



آمار و احتمال مهندسی

نیم سال اول ۹۵-۹۴

دکتر مطهری

تمرین اول

مفاهیم اولیه احتمال

تاریخ تحویل: ۹۴/۷/۲۷

۱ مساله اول

دو سکه در اختیار داریم. یک سکه عادلانه است (در صورت پرتاب شدن به احتمال یک دوم شیر یا خط می آید) و سکه ی دوم به احتمال دو سوم خط و به احتمال یک سوم شیر می آید. یکی از دو سکه را به طور تصادفی بر می داریم و آن را دو بار پرتاب می کنیم. هر دو بار خط مشاهده می شود. احتمال این که سکه ای که برداشته بودیم عادلانه باشد چقدر است؟

۲ مساله دوم

یک قطار و یک اتوبوس در زمانی تصادفی بین ۹ و ۱۰ صبح به ایستگاه می رسند. قطار به مدت ۱۰ دقیقه و اتوبوس به مدت x دقیقه در ایستگاه می ماند. مقدار x چقدر باشد تا احتمال این که قطار و اتوبوس همدیگر را در ایستگاه ببینند برابر یک دوم باشد؟

۳ مساله سوم

الف) فرض کنید یک فیل سفید و یک شاه سیاه را به طور تصادفی در صفحه ی شطرنج 4×4 قرار می دهیم. هم چنین فرض کنید اکنون نوبت سفید است. احتمال این که فیل سفید شاه را تهدید کند چقدر است؟
 ب) در این قسمت فرض کنید به جای یک جدول 4×4 در یک صفحه ی شطرنج $n \times n$ عدد n به اندازه ی کافی بزرگ است) سه مهره ی فیل سفید و سرباز سفید و شاه سیاه را به طور تصادفی قرار دهیم و نوبت سفید است. به نظر شما احتمال این که شاه سیاه توسط مهره های سفید تهدید شود در این حالت بیشتر است یا در حالتی که فقط یک فیل سفید و یک شاه سیاه بر روی صفحه قرار داشته باشند؟

۴ مساله چهارم

گرافی تصادفی با استفاده از رئوس $1, 2, \dots, 5$ به این شکل ساخته می شود که در آن هر یال ممکن به احتمال یک دوم قرار دارد و یال ها نیز از هم مستقل هستند. احتمال این که این گراف دور نداشته باشد را محاسبه کنید. با میل دادن n به سمت بی نهایت این احتمال به چه عددی میل می کند؟

۵ مساله پنجم

سه رویداد A و B و C را در نظر بگیرید. تمام رویدادهایی که می توان با استفاده از اجتماع و اشتراک و مکمل گیری (از هر کدام به تعداد دلخواه) این مجموعه ها ساخت را در نظر بگیرید. حداقل احتمال چه تعداد از این رویدادها را داشته باشیم تا بتوانیم با استفاده از آن ها احتمال بقیه ی رویدادها را نیز به دست آوریم؟

تمرینات برنامه‌نویسی

توضیحات

در این بخش توضیحاتی در مورد تمرین‌های عملی آورده شده است. لازم است که تمامی نکات به دقت مطالعه شود و همه‌ی آن‌ها در همه‌ی تمرین‌ها رعایت شوند. در غیر این صورت چون بخش‌هایی از تصحیح تمرین‌ها به صورت اتوماتیک انجام می‌شود، ممکن است نمره از دست بدهید. به کوچک و بزرگ بودن حروف نیز دقت فرمایید.

