КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

М.О.Денисьєвський, А.В.Чайковський

ЗБІРНИК ЗАДАЧ З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Функції кількох змінних

Видавничо-поліграфічний центр
"Київський університет"
2012

Збірник задач з математичного аналізу. Функції кількох змінних. М. О. Денисьєвський, А. В. Чайковський / – К.: ВПЦ "Київський університет", 2012. – 276 с.

Задачник відповідає діючій програмі другого року навчання на математичних факультетах вищих навчальних закладів України. Наведені задачі з таких розділів математичного аналізу: елементи теорії метричних просторів, диференціальне числення функцій кількох змінних та його застосування, невласні інтеграли, кратні інтеграли, інтеграли по многовидах, ряд та інтеграл Фур'є. Вміщено короткий виклад теоретичних положень та приклади розв'язання задач.

Для викладачів та студентів математичних спеціальностей вищих навчальних закладів.

Рецензенти:

Доктор фізико-математичних наук, професор Ю.І.Волков (Кіровоградський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м.Кіровоград)

Доктор фізико-математичних наук, професор Т.А.Мельник (Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м.Київ)

Доктор фізико-математичних наук, провідний науковий співробітник А.Ю.Пилипенко (Інститут математики НАН України, м.Київ)

Рекомендовано до друку вченою радою механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка 1 липня 2011 р.

Зміст

Передмова

Увазі читача пропонується друга частина виданого у 2005 році "Збірника задач з математичного аналізу" [5]. Пропонований посібник повністю відповідає програмі другого року навчання на математичних факультетах університетів і узгоджений з підручниками [1], [2]. Основна мета, яку переслідували автори – це дати достатній матеріал для вироблення у студентів практичних навичок використання базових конструкцій аналізу, забезпечити навчальним матеріалом практичні заняття.

Спираючись на власний багаторічний досвід викладання на механіко-математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка і методичні розробки проф. А.Я. Дороговцева та колег з кафедри математичного аналізу, автори підібрали різні за характером задачі. По-перше, це досить прості змістовні задачі, спрямовані на розкриття основних понять курсу і взаємозв'язків між ними. По-друге, це досить велика підбірка задач технічного характеру для відпрацювання необхідних навичок. Крім того, вміщені дещо складніші теоретичні задачі для заохочення здібних студентів, які позначені зірочкою.

У задачнику викладачі знайдуть матеріал для аудиторної роботи і домашніх завдань, для контрольних робіт.

Стисло викладені основні поняття і факти курсу. Детально розібрані приклади розв'язання задач мають полегшити початківцям самостійне вивчення учбового матеріалу.

Велика частина із пропонованих задач запозичена з методичних посібників, розроблених на кафедрі математичного аналізу університету [6], [7], [8], а також з відомих задачників [4, 3]. Разом з тим, вміщені й нові задачі.

Автори дякують колегам за допомогу в підборі матеріалу і дуже корисне його обговорення. Особливо ми вдячні проф. О.Г Кукушу за копітку редакторську роботу. Слушне і змістовне спілкування з рецензентами, безумовно, сприяло покращенню викладу. Дякуємо професорам Т.А.Мельнику, Ю.І.Волкову, доктору фізико-математичних наук А.Ю.Пилипенку за велику роботу з рецензування рукопису.

Автори сподіваються на те, що цей посібник стане у нагоді всім, хто викладає чи вивчає математичний аналіз. Ми з вдячністю сприймемо критику, спрямовану на вдосконалення задачника.

Розділ 1

Метричні простори

1.1 Означення метрики і метричного простору. Куля, сфера, окіл точки

Нехай множина $X \neq \varnothing$. *Метрикою* або *відстанню* на X називається функція

$$\rho : X \times X \to \mathbb{R},$$

що задовольняє умови *(аксіоми метрики)*:

1) $\forall \{x, y\} \subset X : \ \rho(x, y) \geq 0$, причому $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$;
2) $\forall \{x, y\} \subset X : \ \rho(x, y) = \rho(y, x)$ *(симетричність)*;
3) $\forall \{x, y, z\} \subset X : \ \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ *(нерівність трикутника)*.

Множина X з означеною на ній метрикою ρ називається *метричним простором* і позначається символом (X, ρ).

Замкненою кулею радіуса $r > 0$ з центром у точці $x_0 \in X$ називається множина

$$\overline{B}(x_0; r) = \{x \in X |\ \rho(x_0, x) \leq r\}.$$

Відкритою кулею радіуса $r > 0$ з центром у точці $x_0 \in X$ називається множина

$$B(x_0; r) = \{x \in X |\ \rho(x_0, x) < r\}.$$

Сферою радіуса $r > 0$ з центром у точці $x_0 \in X$ називається множина

$$S(x_0; r) = \{x \in X |\ \rho(x_0, x) = r\}.$$

Під *околом* точки $x_0 \in X$ будемо розуміти довільну відкриту кулю B_{x_0} з центром у цій точці.

Множина $A \subset X$ називається *обмеженою* в метричному просторі (X, ρ), якщо вона є підмножиною деякої кулі.

Приклад 1. Нехай $X = \mathbb{R}^m = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) |\ x_k \in \mathbb{R},\ k = 1, 2, \ldots, m\}$. Функція

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (x_k - y_k)^2},\ \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_m), \quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)\} \subset \mathbb{R}^m,$$

є метрикою на $\mathbb{R}^m$.

$\ulcorner$ Перевірка перших двох аксіом метрики є очевидною. Нерівність трикутника випливає з нерівності Коші – Буняковського для сум:

$$\forall \{x, y, z\} \subset \mathbb{R}^m : \ \rho^2(x, y) = \sum_{k=1}^{m} (x_k - y_k)^2 = \sum_{k=1}^{m} ((x_k - z_k) + (z_k - y_k))^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} (x_k - z_k)^2 + 2 \sum_{k=1}^{m} (x_k - z_k)(z_k - y_k) + \sum_{k=1}^{m} (z_k - y_k)^2 \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m} (x_k - z_k)^2 + 2\sqrt{\sum_{k=1}^{m} (x_k - z_k)^2 \sum_{k=1}^{m} (z_k - y_k)^2} + \sum_{k=1}^{m} (z_k - y_k)^2 =$$

$$= \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{m} (x_k - z_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (z_k - y_k)^2} \right)^2 = (\rho(x, z) + \rho(z, y))^2. \qquad \lrcorner$$

Запроваджені у цьому прикладі метрика і сам метричний простір називаються *евклідовими*. **Надалі позначення $(\mathbb{R}^m, \rho)$ завжди буде використовуватися для m-вимірного *евклідового простору.*** Зауважимо, що замкнена куля та сфера у цьому просторі збігаються з кругом та колом ($m = 2$) та зі звичайними кулею та сферою ($m = 3$) відповідно.

Приклад 2. Нехай $X = C([a;\, b])$. Функція

$$\rho(x, y) = \max_{t \in [a;\, b]} |x(t) - y(t)|, \quad \{x, y\} \subset C([a;\, b]),$$

є метрикою на $C([a;\, b])$.

$\lceil$ Перевірка перших двох аксіом метрики очевидна. Нерівність трикутника випливає з нерівностей

$$\forall\, s \in [a;\, b]: \quad |x(s) - y(s)| \le |x(s) - z(s)| + |z(s) - y(s)| \le$$
$$\le \max_{t \in [a;\, b]} |x(t) - z(t)| + \max_{t \in [a;\, b]} |z(t) - y(t)|,$$

$$\max_{t \in [a;\, b]} |x(t) - y(t)| \le \max_{t \in [a;\, b]} |x(t) - z(t)| + \max_{t \in [a;\, b]} |z(t) - y(t)|. \qquad \rfloor$$

Запроваджена у цьому прикладі метрика називається *рівномірною*. **Надалі позначення $(C([a;\, b]), \rho)$ завжди буде використовуватися для простору неперервних функцій з рівномірною метрикою.** Куля $\overline{B}(x_0; r)$ у цьому просторі є множиною всіх неперервних функцій на $[a; b]$, графіки яких лежать у смузі між графіками функцій $x_1(t) = x_0(t) - r$ і $x_2(t) = x_0(t) + r$, $t \in [a; b]$, включаючи, можливо, точки самих графіків функцій x_1 і x_2.

1.1. Які з наведених функцій

1) $d(x, y) = \sqrt{|\, x - y\,|}$; 2) $d(x, y) = |\, x^2 - y^2\,|$,

$\{x,\, y\} \subset \mathbb{R}$, визначають метрику на $\mathbb{R}$?

1.2. Довести, що функція

$$d(x, y) = \frac{|\, x - y\,|}{1 + |\, x - y\,|}, \quad \{x, y\} \subset \mathbb{R},$$

визначає метрику на $\mathbb{R}$.

1.3. Перевірити, що функція

$$d\big((x_1, x_2),\, (y_1, y_2)\big) = \sqrt{\frac{(x_1 - y_1)^2}{4} + \frac{(x_2 - y_2)^2}{9}},\ \{(x_1, x_2), (y_1, y_2)\} \subset \mathbb{R}^2,$$

визначає метрику на $\mathbb{R}^2$. Зобразити множини

$$B\big((0, 0);\, 1\big), \qquad S\big((5, 5);\, 1\big)$$

у просторі $(\mathbb{R}^2,\, d)$.

1.4. Які з функцій

1) $d_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 3|\, x_1 - y_1\,| + 2|\, x_2 - y_2\,|$;

2) $d_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{|\, x_1 - y_1\,|, |\, x_2 - y_2\,|\}$;

3) $d_3((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (x_1 - y_1)^2 + |\, x_2 - y_2\,|$; $\{(x_1, x_2), (y_1, y_2)\} \subset \mathbb{R}^2$,

визначають метрику на $\mathbb{R}^2$? Зобразити множини

$$\overline{B}((0,\, 0);\, 2), \quad \overline{B}((2,\, 3);\, 2), \quad S((0,\, 0);\, 1)$$

у просторах $(\mathbb{R}^2,\, d_1)$ та $(\mathbb{R}^2,\, d_2)$.

1.5. Нехай $X = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}$, ρ – евклідова метрика. Перевірити, що в $(X,\ \rho)$ має місце співвідношення

$$\overline{B}\big((0,0);\ 2\big) \subset \overline{B}\big((1,1);\ \sqrt{2}\big).$$

1.6. Нехай

$$X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid\ x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$$

та ρ – евклідова метрика на X. Зобразити кулі

$$B\left((1/2,\ 0);\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \qquad B\big((1,\ 0);\ 1\big)$$

у просторі $(X,\ \rho)$.

Зауваження. У задачах 1.5, 1.6 куля більшого радіуса є підмножиною кулі меншого радіуса.

1.7. Перевірити, що вказані функції визначають метрики на $\mathbb{R}^m$:

1) $d(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{m} |\, x_k - y_k \,|;$

2) $d(x,y) = \max\limits_{1 \leq k \leq m} |\, x_k - y_k \,|;$

3) $d(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{m} k\, |\, x_k - y_k \,|;$

4) $d(x,y) = \max\limits_{1 \leq k \leq m} (k\, |\, x_k - y_k \,|);$

5) $d(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{|\, x_k - y_k \,|}{k};$

6) $d(x,y) = \max\limits_{1 \leq k \leq m} \dfrac{|x_k - y_k|}{k};$

7) $d(x,y) = \big(\sum\limits_{k=1}^{m} k^2 (x_k - y_k)^2\big)^{1/2};$

8) $d(x,y) = \sqrt{|\, x_1 - y_1 \,|} + \sum\limits_{k=2}^{m} |\, x_k - y_k \,|;$

9) $d(x,y) = |\, x_1 - y_1 \,| + \big(\sum\limits_{k=2}^{m} (x_k - y_k)^2\big)^{1/2};$

10) $d(x,y) = |\, x_1 - y_1 \,| + \max\limits_{2 \leq k \leq m} |\, x_k - y_k \,|,$

де $\{x = (x_1, x_2, \ldots, x_m), \quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)\} \subset \mathbb{R}^m$.

1.8. Довести, що функція

$$d(x,y) = \Big(\int\limits_0^1 \big(x(t) - y(t)\big)^2\, dt\Big)^{1/2}, \quad \{x, y\} \subset C([0;\ 1]),$$

визначає метрику на $C([0;\ 1])$.

1.9. Які з функцій:

1) $d(x,y) = \max\limits_{t \in [0;\, 1/2]} |\, x(t) - y(t) \,|;$

2) $d(x,y) = \int\limits_0^1 |\, x(t) - y(t) \,|\, dt;$

3) $d(x,y) = \max\limits_{t \in [0;\, 1]} (e^{-t} |\, x(t) - y(t) \,|); \quad \{x, y\} \subset C([0;\ 1]),$

визначають метрику на $C([0,\,1])$?

1.10. У просторі $C([0;\,1])$ з рівномірною метрикою задані елементи

$$x_1(t) = t, \;\; x_2(t) = \frac{t}{2}, \;\; x_3(t) = \frac{1}{2}, \;\; x_4(t) = \sin \pi t, \quad t \in [0;\,1].$$

Які з наведених співвідношень мають місце:

1) $x_2 \in \overline{B}(x_1;\,1/3)$;
2) $x_4 \in \overline{B}(x_3;\,1/2)$;
3) $x_4 \in B(x_3; 1)$;
4) $x_1 \in B(x_2;\,1/2)$;
5) $x_4 \in S(x_3;\,1/2)$;
6) $S(x_2;\,1/4) \cap S(x_4; 1/4) \neq \varnothing$?

Дати графічну інтерпретацію.

1.11. У просторі $C([0;\,1])$ з рівномірною метрикою описати множини

$$B(x_1;\,1/4), \quad B(x_2;\,1/4), \quad B(x_1;\,1/4) \cap B(x_2;\,1/4), \quad B(x_3;\,1/4),$$
$$\overline{B}(x_1;\,1/4) \cap \overline{B}(x_3;\,1/4),$$

де $x_1(t) = \frac{1}{2}, \quad x_2(t) = t, \quad x_3(t) = \sin \pi t, \quad t \in [0;\,1]$.

1.12. Які з наведених функцій:

1) $d(x, y) = |\,\sin(x - y)\,|$;
2) $d(x, y) = \min\{1,\,|\,x - y\,|\}$;

$\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, визначають метрику на $\mathbb{R}$?

1.13. Нехай $(X,\,\rho)$ – метричний простір. Які з наведених функцій визначають метрику на X :

1) $d = \sqrt{\rho}$;
2) $d = \rho^2$;
3) $d = \min\{1,\,\rho\}$?

1.14*. Нехай функція $f : [0; +\infty) \to [0; +\infty)$ опукла вгору, $f(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$. Довести, що для метрики ρ на множині X функція $f(\rho)$ також метрика.

1.15. Нехай $(X\,\rho)$ – метричний простір. Довести такі властивості метрики:

1) *друга нерівність трикутника*
$$\forall \{x, y, z\} \subset X : \; |\rho(x, y) - \rho(y, z)| \le \rho(x, z);$$
2) *нерівність для довжини ламаної*, або *нерівність многокутника*
$$\forall\, n \ge 2 \; \forall \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset X : \; \rho(x_1, x_n) \le \sum_{k=1}^{n-1} \rho(x_k, x_{k+1});$$
3) *нерівність чотирикутника*
$$\forall \{x, y, u, v\} \subset X : \; |\rho(x, u) - \rho(y, v)| \le \rho(x, y) + \rho(u, v).$$

1.16. Довести, що в метричному просторі:

1) перетин двох околів точки x є околом цієї точки;
2) точки x та y, $x \neq y$, мають околи, що не перетинаються.

1.17. Нехай $(X_k,\,\rho_k)$, $k = 1, 2$, – метричні простори. Покладемо $X := X_1 \times X_2$ та

$$\rho\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) := \sqrt{\rho_1^2(x_1, y_1) + \rho_2^2(x_2, y_2)}, \quad \{(x_1, x_2), (y_1, y_2)\} \subset X.$$

Довести, що $(X,\, \rho)$ – метричний простір. Цей простір називається *декартовим добутком* просторів $(X_1,\, \rho_1)$ і $(X_2,\, \rho_2)$. Розглянути частковий випадок $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$ з евклідовою метрикою.

1.18. Нехай $(X_k, \rho_k),\ k = 1, 2$ – метричні простори, (X, ρ) – їх декартів добуток (див. задачу 1.17). Довести такі твердження:

1) для довільних околів B_{x_k} у просторах $(X_k,\, \rho_k)$, $k = 1, 2$, існує такий окіл $B_{(x_1,x_2)}$ у просторі $(X,\, \rho)$, що
$$B_{(x_1,x_2)} \subset B_{x_1} \times B_{x_2};$$
2) для довільного околу $B_{(x_1,x_2)}$ у просторі $(X,\, \rho)$ існують такі околи B_{x_k} у просторах $(X_k,\, \rho_k)$, $k = 1, 2$, що
$$B_{x_1} \times B_{x_2} \subset B_{(x_1,x_2)}.$$

Дати геометричну інтерпретацію цих тверджень у випадку, коли (X_1, ρ_1) та (X_2, ρ_2) – одновимірні евклідові простори.

1.19. Нехай $p \geq 1$. Позначимо
$$l_p := \Big\{x = (x_1, x_2, \ldots) \mid x_k \in \mathbb{R},\ k \geq 1; \quad \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < +\infty\Big\},$$
$$\rho_p(x, y) := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p\right)^{1/p}, \quad \{x = (x_1, x_2, \ldots),\ y = (y_1, y_2, \ldots)\} \subset l_p.$$
Довести, що $(l_1,\, \rho_1)$ та $(l_2,\, \rho_2)$ – метричні простори.

1.20. Які з наведених функцій

1) $d(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \,|\, x_k - y_k \,|$; 2) $d(x, y) = \sup\limits_{k \geq 1} |\, x_k - y_k \,|$,

$\{x = (x_1, x_2, \ldots),\ y = (y_1, y_2, \ldots)\} \subset l_2$, визначають метрику на множині l_2?

1.21. Позначимо
$$l_\infty = \{x = (x_1, x_2, \ldots) \mid x_k \in \mathbb{R},\ k \geq 1; \quad \sup_{k \geq 1} |x_k| < +\infty\},$$
$$\rho_\infty(x, y) = \sup_{k \geq 1} |x_k - y_k|, \quad \{x = (x_1, x_2, \ldots),\ y = (y_1, y_2, \ldots)\} \subset l_\infty.$$
Довести, що $(l_\infty,\, \rho_\infty)$ – метричний простір.

1.22. Нехай $X \neq \varnothing$ та
$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y, \end{cases} \qquad \{x, y\} \subset X.$$
Довести, що d – метрика на X (її називають *дискретною метрикою*).

1.23. Нехай

$$X = BV([a;b]) := \Big\{ x : [a;b] \to \mathbb{R} \mid$$

$$V(x,[a;b]) := \sup_{\lambda=\lambda([a;b])} \sum_{k=0}^{n-1} |x(t_{k+1}) - x(t_k)| < \infty \Big\} -$$

множина всіх функцій обмеженої варіації на відрізку $[a;\, b]$,

$$d(x,y) := |x(a) - y(a)| + V(x - y, [a;b]), \quad \{x,y\} \subset BV([a;b]).$$

Довести, що $(BV([a;b]),\, d)$ – метричний простір.

1.24. Величина

$$\mathrm{diam}(A) := \sup_{x,y \in A} \rho(x,y)$$

називається *діаметром* множини A. Довести, що множина A обмежена тоді й лише тоді, коли $\mathrm{diam}(A) < +\infty$.

1.25. Довести, що для довільної кулі $\overline{B}(x_0;r)$ у довільному метричному просторі (X,ρ) :

$$\mathrm{diam}(\overline{B}(x_0;r)) \le 2r.$$

Навести приклад, коли тут має місце строга нерівність.

1.2 Границя послідовності у метричному просторі

Нехай (X,ρ) – метричний простір.

Послідовність $\{x_n :\ n \ge 1\} \subset X$ *збігається* до елемента $x \in X$ у просторі (X,ρ), якщо $\rho(x_n,x) \to 0,\ n \to \infty$. При цьому елемент x називається *границею* послідовності $\{x_n :\ n \ge 1\}$, а сама послідовність називається *збіжною.*

Збіжна послідовність має єдину границю.

Теорема. Збіжність у просторі $(\mathbb{R}^m,\rho)$ рівносильна покоординатній збіжності.

Теорема. Збіжність у просторі $(C([a;\, b]),\rho)$ рівносильна рівномірній збіжності функціональної послідовності на $[a;\, b]$.

1.26. Послідовність елементів метричного простору називається *обмеженою* у цьому просторі, якщо множина її членів обмежена. Довести, що збіжна послідовність обмежена.

1.27. Нехай $x_n \to x, \quad n \to \infty,$ у метричному просторі $(X,\, \rho), \quad y \in X$. Довести, що $\rho(x_n,y) \to \rho(x,y), \quad n \to \infty$.

1.28. Нехай $x_n \to x,\ n \to \infty,$ у просторі $(X,\, \rho)$. Довести, що числова послідовність $\{\rho(x_n,x_{n+1})\ :\ n \ge 1\}$ збігається та знайти її границю.

1.29. Нехай $x_n \to x$ та $y_n \to y$ при $n \to \infty$ у метричному просторі $(X,\, \rho)$. Довести, що $\rho(x_n,y_n) \to \rho(x,y), \quad n \to \infty$.

1.30. Нехай послідовність $\{x_n\ :\ n \ge 1\}$ збігається в $(X,\,\rho)$, а послідовність $\{y_n\ :\ n \ge 1\} \subset X$ така, що $\rho(x_n, y_n) \to 0, \quad n \to \infty$. Довести, що послідовність $\{y_n\ :\ n \ge 1\}$ збігається в $(X,\,\rho)$ до тієї ж границі, що й послідовність $\{x_n\ :\ n \ge 1\}$.

1.31. Нехай $\{x_n\ :\ n \ge 1\}$ – збіжна послідовність у метричному просторі $(X,\,\rho)$. Довести, що числова множина $\{\rho(x_n,\,x_m) \mid n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}\}$ обмежена.

1.32. *Відстанню* від точки $x \in X$ до непорожньої множини $A \subset X$ у просторі $(X,\,\rho)$ називається величина

$$\rho(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y).$$

Нехай $x_n \to x,\ n \to \infty$, в $(X,\,\rho)$. Довести, що $\rho(x_n, A) \to \rho(x, A),\ n \to \infty$.

1.33. Нехай $\{x_n\ :\ n \ge 1\}$ – така послідовність елементів метричного простору $(X,\,\rho)$, що кожна з трьох її підпослідовностей $\{x_{2n}\ :\ n \ge 1\}$, $\{x_{2n-1}\ :\ n \ge 1\}$ та $\{x_{3n}\ :\ n \ge 1\}$ збігається у $(X,\,\rho)$. Довести, що тоді послідовність $\{x_n\ :\ n \ge 1\}$ збігається в просторі $(X,\,\rho)$.

1.34. Дослідити збіжність послідовностей в евклідовому просторі $(\mathbb{R}^m,\,\rho)$. Знайти границі збіжних послідовностей.

1) $\left\{x_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{2n+1}{n}\right)\ :\ n \ge 1\right\}, \quad m = 2;$

2) $\left\{x_n = \left(\frac{\cos n\pi}{2},\ \frac{n+1}{n^2}\right)\ :\ n \ge 1\right\}, \quad m = 2;$

3) $\left\{x_n = \left(\frac{\sin n}{n},\ (-1)^n,\ \frac{1}{n^2}\right)\ :\ n \ge 1\right\}, \quad m = 3;$

4) $\left\{x_n = \left(\cos\frac{1}{n},\ \frac{2n-1}{n},\ \frac{2}{n}\right)\ :\ n \ge 1\right\}, \quad m = 3;$

5) $\left\{x_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{m}{n}\right)\ :\ n \ge 1\right\};$

6) $\{x_n = (n+1, n+2, \ldots, n+m)\ :\ n \ge 1\};$

7) $\left\{x_n = \left(1, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{3^n}, \ldots, \frac{1}{m^n}\right)\ :\ n \ge 1\right\};$

8) $\left\{x_n = \left(\frac{\operatorname{tg} 1}{n}, \frac{\operatorname{tg} 2}{n}, \ldots, \frac{\operatorname{tg} m}{n}\right)\ :\ n \ge 1\right\};$

9) $\left\{x_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \ldots, \frac{1}{n^m}\right)\ :\ n \ge 1\right\};$

10) $\left\{x_n = \left(\frac{n+1}{n}, \frac{n+2}{n}, \ldots, \frac{n+m-1}{n}, \cos n\pi\right)\ :\ n \ge 1\right\}.$

1.35. Дослідити збіжність послідовностей у просторі $\big(C([0;\,1]),\,\rho\big)$:

1) $\{x_n(t) = t^n,\ t \in [0;\,1]\ :\ n \ge 1\};$

2) $\{x_n(t) = t^2 + \dfrac{t}{n},\ t \in [0;\,1] \,:\, n \geq 1\}$;

3) $\{x_n(t) = t^n(1-t), t \in [0;\,1] \,:\, n \geq 1\}$;

4) $\{x_n(t) = (1-t)^n, t \in [0;\,1] \,:\, n \geq 1\}$;

5) $\{x_n(t) = \sin^n \pi t,\ t \in [0;\,1] \,:\, n \geq 1\}$;

6) $\left\{x_n(t) = t - \dfrac{\sin t}{n},\ t \in [0;\,1] \,:\, n \geq 1\right\}$;

7) $\{x_n(t) = \cos^{2n} \pi t, t \in [0;\,1] \,:\, n \geq 1\}$.

1.36. Дослідити збіжність послідовностей у просторі $C([0;\,1])$ з інтегральною метрикою (див. задачу 1.9 п. 2):

1) $\{x_n(t) = t^n,\ t \in [0;\,1] \,:\, n \geq 1\}$;

2)* $\{x_n(t) = \cos^{2n} \pi t, t \in [0;\,1] \,:\, n \geq 1\}$.

1.37. Нехай $X = (0;\,1)$, ρ – евклідова метрика на X. Довести, що послідовність $\left\{x_n = \dfrac{n}{2n+1} \,:\, n \geq 1\right\}$ збігається, а послідовності $\left\{y_n = \dfrac{1}{n} \,:\, n \geq 2\right\}$ та $\left\{z_n = 1 - \dfrac{1}{n} \,:\, n \geq 2\right\}$ розбігаються в $(X,\,\rho)$.

1.38. Нехай $(X_k,\,\rho_k)$, $k = 1, 2$ – метричні простори, $X = X_1 \times X_2$, $\rho = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2}$ (див. задачу 1.17). Довести, що послідовність $\{(x_1^{(n)},\ x_2^{(n)}) \,:\, n \geq 1\}$ збігається до елемента $(x_1,\ x_2)$ у просторі $(X,\,\rho)$ тоді й лише тоді, коли одночасно послідовність $\{x_1^{(n)} \,:\, n \geq 1\}$ збігається до x_1 та послідовність $\{x_2^{(n)} \,:\, n \geq 1\}$ збігається до x_2 відповідно у просторах $(X_1,\,\rho_1)$ та $(X_2,\,\rho_2)$.

1.39. У дискретному просторі $(X,\,d)$, визначеному в задачі 1.22, для фіксованого $x \in X$ описати множини

$$B(x;\,1), \quad \overline{B}\Big(x;\,\frac{1}{2}\Big), \quad S\Big(x;\,\frac{1}{2}\Big), \quad S(x;\,1).$$

Охарактеризувати збіжні послідовності в просторі $(X,\,d)$.

1.40. Нехай

$$C^{(1)}([0;1]) = \{x : [0;\,1] \to \mathbb{R} \mid \forall\, t \in [0;\,1]\ \exists\, x'(t); \quad x' \in C([0;\,1])\},$$
$$\rho(x,y) = \max_{t \in [0;\,1]} |\,x(t) - y(t)\,| + \max_{t \in [0;\,1]} |\,x'(t) - y'(t)\,|, \quad \{x,y\} \subset C^{(1)}([0;\,1]).$$

Довести, що $\big(C^{(1)}([0;\,1]),\,\rho\big)$ – метричний простір. Охарактеризувати збіжність послідовності елементів цього простору. Дослідити збіжність послідовностей:

1) $\left\{x_n(t) = \dfrac{\sin nt}{n},\ t \in [0;\,1] \,:\, n \geq 1\right\}$;

2) $\left\{ x_n(t) = \dfrac{t^{n+1}}{n+1} - \dfrac{t^{n+2}}{n+2},\ t \in [0;\,1]\ :\ n \geq 1 \right\}.$

1.41. Нехай для елементів $\{x, y\} \subset C\big((-\infty; +\infty)\big)$

$$\rho(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \min\{1,\ \rho_n(x,y)\},$$

де $\rho_n(x,y) := \max\limits_{t\in[-n;\,n]} |\,x(t) - y(t)\,|$. Довести, що $\Big(C\big((-\infty;+\infty)\big),\ \rho\Big)$ – метричний простір. Довести також, що збіжність у цьому просторі еквівалентна рівномірній збіжності функціональної послідовності на кожному відрізку.

1.42. Довести, що з обмеженої послідовності точок в $(\mathbb{R}^2,\ \rho)$ можна вибрати збіжну підпослідовність. Узагальнити це твердження на випадок простору $(\mathbb{R}^m,\ \rho),\ m \geq 1.$

1.43. Навести приклад обмеженої послідовності у $\big(C([a;\,b]),\ \rho\big)$, з якої не можна вибрати збіжну в цьому просторі підпослідовність.

1.44. Охарактеризувати збіжність у просторі $\big(C([a;\,b]),\ d\big)$ з метрикою

$$d(x,y) = \max_{t\in[a;\,b]} (e^{-t}|\,x(t) - y(t)\,|), \qquad \{x, y\} \subset C([a;\,b]).$$

1.45. Довести, що зі збіжності послідовності елементів в $(l_2,\ \rho)$ випливає покоординатна збіжність, але з покоординатної збіжності не випливає збіжність в $(l_2,\ \rho)$.

1.46. Нехай $\mathcal{P}_m([a;\,b])$ – множина всіх многочленів степеня не вище m з дійсними коефіцієнтами, що розглядаються на $[a;\,b]$. Для

$$p(x) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k\, x^k, \qquad q(x) = \sum_{k=0}^{m} \beta_k\, x^k, \qquad x \in [a;\,b],$$

покладемо

$$\rho(p,q) = \sum_{k=0}^{m} |\,\alpha_k - \beta_k\,|.$$

Довести, що $(\mathcal{P}_m([a;\,b],\ \rho)$ – метричний простір, збіжність у якому еквівалентна рівномірній збіжності на $[a;\,b]$.

1.3 Внутрішня, гранична та ізольована точки. Відкриті та замкнені множини

Нехай (X, ρ) – метричний простір, $A \subset X$.

Елемент $x_0 \in A$ називається *внутрішньою точкою* множини A, якщо

$$\exists\, r > 0 :\ B(x_0;\, r) \subset A.$$

Множину всіх внутрішніх точок множини A позначимо через A°.

Елемент $x_0 \in X$ називається *граничною точкою* множини A, якщо

$$\forall\, r > 0 \quad \exists\, y \in B(x_0;\, r) \cap A : \quad y \neq x_0.$$

Множину всіх граничних точок множини A позначимо через A'.

Елемент $x_0 \in A$ називається *ізольованою точкою* множини A, якщо

$$\exists\, r > 0 : \quad B(x_0;\, r) \cap A = \{x_0\}.$$

Множину всіх ізольованих точок множини A позначимо через $\widetilde{A}$.

Теорема про характеризацію граничної точки. Елемент $x_0 \in X$ є граничною точкою множини $A \iff \exists\, \{x_n:\ n \geq 1\} \subset A \setminus \{x_0\}:\ x_n \to x_0,\ n \to \infty$.

Множина A називається *відкритою* в метричному просторі (X, ρ), якщо $A \subset A^\circ$. Множина A називається *замкненою* в метричному просторі (X, ρ), якщо $A' \subset A$.

Властивості відкритих та замкнених множин. Відкрита куля є відкритою множиною. Замкнена куля є замкненою множиною. Об'єднання будь-якої сім'ї відкритих множин є відкритою множиною. Перетин скінченної сім'ї відкритих множин є відкритою множиною. Множина відкрита тоді й лише тоді, коли доповнення до неї є замкненою множиною. Перетин будь-якої сім'ї замкнених множин є замкненою множиною. Об'єднання скінченної сім'ї замкнених множин є замкненою множиною.

Множина $\overline{A}$, складена з усіх точок множини A та всіх її граничних точок A', називається *замиканням* множини A, тобто $\overline{A} := A \cup A'$. Множина $\overline{A}$ замкнена.

Приклад 1. Для множини $A = \{(x_1, x_2) |\ |x_1| < x_2 < 1\}$ у просторі $(\mathbb{R}^2,\ \rho)$ знайти множини внутрішніх (A°), граничних (A') та ізольованих $(\widetilde{A})$ точок. Чи є ця множина відкритою? замкненою?

$\lceil$ $A^\circ = A$. Дійсно,

$$\forall\, (x_1, x_2) \in A \quad \exists\, r := \min\left\{1 - x_2, \frac{x_2 - |x_1|}{\sqrt{2}}\right\} > 0 :\ B\big((x_1, x_2); r\big) \subset A.$$

Тому кожна точка множини A є внутрішньою, а сама множина є відкритою.

$A' = \{(x_1, x_2) |\ |x_1| \leq x_2 \leq 1\}$. Нехай $|x_1| \leq x_2 \leq 1$. Тоді для довільного $r > 0$ покладемо $y_1 = x_1 - \frac{1}{2}\min\{r, |x_1|\}\,\mathrm{sign}\, x_1$, $\quad y_2 = x_2 - \frac{1}{2}\min\{r, x_2\}$ для $x_2 > 0$ і $y_2 = \frac{1}{2}\min\{r, 1\}$ для $x_2 = 0$. Тоді $(y_1, y_2) \neq (x_1, x_2)$, $(y_1, y_2) \in B\big((x_1, x_2); r\big) \cap A$. Отже, $(x_1, x_2) \in A'$. Нехай $x_2 > 1$. Покладемо $r = x_2 - 1 > 0$. Тоді $B\big((x_1, x_2); r\big) \cap A = \varnothing$. Якщо $x_2 < |x_1|$, то покладемо $r = \frac{1}{2}(|x_1| - x_2) > 0$. Тоді $B\big((x_1, x_2); r\big) \cap A = \varnothing$. Таким чином, у цих випадках $(x_1, x_2) \notin A'$ і множина A не є замкненою.

$\widetilde{A} = \varnothing$. Це випливає з того, що $A \subset A'$. $\rfloor$

Приклад 2. Для множини $A = \{x \in C([0;\, 1]) |\ x(0)x(1) = 1\}$ у просторі $\big(C([0;\, 1]),\ \rho\big)$ знайти множини внутрішніх (A°), граничних (A') та ізольованих $(\widetilde{A})$ точок. Чи є ця множина відкритою? замкненою?

$\lceil$ $A^\circ = \varnothing$. Дійсно,

$$\forall\, x \in A \quad \forall\, r > 0 \quad \exists\, y,\ y(t) = x(t) + \tfrac{r}{2}t,\ t \in [0;\, 1] : \quad y \in B(x; r) \setminus A.$$

$A' = A$. Для доведення цієї рівності скористаємося теоремою про характеризацію граничної точки. З одного боку,

$$\forall\, x \in A \quad \exists\, \{x_n(t) = x(t) + n^{-1}t(1-t),\ t \in [0;\, 1] :\ n \geq 1\} \subset A \setminus \{x\} : \quad x_n \to x,\ n \to \infty.$$

Тому $A \subset A'$. З іншого боку,

$$\forall\, x \in A' \quad \exists\, \{x_n\ :\ n \geq 1\} \subset A : \quad x_n \to x,\ n \to \infty.$$

Тому

$$x(0)x(1) = \lim_{n\to\infty} x_n(0)x_n(1) = 1$$

і $x \in A$. Таким чином, $A' \subset A$. Множина A замкнена.

$\widetilde{A} = \varnothing$. Це випливає з того, що $A \subset A'$. $\rfloor$

1.47. Для множини A в просторі $(\mathbb{R},\, \rho)$ знайти множини внутрішніх (A°), граничних (A') та ізольованих $(\widetilde{A})$ точок:

1) $A = [0;\, 1]$;
2) $A = (0;\, 1)$;
3) $A = \mathbb{N}$;
4) $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;
5) $A = \mathbb{Z}$;
6) $A = \mathbb{Q}$;
7) $A = \Big\{\dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\Big\}$;
8) $A = \{1\} \cup \Big\{1 + \dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\Big\}$;
9) $\Big\{\dfrac{m}{|\,m\,| + n} \mid m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\Big\}$.

1.48. Знайти внутрішні та граничні точки множини A в просторі $(\mathbb{R},\, \rho)$:

1)* $A = \{\sqrt[3]{m} - \sqrt[3]{n} \mid \{m, n\} \subset \mathbb{N}\}$;
2)* $A = \{\sin n \mid n \in \mathbb{N}\}$;
3)* $A = \big\{\{\sqrt{n}\,\} \mid n \in \mathbb{N}\big\}$.

1.49. Для множини A в просторі $(\mathbb{R}^2,\, \rho)$ знайти множини внутрішніх (A°), граничних (A') та ізольованих $(\widetilde{A})$ точок:

1) $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$;
2) $A = \{(x_1, x_2) \mid 1 < x_1^2 + x_2^2 < 4\}$;
3) $A = \{(x_1, x_2) \mid x_2 > x_1\}$;
4) $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = x_2\}$;
5) $A = \{(x_1, x_2) \mid x_2 > x_1^2\}$;
6) $A = \{(x_1, x_2) \mid x_2 = x_1^2\}$;
7) $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1 > 0\}$;
8) $A = \{(x_1, x_2) \mid |x_1| + |x_2| \le 1\}$;
9) $A = \Big\{\Big(\dfrac{1}{n},\, \dfrac{1}{n^2}\Big) \mid n \in \mathbb{N}\Big\}$;
10) $A = \{\big((-1)^n, e^n\big) \mid n \in \mathbb{N}\}$;
11) $A = \Big\{\Big((-1)^n, \cos\dfrac{1}{n}\Big) \mid n \in \mathbb{N}\Big\}$;
12) $A = \Big\{\Big(\dfrac{m}{n},\, \dfrac{n}{m}\Big) \mid m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}\Big\}$;
13) $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$;
14) $A = \Big\{\Big(\dfrac{1}{n}, n \ln\dfrac{n+1}{n}\Big) \mid n \in \mathbb{N}\Big\}$.

1.50. Знайти внутрішні та граничні точки множини A в просторі $(\mathbb{R}^2,\, \rho)$:

1) $A = \{(x_1, x_2) \mid x_2 = r x_1,\ r \in \mathbb{Q},\, x_1 \in \mathbb{R}\}$;
2)* $A = \{(\sin n,\, \cos n) \mid n \in \mathbb{N}\}$;
3)* $A = \{(\sin n,\, \cos m) \mid n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}\}$.

1.51. Для множини A в просторі $C([0;\, 1]),\, \rho)$ знайти множини внутрішніх (A°), граничних (A') та ізольованих $(\widetilde{A})$ точок:

1) $A = \{x \in C([0;\, 1]) \mid 1 < x(0) < 2\}$;

2) $A = \{x \in C([0;\,1]) \mid x(0) = 1\}$;
3) $A = \{x \in C([0;\,1]) \mid x(0) \ge 1\}$;
4) $A = \{x \in C([0;\,1]) \mid x(0) = 1,\ x(1) = 0\}$;
5) $A = \{x \in C([0;\,1]) \mid x(0) + x(1) > 0\}$;
6) $A = \{x \in C([0;\,1]) \mid x(0) \cdot x(1) < 0\}$;
7) $A = \{x \in C([0;\,1]) \mid \forall\, t \in [0;\,1] \;:\; x(t) > t\}$;
8) $A = \left\{\dfrac{\sin \pi n t}{n},\ t \in [0;\,1] \mid n \in \mathbb{N}\right\}$.

1.52. Знайти внутрішні та граничні точки множини A в просторі $\big(C([0;\,1]),\,\rho\big)$:

1) $A = \{x \mid \max\limits_{t\in[0;\,1]} x(t) < 1\}$;
2) $A = \{x \mid \max\limits_{t\in[0;\,1]} x(t) \le 1\}$;
3) $A = \{x \mid \min\limits_{t\in[0;\,1]} x(t) > 0\}$;
4) $A = \{x \mid \int\limits_0^1 |\,x(t)\,|\,dt > 0\}$;
5) A – множина всіх многочленів на $[0;\,1]$;
6) A – множина всіх диференційовних функцій на $[0;\,1]$;
7) $A = \{x \mid \int\limits_0^1 x^2(t)\,dt > 1\}$.

1.53. Нехай $X = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ з евклідовою метрикою ρ. Знайти внутрішні та граничні точки в $(X,\,\rho)$ множини $A = \overline{B}\big((\tfrac{3}{4},\,0);\,1\big)$.

1.54. Нехай $x_n \to x,\ n \to \infty$, в метричному просторі $(X,\,\rho)$. Довести, що x – гранична точка множини $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ тоді й лише тоді, коли послідовність $\{x_n \;:\; n \ge 1\}$ містить нескінченно багато різних елементів.

1.55. Нехай $A_1 \subset \mathbb{R},\ A_2 \subset \mathbb{R}$. Довести твердження:

1) $x_1,\,x_2$ – внутрішні точки відповідно множин A_1 та A_2 в $(\mathbb{R},\,\rho)$ тоді й лише тоді, коли (x_1, x_2) – внутрішня точка множини $A_1 \times A_2$ в $(\mathbb{R}^2,\,\rho)$;
2) якщо x_1 та x_2 – граничні точки відповідно множин A_1 та A_2 в $(\mathbb{R},\,\rho)$, то (x_1, x_2) – гранична точка множини $A_1 \times A_2$ в $(\mathbb{R}^2,\,\rho)$;
3) твердження, обернене до 2), хибне.

1.56. Нехай $(X_k,\,\rho_k),\ \ k = 1, 2,$ – метричні простори, $X = X_1 \times X_2$, $\rho = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2}$ (див. задачу 1.17). Довести, що:

1) x_1 та x_2 – внутрішні точки відповідно множин $A_1 \subset X_1$ та $A_2 \subset X_2$ тоді й лише тоді, коли (x_1, x_2) – внутрішня точка множини $A_1 \times A_2$ в просторі $(X,\,\rho)$;
2) якщо x_1 та x_2 – граничні точки відповідно множин $A_1 \subset X_1$ та $A_2 \subset X_2$, то (x_1, x_2) – гранична точка множини $A_1 \times A_2$ в просторі (X, ρ);

3) твердження, обернене до 2), хибне.

1.57. Які з наведених множин відкриті в $(\mathbb{R},\ \rho)$? замкнені?

1) $[0;\ 1]$;
2) $(0;\ 1)$;
3) $[0;\ 1)$;
4) $[0;\ +\infty)$;
5) $\mathbb{N}$;
6) $\mathbb{Z}$;
7) $\mathbb{Q}$;
8) $\{n^{-1} |\ n \in \mathbb{N}\}$;
9) $\{0\} \cup \{n^{-1} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

1.58. Які з наведених множин відкриті в $(\mathbb{R}^2,\ \rho)$? замкнені?

1) $\{(x_1, x_2) \mid 1 < x_1^2 + x_2^2 < 2\}$;
2) $\{(x_1, x_2) \mid 1 \le x_1^2 + x_2^2 < 2\}$;
3) $\{(x_1, x_2) \mid x_1 = x_2\}$;
4) $\{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 > 1\}$;
5) $\{(x_1, x_2) \mid x_2 \le 2^{x_1}\}$;
6) $\{(x_1, x_2) \mid x_2 < \cos x_1\}$;
7) $\{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 > 9\}$;
8) $\{(x_1, x_2) \mid |x_1| - x_2 = 3\}$;
9) $\{(x_1, x_2) \mid 1 \le x_1 + x_2 < 2\}$;
10) $\Big\{(x_1, x_2) \mid \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1^{2n}}{1 + x_1^{2n}} \le \dfrac{1}{3},\ |x_2| \le 1\Big\}$.

1.59. Які з наведених множин відкриті в $(\mathbb{R}^3,\ \rho)$? замкнені?

1) $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4\}$;
2) $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 = 2,\ 1 < x_3 \le 2\}$;
3) $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = 3,\ x_2 + x_3 \le 4\}$.

1.60. Які з наведених множин відкриті (замкнені) у відповідних просторах?
У просторі $(\mathbb{R},\ \rho)$:

1) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\Big(1-\dfrac{1}{n};\ 1+\dfrac{1}{n}\Big)$;
2) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[2n;\ 2n+1]$;
3) $\bigcap\limits_{n=2}^{5}(\sqrt{n};\ \sqrt{n^3})$.

У просторі $(\mathbb{R}^2,\ \rho)$:

4) $\{(x_1, x_2) \mid x_1 < x_1^2 + x_2\} \cap \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 > x_1 - 3\}$;
5) $\{(x_1, x_2) \mid x_1^2 \le 2,\ x_1 + x_2 \ge 3\}$;
6) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\Big\{(x_1, x_2) \mid |\, x_1 \,| + |\, x_2 \,| < 5 - \dfrac{1}{n}\Big\}$;
7) $\bigcap\limits_{n=1}^{3}\{(x_1, x_2) \mid (x_1 - n)^2 + (x_2 - n)^2 \le 4n^2\}$.

1.61. Довести, що множини A_1 та A_2 відкриті в $(\mathbb{R},\ \rho)$ тоді й лише тоді, коли $A_1 \times A_2$ – відкрита множина в $(\mathbb{R}^2,\ \rho)$.

1.62. Які з підмножин множини $\mathcal{R} = \{(x_1, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$ відкриті в просторі $(\mathbb{R}^2,\ \rho)$? замкнені?

1.63. Довести, що множина відкрита в $(\mathbb{R},\ \rho)$ тоді й лише тоді, коли вона відкрита в $(\mathbb{R},\ d)$, де

$$d(x,y)=\sqrt{|\,x-y\,|},\qquad \{x,y\}\subset\mathbb{R}.$$

1.64. Довести, що в $(\mathbb{R}^2,\,\rho)$ будь-яка сім'я відкритих непорожніх множин, що попарно не перетинаються, не більш ніж злічення. Узагальнити це твердження на випадок евклідового простору $(\mathbb{R}^m,\,\rho)$, де $m\in\mathbb{N}$.

1.65. Які з наведених множин відкриті в $\big(C([0;\,1]),\,\rho\big)$? замкнені?

1) $\{x\mid x(0)=1\}$;
2) $\{x\mid x(\frac{1}{2})>0\}$;
3) $\{x\mid x(0)=x(1)=0\}$;
4) $\{x\mid x(0)\cdot x(1)<0\}$;
5) $\{x\mid t^2<x(t)<t,\ t\in(0;\,1)\}$;
6) $\{x\mid \sqrt{t}<x(t)<\sqrt[3]{t},\ t\in(0;1)\}$;
7) $\{x\mid \int\limits_0^1 x(t)\,dt=0\}$;
8) $\{x\mid x(t)=0,\ t\in[0;\,\frac{1}{2}]\}$;
9) $\{x\mid x(t)=0,\ t\in[\frac{1}{2};\,1]\}$;
10) $\{x\mid 1<x(t)<2,\ t\in[0;\,1]\}$;
11) $\{x\mid \min\limits_{t\in[0;\,1]} x(t)\le 0\}$;
12) $\{x\mid \max\limits_{t\in[0;\,1]} x(t)\ge 3\}$.

1.66. Чи є множина
$$\{x\mid \forall\, t\in[0;1]\quad \exists\, x'(t);\quad x'\in C([0;\,1])\}$$
відкритою в $\big(C([0;\,1]),\,\rho\big)$? замкненою?

1.67. Нехай x_1 та x_2 – фіксовані елементи в метричному просторі $(X,\,\rho)$. Довести, що в п.п. 1), 2) множини відкриті в $(X,\,\rho)$, а в п. 3), 4) множини замкнені в $(X,\,\rho)$:

1) $\{x\in X\mid \rho(x,x_1)+\rho(x,x_2)>1\}$;
2) $\{x\in X\mid \rho(x,x_1)\cdot\rho(x,x_2)<1\}$;
3) $\{x\in X\mid \rho(x,x_1)\ge 1\}$;
4) $\{x\in X\mid \rho(x,x_1)+\rho(x,x_2)\le 1\}$.

1.68. Нехай $(X_k,\,\rho_k)$, $k=1,2$ – метричні простори, $X=X_1\times X_2$, $\rho=\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2}$ (див. задачу 1.17). Довести, що $A_1\times A_2$ – відкрита множина в просторі $(X,\,\rho)$ тоді й лише тоді, коли A_1 та A_2 – відкриті множини відповідно в просторах $(X_1,\,\rho_1)$ та $(X_2,\,\rho_2)$.

