باسمه تعالی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

آمار و احتمال مهندسی

نیم‌سال اول ۹۵-۹۴

دکتر مطهری

تمرین پنجم	توابع و متغیر تصادفی	زمان تحویل بخش مسایل: ۹۴/۹/۲۲ - زمان تحویل بخش شبیه سازی: ۹۴/۹/۲۷

مسایل

مساله اول

یک متغیر تصادفی X دارای توزیع یکنواخت دربازه ی $[-۲, +۲]$ است. اگر Y و Z به فرم زیر تعریف شده باشند، توزیع احتمالی $W = ZY$ را به دست آورید.

$$Y = ۱ - X^۲$$

$$Z = ln(X)$$

مساله دوم

فرض کنید $Z = min(X, Y)$ و $W = max(X, Y)$:

الف- اگر X دارای توزیع نمایی با پارامتر α و توزیع Y نیز نمایی با پارامتر β $(\alpha \neq \beta)$ و X و Y مستقل باشند، تابع چگالی مشترک Z و W و توابع چگالی حاشیه ای Z و W را محاسبه کنید.

ب- اگر X دارای توزیع پواسون با پارامتر α و توزیع Y نیز نمایی با پارامتر β و X و Y مستقل باشند، تابع احتمال مشترک Z و W را به دست آورید.

مساله سوم

فرض کنید متغیر تصادفی پیوسته X تابع توزیع $f(X)$ دارد. مشخص کنید که مقدار $\mathbb{E}\{|X - y|\}$ برای چه مقداری از y کمینه می شود.

مساله چهارم

فرض کنید متوسط متغیر تصادفی X کمتر از صفر باشد. در صورتی که $\mathbb{E}\{e^{\lambda X}\} = ۱$ و $\lambda \neq ۰$، نشان دهید که مقدار λ کوچکتر از صفر خواهد بود.

مساله پنجم

۱. نشان دهید اگر که متغیر تصادفی θ دارای توزیع یکنواخت در بازه $[0, 2\pi]$ باشد، در این صورت دو متغیر تصادفی $X = sin(\theta)$ و $Y = cos(\theta)$ ناهمبسته هستند.

۲. اگر داشته باشیم که $COV(X,Y) = 0$، نشان دهید:

$$\rho(X+Y, X-Y) = \frac{Var(X) - Var(Y)}{Var(X) + Var(Y)}$$

مساله ششم

متغیرهای تصادفی X و Y را در نظر بگیرید. توزیع توامان این دو متغیر روی مجموعه ی $(0,1)$، $(1,0)$، $(0,0)$ و $(1,1)$ به صورت یکنواخت است. واریانس متغیر تصادفی $Z = X + Y$ را بدست آورید.

مساله هفتم

کلاسی را در نظر بگیرید که اعضاي کلاس را به ۳ گروه تقسیم کردهایم. میانگین نمرات امتحانات دانشآموزان این گروه ها به ترتیب برابر با ۴۰ و ۵۰ و ۶۰ است. دانش آموزی را به طور تصادفی از این کلاس انتخاب می کنیم. متغیر تصادفی X را برابر با نمره ی امتحان دانش آموز انتخاب شده و متغیر تصادفی Y را شماره ی گروهی که دانش آموز در آن است در نظر می گیریم. مشاهده می کنیم که $Var(X|Y=y) = 5y$ است.

۱. امیدریاضی و واریانس متغیر تصادفی $Z = \mathbb{E}(X|Y)$ را محاسبه کنید.

۲. امیدریاضی متغیر تصادفی $W = Var(X|Y)$ را بدست آورید.

شبیه سازی

مساله اول

تابع دو متغیره نرمال را در حالات زیر رسم کنید. همچنین از هر کدام از توزیع ها تعداد زیادی نمونه تولید کنید و در یک صفحه‌ی دو بعدی نمایش دهید.

۱. $\mu_X = \mu_Y = 0\ ,\ \sigma_X = \sigma_Y = 1\ ,\ \rho_{XY} = 0$

۲. $\mu_X = \mu_Y = 0\ ,\ \sigma_X = \sigma_Y = 1\ ,\ \rho_{XY} = 0.9$

۳. $\mu_X = \mu_Y = 0\ ,\ \sigma_X = 1\ ,\ \sigma_Y = 2\ ,\ \rho_{XY} = 0$

۴. $\mu_X = \mu_Y = 0\ ,\ \sigma_X = 1\ ,\ \sigma_Y = 2\ ,\ \rho_{XY} = 0.9$

نکته: در این بخش کاملا آزاد هستید از هر پکیج دلخواه استفاده کنید.

مساله دوم

درون یک بیضی به معادله‌ی $x^۲ + ۴y^۲ \leq ۱$ نقاط یکنواخت تولید کنید. (یکنواخت از نظر مساحت) سپس با تولید تعداد زیادی نقطه هیستوگرام و نیز تصویر دو بعدی آن را رسم کنید.

مساله سوم

روشی برای تولید نقاط از توزیع چندجمله‌ای ارائه دهید و آن را پیاده‌سازی کنید. در این بخش مجاز به استفاده از هیچ پکیج و یا تابع آماده‌ای که متغیر چندجمله‌ای تولید کند نمی‌باشید و تنها می‌توانید از تابع تولید متغیر تصادفی یکنواخت استفاده کنید. روش خودر را به صورت خیلی خلاصه در گزارش ذکر کنید.

مساله چهارم

توزیع هر یک از متغیرهای زیر را (به صورت تقریبی) رسم کنید. فرض کنید متغیرهای u, v, x, y همگی توزیع یکنواخت در بازه‌ی ۰ تا ۱ دارند.

۱. $u + v$

۲. $u + v + x$

۳. $u + v + x + y$

۴. $u - v$

۵. $u - v + x$

۶. $u - v + x - y$

۷. $u - v + x + y$

مساله پنجم

برای هر کدام از ماتریس های زیر مشخص کنید که آیا یک ماتریس کواریانس معتبر برای توزیع چندمتغیره نرمال هستند یا خیر. جواب خود را در خطوط فایل "P4" با ۱ و ۰ به جای «بله» و «خیر» مشخص کنید. همچنین در گزارش خود به صورت کاملا خلاصه روش پاسخ دادن خود را به صورت کاملا خلاصه ذکر کنید.

$$\text{(a)}\quad \boldsymbol{C}_a = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \text{(b)}\ \boldsymbol{C}_b = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \text{(c)}\ \boldsymbol{C}_c = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\text{(d)}\quad \boldsymbol{C}_d = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{(e)}\ \boldsymbol{C}_e = \begin{bmatrix} 11 & -3 & 7 & 5 \\ -3 & 11 & 5 & 7 \\ 7 & 5 & 11 & -3 \\ 5 & 7 & -3 & 11 \end{bmatrix}, \qquad \text{(f)}\ \boldsymbol{C}_f = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

امتیازی

توزیع نرمال چند متغیره را اگر نسبت به یک یا چند متغیر آن شرطی کنیم باز هم نرمال می‌شود. در این تمرین می‌خواهیم این موضوع را عملا ببینیم. یکی از ماتریس‌های معتبر کواریانس سه متغیره‌ی قسمت قبل را انتخاب کنید. میانگین هر سه متغیر را صفر در نظر بگیرید. با شرطی کردن بر روی دو تا از متغیرها و رسم هیستوگرام سعی کنید نرمال بودن آن را مشاهده کنید. همچنین سعی کنید با شرطی کردن بر روی یکی از متغیرها نرمال بودن توزیع توأم روی دو متغیر دیگر را مشاهده کنید.