- همه‌ی کدهای مربوط به یک سوال را در یک پوشه با نام "p+problem number" قرار دهید. مثلاً کدهای مربوط به سوال ۱ در پوشه‌ی "p1" قرار می‌گیرند.
 - پوشه‌های مربوط به کدهای سوال‌های مختلف را همگی در یک پوشه تحت عنوان "src" قرار دهید.
 - در برخی سوال‌ها از شما خواسته می‌شود که توابع خاصی را پیاده‌سازی کنید و یا نتایج برخی محاسبات را در فایل‌هایی بنویسید. این که این توابع چه نام و آرگومان‌هایی داشته باشد و یا این فایل‌ها چه نام و ساختاری داشته باشند، به دقت در آن سوال تشریح می‌شود و شما نیز آن‌ها را به دقت رعایت کنید. این گونه فایل‌ها را نیز در پوشه‌ی مربوط به سوال آن‌ها قرار دهید.
 - برای هر تمرین یک فایل گزارش در فرمت pdf تهیه کنید و برخی سوال‌ها که نیاز به نمودار یا پاسخ تشریحی و یا هر گونه توضیح دیگری دارند، در آن مرقوم فرمایید. نام این فایل را نیز به صورت "HW+#HW+_+student number" قرار دهید مثلاً "HW1_93604367.pdf"
 - در نهایت هنگام ارسال تمرین‌ها پوشه‌ی src را در کنار فایل گزارش درون یک فایل آرشیو (زیپ) شده با نام مشابه فایل گزارش قرار دهید و ارسال فرمایید.
 - هم‌فکری با دیگران در حل سوالات جایز و بلکه مستحب است. اما استفاده از کدهای دیگران به هیچ وجه مجاز نیست. در روند تصحیح بنای ما بر اعتماد است و به طور ویژه به دنبال کشف تقلب نیستیم. اما اگر بنا به هر دلیلی وقوع تقلب احراز شود، نمره‌ی تمرین عملی در کل ترم صفر منظور خواهد شد.
- در بخش تمرینات R، دو دستیار آموزشی به شما کمک می‌کنند. برای ارتباط با آقای حامد واسعی از آدرس vasei.hamed@gmail.com و برای تماس با آقای سینا یزدان‌بد از آدرس sina.yazdanbod@gmail.com استفاده کنید.

۶ سوال اول

ابتدا خودتان را قانع کنید کنید که تابع `runif` اعداد یکنواخت در بازه‌ی $[0, 1]$ تولید می‌کند. یکنواخت به این معنی که احتمال این‌که نقطه در یک بازه‌ی مشخص باشد، برابر با طول آن بازه می‌باشد. حال قطعه کد زیر را اجرا کنید.

```
install.packages("plotrix")
library("plotrix")
n <- 100;
x <- runif(n)
y <- runif(n)

plot(x,y,pch=20,cex=.1,asp=1,xlab = "",ylab = "")
rect(xleft = 0,xright = 1,ytop = 1,ybottom = 0)
draw.circle(x=0.5,y=0.5,radius = .5)
```

نقاطی که مشاهده می‌کنید با معنایی مشابه آنچه در مورد یک بازه گفته شد، بر روی مربع یکنواخت هستند. با استفاده از این شکل تخمینی برای عدد π به دست آورید. با افزایش تعداد نقاط، امیدواریم تخمین بهتری از عدد π به دست آوریم. نمودار خطای تخمین‌های به دست آمده را برحسب تعداد نقاط رسم کنید و در مورد تعداد نقاط مناسب برای تخمین بحث کنید.

۷ سوال دوم

در این سوال می‌خواهیم با استفاده از مختصات قطبی نقاطی درون یک دایره تولید کنیم. با هر کدام از این روش‌ها ۱۰ هزار نقطه درون دایره تولید کنید و این نقاط را مانند نقاط سوال قبل درون یک دایره رسم کنید. در هر بخش ابتدا نحوه‌ی تولید شعاع (r) و سپس روش تولید زاویه (t) گفته شده‌است. n تعداد نقاط است.

1. $r \leftarrow \text{runif}(n)$
 $t \leftarrow \text{runif}(n) * 2 * \pi$
2. $r \leftarrow \sqrt{\text{runif}(n)}$
 $t \leftarrow \text{runif}(n) * 2 * \pi$
3. $r \leftarrow \text{runif}(n)^2$
 $t \leftarrow \text{runif}(n) * 2 * \pi$
4. $r \leftarrow \sqrt{\sqrt{\text{runif}(n)}}$
 $t \leftarrow \text{runif}(n) * 2 * \pi$
5. $r \leftarrow \sqrt{\text{runif}(n)}$
 $t \leftarrow \sqrt{\text{runif}(n) * 2 * \pi}$
6. $r \leftarrow \sqrt{\text{runif}(n)}$
 $t \leftarrow \sqrt{\text{runif}(n)} * 2 * \pi$
7. $r \leftarrow \text{runif}(n)$
 $t \leftarrow \sqrt{\text{runif}(n)} * 2 * \pi$

حال با توجه به این شکل‌ها و با استفاده از نقاط تولید شده به سوال‌های زیر پاسخ دهید.