1.69. Для замикання $\overline{A}$ множини A в метричному просторі $(X,\,\rho)$ довести, що
$$\overline{A}=\bigcap_{F\ \text{– замкнена},\ A\subset F} F.$$

1.70. Чи для довільної непорожньої множини $A\subset[0;\,1]$ множина
$$\big\{x\in C([0;\,1])\mid x(t)=0,\ t\in A\big\}$$
замкнена в просторі $\big(C([0;\,1]),\,\rho\big)$?

1.71. Охарактеризувати відкриті, замкнені множини в дискретному просторі $(X,\,d)$, визначеному в задачі 1.22.

1.4 Скрізь щільні множини. Сепарабельні простори

Нехай (X, ρ) – метричний простір.

Множина $N \subset X$ називається *скрізь щільною* в (X, ρ), якщо

$$\forall\, x \in X \quad \forall\, r > 0 \quad \exists\, y \in N: \quad \rho(x, y) < r.$$

Метричний простір (X, ρ) називається *сепарабельним,* якщо в ньому існує не більш ніж зліченна скрізь щільна множина.

Приклад 1. Простір $(\mathbb{R}, \rho)$ сепарабельний, оскільки за властивістю дійсних чисел зліченна множина $\mathbb{Q}$ є скрізь щільною в ньому.

Приклад 2. Простір $\big(C([a;\, b]),\, \rho\big)$ сепарабельний. Дійсно, для довільного $x \in C([a;\, b])$ і довільного $r > 0$ за апроксимаційною теоремою Вейєрштрасса існує такий алгебраїчний многочлен $P(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k t^k$, $t \in [a;\, b]$, з дійсними коефіцієнтами, що $\rho(P, x) < \dfrac{r}{2}$. Виберемо тепер такі раціональні числа $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$, що

$$\max_{0 \le k \le n} |\alpha_k - \beta_k| < \frac{r}{2(n+1)\max\{1, |a|^n, |b|^n\}}.$$

Для многочлена $Q(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} \beta_k t^k$, $t \in [a;\, b]$, виконується нерівність

$$\rho(P, Q) \le \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k - \beta_k| \max\{|a|^k, |b|^k\} < \frac{r}{2}.$$

Тоді $\rho(Q, x) < r$ за нерівністю трикутника для метрики. Таким чином, зліченна множина всіх многочленів з раціональними коефіцієнтами, що розглядаються на $[a;\, b]$, є скрізь щільною в $\big(C([a;\, b]),\, \rho\big)$, а сам простір сепарабельний.

1.72. Довести рівносильність тверджень:

1) Множина A скрізь щільна в (X, ρ);
2) $\forall\, x \in X \quad \forall\, r > 0: \quad B(x; r) \cap A \ne \varnothing$;
3) $\forall\, x \in X \quad \exists\, \{x_n:\ n \ge 1\} \subset A: \quad x_n \to x,\ n \to \infty$;
4) $\overline{A} = X$.

1.73. Які з наведених множин скрізь щільні в $(\mathbb{R},\, \rho)$:

1) $\mathbb{N}$;
2) $\mathbb{Z}$;
3) $\mathbb{Q}$;
4) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;
5) $\left\{\dfrac{m}{n^2} \mid m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\right\}$;
6) $\left\{\dfrac{m}{\sqrt{n}} \mid m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\right\}$;
7) $\{\ln m - \ln n \mid \{m, n\} \subset \mathbb{N}\}$;
8) $\{n \cdot \sin r \mid n \in \mathbb{Z},\ r \in \mathbb{Q}\}$;
9) $\{r\sqrt{2} \mid r \in \mathbb{Q}\}$;
10) $\{n + \cos r \mid n \in \mathbb{Z},\ r \in \mathbb{Q}\}$?

1.74. Чи є множина

$$N = \left\{\operatorname{tg} x \mid\ x \in \mathbb{Q} \cap \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

скрізь щільною в $(\mathbb{R},\, \rho)$?

1.75. Які з наведених множин скрізь щільні в $(\mathbb{R}^2,\, \rho)$:

1) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$; 2) $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$; 3) $\mathbb{Q}\times(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$?

1.76. Які з наведених множин скрізь щільні в $(\mathbb{R}^2,\, \rho)$:

1) $\{(n \cdot \sin r_1,\, n \cdot \cos r_2) \,|\, n \in \mathbb{N},\ \{r_1,\, r_2\} \subset \mathbb{Q} \cap [0;\, 2\pi]\}$;
2) $\{(r_1 + r_2,\, r_1 - r_2) \,|\, \{r_1,\, r_2\} \subset \mathbb{Q}\}$;
3) $\{(x_1,\, x_2) \,|\, x_2 = rx_1,\ r \in \mathbb{Q},\ x_1 \in \mathbb{R}\}$;
4) $\left\{\left(\dfrac{n}{m},\, \dfrac{m}{n}\right) \,|\, \{m,\, n\} \subset \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$;
5) $\{(m + \sin r_1,\, n + \sin r_2) \,|\, \{m,\, n\} \subset \mathbb{Z},\ \{r_1,\, r_2\} \subset \mathbb{Q}\}$;
6) $\{(r_1\sqrt{2},\, r_2\sqrt{3}) \,|\, \{r_1,\, r_2\} \subset \mathbb{Q}\}$;
7) $\{(n \cdot \cos r,\, n \cdot \sin r) \,|\, n \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Q}\}$?

1.77. Які з наведених множин скрізь щільні в $\big(C([0;\, 1]),\, \rho\big)$:

1) множина всіх многочленів парного степеня;
2) множина всіх многочленів непарного степеня;
3) множина всіх многочленів з ірраціональними коефіцієнтами;
4) множина многочленів з вільним членом, що дорівнює нулю;
5) множина всіх многочленів вигляду
$$p(t) = \sum_{k=0}^{m} a_k t^{2k},\ t \in [0;\, 1],$$
де $m \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ \{a_0, \ldots, a_m\} \subset \mathbb{R}$;
6) множина всіх диференційовних функцій на $[0;\, 1]$;
7) множина всіх неперервних функцій обмеженої варіації;
8) множина всіх кусково-лінійних неперервних функцій;
9) множина всіх функцій вигляду
$$g(t) = \sum_{k=0}^{m} a_k e^{kt},\ t \in [0;\, 1],$$
де $m \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ \{a_0, \ldots, a_m\} \subset \mathbb{R}$?

1.78. Які з наведених множин скрізь щільні в просторі $\big(C([a;\, b]),\, d\big)$ з інтегральною метрикою
$$d(x, y) = \int_a^b |\, x(t) - y(t) \,|\, dt, \qquad \{x, y\} \subset C([a;\, b]) :$$

1) множина всіх многочленів, що розглядаються на $[a;\, b]$;
2) множина всіх двічі диференційовних функцій на $[a;\, b]$;
3) $\{x \in C([a;\, b]) \,|\, x(a) = 0\}$;

4) $\{x \in C([a;\, b]) \mid x(a) = x(b)\}$?

1.79. Які з наведених множин скрізь щільні в просторі $C([0;\, 1])$ з метрикою

$$d(x, y) = \Big(\int_0^1 \big(x(t) - y(t)\big)^2\, dt\Big)^{1/2}, \quad \{x, y\} \subset C([0;\, 1]):$$

1) множина всіх многочленів, що розглядаються на $[0;\, 1]$;
2) множина всіх диференційовних функцій на $[0;\, 1]$;
3) множина всіх многочленів p, для яких $p(0) = 0$?

1.80. Довести сепарабельність простору $(\mathbb{R}^2,\, d)$ з метрикою
$d\big((x_1, x_2),\, (y_1, y_2)\big) = \max\{|x_1 - y_1|,\, |x_2 - y_2|\},\ \{(x_1, x_2),\, (y_1, y_2)\} \subset \mathbb{R}^2$.

1.81. Довести сепарабельність простору $C([0;\, 1])$ з інтегральною метрикою

$$d(x, y) = \int_0^1 |\, x(t) - y(t)\,|\, dt, \quad \{x, y\} \subset C([0;\, 1]).$$

1.82. Нехай $(X_k,\, \rho_k)$, $k = 1, 2$, – сепарабельні метричні простори, $X = X_1 \times X_2$, $\rho = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2}$ (див. задачу 1.17). Довести сепарабельність простору $(X,\, \rho)$.

1.83. Довести сепарабельність простору

$$X = \{(x_1,\, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

з відстанню ρ, що дорівнює довжині меншої дуги між точками кола X.

1.84. За яких умов дискретний простір $(X,\, d)$ (див. задачу 1.22) сепарабельний?

1.85. Які з наведених множин скрізь щільні в просторі $\big(\mathcal{P}_m([a;\, b]),\, \rho\big)$ (див. задачу 1.46):

1) множина всіх многочленів степеня не вище m з цілими коефіцієнтами;
2) множина всіх многочленів степеня не вище m з раціональними коефіцієнтами?

1.86. Для $p = 1, 2$ довести сепарабельність простору $(l_p,\, \rho_p)$.

1.87. Довести, що в сепарабельному метричному просторі будь-яка непорожня відкрита множина є об'єднанням не більш як зліченної сім'ї відкритих куль.

1.88. Довести, що в сепарабельному метричному просторі будь-яка сім'я непорожніх відкритих множин, що попарно не перетинаються, не більш як зліченна.

1.89. Нехай $(X,\, \rho)$ – сепарабельний метричний простір, $A \subset X$, $A \neq \varnothing$. Довести, що $(A,\, \rho)$ – сепарабельний метричний простір.

1.90. Довести несепарабельність наведених просторів:

1) $(l_\infty,\, \rho_\infty)$ (див. задачу 1.21);
2) простір функцій обмеженої варіації $(BV([a;\, b]),\, d)$ (див. задачу 1.23).

1.5 Фундаментальні послідовності. Повні метричні простори

Нехай (X, ρ) – метричний простір.

Послідовність $\{x_n\, :\, n \ge 1\} \subset X$ називається *фундаментальною* в (X, ρ), якщо

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \ge N \quad \forall\, m \ge N: \quad \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Метричний простір (X, ρ) називається *повним*, якщо кожна фундаментальна послідовність його елементів збігається до деякого елемента з X.

Приклад 1. Простір $(\mathbb{R}^m, \rho)$ при кожному $m \in \mathbb{N}$ повний. Дійсно, для $m = 1$ це випливає з критерія Коші збіжності числових послідовностей. Нехай $m > 1$. Розглянемо довільну фундаментальну в $(\mathbb{R}^m, \rho)$ послідовність $\{x(n) = (x_1(n), x_2(n), \ldots, x_m(n))\, :\, n \ge 1\}$. Оскільки для кожного $k = 1, 2, \ldots, m$ і натуральних n, p має місце нерівність $|x_k(n) - x_k(p)| \le \rho(x(n), x(p))$, то кожна координатна послідовність $\{x_k(n)\, :\, n \ge 1\}$ є фундаментальною числовою послідовністю, яка за критерієм Коші збігається до деякого $x_k \in \mathbb{R}$. Збіжність в просторі $(\mathbb{R}^m, \rho)$ еквівалентна покоординатній збіжності, тому $x(n) \to x = (x_1, x_2, \ldots, x_m),\ n \to \infty$, в $(\mathbb{R}^m, \rho)$. ⌋

Приклад 2. Простір $C([a;\, b],\, \rho)$ повний внаслідок критерія Коші рівномірної збіжності функціональної послідовності.

Приклад 3. Простір $C([0;\, 2])$ з інтегральною метрикою

$$d(x, y) = \int\limits_0^2 |\, x(t) - y(t)\, |\, dt, \quad \{x, y\} \subset C([a;\, b]),$$

є неповним.

⌈ Послідовність $\left\{ x_n(t) = \dfrac{t^n}{1 + t^n},\ t \in [0;\, 2]\, :\, n \ge 1 \right\}$ фундаментальна в просторі $C([0;\, 2],\, d)$ оскільки

$$\forall\, n \ge 2\ \forall\, p \ge 1:\ d(x_n, x_{n+p}) = \int\limits_0^2 |x_n(t) - x_{n+p}(t)|\, dt = \int\limits_0^2 \left| \frac{t^n}{1 + t^n} - \frac{t^{n+p}}{1 + t^{n+p}} \right| dt =$$

$$= \int\limits_0^2 \frac{|t^n - t^{n+p}|}{(1 + t^n)(1 + t^{n+p})}\, dt \le \int\limits_0^1 (t^n - t^{n+p})\, dt + \int\limits_1^2 \left(\frac{1}{1 + t^n} - \frac{1}{1 + t^{n+p}} \right) dt \le$$

$$\le \int\limits_0^1 t^n\, dt + \int\limits_1^2 t^{-n}\, dt < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} < \frac{2}{n-1}.$$

Однак ця послідовність не збігається в інтегральній метриці до жодного елемента з $C([0;\, 2])$. Міркуємо від супротивного. Припустимо, що $x_n \to x,\ n \to \infty$, у просторі $\big(C([0;\, 2]), d\big)$. Для довільного $\delta \in (0; 1)$:

$$\max_{t \in [0;\delta]} |x_n(t)| \le \delta^n, \qquad \max_{t \in [1+\delta;2]} |x_n(t) - 1| \le \frac{1}{(1 + \delta)^n}.$$

Таким чином,

$$\forall\,\delta \in (0;1): \quad x_n(t) \underset{t\in[0;\delta]}{\rightrightarrows} 0, \quad x_n(t) \underset{t\in[1+\delta;2]}{\rightrightarrows} 1, \quad n \to \infty.$$

Тому за теоремою про граничний перехід під знаком інтеграла

$$\int\limits_0^{1-\delta} |x_n(t) - 0|\, dt \to 0, \qquad \int\limits_{1+\delta}^{2} |x_n(t) - 1|\, dt \to 0, \quad n \to \infty.$$

Звідси випливає, що

$$\forall\,\delta \in (0;1): \quad x(t) = 0,\ t \in [0; 1-\delta]; \quad x(t) = 1,\ t \in [1+\delta; 2].$$

Оскільки число $\delta \in (0;1)$ довільне, то

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0;1), \\ 1, & t \in (1;2]. \end{cases}$$

Це суперечить неперервності функції x на відрізку $[0;2]$.

Зауважимо, що поточкова границя послідовність функцій $\{x_n\ :\ n \ge 1\}$ у цьому прикладі має неусувний розрив першого роду в точці $t = 1$.

Іншим прикладом фундаментальної розбіжної в $C([0;\,2],\,d)$ послідовності є

$$x_n(t) = \begin{cases} \sqrt{n}, & t \in \left[0; \dfrac{1}{n}\right), \\ \dfrac{1}{\sqrt{t}}, & t \in \left[\dfrac{1}{n}; 2\right], \end{cases} \qquad n \ge 1,$$

що поточково збігається до необмеженої функції $x(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, $t \in (0;2]$. ⌋

1.91. Нехай послідовність $\{x_n\ :\ n \ge 1\}$ точок простору $(X,\,\rho)$ фундаментальна, а послідовність $\{y_n : n \ge 1\} \subset X$ така, що $\rho(x_n, y_n) \to 0,\ n \to \infty$. Довести, що $\{y_n :\ n \ge 1\}$ – фундаментальна послідовність.

1.92. Послідовність $\{x_n\ :\ n \ge 1\}$ точок метричного простору $(X,\,\rho)$ задовольняє умову

$$\forall\, n \ge 1\ :\quad \rho(x_n,\, x_{n+1}) \le 2^{-n}.$$

Довести фундаментальність послідовності $\{x_n\ :\ n \ge 1\}$.

1.93. Послідовність $\{x_n\ :\ n \ge 1\}$ точок метричного простору $(X,\,\rho)$ задовольняє умови:

а) $\forall\, n \ge 1\ :\ \rho(x_n, x_{n+2}) \le a_n$; б) $\rho(x_n, x_{n+1}) \to 0,\ n \to \infty$.

Довести, що послідовність $\{x_n\ :\ n \ge 1\}$ фундаментальна в кожному з таких випадків:

1) $a_n = 3^{-n}$;

2) $a_n = e^{-n}$;

3) $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$;

4) $a_n = n^{-2}$;

5) $a_n = \dfrac{1}{n\,\ln^2(n+1)}$;

6) $a_n = \dfrac{1}{n}\ln\Big(1 + \dfrac{1}{n}\Big)$;

7) $a_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}, \quad n \geq 1.$

8) Чи обов'язково послідовність $\{x_n \ : \ n \geq 1\}$ фундаментальна, якщо $a_n = n^{-1}, \quad n \geq 1$?

1.94. Довести обмеженість фундаментальної послідовності елементів метричного простору.

1.95. Нехай $\{x_n \ : \ n \geq 1\}$ – фундаментальна послідовність у метричному просторі $(X,\, \rho)$. Довести, що для будь-якого елемента $x \in X$ числова послідовність $\{\rho(x_n, x) \ : \ n \geq 1\}$ збіжна.

1.96. Нехай послідовності $\{x_n \ : \ n \geq 1\}$ і $\{y_n \ : \ n \geq 1\}$ фундаментальні в метричному просторі $(X,\, \rho)$. Довести збіжність числової послідовності $\{\rho(x_n,\, y_n) \ : \ n \geq 1\}$.

1.97. Довести, що фундаментальна послідовність збіжна в метричному просторі тоді й лише тоді, коли вона має збіжну підпослідовність.

1.98. З'ясувати, чи є повними наведені простори.
В п.п. 1) – 7) ρ – евклідова метрика на $\mathbb{R}$.

1) $([0;\, 1],\, \rho)$;
2) $((0;\, 1),\, \rho)$;
3) $(\mathbb{Z},\, \rho)$;
4) $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},\, \rho)$;
5) $(\mathbb{Q},\, \rho)$;
6) $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\, \rho)$;
7) $((-\infty;\, 1] \cup \{2\},\, \rho)$;
8) $(\mathbb{R}^2,\, d)$, де
$d(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$, $\{x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2)\} \subset \mathbb{R}^2$;
9) $(\mathbb{R}^3,\, d)$, де $\quad d(x,y) = \max\limits_{1 \leq k \leq 3} \sqrt{|\, x_k - y_k\,|}$,
$\{x = (x_1, x_2, x_3),\ y = (y_1, y_2, y_3)\} \subset \mathbb{R}^3$;
10) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ з евклідовою метрикою ρ.

1.99. Довести повноту простору $(\mathbb{R}^3,\, d)$, з метрикою
$$d\big((x_1, x_2, x_3),\, (y_1, y_2, y_3)\big) = \max_{1 \leq k \leq 3} |\, x_k - y_k\,|,$$
де $\{(x_1, x_2, x_3),\, (y_1, y_2, y_3)\} \subset \mathbb{R}^3$.

1.100. Нехай
$$X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\},$$
$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{3} |\, x_k - y_k\,|,\ \{x = (x_1, x_2, x_3),\ y = (y_1, y_2, y_3)\} \subset X.$$
Чи є метричний простір $(X,\, d)$ повним?

1.101. Довести повноту простору $(\mathbb{R}^m,\, d)$, якщо для $\{x = (x_1, \ldots, x_m),\ y = (y_1, \ldots, y_m)\} \subset \mathbb{R}^m$:

1) $d(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{m} |\, x_k - y_k\,|$;
2) $d(x,y) = \max\limits_{1\le k\le m} |\, x_k - y_k\,|$;
3) $d(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{m} k\,|\, x_k - y_k\,|$;
4) $d(x,y) = \max\limits_{1\le k\le m} k\,|\, x_k - y_k\,|$;
5) $d(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{|\, x_k - y_k\,|}{k}$;
6) $d(x,y) = \max\limits_{1\le k\le m} \dfrac{|\, x_k - y_k\,|}{k}$;
7) $d(x,y) = \sqrt{|\, x_1 - y_1\,|} + \sum\limits_{k=2}^{m} |\, x_k - y_k\,|$;
8) $d(x,y) = |\, x_1 - y_1\,| + \max\limits_{2\le k\le m} |\, x_k - y_k\,|$;
9) $d(x,y) = \big(\sum\limits_{k=1}^{m} k^2 (x_k - y_k)^2\big)^{1/2}$;
10) $d(x,y) = |\, x_1 - y_1\,| + \big(\sum\limits_{k=2}^{m} (x_k - y_k)^2\big)^{1/2}$.

1.102. Довести повноту метричного простору $\big(C([a;\, b]),\, d\big)$, де

$$d(x,y) = \max_{t\in[a;\, b]} \big(e^{-t} \cdot |\, x(t) - y(t)\,|\big), \quad \{x, y\} \subset C([a;\, b]).$$

1.103. Нехай $(X_k,\, \rho_k)$, $k = 1, 2$, – метричні простори, $X = X_1 \times X_2$, $\rho = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2}$ (див. задачу 1.17). Довести такі твердження:

1) послідовність $\{(x_1^{(n)},\, x_2^{(n)}) \;:\; n \ge 1\}$ фундаментальна в просторі $(X,\, \rho)$ тоді й тільки тоді, коли послідовності $\{x_1^{(n)} \;:\; n \ge 1\}$ та $\{x_2^{(n)} \;:\; n \ge 1\}$ фундаментальні відповідно в просторах $(X_1,\, \rho_1)$ та $(X_2,\, \rho_2)$;
2) простір $(X,\, \rho)$ повний тоді й тільки тоді, коли обидва простори $(X_1,\, \rho_1)$ та $(X_2,\, \rho_2)$ повні.

1.104. Довести повноту простору $(l_2,\, \rho_2)$.

1.105. Нехай $(X,\, \rho)$ – повний метричний простір, A – замкнена множина в $(X,\, \rho)$. Довести, що $(A,\, \rho)$ – повний метричний простір.

1.106. Нехай $(X,\, \rho)$ – метричний простір, $A \subset X$. Довести, що з повноти простору $(A,\, \rho)$ випливає замкненість множини A в просторі $(X,\, \rho)$.

1.107. Довести повноту простору $(C^{(1)}([0;\, 1]),\, \rho)$ (див. задачу 1.40).

1.108*. Довести неповноту множини $C^{(1)}([a;\, b])$ всіх неперервно диференційовних на $[a;\, b]$ функцій з метрикою

$$d(x,y) = \max_{t\in[a;\, b]} |\, x(t) - y(t)\,|, \quad \{x, y\} \subset C^{(1)}([a;\, b]).$$

1.109. Нехай $\mathcal{P}([0;\,1])$ – сім'я всіх многочленів, що розглядаються на відрізку $[0;\,1]$,

$$\rho(p,q) = \max_{t\in[0;\,1]} |\,p(t) - q(t)\,|, \quad \{p,q\} \subset \mathcal{P}([0;\,1]).$$

Чи є $\big(\mathcal{P}([0;\,1]),\,\rho\big)$ повним метричним простором?

1.6 Границя відображення

Нехай (X,ρ), (Y,σ) – метричні простори, $A \subset X$, x_0 – гранична точка множини A, $f : A \to Y$.

Елемент $p \in Y$ називається *границею* відображення f у точці x_0, якщо

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta > 0 \quad \forall\,x \in A \cap \check{B}(x_0,\,\delta):\ f(x) \in B(p;\,\varepsilon), \ \text{ де } \check{B}(x_0,\,\delta) := B(x_0,\,\delta) \setminus \{x_0\}.$$

Надалі у цьому випадку будемо використовувати запис $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = p$ або $f(x) \to p,\ x \to x_0$.

Еквівалентне означення можна дати в термінах послідовностей *(означення Гейне)*:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = p \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall\,\{x_n : n \geq 1\} \subset A \setminus \{x_0\}, \quad x_n \to x_0 \ :\ f(x_n) \to p,\ n \to \infty.$$

Теорема (про єдиність границі). Нехай $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = p$ та $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = q$. Тоді $p = q$.

Теорема (про арифметичні дії). Нехай $Y = \mathbb{R}$ з евклідовою метрикою σ, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = p$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = q$. Тоді:

1) $\forall\,c \in \mathbb{R} :\ \lim\limits_{x\to x_0} (cf(x)) = cp$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = p + q$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = p \cdot q$;

4) якщо додатково $q \neq 0$, то $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{p}{q}$.

У випадку $X = \mathbb{R}^2$ з евклідовою метрикою ρ для $x_1^0 \in \mathbb{R}$ символ $(x_1^0, +\infty)$ називається *граничною точкою* множини $A \subset \mathbb{R}^2$, якщо

$$\forall\,r > 0 \quad \forall\,c \in \mathbb{R} \quad \exists\,(y_1,y_2) \in A : \quad y_1 \in B(x_1^0,\,r),\ y_2 > c.$$

Аналогічні означення використовуються в інших подібних випадках. Відповідно формулюється означення границі відображення:

$$\lim_{\substack{x_1\to x_1^0\\ x_2\to+\infty}} f(x_1,x_2) = p \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0\ \exists\,c \in \mathbb{R}\ \forall\,(x_1,x_2) \in A,\ x_1 \in \check{B}(x_1^0,\,\delta),\ x_2 > c :$$
$$f(x_1,x_2) \in B(p;\,\varepsilon).$$

Нехай $(X,\,\rho)$ – декартів добуток метричних просторів $(X_1,\,\rho_1)$ і $(X_2,\,\rho_2)$ (див. задачу 1.17), (x_1^0, x_2^0) – гранична точка множини $A \subset X$. Границя відображення $f : A \to Y$ у точці (x_1^0, x_2^0) у цьому випадку називається *подвійною* границею.

Нехай для кожного $x_1 \in X_1$, $x_1 \neq x_1^0$, існує границя $\lim\limits_{x_2 \to x_2^0} f(x_1, x_2) =: g(x_1)$ та існує границя $\lim\limits_{x_1 \to x_1^0} g(x_1) = p \in Y$. Тоді елемент p називається *повторною границею* відображення f у точці (x_1^0, x_2^0) і позначається символом

$$\lim_{x_1 \to x_1^0} (\lim_{x_2 \to x_2^0} f(x_1, x_2)) = p.$$

Аналогічно визначається повторна границя

$$\lim_{x_2 \to x_2^0} (\lim_{x_1 \to x_1^0} f(x_1, x_2)).$$

Якщо $X_i = \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, чи $Y = \mathbb{R}$, то можна відповідно означити повторні границі у випадку $x_i^0 = \pm\infty$, $i = 1, 2$, чи $p = \pm\infty$.

Приклад 1. Виходячи з означення, знайти границю

$$\lim_{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \to (0,0,\ldots,0)} x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_m.$$

⌈ Маємо $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $\vec{x}^{\,0} = (0, 0, \ldots, 0)$, $f(\vec{x}) = x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_m$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$. Оскільки за нерівністю Коші між середнім геометричним і середнім арифметичним та за нерівністю Коші – Буняковського

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^m : \ |f(\vec{x})| \leq m^{-m} \left(\sum_{k=1}^{m} |x_k| \right)^m \leq m^{-\frac{m}{2}} \left(\sum_{k=1}^{m} x_k^2 \right)^{\frac{m}{2}} = m^{-\frac{m}{2}} \rho^{\frac{m}{2}} (\vec{x}, \vec{x}^{\,0}),$$

то

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = m\varepsilon^{\frac{2}{m}} > 0 \ \forall \vec{x} \in B(\vec{x}^{\,0}; \delta) : \ |f(\vec{x}) - 0| < \varepsilon.$$

Отже, $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x}^{\,0}} f(\vec{x}) = 0.$ ⌋

Приклад 2. Довести, що границя

$$\lim_{(x_1, x_2) \to (0,0)} \frac{\sin x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^4}$$

не існує.

⌈ Послідовності $\{\vec{x}^{(n)} = (n^{-2}, n^{-1}) : \ n \geq 1\}$ і $\{\vec{y}^{(n)} = (n^{-1}, 0) : \ n \geq 1\}$ лежать в $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ і $\vec{x}^{(n)} \to \vec{0}$, $\vec{y}^{(n)} \to \vec{0}$, $n \to \infty$. Однак, $f(\vec{x}^{(n)}) \to \frac{1}{2}$, $f(\vec{y}^{(n)}) \to 0$, $n \to \infty$. Таким чином, не виконуються умови означення Гейне границі функції в точці. ⌋

Приклад 3. З'ясувати, чи існують подвійна і повторні границі функції

$$f(x_1, x_2) = \sin \frac{x_1}{x_2}$$

в точці $\vec{x}^{\,0} = (0, 0)$.

⌈ Оскільки для кожного $x_2 \neq 0$

$$|f(x_1, x_2)| \leq \left| \frac{x_1}{x_2} \right|,$$

то $\lim\limits_{x_1 \to 0} f(x_1, x_2) = 0$ і $\lim\limits_{x_2 \to 0} (\lim\limits_{x_1 \to 0} f(x_1, x_2)) = 0$. З іншого боку, для кожного $x_1 \neq 0$ границя $\lim\limits_{x_2 \to 0} f(x_1, x_2)$ не існує. Тому не існує повторна границя $\lim\limits_{x_1 \to 0} (\lim\limits_{x_2 \to 0} f(x_1, x_2))$.

Розглянемо послідовності $\{\vec{x}^{(n)} = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \mid n \geq 1\}$ і $\{\vec{y}^{(n)} = (0, \frac{1}{n}) \mid n \geq 1\}$. Кожна з цих послідовностей збігається до точки $\vec{x}^{\,0} = (0,0)$, але $f(\vec{x}^{(n)}) \to \sin 1,\ f(\vec{y}^{(n)}) \to 0$, $n \to \infty$. Тому подвійна границя не існує. $\rfloor$

Приклад 4. Розглянемо простір $C([a;\,b])$ з рівномірною метрикою ρ. Відображення $f : C([a;\,b]) \to C([a;\,b])$ визначається формулою

$$(f(x))(t) = \int_a^t \sin x(\tau)\, d\tau,\ \ t \in [a;\,b]; \quad x \in C([a;\,b]).$$

Знайти $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, де $x_0(t) = 0,\ t \in [a;\,b]$.

$\lceil$ Функція $f(x)$ неперервна на $[a;\,b]$ за теоремою про властивості інтеграла зі змінною межею інтегрування. Оскільки

$$\forall\, x \in C([a;\,b]) \quad \forall\, t \in [a;\,b] : \quad |(f(x))(t)| \leq \int_a^t |\sin x(\tau)|\, d\tau \leq \int_a^b |\sin x(\tau)|\, d\tau \leq$$

$$\leq \int_a^b |x(\tau)|\, d\tau \leq \max_{t \in [a;\,b]} |x(t)| \cdot (b-a) \leq (b-a)\rho(x, x_0),$$

то

$$\forall\, x \in C([a;\,b]) : \quad \rho(f(x), x_0) \leq (b-a)\rho(x, x_0).$$

Тепер в означенні для довільного $\varepsilon > 0$ досить покласти $\delta = \frac{\varepsilon}{b-a}$. Тому $f(x) \to x_0,\ x \to x_0$.$\rfloor$

1.110. Знайти та зобразити множини визначення функцій відповідно в просторах $\mathbb{R}^2$ або в $\mathbb{R}^3$:

1) $f(x_1, x_2) = \ln(-x_1 - x_2)$;

2) $f(x_1, x_2) = \sqrt{3 - x_1^2 - x_2^2}$;

3) $f(x_1, x_2) = \sqrt{-x_1} + \sqrt{-x_2}$;

4) $f(x_1, x_2) = \dfrac{\sqrt{4x_1^2 - x_2^2}}{\ln(1 - x_1^2 - x_2^2)}$;

5) $f(x_1, x_2, x_3) = \ln(x_1 x_2 x_3)$;

6) $f(x_1, x_2) = \sqrt{1 - x_1^2} + \sqrt{x_2^2 - 1}$;

7) $f(x_1, x_2) = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 - 1)(4 - x_1^2 - x_2^2)}$;

8) $f(x_1, x_2, x_3) = \ln(-1 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2)$;

9) $f(x_1, x_2, x_3) = \ln\sqrt{e^{x_1 x_2}(x_3 - x_2^2)}$;

10) $f(x_1, x_2, x_3) = \arcsin\dfrac{x_1}{a} + \arcsin\dfrac{x_2}{b} + \arcsin\dfrac{x_3}{c}$, де $\{a, b, c\}$ – фіксовані числа, $abc \neq 0$.

1.111. Виходячи з означення, знайти границю

$$\lim_{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \to (0, 0, \ldots, 0)} (|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_m|).$$

1.112. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \to (0, 0, \ldots, 0)} \dfrac{(1 + x_1)(1 + x_2) \ldots (1 + x_m)}{\sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2}}$;

2) $\lim\limits_{(x_1,x_2,\dots,x_m)\to(0,0,\dots,0)} \dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_m}{\sqrt[3]{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_m^2}}$;

3) $\lim\limits_{(x_1,x_2,\dots,x_m)\to(0,0,\dots,0)} (\sqrt{1+x_1^2+x_2^2+\ldots+x_m^2}+x_1+x_2^2+\ldots+x_m^m)$.

1.113. Довести, що функція $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, визначена співвідношенням

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases}1, & 0<x_2<x_1^2,\\ 0 & \text{в решті точок},\end{cases}$$

не має границі в точці $(0,\,0)$, але звуження цієї функції на будь-яку пряму

$$A_\alpha=\{(t\cos\alpha,\ t\sin\alpha)\mid t\in\mathbb{R}\},$$

де $\alpha\in[0;\,2\pi)$ фіксоване, має границю в точці $(0,\,0)$ рівну 0.

1.114. Довести, що функція

$$f(x_1,x_2)=\frac{x_1^2\,x_2}{x_1^4+x_2^2},\quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$$

не має границі в точці $(0,0)$, але її звуження на будь-яку пряму

$$A_\alpha=\{(t\cos\alpha,\ t\sin\alpha)\mid t\in\mathbb{R}\},$$

де $\alpha\in[0;2\pi)$ фіксоване, має границю в точці $(0,0)$ рівну 0.

1.115. Довести, що функція

$$f(x_1,x_2)=\frac{x_2\exp(-x_1^{-2})}{x_2^2+\exp(-2x_1^{-2})},\quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$$

не має границі в точці $(0,0)$, але її звуження на кожну множину

$$A=\{(x_1,x_2)\mid x_2=cx_1^\alpha,\ x_1>0\},$$

де $\alpha>0$ та $c\in\mathbb{R}$ фіксовані, має границю в точці $(0,0)$ рівну 0.

1.116. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(0,\,0)} (x_1^2+x_2^2)^{x_1^2x_2^2}$;

2) $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(1,\,0)} \dfrac{\ln(x_1+e^{x_2})}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$;

3) $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{1+x_1^2x_2^2}-1}{x_1^2+x_2^2}$;

4) $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \dfrac{x_1^2x_2^2(x_1^2+x_2^2)}{1-\cos(x_1^2+x_2^2)}$;

5) $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(0,0)} (1+x_1^2\,x_2^2)^{(x_1^2+x_2^2)^{-1}}$.

1.117. Для фіксованого числа $a\in\mathbb{R}$ знайти границю

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(0,a)}\frac{\sin(x_1x_2)}{x_1}.$$

1.118. Сформулювати означення границі в таких випадках:

1) $\lim\limits_{\substack{x_1\to+\infty\\ x_2\to-\infty}} f(x_1,x_2)$; 2) $\lim\limits_{\substack{x_1\to+\infty\\ x_2\to+\infty}} f(x_1,x_2)$; 3) $\lim\limits_{\substack{x_1\to-\infty\\ x_2\to+\infty}} f(x_1,x_2)$;

4) $\lim\limits_{\substack{x_1\to-\infty\\x_2\to-\infty}} f(x_1,x_2)$; 6) $\lim\limits_{\substack{x_1\to+\infty\\x_2\to 0}} f(x_1,x_2)$; 8) $\lim\limits_{\substack{x_1\to-\infty\\x_2\to 0}} f(x_1,x_2)$.

5) $\lim\limits_{\substack{x_1\to 1\\x_2\to-\infty}} f(x_1,x_2)$; 7) $\lim\limits_{\substack{x_1\to 1\\x_2\to+\infty}} f(x_1,x_2)$;

1.119. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{\substack{x_1\to+\infty\\x_2\to+\infty}} \dfrac{x_1^2+x_2^2}{x_1^4+x_2^4}$;

2) $\lim\limits_{\substack{x_1\to+\infty\\x_2\to+\infty}} (x_1^2+x_2^2)\, e^{-(x_1+x_2)}$;

3) $\lim\limits_{\substack{x_1\to+\infty\\x_2\to+\infty}} \left(\dfrac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}\right)^{x_1^2}$;

4) $\lim\limits_{\substack{x_1\to+\infty\\x_2\to+\infty}} \dfrac{x_1+x_2}{x_1^2-x_1x_2+x_2^2}$;

5) $\lim\limits_{\substack{x_1\to+\infty\\x_2\to 1}} \left(1+\dfrac{1}{x_1}\right)^{\frac{x_1^2}{x_1+x_2}}$;

6) $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x_1^4x_2^2)}{(x_1^2+x_2^2)^2}$;

7) $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \dfrac{\exp\left(-\frac{1}{x_1^4+x_2^4}\right)}{x_1^4+x_2^4}$;

8) $\lim\limits_{\substack{x_1\to+\infty\\x_2\to+\infty}} \dfrac{(x_1+x_2)^2}{(x_1^2+x_2^4)^2}$;

9) $\lim\limits_{\substack{x_1\to+\infty\\x_2\to+\infty}} (x_1^2+x_2^2)\sin\dfrac{1}{x_1^2+x_2^2}$;

10) $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(1,1)} f(x_1,x_2)$, де

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases}\dfrac{x_1^2+2x_1x_2-3x_2^2}{x_1^3-x_2^3}, & x_1\neq x_2,\\[2mm] \dfrac{4}{3}, & x_1=x_2;\end{cases}$$

11) $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(0,0)} f(x_1,x_2)$, де

$$f(x_1,x_2)=\frac{\ln(1+x_2)}{x_1^2+x_2},\quad x_2=x_1^2,\ x_1\in\mathbb{R};$$

12) $\lim\limits_{\substack{x_1\to+\infty\\x_2\to+\infty}} f(x_1,x_2)$, де

$$f(x_1,x_2)=\left(1+\frac{1}{x_1^2}\right)^{x_2},\quad x_2=x_1^2,\ x_1\in\mathbb{R};$$

13) $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(0,1)} f(x_1,x_2)$, де

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases}\dfrac{x_1^2x_2}{\sqrt{1+x_1^2x_2}-1}, & x_1x_2\neq 0,\\[2mm] 2, & x_1x_2=0.\end{cases}$$

1.120. Довести, що наведені границі не існують:

1) $\lim\limits_{\substack{x_1\to 0\\ x_2\to -\infty}} x_1x_2$;

2) $\lim\limits_{\substack{x_1\to +\infty\\ x_2\to +\infty}} (x_1-x_2)$;

3) $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(0,0)} x_1^{x_2}$;

4) $\lim\limits_{\substack{x_1\to +\infty\\ x_2\to +\infty}} \dfrac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}$;

5) $\lim\limits_{\substack{x_1\to -\infty\\ x_2\to -\infty}} \dfrac{x_1^2-x_2^2}{x_1^2+x_2^2}$;

6) $\lim\limits_{\substack{x_1\to 0\\ x_2\to 0}} \dfrac{x_1^3+x_2^3}{x_1^4+x_2^4}$;

7) $\lim\limits_{\substack{x_1\to 1\\ x_2\to +\infty}} x_1^{x_2}$;

8) $\lim\limits_{\substack{x_1\to +\infty\\ x_2\to 0}} x_1^{x_2}$;

9) $\lim\limits_{\substack{x_1\to +\infty\\ x_2\to +\infty}} \dfrac{x_1}{x_2}$;

10) $\lim\limits_{\substack{x_1\to 0\\ x_2\to 0}} \dfrac{x_1}{x_2}$.

1.121. З'ясувати, чи існують границі:

1) $\lim\limits_{(x_1,x_2,\ldots,x_m)\to(0,0,\ldots,0)} \dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_m}{|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_m|}$;

2) $\lim\limits_{(x_1,x_2,\ldots,x_m)\to(0,0,\ldots,0)} \dfrac{x_1^3+x_2^3+\ldots+x_m^3}{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_m^2}$;

3) $\lim\limits_{(x_1,\ldots,x_m)\to(0,\ldots,0)} \dfrac{x_1^2}{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_m^2}$;

4) $\lim\limits_{(x_1,\ldots,x_m)\to(0,\ldots,0)} \dfrac{x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{m-1}x_m}{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_m^2}$.

1.122. З'ясувати, чи існують границі наведених дійсних функцій на $\big(C([0;\,1],\,\rho\big)$ в точці $x_0\in C([0;\,1])$, де $x_0(t)=0,\ t\in[0;\,1]$:

1) $f(x)=\int\limits_0^1 |x(t)|\,dt$;

2) $f(x)=\int\limits_0^1 tx^2(t)\,dt$;

3) $f(x)=\int\limits_0^1 \big(t+x(t)\big)^2\,dt+x(0)$;

4) $f(x)=\dfrac{\Big(\int\limits_0^1 x(t)\,dt\Big)^2}{\int\limits_0^1 x^2(t)\,dt},\ x\neq x_0$;

5) $f(x)=\dfrac{\int\limits_0^1 \big(t+x(t)\big)^2\,dt-\frac{1}{3}}{\Big(\int\limits_0^1 x^2(t)\,dt\Big)^{1/3}},\ x\neq x_0$.

1.123. Знайти обидві повторні границі кожної з функцій у точці $(a,\,b)$:

1) $f(x_1,x_2)=\dfrac{1}{x_1x_2}\,\mathrm{tg}\,\dfrac{x_1x_2}{1+x_1x_2},\quad x_1x_2\notin\{0,-1\};\quad a=0,\ b=+\infty$;

2) $f(x_1,x_2)=\log_{x_1}(x_1+x_2),\quad x_1>0,\ x_1\neq 1,\ x_1+x_2>0;$
$a=1,\ b=0.$

1.124. Знайти повторні границі $\lim\limits_{x_1\to+\infty}\big(\lim\limits_{x_2\to+\infty} f(x_1,x_2)\big)$ і $\lim\limits_{x_2\to+\infty}\big(\lim\limits_{x_1\to+\infty} f(x_1,x_2)\big)$ таких функцій:

1) $f(x_1,x_2)=\dfrac{x_1^2+x_2^2}{x_1^2+x_2^4},\quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,\,0)\};$

2) $f(x_1,x_2)=\dfrac{x_1^{x_2}}{1+x_1^{x_2}},\quad (x_1,x_2)\in(0,+\infty)\times\mathbb{R};$

3) $f(x_1,x_2)=\sin\dfrac{\pi x_1}{2x_1+x_2},\quad x_2\neq-2x_1.$

1.125. З'ясувати, чи існують подвійна та кожна з повторних границь в точці $(0,\,0)$ таких функцій:

1) $f(x_1,x_2)=\dfrac{x_1^2\sin\frac{1}{x_1}+x_2}{x_1+x_2},\quad x_1\neq0,\ x_1+x_2\neq0;$

2) $f(x_1,x_2)=\begin{cases} x_1\sin\dfrac{1}{x_2}, & x_2\neq0,\\ 0, & x_2=0,\end{cases}\qquad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2;$

3) $f(x_1,x_2)=\begin{cases} \dfrac{x_1^2-x_2^2}{|x_1|-|x_2|}, & |x_1|\neq|x_2|,\\ 0, & |x_1|=|x_2|,\end{cases}\qquad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2;$

4) $f(x_1,x_2)=\begin{cases} 0, & x_1x_2\neq0,\\ 1, & x_1x_2=0,\end{cases}\qquad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2;$

5) $f(x_1,x_2)=\begin{cases} 0, & x_1\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\\ x_2, & x_1\in\mathbb{Q},\end{cases}\qquad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2;$

6) $f(x_1,x_2)=\dfrac{x_2}{x_1},\quad x_1\neq0.$

1.126.

1) Довести, що функція
$$f(x_1,x_2)=\frac{x_1-x_2}{x_1+x_2},\quad x_1\neq-x_2,$$
має обидві повторні границі в точці $(0,\,0)$, але подвійна границя в цій точці не існує.

2) Довести, що функція
$$f(x_1,x_2)=\frac{x_1^2x_2^2}{x_1^2x_2^2+(x_1-x_2)^2},\quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,\,0)\},$$

має обидві повторні границі в точці $(0,\ 0)$, але подвійна границя в цій точці не існує.

3) Довести, що функція
$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2) \sin \frac{1}{x_1} \sin \frac{1}{x_2}, \quad x_1 \neq 0,\ x_2 \neq 0,$$
має подвійну границю в точці $(0,\ 0)$, але обидві повторні границі в цій точці не існують.

1.127.

1) Навести приклад дійсної функції двох змінних, для якої подвійна границя та одна з повторних в точці $(0,\ 0)$ існують та рівні між собою, а інша повторна границя не існує.
2) Навести приклад дійсної функції двох змінних, для якої існує лише одна повторна границя в точці $(0,\ 0)$ та не існує подвійна границя в цій точці.

1.128. Нехай для дійсної функції двох змінних у деякій точці існують подвійна границя та одна з повторних. Довести рівність цих границь.

1.7 Неперервні функції на метричному просторі

Нехай (X, ρ), (Y, σ) – метричні простори, $A \subset X$, $x_0 \in A$, $\ f : A \to Y$.

Відображення f називається *неперервним* у граничній точці x_0 множини A, якщо
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$
Будь-яке відображення вважається неперервним в ізольованій точці множини визначення. Відображення f називається *неперервним на множині* A, якщо воно неперервне в кожній точці цієї множини.

Для позначення цього будемо використовувати запис $f \in C(A, Y)$ або у випадку простору $Y = \mathbb{R}$ з евклідовою метрикою $\sigma(x, y) = |x - y|$ скорочений запис $f \in C(A)$.

Теорема (про арифметичні дії). Нехай функції $f : X \to \mathbb{R}$, $g : X \to \mathbb{R}$ неперервні в точці $x_0 \in X$. Тоді:

1) $\forall\, c \in \mathbb{R}$ функція cf неперервна в точці x_0;
2) функція $f + g$ неперервна в точці x_0;
3) функція $f \cdot g$ неперервна в точці x_0;
4) якщо додатково $g(x_0) \neq 0$, то функція $\dfrac{f}{g}$ неперервна в точці x_0.

Теорема (про неперервність векторнозначного відображення). Нехай відображення $\vec{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m) : A \to \mathbb{R}^m$, метрика на $\mathbb{R}^m$ евклідова. Відображення $\vec{f}$ неперервне в точці x_0 тоді й лише тоді, коли кожна з функцій $f_k,\ k = 1, 2, \ldots, m$, неперервна в точці x_0.

Теорема (про неперервність суперпозиції відображень). Нехай (X, ρ), (Y, σ), (Z, τ) – метричні простори, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h = g(f) : X \to Z$. Припустимо, що f неперервне в точці $x_0 \in X$, g неперервне в точці $y_0 = f(x_0) \in Y$. Тоді складне відображення h неперервне в точці x_0.

Теорема (про характеризацію неперервного відображення). Відображення $f : X \to Y$ неперервне на X тоді й лише тоді, коли прообраз кожної відкритої множини в (Y, σ) є відкритою множиною в (X, ρ) (тоді й лише тоді, коли прообраз кожної замкненої множини в (Y, σ) є замкненою множиною в (X, ρ)).

Відображення f називається *рівномірно неперервним* на множині A, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \{x', x''\} \subset A,\ \rho(x', x'') < \delta : \quad \sigma(f(x'), f(x'')) < \varepsilon.$$

Приклад 1. 1) **Стала функція.** Нехай для деякого $c \in \mathbb{R}$ функція $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ визначена рівністю $f(\vec{x}) = c$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$. Функція f неперервна на $\mathbb{R}^m$.

2) **Координатні функції.** Нехай для кожного $k = 1, 2, \ldots, m$ функція $\pi_k : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ визначена рівністю $\pi_k(x_1, x_2, \ldots, x_m) = x_k$, $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. Функція π_k неперервна на $\mathbb{R}^m$. Це випливає з того, що збіжність в евклідовому просторі $\mathbb{R}^m$ є покоординатною, і з означення границі функції в термінах послідовностей.

3) **Алгебраїчні многочлени від m змінних.** *Алгебраїчним ногочленом* від m змінних називається функція $P : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ вигляду

$$P(\vec{x}) = P(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{\substack{0 \le k_1 \le n_1 \\ \cdots \\ 0 \le k_m \le n_m}} a(k_1, k_2, \ldots, k_m)\, x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m},$$

де $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. Тут $n_1, n_2, \ldots, n_m$ – невід'ємні цілі числа, коефіцієнти $a(k_1, k_2, \ldots, k_m)$, $0 \le k_j \le n_j$, $1 \le j \le m$, – фіксовані дійсні числа. Неперервність многочленів на $\mathbb{R}^m$ випливає з п.п. 1), 2) та теореми про арифметичні дії.

4) **Раціональні функції від m змінних.** *Раціональною функцією* від m змінних називається відношення двох многочленів P і Q :

$$R(\vec{x}) := \frac{P(\vec{x})}{Q(\vec{x})}, \quad Q(\vec{x}) \ne 0.$$

За п.3) та теоремою про арифметичні дії кожна раціональна функція неперервна на множині визначення.

