می‌توانیم یک پایه را بنویسیم و توان‌ها را از هم کم کنیم؛ پس به این نتیجه خواهیم رسید: e^{-2x}

در نتیجه تساوی برقرار است:

$$\frac{1 - \tanh(x)}{1 + \tanh(x)} = e^{-2x}$$

در صورت سوال به جای e^{-2x} نوشته شده بود: e^{2x} ؛ برای اینکه به این جواب برسیم باید در صورت

کسر + و در مخرج - انجام دهیم. یعنی فرمول دقیقاً همان است، راجل همان است، فقط به جای $\frac{1-\tanh(x)}{1+\tanh(x)}$

داریم $\frac{1+\tanh(x)}{1-\tanh(x)}$ یعنی داریم:

$$\frac{1 + \tanh(x)}{1 - \tanh(x)} = e^{2x}$$

همان طور که گفتیم، برای اثبات این تساوی هم دقیقاً همان روش و جایگذاری را انجام می‌دهیم:

دقیقاً از همان فرمول‌ها استفاده می‌کنیم، چون فقط جای مثبت، منفی مخرج عوض شده؛

$$\cosh n = \frac{e^n + e^{-n}}{2} \quad \sinh n = \frac{e^n - e^{-n}}{2} \quad \tanh n = \frac{\sinh n}{\cosh n} = \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}}$$

$$\frac{1 + \tanh n}{1 - \tanh n} = \frac{1 + \frac{\sinh n}{\cosh n}}{1 - \frac{\sinh n}{\cosh n}} = \frac{\cosh n + \sinh n}{\cosh n - \sinh n}$$

$$\frac{\cosh n + \sinh n}{\cosh n - \sinh n} = \frac{\frac{1}{2}(e^n + e^{-n}) + \frac{1}{2}(e^n - e^{-n})}{\frac{1}{2}(e^n + e^{-n}) - \frac{1}{2}(e^n - e^{-n})}$$

$$\frac{\frac{1}{2}(e^n + e^{-n} + e^n - e^{-n})}{\frac{1}{2}(e^n + e^{-n} - e^n + e^{-n})} = \frac{e^n + e^n}{e^{-n} + e^{-n}} = \frac{2e^n}{2e^{-n}} = \frac{e^n}{e^{-n}}$$

$$= e^{n - (-n)} = e^{n+n} = e^{2n}$$

$$\Rightarrow \frac{1 + \tanh n}{1 - \tanh n} = e^{2n}$$

(B) یک فایل ساده در متلب بنویسید و تابع فعال‌سازی زیر را رسم کنید:

- تابع سیگموید (Sigmoid Function)
- تابع گاوسی (Gaussian Function)

فرض کنید محدوده از -5 تا 5 باشد. سعی کنید هر دو نمودار را در یک شکل با استفاده از تابع subplot نشان دهید.

```
1  x = -5:0.1:5;
2
3  sigmoid = 1 ./ (1 + exp(-x));
4  gaussian = exp(-x.^2);
5
6  figure
7
8  subplot(2,1,1)
9  plot(x, sigmoid)
10 title('Sigmoid Function')
11
12 subplot(2,1,2)
13 plot(x, gaussian)
14 title('Gaussian Function')
```

من این برنامه رو خیلی ساده و ابتدایی نوشتم، چون تازه یادگیری MATLAB رو شروع کردم و خواستم با استفاده از دانش فعلیم کد رو تحویل بدم.

در خط 1 نوشته شده:

```
x = -5:0.1:5;
```

این خط برای مشخص کردن بازه هست. یعنی از -5 شروع کن و با گام‌های 0.1 برو تا 5.

پس متلب خودش همچین لیستی رو می‌سازه:

-5, -4.9, -4.8, ..., 4.8, 4.9, 5

در خط 3 و 4 نوشته شده:

```
sigmoid = 1 ./ (1 + exp(-x));
```

```
gaussian = exp(-x.^2);
```

این دو خط فرمول‌های توابع سیگموئید و گاوسی هستند.

Sigmoid function

$$S(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

Gaussian Function

$$f(x) = e^{-x^2}$$

من متوجه شدم که در متلب قبل از نوشتن عملیات نقطه می‌گذاریم؛ مثلاً برای تقسیم کردم با بنویسیم /. و برای توان با بنویسیم ^. در حالی که در زبان‌های برنامه نویسی اینطور نیست.