۱. در کدام شکل‌ها زاویه‌ی نقاط به صورت یکنواخت توزیع شده است به این معنی که احتمال قرار گرفتن یک نقطه در یک قطاع برابر با نسبت زاویه‌ی آن قطاع به 2π می‌باشد؟ جواب را به صورت یک فایل text هفت خطی با نام p21.txt یادداشت کنید به این صورت که اگر توزیع یکنواخت است ۱ و اگر یکنواخت نیست عدد ۰ را در خط مربوط به آن شکل بنویسید. مثلاً اگر تنها روش اول و هفتم توزیع یکنواخت زاویه‌ای داشته باشند محتوای فایل به صورت زیر خواهد بود:

1
0
0
0
0
0
0
1

دقت داریم که فایل مذکور به همراه تمام فایل‌های دیگری که در این سوال نام برده می‌شوند و یا کدهای مربوط به بخش‌های مختلف این سوال همگی با هم در پوشه‌ی مربوط به سوال ۲ قرار می‌گیرند. همچنین دقت داشته باشید به جز اعداد ۱ و ۰ چیز دیگری یادداشت نکنید.

۲. برای این‌که این حس خود را امتحان کنید، تعداد نقاط در قطاع‌های مختلف را با یکدیگر مقایسه کنید. به طور خاص در یک فایل text با نام p22.txt نسبت تعداد نقاط موجود در قطاع‌های $[\pi/4, 3\pi/4]$ و $[3\pi/4, 5\pi/4]$ به تعداد کل نقاط را بنویسید. این فایل نیز یک فایل هفت خطی است که در هر خط آن نسبت‌های ذکر شده به ترتیب آمده‌اند و در بین آن‌ها فقط یک ”” وجود دارد. مانند:

0.234,0231
 0.590,1
 01234,0.1234
 0.76,.076
 0,0.132
 0.1,0.1
 1,0

۳. مانند قسمت اول اینبار در فایل p23.txt روش‌هایی که از نظر مساحت یکنواخت هستند را مشخص کنید.

۴. مانند قسمت دوم اینبار در فایل p24.txt نسبت تعداد نقاط موجود در دایره‌هایی هم مرکز با دایره‌ی اصلی و با شعاع نصف و ۲/۳ آن را مشخص کنید.

۵. در این قسمت دو احتمال زیر را به ترتیب حساب کرده و مانند قسمت دوم در فایلی به نام p25.txt بنویسید.

$$\mathbb{P}[r \leq \frac{1}{4} | t \leq \frac{\pi}{4}]$$

$$\mathbb{P}[r \leq \frac{1}{4}]$$

۶. با توجه به اعداد به دست آمده در قسمت قبل، در مورد رابطه‌ی استقلال بین شعاع و زاویه‌ی نقاط مختلف در روش‌های مختلف، فایلی مانند قسمت اول با نام p26.txt بسازید. [در این قسمت و قسمت‌های بعدی، عدد ۱ بیانگر استقلال و ۰ بیانگر عدم استقلال است.]

۷. در این قسمت دو احتمال زیر را به ترتیب حساب کرده و مانند قسمت دوم در فایلی به نام p27.txt بنویسید.

$$\mathbb{P}[x \leq \frac{1}{4} | t \leq \frac{\pi}{4}]$$

$$\mathbb{P}[x \leq \frac{1}{4}]$$

۸. با توجه به اعداد به دست آمده در قسمت قبل، در مورد رابطه‌ی استقلال بین مختصه‌ی طول و زاویه‌ی نقاط مختلف در روش‌های مختلف، فایلی مانند قسمت اول با نام p28.txt بسازید.

۹. در این قسمت دو احتمال زیر را به ترتیب حساب کرده و مانند قسمت دوم در فایلی به نام p29.txt بنویسید.

$$\mathbb{P}[x \leq \frac{1}{4} | y \leq \frac{1}{4}]$$

$$\mathbb{P}[x \leq \frac{1}{4}]$$

۱۰. با توجه به اعداد به دست آمده در قسمت قبل، در مورد رابطه‌ی استقلال بین طول و عرض نقاط مختلف در روش‌های مختلف، فایلی مانند قسمت اول با نام p210.txt بسازید.