Приклад 2. Довести неперервність дійсної функції

$$f(x) = \int_0^1 \ln(1 + x^2(t))\, dt$$

на $C([0;\, 1])$ з рівномірною метрикою ρ.

⌈ З теореми Лагранжа та з нерівності Коші випливає оцінка

$$\forall \{u, v\} \subset \mathbb{R}\, \exists \theta \in (0, 1) : \ |\ln(1 + u^2) - \ln(1 + v^2)| = \frac{2|v + \theta(u - v)|}{1 + (v + \theta(u - v))^2} |u - v| \le |u - v|,$$

з якої за теоремою про характеризацію збіжності в просторі $\big(C([0;\, 1]), \rho\big)$ одержуємо

$$\forall x_0 \in C([0;\, 1]) \quad \forall \{x_n : \ n \ge 1\} \subset C([0;\, 1]),\ x_n \to x_0,\ n \to \infty :$$
$$\ln(1 + x_n^2(t)) \underset{[0;\,1]}{\rightrightarrows} \ln(1 + x_0^2(t)),\ n \to \infty.$$

Тому за теоремою про граничний перехід під знаком інтеграла

$$f(x_n) = \int_0^1 \ln(1 + x_n^2(t))\, dt \to \int_0^1 \ln(1 + x^2(t))\, dt = f(x),\ n \to \infty.$$

Отже, функція f неперервна на $C([0;\,1])$. ⌋

Приклад 3. Довести, що множина $A = \{x \in C([0;\,1]) \mid \int\limits_0^1 x(t)\,dt \le 1\}$ замкнена в просторі $C([0;\,1])$ з рівномірною метрикою ρ.

⌈ Функція $f(x) = \int\limits_0^1 x(t)\,dt,\ x \in C([0;\,1])$, є неперервною дійсною функцією на $C([0;\,1])$ з рівномірною метрикою, що доводиться за теоремою про граничний перехід під знаком інтеграла. Множина $A = f^{-1}\big((-\infty;\,1]\big)$, де множина $(-\infty;\,1]$ замкнена в одновимірному евклідовому просторі. Тому за теоремою про характеризацію неперервного відображення множина A замкнена в $C([0;\,1])$ з рівномірною метрикою. ⌋

Приклад 4. Довести, що відображення $\vec{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^2$, що діє за формулою

$$\vec{f}(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \big(\sin\exp(x_1 + x_2 + \ldots + x_m),\ \operatorname{arctg}(x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_m)\big)$$

неперервне на $\mathbb{R}^m$.

⌈ Згідно з теоремою про неперервність векторнозначного відображення досить перевірити неперервність дійсних функцій

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sin\exp(x_1 + x_2 + \ldots + x_m),$$
$$f_2(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \operatorname{arctg}(x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_m), \quad (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m.$$

Неперервність f_1 і f_2 на $\mathbb{R}^m$ випливає з п. 3) прикладу 1, неперервності елементарних функцій однієї змінної та теореми про неперервність суперпозиції. ⌋

Приклад 5. Довести, що дійсна функція

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \ln(1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_m)$$

рівномірно неперервна на множині $A = \{(x_1, x_2, \ldots, x_m) |\ x_k \ge 0,\ k = 1, 2, \ldots, m\}$.

⌈ Перевіримо виконання умов означення. З теореми Лагранжа та нерівності Коші – Буняковського випливає, що

$$\forall\,\{(x_1, x_2, \ldots, x_m), (y_1, y_2, \ldots, y_m)\} \subset A : \ |f(x_1, x_2, \ldots, x_m) - f(y_1, y_2, \ldots, y_m)| =$$
$$= \frac{1}{\theta}|(1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_m) - (1 + y_1 + y_2 + \ldots + y_m)| \le$$
$$\le \sqrt{m \sum_{k=1}^{m} (x_k - y_k)^2} = \sqrt{m}\,\rho(\vec{x}, \vec{y}),$$

де θ – деяке число з проміжка з кінцями $1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_m$ та $1 + y_1 + y_2 + \ldots + y_m$. В означенні рівномірно неперервного відображення досить тепер покласти $\delta = \varepsilon$. ⌋

1.129. Дослідити неперервність функцій:

1) $f(x_1, x_2) = \dfrac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,\,0)\}$;

2) $f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1 + x_2}{x_1^3 + x_2^3}, & x_1 \ne -x_2, \\ (x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2)^{-1}, & x_1 = -x_2,\ x_1 \ne 0, \\ 1, & x_1 = x_2 = 0, \end{cases}$

$(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

1.130. Знайти точки розриву дійсних функцій на $\mathbb{R}^2$:

1) $f(x_1, x_2) = \begin{cases} 16 - x_1^2 - x_2^2, & x_1^2 + x_2^2 \le 16, \\ 0, & x_1^2 + x_2^2 > 16; \end{cases}$

2) $f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2}, & x_1 \ne -x_2, \\ 1, & x_1 = -x_2; \end{cases}$

3) $f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{2x_1 - 3}{x_1^2 + x_2^2 - 4}, & x_1^2 + x_2^2 \ne 4, \\ 0, & x_1^2 + x_2^2 = 4; \end{cases}$

4) $f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1 - x_2^2}{x_1 + x_2^2}, & x_1 \ne -x_2^2, \\ 0, & x_1 = -x_2^2; \end{cases}$

5) $f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1 - x_2}{x_1^3 - x_2^3}, & x_1 \ne x_2, \\ 3, & x_1 = x_2; \end{cases}$

6) $f(x_1, x_2) = \begin{cases} \ln(9 - x_1^2 - x_2^2), & x_1^2 + x_2^2 < 9, \\ 0, & x_1^2 + x_2^2 \ge 9; \end{cases}$

7) $f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{3}{x_1^2 + x_2^2}, & (x_1, x_2) \ne (0, 0), \\ 0, & (x_1, x_2) = (0, 0); \end{cases}$

8) $f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 - x_2^2}, & |x_1| \ne |x_2|, \\ 1, & |x_1| = |x_2|; \end{cases}$

9) $f(x_1, x_2) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x_1 + x_2}, & x_1 \ne -x_2, \\ 0, & x_1 = -x_2; \end{cases}$

10) $f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{x_1 x_2}, & x_1 x_2 \ne 0, \\ 1, & x_1 x_2 = 0. \end{cases}$

1.131. Довести неперервність дійсних функцій на $\mathbb{R}^m$:

1) $f(\vec{x}) = \Big(\sum\limits_{k=1}^{m} (x_k - a_k)^2 \Big)^{1/2} \exp\Big(-\sum\limits_{k=1}^{m} |x_k| \Big),$

де $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ – фіксований вектор;

2) $f(\vec{x}) = \sin(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)$;
3) $f(\vec{x}) = \cos(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_m)$;
4) $f\vec{x}) = \ln(1 + x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2)$;
5) $f(\vec{x}) = (x_1 + x_2^2 + x_3^3 + \ldots + x_m^m)^{1/3}$;
6) $f(\vec{x}) = \exp(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + mx_m)$;
7) $f(\vec{x}) = \dfrac{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_m}{1 + x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_m^4}$;
8) $f\vec{x}) = \operatorname{tg} \dfrac{\pi(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2)}{2(1 + x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2)}$;
9) $f(\vec{x}) = \arcsin^2\Bigl(\dfrac{|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_m|}{1 + |x_1| + \ldots + |x_m|}\Bigr)$;
10) $f(\vec{x}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^4 + x_3^6 + \ldots + x_m^{2m}}$;
11) $f(\vec{x}) = \operatorname{ctg}\bigl(\exp(-|x_1| - |x_2| - \ldots - |x_m|)\bigr)$,
де $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$.

1.132. Знайти множини, на яких неперервні наведені функції:

1) $f(\vec{x}) = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{m} |x_k|}{1 + \sum\limits_{k=1}^{m} |x_k|}, \quad \vec{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$;

2) $f(\vec{x}) = \begin{cases} \Bigl(\sum\limits_{k=1}^{m} x_k^2\Bigr)^{-1} \exp\Bigl(-\bigl(\sum\limits_{k=1}^{m} x_k^2\bigr)^{-1}\Bigr), & \vec{x} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\vec{0}\}, \\ 0, & \vec{x} = \vec{0}, \end{cases}$
де $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m), \quad \vec{0} = (0, 0, \ldots, 0)$.

1.133. Дійсна функція f визначена на множині A. Довизначити її таким чином, щоб вона стала неперервною на $\mathbb{R}^2$:

1) $f(x_1, x_2) = \dfrac{(x_1 - 1)^2 + 2(x_2 - 2)^2 + (x_1 - 1)^2(x_2 - 2)^3}{(x_1 - 1)^2 + 2(x_2 - 2)^2}$,
$A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 2)\}$;

в задачах 2)–12) множина $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,\, 0)\}$:

2) $f(x_1, x_2) = \dfrac{e^{x_1^2 + x_2^2} - 1 - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)}{x_1^2 + x_2^2}$;

3) $f(x_1, x_2) = \dfrac{1}{x_1^6 + x_2^6} \cdot \exp\Bigl(-\dfrac{1}{x_1^6 + x_2^6}\Bigr)$;

4) $f(x_1,x_2)=\dfrac{x_1^2x_2^2}{x_1^2+x_2^2}$;

5) $f(x_1,x_2)=\dfrac{x_1^4+x_2^4+x_1^3x_2^3}{x_1^4+x_2^4}$;

6) $f(x_1,x_2)=\dfrac{\sqrt{1+x_1^2x_2^2}-1}{x_1^2+x_2^2}$;

7) $f(x_1,x_2)=\dfrac{\ln(1+|x_1x_2|)}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$;

8) $f(x_1,x_2)=\dfrac{\sin(x_1^4x_2^2)}{(x_1^2+x_2^2)^2}$;

9) $f(x_1,x_2)=\dfrac{1-\cos(x_1^4+x_2^4)}{(x_1^2+x_2^2)^2}$;

10) $f(x_1,x_2)=\dfrac{x_1^2x_2^2}{\sqrt{1+x_1^2+x_2^2}-1}$;

11) $f(x_1,x_2)=\dfrac{\sin(x_1^3+x_2^3)}{x_1^2+x_2^2}$;

12) $f(x_1,x_2)=(1+x_1x_2^2)^{\frac{1}{x_1^2+x_2^2}}$.

1.134. Довести неперервність наведених відображень $\vec{f}:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^2$:

1) $\vec{f}(\vec{x})=(\sum\limits_{k=1}^m kx_k,\ x_1^2+\sum\limits_{k=2}^m k|x_k|)$;

2) $\vec{f}(\vec{x})=(\sum\limits_{k=1}^m |x_k|,\ \sum\limits_{k=1}^m k^{-1}x_k)$;

3) $\vec{f}(\vec{x})=\big(\sqrt{|x_1|}+\sum\limits_{k=2}^m x_k,\ \max\limits_{1\le k\le m}|x_k|\big)$;

4) $\vec{f}(\vec{x})=\big(\max\limits_{1\le k\le m}(kx_k),\ \max\limits_{1\le k\le m}(k^{-1}x_k)\big)$;

5) $\vec{f}(\vec{x})=\big(|x_1|+\max\limits_{1\le k\le m}|x_k|,\ \sum\limits_{k=1}^m k^2x_k^2\big)$;

6) $\vec{f}(\vec{x})=\Big(x_1+(\sum\limits_{k=2}^m x_k^2)^{1/2},\ \sum\limits_{k=1}^m \arcsin\dfrac{x_k}{1+|x_k|}\Big)$;

7) $\vec{f}(\vec{x})=\big(\sum\limits_{k=1}^m\int\limits_0^{x_k} e^{t^2}\,dt,\ \min\limits_{1\le k\le m}(kx_k)\big)$;

8) $\vec{f}(\vec{x})=\big(\prod\limits_{k=1}^m x_k,\ x_2\big)$;

9) $\vec{f}(\vec{x})=\big(x_1^2\cdot(1+\sum\limits_{k=1}^m x_k^2+\sum\limits_{k=2}^m x_k^4)^{-1},\ \max\limits_{1\le k\le m}\operatorname{arctg}x_k\big)$;

10) $\vec{f}(\vec{x})=\big((1+|x_1|)^{x_2+x_m},\ (1+|x_2|)^{x_1+x_3}\big)$, де $\vec{x}=(x_1,\ldots,x_m)$.

1.135. Довести, що функція

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases}\dfrac{2x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}, & (x_1,x_2)\ne(0,\,0),\\ 0, & (x_1,x_2)=(0,\,0),\end{cases}\qquad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,$$

неперервна в точці 0 за будь-якою змінною при довільному фіксованому значенні іншої, але як функція двох змінних f розривна в точці $(0,\,0)$.

1.136. Довести, що функція

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases}\dfrac{x_1^2x_2}{x_1^4+x_2^2}, & (x_1,x_2)\neq(0,\,0),\\ 0, & (x_1,x_2)=(0,\,0),\end{cases}\qquad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,$$

розривна в точці $(0,\,0)$, але при кожному $\alpha\in[0;\,2\pi)$ неперервна на прямій

$$A_\alpha=\{(t\cos\alpha,\ t\sin\alpha)\mid t\in\mathbb{R}\}.$$

1.137. Нехай задані неперервні функції $f:(a_1;\,b_1)\times(a_2;\,b_2)\to\mathbb{R}$, $\varphi:(a_1;\,b_1)\to(a_2;\,b_2)$. Довести, що функція

$$F(x)=f\bigl(x,\,\varphi(x)\bigr),\quad x\in(a_1;\,b_1)$$

неперервна на $(a_1;\,b_1)$.

1.138. Нехай задані дійсні неперервні функції $f:(a_1;\,b_1)\times(a_2;\,b_2)\to\mathbb{R}$, $\varphi:(a_1;\,b_1)\times(a_2;\,b_2)\to(a_1;\,b_1)$, $\psi:(a_1;\,b_1)\times(a_2;\,b_2)\to(a_2;\,b_2)$. Довести, що функція

$$F(x_1,x_2)=f\bigl(\varphi(x_1,x_2),\,\psi(x_1,x_2)\bigr),\quad (x_1,x_2)\in(a_1;\,b_1)\times(a_2;\,b_2),$$

неперервна на $(a_1;\,b_1)\times(a_2;\,b_2)$.

1.139. Нехай

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases}1, & (x_1,x_2)\in\mathbb{Q}^2,\\ 0, & (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\setminus\mathbb{Q}^2,\end{cases}\qquad \varphi(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q},\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$$

Довести, що функції f і φ розривні на $\mathbb{R}^2$ та $\mathbb{R}$ відповідно, але їх суперпозиція

$$F(x_1,x_2)=\varphi\bigl(f(x_1,x_2)\bigr),\quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$$

неперервна на $\mathbb{R}^2$ функція.

1.140. Нехай функції $f_k:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$, $k=1,2$, неперервні. Довести, що функція

$$F(x_1,\dots,x_m)=\max\{f_1(x_1,\dots,x_m),\ f_2(x_1,\dots,x_m)\},$$

$(x_1,\dots,x_m)\in\mathbb{R}^m$, неперервна на $\mathbb{R}^m$.

1.141. Нехай G – відкрита множина в $\mathbb{R}^2$, функція $f:G\to\mathbb{R}$ неперервна за першою змінною при кожному фіксованому значенні другої змінної та задовольняє умову Ліпшиця за другою змінною, тобто

$$\exists\,L\geq0\ \forall\,(x,y)\in G\ \forall\,(x,z)\in G:\ |f(x,y)-f(x,z)|\leq L|y-z|.$$

Довести, що $f\in C(G)$.

1.142. Теорема Юнга. Нехай функція $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ задовольняє умови:

1) при кожному $x_2\in\mathbb{R}$ функція $f(\cdot,x_2)$ монотонна і неперервна на $\mathbb{R}$;
2) при кожному $x_1\in\mathbb{R}$ функція $f(x_1,\cdot)$ неперервна на $\mathbb{R}$.

Довести, що $f \in C(\mathbb{R}^2)$.

1.143. Нехай $f \in C([a_1;\, b_1] \times [a_2;\, b_2])$, послідовність функцій
$$\{\varphi_n\ : [a_1;\, b_1] \to [a_2;\, b_2]\ :\ n \geq 1\}$$
збігається рівномірно на $[a_1;\, b_1]$. Довести, що послідовність функцій
$$\{F_n(x) = f\big(x,\, \varphi_n(x)\big),\ x \in [a_1;\, b_1]\ :\ n \geq 1\}$$
рівномірно збігається на $[a_1;\, b_1]$.

1.144. Довести неперервність на $\big(C[a;\, b]),\, \rho\big)$ дійсних функцій:

1) $f(x) = x(a)$;
2) $f(x) = x(a) + x(b)$;
3) $f(x) = \int\limits_a^b \sin x(t)\, dt$;
4) $f(x) = \int\limits_0^1 x(t^2) \sin t\, dt$, $[a;\, b] = [0;\, 1]$;
5) $f(x) = \max\limits_{t \in [a;\, b]} x(t)$;
6) $f(x) = \int\limits_a^b x^2(t)\, dt$;
7) $f(x) = \int\limits_a^b \operatorname{arctg} x(t)\, dt$;
8) $f(x) = \max\limits_{t \in [a;\, b]} \operatorname{arctg} x(t)$;
9) $f(x) = \int\limits_a^b \exp\big(x(t)\big)\, dt$;
10) $f(x) = \min\limits_{t \in [a;\, b]} \ln(1 + |\, x(t)\,|)$;
11) $f(x) = \int\limits_a^b \cos x(t)\, dt$;
12) $f(x) = \int\limits_a^b x^3(t)\, dt$;
13) $f(x) = e^{x(a)} + \ln\big(1 + |x(b)|\big)$;
14) $f(x) = \max\limits_{t \in [a;\, b]} \dfrac{|\sin x(t)|}{1 + |\, x\big(\frac{a+b}{2}\big)\,|}$;
15) $f(x) = \int\limits_a^b \dfrac{x(t)}{1 + x^2(t)}\, dt$.

Вказівка. Скористатись теоремою Лагранжа про скінченні прирости.

1.145. Довести, що дійсна функція
$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-k} \int\limits_a^b x^k(t)\, dt$$
неперервна на $\big(C([a;\, b]),\, \rho\big)$.

1.146. Довести неперервність відображення $\vec{f} : C([0;\, 1]) \to \mathbb{R}^2$,
$$\vec{f}(x) = \Big(\int\limits_0^1 x(t) \sin \pi t\, dt,\ \int\limits_0^1 x(t) \cos \pi t\, dt\Big),\ x \in C([0;\, 1]).$$
На $C([0;\, 1])$ розглядається рівномірна метрика, на $\mathbb{R}^2$ – евклідова. Знайти образ $\vec{f}\big(C([0;\, 1])\big)$.

1.147. Довести неперервність відображень простору $\big(C([a;\, b]),\, \rho\big)$ в себе:

1) $\big(f(x)\big)(t) = \int\limits_a^t \sin x(u)\, du,\ t \in [a;\, b]$;

2) $\big(f(x)\big)(t) = \int\limits_a^b \sin\big(t + x(u)\cdot t^2\big)\,du,\ t \in [a;\, b].$

1.148. Нехай $(X,\,\rho)$ – метричний простір, $f \in C(X;\mathbb{R})$. Довести твердження:

1) множини $\{x \in X \mid f(x) = 0\}$, $\{x \in X \mid f(x) \geq 1\}$ замкнені;
2) множина $\{x \in X \mid 1 < f(x) < 2\}$ відкрита.

1.149. Довести, що множини

1) $\{(x_1,\ldots,x_m) \mid \sum\limits_{k=1}^m x_k^2 = 1\}$; 2) $\{(x_1,\ldots,x_m) \mid 1 \leq \sum\limits_{k=1}^m x_k^2 \leq 4\}$

замкнені й обмежені в $(\mathbb{R}^m,\,\rho)$.

1.150. Довести, що множина

$$\big\{(x_1,\ldots,x_m) \mid 10 \leq e^{x_1} + \ldots + e^{x_m} \leq 100\big\}$$

замкнена в $(\mathbb{R}^m,\,\rho)$. Чи є ця множина обмеженою?

1.151. З'ясувати, які з наведених множин замкнені, відкриті в $(\mathbb{R}^m,\,\rho)$:

1) $\{(x_1,\ldots,x_m) |\ \sum\limits_{k=1}^m k^{-2}x_k^2 = 1\}$; 4) $\{(x_1,\ldots,x_m) |\ \sum\limits_{k=1}^m kx_k < 10\}$;
2) $\{(x_1,\ldots,x_m) |\ \sum\limits_{k=1}^m \sqrt{|x_k|} \leq 1\}$; 5) $\{(x_1,\ldots,x_m) |\ \prod\limits_{k=1}^m (x_k)^k \geq 5\}$;
3) $\{(x_1,\ldots,x_m) |\ \sum\limits_{k=1}^m x_k^3 > 100\}$; 6) $\{(x_1,\ldots,x_m) |\ \sum\limits_{k=1}^m k^{-1}x_k \leq \pi\}$;
7) $\{(x_1,\ldots,x_m) |\, 1 \leq \sum\limits_{k=1}^m e^{x_k} \leq 2\}$;
8) $\{(x_1,\ldots,x_m) |\ \sum\limits_{k=1}^m \ln(1 + |x_k|) = e\}$;
9) $\{(x_1,\ldots,x_m) |\, 1 < \prod\limits_{k=1}^m x_k < 3\}$;
10) $\big\{(x_1,\ldots,x_m) |\ \sum\limits_{k=1}^m \operatorname{arctg}|x_k| < \dfrac{m\pi}{4}\big\}$.

1.152. З'ясувати, які з наведених множин замкнені, відкриті в $(\mathbb{R}^m,\,\rho)$:

1) $\{(x_1,\ldots,x_m) \mid \sum\limits_{k=1}^m |x_k| = 1,\ \sum\limits_{k=1}^m x_k = 0\}$;
2) $\{(x_1,\ldots,x_m) \mid \sum\limits_{k=1}^m x_k^2 < 1,\ \prod\limits_{k=1}^m x_k > 0\}$;
3) $\{(x_1,\ldots,x_m) \mid \max\limits_{1\leq k\leq m} |x_k| \geq 1,\ \sum\limits_{k=1}^m x_k^3 = 2\}$;

4) $\{(x_1,\ldots,x_m) \mid \sum\limits_{k=1}^{m} x_k^2 \le 25,\ \sum\limits_{k=1}^{m} x_k \le 20,\ x_1 = 3\}$;

5) $\{(x_1,\ldots,x_m) \mid \min\limits_{1\le k\le m} x_k > 5,\ x_2 < 35\}$;

6) $\{(x_1,\ldots,x_m) \mid e^{x_1+x_2} + e^{x_2+x_3} + \ldots + e^{x_{m-1}+x_m} > 1,\ \prod\limits_{k=1}^{m} x_k < 2\}$;

7) $\{(x_1,\ldots,x_m) \mid \sum\limits_{k=1}^{m} \cos x_k > \frac{m}{2},\ \sum\limits_{k=1}^{m} \sin|x_k| < \frac{m}{2},\ \operatorname{tg}(x_1+x_2) > 1\}$;

8) $\{(x_1,\ldots,x_m) \mid \sum\limits_{k=1}^{m} \ln(1+|x_k|) \ge 2,\ 1 \le \sum\limits_{k=1}^{m} x_k^2 \le 2\}$;

9) $\{(x_1,\ldots,x_m) \mid \sum\limits_{k=1}^{m} \operatorname{arctg} x_k = \frac{\pi m}{4},\ \min\limits_{1\le k\le m} x_k \ge 1,\ \sum\limits_{k=1}^{m} (x_k)^k \le m\}$;

10) $\{(x_1,\ldots,x_m) \mid 2 < \sum\limits_{k=1}^{m} x_k < 3,\ \sum\limits_{k=1}^{m} x_k > 0\}$.

1.153. Довести, що множина

$$\Big\{x \in C([a;\,b]) \mid \int\limits_a^b x^3(t)\,dt \ge 1\Big\}$$

замкнена в $\big(C([a;\,b]),\,\rho\big)$.

1.154. Довести, що множина

$$\Big\{x \in C([a;\,b]) \mid \int\limits_a^b x^2(t)\,dt < \int\limits_a^b |\,x(t)\,|\,dt\Big\}$$

відкрита в $\big(C([a;\,b],\,\rho\big)$.

1.155. Довести, що множина

$$\Big\{(x_1,x_2,\ldots) \in l_2 \mid \sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-1}x_k < 1\Big\}$$

відкрита в $(l_2,\,\rho)$. Чи є вона обмеженою в цьому просторі?

1.156. Довести, що наведені дійсні функції рівномірно неперервні на $\mathbb{R}^m$:

1) $f(x_1,\ldots,x_m) = a_0 + a_1x_1 + \ldots + a_mx_m$, де числа $\{a_k\ :\ 0 \le k \le m\}$ фіксовані;

2) $f(x_1,\ldots,x_m) = \sin(x_1+\ldots+x_m)$;

3) $f(x_1,\ldots,x_m) = \operatorname{arctg} x_1 + \ldots + \operatorname{arctg} x_m$.

1.157. Довести, що дійсна функція

$$f(x_1,\ldots,x_m) = x_1^2 + \ldots + x_m^2, \quad (x_1,\ldots,x_m) \in \mathbb{R}^m,$$

неперервна, але не є рівномірно неперервною функцією на $\mathbb{R}^m$.

1.158. Довести, що відображення $f : C([a;\,b]) \to C([a;\,b])$

$$\big(f(x)\big)(t) = \int\limits_a^t sx(s)\,ds,\ t \in [a;\,b],$$

рівномірно неперервне на $\big(C([a;\,b]),\,\rho\big)$.

1.159. Довести, що сума рівномірно неперервних дійсних функцій є рівномірно неперервною функцією.

1.160. Нехай f та g – дійсні обмежені рівномірно неперервні функції, що визначені на підмножині A метричного простору. Довести, що їх добуток $f\cdot g$ – рівномірно неперервна на A функція.

1.8 Компактні множини. Неперервні функції на компактах

Нехай (X,ρ) – метричний простір, $A\subset X$.

Сім'я множин $\mathcal{O}=\{O_i\mid i\in I\}\subset 2^X$ називається *покриттям* множини A, якщо $A\subset\bigcup\limits_{i\in I}O_i$. Покриття $\mathcal{O}$ називається *відкритим*, якщо кожна множина $O_i,\ i\in I$, відкрита в (X,ρ). Покриття $\mathcal{O}$ називається *скінченним*, якщо індексна множина I скінченна. Покриття $\mathcal{O}'\subset\mathcal{O}$ множини A називається *підпокриттям* покриття $\mathcal{O}$.

Множина A називається *компактною* (або *компактом*) у метричному просторі (X,ρ), якщо з кожного її відкритого покриття можна вибрати скінченне підпокриття. Простір (X,ρ) називається *компактним*, якщо множина X компактна у цьому просторі.

Компактна множина є замкненою і обмеженою в метричному просторі. Замкнена підмножина компактої множини є компактною множиною.

Критерій компактності в евклідовому просторі. Множина компактна в евклідовому просторі тоді й лише тоді, коли вона замкнена і обмежена.

Критерій компактності в просторі $\big(C([a;\,b]),\rho\big)$ (теорема Арцела – Асколі). Замкнена множина A компактна в просторі $\big(C([a;\,b]),\rho\big)$ з рівномірною метрикою тоді й лише тоді, коли виконані умови:

1) сім'я функцій A *рівномірно обмежена*, тобто
$$\exists\, c\in\mathbb{R}\quad\forall\, x\in A\quad\forall\, t\in[a;\,b]:\quad |x(t)|\le c;$$

2) сім'я функцій A *одностайно неперервна*, тобто
$$\forall\,\varepsilon>0\quad\exists\,\delta=\delta(\varepsilon)>0\quad\forall\, x\in A\quad\forall\,\{t',t''\}\subset[a;\,b],\ |t'-t''|<\delta:\\ |x(t')-x(t'')|<\varepsilon.$$

Нехай (Y,σ) – метричний простір, $f\in C(X,Y)$. Тоді для компактної множини A в просторі (X,ρ) її образ $f(A)$ – компактна множина в (Y,σ). Зокрема, множина $f(A)$ замкнена та обмежена. Неперервна дійсна функція на компакті досягає своїх найменшого та найбільшого значень. Неперервне відображення на компактній множині є рівномірно неперервним.

Множина $A\subset X$ називається *зв'язною* в метричному просторі $(X,\,\rho)$, якщо не існує відкритих множин U і V, що задовольняють умови:

1) $U\cap V=\varnothing$; 2) $A\cap U\ne\varnothing$; 3) $A\cap V\ne\varnothing$; 4) $A\subset U\cup V$.

Образ зв'язної множини при неперервному відображенні є зв'язною множиною.

Приклад 1. Нехай множини F_1 та F_2 компактні в метричному просторі $(X,\,\rho)$. Тоді множина $F_1\cup F_2$ компактна.

⌈ Довільне відкрите покриття $\mathcal{O}$ множини $F_1\cup F_2$ є одночасно покриттям кожної з множин F_1 і F_2. Тому з нього можна вибрати скінченне підпокриття $\mathcal{O}_1$ множини F_1 і скінченне підпокриття $\mathcal{O}_2$ множини F_2. Тоді скінченна сім'я множин $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ є відкритим підпокриттям покриття $\mathcal{O}$ множини $F_1 \cup F_2$. ⌋

Приклад 2. Довести, що дійсна функція

$$f(x_1, x_2) = \exp(x_1^2 + x_2^2)$$

рівномірно неперервна на множині

$$A = \big\{(x_1, x_2) \mid \max\{|x_1|, |x_2|\} \le 1\big\}$$

в $(\mathbb{R}^2, \rho)$ та досягає своїх найменшого та найбільшого значень.

⌈ Множина A замкнена і обмежена в евклідовому просторі, тому вона компактна. Функція f є суперпозицією неперервних функцій і тому неперервна на множині A. Твердження, які треба довести, є властивостями неперервних функцій на компактах. ⌋

1.161. Нехай множини F_1 та F_2 компактні в метричному просторі (X, ρ). Чи компактні в цьому просторі множини:

1) $F_1 \cap F_2$, 2) $F_1 \setminus F_2$?

1.162. Нехай множини $F_k,\ k \ge 1$, компактні в просторі (X, ρ). Чи компактні наведені нижче множини в (X, ρ)?

1) $\bigcup\limits_{k=1}^{n} F_k$, де n – фіксоване натуральне число;

2) $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k$; 3) $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k$; 4) $X \setminus F_1$.

1.163. Чи компактні в $(\mathbb{R}^2, \rho)$ множини:

1) $\{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$;

2) $\{(x_1, x_2) \mid x_1 x_2 \le 1\}$;

3) $\{(x_1, x_2) \mid 1 < x_1^2 + x_2^2 \le 4\}$;

4) $\{(x_1, x_2) \mid |x_1| + |x_2| \le 4,\ x_1 x_2 \le 1\}$?

1.164. Нехай L – фіксоване невід'ємне число. Довести, що множина $\big\{x \in C([0;\, 1]) \mid |x(0)| \le 1;\ \forall\, \{t_1, t_2\} \subset [0;\, 1]:\ |x(t_1) - x(t_2)| \le L|t_1 - t_2|\big\}$ компактна в $\big(C([0;\, 1]), \rho\big)$.

1.165. Нехай множина Φ неперервних на відрізку $[a;\, b]$ функцій рівномірно обмежена. Довести, що замикання множини

$$\Big\{x \in C([a;\, b]) \mid x(t) = \int\limits_a^t \varphi(s)\, ds,\ t \in [a;\, b],\ \varphi \in \Phi\Big\}$$

компактне в просторі $\big(C([a;\, b]), \rho\big)$.

1.166. Довести, що множина всіх многочленів фіксованого степеня $n \in \mathbb{N}$ з коефіцієнтами з відрізка $[0;\, 1]$, які розглядаються на $[a;\, b]$, компактна в просторі $\big(C([a;\, b]), \rho\big)$.

1.167. Нехай F_k – компактна множина в метричному просторі $(X_k,\, \rho_k)$, $k = 1, 2$. Довести, що множина $F_1 \times F_2$ компактна в декартовому добутку $(X,\, \rho)$ цих просторів: $X = X_1 \times X_2$, $\rho = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2}$ (див. задачу 1.17).

1.168. Нехай множина A_1 компактна, множина A_2 замкнена в метричному просторі (X, ρ) і $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. Довести, що для деякого $\varepsilon > 0$

$$\forall\, x_1 \in A_1\ \forall\, x_2 \in A_2 :\ \rho(x_1, x_2) > \varepsilon.$$

Чи збережеться це твердження у випадку лише замкненої множини A_1?

1.169. Довести, що в метричному просторі $(\mathbb{Q}, \rho)$, де ρ – евклідова метрика, множина $[0;\, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$ є замкненою та обмеженою, але некомпактною.

1.170. Нехай сім'я компактних множин $\{A_i \mid i \in I\}$ має ту властивість, що

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, \{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \subset I :\ \bigcap_{k=1}^{n} A_{i_k} \neq \varnothing.$$

Довести, що

$$\bigcap_{i \in I} A_i \neq \varnothing.$$

1.171. Довести некомпактність таких множин у $\big(C([0;\,1],\, \rho\big)$:

1) $\{t^n,\ t \in [0;\,1]\ :\ n \geq 1\}$;
2) замкнена куля $\overline{B}(0;\,1) = \{x \in C([0;\,1]) \mid \max\limits_{t \in [0;\,1]} |x(t)| \leq 1\}$.

1.172.

1) Довести, що кожна замкнена куля в $(l_2,\, \rho)$ некомпактна.
2) Нехай
$$\{a_n\ :\ n \geq 1\} \subset [0;\, +\infty), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty.$$
Довести, що множина
$$\{(x_1, x_2, \ldots) \mid 0 \leq |x_n| \leq a_n,\ n \geq 1\},$$
компактна в $(l_2,\, \rho)$.

1.173. Нехай $(X,\, \rho)$ – повний метричний простір. Для кожного $n \geq 1$: $\overline{B}_{n,1}, \ldots, \overline{B}_{n,m(n)}$ – довільний скінченний набір замкнених куль радіуса $\frac{1}{n}$. Означимо

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{m(n)} \overline{B}_{n,k}.$$

Довести, що множина K компактна в $(X,\, \rho)$.

1.174.

1) Нехай F – непорожня компактна множина в метричному просторі $(X,\, \rho)$, $a \in X \setminus F$. Довести, що в множині F існує точка, що знаходиться на найменшій (найбільшій) відстані від a.

2) Довести, що функція
$$f(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{k=1}^{m} |x_k| - \operatorname{arctg}(x_1 + \ldots + x_m)$$
на множині
$$A = \{(x_1, \ldots, x_m) \mid k \le x_k \le k+1,\ k = 1, \ldots, m\}$$
досягає своїх найбільшого та найменшого значень.

3) Довести, що функція
$$f(x_1, \ldots, x_m) = e^{x_1 - x_2} + e^{x_2 - x_3} + \ldots + e^{x_{m-1} - x_m} + e^{x_m - x_1}$$
на множині
$$A = \{(x_1, \ldots, x_m) \mid 1 \le \sum_{k=1}^{m} |x_k| \le 2,\ \prod_{k=1}^{m} x_k \ge 0\}$$
досягає своїх найбільшого та найменшого значень.

1.175. Чи компактні наведені множини в $(\mathbb{R}^m,\, \rho)$?

1) $\left\{\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \ldots, \dfrac{m}{n}\right) \mid n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{(0, 0, \ldots, 0)\}$;
2) $\{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \mid 1 \le x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2 \le 9\}$;
3) $\{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \mid \sum\limits_{k=1}^{m} \sqrt{|x_k|} \le 1\}$;
4) $\{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \mid \sqrt{|x_1|} + \max\limits_{2 \le k \le m} |x_k| \le 2\}$;
5) $\{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \mid \prod\limits_{k=1}^{m} x_k \le 1\}$;
6) $\{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \mid (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + \ldots + (x_m - 1)^2 < 4\}$;
7) $\{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \mid 0 \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_m \le 1\}$;
8) $\left\{\left(\dfrac{\sin n}{n}, \dfrac{\sin 2n}{n}, \ldots, \dfrac{\sin mn}{n}\right) \mid n \in \mathbb{N}\right\}$;
9) $\{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \mid \sum\limits_{k=1}^{m} |x_k| \le 2,\ \sum\limits_{k=1}^{m} e^{x_k} \ge 3\}$;
10) $\{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \mid -k \le x_k \le k,\ 1 \le k \le m\}$.

1.176. Довести, що наведені дійсні функції рівномірно неперервні на множині A в $(\mathbb{R}^2,\, \rho)$ та досягають своїх найменшого та найбільшого значень:

1) $f(x_1, x_2) = \sin(x_1 - |x_2|),\ A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^4 + x_2^4 \le 100\}$;
2) $f(x_2, x_2) = \cos(x_1 x_2),\ A = \{(x_1, x_2) \mid 16 \le x_1^2 + x_2^2 \le 25\}$;
3) $f(x_1, x_2) = \ln(1 + |x_1| + x_2^2),\ A = [1;\, 2] \times [2;\, 3]$;
4) $f(x_1, x_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} e^{t^2}\, dt,\ A = \{(x_1, x_2) \mid 0 \le x_1 \le x_2 \le 1\}$;
5) $f(x_1, x_2) = \operatorname{arctg}^2(x_1 x_2),\ A = \big\{(x_1, x_2) \mid \max\{|x_1|, |x_2|\} \le 3\big\}$;

6) $f(x_1,x_2)=\arcsin\Big(\dfrac{x_1x_2}{1+|x_1x_2|}\Big),\ A=\{(x_1,x_2)\,|\,|x_1|+|x_2|\le 1\};$

7) $f(x_1,x_2)=\exp(x_1^2+x_2^2),\ A=\{(x_1,x_2)\,|\,(x_1-x_2)^2+(x_1+x_2)^2\le 1\};$

8) $f(x_1,x_2)=x_1e^{x_2}+x_2e^{x_1},\ A=\{(x_1,x_2)\,|\,x_1^2+x_2^2\le 1,\ x_1^4-x_2\le 1\};$

9) $f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2\operatorname{arctg}x_1,\ A=\{(x_1,x_2)\,|\,\sqrt{|x_1|}+x_2^2\le 2\};$

10) $f(x_1,x_2)=\dfrac{x_1^2+x_2^2}{1+x_1^2+x_2^2},\ A=\{(x_1,x_2)\,|\,x_1=x_2,\ 0\le x_1\le 1\}.$

1.177. Довести, що множина A зв'язна в евклідовому просторі $(\mathbb{R},\,\rho)$ тоді й лише тоді, коли

$$\forall\,\{a,b\}\subset A\ \forall\,t\in(0;\,1):\ a+t(b-a)\in A.$$

1.178. Довести, що будь-яка куля є зв'язною множиною в евклідовому просторі $(\mathbb{R}^m,\,\rho)$.

1.179. Нехай $(X_k,\,\rho_k)$, $k=1,2$ – метричні простори, $X=X_1\times X_2$, $\rho=\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2}$ (див. задачу 1.17). Довести, що простір $(X,\,\rho)$ зв'язний тоді й лише тоді, коли обидва простори $(X_k,\,\rho_k)$, $k=1,2$, зв'язні.

Розділ 2

Диференціальне числення функцій кількох змінних

2.1 Похідні за напрямком. Частинні похідні

Нехай $A \subset \mathbb{R}^m$, $\vec{x}^{\,0}$ – внутрішня точка множини A, $f : A \to \mathbb{R}$.

Похідною функції f за напрямком $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$ у точці $\vec{x}^{\,0}$ називається скінченна границя

$$f'_{\vec{a}}(\vec{x}^{\,0}) := \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x}^{\,0} + t\vec{a}) - f(\vec{x}^{\,0})}{t},$$

якщо вона існує.

Нехай множина A відкрита і в усіх точках $\vec{x} \in A$ існує $f'_{\vec{a}}(\vec{x})$. Тоді кажуть, що функція f має похідну за напрямком $\vec{a}$ на множині A.

Для базисних векторів $\vec{e}_k = (\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{k}, 0, \ldots, 0)$, $k = 1, 2, \ldots, m$, похідна за напрямком $\vec{e}_k$ називається *частинною похідною* за k-ю змінною і позначається символом

$$f'_k = \frac{\partial f}{\partial x_k} := f'_{\vec{e}_k}.$$

Якщо у точці $\vec{x}^{\,0}$ для кожного $k = 1, 2, \ldots, m$ існує похідна $f'_k(\vec{x}^{\,0})$, то вектор

$$\nabla f(\vec{x}^{\,0}) = \operatorname{grad} f(\vec{x}^{\,0}) := \big(f'_1(\vec{x}^{\,0}), f'_2(\vec{x}^{\,0}), \ldots, f'_m(\vec{x}^{\,0})\big)$$

називається *градієнтом* функції f у точці $\vec{x}^{\,0}$.

Нехай функція f у деякому околі точки $\vec{x}^{\,0}$ має частинні похідні за всіма змінними, які є неперервними в самій точці $\vec{x}^{\,0}$. Тоді функція f має у точці $\vec{x}^{\,0}$ похідну за будь-яким напрямком $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \in \mathbb{R}^m$, що обчислюється за формулою

$$f'_{\vec{a}}(\vec{x}^{\,0}) = \big(\nabla f(\vec{x}^{\,0}), \vec{a}\big) = \sum_{k=1}^{m} f'_k(\vec{x}^{\,0}) a_k,$$

де символом $(\cdot, \cdot)$ позначено скалярний добуток у просторі $\mathbb{R}^m$.

Похідна $f'_{\vec{a}}$ називається *похідною першого порядку*.

Нехай A – відкрита множина в $\mathbb{R}^m$, $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – фіксовані напрямки в $\mathbb{R}^m$. Припустимо, що функція $f : A \to \mathbb{R}$ має похідну $f'_{\vec{a}}$ на A. Похідна функції $g := f'_{\vec{a}}$ за напрямком $\vec{b}$ у точці $\vec{x}^{\,0}$, якщо вона існує, називається *похідною другого порядку* функції f за напрямками $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Позначення: $f''_{\vec{a}\vec{b}}(\vec{x}^{\,0}) := \big(f'_{\vec{a}}\big)'_{\vec{b}}(\vec{x}^{\,0})$. Відповідно визначаються *частинні похідні другого порядку*:

$$f''_{ik}(\vec{x}^{\,0}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(\vec{x}^{\,0}) := \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(\vec{x}^{\,0}),\ i, k = 1, 2, \ldots, m.$$

Якщо похідні $f''_{\vec{a}\vec{b}}$, $f''_{\vec{b}\vec{a}}$ існують у деякому околі точки $\vec{x}^{\,0}$ і неперервні в самій точці $\vec{x}^{\,0}$, то $f''_{\vec{a}\vec{b}}(\vec{x}^{\,0}) = f''_{\vec{b}\vec{a}}(\vec{x}^{\,0})$.

Означення похідної порядку $n+1$, $n \in \mathbb{N}$, дається індуктивно. Нехай A – відкрита множина в $\mathbb{R}^m$, $\vec{a}(1), \vec{a}(2), \ldots, \vec{a}(n+1)$ – фіксовані напрямки в $\mathbb{R}^m$. Припустимо, що функція $f : A \to \mathbb{R}$ має похідну $f^{(n)}_{\vec{a}(1)\vec{a}(2)\ldots\vec{a}(n)}$ на A. Похідна функції $g := f^{(n)}_{\vec{a}(1)\vec{a}(2)\ldots\vec{a}(n)}$ за напрямком $\vec{a}(n+1)$ у точці $\vec{x}^{\,0}$, якщо вона існує, називається *похідною* $(n+1)$*-го порядку* функції f за напрямками $\vec{a}(1), \vec{a}(2), \ldots, \vec{a}(n+1)$. Позначення:

$$f^{(n+1)}_{\vec{a}(1)\vec{a}(2)\ldots\vec{a}(n+1)}(\vec{x}^{\,0}) := \big(f^{(n)}_{\vec{a}(1)\vec{a}(2)\ldots\vec{a}(n)}\big)'_{\vec{a}(n+1)}(\vec{x}^{\,0}).$$

Відповідно визначаються *частинні похідні* $(n+1)$*-го порядку*:

$$f^{(n+1)}_{i(1)i(2)\ldots i(n+1)}(\vec{x}^{\,0}) = \frac{\partial^{(n+1)} f}{\partial x_{i(1)} \ldots \partial x_{i(n+1)}}(\vec{x}^{\,0}) := \frac{\partial}{\partial x_{i(n+1)}} \left(\frac{\partial^{(n)} f}{\partial x_{i(1)} \ldots \partial x_{i(n)}} \right)(\vec{x}^{\,0}),$$

$i(k) = 1, 2, \ldots, m,\ k = 1, 2, \ldots, n+1.$

Для скорочення використовуються записи типу

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} := \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_k},\ k = 1, \ldots, m.$$

Символом $C^{(n)}(A),\ n \geq 1$, будемо позначати множину всіх функцій на відкритій множині $A \subset \mathbb{R}^m$, що мають усі частинні похідні порядку n, причому ці похідні неперервні на множині A; $C^{(0)}(A) := C(A)$, $C^{(\infty)}(A) := \bigcap\limits_{n\geq 0} C^{(n)}(A)$.

Приклад 1. Знайти градієнт функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_{2m}) = \exp\left(\prod\limits_{i=1}^{2m} x_i^2\right)$, $(x_1, x_2, \ldots, x_{2m}) \in \mathbb{R}^{2m}$, у точці $\vec{x}^{\,0} = (1, -1, 1, -1 \ldots, 1, -1)$ і похідну функції у цій точці за напрямком $\vec{a} = (1, 2, \ldots, 2m)$.

⌈ Оскільки

$$f'_k(\vec{x}) = 2x_k \prod_{i \neq k} x_i^2 \cdot \exp\left(\prod_{i=1}^{2m} x_i^2\right),\ k = 1, 2, \ldots, m,$$

то $\operatorname{grad} f(\vec{x}^{\,0}) = (2e, -2e, 2e, -2e, \ldots, 2e, -2e)$ та $f'_{\vec{a}}(\vec{x}^{\,0}) = \sum\limits_{k=1}^{m} f'_k(\vec{x}^{\,0}) a_k = -2me.$ ⌋

Приклад 2. Довести, що функція $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$, задовольняє рівняння

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \frac{1}{f}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \setminus \{(0,\,0)\}.$$

⌈ Знайдемо похідні:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}; \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \frac{x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \frac{x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}.$$

⌋

2.1. Знайти всі частинні похідні першого порядку функцій:

1) $f(x_1, x_2) = x_1^4 + 2x_2^4 - 4x_1^2 x_2^2 + \ln(x_1 + x_2^2) + x_1 \sin(x_1 + x_2), \quad x_1 > -x_2^2;$

2) $f(x_1, x_2) = x_1 x_2 + \dfrac{x_1}{x_2} + \operatorname{arctg} \dfrac{x_2}{x_1} + \left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^{x_2}, \quad x_1 x_2 > 0;$

3) $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + x_1^{x_2} + \arcsin \dfrac{1}{1 + x_1^2 x_2^2}, \quad x_1 > 0;$

4) $f(x_1, x_2) = \sin x_1 + 2^{x_2} \operatorname{tg} x_1 + \cos^6(x_1 x_2), \quad x_1 \notin \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\};$

5) $f(x_1, x_2) = e^{\operatorname{ctg}(x_1 x_2)} \operatorname{arctg} x_1^2, \quad x_1 x_2 \notin \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\};$

6) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^{x_2/x_3}, \quad x_1 > 0,\ x_3 \neq 0;$

7) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^{\arcsin(x_2/x_3)}, \quad x_1 > 0,\ x_3 \neq 0,\ \left| \dfrac{x_2}{x_3} \right| < 1;$

8) $f(x_1, x_2, x_3) = \left(\operatorname{arctg} \dfrac{x_1}{x_2} \right)^{x_3}, \quad x_1 x_2 > 0;$

9) $f(x_1, x_2, x_3) = \left(\sin \dfrac{x_1}{x_2} \right)^{x_3}, \quad x_2 \neq 0,\ 0 < \dfrac{x_1}{x_2} < \pi;$

10) $f(x_1, x_2, x_3) = \big(\operatorname{tg} x_1 \big)^{x_2/x_3}, \quad 0 < x_1 < \dfrac{\pi}{2},\ x_3 \neq 0;$

11) $f(x_1, x_2, x_3) = \exp\big(x_1 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \big), \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;$

12) $f(x_1, x_2, x_3) = \ln(x_1 + \ln x_2 + \ln \ln x_3), \quad x_k > e,\ k = 1, 2, 3;$

13) $f(x_1, x_2, x_3) = \ln \dfrac{1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}{1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1;$

14) $f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{\cos^2 x_1 + \sin^2 x_2 + \operatorname{ctg}^2 x_3}, \quad 0 < x_3 < \dfrac{\pi}{2};$

15) $f(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{x_1 x_2 - x_3}{1 + e^{x_1} + \sin x_2}, \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$

2.2. Нехай

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \quad (x_1, x_2) \in A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,\, 0)\}.$$

Для $(x_1, x_2) \in A$ обчислити:

1) $g(x_1, x_2) = x_1 \dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} + x_2 \dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2};$

2) $h(x_1, x_2) = x_1 \dfrac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_1} + x_2 \dfrac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_2}.$

2.3. Довести, що наведені функції розривні в деяких точках, але мають частинні похідні першого порядку за будь-яким напрямком на $\mathbb{R}^2$. Знайти точки розриву цих функцій.