در خط 6 نوشته‌ام:

figure

فیگور در متلب به این معنی هست که یک پنجره رسم باز کن، یعنی دستوری که یک پنجره گرافیکی جدید برای نمایش نمودارها، تصاویر یا هر نوع خروجی بصری باز می‌کند و به شما اجازه می‌دهد چندین نمودار را همزمان مشاهده و مقایسه کنید، جالبه که با استفاده از figure(n) می‌تونیم برای هر نمودار شمارگذاری

شده، پنجره‌های جداگانه ایجاد کنیم، اما در اینجا از ما خواسته شده هر دو نمودار رو توی یک شکل نمایش بدیم.

در خط‌های 8، 9 و 10 نوشته شده:

```
subplot(2,1,1)
```

```
plot(x, sigmoid)
```

```
title('Sigmoid Function')
```

ما اینجا یک ساب پلات زدیم که دو ردیف داریم و یک ستون و می‌خواهیم در ردیف اول تابع سیگموید رو نمایش بدیم. در خط بعدی خواستیم x ها را در تابع سیگموید رسم کنیم و در خط آخر هم تایتل نمودار را مشخص کردیم که Sigmoid Function هست.

در خط‌های 12، 13 و 14 هم این‌ها نوشتیم که برای تابع گاوسی هستن:

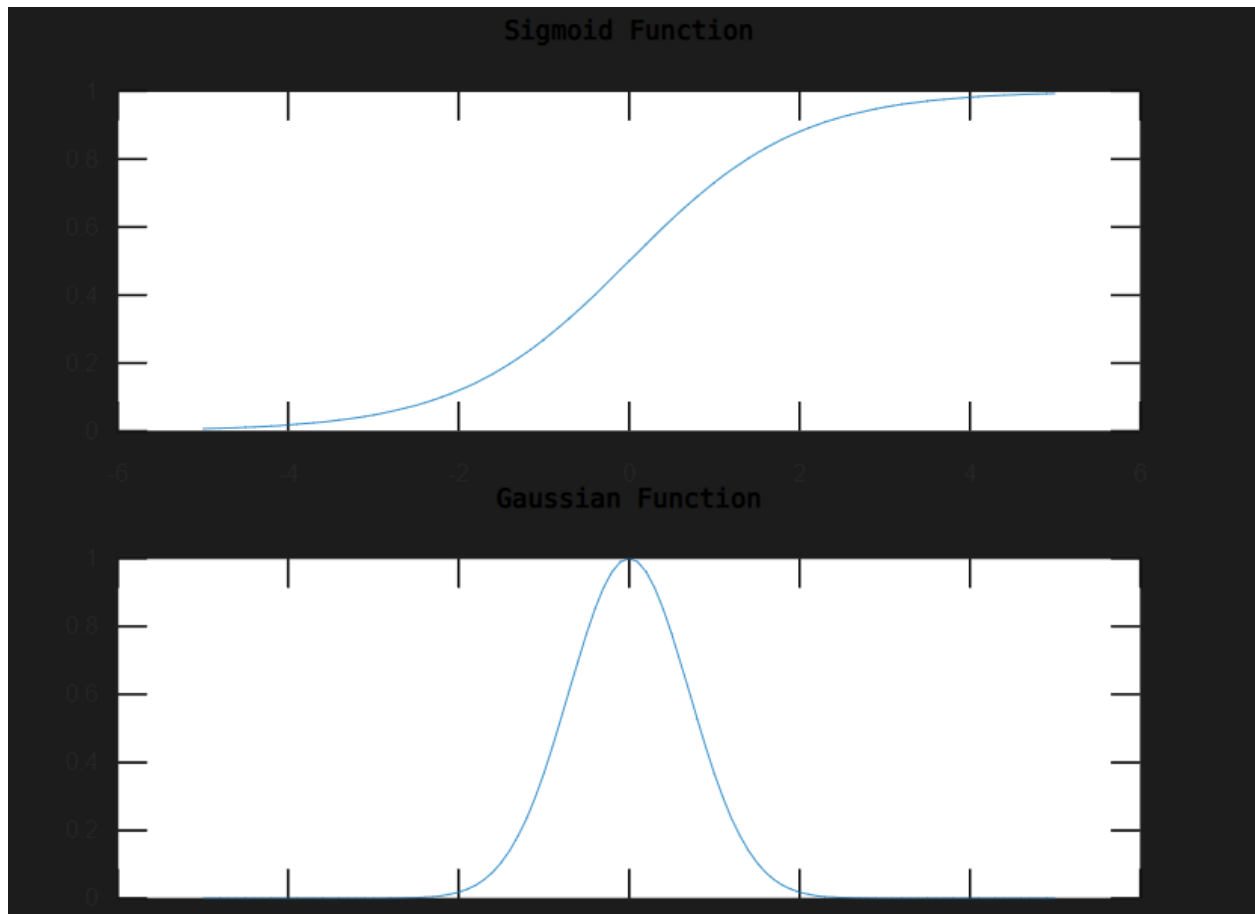
```
subplot(2,1,2)
```

```
plot(x, gaussian)
```

```
title('Gaussian Function')
```