۸ سوال سوم

ابتدا تابع sample را مطالعه کنید. با استفاده از آن به سوالات زیر جواب دهید. جواب هر سوال را به صورت یک عدد در یک خط در فایل به نام p3.txt وارد کنید. در این سوال منظور آن نیست که احتمالات را به صورت دقیق و بر اساس روابط ریاضی پیدا کنید، بلکه باید با استفاده از تابع sample و نمونه برداری از مجموعه‌های مناسب این احتمالات را تخمین بزنید. البته بسیار خوب است عددی به دست آمده را با آنچه فکر می‌کنید از روابط ریاضی به دست می‌آید مقایسه کنید.

۱. یک عدد به تصادف از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ انتخاب کنید. احتمال این که این عدد زوج باشد چقدر است؟
۲. سه عدد از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ بدون جایگذاری انتخاب کنید. احتمال آنکه هر سه زوج باشند چقدر است؟
۳. سه عدد از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ با جایگذاری انتخاب کنید. احتمال آنکه هر سه زوج باشند چقدر است؟
۴. سه عدد از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ بدون جایگذاری انتخاب کنید. احتمال آنکه مجموع آن‌ها از ۲۰۰ کوچکتر باشد چقدر است؟
۵. سه عدد از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ بدون جایگذاری انتخاب کنید. احتمال آنکه مجموع آن‌ها از ۱۵۰ کوچکتر باشد چقدر است؟
۶. سه عدد از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ بدون جایگذاری انتخاب کنید. احتمال آنکه مجموع آن‌ها از ۱۰۰ کوچکتر باشد چقدر است؟
۷. سه عدد از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ بدون جایگذاری انتخاب کنید. احتمال آنکه مجموع آن‌ها از ۷۰ کوچکتر باشد چقدر است؟
۸. سه عدد از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ بدون جایگذاری انتخاب کنید. احتمال آنکه مجموع آن‌ها از ۵۰ کوچکتر باشد چقدر است؟
۹. سه عدد از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ بدون جایگذاری انتخاب کنید. احتمال آنکه مجموع آن‌ها از ۱۰ کوچکتر باشد چقدر است؟
۱۰. سه عدد از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ با جایگذاری انتخاب کنید. احتمال آنکه مجموع آن‌ها از ۲۰۰ کوچکتر باشد چقدر است؟
۱۱. سه عدد از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ با جایگذاری انتخاب کنید. احتمال آنکه مجموع آن‌ها از ۱۵۰ کوچکتر باشد چقدر است؟
۱۲. سه عدد از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ با جایگذاری انتخاب کنید. احتمال آنکه مجموع آن‌ها از ۱۰۰ کوچکتر باشد چقدر است؟
۱۳. سه عدد از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ با جایگذاری انتخاب کنید. احتمال آنکه مجموع آن‌ها از ۷۰ کوچکتر باشد چقدر است؟
۱۴. سه عدد از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ با جایگذاری انتخاب کنید. احتمال آنکه مجموع آن‌ها از ۵۰ کوچکتر باشد چقدر است؟
۱۵. سه عدد از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ با جایگذاری انتخاب کنید. احتمال آنکه مجموع آن‌ها از ۱۰ کوچکتر باشد چقدر است؟
۱۶. پنج عدد از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ بدون جایگذاری انتخاب کنید. احتمال آنکه یکی از آنها بر یکی دیگر بخش پذیر باشد چقدر است؟
۱۷. ده عدد از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰۰ بدون جایگذاری انتخاب کنید. احتمال آنکه مجموع آن‌ها کوچکتر از ۲۰۰۰ باشد چقدر است؟
۱۸. ده عدد از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰۰ بدون جایگذاری انتخاب کنید. احتمال آنکه مجموع آن‌ها کوچکتر از ۱۰۰۰ باشد چقدر است؟
۱۹. از یک کیسه که در آن سه رنگ آبی و قرمز و سبز هر کدام ۶۰ مهره وجود دارد، به تصادف و بدون جایگذاری ۳۰ مهره بر می داریم. احتمال آنکه حداقل ۱۵ مهره از این ۳۰ مهره هم رنگ باشند چقدر است؟
۲۰. یک معلم همیشه به تصادف از یکی از شاگردان خود سوال می‌پرسد. اگر کلاس دارای ۲۳ نفر دانش آموز باشد و معلم در طول سال ۱۱۲ بار از دانش آموزان سوال بپرسد، احتمال این که بدشانس ترین دانش آموز حداقل ۱۰ بار انتخاب شده باشد چقدر است؟ بدشانس ترین دانش آموز کسی است که بیشترین تعداد برای پاسخ به سوال انتخاب شده است.