1) $f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^2 x_2}{x_1^4 + x_2^2}, & (x_1, x_2) \neq (0,\, 0), \\ 0, & (x_1, x_2) = (0,\, 0); \end{cases}$

2) $f(x_1,x_2)=\begin{cases}\dfrac{x_2\exp(-1/x_1^2)}{x_2^2+\exp(-2/x_1^2)}, & x_1\neq 0,\\ 0, & x_1=0.\end{cases}$

2.4.

1) Знайти похідну функції
$$f(x_1,x_2)=x_1^2-x_2^5,\quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,$$
в точці $\vec{x}^{\,0}=(1,\,1)$ за напрямком $\vec{a}=\left(\frac{1}{2},\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2) Знайти похідну функції
$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2^2x_3^3,\quad (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3,$$
в точці $\vec{x}^{\,0}=(1,1,1)$ за напрямком $\vec{a}=(\cos\alpha,\,\cos\beta,\,\cos\gamma)$. Знайти довжину градієнта в цій точці.

2.5. Знайти градієнт і похідну функції $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ в точці $\vec{x}^{\,0}=(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_m^0)$ за напрямком $\vec{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_m)$:

1) $f(x_1,x_2,\ldots,x_m)=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_m^2}$,
$\vec{x}^{\,0}=(1,1,\ldots,1)$, $\vec{a}=\bigl(1,-1,1,-1,\ldots,(-1)^{m+1}\bigr)$;

2) $f(x_1,x_2,\ldots,x_m)=\exp(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_m^2)$,
$\vec{x}^{\,0}=(1,0,0,\ldots,0)$, $\vec{a}=(0,1,1,\ldots,1)$;

3) $f(x_1,x_2,\ldots,x_m)=\ln(1+\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_m^2})$,
$\vec{x}^{\,0}=\bigl(1,-1,1,\ldots,(-1)^{m+1}\bigr)$, $\vec{a}=(1,1,\ldots,1)$;

4) $f(x_1,x_2,\ldots,x_m)=\operatorname{arctg}\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_m^2}$,
$\vec{x}^{\,0}=(1,2,0,0,\ldots,0)$, $\vec{a}=(1,2,\ldots,m)$;

5) $f(x_1,x_2\ldots,x_m)=\sin\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots x_m^2}$,
$\vec{x}^{\,0}=(1,0,0,\ldots,0,1)$, $\vec{a}=(m,m-1,\ldots,2,1)$;

6) $f(x_1,x_2,\ldots,x_m)=\sum\limits_{k=1}^{m}\cos^2 x_k^k$,
$\vec{x}^{\,0}=(0,0,\ldots,0)$, $\vec{a}=(1,2,\ldots,m)$;

7) $f(x_1,x_2\ldots,x_m)=\arcsin\dfrac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_m^2}{1+x_1^2+x_2^2+\ldots+x_m^2}$,
$\vec{x}^{\,0}=(1,1,0,0,\ldots,0)$, $\vec{a}=(0,1,2,\ldots,m-1)$, $m\geq 2$;

8) $f(x_1,x_2,\ldots,x_m)=\operatorname{tg}\dfrac{\pi(x_1^4+x_2^4+\ldots+x_m^4)}{2(1+x_1^4+x_2^4+\ldots+x_m^4)}$,
$\vec{x}^{\,0}=(0,0,\ldots 0)$, $\vec{a}=(1,1,\ldots,1)$;

9) $f(x_1,x_2,\ldots,x_m)=\dfrac{1}{\ln(\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_m^2}+\pi)}$,
$\vec{x}^{\,0}=(1,1,\ldots,1)$, $\vec{a}=\bigl(-1,1,-1,1,\ldots,(-1)^m\bigr)$;

10) $f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \dfrac{x_1 x_2 \ldots x_m}{1 + x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2}$,
$\vec{x}^{\,0} = (1, 1, \ldots, 1)$, $\vec{a} = (1, 1, \ldots, 1)$.

2.6. Знайти вказані частинні похідні функцій:

1) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}$,
$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 \sin(x_2 x_3) + (x_1^2 + x_2^2) e^{x_1 + x_3}, \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;$

2) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2}$, $\dfrac{\partial^6 f}{\partial x_1 \partial x_2^2 \partial x_3^3}$,
$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \ln(x_2 x_3) + x_1 x_2 x_3 e^{x_1 + x_2 + x_3}, \quad x_i > 0,\ i = 1, 2, 3;$

3) $\dfrac{\partial^m f}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_m}(\vec{0})$,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \exp\Big(\prod_{i=1}^m x_i\Big) + \ln\Big(1 + \sum_{i=1}^m x_i\Big), \quad \sum_{i=1}^m x_i > -1.$$

2.7. Нехай

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 x_2 \, \dfrac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}, & (x_1, x_2) \neq (0,\, 0), \\ 0, & (x_1, x_2) = (0,\, 0). \end{cases}$$

Довести, що $f''_{12}(0,\, 0) \neq f''_{21}(0,\, 0)$.

2.8. Нехай

$$\Delta u := u''_{11} + u''_{22} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}.$$

Знайти Δf для таких функцій:

1) $f(x_1, x_2) = \sin x_1 \cdot \operatorname{ch} x_2, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;$

2) $f(x_1, x_2) = \ln \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,\, 0)\}.$

2.9. Для $\{m,\, n\} \subset \mathbb{N}$ знайти частинну похідну $\dfrac{\partial^{m+n} f}{\partial x_1^m \partial x_2^n}$ таких функцій:

1) $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2}, \quad x_1 \neq x_2;$

2) $f(x_1, x_2) = \sin(x_1 + 2x_2), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;$

3) $f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2) e^{x_1 - x_2}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;$

4) $f(x_1, x_2) = \ln(1 + x_1 + x_2), \quad x_1 + x_2 > -1;$

5) $f(x_1, x_2) = (1 + 2x_1 + x_2)^\alpha, \quad 2x_1 + x_2 > -1$, де $\alpha \in \mathbb{R}$.

2.10.

1) Довести, що при довільних $\{a,\, b\} \subset \mathbb{R}$ функція
$f(x_1, x_2) = \ln \sqrt{(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(a,\, b)\},$

задовольняє *рівняння Лапласа*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 0, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \setminus \{(a,\, b)\}.$$

2) Довести, що при довільних $a \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ функція

$$f(t, x) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi t}} \exp\Big(-\frac{(x-a)^2}{4\sigma^2 t}\Big), \quad (t, x) \in (0;\, +\infty) \times \mathbb{R},$$

задовольняє *рівняння теплопровідності*

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad (t, x) \in (0;\, +\infty) \times \mathbb{R}.$$

3) Довести, що при довільних $\{a_1, a_2, a_3\} \subset \mathbb{R}$ функція

$$f(x_1, x_2, x_2) = \Big(\sum_{k=1}^{3} (x_k - a_k)^2\Big)^{-1/2}, \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(a_1, a_2, a_3)\},$$

задовольняє *рівняння Лапласа*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = 0, \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(a_1, a_2, a_3)\}.$$

4) Довести, що при довільних $\{c_1, c_2\} \subset \mathbb{R}$, $a \neq 0$ функція

$$f(x_1, x_2, x_3) = r^{-1}(c_1 e^{-ar} + c_2 e^{ar}),$$

де $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,\, 0,\, 0)\}$, задовольняє *рівняння Гельмгольца*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = a^2 f, \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,\, 0,\, 0)\}.$$

2.11. Нехай функція $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ має похідну третього порядку,

$$f(x_1, x_2, x_3) = g(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3), \quad (x_1, x_2, x_2) \in \mathbb{R}^3.$$

Довести, що для деякої функції $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f'''_{123}(x_1, x_2, x_3) = h(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3), \quad (x_1, x_1, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

2.12. Нехай функція $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ має похідну другого порядку. Знайти всі частинні похідні другого порядку функцій:

1) $f(x_1, x_2) = g(x_1 + x_2), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;$

2) $f(x_1, x_2) = g\Big(\dfrac{x_2}{x_1}\Big), \quad x_1 \neq 0;$

3) $f(x_1, x_2) = g(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,\, 0)\};$

4) $f(x_1, x_2) = \displaystyle\int_0^{x_1 \cdot x_2} g(t)\, dt, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;$

5) $f(x_1, x_2) = \displaystyle\int_0^{x_1 + x_2} g(t)\, dt, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;$

6) $f(x_1, x_2, x_3) = g(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2), \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$

2.13. Довести, що наведені функції задовольняють відповідні рівняння:

1) $f(x_1, x_2) = \operatorname{arctg} \dfrac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2}, \quad x_1 \neq x_2;$
$$f'_1 + f'_2 = \frac{x_1 - x_2}{x_1^2 + x_2^2};$$

2) $f(x_1, x_2) = \sin x_1 + \cos(\sin x_1 - \sin x_2), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;$
$$f'_1 \cos x_2 + f'_2 \cos x_1 = \cos x_1 \cos x_2;$$

3) $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_2}{\operatorname{arctg}(x_1^2 - x_2^2) + \pi}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;$
$$x_1^{-1} f'_1 + x_2^{-1} f'_2 = x_2^{-2} f, \quad x_1 x_2 \neq 0;$$

4) для $n \in \mathbb{N}$ $\quad f(x_1, x_2) = x_1^n \exp\Big(\dfrac{x_2}{x_1^2}\Big), \quad x_1 \neq 0;$
$$x_1 f'_1 + 2x_2 f'_2 = nf;$$

5) $f(x_1, x_2) = x_2 \ln\big(1 + (x_1^2 - x_2^2)^2\big), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;$
$$x_2^2 f'_1 + x_1 x_2 f'_2 = x_1 f;$$

6) $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2}, \quad x_1 \neq x_2;$
$$x_1 f'_1 + x_2 f'_2 = 0;$$

7) $f(x_1, x_2) = \cos(x_1 + \sin x_2), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;$
$$f'_1 \cdot f''_{12} = f'_2 \cdot f''_{11};$$

8) $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_2^2}{3x_1} + x_1^4 x_2^4, \quad x_1 \neq 0;$
$$x_1^2 f'_1 - x_1 x_2 f'_2 + x_2^2 = 0;$$

9) $f(x_1, x_2) = x_1 e^{x_1 + x_2} - x_2 \ln\big(1 + (x_1 + x_2)^2\big), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;$
$$f''_{11} - 2f''_{12} + f''_{22} = 0;$$

10) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^5 \sin \dfrac{x_2^2 + x_3^2}{x_1^2}, \quad x_1 \neq 0;$
$$x_1 f'_1 + x_2 f'_2 + x_3 f'_3 = 5f.$$

2.14. Нехай функції $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ мають похідні другого порядку. Довести, що наведені функції задовольняють відповідні рівняння:

1) $f(x_1, x_2) = g(x_1^2 + x_2^2), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;$
$$x_2 f'_1 - x_1 f'_2 = 0;$$

2) $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_2^2}{3x_1} + g(x_1 x_2), \quad x_1 \neq 0;$
$$x_1^2 f'_1 - x_1 x_2 f'_2 + x_2^2 = 0;$$

3) $f(x_1, x_2) = e^{x_2} g\Big(x_2 \exp\Big(\dfrac{x_1^2}{2x_2}\Big)\Big), \quad x_2 \neq 0;$
$$(x_1^2 - x_2^2) f'_1 + x_1 x_2 f'_2 = x_1 x_2 f;$$

4) $f(x,t) = g(x-at) + h(x+at), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad a$ – фіксоване дійсне число;
$$f''_{tt} = a^2 f''_{xx};$$

5) $f(x_1,x_2) = x_1 g(x_1+x_2) + x_2 h(x_1+x_2), \quad (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2;$
$$f''_{11} - 2f''_{12} + f''_{22} = 0;$$

6) $f(x_1,x_2) = g\Big(\dfrac{x_2}{x_1}\Big) + x_1 h\Big(\dfrac{x_2}{x_1}\Big), \quad x_1 \neq 0;$
$$x_1^2 f''_{11} + 2x_1x_2 f''_{12} + x_2^2 f''_{22} = 0;$$

7) $f(x_1,x_2) = x_1^n g\Big(\dfrac{x_2}{x_1}\Big) + x_1^{n-1} h\Big(\dfrac{x_2}{x_1}\Big), \quad x_1 \neq 0, \quad n$ – фіксоване натуральне число;
$$x_1^2 f''_{11} + 2x_1x_2 f''_{12} + x_2^2 f''22 = n(n-1)f;$$

8) $f(x_1,x_2) = g\big(x_1 + h(x_2)\big), \quad (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2;$
$$f'_1 \cdot f''_{12} = f'_2 \cdot f''_{11};$$

9) $f(x_1,x_2) = g\Big(\dfrac{x_2}{x_1}\Big), \quad x_1 \neq 0;$
$$x_1 f'_1 + x_2 f'_2 = 0;$$

10) $f(x_1,x_2) = x_1 g(x_2^2 - x_1^2), \quad (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2;$
$$x_1^2 f'_2 + x_1x_2 f'_1 = x_2 f.$$

2.2 Диференційовні функції

Функція $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ називається *лінійною*, якщо вона задовольняє умови:

1) $\forall\, c \in \mathbb{R}\, \forall\, \vec{x} \in \mathbb{R}^m : \; L(c\vec{x}) = cL(\vec{x});$ 2) $\forall\, \{\vec{x}, \vec{y}\} \subset \mathbb{R}^m : \; L(\vec{x}+\vec{y}) = L(\vec{x}) + L(\vec{y}).$

Кожній лінійній функції L взаємно однозначно відповідає вектор $\vec{L} = (L_1, L_2, \ldots, L_m)$ таким чином, що
$$\forall\, \vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m : \quad L(\vec{x}) = (\vec{L}, \vec{x}) = \sum_{k=1}^{m} L_k x_k.$$

Нехай $A \subset \mathbb{R}^m$, $\vec{x}^{\,0}$ – внутріщня точка множини A, $f : A \to \mathbb{R}$. Функція f називається *диференційовною* в точці $\vec{x}^{\,0}$, якщо існує така лінійна функція $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, що
$$f(\vec{x}^{\,0} + \vec{a}) - f(\vec{x}^{\,0}) - L(\vec{a}) = o(\|\vec{a}\|), \; \vec{a} \to \vec{0},$$
де для вектора $\vec{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_m)$ число $\|z\| := \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} z_k^2}$ – його евклідова *норма* (довжина). У цьому випадку лінійна функція L називається *диференціалом першого порядку* функції f у точці $\vec{x}^{\,0}$.

Позначення: $df(\vec{x}^{\,0}; \vec{a}) := L(\vec{a}), \; \vec{a} \in \mathbb{R}^m.$

Диференційовна в точці $\vec{x}^{\,0}$ функція f є неперервною в цій точці та має похідну за будь-яким напрямком $\vec{a}$, причому
$$f'_{\vec{a}}(\vec{x}^{\,0}) = df(\vec{x}^{\,0}; \vec{a}) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f(\vec{x}^{\,0})}{\partial x_k} a_k.$$

Достатньою умовою диференційовності функції f у точці $\vec{x}^{\,0}$ є існування всіх частинних похідних цієї функції в деякому околі точки та їх неперервність у самій точці $\vec{x}^{\,0}$.

Нехай функція f диференційовна в кожній точці відкритої множини $A \subset \mathbb{R}^m$. Тоді для фіксованого вектора $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$ визначена функція $g_{\vec{a}}(\vec{x}) := df(x; \vec{a}),\ \ \vec{x} \in A$. Якщо функція $g_{\vec{a}}$ диференційовна в точці $\vec{x}^{\,0} \in A$, то білінійна форма

$$d^2 f(\vec{x}^{\,0}; \vec{a}, \vec{b}) := dg_{\vec{a}}(\vec{x}^{\,0}; \vec{b}), \quad \{\vec{a}, \vec{b}\} \subset \mathbb{R}^m,$$

називається *диференціалом другого порядку* функції f. У подальшому, як правило, будуть розглядатися вектори $\vec{a} = \vec{b} = (dx_1, dx_2, \ldots, dx_m)$. Тоді для функції $f \in C^{(2)}(A)$ диференціал другого порядку є квадратичною формою

$$d^2 f(\vec{x}^{\,0}) = \sum_{i,k=1}^{m} \frac{\partial^2 f(\vec{x}^{\,0})}{\partial x_i \partial x_k} a_i a_k = \sum_{i,k=1}^{m} \frac{\partial^2 f(\vec{x}^{\,0})}{\partial x_i \partial x_k} dx_i dx_k,\ (dx_1, dx_2, \ldots, dx_m) \in \mathbb{R}^m.$$

Диференціали вищих порядків визначаються індуктивно. Для функції $f \in C^{(n)}(A)$ *диференціал n-го порядку* є формою

$$d^n f(\vec{x}^{\,0}) = \sum_{i(1), i(2), \ldots, i(n)=1}^{m} \frac{\partial^n f(\vec{x}^{\,0})}{\partial x_{i(1)} \partial x_{i(2)} \ldots \partial x_{i(n)}} dx_{i(1)} dx_{i(2)} \ldots dx_{i(n)},$$

$(dx_1, dx_2, \ldots, dx_m) \in \mathbb{R}^m$.

Приклад 1. Дослідити диференційовність функції $f(x_1, x_2) = \sqrt[3]{x_1 + x_2}$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, у точці $\vec{x}^{\,0} = (0, 0)$.
⌈ Припустимо, що функція f диференційовна в точці $\vec{x}^{\,0}$. Тоді для деяких дійсних чисел L_1 та L_2

$$f(a_1, a_2) - f(0,0) - L_1 a_1 - L_2 a_2 = \sqrt[3]{a_1 + a_2} - L_1 a_1 - L_2 a_2 = o\left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\right),$$

$(a_1, a_2) \to (0, 0)$. Візьмемо $\vec{a} = (a_1, 0)$. Тоді

$$\sqrt[3]{a_1} - L_1 a_1 = o(a_1),\ a_1 \to 0.$$

Звідси $a_1^{-2/3} \to L_1,\ a_1 \to 0$, що неможливо. Тому функція f недиференційовна в точці $\vec{x}^{\,0} = (0, 0)$. ⌋

Приклад 2. Дослідити диференційовність функції $f(x_1, x_2) = \ln\bigl(1 + \sqrt{x_1 x_2}\bigr)$, $x_1 x_2 > -1$, у точці $\vec{x}^{\,0} = (0, 0)$.
⌈ Припустимо, що функція f диференційовна в точці $\vec{x}^{\,0}$. Тоді для деяких дійсних чисел L_1 та L_2

$$f(a_1, a_2) - f(0,0) - L_1 a_1 - L_2 a_2 = \ln(1 + \sqrt{a_1 a_2}) - L_1 a_1 - L_2 a_2 = o\left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\right),$$

$(a_1, a_2) \to (0, 0)$. Візьмемо $\vec{a} = (a_1, 0)$. Тоді $\ -L_1 a_1 = o(a_1),\ a_1 \to 0$. Це можливо лише для $L_1 = 0$. Аналогічно встановлюється, що $L_2 = 0$. Але тоді при $a_1 = a_2 = a$ повинна виконуватись асимптотична рівність

$$\ln(1 + |a|) = o(|a|), \quad a \to 0.$$

Ця рівність хибна. Тому функція f недиференційовна в точці $\vec{x}^{\,0} = (0, 0)$. ⌋

Приклад 3. Замінюючи приріст функції диференціалом, наближено обчислити

$$\ln(1,02 + \sqrt[3]{0,97} - \sqrt{1,01}).$$

⌈ Розглянемо функцію $f(x_1, x_2, x_3) = \ln(x_1 + \sqrt[3]{x_2} - \sqrt{x_3})$, $(x_1, x_2, x_3) \in B\big((1,1,1);\ \frac{1}{2}\big)$. Ця функція має всі частинні похідні першого порядку, які неперервні в точці $\vec{x}^{\,0} = (1,1,1)$. Тому вона диференційовна в точці $(1,1,1)$ і

$$f(1,02,\ 0,97,\ 1,01) \approx f(1,1,1) + df\big((1,1,1);\ (0,02;\ -0,03;\ 0,01)\big).$$

Маємо $f(1,1,1) = 0$ та

$$df(1,1,1) = \frac{\partial f(1,1,1)}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f(1,1,1)}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial f(1,1,1)}{\partial x_3}dx_3 = dx_1 + \frac{1}{3}dx_2 - \frac{1}{2}dx_3 = \\ = 0,02 - 0,01 - 0,005 = 0,005.$$

Звідси $\ln(1,02 + \sqrt[3]{0,97} - \sqrt{1,01}) \approx 0,005$. ⌋

Приклад 4. Знайти диференціал третього порядку функції $f(x_1, x_2) = \exp(x_1 x_2)$.
⌈ Оскільки $f \in C^{(3)}(\mathbb{R}^2)$, то диференціал третього порядку існує, причому його коефіцієнти – частинні похідні третього порядку – не залежать від порядку диференціювання. Тому

$$d^3 f(x_1, x_2) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3}dx_1^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2}dx_1^2 dx_2 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2^2}dx_1 dx_2^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3}dx_2^3.$$

Знайдемо відповідні похідні:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3} = x_2^3 \exp(x_1 x_2), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^3} = x_1^3 \exp(x_1 x_2),$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2} = x_2(x_1 x_2 + 2)\exp(x_1 x_2), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2^2} = x_1(x_1 x_2 + 2)\exp(x_1 x_2).$$

Отже,

$$d^3 f(x_1, x_2) = \\ = \exp(x_1 x_2)\left(x_2^3\, dx_1^3 + 3x_2(x_1 x_2 + 2)\, dx_1^2 dx_2 + 3x_1(x_1 x_2 + 2)\, dx_1 dx_2^2 + x_1^3\, dx_2^3\right).$$ ⌋

2.15. Дослідити диференційовність у точці $\vec{x}^{\,0}$ наведених функцій:

1) $f(x_1, x_2) = \sqrt[3]{x_1 x_2}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; \quad \vec{x}^{\,0} = (0,0);$
2) $f(x_1, x_2) = \sqrt[3]{x_1^3 + x_2^3}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; \quad \vec{x}^{\,0} = (0,0);$
3) $f(x_1, x_2) = x_1 e^{x_2} + x_2 e^{x_1}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; \quad \vec{x}^{\,0} = (0,0);$
4) $f(x_1, x_2) = \operatorname{tg}\dfrac{x_1^2}{x_2}, \quad x_2 \neq 0, \ \left|\dfrac{x_1^2}{x_2}\right| < \dfrac{\pi}{2}; \quad \vec{x}^{\,0} = \left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right);$
5) $f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^2 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}, & (x_1, x_2) \neq (0,0), \\ 0, & (x_1, x_2) = (0,0); \end{cases} \quad \vec{x}^{\,0} = (0,0);$

6) $f(x_1,x_2) = \begin{cases} (x_1^2+x_2^2)\cos\dfrac{1}{x_1^2+x_2^2}, & (x_1,x_2)\neq(0,0), \\ 0, & (x_1,x_2)=(0,0); \end{cases}$ $\quad \vec{x}^{\,0}=(0,0);$

7) $f(x_1,x_2) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x_1^2+x_2^2}\right), & (x_1,x_2)\neq(0,0), \\ 0, & (x_1,x_2)=(0,0); \end{cases}$ $\quad \vec{x}^{\,0}=(0,0);$

8) $f(x_1,x_2,\ldots,x_m) = |x_1|+|x_2|+\ldots+|x_m|, \quad (x_1,x_2,\ldots,x_m)\in\mathbb{R}^m;$ $\vec{x}^{\,0}=(0,0,\ldots,0).$

2.16. Знайти диференціал функції та обчислити його значення в точці $\vec{x}^{\,0}$ для вектора $\vec{a}$:

1) $f(x_1,x_2) = x_1^m x_2^n, \quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2, \quad m,n$ – фіксовані натуральні числа; $\quad \vec{x}^{\,0}=(1,2),\ \vec{a}=(2,1);$

2) $f(x_1,x_2) = \dfrac{x_1}{x_2}+\ln\sqrt{x_1^2+x_2^2}, \quad x_2\neq 0; \quad \vec{x}^{\,0}=(1,1),\ \vec{a}=(1,2);$

3) $f(x_1,x_2) = \sin\sqrt{x_1^2+x_2^2}+\cos(x_1-x_2), \quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2;$ $\vec{x}^{\,0}=\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right),\ \vec{a}=(1/2,-1).$

2.17. Довести диференційовність функцій в точці $\vec{x}^{\,0}$, використовуючи достатні умови диференційовності:

1) $f(x_1,x_2) = \sqrt[3]{x_1^2-x_2^2}, \quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2; \quad \vec{x}^{\,0}=(2,1);$

2) $f(x_1,x_2) = \dfrac{x_1+2x_2}{2x_1+x_2}, \quad x_2\neq -2x_1; \quad \vec{x}^{\,0}=(1,0);$

3) $f(x_1,x_2) = (\sin x_1)^{x_2}, \quad 0<x_1<\pi; \quad \vec{x}^{\,0}=\left(\dfrac{\pi}{2},2\right);$

4) $f(x_1,x_2) = \ln(x_1+x_2^2), \quad x_1>-x_2^2; \quad \vec{x}^{\,0}=(e,0);$

5) $f(x_1,x_2) = \arcsin\dfrac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}, \quad (x_1,x_2)\neq(0,0); \quad \vec{x}^{\,0}=(\sqrt{2},\sqrt{2});$

6) $f(x_1,x_2) = \dfrac{x_1}{1+x_2e^{2x_1}}, \quad x_2>-e^{-2x_1}; \quad \vec{x}^{\,0}=\left(2,\dfrac{\pi}{3}\right);$

7) $f(x_1,x_2) = x_2^{\cos x_1}, \quad x_2>0; \quad \vec{x}^{\,0}=\left(2,\dfrac{\pi}{3}\right);$

8) $f(x_1,x_2) = \mathrm{tg}(x_1-x_2)+\mathrm{ctg}(x_1+x_2), \quad \{x_1,x_2\}\subset\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right);$ $\vec{x}^{\,0}=\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3}\right);$

9) $f(x_1,x_2) = \mathrm{arctg}(x_1^2+2x_2^2), \quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2; \quad \vec{x}^{\,0}=\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right);$

10) $f(x_1, x_2) = \ln \operatorname{ctg} \dfrac{x_2}{x_1}, \quad x_1 \neq 0,\ 0 < \dfrac{x_2}{x_1} < \dfrac{\pi}{2}; \quad \vec{x}^{\,0} = \Big(2, \dfrac{\pi}{2}\Big).$

2.18. Знайти диференціали першого та другого порядків функцій:

1) $f(x_1, x_2) = x_1 x_2^3 - 3x_1^2 x_2^2 + 2x_2^4, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;$
2) $f(x_1, x_2) = \sqrt[3]{x_1 + x_2^2}, \quad x_1 > 0;$
3) $f(x_1, x_2) = \sqrt{\ln x_1 x_2}, \quad x_1 x_2 > 1;$
4) $f(x_1, x_2, x_3) = \ln(x_1^3 + 2x_2^3 - x_3^3), \quad x_1^3 + 2x_2^3 - x_3^3 > 0;$
5) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^{x_2 x_3}, \quad x_1 > 0;$
6) $f(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{x_3}{x_1^2 + x_2^2}, \quad (x_1, x_2) \neq (0, 0);$
7) $f(x_1, x_2, x_3) = \sin(x_1 x_2) + \cos\big(\operatorname{tg}(x_3 - x_1)\big), \quad |\, x_3 - x_1 \,| < \pi/2;$
8) $f(x_1, x_2, x_3) = \operatorname{arctg} \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{1 - x_1 x_2 x_3}, \quad x_1 x_2 x_3 \neq 1;$
9) $f(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{x_1 x_2 x_3}{e^{x_3} \cos^2 x_1}, \quad |\, x_1 \,| < \dfrac{\pi}{2};$
10) $f(x_1, x_2, x_3) = \arcsin(x_1 - x_2 x_3), \quad x_k \in (0;\, 1),\ 1 \leq k \leq 3.$

2.19. Замінюючи приріст функції диференціалом, наближено обчислити:

1) $1{,}002 \cdot 2{,}003^2 \cdot 3{,}004^3;$
2) $\sqrt{1{,}02^3 + 1{,}97^3};$
3) $\ln(\sqrt[3]{1{,}03} + \sqrt[4]{0{,}98} - 1);$
4) $\sin 29^\circ \cdot \operatorname{tg} 46^\circ;$
5) $(2{,}003)^2 \cdot (3{,}998)^3 \cdot (1{,}002)^2;$
6) $0{,}97^{1{,}05};$
7) $\sqrt{3{,}98^2 + 3{,}01^2};$
8) $1{,}04^{2{,}02};$
9) $\cos 61^\circ \cdot \operatorname{ctg} 44^\circ;$
10) $\dfrac{1{,}03^2}{\sqrt[3]{0{,}97 \sqrt[4]{1{,}05^3}}};$
11) $\operatorname{arctg} \dfrac{1{,}02 + 1{,}01}{1 + 1{,}02 \cdot 1{,}01}.$

2.20. Знайти диференціали порядку n функцій:

1) $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1 x_2 (x_1 - x_2), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; \quad n = 3;$
2) $f(x_1, x_2) = \sin(x_1^2 + x_2^2), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; \quad n = 3;$
3) $f(x_1, x_2) = \ln(x_1 + x_2), \quad x_1 > -x_2; \quad n = 10;$
4) $f(x_1, x_2) = \cos x_1 \cdot \operatorname{ch} x_2, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; \quad n = 6;$
5) $f(x_1, x_2) = e^{a x_1 + b x_2}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ a, b$ – фіксовані дійсні числа; $n = 5;$
6) $f(x_1, x_2) = \operatorname{tg} x_1 \cdot \operatorname{ctg} x_2, \quad 0 < x_k < \dfrac{\pi}{2},\ k = 1, 2; \quad n = 3;$
7) $f(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{1}{1 + x_1 + x_2 + x_3}, \quad x_k > 0,\ 1 \leq k \leq 3; \quad n = 7;$

8) $f(x_1,x_2,x_3) = \exp(ax_1 + bx_2 + cx_3)$, $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$, a, b, c – фіксовані дійсні числа; $n = 8$;

9) $f(x_1,x_2,x_3) = \ln\Big(x_1^{x_1} x_2^{x_2} x_3^{x_3}\Big)$, $\quad x_k > 0,\ 1 \le k \le 3; \quad n = 4;$

10) $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1x_2x_3)^6$, $\quad (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3; \quad n = 18.$

2.21. Довести, що функція

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}, & (x_1,x_2) \ne (0,0), \\ 0, & (x_1,x_2) = (0,0), \end{cases}$$

на $\mathbb{R}^2$ неперервна та має обмежені частинні похідні першого порядку, але недиференційовна в точці $(0,0)$.

2.22. Довести, що функція

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} (x_1^2+x_2^2)\sin\dfrac{1}{x_1^2+x_2^2}, & (x_1,x_2) \ne (0,0), \\ 0, & (x_1,x_2) = (0,0), \end{cases}$$

а) має частинні похідні першого порядку на $\mathbb{R}^2$, які розривні в точці $(0,0)$ та необмежені в будь-якому її околі;

б) диференційовна в точці $(0,0)$.

2.23. Довести, що функція

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} \exp\Big(-\Big(\dfrac{x_1}{x_2}\Big)^2 - \Big(\dfrac{x_2}{x_1}\Big)^2\Big), & x_1x_2 \ne 0, \\ 0, & x_1x_2 = 0, \end{cases}$$

у точці $(0,0)$: а) має всі частинні похідні будь-якого порядку; б) похідні не залежать від порядку диференціювання; в) недиференційовна.

2.24. При яких $\alpha > 0$ функція

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_m) = \Big(\sum_{k=1}^{m} x_k^2\Big)^{\alpha}, \quad (x_1,x_2,\ldots,x_m) \in \mathbb{R}^m$$

диференційовна в точці $(0,0,\ldots,0)$?

2.3 Диференціювання складних функцій

Теорема (про похідну складної функції). Нехай $A \subset \mathbb{R}^m$, функція $f : A \to \mathbb{R}$ диференційовна в точці $\vec{x}^{\,0} \in A$. Припустимо, що компоненти відображення

$$\vec{g} = (g_1, g_2, \ldots, g_m) : (t^0 - \varepsilon;\ t^0 + \varepsilon) \to A \quad (t^0 \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0 \text{ фіксовані })$$

мають похідні $g_k'(t^0)$, $k = 1, 2, \ldots, m$, причому $\vec{g}(t^0) = \vec{x}^{\,0}$. Тоді складна функція $h(t) = f(\vec{g}(t)) = f\big(g_1(t), g_2(t), \ldots, g_m(t)\big)$, $t \in (t^0 - \varepsilon;\ t^0 + \varepsilon)$, має похідну в точці

t^0, яка обчислюється за формулою

$$h'(t^0) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f(\vec{x}^{\,0})}{\partial x_k} \cdot g'_k(t^0).$$

Нехай A – відкрита множина в $\mathbb{R}^m$, B – відкрита множина в $\mathbb{R}^n$, $\vec{g} = (g_1, g_2, \ldots, g_m) : B \to A$, причому $g_k \in C^{(1)}(B;\mathbb{R})$, $k = 1, \ldots, m$, $f \in C^{(1)}(A;\mathbb{R})$. Тоді суперпозиція $h = f(\vec{g}) : B \to \mathbb{R}$ має неперервні частинні похідні за всіма змінними $x_j, j = 1, \ldots, n$:

$$\frac{\partial h}{\partial x_j}(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_k}(\vec{y}) \cdot \frac{\partial g_k}{\partial x_j}(\vec{x}), \quad \vec{y} = \vec{g}(\vec{x}),\ \vec{x} \in B,$$

і є диференційовною функцією на B. Змінивши порядок підсумовування, маємо

$$dh(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_k}(\vec{y}) \cdot \frac{\partial g_k}{\partial x_j}(\vec{x}) \right) dx_j = $$

$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_k}(\vec{y})\, dy_k, \text{ де } y_k = g_k(\vec{x}),\ \vec{x} \in B.$$

Одержана рівність виражає *інваріантність форми* першого диференціала складної функції.

Приклад 1. Для функції $f \in C^{(1)}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$ знайти диференціал фунції

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = f(x_1 + x_2 + x_3, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, x_1^3 + x_2^3 + x_3^3).$$

⌈ Знайдемо $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1}$. При фіксованих x_2, x_3 розглянемо функції $g_1(t) = t + x_2 + x_3$, $g_2(t) = t^2 + x_2^2 + x_3^2$, $g_3(t) = t^3 + x_2^3 + x_3^3$, $t \in \mathbb{R}$. Маємо

$$g'_1(t) = 1, \quad g'_2(t) = 2t, \quad g'_3(t) = 3t^2,\ t \in \mathbb{R}.$$

Тому похідна функції $h(t) = \varphi(t, x_2, x_3),\ t \in \mathbb{R}$, обчислюється за формулою

$$h'(t) = f'_1(\vec{x}) \cdot 1 + f'_2(\vec{x}) \cdot 2t + f'_3(\vec{x}) \cdot 3t^2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Звідси

$$\frac{\partial \varphi(\vec{x})}{\partial x_1} = f'_1(\vec{x}) + 2f'_2(\vec{x}) + 3x_1^2 f'_3(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Враховуючи симетричність функції φ відносно аргументів, знаходимо похідні за змінними x_2 та x_3. Усі частинні похідні першого порядку функції φ неперервні на $\mathbb{R}^3$, тому ця функція диференційовна на $\mathbb{R}^3$ і

$$\begin{aligned} d\varphi(\vec{x}) =& \big(f'_1(\vec{x}) + 2x_1 f'_2(\vec{x}) + 3x_1^2 f'_3(\vec{x})\big)\, dx_1 + \\ &+ \big(f'_1(\vec{x}) + 2x_2 f'_2(\vec{x}) + 3x_2^2 f'_3(\vec{x})\big)\, dx_2 + \\ &+ \big(f'_1(\vec{x}) + 2x_3 f'_2(\vec{x}) + 3x_3^2 f'_3(\vec{x})\big)\, dx_3, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

⌋

Приклад 2. Знайти перший диференціал функції

$$f(x_1, x_2) = \sin(y_1^2 + y_2^2), \text{ де } y_1 = x_1 x_2,\ y_2 = \frac{x_1}{x_2}.$$

⌈ Скористаємось інваріантністю форми першого диференціала:

$$df = 2(y_1\,dy_1 + y_2\,dy_2)\cos(y_1^2 + y_2^2),\ \text{де}$$
$$dy_1 = x_2\,dx_1 + x_1\,dx_2, \quad dy_2 = x_2^{-2}(x_2\,dx_1 - x_1\,dx_2).$$

Тому

$$df(x_1,x_2) = 2\Big((x_1x_2^2 + x_1x_2^{-2})\,dx_1 + (x_1^2x_2 - x_1^2x_2^{-3})\,dx_2\Big)\cos\big(x_1^2x_2^2 + x_1^2x_2^{-2}\big).$$
⌋

2.25. Нехай функція $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ диференційовна на $\mathbb{R}^2$. Довести, що наведені функції задовольняють відповідні рівняння:

1) $f(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{x_1^4}{12} - \dfrac{x_1^3(x_2+x_3)}{6} + \dfrac{x_1^2x_2x_3}{2} + g(x_2 - x_1,\, x_3 - x_1)$, $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$,
$$f_1' + f_2' + f_3' = x_1x_2x_3;$$
2) $f(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{x_1x_2}{x_3}\ln x_1 + x_1 g\Big(\dfrac{x_2}{x_1},\, \dfrac{x_3}{x_1}\Big), \quad x_1 > 0,\ x_3 \neq 0,$
$$x_1f_1' + x_2f_2' + x_3f_3' = f + \frac{x_1x_2}{x_3}.$$

2.26. Нехай функції $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ двічі диференційовні на $\mathbb{R}$. Послідовним диференціюванням одержати співвідношення, що містять саму функцію f та її похідні, але не містять функції g та h :

1) $f(x_1,x_2) = g(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}), \quad (x_1,x_2) \neq (0,0);$
2) $f(x_1,x_2) = g(x_1 + x_2) + h(x_1 - x_2), \quad (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2.$

2.27. Нехай функції $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ двічі диференційовні на множинах визначення. Послідовним диференціюванням одержати співвідношення, що містять саму функцію f та її похідні, але не містять функції g, h, u :

1) $f(x_1,x_2) = x_1 + h(x_1 \cdot x_2), \quad (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2;$
2) $f(x_1,x_2) = x_1 h\Big(\dfrac{x_1}{x_2^2}\Big), \quad x_2 \neq 0;$
3) $f(x_1,x_2) = h(x_1) + u(x_2), \quad (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2;$
4) $f(x_1,x_2) = x_1 h\Big(\dfrac{x_1}{x_2}\Big) + x_2 u\Big(\dfrac{x_1}{x_2}\Big), \quad x_2 \neq 0;$
5) $f(x_1,x_2) = h(x_1 \cdot x_2) + u\Big(\dfrac{x_1}{x_2}\Big), \quad x_2 \neq 0;$
6) $f(x_1,x_2,x_3) = g(x_1 - x_2,\, x_2 - x_3), \quad (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3;$
7) $f(x_1,x_2,x_3) = g\Big(\dfrac{x_1}{x_2},\, \dfrac{x_2}{x_3}\Big), \quad x_2x_3 \neq 0;$

8) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^k g\Big(\dfrac{x_3}{x_1}, \dfrac{x_2}{x_1}\Big), \quad x_1 \neq 0,\ k$ – фіксоване дійсне число.

2.28. Нехай функції $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ мають неперервні похідні другого порядку на множинах визначення. Знайти диференціали першого та другого порядків наведених складних функцій:

1) $f(x_1, x_2) = g(\sqrt{x_1^2 + 2x_2^2}), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$;
2) $f(x_1, x_2) = h(x_1 + x_2,\, x_1 - x_2), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$;
3) $f(x_1, x_2) = h\Big(x_1^2 x_2, \dfrac{x_1}{x_2^2}\Big), \quad x_2 \neq 0$;
4) $f(x) = u(x, x^2, x^3), \quad x \in \mathbb{R}$;
5) $f(x_1, x_2, x_3) = g\left(x_1 x_2, \dfrac{x_2}{x_3}\right), \quad x_3 \neq 0$;
6) $f(x_1, x_2, x_3) = h(x_1^2 + x_2^2,\, x_1^2 - x_2^2,\, 2x_1 x_3), \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$;
7) $f(x_1, x_2, x_3) = g(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3), \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$;
8) $f(x_1, x_2, x_3) = g(x_1^2 - x_2^2 + x_3^2), \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$;
9) $f(x_1, x_2, x_3) = h(x_1 - x_2, x_3), \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$;
10) $f(x_1, x_2) = u\Big(\dfrac{x_1}{x_2},\, x_1 - x_2,\, x_1 + x_2\Big), \quad x_2 \neq 0$;
11) $f(x_1, x_2, x_3) = u(ax_1, bx_2, cx_3), \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ a, b, c$ – фіксовані дійсні числа;
12) $f(x_1, x_2, x_3) = u(x_1 x_2,\, \sin x_2,\, x_1 + x_3), \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

2.29. Використовуючи властивість інваріантності форми першого диференціала, знайти диференціали складних функцій:

1) $f(x_1, x_2) = y_1 \sin y_2 + y_2 \cos y_1,\ y_1 = \dfrac{x_1}{x_2},\ y_2 = x_1 x_2,\ x_2 \neq 0.$
2) $f(x) = y_1 y_2 \operatorname{arctg}(y_1 y_2), \quad y_1 = x^2 + 1,\ y_2 = x^3,\ x \in \mathbb{R}$;
3) $f(x_1, x_2) = y_1^{y_2} + y_2^{y_1}, \quad y_1 = x_1^2 + x_2^2,\ y_2 = x_1^2 - x_2^2,\ x_1 > x_2 > 0$;
4) $f(x_1, x_2) = y_1^2 y_2^3 y_3^4, \quad y_1 = \arcsin \dfrac{x_1}{x_2},\ y_2 = \sqrt{x_2^2 - x_1^2}$, $y_3 = \ln x_2,\ 0 < x_1 < x_2$;
5) $f(x_1, x_2, x_3) = \ln(1 + y_1^2 y_2), \quad y_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $y_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,\ (x_1, x_2, x_2) \in \mathbb{R}^3$;
6) $f(x_1, x_2) = y_1 y_2 + \sin y_1 \cdot \cos y_2, \quad y_1 = x_1 \sin x_2,\ y_2 = x_2^2$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$;
7) $f(x) = y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2, \quad y_1 = \sin x,\ y_2 = e^x,\ x \in \mathbb{R}$;
8) $f(x_1, x_2) = y_1^2 y_2 - y_2^2 y_1, \quad y_1 = x_1 \cos x_2,\ y_2 = x_1 \sin x_2$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$;

9) $f(x_1,x_2)=y_1^2\ln y_2,\quad y_1=\dfrac{x_1}{x_2},\ y_2=3x_1-2x_2,\ 0<x_2<\dfrac{3x_1}{2};$

10) $f(x)=\mathrm{tg}\Big(\dfrac{3}{y_1}+2y_1^2-y_2\Big),\quad y_1=x^{-1},\ y_2=\sqrt{x},\ x>0,$

$3x+2x^{-2}-\sqrt{x}\notin\Big\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\Big\};$

11) $f(x_1,x_2)=e^{y_1y_2},\quad y_1=x_1^2-x_2^2,\ y_2=e^{x_1x_2},\ (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2.$

2.30. Знайти двічі диференційовну функцію $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, що задовольняє на $\mathbb{R}^2$ рівняння

$$f''_{22}=\cos x_2$$

та умови $f(x_1,0)=0,\ f'_2(x_1,0)=x_1^2,\ x_1\in\mathbb{R}.$

2.31. Навести приклад функції $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, що має неперервну похідну f''_{12}, але похідна f'_2 якої у певній точці $\vec{x}^{\,0}$ не існує.

2.4 Диференціювання неявних функцій

Нехай $A\subset\mathbb{R}^{m+n}$ та $\vec{F}:A\to\mathbb{R}^p$. Кажуть, що відображення $\vec{y}:B\to\mathbb{R}^n$ задане на множині $B\subset\mathbb{R}^m$ неявно векторним рівнянням

$$\vec{F}(\vec{x},\vec{y})=\vec{0},$$

або системою рівнянь

$$F_k(\vec{x},\vec{y})=0,\ k=1,\ldots,p,$$

якщо

1) $\forall\,\vec{x}\in B:\ (\vec{x},\vec{y}(\vec{x}))\in A,$ 2) $\forall\,\vec{x}\in B:\ \vec{F}(\vec{x},\vec{y}(\vec{x}))=\vec{0}.$

У випадку $n=p$ умови локального існування відображення $\vec{y}$ та диференційовності його компонентів розглядаються у параграфі 2.9.

У задачах цього параграфа припускається існування відповідних неявних функцій та існування їх похідних потрібного порядку.

На практиці зручно шукати похідні та диференціали компонент неявних відображень відповідним диференціюванням системи тотожностей

$$\forall\,\vec{x}\in B:\ F_k(\vec{x},\vec{y}(\vec{x}))=0,\ k=1,\ldots,p.$$

Приклад. Нехай функції y_1 та y_2 задані системою рівнянь

$$\begin{cases} y_1(x_1,x_2)+y_2(x_1,x_2) &= x_1+x_2\\ x_1\sin y_2(x_1,x_2) &= x_2\sin y_1(x_1,x_2).\end{cases}$$

Знайти диференціали $dy_1,\ dy_2.$

⌈ Зауважимо, тут

$$F_1(x_1,x_2,y_1,y_2)=y_1+y_2-x_1-x_2,\quad F_2(x_1,x_2,y_1,y_2)=x_1\sin y_2-x_2\sin y_1,$$

$(x_1,x_2,y_1,y_2)\in\mathbb{R}^{2+2}$. Враховуючи інваріантність форми першого диференціала, диференціюванням рівнянь як тотожностей одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $dy_1,\ dy_2:$

$$\begin{cases} dy_1+ & dy_2= & dx_1+ & dx_2\\ -x_2\cos y_1\,dy_1+ & x_1\cos y_2\,dy_2= & -\sin y_2\,dx_1+ & \sin y_1\,dx_2.\end{cases}$$

Розв'язками цієї системи у тих точках, де $x_1 \cos y_2 + x_2 \cos y_1 \neq 0$, є

$$dy_1 = (x_1 \cos y_2 + x_2 \cos y_1)^{-1} \big((x_1 \cos y_2 + \sin y_2)\, dx_1 + (x_1 \cos y_2 - \sin y_1)\, dx_2 \big),$$
$$dy_2 = (x_1 \cos y_2 + x_2 \cos y_1)^{-1} \big((x_2 \cos y_1 - \sin y_2)\, dx_1 + (x_2 \cos y_1 + \sin y_1)\, dx_2 \big). \quad \lrcorner$$

2.32. За яких умов стосовно функції $f : (a;\, b) \to \mathbb{R}$ рівняння

$$f(x) \cdot y = 0, \quad x \in (a;\, b),$$

має єдиний розв'язок $y(x) = 0,\ x \in (a;\, b)$, у класі неперервних функцій?

2.33. Розглянемо рівняння

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x \in [-1;\, 1].$$

1) Скільки всього функцій $y = y(x),\ x \in [-1;\, 1]$, задовольняють це рівняння?
2) Скільки неперервних функцій $y = y(x),\ x \in [-1;\, 1]$, задовольняють це рівняння?
3) Скільки неперервних функцій $y = y(x),\ x \in [-1;\, 1]$, задовольняють це рівняння в кожному з випадків:
   а) $y(0) = 1$; б) $y(1) = 0$?

2.34. Навести приклади функцій $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що задовольняють рівняння

$$y^2(x) = 1 + x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Знайти: а) невід'ємні розв'язки; б) неперервні розв'язки цього рівняння.

2.35. Розглянемо рівняння

$$x^2 = y^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1) Скільки функцій $y = y(x),\ x \in \mathbb{R}$, задовольняють це рівняння?
2) Скільки неперервних функцій $y = y(x),\ x \in \mathbb{R}$, задовольняють це рівняння?
3) Скільки диференційовних функцій $y = y(x),\ x \in \mathbb{R}$, задовольняють це рівняння?
4) Скільки неперервних функцій $y = y(x), x \in \mathbb{R}$, задовольняють це рівняння в кожному з випадків:
   а) $y(1) = 1$; б) $y(0) = 0$?
5) Скільки неперервних функцій $y = y(x), x \in \left(\dfrac{1}{2};\, \dfrac{3}{2}\right)$, задовольняють це рівняння, якщо $y(1) = 1$?

