



آمار و احتمال مهندسی

نیم سال اول ۹۵-۹۴

دکتر مطهری

زمان تحویل: ۹۴/۸/۹

تکرار یک رویداد

تمرین دوم

مسایل

۱ مساله اول

فردی ادعا می‌کند حس ششم دارد ولی حس ششم او در ۷۰ مواقع کار می‌کند! سکه‌ای را ۱۰ بار پرتاب می‌کنیم و او نتیجه ۷ پرتاب را درست پیش بینی می‌کند. با چه احتمالی این فرد دروغ می‌گوید؟

۲ مساله دوم

در یک فرآیند تصمیم‌گیری از بین دو گزینه که یکی انتخاب درست است و دیگری منجر به فاجعه خواهد شد، احتمال تصمیم‌گیری درست هر فرد است. استراتژی اول سپردن انتخاب به یک نفر، و استراتژی دوم رای‌گیری از جمعیتی بزرگ است. کدام استراتژی احتمال فاجعه را کمتر می‌کند؟ دموکراسی یا دیکتاتوری با این فرض‌ها؟

۳ مساله سوم

در یک بخت‌آزمایی، هر کدام از شرکت‌کنندگان بلیط‌هایی با ۶ عدد خریداری می‌کنند که هر عدد می‌تواند با احتمال مساوی در بازه اعداد ۱ تا ۵۰ باشد. برای انتخاب برنده، ۶ عدد به طور تصادفی انتخاب می‌شوند و هر شرکت‌کننده‌ای که تعداد ۴، ۵ و یا ۶ عدد یکسان در بلیط خود داشته باشد به ترتیب A_1 ، A_2 و A_3 تومان برنده می‌شود. اگر قیمت هر بلیط هزار تومان باشد، شرکت برگزارکننده این بخت‌آزمایی جوایز را حداکثر چه اعدادی قرار دهد تا در بلند مدت همواره سود کند؟

۴ مساله چهارم

دو نفر (A و B) قرار گذاشته اند که به کرات با هم مسابقه اسب سواری دهند. هربار یکی پیروز شود از بازنده یک واحد پول (مثلاً ۱۰۰۰ تومان) دریافت می‌کند. احتمال پیروزی آقای A در هر بار مسابقه، p و احتمال پیروزی آقای B، $q = 1 - p$ است. سرمایه اولیه آقای A، i واحد است و سرمایه اولیه آقای B، $k - i$ واحد است. که $k > i$. یعنی اگر از دید آقای A مساله را بررسی کنیم، سرمایه اولیه او i است و در هر مرحله از مسابقه سرمایه او به احتمال p یک واحد اضافه و به احتمال q یک واحد کم می‌شود. مسابقه وقتی تمام می‌شود که سرمایه یکی از این دو فرد به صفر برسد. مطلوب است محاسبه احتمال پیروزی فرد A در مسابقه.

۵ مساله پنجم

در یک کنکور، آزمون به صورت تستی چهار جوابی است که پاسخ غلط $\frac{1}{4}$ نمره منفی است. اگر داوطلب در رابطه با n تا از تست ها بین m جواب ($2 \leq m \leq 4$) شک داشته باشد، احتمال اینکه با زدن تست به طور شانسی ضرر نکند (نمره مجموع n تست حداقل صفر شود) را برای موارد زیر بیابید.

الف) $m = 4$ و $n = 5$ ب) $m = 4$ و $n = \infty$ ج) $m = 2$ و $n = 2$ د) $m = 2$ و $n = \infty$

توضیحات

در این بخش توضیحاتی در مورد تمرین های عملی آورده شده است. لازم است که تمامی نکات به دقت مطالعه شود و همه ی آنها در همه ی تمرین ها رعایت شوند. در غیر این صورت چون بخش هایی از تصحیح تمرین ها به صورت اتوماتیک انجام می شود، ممکن است نمره از دست بدهید. به کوچک و بزرگ بودن حروف نیز دقت فرمایید.

- همه ی کدهای مربوط به یک سوال را در یک پوشه با نام "p+problem number" قرار دهید. مثلا کدهای مربوط به سوال ۱ در پوشه ی "p1" قرار میگیرند.

- پوشه های مربوط به کدهای سوال های مختلف را همگی در یک پوشه تحت عنوان "src" قرار دهید.

- در برخی سوال ها از شما خواسته می شود که توابع خاصی را پیاده سازی کنید و یا نتایج برخی محاسبات را در فایل هایی بنویسید. این که این توابع چه نام و آرگومان هایی داشته باشد و یا این فایل ها چه نام و ساختاری داشته باشند، به دقت در آن سوال تشریح می شود و شما نیز آنها را به دقت رعایت کنید. این گونه فایل ها را نیز در پوشه ی مربوط به سوال آنها قرار دهید.

- برای هر تمرین یک فایل گزارش در فرمت pdf تهیه کنید و برخی سوال ها که نیاز به نمودار یا پاسخ تشریحی و یا هر گونه توضیح دیگری دارند، در آن مرقوم فرمایید. نام این فایل را نیز به صورت "HW+#HW+_+student number" قرار دهید مثلا "HW2_93604367.pdf"

- در نهایت هنگام ارسال تمرین ها پوشه ی src را در کنار فایل گزارش درون یک فایل آرشیو (زیپ) شده با نام مشابه فایل گزارش قرار دهید و ارسال فرمایید.