در اینجا هم دقیقا همان کارهایی که برای تابع سیگموید انجام داده بودیم را انجام دادیم، فقط نمودار ما در ردیف دوم به نمایش درمیاد.

در نهایت خروجی ما به این شکل هست:



همون طور که می بینیم دو پلات در یک صفحه رسم شدن. پلات اول مربوط به تابع سیگموید هست که به صورت S شکل هست و پلات دوم هم تابع گاوسی هست که به صورت زنگوله رسم شده.

من در مورد این دو تابع سرچ کردم و فهمیدم که توابع مهمی توی شبکه های عصبی مصنوعی هستن. این دو تابع، توابع فعال سازی یا Activation Functions هستن که هر دو رفتار متفاوتی دارن. این دست از توابع مهم هستن چون در شبکه های عصبی، تابع فعال سازی تعیین می کنه که یک نورون چه واکنشی نشون بده.

در واقع رفتار تابع سیگموید به نوعی تصمیم گیری تدریجی بین 0 و 1 هست. من یه پروژه ماشین لرنینگ داشتم که در اونجا برای train کردن مدل از Logistic Function استفاده کردم و دقیقاً بحث همین بود که ما گاهی نیاز داریم تحلیل کنیم و همیشه همیشه صفر یا 1 بود. ممکنه خروجی به دست اومده یه عددی بین صفر و یک باشه! پروژه من هم تشخیص احساسات متن بود که دقیقاً با همین موضوع مواجه می شد.

در مقابل، تابع گاوسی یک هدف برای خودش داره، دقیقاً مثل یه صفحه تیراندازی، مهمه که ما به اون راس برسیم و دور شدن از اون هدف برای ما بده. پس تابع گاوسی هم به نوعی تشخیص شباهت هست و می‌خواد ببینه عدد ورودی چقدر با هدف شباهت داره.

طبق نمودار هم این تحلیل‌ها کاملاً قابل اثبات هستن، چون سیگموئید اشباع می‌شه ولی گاوسی اطراف یک نقطه فعاله.

منابع:

من برای این تمرین بیشتر از سایت GreeksforGreeks کمک گرفتم.

برای فرمول‌های مربوط به اثبات تساوی در قسمت A:

[/https://www.geeksforgeeks.org/engineering-mathematics/hyperbolic-function](https://www.geeksforgeeks.org/engineering-mathematics/hyperbolic-function)

برای فرمول تابع سیگموئید و تعاریفی جهت فهمیدن رفتار تابع:

https://en.wikipedia.org/wiki/Sigmoid_function

<https://www.geeksforgeeks.org/machine-learning/derivative-of-the-sigmoid-function>

برای فرمول و تعریف تابع گاوسی:

https://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian_function

<https://mathworld.wolfram.com/GaussianFunction.html>

برای یادگیری دستورات متلب و اجرای پلات‌ها:

<https://www.geeksforgeeks.org/engineering-mathematics/introduction-to-matlab>

برای اجرای فایل متلب به صورت آنلاین و مشاهده نتیجه نهایی هم از سایت زیر استفاده کردم:

[/https://octave-online.net](https://octave-online.net)

برای مشاهده کد و خروجی هم وارد لینک زیر بشین:

https://octav.onl/activation_Functions