2.36. Нехай функція $y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ при фіксованому $a \in \mathbb{R}$ задовольняє рівняння

$$y^3 - 3x_1x_2y = a^3, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Знайти частинні похідні першого порядку функції y у тих точках, де вони існують.

2.37. Нехай $B = B\big((1,-2); r\big)$ – деякий окіл точки $(1,-2) \in \mathbb{R}^2$. Функція $y : B \to \mathbb{R}$ задовольняє рівняння

$$x_1^2 + 2x_2^2 + 3y^2 + x_1x_2 - y - 9 = 0, \quad (x_1, x_2) \in B; \qquad y(1,-2) = 1.$$

Знайти частинні похідні другого порядку функції y в точці $(1,-2)$.

2.38. Нехай функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ має неперервні частинні похідні другого порядку на $\mathbb{R}^2$, функція $y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ задовольняє рівняння

$$f(x_1 + y,\ x_2^2 + y^2) = 0, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Знайти y''_{12}.

2.39. Знайти похідні першого та другого порядків функції $y = y(x)$, визначеної рівнянням:

1) $x^2 + 2xy - y^2 = a^2, \quad a$ – фіксоване дійсне число;
2) $y - \varepsilon \cdot \sin y = x, \quad \varepsilon \in (0;\, 1)$ фіксоване;
3) $x^3y - y^3x = a^4, \quad a$ – фіксоване дійсне число;
4) $x^2y^2 - x^4 - y^4 = a^4, \quad a$ – фіксоване дійсне число;
5) $(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0, \quad a \neq 0$ фіксоване;
6) $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$;
7) $xe^y + ye^x - e^{xy} = 0$.

2.40. Нехай функція $y = y(x)$ при фіксованих $\{a, b, c, d, e, f\} \subset \mathbb{R},\ c \neq 0$, задовольняє алгебраїчне рівняння

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0.$$

Довести, що

$$\frac{d^3}{dx^3}\big((y'')^{-2/3}\big) = 0.$$

2.41. Знайти частинні похідні першого порядку функції $y = y(x_1, x_2)$, визначеної співвідношенням:

1) $e^y - x_1x_2y = 0$;
2) $x_1 + x_2 + y = e^y$;
3) $x_1x_2 + x_1y + x_2y^2 = 1$;
4) $\dfrac{x_1}{y} = \ln\Big(\dfrac{y}{x_2}\Big) + 1$;
5) $x_1 + x_2 + y = e^{-(x_1+x_2+y)}$;
6) $x_1^2 - 2x_2^2 + y^2 - 4x_1 + 2y = 5$;
7) $y^3 - 3x_1x_2y = a^3,\ a \in \mathbb{R}$ фіксоване;
8) $x_1^2 + x_2^2 + y^2 = a^2,\ a > 0$ фіксоване;
9) $x_1 \cos x_2 + x_2 \cos y + y \cos x_1 = a, \quad a \in \mathbb{R}$ фіксоване.

2.42. Нехай функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ двічі диференційовні на множинах визначення. Довести, що функція $y=y(x_1,x_2)$ задовольняє відповідне рівняння:

1) $y=x_2 f\Big(\dfrac{y}{x_1}\Big)$; $\qquad x_1y_1'+x_2y_2'=y$;

2) $y=x_1+x_2f(x)$; $\qquad \dfrac{\partial g(y)}{\partial x_2}=f(y)\dfrac{\partial g(y)}{\partial x_1}$;

3) $h(cx_1-ay,cx_2-by)=0,$ де $(a,\,b)\neq(0,\,0)$; $\qquad ay_1'+by_2'=c$;

4) $x_1-x_2+y=f(x_1^2+x_2^2+y^2)$; $\quad (x_2+y)y_1'+(y-x_1)y_2'+x_1+x_2=0$;

5) $x_1-ay=f(x_2-by),$ де $(a,\,b)\neq(0,\,0)$; $\qquad ay_1'+by_2'=1$;

6) $x_1^2+x_2^2+y^2=x_2f\Big(\dfrac{y}{x_2}\Big)$; $\qquad (x_1^2-x_2^2-y^2)y_1'+2x_1x_2y_2'=2x_1y$;

7) $h(x_1+yx_1^{-1},\ x_2+yx_1^{-1})=0$; $\qquad x_1y_1'+x_2y_2'=y-x_1x_2.$

2.43. Нехай функція $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ диференційовна на $\mathbb{R}^3$. Рівняння
$$F(x_1,x_2,x_3)=0$$
задає три неявні функції $x_1=f(x_2,x_3)$, $x_2=g(x_3,x_1)$, $x_3=h(x_1,x_2)$. Довести тотожності:
$$1)\ \frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial g}{\partial x_1}=1;\qquad 2)\ \frac{\partial g}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial h}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_2}=-1.$$

2.44. Рівняння
$$x_1^2+x_2^2+x_3^2-3x_1x_2x_3=0$$
задає неявні функції $x_3=f(x_1,x_2)$ та $x_2=g(x_3,x_1)$. Нехай
$$h(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2^2x_3^3,\quad (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3.$$
Обчислити в точці $\vec{x}^{\,0}=(1,1,1)$ похідні:

1) $\dfrac{\partial}{\partial x_1}h\big(x_1,x_2,f(x_1,x_2)\big)$; $\qquad$ 2) $\dfrac{\partial}{\partial x_1}h\big(x_1,g(x_3,x_1),x_3\big)$.

2.45. Для функції $y=f(x_1,x_2)$, визначеної наведеним співвідношенням, знайти $df(\vec{x}^{\,0};\vec{a})$ при заданих $\vec{x}^{\,0}=(x_1^0,x_2^0)$, $y^0=f(\vec{x}^{\,0})$ та $\vec{a}$:

1) $y^3-x_1y+x_2=0,\quad \vec{x}^{\,0}=(3,-2),\ y^0=2,\ \vec{a}=(3,-2)$;

2) $x_1y^5+x_2^3y-x_1^3=0,\quad \vec{x}^{\,0}=(1,0),\ y^0=1,\ \vec{a}=(2,1)$;

3) $x_1-x_2y+e^y=0,\quad \vec{x}^{\,0}=(-1,2),\ y^0=0,\ \vec{a}=(1,1)$;

4) $x_1^2+x_2^2+y^2=3x_1x_2y,\quad \vec{x}^{\,0}=(-1,-1),\ \ y^0=1,\ \vec{a}=(-1,1)$;

5) $x_1^2+2x_2^2+y^2=4,\quad \vec{x}^{\,0}=(1,-1),\ y^0=1,\ \vec{a}=(2,3)$;

6) $x_1^3+x_2^3-y^3=10,\quad \vec{x}^{\,0}=(1,1),\ y^0=-2,\ \vec{a}=(1,-1)$;

7) $x_1^2+x_2^2=2y^2,\quad \vec{x}^{\,0}=(1,-1),\ y^0=1,\ \vec{a}=(2,2)$;

8) $x_1^2+2x_2^2+3y^2+x_1x_2-y=9,\quad \vec{x}^{\,0}=(-1,2),\ y^0=1,\ \vec{a}=(4,5)$;

9) $x_1^2 - x_2^2 + y^2 = 1, \quad \vec{x}^{\,0} = (1,1),\ y^0 = 1,\ \vec{a} = (0,1);$

10) $8x_1^2 - 3x_2^4 - y^3 = 0, \quad \vec{x}^{\,0} = (1,0),\ y^0 = 2,\ \vec{a} = (-1,-1).$

2.46. Знайти вказані похідні функцій f_1 та f_2, заданих системами рівнянь:

1) $\dfrac{df_k}{dx}, \quad k = 1,\, 2;$

$$\begin{cases} f_1(x) + f_2(x) + x & = 0 \\ f_1^2(x) + f_2^2(x) + x^2 & = 1; \end{cases}$$

2) $\dfrac{d^2 f_k(x^0)}{dx^2}, \quad k = 1,\, 2; \quad x^0 = 2,\ f_1(2) = 1,\ f_2(2) = -1;$

$$\begin{cases} f_1^2(x) + f_2^2(x) & = \dfrac{x^2}{2} \\ f_1(x) + f_2(x) + x & = 2. \end{cases}$$

2.47. Нехай функція $f = f(x_1, x_2)$ задана системою рівнянь

$$\begin{cases} x_1 & = y_1 + y_2 \\ x_2 & = y_1^2 + y_2^2 \\ f & = y_1^3 + y_2^3, \end{cases} \qquad (y_1,\, y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

1) Знайти явний вираз $f = f(x_1, x_2)$ та множину визначення цієї функції.

2) Знайти частинні похідні функції f, не використовуючи її явний вигляд.

2.48. Нехай функції $F_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ k = 1,\, 2, 3,$ диференційовні на $\mathbb{R}^3$ і функція f визначена системою рівнянь

$$\begin{cases} f(x) & = F_1(x, y_1, y_2) \\ F_2(x, y_1, y_2) & = 0 \\ F_3(x, y_1, y_2) & = 0. \end{cases}$$

Знайти f'.

2.49. Нехай функції $F_1 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $F_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ диференційовні на множинах визначення, функція f задана системою рівнянь

$$\begin{cases} f(x_1, x_2) & = F_1(x_1, x_2, y_1, y_2) \\ F_2(x_2, y_1, y_2) & = 0 \\ F_3(y_1, y_2) & = 0. \end{cases}$$

Знайти частинні похідні першого порядку функції f.

2.50. Нехай $g \in C(\mathbb{R})$, функція $y = y(x_1, x_2)$ визначена рівнянням

$$\int\limits_{\sin(x_1+x_2)}^{x_1x_2-y} g(t)\,dt = 0.$$

Знайти $\dfrac{\partial y}{\partial x_1}$.

2.51. Обчислити похідні функцій f_1 та f_2, визначених системою рівнянь:

1) $\begin{cases} f_1(x) &= y^2 + y^{-2} \\ f_2(x) &= y^3 + y^{-3} \\ x &= y + y^{-1}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x &= e^y \\ f_1(x) &= 3y^2 \\ f_2(x) &= \ln(1+y); \end{cases}$

3) $\begin{cases} f_1(x) &= \operatorname{tg} y \\ f_2(x) &= \sin y \\ x &= -y^2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} f_1(x)f_2(x) &= x + f_1(x) \\ \dfrac{f_2(x)}{f_1(x)} &= \operatorname{tg} x; \end{cases}$

5) $\begin{cases} f_1(x)e^{f_2(x)} &= \cos x \\ f_1^2(x) + f_2^2(x) &= 1; \end{cases}$

6) $\begin{cases} f_1(x) - f_2^2(x) &= x^2 \\ x^2 - xf_2(x) + f_2^2(x) &= 1; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2 + f_1^2(x) - f_2^2(x) &= 0 \\ x^2 + 2f_1^2(x) + 3f_2^2(x) &= 1; \end{cases}$

8) $\begin{cases} \sin f_1(x) - \cos f_2(x) &= x \\ \cos f_1(x) - \sin f_2(x) &= x^2; \end{cases}$

9) $\begin{cases} \ln\bigl(1 + xf_1(x)\bigr) &= f_2(x) \\ \ln\bigl(1 - xf_2(x)\bigr) &= f_1(x); \end{cases}$

10) $\begin{cases} x + f_1(x) + f_2(x) &= a \\ x^3 + f_1^3(x) + f_2^3(x) &= 3xf_1(x)f_2(x), \end{cases}$ де $a \in \mathbb{R}$ фіксоване.

2.52. Знайти похідні другого порядку в точці x^0 функцій f_1 та f_2, визначених системою рівнянь при заданих значеннях $f_k(x^0) = a_k,\ k = 1, 2$:

1) $\begin{cases} 8x^2 - f_2^3(x) - 3f_1^4(x) &= 0 \\ x^3 + 5f_1(x) - f_2^2(x) &= -3, \end{cases}$ $x^0 = 1,\ a_1 = 0,\ a_2 = 2;$

2) $\begin{cases} x + f_1(x) + f_2(x) &= 0 \\ x^3 + f_1^3(x) - f_2^3(x) &= 10, \end{cases}$ $x^0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = -2;$

3) $\begin{cases} f_2(x) - x^2 - f_1^2(x) &= 0 \\ x^2 - xf_1(x) + f_1^2(x) &= 1, \end{cases}$ $x^0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = 2;$

4) $\begin{cases} f_1(x) &= y^2 + y^{-2} \\ f_2(x) &= y^3 + y^{-3} \\ x &= y + y^{-1}, \end{cases}$ $x^0 = 2,\ a_1 = 2,\ a_2 = 2;$

5) $\begin{cases} f_1^2(x) + f_2^2(x) - 2x^2 &= 0 \\ f_1^2(x) + 2f_2^2(x) + x^2 &= 4, \end{cases}$ $x^0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = -1;$

6) $\begin{cases} x^2 + f_1^2(x) - f_2^2(x) &= 0 \\ x^2 + 2f_1^2(x) + 3f_2^2(x) &= 1, \end{cases}$ $x^0 = 0,\ a_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}},\ a_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{5}};$

7) $\begin{cases} x^2 - f_1^2(x) + f_2^2(x) &= 1 \\ f_1^2(x) - 2x + f_2(x) &= 0, \end{cases}$ $x^0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = 1.$

2.53. Нехай функція $f = f(x_1, x_2)$ визначена наведеною нижче системою рівнянь. Знайти явний вираз функції f та множину її визначення. Знайти похідні першого порядку функції f, не використовуючи її явного вигляду.

1) $\begin{cases} x_1 &= y_1 + y_2 \\ x_2 &= y_1 - y_2 \\ f &= y_1 y_2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 &= \dfrac{y_1}{y_2} \\ x_2 &= y_1 - y_2 \\ f &= \dfrac{y_1^2 - y_2^2}{2y_1 + y_2}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 &= y_1 + y_2 \\ x_2 &= y_1 y_2 \\ f &= y_1^{-2} + y_2^{-2}; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1 &= y_1 \cos y_2 \\ x_2 &= y_1 \sin y_2 \\ f &= 2y_2, \end{cases}$
$y_2 \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right);$

5) $\begin{cases} x_1 &= \cos y_1 \sin y_2 \\ x_2 &= \sin y_1 \sin y_2 \\ f &= \cos y_2, \end{cases}$
$y_2 \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right];$

6) $\begin{cases} x_1 &= y_1 - y_2 \\ x_2 &= y_1 y_2 \\ f &= y_1^3 - y_2^3. \end{cases}$

2.54. Нехай функція $f = f(x_1, x_2)$ задана наведеною нижче системою рівнянь. Виразити диференціал df через $f,\ x_k,\ dx_k,\ k = 1, 2:$

1) $\begin{cases} x_1 &= y_1 + y_2 \\ x_2 &= y_1 - y_2 \\ f &= y_1^2 y_2^2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 &= y_1 \cos y_2 \\ x_2 &= y_1 \sin y_2 \\ f &= y_1^2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 &= \sqrt{a}(\sin y_1 + \cos y_2) \\ x_2 &= \sqrt{a}(\cos y_1 - \sin y_2) \\ f &= 1 + \sin(y_1 - y_2), \end{cases}$ $a > 0$ фіксоване;

4) $\begin{cases} x_1 &= y_2 \cos y_1 - y_1 \cos y_1 + \sin y_1 \\ x_2 &= y_2 \sin y_1 - y_1 \sin y_1 - \cos y_1 \\ f &= (y_1 - y_2)^2. \end{cases}$

2.55. Нехай функція $f = f(x_1, x_2)$ задана наведеною нижче системою рівнянь. Виразити диференціал df через $y_1,\ y_2,\ dx_1,\ dx_2$:

1) $\begin{cases} x_1 &= e^{y_1} \cos y_2 \\ x_2 &= e^{y_1} \sin y_2 \\ f &= y_1 y_2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 &= y_1 + \ln y_2 \\ x_2 &= y_2 - \ln y_1 \\ f &= 2y_1 + y_2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 &= e^{y_1 + y_2} \\ x_2 &= e^{y_1 - y_2} \\ f &= y_1 y_2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1 &= y_1 + y_2^2 \\ x_2 &= y_1^2 - y_2^3 \\ f &= 2y_1 y_2; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x_1 &= a \cos y_1 \sin y_2 \\ x_2 &= b \cos y_1 \cos y_2 \\ f &= c \sin y_1, \end{cases}$

$\{a, b, c\} \subset (0; +\infty)$.

2.5 Заміна змінних у диференціальних виразах

Правило заміни змінних у диференціальних виразах є наслідком теореми про диференціювання складної функції (див. п. 2.3). При цьому традиційно для функції використовується одне й те саме позначення незалежно від того, є вона функцією незалежних змінних, чи суперпозицією. В задачах цього параграфа похідні вищих порядків функцій кількох змінних припускаються неперервними, отже й незалежними від порядку диференціювання.

Приклад 1. Перетворити звичайне диференціальне рівняння
$$(1 - x^2)y'' - xy' + a^2 y = 0, \quad -1 < x < 1;\ a \in \mathbb{R},$$
увівши нову змінну t, де $x = \cos t,\ 0 < t < \pi$.

⌈ Функція y є складною функцією $y = y(x(t))$. За ланцюговим правилом $y'_t = y'_x x'_t$. Тому $y'_x = y'_t (x'_t)^{-1}$, $x'_t \neq 0$. Продиференціюємо ще раз:
$$y''_{tt} = y''_{xx}(x'_t)^2 + y'_x x''_{tt} = y''_{xx}(x'_t)^2 + y'_t x''_{tt}(x'_t)^{-1}.$$
Оскільки $x'_t = -\sin t \neq 0$, $x''_{tt} = -\cos t$, $0 < t < \pi$, маємо
$$y'_x = -y'_t \sin^{-1} t,$$
$$y''_{xx} = (y''_{tt} - y'_t \sin^{-1} t \cos t) \sin^{-2} t.$$

Підставивши вирази для $y'_x,\ y''_{xx}$ у початкове рівняння, отримаємо
$$y''_{tt} + a^2 y = 0.$$
⌋

Приклад 2. Перетворити звичайне диференціальне рівняння, прийнявши y за нову незалежну змінну
$$(y'')^2 - (y')^6 = 0.$$
⌈ Функцію y можна вважати складною функцією $y = y(x(y))$. Тому $y'_x \cdot x'_y = 1$ і $y'_x = (x'_y)^{-1},\ x'_y \neq 0$. Продиференціюємо ще раз:
$$y''_{xx}(x'_y)^2 + y'_x x''_{yy} = 0.$$
Звідси
$$y''_{xx} = -x''_{yy}(x'_y)^{-3}.$$
Підставивши вирази для $y'_x,\ y''_{xx}$ у початкове рівняння, отримаємо
$$(x''_{yy})^2 = 1.$$
⌋

Приклад 3. Перейти до полярних координат у виразі
$$W = x_1 \frac{\partial z}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial z}{\partial x_1},$$
поклавши $x_1(r, \varphi) = r\cos\varphi,\ x_2(r, \varphi) = r\sin\varphi$.

⌈ Функцію z є складною функцією $z = z(x_1(r, \varphi), x_2(r, \varphi))$. Знайдемо її похідні за змінними $r,\ \varphi$:
$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial r} &= \quad \cos\varphi \cdot \frac{\partial z}{\partial x_1} + \quad \sin\varphi \cdot \frac{\partial z}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} &= -r\sin\varphi \cdot \frac{\partial z}{\partial x_1} + r\cos\varphi \cdot \frac{\partial z}{\partial x_2}. \end{aligned}$$
З цієї системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно похідних $\dfrac{\partial z}{\partial x_1},\ \dfrac{\partial z}{\partial x_2}$ знаходимо
$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x_1} &= \cos\varphi \cdot \frac{\partial z}{\partial r} - r^{-1}\sin\varphi \cdot \frac{\partial z}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial z}{\partial x_2} &= \sin\varphi \cdot \frac{\partial z}{\partial r} + r^{-1}\cos\varphi \cdot \frac{\partial z}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$
Підставивши знайдені похідні в диференціальний вираз, остаточно маємо
$$W = \frac{\partial z}{\partial \varphi}.$$

Зауваження. Для переходу в диференціальних виразах до полярних координат $r,\ \varphi$ зручно використовувати диференціальні оператори
$$\begin{aligned} \frac{\partial \cdot}{\partial x_1} &= \cos\varphi \cdot \frac{\partial \cdot}{\partial r} - r^{-1}\sin\varphi \cdot \frac{\partial \cdot}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial \cdot}{\partial x_2} &= \sin\varphi \cdot \frac{\partial \cdot}{\partial r} + r^{-1}\cos\varphi \cdot \frac{\partial \cdot}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$
⌋

2.56. Перетворити звичайні диференціальні рівняння, увівши замість x нову змінну t за вказаним правилом:

1) $x^2 y'' + xy' + y = 0; \quad x = e^t;$
2) $(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0; \quad x = \sin t,\ t \in \big(-\pi/2; \pi/2\big);$
3) $(1 + x^2)^2 y'' + 2x(1 + x^2)y' + y = 0; \quad x = \operatorname{tg} t,\ t \in \big(-\pi/2; \pi/2\big);$

4) $(x-x^3)y''-y'-x^3y=0;\quad x=\sqrt{1-t^2},\ t\in(0;1);$
5) $x^4y''+2x^3y'+y=0;\quad x=t^{-1},\ t\neq 0;$
6) $y''+y'\cdot\operatorname{th}x+\dfrac{m^2}{\operatorname{ch}^2x}y=0,\ m\in\mathbb{R};\quad x=\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2},\ t\in(0;\pi);$
7) $(1+x^2)y''+xy'=0;\quad t=\ln(1+x^2),\ x\neq 0;$
8) $(x+a)^3y'''+3(x+a)^2y''+(x+a)y'+by=0,\ \{a,b\}\subset\mathbb{R};$
$t=\ln(x+a),\ x>-a.$

2.57. Перетворити звичайні диференціальні рівняння, прийнявши y за нову незалежну змінну:

1) $(y')^3y=3y'';$
2) $\dfrac{y''}{(y')^3}+y=0;$
3) $y''-x(y')^3+e^y(y')^3=0;$
4) $2(y')^3y''-10(y'')^2+15\left(\dfrac{y''}{y'}\right)^3=0.$

2.58.

1) У рівнянні $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y}{x-y},\quad x\neq y$, перейти до полярних координат, поклавши $x=r(\varphi)\cos\varphi,\quad y=r(\varphi)\sin\varphi.$
2) У системі рівнянь
$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_2+kx_1(x_1^2+x_2^2)\\ \dfrac{dx_2}{dt}=-x_1+kx_2(x_1^2+x_2^2),\end{cases}$$
де $(x_1,x_2)\neq(0,0)$, k – деяка дійсна стала, перейти до полярних координат, поклавши $x_1(t)=r(t)\cos\varphi(t),\quad x_2(t)=r(t)\sin\varphi(t).$

2.59. Нехай $p\in C^{(1)}(\mathbb{R}),\ q\in C(\mathbb{R})$. Перетворити рівняння
$$y''+p(x)y'+q(x)y=0,$$
увівши нову функцію u, пов'язану з функцією y співвідношенням
$$y(x)=u(x)\cdot\exp\Big(-\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x}p(t)\,dt\Big),\quad x_0\in\mathbb{R}.$$

2.60. Увести нові незалежні змінні y_1 і y_2 замість x_1 і x_2 та розв'язати рівняння:

1) $\dfrac{\partial z}{\partial x_1}=\dfrac{\partial z}{\partial x_2};\quad y_1=x_1+x_2,\ y_2=x_1-x_2;$
2) $x_2\dfrac{\partial z}{\partial x_1}-x_1\dfrac{\partial z}{\partial x_2}=0;\quad y_1=x_1,\ y_2=x_1^2+x_2^2.$

2.61. Перейти в рівняннях до полярних координат, поклавши $x=r(\varphi)\cos\varphi$, $y=r(\varphi)\sin\varphi$:

1) $(xy'-y)^2=2xy(1+(y')^2);$
2) $(x^2+y^2)^2=(x+yy')^3;$

3) $\left(1+(y')^2\right)^{3/2} = y''$; 4) $xy' - y = \sqrt{1+(y')^2}$.

2.62. Перейти до полярних координат у рівнянні

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

поклавши $x(t) = r(t)\cos\varphi(t), \quad y(t) = r(t)\sin\varphi(t)$.

2.63. Розв'язати рівняння, увівши нові незалежні змінні y_1 та y_2 :

1) $a\dfrac{\partial z}{\partial x_1} + b\dfrac{\partial z}{\partial x_2} = 1,\ \{a, b\} \subset \mathbb{R},\ a \neq 0;\ y_1 = x_1,\ y_2 = x_2 - bz;$

2) $x_1\dfrac{\partial z}{\partial x_1} + x_2\dfrac{\partial z}{\partial x_2} = z; \quad y_1 = x_1,\ y_2 = \dfrac{x_2}{x_1}.$

2.64. Перетворити рівняння, увівши нові незалежні змінні y_1 та y_2 :

1) $x_1\dfrac{\partial z}{\partial x_1} + \sqrt{1+x_2^2}\,\dfrac{\partial z}{\partial x_2} = x_1x_2; \quad y_1 = \ln x_1,\ y_2 = \ln(x_2 + \sqrt{1+x_2^2});$

2) $(x_1+x_2)\dfrac{\partial z}{\partial x_1} - (x_1-x_2)\dfrac{\partial z}{\partial x_2} = 0; \quad y_1 = \ln\sqrt{x_1^2+x_2^2},\ y_2 = \operatorname{arctg}\dfrac{x_2}{x_1};$

3) $x_1\dfrac{\partial z}{\partial x_1} + x_2\dfrac{\partial z}{\partial x_2} = z + \sqrt{x_1^2+x_2^2+z^2}; \quad y_1 = \dfrac{x_2}{x_1},$
$y_2 = z + \sqrt{x_1^2+x_2^2+z^2};$

4) $x_1\dfrac{\partial z}{\partial x_1} + x_2\dfrac{\partial z}{\partial x_2} = \dfrac{x_1}{z}; \quad y_1 = 2x_1 - z^2,\ y_2 = \dfrac{x_2}{z};$

5) $(x_1+z)\dfrac{\partial z}{\partial x_1} + (x_2+z)\dfrac{\partial z}{\partial x_2} = x_1+x_2+z; \quad y_1 = x_1+z,\ y_2 = x_2+z;$

6) $x_1\dfrac{\partial z}{\partial x_1} + x_2\dfrac{\partial z}{\partial x_2} = z; \quad y_1 = ze^{-x_1},\ y_2 = ze^{-x_2};$

7) $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial x_2}\right)^2 = 1; \quad x_1 = y_1y_2,\ x_2 = \frac{1}{2}(y_1^2 - y_2^2);$

8) $(x_1 + mz)\dfrac{\partial z}{\partial x_1} + (x_2 + nz)\dfrac{\partial z}{\partial x_2} = 0,\ \{m, n\} \subset \mathbb{R}; \quad y_1 = x_1,$
$y_2 = \dfrac{x_2+nz}{x_1+mz}.$

2.65. Перетворити рівняння, увівши нові незалежні змінні y_1, y_2, y_3 :

1) $\dfrac{\partial z}{\partial x_1} + \dfrac{\partial z}{\partial x_2} + \dfrac{\partial z}{\partial x_3} = 0; \quad y_1 = x_1,\ y_2 = x_2 - x_1,\ y_3 = x_3 - x_1;$

2) $(x_2+x_3+z)\dfrac{\partial z}{\partial x_1} + (x_1+x_3+z)\dfrac{\partial z}{\partial x_2} + (x_1+x_2+z)\dfrac{\partial z}{\partial x_3} = x_1+x_2+x_3;$
$e^{y_i} = x_i - z,\ i = 1, 2, 3;$

3) $\displaystyle\sum_{1\le i\le j\le 3} \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} = 0; \quad y_i = x_1+x_2+x_3-2x_i,\ i = 1, 2, 3;$

4) $\sum\limits_{i=1}^{3} x_i \dfrac{\partial z}{\partial x_i} = 0; \quad y_1 = \dfrac{x_2}{x_1},\ y_2 = \dfrac{x_3}{x_1},\ y_3 = x_2 - x_3.$

2.66. Нехай функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ чотири рази диференційовна. Кожній точці (x, y) кривої $y = f(x),\ x \in \mathbb{R}$, поставимо у відповідність точку (x_1, y_1) згідно з перетворенням Лежандра:

$$x_1 = f'(x), \quad y_1 = xf'(x) - y.$$

Знайти похідні $\dfrac{d^i y_1}{dx_1^i},\ i = 1, 2, 3.$

2.67. Нехай функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ двічі диференційовна. Виразити кривину

$$k = \frac{|f''(x)|}{\left(1 + (f'(x))^2\right)^{3/2}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

плоскої кривої $\{(x, y) \mid y = f(x),\ x \in \mathbb{R}\}$ у полярних координатах, поклавши $x = r(\varphi)\cos\varphi,\ y = r(\varphi)\sin\varphi.$

2.68. Перейти до полярних координат, поклавши $x_1(r, \varphi) = r\cos\varphi$, $x_2(r, \varphi) = r\sin\varphi$:

1) $W = x_1 \dfrac{\partial z}{\partial x_1} + x_2 \dfrac{\partial z}{\partial x_2};$

2) $W = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial x_2}\right)^2;$

3) $W = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2};$

4) $W = x_1^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + 2x_1x_2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} + x_2^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2};$

5) $W = x_2^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} - 2x_1x_2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} + x_1^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} - \left(x_1 \dfrac{\partial z}{\partial x_1} + x_2 \dfrac{\partial z}{\partial x_2}\right);$

6) $W = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + kz,\ k \in \mathbb{R}$ фіксоване, де $z(x_1, x_2) = f(\sqrt{x_1^2 + x_2^2})$, $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$, для двічі диференційовної функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

2.69. Нехай $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ – стандартний базис у $\mathbb{R}^2$, функція $z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ диференційовна на $\mathbb{R}^2$. Перейти до полярних координат, поклавши $x_1(r, \varphi) = r\cos\varphi$, $x_2(r, \varphi) = r\sin\varphi$:

1) $\operatorname{grad} z = \dfrac{\partial z}{\partial x_1}\vec{i} + \dfrac{\partial z}{\partial x_2}\vec{j};$

2) $\|\operatorname{grad} z\| = \sqrt{\left(\dfrac{\partial z}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial x_2}\right)^2}.$

2.70. Перетворити вираз для похідної $z'_{\vec{l}}$ за напрямком $\vec{l}$, поклавши $x_1 = r\cos\varphi,\ x_2 = r\sin\varphi$:

1) $\vec{l} = (1, 2);$

2) $\vec{l} = (-1, 1);$

3) $\vec{l} = (1, 0);$

4) $\vec{l}$ – вектор одиничної довжини, що утворює кут $\alpha = 60^\circ$ з додатним напрямком осі Ox_1;

5) $\vec{l}$ – вектор одиничної довжини, що утворює кут $\alpha = -\dfrac{\pi}{4}$ з додатним напрямком осі Ox_1.

2.71. Нехай $\vec{f} = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ – відображення з диференційовними компонентами $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$. Перейти до полярних координат, поклавши $x_1(r,\varphi) = r\cos\varphi$, $x_2(r,\varphi) = r\sin\varphi$:

1) $\operatorname{div}\vec{f} = \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}$; 2) $W = \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdot\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} - \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\cdot\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}$.

2.72. Розв'язати рівняння

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \qquad \text{де } a \in \mathbb{R},\ a \neq 0,$$

увівши нові незалежні змінні $y_1 = x_1 - ax_2$, $y_2 = x_1 + ax_2$.

2.73. Перетворити рівняння, поклавши y_1 і y_2 новими незалежними змінними замість x_1 і x_2 :

1) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_2} = \left(1 + \dfrac{\partial z}{\partial x_2}\right)^3$; $\quad y_1 = x_1,\ y_2 = x_2 + z$;

2) $2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_2} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial z}{\partial x_1} + \dfrac{\partial z}{\partial x_2} = 0$; $\quad y_1 = x_1 + 2x_2 + 2$, $y_2 = x_1 - x_2 - 1$;

3) $x_1^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + 2x_1x_2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_2} + x_2^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = 0$; $\quad y_1 = \ln x_1,\ y_2 = \ln x_2$;

4) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} - x_2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial z}{\partial x_2}$, $x_2 > 0$; $\quad y_1 = x_1 - 2\sqrt{x_2},\ y_2 = x_1 + 2\sqrt{x_2}$;

5) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = 0$; $\quad y_1 = x_1 + z,\ y_2 = x_2 + z$;

6) $x_1^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} - x_2^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = 0$; $\quad y_1 = x_1x_2,\ y_2 = \dfrac{x_1}{x_2}$;

7) $x_1^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} - (x_1^2 + x_2^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_2} + x_2^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = 0$; $\quad y_1 = x_1 + x_2,\ y_2 = x_1^{-1} + x_2^{-1}$;

8) $x_1^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} - 2x_1\sin x_2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_2} + \sin^2 x_2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = 0$; $\quad y_1 = x_1,\ y_2 = x_1\operatorname{tg}\dfrac{x_2}{2}$;

9) $x_1\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} - x_2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = 0$, $x_i > 0$, $i = 1, 2$; $\quad x_1 = (y_1 + y_2)^2,\ x_2 = (y_1 - y_2)^2$;

10) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}+m^2 z=0,\ m\in\mathbb{R};\quad 2x_1=y_1^2-y_2^2,\ x_2=y_1y_2.$

2.74. Перетворити рівняння

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}=0,$$

поклавши $y_1 = x_1 + x_2,\ y_2 = x_1 - x_2$ новими незалежними змінними і $w = x_1x_2 - z$ новою функцією.

2.75. У рівнянні

$$z\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)^2=0$$

перейти до нової функції w, поклавши $w = z^2$.

2.76. Показати, що *оператор Лапласа*

$$\Delta z=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2}$$

у сферичних координатах $r,\ \varphi,\ \theta$ замість $x_1,\ x_2,\ x_3$ має вигляд

$$\Delta z=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\cdot\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\right).$$

Вказівка. Заміну змінних

$$x_1=r\sin\theta\cos\varphi,\quad x_2=r\sin\theta\sin\varphi,\quad x_3=r\cos\theta$$

подати у вигляді двох послідовних замін:

$$x_1=R\cos\psi,\quad x_2=R\sin\psi,\quad x_3=h;$$
$$R=r\sin\theta,\quad h=r\cos\theta,\quad \psi=\varphi.$$

2.77. Розглянувши y_1 і y_2 як нові незалежні змінні і $w = w(y_1, y_2)$ як нову функцію, перетворити рівняння:

1) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}-2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}=0;\quad y_1=x_1+x_2,\ y_2=\dfrac{x_2}{x_1},\ w=\dfrac{z}{x_1};$

2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}=0;\quad y_1=x_1+x_2,\ y_2=x_2-x_1,\ w=x_1x_2+z;$

3) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_2}+\dfrac{\partial z}{\partial x_1}=z;\quad y_1=\dfrac{x_1+x_2}{2},\ y_2=\dfrac{x_1-x_2}{2},\ w=ze^{x_2};$

4) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}-2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_2}+\left(1+\dfrac{x_2}{x_1}\right)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}=0;$
$y_1=x_1,\ \ y_2=x_1+x_2,\ \ w=x_1+x_2+z;$

5) $(1-x_1^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}+(1-x_2^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}=x_1\dfrac{\partial z}{\partial x_1}+x_2\dfrac{\partial z}{\partial x_2};$
$x_1=\sin y_1,\ \ x_2=\sin y_2,\ \ z=e^w;$

6) $(1-x_1^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}-2x_1\dfrac{\partial z}{\partial x_1}-\dfrac{z(2-x_1^2)}{4(1-x_1^2)}=0,\ |x_1|<1;$
$y_1=\frac{1}{2}(x_2+\arccos x_1),\ \ y_2=\frac{1}{2}(x_2-\arccos x_1),\ \ w=z\sqrt[4]{1-x_1^2};$

7) $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x_2}\right)^2\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}-2\dfrac{\partial z}{\partial x_1}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x_2}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_2}+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x_1}\right)^2\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}=0;$
$y_1=x_2,\ \ y_2=z,\ \ w=x_1.$

2.78. Довести, що рівняння
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_2}+a\frac{\partial z}{\partial x_1}+b\frac{\partial z}{\partial x_2}+cz=0$$
з довільними дійсними коефіцієнтами a,b,c шляхом заміни $z=we^{\alpha x_1+\beta x_2}$, $\{\alpha,\beta\}\subset\mathbb{R}$, де $w=w(x_1,x_2)$ – нова функція, можна звести до вигляду
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}+c_1w=0,\ c_1\in\mathbb{R}.$$

2.79. Довести, що рівняння не змінюють свого вигляду при переході до нових незалежних змінних $y_1,\ y_2$ і нової функції $w=w(y_1,y_2)$:

1) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}=\dfrac{\partial z}{\partial x_1},\ x_2>0;\quad y_1=\dfrac{x_1}{x_2},\ y_2=-\dfrac{1}{x_2},\ z=\dfrac{w}{\sqrt{x_2}}\exp\left(-\dfrac{x_1^2}{4x_2}\right);$

2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}-\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_2}\right)^2=0;\quad y_1=x_1,\ y_2=z,\ w=x_2.$

2.6 Формула Тейлора. Ряд Тейлора

Нехай A – відкрита множина в $\mathbb{R}^m$, $f\in C^{(n)}(A)$, точка $\vec{x}$ і напрямок $\vec{a}\in\mathbb{R}^m$ такі, що $\vec{x}+t\vec{a}\in A$, $t\in[0;1]$. Тоді існує число $\theta\in(0;1)$ таке, що справедлива *формула Тейлора* із залишковим членом у *формі Лагранжа*
$$f(\vec{x}+\vec{a})=f(\vec{x})+f'(\vec{x})\vec{a}+\frac{1}{2}f''(\vec{x})\vec{a}^2+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(\vec{x})\vec{a}^{n-1}+\frac{1}{n!}f^{(n)}(\vec{x}+\theta\vec{a})\vec{a}^n, \tag{2.1}$$
де $f^{(k)}(\vec{x})\vec{a}^k := \sum\limits_{i_1,\ldots,i_k=1}^{m}\dfrac{\partial^k f(\vec{x})}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}}a_{i_1}\ldots a_{i_k}$. Залишковий член у формулі (2.1) можна також записати у *формі Пеано*
$$f(\vec{x}+\vec{a})=f(\vec{x})+f'(\vec{x})\vec{a}+\frac{1}{2}f''(\vec{x})\vec{a}^2+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(\vec{x})\vec{a}^n+o(\|a\|^n),\ \vec{a}\to\vec{0}. \tag{2.2}$$
Якщо для функції $f\in C^{(\infty)}(A)$ знайдеться таке число $C\in\mathbb{R}$, що
$$\forall\,\vec{x}\in A\ \forall\,k\geq 1\ \forall\,1\leq i_1\leq\ldots\leq i_k\leq m:\quad\left|\frac{\partial^k f(\vec{x})}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}}\right|\leq C^k,$$
то має місце розклад функції у ряд Тейлора
$$f(\vec{x}+\vec{a})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(\vec{x})\,\vec{a}^n. \tag{2.3}$$

При $\vec{x} = \vec{0}$ рівності (2.1) – (2.3) називаються також *розкладами Маклорена*.

Приклад 1. Записати розклад функції $f(x_1, x_2) = \ln(1+x_1^2+x_2^2)$ в околі точки $(0,0)$ з членами до четвертого порядку включно.

⌈ Скористаємося формулою Тейлора – Маклорена для функції однієї змінної

$$\varphi(t) = \ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2), \ t \to 0.$$

Ураховуючи, що $\vec{x} = (x_1, x_2) \to (0,0) \iff \|\vec{x}\|^2 = (x_1^2+x_2^2) \to 0$, маємо асимптотичний розклад

$$\ln(1+x_1^2+x_2^2) = x_1^2+x_2^2-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)^2+o(\|\vec{x}\|^4) = x_1^2+x_2^2-\frac{x_1^4}{2}-x_1^2x_2^2-\frac{x_2^4}{2}+o(\|\vec{x}\|^4) \to 0.$$

Внаслідок єдиності асимптотичного розкладу це і є формула Тейлора – Маклорена для функції f. ⌋

Приклад 2. Розкласти функцію $f(x_1, x_2) = e^{x_1} \operatorname{sh} x_2$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, в ряд Тейлора – Маклорена.

⌈ Ряди Тейлора – Маклорена

$$e^{x_1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_1^n}{n!}, \ x_1 \in \mathbb{R}, \qquad \operatorname{sh} x_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_2^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ x_2 \in \mathbb{R},$$

збігаються абсолютно. Тому їх можна перемножити за Коші

$$f(x_1, x_2) = e^{x_1} \operatorname{sh} x_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_1^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_2^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x_1^k x_2^{2(n-k)+1}}{k!\,(2(n-k)+1)!}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Почленне диференціювання одержаного степеневого ряду за кожною змінною відповідну кількість разів показує, що

$$\frac{\partial^{2n-k+1} f(0,0)}{\partial x_1^k \partial x_2^{2(n-k)+1}} = 1, \quad n \geq 0, \ 0 \leq k \leq n,$$

тобто цей ряд є рядом Тейлора – Маклорена для f. ⌋

2.80. Розкласти функцію

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3, \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,$$

за формулою Тейлора в околі точки $\vec{x}^{\,0} = (1,1,1)$.

2.81. У розкладі функції

$$f(x_1, x_2) = x_1^{x_2}, \ x_1 > 0,$$

в околі точки $\vec{x}^{\,0} = (1,1)$ виписати члени до другого порядку включно і записати наближену формулу для значення $x_1^{x_2}$ при x_1, x_2, близьких до 1.

2.82. Записати розклад функцій за формулою Тейлора в околі точки $\vec{x}^{\,0} = (x_1^0, x_2^0)$ з членами до другого порядку включно:

1) $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1}{1 + x_2^2}$; $x_1^0 = x_2^0 = 0$;
2) $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1}{x_2}$, $x_2 \neq 0$; $x_1^0 = x_2^0 = 1$;
3) $f(x_1, x_2) = \sin x_1 \cdot \sin x_2$; $(x_1^0, x_2^0) = \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{3}\right)$;
4) $f(x_1, x_2) = \dfrac{1}{x_1 - x_2}$, $x_1 \neq x_2$; $(x_1^0, x_2^0) = (1, 2)$;
5) $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 + x_2}$, $x_1 > -x_2$; $(x_1^0, x_2^0) = (2, -1)$;
6) $f(x_1, x_2) = \ln(x_1 - 2x_2)$, $x_1 > 2x_2$; $(x_1^0, x_2^0) = (3e, e)$;
7) $f(x_1, x_2) = \arccos\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)$, $x_2 \neq 0$, $|x_1| < |x_2|$; $(x_1^0, x_2^0) = (1, 2)$;
8) $f(x_1, x_2) = \mathrm{tg}(x_1 + x_2^2)$, $|x_1 + x_2^2| < \dfrac{\pi}{2}$; $(x_1^0, x_2^0) = \left(\dfrac{\pi}{4}, 0\right)$;
9) $f(x_1, x_2) = x_1 \cos(x_1 - x_2)$; $(x_1^0, x_2^0) = (\pi, 2\pi)$;
10) $f(x_1, x_2) = \dfrac{1}{1 + x_1^2 - x_2}$, $x_1^2 \neq x_2 - 1$; $(x_1^0, x_2^0) = (1, 1)$.

2.83. Вивести наближені формули для функцій з точністю до членів другого порядку для значень (x_1, x_2) з малого околу точки $(0, 0)$:

1) $\dfrac{\cos x_1}{\cos x_2}$;
2) $e^{x_1} \ln(1 + x_2)$;
3) $\mathrm{arctg}\,\dfrac{x_1 - x_2}{1 + x_1 x_2}$;
4) $(1 + x_1)^{x_2}$;
5) $\dfrac{1 + \mathrm{tg}\, x_1}{1 + \mathrm{tg}\, x_2}$;
6) $\sin(\pi \cdot \cos x_1 + x_2)$;
7) $\mathrm{arctg}\,\dfrac{1 + x_1 + x_2}{1 - x_1 + x_2}$;
8) $\arcsin\left(\dfrac{1 - x_1 + x_2}{2 + x_2}\right)$;
9) $\ln\dfrac{1 - x_1 - x_2 + x_1 x_2}{1 - x_1 - x_2}$;
10) $\ln(1 - x_1) \cdot \ln(1 + 2x_2)$.

2.84. Розкласти за формулою Тейлора – Маклорена із залишковим членом у формі Лагранжа функцію

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = e^{x_1 + x_2 + \ldots + x_m}, \quad (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m.$$

2.85. Нехай функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ чотири рази диференційовна на $\mathbb{R}^2$; точка $(x_1^0, x_2^0) \in \mathbb{R}^2$ фіксована. Розкласти за степенями h з точністю до h^4 включно функцію

$$g(h) = f(x_1^0 + h, x_2^0 + 2h) - f(x_1^0 - h, x_2^0 + 2h) - f(x_1^0 + h, x_2^0 - 2h) + \\ + f(x_1^0 - h, x_2^0 - 2h), \quad h \in \mathbb{R}.$$

2.86. Розкласти в ряд Тейлора – Маклорена функції:

1) $f(x_1, x_2) = e^{x_1} \sin x_2$;
2) $f(x_1, x_2) = e^{x_1} \cos x_2$;

3) $f(x_1,x_2)=\cos x_1\cdot\operatorname{ch}x_2$;
4) $f(x_1,x_2)=\sin x_1\cdot\operatorname{ch}x_2$;
5) $f(x_1,x_2)=\cos x_1\cdot\operatorname{sh}x_2$;
6) $f(x_1,x_2)=\sin x_1\cdot\operatorname{sh}x_2$;
7) $f(x_1,x_2)=\sin(x_1^2+x_2^2)$;
8) $f(x_1,x_2)=\cos(x_1^2-x_2^2)$;
9) $f(x_1,x_2)=\ln(1+x_1+x_2),\ x_1+x_2>-1$;
10) $f(x_1,x_2)=\ln(1+x_1)\cdot\ln(1+x_2),\ x_i>-1,\ i=1,2$;
11) $f(x_1,x_2)=(1-x_1-x_2+x_1x_2)^{-1},\ |x_i|<\dfrac{1}{3},\ i=1,2$;

у пунктах 1) – 8) функції визначені на $\mathbb{R}^2$.
Вказівка. Скористатися розкладами Тейлора для функцій однієї змінної.

2.87. Розкласти функцію
$$f(x_1,x_2)=e^{x_1+x_2},\quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,$$
у степеневий ряд за цілими невід'ємними степенями біномів (x_1-1) та (x_2+1).

2.88. Нехай функція $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ нескінченно диференційовна на $\mathbb{R}^2$, точка (x_1,x_2) фіксована. Записати ряд Маклорена для функції
$$g(r)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x_1+r\cos\varphi,\ x_2+r\sin\varphi)\,d\varphi,\quad r\in\mathbb{R}.$$
За яких додаткових обмежень на функцію f цей ряд збігається до g на деякому інтервалі $(-r_0;r_0),\ r_0>0$?

2.89. Написати три члени розкладу в ряд Маклорена функції
$$f(x_1,x_2)=\int\limits_0^1 (1+x_1)^{t^2x_2}\,dt,\quad x_1>-1.$$

2.90. Нехай функція $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ є парною за кожною зі змінних x_i, $i=1,\dots,m$, при фіксованих значеннях решти. Яку особливість мають члени її ряду Маклорена?

2.91. Нехай функція $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ розкладається в ряд Маклорена у деякому околі U точки $(0,0)$, причому
$$\forall\,(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\ :\ f\left(\frac{x_1}{2},2x_2\right)=f(x_1,x_2).$$
Довести, що ряд Маклорена цієї функції має вигляд
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x_1x_2)^k,\ (x_1,x_2)\in U,\quad \{a_k\mid k\ge 0\}\subset\mathbb{R}.$$

2.92. Довести, що ряд Маклорена функції
$$f(x_1,x_2)=\begin{cases}\exp\left(-\dfrac{1}{x_1^2}-\dfrac{1}{x_2^2}\right), & x_1x_2\ne 0,\\[2mm] 0, & x_1x_2=0,\end{cases}$$

збігається на $\mathbb{R}^2$, але не до функції f.