- هم فکری با دیگران در حل سوالات جایز و بلکه مستحب است. اما استفاده از کدهای دیگران به هیچ وجه مجاز نیست. در روند تصحیح بنای ما بر اعتماد است و به طور ویژه به دنبال کشف تقلب نیستیم. اما اگر بنا به هر دلیلی وقوع تقلب احراز شود، نمره ی تمرین عملی در کل ترم صفر منظور خواهد شد.

در بخش تمرینات R، دو دستیار آموزشی به شما کمک می کنند. برای ارتباط با آقای حامد واسعی از آدرس vasei.hamed@gmail.com و برای تماس با آقای سینا یزدانبد از آدرس sina.yazdanbod@gmail.com استفاده کنید.

۶ تباهی قمارباز

فرض کنید سپهر به اندازه ۳ رقم آخر شماره دانشجویی شما بعلاوه ۷۵ در ابتدای بازی پول داشته باشد و سهند به اندازه ۱۰۰ دلار پول داشته باشد. در هر مرحله بعد از بازی با کارت های حرام یک نفر می برد (فرض کنید بازی مساوی ندارد) نفر برنده یک دلار از نفر بازنده می گیرد. در ادامه فرض کنید که برنده شدن نفر اول به احتمال p و برنده شدن نفر دوم به احتمال $1-p$ رخ می دهد. این بازی زمانی تمام می شود که یکی از بازی کنندگان به دارایی صفر برسد یا بازی n بار انجام شده باشد.

- فرض کنید $n = 1000$ و $p = 0.7$ برنامه ای بنویسید که این بازی را شبیه سازی کند و در پایان هر مرحله موجودی هر نفر را چاپ کند تا بازی تمام شود و در نهایت برنده را نمایش دهد. کد را ده بار اجرا کنید به طور میانگین چه کسی بیشتر برنده می شود؟
- برنامه مرحله قبل را برای $p = 0.5$ و $p = 0.6$ و $p = 0.9$ تکرار و دوباره اجرا کنید. در هر کدام از این موارد چه کسی بیشتر برنده می شود؟
- نمودار دارایی هر شخص را در هر مرحله برای $p = 0.5$ و $p = 0.7$ رسم کنید. چه تفاوتی مشاهده می کنید؟ علت این تفاوت چیست؟
- میانگین زمان طول کشیدن بازی برای $p = 0.7$ چقدر است؟

۷ زندگی عادلانه نیست

پرتاب سکه در بهترین حالت عادلانه است و احتمال آمدن شیر با احتمال آمدن خط برابر است. ولی همیشه نمی توان چنین سکه ای پیدا کرد و ممکن است سکه شما غیر عادلانه باشد. فن نیومن در سال ۱۹۵۱ به ناعادلانه بودن زندگی پی برده و راه حل زیر را برای گرفتن جواب عادلانه پیشنهاد کرده است.

۱. سکه را دوبار بیندازید.
 ۲. اگر هر دو شیر بودند جواب شیر اگر هر دو خط بودند جواب را خط در نظر بگیرید. در غیر این صورت دوباره از ابتدا شروع کنید.
- می خواهیم این روش را در R پیاده کنیم.
- فرض کنید که احتمال شیر آمدن برابر با $p = 0.6$ باشد. برنامه ای بنویسید که مراحل بالا را تا به جواب رسیدن ۱۰۰ بار تکرار کند. (صد بار جواب شیر یا خط را با استفاده از مراحل فن نیومن بدست بیاورید) به طور میانگین چند بار سکه پرتاب شده است؟
 - فرض کنید که $p = 0.9$ باشد. در این صورت جواب سوال قسمت قبل چیست؟
 - نمودار احتمال ها را بر حسب تعداد پرتاب ها رسم کنید. کافی است $p = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$ را قرار دهید و نمودار را برای این اعداد رسم کنید.

۸ با هدف زندگی کنیم

سهند در ادامه خفن بودن خود شروع به انداختن یک سکه منصف کرده است. سهند تصمیم گرفته است که تمام زندگی خود را وقف انداختن این سکه کند و نتیجه ها را یادداشت کند. اگر شیر بیاید او یک و در غیر این صورت صفر را روی یک کاغذ می نویسد. پس از مرگ سهند سينا نوشته های او را پیدا کرده می خواهد جواب سوال هایی را بدهد و این جواب ها را در مراسم سهند بخواند که بتواند روح سهند را به آرامش برساند. فرض کنید سهند قبل از مرگ حدود $n = 500000$ بار سکه انداخته است. از آنجا که سينا درگیر مراسم خاک سپاری است، این کار را به شما می سپارد. برنامه ای بنویسید که سکه ای منصف را n بار بیندازد و با توجه به داده های بدست آمده به سوالات زیر پاسخ دهید.

- اگر رشته‌های به طول ۴ رشته‌های مورد علاقه سهند باشند. بدست بیاورید که هرکدام از این رشته‌ها چند بار در دنباله سهند تکرار شده‌اند. سپس بافت‌نگار این نتایج را رسم کنید. توجه کنید که به عنوان مثال در هشت بار پرتاب سکه چهار رشته‌ی چهار بیتی ظاهر می‌شود و نه دو تا.
- اگر در سوال قبل به جای ۴ به دنباله رشته‌های به طول ۱۰ باشیم. جواب سوال قبل چگونه می‌شود؟ بافت‌نگار این قسمت را رسم کنید.
- سهند در زمان حیاتش در تلاش بود که رشته‌ای به طول چهار را پیدا کند که میانگین زمان بین دو تکرار متوالی آن کم‌ترین باشد. این زمان را برای رشته‌های چهار بیتی مختلف محاسبه کنید و رشته‌ای را که سهند در جست‌وجوی آن زندگی‌ش را از دست داد، پیدا کنید.