2.93. Нехай $z = z(x_1, x_2)$ – неявна функція, що задається вказаними рівняннями, $z(1,1) = z_0$. Записати розклад функції z за степенями біномів (x_1-1) та (x_2-1) з членами до другого порядку включно:

1) $z^3 + x_2 z - x_1 x_2^2 - x_1^3 = 0, \quad z_0 = 1;$
2) $z^3 - 2x_1 z + x_2 = 0, \quad z_0 = 1;$
3) $z^3 - x_1 z + x_1 - x_2 = 0, \quad z_0 = -1;$
4) $z^3 + x_1 z - 2x_2 = 0, \quad z_0 = 1;$
5) $z^3 + 2x_2 z - 4x_1^2 + x_2 = 0, \quad z_0 = 1;$
6) $z^3 + x_1 z + x_1 + x_2 = 0, \quad z_0 = -1;$
7) $z^3 + z - x_1^2 x_2 - x_1 x_2^2 = 0, \quad z_0 = 1;$
8) $z^3 - z - \cos\dfrac{\pi x_1 x_2}{2} = 0, \quad z_0 = -1;$
9) $z^3 + x_2 z - x_1 x_2 - x_1^2 = 0, \quad z_0 = 1;$
10) $z^3 + x_1 z - 2x_1 x_2^2 = 0, \quad z_0 = 1.$

2.7 Локальні екстремуми

Нехай $A \subset \mathbb{R}^m$, $\vec{x}^{\,0}$ – внутрішня точка множини A, функція $f : A \to \mathbb{R}$.

Точка $\vec{x}^{\,0}$ називається точкою *локального мінімуму* функції f, якщо

$$\exists\, r > 0 \quad \forall\, \vec{x} \in B(\vec{x}^{\,0}; r) \ : \quad f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}^{\,0}).$$

Точка $\vec{x}^{\,0}$ називається точкою *строгого локального мінімуму* функції f, якщо

$$\exists\, r > 0 \quad \forall\, \vec{x} \in B(\vec{x}^{\,0}; r) \setminus \{\vec{x}^{\,0}\} \ : \quad f(\vec{x}) > f(\vec{x}^{\,0}).$$

Точка $\vec{x}^{\,0}$ називається точкою *(строгого) локального максимуму* функції f, якщо вона є точкою (строгого) локального мінімуму функції $(-f)$. Відповідно значення $f(\vec{x}^{\,0})$ називаються (*строгими) локальними мінімумом* чи *максимумом* і позначаються $\operatorname{loc\,min} f$, $\operatorname{loc\,max} f$. Локальні мінімум та максимум називаються *локальними екстремумами*.

Теорема (необхідні умови локального екстремуму). Нехай точка $\vec{x}^{\,0} \in A$ є точкою локального екстремуму. Якщо у точці $\vec{x}^{\,0}$ функція f має похідну за напрямком $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$, то $f'_{\vec{a}}(\vec{x}^{\,0}) = 0$.

Теорема (достатні умови локального екстремуму). Нехай $f \in C^{(2)}(A)$, x_0 – внутрішня точка множини A,

$$\forall\, k = 1, 2, \ldots, m : \ f'_k(\vec{x}^{\,0}) = 0.$$

Якщо матриця $f''(\vec{x}^{\,0})$ додатно визначена, то точка $\vec{x}^{\,0}$ є точкою строгого локального мінімуму. Якщо матриця $f''(\vec{x}^{\,0})$ від'ємно визначена, то точка $\vec{x}^{\,0}$ є точкою строгого локального максимуму. Якщо для деяких векторів $\{\vec{a}, \vec{b}\} \subset \mathbb{R}^m$

$$f''(\vec{x}^{\,0})\vec{a}^{\,2} > 0, \qquad f''(\vec{x}^{\,0})\vec{b}^{\,2} < 0,$$

то точка $\vec{x}^{\,0}$ не є точкою локального екстремуму.

Знаковизначеність матриці f'' можна встановити за **критерієм Сильвестра**: квадратна матриця додатно визначена тоді й лише тоді, коли всі її головні мінори додатні. Оскільки матриця M від'ємно визначена тоді й лише тоді, коли матриця $(-M)$ додатно визначена, критерій від'ємної визначеності полягає у тому, що знаки головних мінорів повинні чергуватися, починаючи зі знака "$-$".

Приклад. Знайти локальні екстремуми функції $f(x_1, x_2) = x_1 x_2 e^{-x_1^2 - x_2^2}$.

$\lceil$ Згідно з необхідною умовою точки локального екстремуму слід шукати серед *критичних точок* функції, в яких усі частинні похідні першого порядку дорівнюють 0. Для цього розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} f_1' &= x_2(1 - 2x_1^2)e^{-x_1^2 - x_2^2} &= 0 \\ f_2' &= x_1(1 - 2x_2^2)e^{-x_1^2 - x_2^2} &= 0. \end{cases}$$

Ця система має п'ять розв'язків:

$$\vec{x}(1) = (0, 0), \quad \vec{x}(2) = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big), \quad \vec{x}(3) = \Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\Big),$$

$$\vec{x}(4) = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\Big), \quad \vec{x}(5) = \Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big).$$

У будь-якому околі точки $\vec{x}(1)$ функція f набуває значення різних знаків. Тому ця точка не є точкою локального екстремуму. Наявність локальних екстремумів у решті критичних точок встановимо за теоремою про достатні умови. Знайдемо матрицю

$$f'' = e^{-x_1^2 - x_2^2} \begin{pmatrix} -2x_1x_2(3 - 2x_1^2) & (1 - 2x_1^2)(1 - 2x_2^2) \\ (1 - 2x_1^2)(1 - 2x_2^2) & -2x_1x_2(3 - 2x_2^2) \end{pmatrix}$$

і дослідимо її знаковизначеність у кожній з критичних точок $\vec{x}(2), \ldots, \vec{x}(5)$ за критерієм Сильвестра.

$$f''(\vec{x}(2)) = f''(\vec{x}(3)) = e^{-1} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$f''(\vec{x}(4)) = f''(\vec{x}(5)) = e^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо головні мінори матриці $f''(\vec{x}(2)) = f''(\vec{x}(3)) : d_1 = -2e^{-1} < 0,\ d_2 = \det f'' = 4e^{-2} > 0$. Матриця f'' у цих точках від'ємно визначена. Тому в точках $\vec{x}(2)$, $\vec{x}(3)$ фуннкція f має строгий локальний максимум $\operatorname{loc\,max} f = \frac{1}{2e}$. Знайдемо головні мінори матриці $f''(\vec{x}(4)) = f''(\vec{x}(5)) : d_1 = 2e^{-1} > 0,\ d_2 = \det f'' = 4e^{-2} > 0$. Матриця f'' у цих точках додатно визначена. Тому в точках $\vec{x}(2)$, $\vec{x}(3)$ фуннкція f має строгий локальний мінімум $\operatorname{loc\,min} f = -\frac{1}{2e}$. $\rfloor$

2.94. Знайти локальні екстремуми функцій:

1) $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 + x_2, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;$

2) $f(x_1, x_2) = e^{2x_1 + 3x_2}(8x_1^2 - 6x_1x_2 + 3x_2^2), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;$

3) $f(x_1, x_2) = (5x_1 + 7x_2 - 25)e^{-(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;$

4) $f(x_1,x_2)=x_1^2+(x_2-1)^2, \quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2;$

5) $f(x_1,x_2)=(x_1-x_2+1)^2, \quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2;$

6) $f(x_1,x_2)=x_1^3+x_2^3-3x_1x_2, \quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2;$

7) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1+\dfrac{x_2^2}{4x_1}+\dfrac{x_3^2}{x_2}+\dfrac{2}{x_3}, \quad x_i>0,\ i=1,2,3;$

8) $f(x_1,x_2)=x_1x_2\ln(x_1^2+x_2^2), \quad (x_1,x_2)\neq(0,0).$

2.95. Довести, що функція

$$f(x_1,x_2)=(x_2-x_1^2)(x_2-2x_1^2), \quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,$$

не має локального мінімуму в точці $(0,0)$, хоча при довільних дійсних a і b, $(a,b)\neq(0,0)$, функція

$$g(x)=f(ax,bx), \quad x\in\mathbb{R},$$

має строгий локальний мінімум у точці $x=0$. Дати геометричне тлумачення.

2.96. Довести, що функція

$$f(x_1,x_2)=x_2^5-(x_1-x_2)^2, \quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,$$

не має локального максимуму в точці $(0,0)$, хоча при довільних дійсних $a\neq b$ функція

$$g(x)=f(ax,bx), \quad x\in\mathbb{R},$$

має строгий локальний максимум у точці $x=0$.

2.97. Довести, що функція

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases}\left(x_2-e^{-\frac{1}{x_1^2}}\right)\left(x_2-3e^{-\frac{1}{x_1^2}}\right), & x_1\neq 0,\\ x_2^2, & x_1=0,\end{cases}$$

не має локального мінімуму в точці $(0,0)$, хоча при довільних $c\neq 0$, $\alpha>0$ функція

$$g(x)=f(x,cx^\alpha), \quad x\geq 0,$$

має строгий локальний мінімум у точці $x=0$.

2.98. Знайти локальні екстремуми функції

$$f(x_1,x_2)=x_1+x_2+4\sin x_1\,\sin x_2, \quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2.$$

2.99. Довести, що функція

$$f(x_1,x_2)=(x_1-x_2)^2+x_1^4+x_2^4, \quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,$$

має строгий локальний мінімум у точці $(0,0)$, хоча $d^2f(0,0)$ є виродженою квадратичною формою. Чи має екстремум у цій точці функція

$$g(x_1,x_2)=f(x_1,x_2)+\frac{x_1x_2^2}{10^7}, \quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2?$$

2.100. Довести, що функція
$$f(x_1,x_2)=\begin{cases}\exp\Bigl(-\dfrac{1}{x_1^2+x_2^2}\Bigr), & (x_1,x_2)\neq(0,0),\\ 0, & (x_1,x_2)=(0,0),\end{cases}$$
має строгий локальний мінімум у точці $(0,0)$, незважаючи на те, що
$$\forall\, n\in\mathbb{N}\ :\ d^n f(0,0)=0.$$

2.101. Довести, що функція
$$f(x_1,x_2)=\begin{cases}x_1^3\sin x_1^{-1}+x_2^2, & x_1\neq 0,\\ x_2^2, & x_1=0,\end{cases}$$
має строгий локальний мінімум у точці $(0,0)$, хоча похідна $f''_{11}(0,0)$ не існує.

2.102. Знайти локальні екстремуми функцій, визначених на $\mathbb{R}^2$:

1) $f(x_1,x_2)=x_1^4+x_2^4-x_1^2-2x_1x_2-x_2^2;$
2) $f(x_1,x_2)=x_1^2x_2^3(6-x_1-x_2);$
3) $f(x_1,x_2)=2x_1^4+x_2^4-x_1^2-2x_2^2;$
4) $f(x_1,x_2)=x_1x_2(1-x_1-x_2);$
5) $f(x_1,x_2)=x_1^3+x_2^3-9x_1x_2+27;$
6) $f(x_1,x_2)=x_1^3+x_1x_2^2+3ax_1x_2,\quad a\in\mathbb{R};$
7) $f(x_1,x_2)=x_1^4+x_2^4+2x_1^2x_2^2-8x_1+8x_2;$
8) $f(x_1,x_2)=2x_1^2+6x_1x_2+5x_2^2-x_1+4x_2-5;$
9) $f(x_1,x_2)=x_1^4+x_2^4-2x_1^2+4x_1x_2-2x_2^2;$
10) $f(x_1,x_2)=x_1^2-2x_1x_2+x_2^4.$

2.103. Знайти локальні екстремуми функцій:

1) $f(x_1,x_2)=x_1x_2+\dfrac{50}{x_1}+\dfrac{20}{x_2},\quad x_i>0,\ i=1,2;$
2) $f(x_1,x_2)=x_1x_2\sqrt{1-\dfrac{x_1^2}{4}-\dfrac{x_2^2}{9}},\quad \dfrac{x_1^2}{4}+\dfrac{x_2^2}{9}<1;$
3) $f(x_1,x_2)=1-\sqrt{x_1^2+x_2^2},\quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2;$
4) $f(x_1,x_2)=(x_1^2+x_2^2)e^{-(x_1^2+x_2^2)},\quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2;$
5) $f(x_1,x_2)=\sin x_1+\cos x_2+\cos(x_1-x_2),\quad 0\le x_i\le\dfrac{\pi}{2},\ i=1,2;$
6) $f(x_1,x_2)=\sin x_1\cdot\sin x_2\cdot\sin(x_1+x_2),\quad 0\le x_i\le\pi,\ i=1,2;$
7) $f(x_1,x_2)=x_1^2+x_1x_2+x_2^2-4\ln x_1-10\ln x_2,\quad x_i>0,\ i=1,2;$
8) $f(x_1,x_2)=e^{-2x_1+3x_2}(8x_1^2+6x_1x_2+3x_2^2),\quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2;$
9) $f(x_1,x_2)=x_2\sqrt{1+x_1}+x_1\sqrt{1+x_2},\quad x_i\ge -1,\ i=1,2;$

10) $f(x_1,x_2)=e^{2x_1}(x_1+x_2^2+2x_2), \quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2.$

2.104. Знайти локальні екстремуми функцій:

1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1+4x_2-6x_3, \quad (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3;$
2) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^3+x_2^2+x_3^2+12x_1x_2+2x_3, \quad (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3;$
3) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2^2x_3^3(a-x_1-2x_2-3x_3),\ a>0,\ x_i>0,\ 1\le i\le 3;$
4) $f(x_1,x_2,x_3)=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{x_1^2}{x_2}+\dfrac{x_2^2}{x_3}+x_3^2, \quad x_i\neq 0,\ 1\le i\le 3;$
5) $f(x_1,x_2,x_3)=\sin x_1+\sin x_2+\sin x_3-\sin(x_1+x_2+x_3), \quad 0<x_i<\pi,$ $1\le i\le 3;$
6) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2x_3(4a-x_1-x_2-x_3),\ a>0,\ (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3;$
7) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2+x_1+2x_3, \quad (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3;$
8) $f(x_1,x_2,x_3)=\dfrac{x_1^3+x_2^3+x_3^3}{x_1x_2x_3}, \quad x_i>0,\ 1\le i\le 3;$
9)* $f(x_1,x_2,x_3)=\dfrac{x_1}{x_2+x_3}+\dfrac{x_2}{x_1+x_3}+\dfrac{x_3}{x_1+x_2}, \quad x_i>0,\ 1\le i\le 3;$
10) $f(x_1,x_2,x_3)=(ax_1+bx_2+cx_3)e^{1-x_1^2-x_2^2-x_3^2},\ x_i>0,\ 1\le i\le 3,$ де $a>0$, $b>0$, $c>0$.

2.105. Нехай $x_i\ge 0,\ 1\le i\le 3$. Довести, що добуток $x_1x_2x_3$ за умови $x_1+x_2+x_3=a,\ a>0$, буде найбільшим тоді й лише тоді, коли $x_1=x_2=x_3$.

2.106. Нехай $x_i>0,\ 1\le i\le 3$. Довести, що сума $x_1+x_2+x_3$ за умови $x_1x_2x_3=a,\ a>0$, буде найменшою тоді й лише тоді, коли $x_1=x_2=x_3$.

2.107.

1) У заданий прямий круговий конус вписати прямокутний паралелепіпед найбільшого об'єму.
2) Число $a>0$ подати як суму трьох доданків $x_i>0,\ 1\le i\le 3$ так, щоб для фіксованих $\{m,n,p\}\subset\mathbb{N}$ добуток $x_1^mx_2^nx_3^p$ мав найбільше значення.
3) При яких розмірах прямокутної відкритої скрині заданого об'єму $V=32\,\text{м}^3$ її поверхня буде найменшою?
4) У кулю радіусом $r>0$ вписати прямокутний паралелепіпед найбільшого об'єму.
5) Визначити зовнішні радіус (R) та висоту (H) казана циліндричної форми із заданою товщиною стінок $d>0$ і місткістю $V>0$ так, щоб на його виготовлення пішло якнайменше матеріалу.
6) На площині з рівнянням $3x_1-2x_3=0$ знайти точку, сума квадратів відстаней до якої від точок $A(1,1,1)$ і $B(2,3,4)$ найменша.

7) Знайти найбільший об‘єм паралелепіпеда при заданій сумі довжин його ребер $12a,\ a>0$.

8) Записати рівняння площини, що проходить через точку $A(1,2,3)$ і утворює з координатними площинами тетраедр найменшого об'єму.

2.108. Знайти локальні екстремуми функцій на множині $\{(x_1,x_2,x_3,x_4)|\, x_i>0,\ 1\le i\le 4\}$:

1) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\prod\limits_{i=1}^{4} x_i^i\cdot\Big(1-\sum\limits_{i=1}^{4} ix_i\Big);$

2) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1+\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{x_3}{x_2}+\dfrac{x_4}{x_3}+\dfrac{2}{x_4};$

3) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\exp(-x_1x_2x_3x_4)\cdot(x_1+x_2+x_3+x_4);$

4) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^4x_2^3x_3^2x_4(1-x_1-2x_2-3x_3-4x_4);$

5) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_2^2x_3^3x_4^4(1-x_1-2x_2-3x_3-4x_4);$

6) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\prod\limits_{i=1}^{4} x_i^i\cdot\Big(1-\sum\limits_{i=1}^{4} i^2x_i\Big);$

7) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\exp\Big(-\sum\limits_{i=1}^{4} x_i\Big)\cdot\sum\limits_{i=1}^{4} ix_i;$

8) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\exp\Big(-\sum\limits_{i=1}^{4} x_i^2\Big)\cdot\sum\limits_{i=1}^{4} x_i;$

9) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_4+\dfrac{x_3}{x_4}+\dfrac{x_2}{x_3}+\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{3}{x_1};$

10) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\exp\Big(-\sum\limits_{i=1}^{4} x_i\Big)\cdot\sum\limits_{i=1}^{4}\sqrt{x_i}.$

2.109. Знайти локальні екстремуми функції

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_m)=a+\sum_{i=1}^{m} b_ix_i+\sum_{i,j=1}^{m} c_{ij}x_ix_j,\ (x_1,x_2,\ldots,x_m)\in\mathbb{R}^m,$$
$$a\in\mathbb{R},\ \{b_i\mid 1\le i\le m\}\subset\mathbb{R},\ \{c_{ij}\mid 1\le i,j\le m\}\subset\mathbb{R},$$

у таких випадках:

1) $|c_{ii}|=1,\ 1\le i\le m;\quad c_{ij}=0,\ i\ne j;$

2) $c_{ij}=\alpha^{ij},\alpha>1,\ 1\le i,j\le m;$

3) $c_{ij}=\alpha^{ij},\ \alpha<-1,\ 1\le i,j\le m.$

2.110. Знайти локальні екстремуми функції

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_m)=\exp\Big(-\sum_{i=1}^{m} x_i\Big)\cdot\prod_{i=1}^{m} x_i,\quad x_i>0,\ 1\le i\le m.$$

2.111. Знайти локальні екстремуми функції

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \exp\Big(-\sum_{i=1}^{m} x_i^2\Big) \cdot \sum_{i=1}^{m} x_i, \quad x_i > 0,\ 1 \le i \le m.$$

2.112. Нехай функція $z = z(x_1, x_2)$ задана рівнянням

$$(x_1^2 + x_2^2 + z^2)^2 = a^2(x_1^2 + x_2^2 - z^2), \quad a > 0.$$

Знайти її локальні екстремуми і дати геометричну інтерпретацію.

2.113. Нехай функція $z = z(x_1, x_2)$ задана рівнянням

$$\frac{1}{3}x_1^3 + 2x_2^2 - z^2 x_1 + z = 0.$$

Знайти її локальні екстремуми.

2.114. Знайти локальні екстремуми функції $z = z(x_1, x_2)$, заданої неявно рівнянням:

1) $x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 + z^2 + 2z - 1 = 0;$
2) $x_1^2 + x_2^2 + z^2 - 2x_1 + 2x_2 - 4z - 10 = 0;$
3) $x_1^2 + x_2^2 + z^2 - x_1 z - x_2 z + 2x_1 + 2x_2 + 2z - 2 = 0;$
4) $2x_1^2 + 2x_2^2 + z^2 + 8x_1 z - z + 8 = 0;$
5) $5x_1^2 + 5x_2^2 + 5z^2 - 2x_1 x_2 - 2x_1 z - 2x_2 z - 72 = 0;$
6) $x_1^2 + x_2^2 + 4x_1 z + 4 + \frac{1}{2}(z^2 + z) = 0;$
7) $z^2 + x_1 x_2 z - x_1 x_2^2 - x_1^3 = 0;$
8) $2x_1^2 + 6x_2^2 + 2z^2 + 8x_1 z - 4x_1 - 8x_2 + 3 = 0;$
9) $6x_1^2 + 6x_2^2 + 6z^2 + 4x_1 - 8x_2 - 8z - \frac{32}{3} = 0;$
10) $x_1^4 + x_2^4 + z^4 = 2a^2(x_1^2 + x_2^2 + z^2), \quad a > 0.$

2.115. Змінні величини x і y при фіксованих, але невідомих, $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, задовольняють лінійне рівняння

$$y(x) = ax + b,\ x \in \mathbb{R}.$$

У результаті ряду вимірювань для величин x та y отримані значення $y_i(x_i)$, $1 \le i \le n$, що містять похибки. Користуючись методом найменших квадратів, оцінити значення a і b.

Вказівка. Метод найменших квадратів полягає в тому, що найкращими вважають ті значення параметрів a і b, при яких є мінімальною сума

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2.$$

2.116. На площині дано n точок $\{M_i(x_1(i), x_2(i)) \mid 1 \le i \le n\}$. При якому положенні прямої $x_1 \cos\alpha + x_2 \sin\alpha - p = 0$, $\alpha \in [0; 2\pi)$, $p \in \mathbb{R}$, сума квадратів відхилень даних точок від неї буде найменшою?

2.117. Для функції $f(x) = x^2$, $x \in [1; 3]$, підібрати лінійну функцію $g(x) = ax + b$, $x \in [1; 3]$, з коефіцієнтами $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ так, щоб абсолютне відхилення

$$\Delta = \max_{x\in[1;3]} |x^2 - (ax+b)|$$

було мінімальним.

2.118. Між двома додатними числами a та b, $a < b$, вставити m чисел $x_1, x_2, \ldots, x_m$ так, щоб величина дробу

$$\frac{x_1 x_2 \ldots x_m}{(a+x_1)(x_1+x_2)(x_2+x_3)\ldots(x_m+b)}$$

була найбільшою.

2.119. На площині дано n матеріальних точок $\{M_i(x_1(i), x_2(i)) : 1 \le i \le n\}$ з масами відповідно рівними m_i, $1 \le i \le n$. При якому положенні точки $M(x_1, x_2)$ момент інерції системи відносно цієї точки

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i \rho^2(M_i, M)$$

буде найменшим? Тут ρ – евклідова відстань у $\mathbb{R}^2$.

2.120*. На площині дано n точок $\{M_i(x_1(i), x_2(i)) \mid 1 \le i \le n\}$ з попарно різними абсцисами і попарно різними ординатами. Нехай

$$d\Big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\Big) = |\, x_1 - y_1 \,| + |\, x_2 - y_2 \,|, \ \{(x_1, x_2), (y_1, y_2)\} \subset \mathbb{R}^2.$$

При якому положенні точки $M(x_1, x_2)$ сума відстаней

$$S = \sum_{i=1}^{n} d(M_i, M)$$

буде найменшою? Розглянути випадки парного і непарного n.

2.8 Відображення. Диференційовні відображення. Якобіани

Нехай A – відкрита непорожня множина в $\mathbb{R}^m$. Відображення $\vec{f} : A \to \mathbb{R}^n$ називається *неперервним у точці* $\vec{x}^{\,0} \in A$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall \vec{x} \in B(\vec{x}^{\,0}, \delta) : \quad \rho_n(\vec{f}(\vec{x}), \vec{f}(\vec{x}^{\,0})) < \varepsilon.$$

Відображення називається *неперервним на множині* A, якщо воно неперервне у кожній точці цієї множини. Відображення $\vec{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)^t = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ неперервне тоді й лише тоді, коли кожна числова функція f_k, $k = 1, \ldots, n$, неперервна. Відображеня $\vec{L} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ називається *лінійним*, якщо виконані умови:

1) $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^m \ \forall c \in \mathbb{R} : \quad \vec{L}(c\vec{x}) = c\vec{L}(\vec{x});$ 2) $\forall \{\vec{x}, \vec{y}\} \subset \mathbb{R}^m : \quad \vec{L}(\vec{x}+\vec{y}) = \vec{L}(\vec{x}) + \vec{L}(\vec{y}).$

Лінійне відображення $\vec{L} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ визначається матрицею $D = (d_{ij})_{i=1}^{n} {}_{j=1}^{m}$, стовпчики якої є образами базисних векторів. Таким чином, $\vec{L}(\vec{a}) = D\vec{a}$, де $d_{ij} = \vec{L}(\vec{e}_j)_i$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$.

Відображення $\vec{f} : A \to \mathbb{R}^n$ називається *диференційовним у точці* $\vec{x}^{\,0} \in A$, якщо для деякого лінійного відображення $\vec{L} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ виконується

$$\|\vec{f}(\vec{x}^{\,0} + \vec{a}) - \vec{f}(\vec{x}^{\,0}) - \vec{L}(\vec{a})\| = o(\|\vec{a}\|),\ \vec{a} \to \vec{0}.$$

Матриця такого лінійного відображення $\vec{L}$ називається *похідною* або *матрицею Якобі* і позначається $\vec{f}'(\vec{x}^{\,0})$. У випадку рівності розмірностей просторів $m = n$ визначник похідної називається *якобіаном* і позначається символом

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_m)}(\vec{x}^{\,0}) := \det \vec{f}'(\vec{x}^{\,0}).$$

Диференційовність відображення $\vec{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)^t$ еквівалентна диференційовності всіх його компонентів f_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. При цьому $\vec{f}'(\vec{x}) = \left(\frac{\partial f_i(\vec{x})}{\partial x_j}\right)_{i=1\ j=1}^{n\quad m}$.

Теорема (про диференційовність суперпозиції). Нехай множина A відкрита в $\mathbb{R}^m$, B – відкрита множина в $\mathbb{R}^n$, відображення $\vec{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)^t : A \to B$ диференційовне в точці $\vec{x}^{\,0} \in A$, відображення $\vec{g} = (g_1, g_2, \ldots, g_p)^t : B \to \mathbb{R}^p$ диференційовне в точці $\vec{y}^{\,0} = \vec{f}(\vec{x}^{\,0}) \in B$. Тоді суперпозиція $\vec{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_p)^t = \vec{g}(\vec{f})$ диференційовна в точці $\vec{x}^{\,0}$ і

$$\vec{h}'(\vec{x}^{\,0}) = \vec{g}'(\vec{f}(\vec{x}^{\,0}))\, \vec{f}'(\vec{x}^{\,0}).$$

При цьому за умови $m = n = p$ справедлива рівність

$$\frac{\partial(h_1, h_2, \ldots, h_m)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_m)} = \frac{\partial(g_1, g_2, \ldots, g_m)}{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_m)} \cdot \frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_m)}.$$

Приклад. Для відображення $\vec{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \sin^2 x_2 \\ x_1 \cos^2 x_2 \end{pmatrix}$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, знайти образи координатних ліній (прямих, що паралельні координатним осям) та образ множини $A = [0; 1] \times [0; \frac{\pi}{2}]$. Дослідити диференційовність цього відображення. Знайти його похідну і якобіан, головну лінійну частину приросту.

⌈ При відображенні $\vec{f}$: прямі, паралельні до осі Ox_2, переходять у прямі, паралельні до бісектриси другого–четвертого координатних кутів,

$$\vec{f}\{(c, x_2)|\ x_2 \in \mathbb{R}\} = \{(y_1, y_2)|\ y_1 + y_2 = c\}, \quad c \in \mathbb{R};$$

прямі, паралельні до осі Ox_1, переходять у прямі, що проходять через початок координат і лежать у першому і третьому квадрантах,

$$\vec{f}\{(x_1, c)|\ x_1 \in \mathbb{R}\} = \{(y_1, y_2)|\ y_1 \cos^2 c = y_2 \sin^2 c\}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Образ множини A є трикутником

$$\vec{f}(A) = \{(y_1, y_2)|\ y_1 + y_2 \le 1,\ y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0\}.$$

Кожна з функцій $f_1(x_1, x_2) = x_1 \sin^2 x_2$, $f_2(x_1, x_2) = x_1 \cos^2 x_2$ є диференційовною на $\mathbb{R}^2$. Тому й відображення $\vec{f}$ є диференційовним на $\mathbb{R}^2$. Обчислимо його похідну і якобіан

$$\vec{f}'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \sin^2 x_2 & x_1 \sin 2x_2 \\ \cos^2 x_2 & -x_1 \sin 2x_2 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_2)} = -x_1 \sin 2x_2, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Головна лінійна частина приросту

$$\vec{f}'(\vec{x})\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \sin^2 x_2 + a_2 x_1 \sin 2x_2 \\ a_1 \cos^2 x_2 - a_2 x_1 \sin 2x_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

⌋

2.121. Для наведених відображень $\vec{f}$ знайти і зобразити образ $\vec{f}(A)$ множини A. Які з цих відображень взаємно однозначні на A? Які з них неперервні на A?

1) $\vec{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2^2 \end{pmatrix}, \quad (x_1, x_2) \in A = [0;1] \times [-1;1];$

2) $\vec{f}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}, \quad (r, \varphi) \in A,$

а) $A = [1;2] \times \left[\dfrac{\pi}{2}; \pi\right],$ б) $A = [1;2] \times [0; 2\pi];$

3) $\vec{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}, \quad (x_1, x_2) \in A,\ A = [0;1] \times [0;1];$

4) $\vec{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}, \quad (x_1, x_2) \in A,\ A = [0;1] \times [0;1];$

5) $\vec{f}(x, \varphi) = \begin{pmatrix} e^x \cos\varphi \\ e^x \sin\varphi \end{pmatrix}, \quad (x, \varphi) \in A,$

а) $A = [0;1] \times [0;\pi],$ б) $A = [0;1] \times [0;2\pi].$

6) $\vec{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \dfrac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \\ \dfrac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \end{pmatrix}, \quad (x_1, x_2) \neq (0, 0);$

$A = \{(x_1, x_2) \,|\, 1 \le x_1 \le 4,\ x_2 = 0\};$

7) $\vec{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1^2 - x_2^2 \end{pmatrix}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; \quad A = \{(x, x^{-1}) \,|\, 1 \le x \le 2\};$

8) $\vec{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1^2 - x_2^2 \end{pmatrix}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; \quad A = \{(x, x^2) \,|\, 0 \le x \le 4\};$

9) $\vec{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \dfrac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2} \\ \dfrac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \end{pmatrix}, (x_1, x_2) \neq (0, 0); \quad A = [1;2] \times [0;2];$

10) $\vec{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 \\ 2x_1 x_2 \end{pmatrix}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ A = [0;1] \times [0;1];$

11) $\vec{f}(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}\operatorname{arctg}\dfrac{x_2}{x_1}\\ \ln(x_1^2+x_2^2)\end{pmatrix},\quad x_1\neq 0;$
$A=\{(x_1,x_2)\,|\,x_1>0,\ x_1^2+x_2^2<16\};$

12) $\vec{f}(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}x_1-x_2\\ x_1+x_2\end{pmatrix},\quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2;\quad A=[0;1]\times[0;2];$

13) $\vec{f}(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}x_1^2\\ \sqrt{x_2}\end{pmatrix},\quad x_2\geq 0;\quad A=[-1;1]\times[4;9];$

14) $\vec{f}(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}x_1+2x_2\\ -x_1+2x_2\end{pmatrix},\ (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2;\ A=[0;1]\times[0;1];$

15) $\vec{f}(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}\operatorname{tg}x_1\\ \cos x_2\end{pmatrix},\ |x_1|<\dfrac{\pi}{2};\quad A=\left[-\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{4}\right]\times\left[0;\dfrac{3\pi}{2}\right].$

2.122. Для відображень $\vec{f}$ знайти похідну $\vec{f}\,'(\vec{x}^{\,0})$ і головну лінійну частину приросту відображення в точці $\vec{x}^{\,0}$:

1) $\vec{f}(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}\ln x_1\cdot\cos x_2\\ \ln x_1\cdot\sin x_2\end{pmatrix},$
$x_1>0,\ x_2\in\mathbb{R};\quad \vec{x}^{\,0}=(1,\pi);$

2) $\vec{f}(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}x_1x_2\\ \dfrac{x_2}{x_1}\end{pmatrix},\ x_1\neq 0;\quad \vec{x}^{\,0}=(1,2);$

3) $\vec{f}(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}\dfrac{10\,x_1}{x_1^2+x_2^2}\\ \dfrac{10\,x_2}{x_1^2+x_2^2}\end{pmatrix},\ (x_1,x_2)\neq(0,0);\ \vec{x}^{\,0}=(1,1);$

4) $\vec{f}(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}x_1^2+x_2^2\\ x_1^2-x_2^2\end{pmatrix},\ (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2;\quad \vec{x}^{\,0}=(1,1);$

5) $\vec{f}(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}(x_1+x_2)^2\\ (x_1-x_2)^2\end{pmatrix},\ (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2;\quad \vec{x}^{\,0}=(3,4);$

6) $\vec{f}(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}x_1^2-x_2^2\\ 2x_1x_2\end{pmatrix},\ (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2;\quad \vec{x}^{\,0}=(1,0);$

7) $\vec{f}(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}x_1^2+x_2\\ x_1^2-x_2\end{pmatrix},\ (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2;\quad \vec{x}^{\,0}=(-1,1);$

8) $\vec{f}(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}\dfrac{x_1}{x_2}\\ \dfrac{x_2}{x_1}\end{pmatrix},\ x_1x_2\neq 0;\quad \vec{x}^{\,0}=(1,-1);$

9) $\vec{f}(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}\dfrac{x_1}{2x_1+x_2}\\ \dfrac{x_2}{2x_1+x_2}\end{pmatrix},\ x_2\neq -2x_1;\quad \vec{x}^{\,0}=(1,2);$

10) $\vec{f}(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}x_1\sin x_2\\ x_2\cos x_1\end{pmatrix},\ (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2;\quad \vec{x}^{\,0}=(0,\pi).$

2.123. Для відображень $\vec{f}$ знайти похідну $\vec{f}\,'(\vec{x}^{\,0})$ і головну лінійну частину приросту відображення в точці $\vec{x}^{\,0}$:

1) $\vec{f}(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2^2\\ -x_3\end{pmatrix},\ (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3;\ \vec{x}^{\,0}=(1,2,3);$

2) $\vec{f}(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix}-x_1\\ \sqrt{x_2}\\ x_3+1\end{pmatrix},\ x_2>0;\ \vec{x}^{\,0}=(1,1,1);$

3) $\vec{f}(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix}\sin x_1\\ x_2-1\\ -x_3\end{pmatrix},\ (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3;\ \vec{x}^{\,0}=(\pi,1,1);$

4) $\vec{f}(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix}2^{x_1}\\ \operatorname{tg}x_2\\ x_3\end{pmatrix},\ |x_2|<\dfrac{\pi}{2};\ \vec{x}^{\,0}=\left(1,\dfrac{\pi}{4},-1\right);$

5) $\vec{f}(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix}\arcsin x_1\\ x_2^2\\ x_3\end{pmatrix},\ |x_1|<1;\ \vec{x}^{\,0}=\left(\dfrac{1}{2},1,2\right);$

6) $\vec{f}(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\ x_2+x_3\\ x_3+x_1\end{pmatrix},\ (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3;\ \vec{x}^{\,0}=(1,-1,1);$

7) $\vec{f}(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix}x_1-x_2\\ x_2-x_3\\ x_3-x_1\end{pmatrix},\ (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3;\ \vec{x}^{\,0}=(1,2,1);$

8) $\vec{f}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \ln(1+x_1) \\ \operatorname{ctg} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $x_1 > -1,\ 0 < x_2 < \pi;\ \vec{x}^{\,0} = \left(1, \dfrac{\pi}{2}, 0\right)$;

9) $\vec{f}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 \sin x_2 \\ x_2 \sin x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;\ \vec{x}^{\,0} = (\pi, \pi, 1)$;

10) $\vec{f}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1^{x_2} \\ x_2^{x_1} \\ x_3 \end{pmatrix}$, $x_i > 0,\ i = 1, 2;\ \vec{x}^{\,0} = (1, 1, 2)$.

2.124. Для відображення $\vec{f}$ знайти похідну $\vec{f}\,'(\vec{x}^{\,0})$ і головну лінійну частину приросту відображення в точці $\vec{x}^{\,0}$. Обчислити якобіан відображення і знайти точки, в яких якобіан вироджується.

1) $\vec{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2^2 \end{pmatrix}$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,

а) $\vec{x}^{\,0} = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, б) $\vec{x}^{\,0} = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}\right)$;

2) $\vec{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \cos x_2 \\ x_1 \sin x_2 \end{pmatrix}$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,

а) $\vec{x}^{\,0} = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\pi}{3}\right)$, б) $\vec{x}^{\,0} = \left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

3) $\vec{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,

а) $\vec{x}^{\,0} = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}\right)$, б) $\vec{x}^{\,0} = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right)$;

4) $\vec{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,

а) $\vec{x}^{\,0} = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, б) $\vec{x}^{\,0} = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}\right)$;

5) $\vec{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} e^{x_1} \cos x_2 \\ e^{x_1} \sin x_2 \end{pmatrix}$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,

а) $\vec{x}^{\,0} = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\pi}{3}\right)$, б) $\vec{x}^{\,0} = \left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

2.125. Обчислити якобіани відображень і знайти точки, в яких вони вироджуються:

1) $\vec{f}(r,\varphi)=\begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}, \quad r\geq 0,\ \varphi\in\mathbb{R};$

2) $\vec{f}(r,\varphi)=\begin{pmatrix} r\cos^3\varphi \\ 2r\sin^3\varphi \end{pmatrix}, \quad r\geq 0,\ \varphi\in\mathbb{R};$

3) $\vec{f}(r,\varphi)=\begin{pmatrix} 2r\cos^4\varphi \\ r\sin^4\varphi \end{pmatrix}, \quad r\geq 0,\ \varphi\in\mathbb{R};$

4) $\vec{f}(r,\varphi,\psi)=\begin{pmatrix} r\cos\varphi\ \cos^2\psi \\ 2r\sin\varphi\ \cos^2\psi \\ r\sin^2\psi \end{pmatrix}, \quad r\geq 0,\ 0\leq\varphi\leq 2\pi,\ |\psi|\leq\dfrac{\pi}{2};$

5) $\vec{f}(r,\varphi,\psi)=\begin{pmatrix} 2r\cos^2\varphi\ \cos\psi \\ 2r\sin^2\varphi\ \cos\psi \\ r\sin\psi \end{pmatrix}, \quad r\geq 0,\ 0\leq\varphi\leq 2\pi,\ |\psi|\leq\dfrac{\pi}{2};$

6) $\vec{f}(r,\varphi,\psi)=\begin{pmatrix} r\sqrt{\cos\varphi\ \cos\psi} \\ 2r\sqrt{\sin\varphi\ \cos\psi} \\ r\sqrt{\sin\psi} \end{pmatrix}, \quad r\geq 0,\ \{\varphi,\psi\}\subset\Big(0;\dfrac{\pi}{2}\Big);$

7) $\vec{f}(r,\varphi,\psi)=\begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ \psi^2 \end{pmatrix}, \quad (r,\varphi,\psi)\in\mathbb{R}^3;$

8) $\vec{f}(r,\varphi,\psi)=\begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ \sqrt[3]{\psi} \end{pmatrix}, \quad (r,\varphi,\psi)\in\mathbb{R}^3,\ \psi\neq 0;$

9) $\vec{f}(r,\varphi,\psi)=\begin{pmatrix} 3r\sqrt[3]{\cos\varphi}\ \cos\psi \\ 2r\sqrt[3]{\sin\varphi}\ \cos\psi \\ r\sin\psi \end{pmatrix}, \quad r\geq 0,\ 0<\varphi<\dfrac{\pi}{2},\ |\psi|\leq\dfrac{\pi}{2};$

10) $\vec{f}(r,\varphi,\psi)=\begin{pmatrix} r\cos\varphi\ \sqrt[3]{\cos\psi} \\ 2r\sin\varphi\ \sqrt[3]{\cos\psi} \\ r\sqrt[3]{\sin\psi} \end{pmatrix}, \quad r\geq 0,\ 0\leq\varphi\leq 2\pi,\ 0<\psi<\dfrac{\pi}{2};$

11) $\vec{f}(r,\varphi,\psi)=\begin{pmatrix} \sqrt{r}\cos\varphi\ \cos\psi \\ \sqrt{r}\sin\varphi\ \cos\psi \\ \sqrt{r}\sin\psi \end{pmatrix}, \quad r>0,\ \{\varphi,\psi\}\subset[0;2\pi].$

2.126. Для відображень

$$\vec{f}(r,\varphi,\psi)=\begin{pmatrix}f_1\\f_2\\f_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\cos\varphi\\r\sin\varphi\\\psi\end{pmatrix},\qquad (r,\varphi,\psi)\in\mathbb{R}^3,$$

$$\vec{g}(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix}g_1\\g_2\\g_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\cos x_3\\x_2\cos x_3\\\sqrt{x_1^2+x_2^2}\sin x_3\end{pmatrix},\qquad (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3,$$

$$\vec{h}(r,\varphi,\psi)=\vec{g}\big(\vec{f}(r,\varphi,\psi)\big),\qquad (r,\varphi,\psi)\in\mathbb{R}^3,$$

обчислити похідні $\vec{f}\,'$, $\vec{g}\,'$, $\vec{h}\,'$ і якобіани

$$\frac{\partial(f_1,f_2,f_3)}{\partial(r,\varphi,\psi)},\quad \frac{\partial(g_1,g_2,g_3)}{\partial(x_1,x_2,x_3)},\quad \frac{\partial(h_1,h_2,h_3)}{\partial(r,\varphi,\psi)}.$$

Примітка. Відображення $\vec{h}$ визначає перехід до сферичних координат.

2.127. Довести, що якобіан J відображення $\vec{f}$ має вказаний вигляд

1) $\vec{f}(r,\varphi)=\begin{pmatrix}ar\cos^\alpha\varphi\\br\sin^\alpha\varphi\end{pmatrix},\quad r\ge 0,\ 0<\varphi<\dfrac{\pi}{2};$

$\{a,b\}\subset(0;+\infty),\ \alpha\in\mathbb{R};\qquad J=\alpha\,abr\cos^{\alpha-1}\varphi\,\sin^{\alpha-1}\varphi;$

2) $\vec{f}(r,\varphi,\psi)=\begin{pmatrix}ar\cos^\alpha\varphi\,\cos^\beta\psi\\br\sin^\alpha\varphi\,\cos^\beta\psi\\cr\sin^\beta\psi\end{pmatrix},\quad r\ge 0,\ \{\varphi,\psi\}\subset\Big(0;\dfrac{\pi}{2}\Big);$

$\{a,b,c\}\subset(0;+\infty),\ \{\alpha,\beta\}\subset\mathbb{R};$
$J=\alpha\beta\,abc\,r^2\cos^{\alpha-1}\varphi\,\sin^{\alpha-1}\varphi\,\cos^{2\beta-1}\psi\,\sin^{\beta-1}\psi;$

3) $\vec{f}(r,\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_{m-1})=\begin{pmatrix}f_1(r,\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_{m-1})\\\vdots\\f_m(r,\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_{m-1})\end{pmatrix},$

$f_1=r\cos\varphi_1,\quad f_2=r\sin\varphi_1\,\cos\varphi_2,\quad \ldots,$
$f_{m-1}=r\sin\varphi_1\,\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{m-2}\,\cos\varphi_{m-1},$
$f_m=r\sin\varphi_1\,\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{m-2}\,\sin\varphi_{m-1},$
$r\ge 0,\ \varphi_i\in\Big[0;\dfrac{\pi}{2}\Big],\ 1\le i\le m-1;$
$J=r^{m-1}\sin^{m-2}\varphi_1\,\sin^{m-3}\varphi_2\ldots\sin\varphi_{m-2}.$

Примітка. Відображення у п. 1 визначає перехід до узагальнених полярних координат у просторі $\mathbb{R}^2$, у п. 2 – до узагальнених сферичних координат у просторі $\mathbb{R}^3$, у п. 3 – до сферичних координат у просторі $\mathbb{R}^m$.

2.128. Побудувати суперпозицію $\vec{h}:=\vec{g}(\vec{f}\,)$ відображень і знайти якобіан суперпозиції двома способами:

$$\vec{f}(x_1,x_2)=\begin{pmatrix} x_1^3-x_2^3\\ 3x_1x_2^2-3x_1^2x_2\end{pmatrix},\ (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2;$$

$$\vec{g}(y_1,y_2)=\begin{pmatrix} y_1+y_2\\ y_1-y_2\end{pmatrix},\ (y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2.$$

2.129. Довести, що якобіан відображення

$$\vec{f}(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix} f_1\\ f_2\\ f_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1^2+x_2^2+x_3^2\\ x_1+x_2+x_3\\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\end{pmatrix},\quad (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3,$$

тотожно дорівнює нулю. Знайти залежність між функціями $f_i,\ 1\le i\le 3.$

2.130. Знайти образ координатної сітки при відображеннях:

1) $\vec{f}(x_1,x_2)=\begin{pmatrix} e^{x_1}\cos x_2\\ e^{x_1}\sin x_2\end{pmatrix},\quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2;$

2) $\vec{f}(x_1,x_2)=\begin{pmatrix} (x_1+x_2)^2\\ (x_1-x_2)^2\end{pmatrix},\quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2;$

3)* $\vec{f}(x_1,x_2)=\begin{pmatrix} \dfrac{4x_1}{x_1^2+x_2^2}\\ \dfrac{4x_2}{x_1^2+x_2^2}\end{pmatrix},\quad (x_1,x_2)\neq(0,0).$

2.9 Обернене відображення. Неявне відображення

Теорема (про обернене відображення). Нехай U – відкрита множина в $\mathbb{R}^m$, $\vec{x}^{\,0}\in U$, $\vec{f}:U\to\mathbb{R}^m$, $\vec{f}(\vec{x}^{\,0})=\vec{y}^{\,0}$. Припустимо, що

а) $\vec{f}\in C^{(1)}(U)$; б) $\det\vec{f}'(\vec{x}^{\,0})\neq 0$.

Тоді існують відкрита множина $V(\vec{x}^{\,0})$, $\vec{x}^{\,0}\in V(\vec{x}^{\,0})\subset U$, і куля $B(\vec{y}^{\,0};r)$ такі, що

1) відображення $\vec{f}:V(\vec{x}^{\,0})\to B(\vec{y}^{\,0};r)$ є гомеоморфізмом;

2) обернене до $\vec{f}$ відображення $\vec{g}=\vec{f}^{\,-1}\in C^{(1)}\big(B(\vec{y}^{\,0};r);V(\vec{x}^{\,0})\big)$;

3) $\forall\,\vec{y}\in B(\vec{y}^{\,0};r):\ \vec{g}'(\vec{y})=\big(\vec{f}'(\vec{g}(\vec{y}))\big)^{-1}$.

Теорема (про неявне відображення). Нехай G – відкрита множина в $\mathbb{R}^{m+n}$, $(\vec{x}^{\,0},\vec{y}^{\,0})\in G$. Припустимо, що відображення $\vec{F}:G\to\mathbb{R}^n$ задовольняє умови:

а) $\vec{F}(\vec{x}^{\,0},\vec{y}^{\,0})=\vec{0}$; б) $\vec{F}\in C^{(1)}(G)$; в) $\dfrac{\partial(F_1,F_2,\ldots,F_n)}{\partial(y_1,y_2,\ldots,y_n)}(\vec{x}^{\,0},\vec{y}^{\,0})\neq 0$,

де $\vec{F}=(F_1,F_2,\ldots,F_n)^t,\ \vec{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_n)^t$.

Тоді існують куля $B(\vec{x}^{\,0};r)\subset\mathbb{R}^m$ і єдине відображення $\vec{h}\in C^{(1)}\big(B(\vec{x}^{\,0};r);\,\mathbb{R}^n\big)$, що задовольняють умови:

1) $\vec{h}(\vec{x}^{\,0}) = \vec{y}^{\,0}$;

2) $\forall\, \vec{x} \in B(\vec{x}^{\,0}; r):\ \vec{F}(\vec{x}, \vec{h}(\vec{x})) = \vec{0}$;

3) $\forall\, \vec{x} \in B(\vec{x}^{\,0}; r):\ \vec{h}'(\vec{x}) = -\big(\vec{F}'_{\vec{y}}(\vec{x}, \vec{h}(\vec{x}))\big)^{-1} \vec{F}'_{\vec{x}}(\vec{x}, \vec{h}(\vec{x}))$,

де $F'_{\vec{x}} := \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{i=1}^{n}{}_{j=1}^{m}$, $\quad F'_{\vec{y}} := \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}\right)_{i=1}^{n}{}_{j=1}^{n}$.

Приклад 1. До відображення $\vec{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 2x_1x_2 \end{pmatrix}$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, застосувати теорему про існування оберненого відображення в кожній точці $(x_1^0, x_2^0) \in A$, $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \neq 2x_2\}$; довести, що відображення $\vec{f}$ взаємно однозначне на множині $B = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \geq 2x_2\}$; на множині $C = \{(x_1, x_2) \mid x_1 > 2x_2\}$ знайти обернене відображення $\vec{g}$ і обчислити $\vec{f}\,'$, $(\vec{f}\,')^{-1}$, $\vec{g}\,'$. Знайти якобіани відображення $\vec{f}$ на множині C і оберненого до нього.

⌈ Обчислимо похідну і якобіан відображення $\vec{f} \in C^{(1)}(\mathbb{R}^2)$:

$$\vec{f}'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2x_2 & 2x_1 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_2)} = 2(x_1 - 2x_2),\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

У кожній точці $\vec{x}^{\,0} \in A$ якобіан $\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_2)}(\vec{x}^{\,0}) \neq 0$, тому за теоремою про обернене відображення існують відкрита множина $V(\vec{x}^{\,0})$, $\vec{x}^{\,0} \in V(\vec{x}^{\,0}) \subset A$, і куля $B(\vec{y}^{\,0}; r)$ з центром у точці $\vec{y}^{\,0} = \vec{f}(\vec{x}^{\,0})$ такі, що

1) відображення $\vec{f} : V(\vec{x}^{\,0}) \to B(\vec{y}^{\,0}; r)$ є гомеоморфізмом;

2) обернене до $\vec{f}$ відображення $\vec{g} = \vec{f}^{-1} \in C^{(1)}\big(B(\vec{y}^{\,0}; r); V(\vec{x}^{\,0})\big)$;

3) $\forall\, \vec{y} \in B(\vec{y}^{\,0}; r):\ \vec{g}'(\vec{y}) = \big(\vec{f}'(\vec{g}(\vec{y}))\big)^{-1}$.

Система рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 & = y_1 \\ 2x_1x_2 & = y_2 \end{cases}$$

при $y_1^2 \geq 4y_2$ має єдиний розв'язок

$$x_1 = \frac{y_1 + \sqrt{y_1^2 - 4y_2}}{2}, \qquad x_2 = \frac{y_1 - \sqrt{y_1^2 - 4y_2}}{4}$$

у множині B. Тому $\vec{f}$ є взаємно однозначним на B. Обернене відображення $\vec{g} = \vec{f}^{-1}$ до відображення $\vec{f} : C \to \mathbb{R}^2$ визначається рівністю

$$\vec{g}(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} \frac{y_1 + \sqrt{y_1^2 - 4y_2}}{2} \\ \frac{y_1 - \sqrt{y_1^2 - 4y_2}}{4} \end{pmatrix}, \quad y_1^2 > 4y_2.$$

Оскільки

$$\big(\vec{f}'(x_1, x_2)\big)^{-1} = \frac{1}{x_1 - 2x_2} \begin{pmatrix} x_1 & -1 \\ -x_2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

то

$$\vec{g}'(y_1,y_2) = \left(\vec{f}'(\vec{g}(y_1,y_2))\right)^{-1} = \frac{1}{4\sqrt{y_1^2-4y_2}}\begin{pmatrix} 2\left(y_1+\sqrt{y_1^2-4y_2}\right) & -4 \\ -y_1+\sqrt{y_1^2-4y_2} & 2 \end{pmatrix}, \ y_1^2 > 4y_2.$$

При цьому

$$\frac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(y_1,y_2)}(y_1,y_2) = \left(\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x_1,x_2)}(g_1(y_1,y_2),g_2(y_1,y_2))\right)^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{y_1^2-4y_2}}, \quad y_1^2 > 4y_2.$$

⌋

Приклад 2. Нехай

$$\vec{F}(x_1,x_2,y_1,y_2) = \begin{pmatrix} x_1+x_2-y_1-y_2 \\ x_2\sin y_1 - x_1\sin y_2 \end{pmatrix}.$$

До яких точок може бути застосована теорема про неявне відображення? Знайти похідну неявного відображення $\vec{h}'$.

⌈ Відображення $\vec{F} \in C^{(1)}\left(\mathbb{R}^{2+2}\right)$. Знайдемо похідну цього відображення:

$$\vec{F}'(x_1,x_2,y_1,y_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -\sin y_2 & \sin y_1 & x_2\cos y_1 & -x_1\cos y_2 \end{pmatrix}, \ (x_1,x_2,y_1,y_2) \in \mathbb{R}^{2+2}.$$

Звідси

$$\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y_1,y_2)} = x_1\cos y_2 + x_2\cos y_1.$$

Теорема про неявне відображення може бути застосована до точок (x_1,x_2,y_1,y_2), що задовольняють систему

$$\begin{cases} x_1+x_2-y_1-y_2 & = 0 \\ x_2\sin y_1 - x_1\sin y_2 & = 0 \\ x_1\cos y_2 + x_2\cos y_1 & \neq 0 \end{cases},$$

наприклад, до $(0,\pi,\pi,0)$. У деякому околі кожної з таких точок існує неявне відображення $\vec{h}$, $\vec{F}(\vec{x},\vec{h}(\vec{x})) = \vec{0}$, похідна якого обчислюється за формулою

$$\vec{h}'(\vec{x}) = -\left(\vec{F}'_{\vec{y}}(\vec{x},\vec{h}(\vec{x}))\right)^{-1}\vec{F}'_{\vec{x}}(\vec{x},\vec{h}(\vec{x})) =$$

$$= -\frac{1}{x_1\cos y_2 + x_2\cos y_1}\begin{pmatrix} -x_1\cos y_2 & 1 \\ -x_2\cos y_1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\sin y_2 & \sin y_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{x_1\cos y_2 + x_2\cos y_1}\begin{pmatrix} x_1\cos y_2 + \sin y_2 & x_1\cos y_2 - \sin y_1 \\ x_2\cos y_1 - \sin y_2 & x_2\cos y_1 + \sin y_1 \end{pmatrix}.$$

⌋

2.131. Для відображення

$$\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1x_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = (x_1,x_2) \in A = (0,+\infty)\times(0,+\infty),$$

знайти $\vec{f}(A)$, а також точки, в яких $\det \vec{f}' = 0$. Довести, що $\vec{f}$ є взаємно однозначним відображенням. Знайти обернене відображення $\vec{g} = \vec{f}^{-1}$.

2.132. Для відображень $\vec{f}$ знайти $\vec{f}(A)$ та точки, в яких $\det \vec{f}' = 0$. Якщо $\vec{f}$ є взаємно однозначним відображенням, то знайти обернене відображення $\vec{g} = \vec{f}^{-1}$:

1) $\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = (x_1, x_2) \in A = \mathbb{R}^2;$

2) $\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_1 - 2 \\ 3x_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = (x_1, x_2) \in A = [-1; 2] \times \mathbb{R}.$

2.133. Нехай

$$\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \cos x_2 \\ x_1 \sin x_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = (x_1, x_2) \in A = [0, +\infty) \times \mathbb{R}.$$

1) Знайти $\vec{f}(A)$.
2) Для кожної точки $\vec{x}^{\,0} = (x_1^0, x_2^0),\ x_1^\circ > 0$ застосувати теорему про існування оберненого відображення.
3) Довести, що відображення $\vec{f}$ не є взаємно однозначним на множині $\{\vec{x} = (x_1, x_2) |\ x_1 > 0\}$.
4) Довести, що на множині $\{\vec{x} = (x_1, x_2) |\ x_1 > 0,\ 0 \le x_2 \le \pi\}$ відображення $\vec{f}$ є взаємно однозначним, знайти обернене відображення $\vec{g} = \vec{f}^{-1}$.
5) Знайти $\vec{f}\,'$, $(\vec{f}\,')^{-1}$, $\vec{g}\,'$ на множині з п. 4).

2.134. Нехай

$$\vec{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

1) Для множини $A = \{(x_1, x_2) |\ x_1 + x_2 \ge 0\}$ знайти образ $\vec{f}(A)$.
2) Знайти обернене відображення до $\vec{f}$ на A.
3) До кожної точки $\vec{x}^{\,0} = (x_1^0, x_2^0),\ x_1^0 + x_2^0 \ne 0$, застосувати теорему про існування оберненого відображення.

2.135. Нехай

$$F(x_1, x_2, y) = x_1^2 + x_2^2 + y^2 - 2x_1 y - 4, \quad (x_1, x_2, y) \in \mathbb{R}^3.$$

До яких точок (x_1^0, x_2^0, y^0) може бути застосована теорема про неявну функцію? У випадку існування неявної функції $y = y(x_1, x_2)$ знайти y_1' і y_2'.

2.136. Довести, що відображення

$$\vec{f}(\vec{x}) = \frac{2}{1 - \|\vec{x}\|^2}\,\vec{x}, \quad \vec{x} \in A = B(\vec{0}; 1) \subset \mathbb{R}^m,$$

є взаємно однозначним. Знайти $\vec{f}(A)$ і обернене відображення $\vec{g} = \vec{f}^{\,-1}$.

2.137. Нехай

$$\vec{F}(x, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} x - 3y_1 + y_2^2 \\ 2x + y_1 - y_2 \end{pmatrix}, \quad (x, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^3.$$

До відображення $\vec{F}$ у точці $(0,0,0)$ застосувати теорему про існування неявного відображення. Довести, що відображення

$$\vec{f}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{2} - 2x - \dfrac{1}{2}\sqrt{9 - 28x} \\ \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{9 - 28x} \end{pmatrix}, \quad x \in \left[-\frac{9}{28}, \frac{9}{28}\right]$$

задовольняє співвідношення

$$\vec{F}(x, \vec{f}(x)) = 0, \quad x \in \left[-\frac{9}{28}, \frac{9}{28}\right].$$

Обчислити $\vec{f}\,'$ за допомогою теореми про похідну неявного відображення.

2.138. Нехай $\vec{f} \in C^{(1)}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ та

$$\exists\, C > 0 \;\forall \{\vec{x}', \vec{x}''\} \subset \mathbb{R}^m \;:\; \|\vec{f}(\vec{x}') - \vec{f}(\vec{x}'')\| \geq C\,\|\vec{x}' - \vec{x}''\|.$$

Довести твердження:

1) відображення $\vec{f}$ – взаємно однозначне;

2) $\det \vec{f}\,'(\vec{x}) \neq 0, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^m$.

2.139. Чи є наведені відображення ін'єктивними на множині A? Якщо так, то знайти обернені до них.

1) $\vec{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} e^{x_1}\cos x_2 \\ e^{x_1}\sin x_2 \end{pmatrix}, \ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; \quad A = \mathbb{R} \times [0, 2\pi);$

2) $\vec{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ (x_1 - x_2)^2 \end{pmatrix}, \ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; \quad A = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \geq x_2\};$

3) $\vec{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ \dfrac{x_2}{x_1} \end{pmatrix}, \ x_1 \neq 0; \quad A = (-\infty, 0) \times (-\infty, 0).$

2.140. До відображення $\vec{f}$ застосувати теорему про існування оберненого відображення в кожній точці $(x_1^0, x_2^0) \in A$; довести, що відображення $\vec{f}$ взаємно однозначне на множині B; на множині C знайти обернене відображення $\vec{g}$ і обчислити $\vec{f}\,'$, $(\vec{f}\,')^{-1}$, $\vec{g}\,'$:

1) $\vec{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}, \ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;$

$A = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \neq x_2\}, \ B = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \geq x_2\},$

$C = \{(x_1, x_2) \mid x_1 > x_2\};$

2) $\vec{f}(x_1,x_2)=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1^2+x_2^2 \end{pmatrix},\ (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2;$
$A=\{(x_1,x_2)\mid x_2\neq 0\},\ B=\{(x_1,x_2)\mid x_2\leq 0\},$
$C=\{(x_1,x_2)\mid x_2<0\};$

3) $\vec{f}(x_1,x_2)=\begin{pmatrix} x_1^3+x_2 \\ x_2 \end{pmatrix},\ (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2;$
$A=\{(x_1,x_2)\mid x_1\neq 0\},\ B=\mathbb{R}^2,\ C=\{(x_1,x_2)\mid x_1>0\};$

4) $\vec{f}(x_1,x_2)=\begin{pmatrix} (x_1+x_2)^3 \\ (x_1-x_2)^2 \end{pmatrix},\ (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2;$
$A=\{(x_1,x_2)\mid |x_1|\neq|x_2|\},\ B=\{(x_1,x_2)\mid x_1\geq x_2\},$
$C=\{(x_1,x_2)\mid 0<x_2<x_1\};$

5) $\vec{f}(x_1,x_2)=\begin{pmatrix} x_1 \\ \sin(x_1+x_2) \end{pmatrix},\ (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2;$
$A=\left\{(x_1,x_2)\mid x_1+x_2\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\},$
$B=\left\{(x_1,x_2)\mid -\frac{\pi}{2}\leq x_1+x_2\leq\frac{\pi}{2}\right\},$
$C=\left\{(x_1,x_2)\mid -\frac{\pi}{2}<x_1+x_2<\frac{\pi}{2}\right\};$

6) $\vec{f}(x_1,x_2)=\begin{pmatrix} \operatorname{tg}(x_1+x_2) \\ x_2 \end{pmatrix},\ x_1+x_2\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z};$
$A=\left\{(x_1,x_2)\mid x_1+x_2\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\},$
$B=C=\left\{(x_1,x_2)\mid -\frac{\pi}{2}<x_1+x_2<\frac{\pi}{2}\right\};$

7) $\vec{f}(x_1,x_2)=\begin{pmatrix} x_1 \\ e^{x_1x_2} \end{pmatrix},\ (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2;$
$A=B=\{(x_1,x_2)\mid x_1\neq 0\},\ C=\{(x_1,x_2)\mid x_1>0\};$

8) $\vec{f}(x_1,x_2)=\begin{pmatrix} \ln(x_1x_2) \\ x_2 \end{pmatrix},\ x_1x_2>0;$
$A=B=\{(x_1,x_2)\mid x_1x_2>0\},\ C=(0,+\infty)\times(0,+\infty);$

9) $\vec{f}(x_1,x_2)=\begin{pmatrix} x_1^2 \\ \operatorname{arctg}(x_1+x_2) \end{pmatrix},\ (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2;$
$A=\{(x_1,x_2)\mid x_1\neq 0\},\ B=[0,+\infty)\times\mathbb{R},\ C=(0,+\infty)\times\mathbb{R};$

10) $\vec{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_1^2 + x_2^2 \end{pmatrix}, \ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;$
$A = \{(x_1, x_2) \mid x_1 x_2 \neq 0\}, \ B = [0, +\infty) \times [0, +\infty),$
$C = (0, +\infty) \times (0, +\infty).$

2.141. Знайти якобіани відображення $\vec{f}$ у точці $\vec{x}^{\,0}$ і оберненого до нього відображення $\vec{g}$ у точці $\vec{f}(\vec{x}^{\,0})$:

1) $\vec{f}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 x_3 \\ x_1 x_2 - x_1 x_2 x_3 \\ x_2 - x_1 x_2 \end{pmatrix}, \ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,$
$(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = (1, 2, 3);$

2) $\vec{f}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1(1 - \|\vec{x}\|^2)^{-\frac{1}{2}} \\ x_2(1 - \|\vec{x}\|^2)^{-\frac{1}{2}} \\ x_3(1 - \|\vec{x}\|^2)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \ (x_1, x_2, x_3) \in \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\vec{x}\| < 1\right\},$
$(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right);$

3) $\vec{f}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \sqrt{a^2 + x_1^2 - 2a x_1 \cos x_2} \\ x_3^2 \end{pmatrix}, \ 0 < x_2 < \pi \ (a > 0),$
$(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = \left(5, \frac{\pi}{6}, 1\right);$

4) $\vec{f}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \cos x_1 \\ \sin x_1 \cos x_2 \\ \sin x_1 \sin x_2 \cos x_3 \end{pmatrix}, \ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,$
$(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right).$

2.142. Нехай

$$F(x_1, x_2, y) = x_1^2 - 4x_2^2 - 2x_2 y - y^2 + 8, \quad (x_1, x_2, y) \in \mathbb{R}^3.$$

В околі точки $(2, 1, -4)$ застосувати теорему про неявну функцію. Знайти похідні y_1' і y_2' неявної функції.

2.10 Умовні (відносні) локальні екстремуми

Нехай $A \subset \mathbb{R}^m$, $s \in \mathbb{N}$, $s < m$, $\varphi_i : A \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, s$. Означимо множину

$$M := \{\vec{x} \in A \mid \varphi_i(\vec{x}) = 0, \ i = 1, \ldots, s\}.$$

Припустимо, що $M \neq \varnothing$.

Точка $\vec{x}^{\,0} \in M$ називається *точкою умовного (відносного) локального мінімуму* функції $f : A \to \mathbb{R}$ за умов зв'язку

$$\varphi_i(\vec{x}) = 0, \; i = 1, \ldots, s, \tag{2.4}$$

якщо для деякого додатного числа r :

1) $B(\vec{x}^{\,0}; r) \subset A$; 2) $\forall\, \vec{x} \in B(\vec{x}^{\,0}; r) \cap M : \; f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}^{\,0})$.

Точка $\vec{x}^{\,0} \in M$ називається *точкою строгого умовного (відносного) локального мінімуму* функції $f : A \to \mathbb{R}$ за умов зв'язку (2.4), якщо для деякого додатного числа r :

1) $B(\vec{x}^{\,0}; r) \subset A$; 2) $\forall\, \vec{x} \in B(\vec{x}^{\,0}; r) \cap M \setminus \{\vec{x}^{\,0}\} : \; f(\vec{x}) > f(\vec{x}^{\,0})$.

Точка $\vec{x}^{\,0} \in M$ називається *точкою (строгого) умовного локального максимуму* функції $f : A \to \mathbb{R}$ за умов зв'язку (2.4), якщо вона є точкою (строгого) умовного локального мінімуму функції $(-f)$. Точки умовних локальних мінімумів і максимумів називаються точками *умовних (відносних) локальних екстремумів*.

Необідні умови відносного локального екстремуму (правило множників Лагранжа). Нехай $f \in C^{(1)}(A)$, $\varphi_i \in C^{(1)}(A)$, $i = 1, \ldots, s$. Припустимо, що у точці умовного локального екстремуму $\vec{x}^{\,0}$ за умов зв'язку (2.4) матриця

$$\left(\frac{\partial \varphi_i(\vec{x}^{\,0})}{\partial x_j} \right)_{i=1}^{s} {}_{j=1}^{m}$$

має ранг s. Тоді існують такі числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ (*множники Лагранжа*), що точка $\vec{x}^{\,0}$ є критичною точкою *функції Лагранжа*

$$F = f + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \ldots + \lambda_s \varphi_s.$$

Достатні умови відносного локального екстремуму. Припустимо, що виконані умови:

а) $\{f, \; \varphi_i, \; i = 1, \ldots, s\} \subset C^{(2)}(A)$;

б) $\vec{x}^{\,0} \in M$ – критична точка функції Лагранжа $F = f + \sum\limits_{i=1}^{s} \lambda_i \varphi_i$ для деякого набору чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$;

в) матриця $\left(\frac{\partial \varphi_i(\vec{x}^{\,0})}{\partial x_j} \right)_{i=1}^{s} {}_{j=1}^{m}$ має ранг s.

Покладемо $Q(\vec{a}) := \vec{a}^{\,t} F''(\vec{x}^{\,0}) \vec{a}$, де вектор $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$ задовольняє систему рівнянь

$$\big(\operatorname{grad} \varphi_i(\vec{x}^{\,0}), \vec{a}\big) = 0, \; i = 1, \ldots, s.$$

Якщо для кожного такого вектора $\vec{a} \neq \vec{0}$ функція $Q(\vec{a}) < 0$, то $\vec{x}^{\,0}$ є точкою строгого умовного локального максимуму, якщо ж $Q(\vec{a}) > 0$, то $\vec{x}^{\,0}$ є точкою строгого умовного локального мінімуму.

Приклад. Дослідити локальні екстремуми функції $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3$ за умови зв'язку $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3$.

⌈ За теоремою про необхідні умови точки відносного локального екстремуму слід шукати серед критичних точок функції Лагранжа $F(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 + \lambda(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3)$, що визначаються з системи рівнянь

$$\begin{cases} x_2 x_3 + 2\lambda x_1 & = 0 \\ x_1 x_3 + 2\lambda x_2 & = 0 \\ x_1 x_2 + 2\lambda x_3 & = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 & = 3 \end{cases}.$$

Ця система має такі розв'язки:

$$(i)\begin{cases}\lambda=0\\ x_i=x_j=0\\ x_k=\pm\sqrt{3}\end{cases},\quad (ii)\begin{cases}|\lambda|=\frac{1}{2}\\ |x_i|=|x_j|=|x_k|=1\\ \operatorname{sign}(x_ix_j)=-\operatorname{sign}(\lambda x_k)\end{cases},\quad i,j,k=1,2,3,\ \text{усі індекси різні.}$$

Знайдемо F''.

$$F''=\begin{pmatrix}2\lambda & x_3 & x_2\\ x_3 & 2\lambda & x_1\\ x_2 & x_1 & 2\lambda\end{pmatrix}.$$

Розглянемо одну з точок типу (i), наприклад, $\vec{x}^{\,1}=(\sqrt{3},0,0)$. У цій точці

$$Q(\vec{a})=2\sqrt{3}a_2a_3,\quad \text{де } (\operatorname{grad}\varphi,\vec{a})=2\sqrt{3}a_1=0,\quad \vec{a}=(a_1,a_2,a_3).$$

Функція Q не зберігає знак на $\mathbb{R}\setminus\{\vec{0}\}$. Тому теорема про достатні умови відносного локального екстремуму не може бути застосована для дослідження точки $\vec{x}^{\,1}$. Відсутність умовного локального екстремуму в точці $\vec{x}^{\,1}$ випливає безпосередньо з означення. Візьмемо довільне $\varepsilon\in(0;1)$. Покладемо $\vec{y}=(\sqrt{3-2\varepsilon^2},-\varepsilon,\varepsilon)$, $\vec{z}=(\sqrt{3-2\varepsilon^2},\varepsilon,\varepsilon)$. Точки $\vec{y}$, $\vec{z}$ задовольняють рівняння зв'язку, при належному виборі ε лежать у наперед заданому околі точки $\vec{x}^{\,1}$ і

$$f(\vec{y})<f(\vec{x}^{\,1})=0<f(\vec{z}).$$

Аналогічно решта точок типу (i) не є точками умовного локального екстремуму.

Розглянемо одну з точок типу (ii), наприклад, $\vec{x}^{\,2}=(1,1,1)$, $\lambda=-\dfrac{1}{2}$. У цій точці

$$Q(\vec{a})=-a_1^2-a_2^2-a_3^2+2a_1a_2+2a_1a_3+2a_2a_3,\quad \text{де } (\operatorname{grad}\varphi,\vec{a})=2(a_1+a_2+a_3)=0,$$

$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$. Тому $Q(\vec{a})=-2(a_1^2+a_2^2+a_3^2)<0$ для $\vec{a}\in\mathbb{R}^3\setminus\{\vec{0}\}$. За теоремою про достатні умови відносного локального екстремуму функція f має у точці $\vec{x}^{\,2}$ строгий умовний локальний максимум, $f(1,1,1)=1$. Аналогічно точки $(1,-1,-1)$, $(-1,1,-1)$, $(-1,-1,1)$ є точками строгого умовного локального максимуму,

$$f(1,-1,-1)=f(-1,1,-1)=f(-1,-1,1)=1.$$

Розглянемо точку $\vec{x}^{\,3}=(-1,-1,-1)$, $\lambda=\dfrac{1}{2}$. У цій точці

$$Q(\vec{a})=a_1^2+a_2^2+a_3^2-2a_1a_2-2a_1a_3-2a_2a_3,\quad \text{де } (\operatorname{grad}\varphi,\vec{a})=-2(a_1+a_2+a_3)=0,$$

$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$. Тому $Q(\vec{a})=2(a_1^2+a_2^2+a_3^2)>0$ для $\vec{a}\in\mathbb{R}^3\setminus\{\vec{0}\}$. За теоремою про достатні умови відносного локального екстремуму функція f має у точці $\vec{x}^{\,3}$ строгий умовний локальний мінімум, $f(-1,-1,-1)=-1$. Аналогічно, точки $(-1,1,1)$, $(1,-1,1)$, $(1,1,-1)$ є точками строгого умовного локального мінімуму,

$$f(-1,1,1)=f(1,-1,1)=f(1,1,-1)=-1.$$

⌋

2.143. Знайти умовні локальні екстремуми функцій при вказаних рівняннях зв'язку:

1) $f(x_1,x_2)=x_1x_2,\ (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2;\quad x_1^2+x_2^2=1;$
2) $f(x_1,x_2)=x_1x_2,\ (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2;\quad x_1-2x_2=1;$

3) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2,\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\quad \dfrac{x_1}{a} + \dfrac{x_2}{b} = 1,\ ab \neq 0;$
4) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 12x_1x_2 + 2x_2^2,\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\quad 4x_1^2 + x_2^2 = 25;$
5) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3,\quad x_1 + 4x_3 = 1,\ x_1x_2 = 1.$

2.144. Знайти умовні локальні екстремуми функцій при вказаних рівняннях зв'язку:

1) $f(x_1, x_2) = e^{x_1x_2},\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\quad x_1 + x_2 = 1;$
2) $f(x_1, x_2) = x_1^{-1} + x_2^{-1},\ x_1x_2 \neq 0;\quad x_1 + x_2 = 2a;$
3) $f(x_1, x_2) = x_1 - x_2,\ x_i \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right),\ i = 1, 2;\quad \operatorname{tg} x_1 = 3 \operatorname{tg} x_2;$
4) $f(x_1, x_2) = \cos^2 x_1 + \cos^2 x_2,\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\quad x_1 - x_2 = \dfrac{\pi}{4};$
5) $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1}{a} + \dfrac{x_2}{b},\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\quad x_1^2 + x_2^2 = 1;\quad (a > 0,\ b > 0);$
6) $f(x_1, x_2) = 2\cos^2 x_1 + 3\cos^2 x_2,\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\quad x_1 - x_2 = \dfrac{\pi}{4}.$

2.145. Знайти умовні локальні екстремуми функцій при вказаних рівняннях зв'язку:

1) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2x_2^3x_3^4,\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;\quad 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0;$
2) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3,\ x_i > 0,\ i = 1, 2, 3;\quad \dfrac{a}{x_1} + \dfrac{b}{x_2} + \dfrac{c}{x_3} = 1;$ $(a > b > c > 0);$
3) $f(x_1, x_2, x_3) = \cos x_1 \cdot \cos x_2 \cdot \cos x_3,\ x_i > 0,\ i = 1, 2, 3;\ x_1 + x_2 + x_3 = \pi;$
4) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 - 2x_2 + 2x_3,\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;\quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1;$
5) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^m x_2^n x_3^p,\ x_i > 0,\ i = 1, 2, 3;\quad x_1 + x_2 + x_3 = a;$ $(a > 0,\ \{m, n, p\} \subset \mathbb{N});$
6) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;\quad \dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} + \dfrac{x_3^2}{c^2} = 1;$ $(a > b > c > 0);$
7) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2^2x_3^3,\ x_i > 0,\ i = 1, 2, 3;\quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 = a;$ $(a > 0);$
8) $f(x_1, x_2, x_3) = \sin x_1 \cdot \sin x_2 \cdot \sin x_3,\ x_i > 0,\ i = 1, 2, 3;\ x_1 + x_2 + x_3 = \dfrac{\pi}{2};$
9) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3,\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;\quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3.$

2.146. Знайти умовні локальні екстремуми функцій при вказаних рівняннях зв'язку:

1) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3,\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;$ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,\ x_1 + x_2 + x_3 = 0;$

2) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+14x_3^2,\ (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3;$
$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1,\ 2x_1+3x_2+11x_3=0;$

3) $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+bx_2^2+cx_3^2,\ (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3;$
$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1,\ m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3=0;\ \ 0<a<b<c,$
$m_i\in\mathbb{R},\ m_i\neq 0,\ i=1,2,3;$

4) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2x_3,\ (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3;$
$x_1+x_2+x_3=5,\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=8;$

5) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_2x_3,\ x_i>0,\ 1\le i\le 3;$
$x_1^2+x_2^2=1,\ x_2+x_3=2;$

6) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2,(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3;$
$x_1+2x_2+3x_3=0,\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=0.$

2.147. Для фіксованих $a>0,\ a_i>0,\ 1\le i\le m$, знайти найменше значення функції
$$f(x_1,x_2,\ldots,x_m)=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_m^2,\ (x_1,x_2,\ldots,x_m)\in\mathbb{R}^m,$$
за умови
$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_mx_m=a.$$
Використовуючи отриманий результат, довести *нерівність Коші – Буняковського*
$$\left(\sum_{i=1}^m x_ia_i\right)^2\le\sum_{i=1}^m x_i^2\cdot\sum_{i=1}^m a_i^2,\quad \{(x_1,x_2,\ldots,x_m),\ (a_1,a_2,\ldots,a_m)\}\subset\mathbb{R}^m.$$
За яких умов можливий знак рівності?

2.148. Для фіксованого числа $a>0$ знайти найбільше значення функції
$$f(x_1,x_2,\ldots,x_m)=\prod_{i=1}^m x_i,\quad x_i\ge 0,\ 1\le i\le m,$$
за умови $x_1+x_2+\ldots+x_m=a$. Використовуючи отриманий результат, довести нерівність
$$\sqrt[m]{x_1x_2\ldots x_m}\le\frac{x_1+x_2+\ldots+x_m}{m},\quad x_i\ge 0,\ 1\le i\le m.$$
За якої умови можливий знак рівності?

2.149. Для фіксованого числа $a>0$ знайти найменше значення функції
$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{2}(x_1^n+x_2^n),\ n>1,\ x_i\ge 0,\ i=1,2,$$
за умови $x_1+x_2=a$. Використовуючи отриманий результат, довести нерівність
$$\frac{x_1^n+x_2^n}{2}\ge\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^n,\ n\ge 1,\ x_i\ge 0,\ i=1,2.$$

2.150. Для фіксованого числа $a\in\mathbb{R}$ знайти найменше значення функції

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_m)=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_m^2,\ (x_1,x_2,\ldots,x_m)\in\mathbb{R}^m,$$

за умови $x_1+x_2+\ldots+x_m=a$. Використовуючи отриманий результат, довести нерівність

$$(x_1+x_2+\ldots+x_m)^2\le m(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_m^2),\quad x_i\in\mathbb{R},\ i=1,2,\ldots,m.$$

2.151. Для фіксованого числа $a>0$ знайти найменше значення функції

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_m)=x_1^p+x_2^p+\ldots+x_m^p,\ p>1,\ x_i\ge 0,\ i=1,\ldots,m,$$

за умови $x_1+x_2+\ldots+x_m=a$. Використовуючи отриманий результат, довести нерівність

$$\frac{x_1^p+x_2^p+\ldots+x_m^p}{m}\ge\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_m}{m}\right)^p,\ p>1,\ x_i\ge 0,\ i=1,\ldots,m.$$

2.152. Знайти найменше значення функції

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_m)=\left(\sum_{i=1}^m x_i^p\right)^{\frac{1}{p}},\ p>1,\ x_i\ge 0,\ i=1,\ldots,m,$$

за умови $\sum\limits_{i=1}^m a_ix_i=A,\ a_i\ge 0,\ i=1,\ldots,m,\ A\ge 0$. Використовуючи отриманий результат, довести *нерівність Гьольдера*

$$\sum_{i=1}^m a_ix_i\le\left(\sum_{i=1}^m x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{i=1}^m a_i^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

де $p>1,\ \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1,\ a_i\ge 0,\ x_i\ge 0,\ i=1,\ldots,m$. За яких умов тут має місце рівність?

2.153. Нехай A – симетрична додатно визначена матриця розмірності $m\times m$, $\mathbb{R}^m\setminus\{\vec{0}\}\ni\vec{n}$ – фіксований вектор. Знайти локальні екстремуми функції $f(\vec{x})=\big(A\vec{x},\vec{x}\big)$, $\vec{x}\in\mathbb{R}^m$, за умов

$$\vec{x}\perp\vec{n},\qquad \|\vec{x}\|=1$$

у таких випадках:

1) серед власних ортонормованих векторів $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_m$ матриці A існують такі $\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_k$, $1\le k\le m-1$, що при всіх $i=1,2,\ldots,k:\ \vec{e}_i\perp\vec{n}$;
2) для всіх $k=1,2,\ldots,m:\ \big(\vec{n},\vec{e}_k\big)\ne 0$.

2.11 Екстремум функції на множині

Нехай G – відкрита множина в $(\mathbb{R}^m,\,\rho)$, функція $f:G\to\mathbb{R}$ неперервна на компактній множині $A\subset G$. За теоремою Вейєрштрасса функція f у деяких точках множини A набуває своїх найбільшого і найменшого значень (екстремумів). Якщо точка екстремуму є внутрішньою точкою множини A, то вона є точкою локального екстремуму. Якщо точка екстремуму належить межі множини A, що описується рівняннями зв'язку (2.4) при $s < m$, то вона є точкою умовного локального екстремуму.

Приклад. У множині $A = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 \leq 8\}$ знайти точки, найближчі до точки $\vec{x}^{\,0} = (0, 0, 3)$ і найвіддаленіші від неї.

⌈ Неперервна функція $f(x_1, x_2, x_3) = \|\vec{x} - \vec{x}^{\,0}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - 3)^2}$ має екстремуми у тих самих точках компактної множини A, що й функція $g(x_1, x_2, x_3) = f^2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - 3)^2$. Остання функція диференційовна на $\mathbb{R}^3$ і більш зручна для дослідження. Функція g має єдину критичну точку $(0, 0, 3) \notin A$. Знайдемо критичні точки функції Лагранжа

$$F(x_1, x_2, x_3) = \|\vec{x} - \vec{x}^{\,0}\|^2 + \lambda(x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 - 8)$$

за умови зв'язку $x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 = 8$. Ці точки знаходяться з системи рівнянь

$$\begin{cases} 2(1+\lambda)x_1 & = 0 \\ 2(1+2\lambda)x_2 & = 0 \\ 2(x_3 - 3) + 8\lambda x_3 & = 0 \\ x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 & = 8 \end{cases}.$$

Ця система має розв'язки $(\pm 2, 0, -1)$ при $\lambda = -1$, $(0, 0, \pm\sqrt{2})$ при $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\}$. Оскільки

$$f(0, 0, \sqrt{2}) = 3 - \sqrt{2} < f(0, 0, -\sqrt{2}) = 3 + \sqrt{2} < f(\pm 2, 0, -1) = 2\sqrt{5},$$

то

$$\min_A f(x_1, x_2, x_3) = f(0, 0, \sqrt{2}) = 3 - \sqrt{2},$$
$$\max_A f(x_1, x_2, x_3) = f(\pm 2, 0, -1) = 2\sqrt{5}.$$
⌋

2.154. Знайти найбільше та найменше значення функції на вказаній множині A:

1) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 12x_1 + 16x_2, \quad A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 25\}$;
2) $f(x_1, x_2) = x_1 - 2x_2 - 3, \quad A = \{(x_1, x_2) \mid x_i \geq 0,\ i = 1, 2;\ x_1 + x_2 \leq 1\}$;
3) $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2, \quad A = \{(x_1, x_2) \mid |x_1| + |x_2| \leq 1\}$;
4) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3, \quad A = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq x_3 \leq 1\}$.

2.155. Знайти найбільше та найменше значення функції на вказаному m-вимірному кубі

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (x_1 + x_2 + \cdots + x_m)e^{-(x_1 + 2x_2 + \ldots + mx_m)},$$
$$0 \leq x_i \leq 2,\ 1 \leq i \leq m.$$

2.156. Яких розмірів ванна у формі прямокутного паралелепіпеда заданого об'єму V має найменшу площу поверхні?

2.157. Які розміри відкритої циліндричної ванни найбільшого об'єму, якщо вона має з напівкруглий поперечний переріз і площу поверхні S?

2.158. Знайти найбільше та найменше значення функції на множині A:

1) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_2^2 - x_1 + 18x_2 - 4,\ A = [0;1] \times [0;1]$;
2) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1 - 8x_2 + 4,\ A = \{(x_1, x_2) \mid 0 \le x_1 \le x_2 \le 4\}$;
3) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2,\ A = \left\{(x_1, x_2) \mid \dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} = 1\right\}$, де $a > b > 0$;
4) $f(x_1, x_2) = e^{-x_1^2 - x_2^2}(2x_1^2 + 3x_2^2),\ A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 4\}$;
5) $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1 x_2}{2} - \dfrac{x_1^2 x_2}{6} - \dfrac{x_1 x_2^2}{8}$,
$A = \left\{(x_1, x_2) \mid x_i \ge 0,\ i = 1, 2;\ \dfrac{x_1}{3} + \dfrac{x_2}{4} \le 1\right\}$;
6) $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2^2)(x_1 - 1)^{2/3},\ A = \{(x_1, x_2) \mid x_2^2 \le x_1 \le 2\}$;
7) $f(x_1, x_2) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2},\ A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$;
8) $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2,\ A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 4\}$;
9) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1 x_2 - 4x_1 + 8x_2,\ A = [0;1] \times [0;2]$;
10) $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 (4 - x_1 - x_2)$,
$A = \{(x_1, x_2) \mid x_i \ge 0,\ i = 1, 2;\ x_1 + x_2 \le 6\}$.

2.159.

1) Прямий круговий конус має радіус основи R і висоту H. Знайти найбільший об'єм має вписаного у цей конус прямокутного паралелепіпеда.
2) З усіх трикутників із фіксованими основою та кутом при вершині знайти найбільший за площею.
3) Намет має форму циліндра з дном, завершеного вгорі прямим круговим конусом. При заданій площі поверхні намету S знайти його найбільший можливий об'єм.
4) Намет має форму циліндра з дном, завершеного вгорі прямим круговим конусом. При заданому об'ємі намету V знайти найменшу можливу площу його повної поверхні.
5) Намет має форму прямого кругового конуса з дном. Знайти найбільший можливий об'єм такого намета при заданій площі його поверхні S.
6) На площині, заданій рівнянням $3x_1 - 2x_3 = 0$, знайти точку, сума квадратів відстаней від якої до точок $A(1, -1, 1)$ і $B(2, -3, 4)$ найменша.
7) З усіх еліпсів із сумою осей $2L$ знайти найбільший за площею.

8) Знайти найкоротшу відстань від точки $A(-1, 0)$ до еліпса, заданого рівнянням $4x_1^2 + 9x_2^2 = 36$.
9) Площа трикутної ділянки землі з найменшою стороною a зменшена загородками при вершинах. Кожна загородка є дугою кола і має центр у відповідній вершині. Знайти, як можна зберегти найбільшу площу ділянки при заданій загальній довжині трьох загородок l $(2l < \pi a)$.
10) Трикутник ABC з вершинами $A\left(-\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$ і $B\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ вписано в еліпс, заданий рівнянням $x_1^2 + 4x_2^2 = 4$. Знайти таку вершину C, щоб площа трикутника ABC була найбільшою.

2.160.

1) Еліпс, заданий рівнянням $36x_1^2 + 24x_1x_2 + 29x_2^2 = 180$, має центр у точці $(0, 0)$. Знайти довжини півосей еліпса, досліджуючи екстремуми відстані від довільної точки еліпса до його центра.
2) Серед усіх трикутників, вписаних у круг радіуса R, знайти трикутник з найбільшою площею.
3) Серед усіх трикутників, що мають периметр $2p$, знайти трикутник з найбільшою площею.
4) Серед усіх пірамід, основою яких є заданий трикутник зі сторонами a, b, c, а висота дорівнює h, знайти піраміду з найменшою площею бічної поверхні.
5) Знайти точку площини, сума квадратів відстаней від якої до трьох заданих точок цієї площини $\vec{x}^{\,(i)}$, $1 \le i \le 3$, найменша.
6) Серед усіх чотирикутників, вписаних у коло радіуса R, знайти чотирикутник із найбільшою площею.
7) Знайти найбільшу відстань від точок поверхні, заданої рівнянням $2x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3 = 6$, до площини з рівнянням $x_3 = 0$.
8) На параболі, рівняння якої $16x_1^2 + 24x_1x_2 + 9x_2^2 - 73x_1 - 86x_2 + 111 = 0$, знайти точку, найближчу до прямої з рівнянням $x_1 + 2x_2 = 0$.
9) На еліпсі, заданому рівнянням $\frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} = 1$, знайти точки, найбільш і найменш віддалені від прямої з рівнянням $3x_1 + x_2 - 9 = 0$.
10) На еліпсоїді обертання, рівняння якого $\frac{x_1^2}{96} + x_2^2 + x_3^2 = 1$, знайти точки, найбільш і найменш віддалені від площини з рівнянням
$$3x_1 + 4x_2 + 12x_3 = 288.$$

Розділ 3

Невласні інтеграли. Інтеграли, що залежать від параметра

3.1 Невласні інтеграли. Означення та елементарні властивості

Нехай для деякого $a \in \mathbb{R}$ функція $f : [a; +\infty) \to \mathbb{R}$ інтегровна за Ріманом по будь-якому відрізку $[a; A] \subset [a; +\infty)$. Означимо функцію

$$\varphi(A) = \int\limits_a^A f(x)\,dx, \quad A \geq a.$$

Невласним інтегралом від функції f по необмеженому проміжку $[a; +\infty)$ (інтегралом першого роду) називається границя

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty} \varphi(A) = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_a^A f(x)\,dx. \tag{3.1}$$

Інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ називається *збіжним*, якщо числова границя в (3.1) існує. В іншому випадку інтеграл називається *розбіжним.*

Аналогічно визначається нтеграл $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$. За означенням

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx,$$

де a – довільне дійсне число.

Нехай функція $f : [a; b) \to \mathbb{R}$ необмежена в околі точки b і

$$\forall\, A \in [a; b) \;:\; f \in R([a; A]).$$

Покладемо

$$\varphi(A) = \int\limits_a^A f(x)\,dx, \quad A \in [a; b).$$

Невласним інтегралом від необмеженої функції f по відрізку $[a; b]$ (інтегралом другого роду) називається границя

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{A\to b-} \varphi(A) = \lim_{A\to b-} \int\limits_a^A f(x)\,dx. \tag{3.2}$$

Інтеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ називається *збіжним*, якщо числова границя в (3.2) існує. В іншому випадку інтеграл називається *розбіжним.*

Аналогічно визначається інтеграл від функції, необмеженої в околі лівого кінця проміжка інтегрування. Для функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, необмеженої в околі кожної з точок $z_1 < z_2 < \ldots < z_n$ та інтегровної по будь-якому відрізку з множини визначення, інтеграл по дійсній осі $(-\infty;+\infty)$ визначається рівністю

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx := \int_{-\infty}^{a_1} f(x)\,dx + \int_{a_1}^{z_1} f(x)\,dx + \int_{z_1}^{a_2} f(x)\,dx + \ldots + \\ + \int_{a_n}^{z_n} f(x)\,dx + \int_{z_n}^{a_{n+1}} f(x)\,dx + \int_{a_{n+1}}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

де $-\infty < a_1 < z_1 < a_2 < \ldots < a_n < z_n < a_{n+1} < +\infty$. Подібні означення використовуються для інтегралів по півосі або по відрізку з кількома точками, в околі яких підінтегральна функція необмежена.

Такі властивості невласних інтегралів, як лінійність, формули Ньютона – Лейбніца, інтегрування частинами, заміни змінної, є безпосередніми наслідками означення невласного інтеграла та відповідних формул для інтеграла Рімана.

Приклад 1. Дослідити збіжність інтеграла $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^\alpha}$.

⌈ Підінтегральна функція $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ неперервна на $[1;+\infty)$ при будь-якому $\alpha \in \mathbb{R}$. Тому вона інтегровна по будь-якому відрізку з $[1;+\infty)$. Для $A > 1$ обчислимо

$$\varphi(A) = \int_1^A \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \ln A, & \alpha = 1, \\ \dfrac{1 - A^{1-\alpha}}{\alpha - 1}, & \alpha \neq 1. \end{cases}$$

Тому

$$\lim_{A\to+\infty} \varphi(A) = \begin{cases} +\infty, & \alpha \le 1, \\ \dfrac{1}{\alpha - 1}, & \alpha > 1. \end{cases}$$

Отже, інтеграл збігається лише при $\alpha > 1$, і $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^\alpha} = \dfrac{1}{\alpha - 1}$. ⌋

Приклад 2. Дослідити збіжність інтеграла $\int\limits_0^{1} \dfrac{dx}{x^\alpha}$.

⌈ Підінтегральна функція $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ неперервна на $(0;1]$ при будь-якому $\alpha \in \mathbb{R}$ і необмежена в околі точки 0 при $\alpha > 0$. Тому вона інтегровна по будь-якому відрізку з $(0;1]$. Для $0 < A < 1$ обчислимо

$$\varphi(A) = \int_A^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} -\ln A, & \alpha = 1, \\ \dfrac{1 - A^{1-\alpha}}{1 - \alpha}, & \alpha \neq 1. \end{cases}$$

Тому

$$\lim_{A\to 0+} \varphi(A) = \begin{cases} +\infty, & \alpha \ge 1, \\ \dfrac{1}{1 - \alpha}, & \alpha < 1. \end{cases}$$

Отже, інтеграл збігається лише при $\alpha < 1$, і $\int\limits_0^{1} \dfrac{dx}{x^\alpha} = \dfrac{1}{1 - \alpha}$. ⌋

3.1. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$;

2) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

3.2. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^b},\ a>0,\ b>0$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$;

3) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$;

4) $\int\limits_0^1 \ln x\, dx$;

5) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.

3.3. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\, dx$;

2) $\int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx,\ n\in\mathbb{N}$.

3.4. Для заданих $a>0,\ b\in\mathbb{R}$ обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\, dx$;

2) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx\, dx$.

3.5. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\, dx$;

2) $\int\limits_0^{\pi/2} \ln(\cos x)\, dx$;

3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n},\ n\in\mathbb{N}$;

4) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\sin^3 x\, dx$.

3.6. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+2)^3}$;

2) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^4}\, dx$;

3) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$;

4) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{(x+1)^3}{x^5}\, dx$;

5) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^3}{1+x^8}\, dx$;

6) $\int\limits_3^{+\infty} \frac{dx}{(2x+3)^4}$;

7) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{(x+2)^2}{x^4}\, dx$;

8) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+8}$;

9) $\int\limits_0^{+\infty} x^3 e^{-x^4}\, dx$;

10) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{x+2}{x^2\sqrt{x}}\, dx$.

3.7. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_0^1 \frac{1+x}{\sqrt{x}}\,dx$;
2) $\int\limits_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x}}\,dx$;
3) $\int\limits_0^1 \frac{1-x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$;
4) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}$;
5) $\int\limits_0^1 x\ln x\,dx$;
6) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$;
7) $\int\limits_0^1 x\ln(1-x)\,dx$;
8) $\int\limits_2^3 \frac{dx}{\sqrt[4]{x-2}}$;
9) $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx$;
10) $\int\limits_0^2 (2-x)^{-3/5}\,dx$.

3.8. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{|1-2x|}}$;
2) $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{x(1-x)}}\,dx$;
3) $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$;
4) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x|e^{-x^2}\,dx$;
5) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{|x|}}{1+|x|^3}\,dx$;
6) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$;
7) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}\,dx$;
8) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{|1-x|}}$;
9) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$;
10) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$.

3.2 Невласні інтеграли від знакосталих функцій. Ознаки порівняння

Нехай для деякого $a \in \mathbb{R}$ функції $f, g : [a;+\infty) \to [0;+\infty)$ інтегровні за Ріманом по будь-якому відрізку $[a;A] \subset [a;+\infty)$.

Теорема 1. Нехай інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ збігається і $f(x) \le g(x)$, $x \ge a$. Тоді збігається інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Теорема 2. Нехай для деякого числа $c > 0$

$$f(x) \sim c \cdot g(x), \quad x \to +\infty.$$

Тоді інтеграли $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ та $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ одночасно або збігаються, або розбігаються.

Аналогічні теореми справедливі для невласних інтегралів від необмежених функцій.

Приклад 1. Дослідити збіжність інтеграла $\int\limits_e^{+\infty} x^a(\ln\ln x)^b\,dx$.

⌈ Маємо необмежений проміжок інтегрування та необмежену підінтегральну функцію

$$f(x) = x^a(\ln\ln x)^b,\ x \in (e;+\infty),$$

при $x \ge 3$ (коли $a > 0$, або $a = 0$ та $b > 0$) та при $e < x \le 3$ (коли $b < 0$). Функція f неперервна на $(e; +\infty)$ та інтегровна по кожному відрізку з цього проміжка. Згідно з означенням, треба дослідити збіжність обох інтегралів $\int\limits_e^3 f(x)\,dx$ та $\int\limits_3^{+\infty} f(x)\,dx$.

Розглянемо спочатку $\int\limits_e^3 f(x)\,dx$. Підінтегральна функція невід'ємна на $[e; +\infty)$ і

$$x^a(\ln\ln x)^b \sim e^a(\ln x - 1)^b \sim e^a(e^{-1}x - 1)^b = e^{a-b}(x-e)^b, \ x \to e+.$$

З теореми 2 та приклада 2 п. 3.1 випливає, що інтеграл $\int\limits_e^3 x^a(\ln\ln x)^b\,dx$ збігається лише при $b > -1$ і довільному $a \in \mathbb{R}$.

Розглянемо тепер $\int\limits_3^{+\infty} f(x)\,dx$. Оскільки для довільних $b \in \mathbb{R}$ і $\varepsilon > 0$

$$\frac{(\ln\ln x)^b}{x^\varepsilon} \to 0, \quad x \to +\infty,$$

то існує таке $x_0 \ge 3$, що

$$\forall\, a \in \mathbb{R}\ \forall\, x \ge x_0 : \ x^a(\ln\ln x)^b < x^{a+\varepsilon}.$$

Якщо $a < -1$, то можна вибрати $\varepsilon \in (0; -a-1)$. Тому з теореми 1 і приклада 1 п. 3.1 випливає збіжність інтеграла $\int\limits_3^{+\infty} x^a(\ln\ln x)^b\,dx$ при будь-якому $b \in \mathbb{R}$ і $a < -1$.

Зауважимо, що

$$\forall\, b \in \mathbb{R} : \ \ln x \cdot (\ln\ln x)^b \to +\infty, \ x \to +\infty.$$

Тому при будь-якому $b \in \mathbb{R}$ для деякого $x_1 > 3$ і довільного $a \ge -1$

$$\forall\, x \ge x_1 : \ \ln x \cdot (\ln\ln x)^b > 1, \quad x^a(\ln\ln x)^b \ge x^{-1}(\ln\ln x)^b > \frac{1}{x\ln x}.$$

Розбіжність інтеграла $\int\limits_{x_1}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}$ легко перевіряється за означенням. Тому за теоремою 1 інтеграл $\int\limits_3^{+\infty} x^a(\ln\ln x)^b\,dx$ розбігається при $a \ge -1$ і будь-якому $b \in \mathbb{R}$.

Тепер можна зробити висновок про те, що інтеграл $\int\limits_e^{+\infty} x^a(\ln\ln x)^b\,dx$ збігається тоді й лише тоді, коли $a < -1$ та $b > -1$. ⌋

3.9. Дослідити збіжність інтегралів:

1) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2+7x+1}{x^4+5x+3}\,dx;$

2) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} x^a e^{-x}\,dx, \quad a \in \mathbb{R};$

3) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{x^2+x+1}};$

4) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 ax}{1+x^2}\,dx, \quad a \in \mathbb{R};$

5) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} x^a e^{-x^2}\,dx, \quad a \in \mathbb{R};$

6) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^3\,dx}{2x^5+x^4+1};$

7) $\displaystyle\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)(x+2)}};$

8) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} x^{2011} e^{-x^2}\,dx;$

9) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^3}\,dx;$

10) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arcctg} ax}{x\sqrt{x}}\,dx,\ a\neq 0;$

11) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln\ln(e+x)}{x^{\frac{5}{4}}}\,dx;$

12) $\int\limits_3^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x\sqrt{\ln\ln x}};$

13) $\int\limits_1^{+\infty} e^{-x}\ln x\,dx;$

14) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-|x-10|}\,dx;$

15) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x\,dx}{x^2+x+\ln(1+x)}.$

16) $\int\limits_0^{1} x^a e^{-x}\,dx,\quad a\in\mathbb{R};$

17) $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1};$

18) $\int\limits_0^{1} \frac{x\,dx}{\ln x};$

19) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x+\ln x}{1+x^4}\,dx;$

20) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^a\ln^b x},\ \{a,b\}\subset\mathbb{R};$

21) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^a\operatorname{arctg} x}{1+x^b}\,dx,\quad \{a,b\}\subset\mathbb{R}.$

3.10. Нехай функція $f : [0,+\infty)\to\mathbb{R}$ монотонна і $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx$ збіжний. Довести, що

$$f(x)=O\left(\frac{1}{x}\right),\quad x\to+\infty.$$

3.11. Нехай функція $f : (0;1]\to\mathbb{R}$ монотонна і при деякому $a\in\mathbb{R}$ інтеграл $\int\limits_0^{1} x^a f(x)\,dx$ збігається. Довести співвідношення

$$\lim_{x\to 0+} x^{a+1}f(x)=0.$$

3.12. Нехай виконані умови задачі 3.11 при $a=0$. Довести, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int\limits_0^1 f(x)\,dx.$$

3.13. Дослідити збіжність інтегралів:

1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{|x-a_1|^{p_1}\cdot|x-a_2|^{p_2}\cdot\ldots\cdot|x-a_n|^{p_n}},$
$\{a_i\mid 1\le i\le n\}\subset\mathbb{R};\ a_i\neq a_j, i\neq j;\quad \{p_i\mid 1\le i\le n\}\subset\mathbb{R};$

2) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{|\sin x|}};$

3) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{1+x^a\sin^2 x},\ a>0.$

3.14. Неперервна функція $f\colon [1;+\infty) \to [0;+\infty)$ задана таким чином: для $n \in \mathbb{N},\ n > 1:\ f(n) = n,\ f(n - n^{-3}) = f(n + n^{-3}) = 0$; на проміжках $[n - n^{-3}; n]$ і $[n; n + n^{-3}]$ функція f лінійна. При $x \in [1;+\infty) \setminus \bigcup\limits_{n=2}^{\infty} [n - n^{-3}; n + n^{-3}]:\ f(x) = 0$. Дослідити збіжність інтеграла $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$. Звернути увагу на те, що підінтегральна функція не має границі при $x \to +\infty$ і навіть необмежена на півосі $[a;+\infty),\ a \geq 1$.

3.15. Для фіксованих сталих $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ дослідити збіжність інтегралів:

1) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\ln^a(1+x)}$;
2) $\int\limits_0^1 x^a \ln^b \frac{1}{x}\,dx$;
3) $\int\limits_0^{\pi/2} (\sin x)^a e^{-x^2}\,dx$;
4) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\cos x}}$;
5) $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^3}}$;
6) $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{1+\sqrt{x}}\,dx$;
7) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt[3]{x}}\,dx$;
8) $\int\limits_0^2 \sqrt{x}(2-x)^{-\frac{1}{3}}\,dx$;
9) $\int\limits_2^3 \frac{x\,dx}{\sqrt{x-2}}$;
10) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x}$.

3.16. Дослідити збіжність інтегралів:

1) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x \ln \frac{1}{x}}}$;
2) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{x}}\,dx$;
3) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1}\,dx$;
4) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{e^{\sqrt[3]{x}} - 1}$;
5) $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{\ln\ln x}$;
6) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3 + x}}$.

3.17. Для фіксованих сталих $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$ дослідити збіжність інтегралів:

1) $\int\limits_0^{+\infty} x^a e^{-x^3}\,dx$;
2) $\int\limits_0^{+\infty} x^a |x-2|^b\,dx$;
3) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{|\ln x|^a}$;
4) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln^2(1+x)}{x^a}\,dx$;
5) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{|\sin x|\,dx}{\exp(x^2 \sin^2 x)}$;
6) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^a\,dx}{\exp(x^b |\sin x|^c)}$;

7) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{|\sin x^a|}{x^b}\,dx$;

8) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{|\sin(x^a + \ln^b x)|}{x}\,dx$;

9) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^a|\sin x|^b}$;

10) $\int\limits_{1}^{+\infty} x^a|\sin x|^{x^b}\,dx$.

3.3 Невласні інтеграли від знакозмінних функцій. Абсолютна збіжність

Невласний інтеграл (3.1) називається *абсолютно збіжним*, якщо збігається інтеграл

$$\int\limits_{a}^{+\infty} |f(x)|\,dx. \tag{3.3}$$

Абсолютно збіжний інтеграл збігається.

Збіжний невласний інтеграл (3.1) називається *умовно збіжним*, якщо розбігається інтеграл (3.3).

Ознака Діріхле. Нехай функції $f : [a;+\infty) \to \mathbb{R}$, $g : [a;+\infty) \to \mathbb{R}$ задовольняють умови:

1) $\exists\, C \in \mathbb{R}\ \forall\, A > a :\ \left|\int\limits_{a}^{A} f(x)\,dx\right| \le C$;

2) функція g монотонна на $[a;+\infty)$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

Тоді інтеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ збігається.

Ознака Абеля. Нехай функції $f : [a;+\infty) \to \mathbb{R}$, $g : [a;+\infty) \to \mathbb{R}$ задовольняють умови:

1) інтеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ збігається;

2) функція g монотонна на $[a;+\infty)$;

3) $\exists\, C > 0\ \forall\, x \ge a : |g(x)| \le C$.

Тоді інтеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ збігається.

Для невласних інтегралів від необмежених функцій так само можна ввести поняття абсолютної збіжності. Для інтегралів від знакозмінних необмежених функцій справедливі відповідні властивості і ознаки збіжності.

Приклад 1. *Інтеграл Діріхле*

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

збігається умовно.

⌈ Підінтегральна функція має границю при $x \to 0+$. Тому особливості в точці 0 немає. Інтеграл Діріхле є невласним інтегралом першого роду. Для довільного додатного числа A позначимо $M_A = [0;A] \cap \bigcup\limits_{n\ge0} \left[\frac{\pi}{6} + n\pi; \frac{5\pi}{6} + n\pi\right]$. Множина M_A – це скінченне об'єднання диз'юнктних відрізків, кожний з яких, за винятком хіба що крайніх, має довжину $\frac{2\pi}{3}$. Тоді

$$\int_0^A \frac{|\sin x|}{x}\,dx > \int_{M_A} \frac{|\sin x|}{x}\,dx > \frac{1}{2}\int_{M_A} \frac{dx}{x} \to +\infty,\ A \to +\infty.$$

Таким чином, інтеграл Діріхле не збігається абсолютно.

Для доведення збіжності інтеграла Діріхле досить перевірити збіжність інтеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$. За формулою інтегрування частинами

$$\forall\, A > 1: \quad \int\limits_1^A \frac{\sin x}{x}\,dx = \cos 1 - \frac{\cos A}{A} - \int\limits_1^A \frac{\cos x}{x^2}\,dx.$$

Оскільки $\lim\limits_{A\to+\infty} \frac{\cos A}{A} = 0$ та $\int\limits_1^A \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ збігається абсолютно за ознакою порівняння, то інтеграл Діріхле збігається.

Інший спосіб доведення збіжності полягає у використанні ознаки Діріхле:

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = \frac{1}{x}, \quad x \ge 1.$$

⌋

Приклад 2. Дослідити збіжність інтеграла

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sin x \cos 2x}{x} \cdot \left(\frac{x-1}{x}\right)^x dx. \tag{3.4}$$

⌈ Зауважимо, що $\sin x \cos 2x = \frac{1}{2}(\sin 3x - \sin x)$. Для кожного натурального n

$$\int\limits_{2n\pi}^{(2n+1/4)\pi} |\sin 3x - \sin x|\,dx = \int\limits_{2n\pi}^{(2n+1/4)\pi} \sin 3x\,dx - \int\limits_{2n\pi}^{(2n+1/4)\pi} \sin x\,dx = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{3}.$$

Крім того,

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x-1}{x}\right)^x = e^{-1}.$$

Тому для деякого $n_0 \in \mathbb{N}$

$$\forall\, n \ge n_0: \quad \int\limits_{2n\pi}^{(2n+1/4)\pi} \frac{|\sin 3x - \sin x|}{x} \left(\frac{x-1}{x}\right)^x dx \ge \frac{4(\sqrt{2}-1)}{3e(8n+1)}.$$

З цієї оцінки випливає, що

$$\int_2^A \frac{|\sin x \cos 2x|}{x} \cdot \left(\frac{x-1}{x}\right)^x dx \to +\infty, \quad A \to +\infty,$$

тобто інтеграл (3.4) не збігається абсолютно.

Інтеграли

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx \quad \text{і} \quad \int_2^{+\infty} \frac{\sin 3x}{x}\,dx$$

збігаються за ознакою Діріхле. Функція $g(x) = \left(\dfrac{x-1}{x}\right)^x$ монотонно зростає на $[2; +\infty)$ і обмежена, оскільки неперервна і має числову границю при $x \to +\infty$. За ознакою Абеля інтеграл (3.4) збігається.

Таким чином, інтеграл (3.4) збігається умовно. ⌋

Приклад 3. Інтеграл Фруллані. Нехай $f \in C([0; +\infty))$ і при кожному $A > 0$ збігається інтеграл $\int\limits_A^{+\infty} \dfrac{f(x)}{x}\,dx$. Тоді для довільних додатних a, b

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x}\,dx = f(0)\ln\frac{a}{b}.$$

⌈ Згідно з припущенням, при кожному $A > 0$ за формулою заміни змінної

$$\int\limits_A^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x}\,dx =$$

$$= \int\limits_A^{+\infty} \frac{f(bx)}{x}\,dx - \int\limits_A^{+\infty} \frac{f(ax)}{x}\,dx = \int\limits_{bA}^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx - \int\limits_{aA}^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx = \int\limits_{bA}^{aA} \frac{f(x)}{x}\,dx.$$

За теоремою про середнє для інтеграла Рімана при кожному $A > 0$ існує таке $\theta(A)$ на проміжку з кінцями в точках aA, bA, що

$$\int\limits_{bA}^{aA} \frac{f(x)}{x}\,dx = f(\theta(A)) \int\limits_{bA}^{aA} \frac{dx}{x} = f(\theta(A))\ln\frac{a}{b}.$$

Тому

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x}\,dx = \lim_{A\to 0+} \int\limits_A^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x}\,dx = f(0)\ln\frac{a}{b}.$$

⌋

3.18. Нехай функція $f : [0; +\infty) \to \mathbb{R}$ визначається співвідношенням

$$f(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad x \in [n-1; n),\ n \in \mathbb{N}.$$

Довести, що $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx$ збігається умовно. Побудувати графік функції f.

3.19. Довести умовну збіжність інтеграла

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx.$$

Побудувати графік підінтегральної функції.

3.20. Довести збіжність інтеграла

$$\int\limits_1^{+\infty} x^a \cos(x^3)\,dx, \quad a < 2.$$

Чи збігається цей інтеграл абсолютно?

3.21. Дослідити абсолютну та умовну збіжність інтегралів:

1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+1000}\,dx$;

2) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\,dx$;

3) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin(\ln x)}{x\ln x}\,dx$;

4) $\int\limits_0^{+\infty} x^2\cos(e^x)\,dx$;

5) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\sin x}{1+x}\,dx$;

6) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\sin x}{1+x^2}\,dx$;

7) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x\cdot\cos 2x}{1+x^2}\,dx$;

8) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(x+x^{-1})}{x}\,dx$.

3.22. Довести збіжність інтегралів:

1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$; 2) $\int\limits_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$; 3) $\int\limits_0^{+\infty} x^3\sin(e^x)\,dx$.

Побудувати ескізи графіків підінтегральних функцій.

3.23. Довести збіжність інтегралів:

1) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$;

2) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\ln(1+x)}\,dx$;

3) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln^{100} x\cdot\sin x}{1+x}\,dx$;

4) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}\cos x}{1+x}\,dx$;

5) $\int\limits_0^{+\infty} \sin(x^3)\,dx$;

6) $\int\limits_0^{+\infty} x\cos(x^4)\,dx$;

7) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{(\operatorname{arctg}\sqrt{x})\cdot\sin x}{x}\,dx$;

8) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{1+\sqrt{x}+x}\,dx$;

9) $\int\limits_0^{+\infty} e^{\sqrt{x}}\cdot\sin(e^x)\,dx$;

10) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x\cdot\ln x}{1+x+\ln x}\,dx$.

3.24. Довести збіжність інтеграла

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\operatorname{arctg} x\,dx.$$

Чи збігається цей інтеграл абсолютно?

3.25. Довести збіжність інтегралів:

1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^x\sin x}{x(e^x+1)}\,dx$;

2) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\left(\frac{x+1}{x}\right)^x\,dx$.

3.26. Довести збіжність інтегралів:

1) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x\cdot\sin x}{x(\ln x+1)}\,dx$;

2) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{(x^2+1)\cos x}{x(x^2-10x+26)}\,dx$;

3) $\int\limits_0^{+\infty} \operatorname{arctg} x \cdot \sin(x^2)\,dx$;

4) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cdot\sin(x+1)}{(x+1)(\sqrt{x}+1)}\,dx$;

5) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2}\,dx$;

6) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}}\,dx$;

7) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\cdot \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\right)\,dx$;

8) $\int\limits_0^{+\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{2}}\right)\cdot\sin(x^2)\,dx$;

9) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^x+1}{e^x}\cdot\sin(x^2)\,dx$;

10) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\cdot\left(\frac{x-1}{x}\right)^x\,dx$.

3.27. За допомогою ознаки Діріхле для невласних інтегралів другого роду довести збіжність інтегралів:

1) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{1}{x}\cdot\sin\frac{1}{x}\,dx$;

2) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{1}{x^{3/2}}\cos\frac{1}{x}\,dx$.

3.28. За допомогою ознаки Абеля для невласних інтегралів другого роду довести збіжність інтегралів:

1) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{e^x}{x}\cdot\sin\frac{1}{x}\,dx$;

2) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x)\,dx$.

3.29. Для довільних чисел $a > 0,\ b > 0$ обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos bx-\cos ax}{x}\,dx$;

2) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin bx^2-\sin ax^2}{x}\,dx$;

3) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin b\sqrt{x}-\sin a\sqrt{x}}{x}\,dx$;

4) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos b\sqrt{x}-\cos a\sqrt{x}}{x}\,dx$.

3.30. Дослідити збіжність інтеграла

$$\int\limits_0^{+\infty} (-1)^{[x^2]}\,dx.$$

3.31. Чи випливає зі збіжності інтеграла $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ збіжність інтеграла $\int\limits_1^{+\infty} f^3(x)\,dx$? Навести відповідні приклади.

3.32. Дослідити збіжність інтегралів:

1) $\int\limits_0^{+\infty} \cos(x^3-x)\,dx$;

2) $\int\limits_0^{+\infty} \sin(x\ln x)\,dx$;

3) $\int\limits_0^{+\infty} \sin(x^p+ax+b)\,dx$, $p > 1,\ \{a,b\}\subset\mathbb{R}$.

3.4 Власні інтеграли, що залежать від параметра

Нехай $f : [a;b] \times M \to \mathbb{R}$ і при кожному значенні $\alpha \in M$ функція $f(\cdot, \alpha) \in R([a;b])$. Тоді визначена функція

$$I(\alpha) = \int\limits_a^b f(x, \alpha)\, dx, \quad \alpha \in M.$$

Властивості функції I описуються наведеними нижче теоремами.

Теорема 1 (про неперервність). Нехай $f \in C([a;b] \times [c;d])$. Тоді $I \in C([c;d])$.

Теорема 2 (про граничний перехід під знаком інтеграла). Нехай M – деяка непорожня множина в метричному просторі, α_0 – її гранична точка, $g : [a;b] \to \mathbb{R}$. Припустимо, що

1) $\forall\, \alpha \in M : \ f(\cdot, \alpha) \in R([a;b])$; 2) $\sup\limits_{x \in [a;b]} |f(x, \alpha) - g(x)| \to 0, \ \alpha \to \alpha_0$.

Тоді $g \in R([a;b])$ та $I(\alpha) \to \int\limits_a^b g(x)\, dx, \ \alpha \to \alpha_0$.

Теорема 3 (про диференційовність за параметром). Нехай функція $f : [a;b] \times [c;d] \to \mathbb{R}$ задовольняє умови:

1) $\forall\, \alpha \in [c;d] : \ f(\cdot, \alpha) \in R([a;b])$;

2) $\forall\, (x, \alpha) \in [a;b] \times [c;d]\ \exists\, f_2'(x, \alpha)$;

3) $f_2' \in C\big([a;b] \times [c;d]\big)$.

Тоді для всіх $\alpha \in [c;d]$ існує $I'(\alpha)$ і справджується *формула Лейбніца*

$$I'(\alpha) = \int\limits_a^b f_2'(x, \alpha)\, dx, \quad \alpha \in [c;d].$$

Теорема 4 (про інтегровність за параметром). Нехай $f \in C([a;b] \times [c;d])$. Тоді $I \in R([c;d])$ та

$$\int\limits_c^d I(\alpha)\, d\alpha = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x, \alpha)\, d\alpha \right) dx.$$

Твердження теорем 1 і 3 можна узагальнити у випадку залежності проміжка інтегрування від параметра.

Теорема 5. Нехай $f \in C([a;b] \times [c;d])$, $\{\varphi, \psi\} \subset C([c;d]; [a;b])$. Тоді функція

$$I(\alpha) = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f(x, \alpha)\, dx$$

є неперервною на $[c;d]$.

Теорема 6 (формула Лейбніца). Нехай функції $f : [a;b] \times [c;d] \to \mathbb{R}$ і функції $\varphi, \psi : [c;d] \to [a;b]$ задовольняють умови:

1) $f \in C^{(1)}([a;b] \times [c;d])$;

2) $\forall\, \alpha \in [c;d]\ \exists\, \varphi'(\alpha), \ \exists\, \psi'(\alpha)$.

Тоді для всіх $\alpha \in [c;d]$ функція

$$I(\alpha) = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f(x, \alpha)\, dx$$

має похідну

$$I'(\alpha) = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f_2'(x,\alpha)\,dx + f\big(\psi(\alpha),\alpha\big)\psi'(\alpha) - f\big(\varphi(\alpha),\alpha\big)\varphi'(\alpha),\ \ \alpha \in [c;d].$$

Приклад 1. Обчислити інтеграл

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\ln(1-\alpha^2\cos^2 x)}{\cos x}\,dx, \quad |\alpha| < 1.$$

⌈ Зауважимо, що

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1-\alpha^2\cos^2 x)}{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\,\alpha^2\cos^2 x}{\cos x} = 0.$$

Тому підінтегральну функцію

$$f(x,\alpha) = \frac{\ln(1-\alpha^2\cos^2 x)}{\cos x}$$

можна доозначити за неперервністю в точках $\left(\dfrac{\pi}{2},\alpha\right)$ значенням 0. При цьому похідна

$$f_2'(x,\alpha) = -\frac{2\alpha\cos x}{1-\alpha^2\cos^2 x}$$

неперервна на $[0;\frac{\pi}{2}] \times (-1;1)$. Для будь-якого $a \in (0;1)$ за теоремою 3

$$I'(\alpha) = -2\alpha\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1-\alpha^2\cos^2 x}\,dx = -\frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}}\arcsin\alpha,\ \ \alpha\in[-a;a].$$

З урахуванням рівності $I(0)=0$ маємо $I(\alpha) = -\arcsin^2\alpha$, $|\alpha|<1$.

До цієї відповіді також можна прийти, застосувавши теорему 4 до неперервної функції f_2' :

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{\pi/2}\left(\int\limits_0^{\alpha} f_2'(x,t)\,dt\right)dx = \int\limits_0^{\alpha}\left(\int\limits_0^{\pi/2} f_2'(x,t)\,dx\right)dt =$$

$$= -\int\limits_0^{\alpha} \frac{2\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = -\arcsin^2\alpha,\ \ |\alpha|<1.$$

⌋

3.33. Обчислити границі:

1) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}\,dx;$

2) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int\limits_{0}^{2} x^2\cos\alpha x\,dx;$

3) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int\limits_{\alpha}^{1+\alpha}\dfrac{dx}{1+x^2+\alpha^2}.$

3.34. Нехай $f \in C([0;1])$, $f(x) > 0$, $x \in [0;1]$. Дослідити неперервність функції

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{\alpha f(x)}{x^2 + \alpha^2}\, dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

3.35. Дослідити неперервність функцій:

1) $I(\alpha) = \int_0^1 (x+1)^{\alpha x}\, dx, \quad \alpha \in \mathbb{R};$

2) $I(\alpha) = \int_1^2 \frac{dx}{\ln(1 + \alpha^4 x + x^2)}, \quad \alpha \in \mathbb{R};$

3) $I(\alpha) = \int_0^1 \frac{dx}{e^x - x + \alpha}, \quad \alpha > 0;$

4) $I(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\alpha x - \sin x + 1}, \quad \alpha > 0;$

5) $I(\alpha) = \int_0^{\pi/4} \cos(\alpha^2 - x^2)\, dx, \quad \alpha \in \mathbb{R};$

6) $I(\alpha) = \int_0^{1/2} \arccos(\alpha x^2)\, dx, \quad |\alpha| \le 4;$

7) $I(\alpha) = \int_0^{\pi^2/16} \operatorname{tg}(\alpha + \sqrt{x})\, dx, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{4};$

8) $I(\alpha) = \int_1^2 (\alpha x)^{\frac{x}{\alpha}}\, dx, \quad \alpha > 0;$

9) $I(\alpha) = \int_\pi^{2\pi} x^{\sin \alpha x}\, dx, \quad \alpha \in \mathbb{R};$

10) $I(\alpha) = \int_0^1 \operatorname{sh}(\alpha x + \alpha^2 x^2)\, dx, \quad \alpha \in \mathbb{R};$

11) $I(\alpha) = \int_2^3 \operatorname{ch}\left(\frac{x^3}{1+\alpha^4}\right) dx, \quad \alpha \in \mathbb{R};$

12) $I(\alpha) = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sqrt{\arcsin(\alpha \cdot \sin x)}\, dx, \quad 0 \le \alpha \le 1.$

3.36. Обчислити границю

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \int_0^{\pi/2} e^{-\alpha \sin x}\, dx.$$

3.37. Застосувати теорему про диференціювання інтеграла за параметром до функції I :

1) $I(\alpha) = \int\limits_0^1 \dfrac{\sin(\alpha x^2)}{1+\alpha x}\, dx, \quad \alpha > 0;$

2) $I(\alpha) = \int\limits_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} \exp(\alpha\sqrt{1-x^2})\, dx, \quad \alpha \in \mathbb{R};$

3) $I(\alpha) = \int\limits_{\alpha}^{\alpha^2} \exp(-\alpha x^2)\, dx, \quad \alpha \in \mathbb{R};$

4) $I(\alpha) = \int\limits_0^{\alpha} \dfrac{\ln(1+\alpha x)}{x+1}\, dx, \quad \alpha > 0;$

5) $I(\alpha) = \int\limits_{a+\alpha}^{b+\alpha} \dfrac{\sin \alpha x}{x}\, dx, \quad \alpha \ge 0,\ \{a, b\} \subset (0; +\infty).$

3.38. Чи існує правостороння похідна функції

$$I(\alpha) = \int\limits_0^1 \ln\sqrt{x^2+\alpha^2}\, dx$$

у точці $\alpha = 0$? Чи можна її обчислити диференціюванням за параметром під знаком інтеграла?

3.39. Чи можна здійснити граничний перехід під знаком інтеграла у виразі

$$\lim_{\alpha\to 0} \int_0^1 \frac{x}{\alpha^2} \exp\left(-\frac{x^2}{\alpha^2}\right)\, dx?$$

3.40. Обчислити границю

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{dx}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}.$$

3.41. Нехай $f \in C\big((0; +\infty)\big)$. Довести, що при довільних додатних a, b справджується рівність:

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{\alpha} \int\limits_a^b \left(f(x+\alpha) - f(x)\right)\, dx = f(b) - f(a).$$

3.42. Нехай послідовність функцій $\{\varphi_n :\ n \ge 1\} \subset R\big([-1; 1]\big)$ задовольняє умови:

а) $\varphi_n(x) \ge 0,\ x \in [-1; 1],\ n \in \mathbb{N};$

б) $\forall\, \varepsilon \in (0; 1):\ \varphi_n(x) \underset{\{t:\ \varepsilon \le |t| \le 1\}}{\rightrightarrows} 0,\ n \to \infty;$

в) $\int\limits_{-1}^{1} \varphi_n(x)\,dx \to 1,\ n \to \infty.$

Для довільної функції $f \in C\big([-1;1]\big)$ довести співвідношення:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-1}^{1} f(x)\varphi_n(x)\,dx = f(0).$$

3.43. Нехай $f \in C(\mathbb{R})$. Знайти другу похідну функцій:

1) $I(\alpha) = \int\limits_{a}^{b} f(x)\,|x-\alpha|\,dx, \quad \{a,b\} \subset \mathbb{R},\ a<b;$

2) $I(\alpha) = \int\limits_{0}^{h} \left(\int\limits_{0}^{h} f(x_1 + x_2 + \alpha)\,dx_1 \right) dx_2, \quad h>0.$

3.44. Довести неперервність функцій:

1) $I(\alpha) = \int\limits_{\alpha/2}^{\alpha} \sqrt{\arcsin(\alpha^2 \cdot \sin x)}\,dx, \quad 0 \le \alpha \le 1;$

2) $I(\alpha) = \int\limits_{\alpha^2}^{\alpha^3} \operatorname{ch} \frac{x^2}{1+\alpha^4}\,dx, \quad \alpha \in \mathbb{R};$

3) $I(\alpha) = \int\limits_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} \operatorname{sh}(\alpha x + \alpha^3 x^3)\,dx, \quad \alpha \in \mathbb{R};$

4) $I(\alpha) = \int\limits_{\sqrt{\alpha}}^{\alpha} x^{\cos \alpha x}\,dx, \quad \alpha > 0;$

5) $I(\alpha) = \int\limits_{3-\alpha}^{3+\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\alpha x} dx, \quad 0<\alpha<3;$

6) $I(\alpha) = \int\limits_{0}^{\alpha^2} \operatorname{tg}(\alpha + \sqrt[4]{x})\,dx, \quad 0 < \alpha < \frac{9}{16};$

7) $I(\alpha) = \int\limits_{\alpha}^{1/2} \arccos(\alpha x^2)\,dx, \quad |\alpha| < \frac{1}{2};$

8) $I(\alpha) = \int\limits_{0}^{\ln(1+\alpha^2)} \cos(\alpha^4 - x^2)\,dx, \quad \alpha \in \mathbb{R};$

9) $I(\alpha) = \int\limits_{\alpha/2}^{2\alpha} \frac{dx}{x\sqrt{\alpha} - \sin x + 1}, \quad \alpha > 0;$

10) $I(\alpha) = \int\limits_{\sqrt{\alpha}}^{\alpha^2} \frac{dx}{e^x + x + \alpha}\,dx, \quad \alpha > 0.$

3.45. Довести диференційовність функції I на вказаному проміжку:

1) $I(\alpha) = \int\limits_0^{2\alpha} \dfrac{dx}{2^x + x + \alpha}, \quad \alpha > 0;$

2) $I(\alpha) = \int\limits_{\alpha/3}^{\alpha} \dfrac{dx}{x\sqrt{\alpha} + \cos x + 1}, \quad \alpha > 0;$

3) $I(\alpha) = \int\limits_0^{\operatorname{tg}\alpha} \cos(\alpha^2 + x^2)\, dx, \quad |\alpha| < \dfrac{1}{2};$

4) $I(\alpha) = \int\limits_{\alpha}^{1/2} \arcsin(\alpha x^2)\, dx, \quad |\alpha| < \dfrac{1}{2};$

5) $I(\alpha) = \int\limits_0^{\alpha^2} \operatorname{ctg}(\alpha + \sqrt[4]{x})\, dx, \quad 0 < \alpha < \dfrac{9}{16};$

6) $I(\alpha) = \int\limits_{\sqrt{\alpha}}^{\alpha} x^{\sin\alpha x}\, dx, \quad \alpha > 0;$

7) $I(\alpha) = \int\limits_{1-\alpha}^{1+\alpha} (x+\alpha)^{\alpha x}\, dx, \quad 0 < \alpha < 1;$

8) $I(\alpha) = \int\limits_0^{\cos\alpha} \operatorname{sh}(\alpha^2 x^2)\, dx, \quad \alpha \in \mathbb{R};$

9) $I(\alpha) = \int\limits_{\alpha^2}^{\alpha^3} \dfrac{\operatorname{ch} x^2}{1 + \alpha^2 x^2}\, dx, \quad \alpha \in \mathbb{R};$

10) $I(\alpha) = \int\limits_{\alpha/2}^{\alpha} \sqrt{\arccos(\alpha \cdot \sin x)}\, dx, \quad 0 < \alpha < 1.$

3.46. Нехай $f \in C([0;1])$, $g \in C^{(1)}(\mathbb{R})$, $h \in C^{(2)}(\mathbb{R})$. Довести, що функції на множині визначення задовольняють відповідні рівняння:

1) $u(x,t) = \dfrac{1}{2}\left(h(x - at) + h(x + at)\right) + \dfrac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} g(v)\, dv,\ a \neq 0,$

рівняння коливання струни

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

і початкові умови:

$$u(x,0) = h(x), \quad u_2'(x,0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R};$$

2) $J_n(\alpha) = \dfrac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \cos(n\varphi - \alpha\sin\varphi)\, d\varphi, \quad n \in \mathbb{Z},\ \alpha \in \mathbb{R},$ рівняння

$$\alpha^2 J_n''(\alpha) + \alpha J_n'(\alpha) + (\alpha^2 - n^2) J_n(\alpha) = 0;$$

3) $u(\alpha) = \int\limits_0^1 K(\alpha, x) f(x)\, dx, \quad 0 \le \alpha \le 1$, де

$$K(\alpha, x) = \begin{cases} \alpha(1-x), & \alpha \le x, \\ x(1-\alpha), & \alpha > x, \end{cases}$$

рівняння

$$u''(\alpha) = -f(\alpha).$$

3.47. Користуючись формулою

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \int\limits_0^1 \frac{d\alpha}{1+\alpha^2 x^2}, \quad x \ne 0,$$

обчислити інтеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3.48. Застосовуючи теорему про інтегрування за параметром, обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_0^1 \frac{x^a - x^b}{\ln x}\, dx, \quad \{a, b\} \subset (0; +\infty)$;

2) $\int\limits_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^a - x^b}{\ln x}\, dx, \quad \{a, b\} \subset (0; +\infty)$;

3) $\int\limits_0^1 \cos\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^a - x^b}{\ln x}\, dx, \quad \{a, b\} \subset (0; +\infty)$.

Вказівка. Підінтегральні функції в точках 0 і 1 доозначаються за неперервністю.

3.49. Змінюючи порядок інтегрування, обчислити інтеграл

$$\int\limits_0^{\pi/2} I(\alpha)\, d\alpha, \ \text{ де } I(\alpha) = \int\limits_2^3 \frac{2x\, dx}{x^2 - \sin^2 \alpha}, \quad \alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

Звернути увагу на складність безпосереднього обчислення інтеграла $I(\alpha)$.

3.50. Нехай $f \in C(\mathbb{R})$. Знайти похідну порядку n функції

$$I(\alpha) = \int\limits_0^\alpha f(x)(\alpha - x)^{n-1}\, dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

3.51. Застосовуючи диференціювання за параметром, обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_0^{\pi/2} \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)\, dx, \quad ab \ne 0$;

2) $\int\limits_0^{\pi} \ln(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)\,dx, \quad |\alpha| \le 1;$

3) $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{\operatorname{arctg}(\alpha\cdot\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\,dx, \quad \alpha\in\mathbb{R}.$

3.5 Рівномірна збіжність невласних інтегралів

Нехай для деякого $a\in\mathbb{R}$ і множини M для функції $f:[a;+\infty)\times M\to\mathbb{R}$ при кожному значенні $\alpha\in M$ інтеграл

$$I(\alpha) := \int\limits_a^{+\infty} f(x,\alpha)\;dx \tag{3.5}$$

збігається. Інтеграл (3.5) називається *рівномірно збіжним* на множині M, якщо

$$\sup_{\alpha\in M}\left|I(\alpha) - \int\limits_a^{A} f(x,\alpha)\;dx\right| = \sup_{\alpha\in M}\left|\int\limits_A^{+\infty} f(x,\alpha)\;dx\right| \to 0, \quad A\to+\infty.$$

Критерій Коші. Інтеграл (3.5) збігається рівномірно на множині M тоді й лише тоді, коли

$$\forall\,\varepsilon>0 \quad \exists\,A_0>a \quad \forall\,A_1>A_0 \quad \forall\,A_2>A_0 \quad \forall\,\alpha\in M\ : \quad \left|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x,\alpha)\;dx\right| < \varepsilon.$$

Ознака Вейєрштрасса. Нехай функції $f : [a;+\infty)\times M\to\mathbb{R}$, $g : [a;+\infty)\to\mathbb{R}$ задовольняють умови:

1) $\forall\,x\ge a \quad \forall\,\alpha\in M : \quad |f(x,\alpha)|\le g(x);$

2) інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ збігається.

Тоді інтеграл (3.5) збігається рівномірно на множині M.

Ознака Діріхле. Нехай функції $f : [a;+\infty)\times M\to\mathbb{R}$, $g : [a;+\infty)\times M\to\mathbb{R}$ задовольняють умови:

1) $\exists\,C\ge 0 \quad \forall\,A>a \quad \forall\,\alpha\in M : \quad \left|\int\limits_a^{A} f(x,\alpha)\,dx\right| \le C;$

2) $\forall\,\alpha\in M$ функція $g(\cdot,\alpha)$ монотонна на $[a;+\infty)$;

3) $\sup\limits_{\alpha\in M}|g(x,\alpha)|\to 0,\ x\to+\infty.$

Тоді інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x,\alpha)\,g(x,\alpha)\;dx$ збігається рівномірно на множині M.

Ознака Абеля. Нехай функції $f : [a;+\infty)\times M\to\mathbb{R}$, $g : [a;+\infty)\times M\to\mathbb{R}$ задовольняють умови:

1) інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx$ збігається рівномірно на множині M;

2) $\forall\,\alpha\in M$ функція $g(\cdot,\alpha)$ монотонна на $[a;+\infty)$;

3) $\exists\, C \ge 0 \quad \forall\, x \ge a \quad \forall\, \alpha \in M: \quad |g(x,\alpha)| \le C.$

Тоді інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x,\alpha)\, g(x,\alpha)\; dx$ збігається рівномірно на множині M.

Означення рівномірно збіжного невласного інтеграла від необмеженої функції та відповідні ознаки аналогічні наведеним.

Приклад 1. Інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\sin\alpha^2 x^2}{x^2}\, dx$ збігається рівномірно на $\mathbb{R}$.

⌈ Дійсно,

$$\forall\, x \ge 1\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}: \ |f(x,\alpha)| = \left|\frac{\sin\alpha^2 x^2}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2} =: g(x).$$

Оскільки інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} g(x)\, dx$ збігається, рівномірна збіжність інтеграла $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\sin\alpha^2 x^2}{x^2}\, dx$ на $\mathbb{R}$ випливає з ознаки Вейєрштрасса. ⌋

Приклад 2. Інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \sin x^\alpha\, dx$ збігається рівномірно на множині $M = [\gamma; +\infty)$ при довільному $\gamma > 1$ і не збігається рівномірно на $(1; +\infty)$.

⌈ Позначимо $f(x,\alpha) := \alpha x^{\alpha-1}\sin x^\alpha$, $g(x,\alpha) := \dfrac{1}{\alpha x^{\alpha-1}}$, $(x,\alpha) \in [1; +\infty) \times [\gamma; +\infty)$. При цьому

$$\forall\, A > 1\ \forall\, \alpha \in [\gamma; +\infty): \ \left|\int\limits_1^A f(x,\alpha)\, dx\right| = |\cos 1 - \cos A^\alpha| \le 2 =: C,$$

при кожному фіксованому значенні $\alpha \in [\gamma; +\infty)$ функція $g(\cdot,\alpha)$ монотонно спадає на $[1; +\infty)$ і

$$\lim_{x\to+\infty}\sup_{\alpha\ge\gamma}\left|\frac{1}{\alpha x^{\alpha-1}}\right| = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\gamma x^{\gamma-1}} = 0.$$

За ознакою Діріхле інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \sin x^\alpha\, dx$ рівномірно збігається на множині $M = [\gamma; +\infty)$.

Оскільки для кожного $n \ge 1$

$$\sup_{\alpha>1}\left|\int\limits_{\sqrt[\alpha]{n\pi}}^{\sqrt[\alpha]{(n+1)\pi}} \sin x^\alpha\, dx\right| = \sup_{\alpha>1}\frac{1}{\alpha}\left|\int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} t^{\frac{1}{\alpha}-1}\sin t\, dt\right| \ge \sup_{\alpha>1}\frac{2}{\alpha}(n+1)^{\frac{1}{\alpha}-1} = 2,$$

то за критерієм Коші інтеграл не збігається рівномірно на $(1; +\infty)$. ⌋

Приклад 3. Інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x} e^{-\alpha x}\, dx$ збігається рівномірно на множині $M = [0; +\infty)$.

⌈ Позначимо

$$f(x,\alpha) := \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \ne 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}, \quad g(x,\alpha) := e^{-\alpha x}, \quad (x,\alpha) \in [0; +\infty) \times [0; +\infty).$$

Інтеграл Діріхле $\int\limits_0^{+\infty} f(x,\alpha)\, dx$ збігається рівномірно на множині $M = [0; +\infty)$, оскільки f від α насправді не залежить. При кожному фіксованому $\alpha \in [0; +\infty)$ функція $g(\cdot,\alpha)$

монотонно не зростає на проміжку $M = [0; +\infty)$ і

$$\sup_{x \geq 0} \sup_{\alpha \geq 0} |g(x, \alpha)| = 1.$$

Тому за ознакою Абеля інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x}\, dx$ збігається рівномірно на множині $M = [0; +\infty)$. ⌋

3.52. Дослідити рівномірну збіжність інтегралів на множині $M_i,\ i = 1, 2$:

1) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}, \quad M_1 = (1; +\infty),\ M_2 = [2; +\infty)$;

2) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}, \quad M_1 = (0; 1),\ M_2 = \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

3.53. Нехай $0 < a < b$. Довести, що інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x}\, dx$:

а) збігається рівномірно на відрізку $[a; b]$;
б) збігається нерівномірно на $[0; b]$.

3.54. Довести, що інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-|x-\alpha|}\, dx$:

а) збігається рівномірно на відрізку $[0; 1]$;
б) збігається нерівномірно на $[0; +\infty)$.

3.55. Довести, що *інтеграл Діріхле* $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx$:

а) збігається рівномірно на кожному відрізку, що не містить точку $\alpha = 0$;
б) збігається нерівномірно на кожному відрізку, що містить точку $\alpha = 0$.

3.56. Дати означення нерівномірної збіжності невласного інтеграла

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx$$

на проміжку $(c; d)$.

3.57. Довести, що інтеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + 1}$$

збігається нерівномірно на проміжку $(1; +\infty)$.

3.58. Довести рівномірну збіжність інтегралів на вказаній множині M за допомогою ознаки Вейєрштрасса:

1) $\int\limits_1^{+\infty} x^\alpha \exp(-x^\alpha)\, dx, \quad M = \left[\frac{1}{2}; 2\right]$;

2) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin \alpha x}{1+\alpha^2+x^\alpha}\,dx, \quad M = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right);$

3) $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^\alpha + x\sqrt{x}}, \quad M = \left(\frac{3}{2}; +\infty\right);$

4) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos \alpha^2 x\,dx, \quad M = \left[\frac{1}{100}; +\infty\right);$

5) $\int\limits_1^{2} \dfrac{dx}{(2-x)^\alpha}, \quad M = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right);$

6) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2}\,dx, \quad M = [-n; n],\ n \in \mathbb{N};$

7) $\int\limits_0^{1} \dfrac{e^{-\alpha x^2}\,dx}{(1-x^2)^\alpha}, \quad M = \left(0; \frac{2}{3}\right];$

8) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\sin \alpha x^2}{1+x^2}\,dx, \quad M = \mathbb{R};$

9) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{dx}{(x-\alpha)^2+2}, \quad M = [0; 1000];$

10) $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\ln^\alpha x}{x^{5/4}}\,dx, \quad M = [0; 50];$

11) $\int\limits_0^{2} \dfrac{x^\alpha\,dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}, \quad M = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right);$

12) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x^\alpha e^{-x}}{1+x}, \quad M = \left[-\frac{1}{2}; 2\right].$

3.59. Довести рівномірну збіжність інтегралів на вказаній множині M за допомогою ознаки Діріхле:

1) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin \alpha^2 x\,dx}{\alpha + x}, \quad M = \left[\frac{1}{3}; +\infty\right);$

2) $\int\limits_0^{1} x^{-\alpha} \sin \dfrac{1}{x}\,dx, \quad M = (0; 1);$

3) $\int\limits_0^{+\infty} \sin \alpha x^2\,dx, \quad M = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty);$

4) $\int\limits_0^{+\infty} x \sin \alpha x^3\,dx, \quad M = [2; +\infty);$

5) $\int\limits_0^{+\infty} \sin(e^x\alpha)\,dx, \quad M = (-\infty; -1];$

6) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x^2}{1 + x^\alpha}\,dx, \quad M = [1; +\infty);$

7) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{\ln x}, \quad M = \{\alpha \mid |\alpha| \geq 3\};$

8) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1 + \alpha x^2}{1 + x} \cos \alpha x^3\,dx, \quad M = [2; +\infty);$

9) $\int\limits_0^{1} \cos \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{(\sin x)^\alpha}, \quad M = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right);$

10) $\int\limits_0^{1} \sin \frac{1}{x-1} \cdot \frac{dx}{(1-x)^\alpha}, \quad M = (-\infty; 1);$

11) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{x - \sqrt{x} + 1}\,dx, \quad M = [1; 2];$

12) $\int\limits_0^{+\infty} \cos x^\alpha\,dx, \quad M = \left[\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right].$

3.60. Довести рівномірну збіжність інтегралів на вказаній множині M за допомогою ознаки Абеля:

1) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos \alpha^2 x}{\sqrt{x}} \cdot \operatorname{arctg} \alpha x\,dx, \quad M = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right);$

2) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \cdot e^{-\alpha x}\,dx, \quad M = [0; +\infty);$

3) $\int\limits_0^{+\infty} \sin x^2 \cdot \operatorname{arctg} \alpha x\,dx, \quad M = \mathbb{R};$

4) $\int\limits_1^{+\infty} e^{-\alpha x} \cdot \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx, \quad M = [0; +\infty);$

5) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1 + \alpha x}{1 + x}\,dx, \quad M = \left[\frac{1}{2}; 2\right];$

6) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cdot \frac{\sin x \sin \alpha x}{x}\,dx, \quad M = [2; +\infty);$

7) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \cdot \operatorname{arctg}(\alpha \operatorname{tg} x)\,dx, \quad M = \mathbb{R};$

8) $\int\limits_{10}^{+\infty} \frac{\sin x^2}{\ln(\alpha x)}\,dx, \quad M = \left[\frac{1}{5}; +\infty\right);$

9) $\int\limits_0^{+\infty} \cos x^2 \cdot \dfrac{1+\sqrt{\alpha x}}{1+\sqrt{x}}\, dx, \quad M = [0;3];$

10) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin \alpha x}{x} \cdot \operatorname{arcctg} \dfrac{x}{\alpha}\, dx, \quad M = [\sqrt{2}; +\infty);$

11) $\int\limits_2^{+\infty} \dfrac{\cos \alpha x}{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{\ln(x+\alpha)}{\ln x}\, dx, \quad M = \left[-\frac{3}{2}; -1\right];$

12) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin \alpha x}{\sqrt[4]{x}} \cdot \dfrac{x + \alpha \ln(1+x)}{x+1}\, dx, \quad M = [1;2].$

3.61***.** Сформулювати відповідне означення рівномірної збіжності невласного інтеграла зі змінною особливістю та довести рівномірну збіжність наведених інтегралів на множині M :

1) $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{|x-\alpha|^\alpha},\ M = \left[\dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{3}\right];$

2) $\int\limits_0^1 \dfrac{\sin \alpha x}{\sqrt{|x-\alpha|}}\, dx,\ M = [0;1];$

3) $\int\limits_1^2 \dfrac{dx}{|\ln \alpha x|^\alpha},\ M = \left[\dfrac{1}{2}; \dfrac{2}{3}\right].$

3.6 Властивості невласних інтегралів, що залежать від параметра

Нехай $f : [a;+\infty) \times M \to \mathbb{R}$ і при кожному значенні $\alpha \in M$ інтеграл

$$I(\alpha) := \int\limits_a^{+\infty} f(x,\alpha)\, dx \tag{3.6}$$

збігається. Властивості функції $I : M \to \mathbb{R}$ описуються наведеними нижче теоремами.

Теорема 1 (про неперервність). Нехай $f \in C([a;+\infty) \times [c;d])$ і інтеграл (3.6) збігається рівномірно на $[c;d]$. Тоді $I \in C([c;d])$.

Теорема 2 (про граничний перехід під знаком інтеграла). Нехай M – деяка множина в метричному просторі, α_0 – її гранична точка, функції $f : [a;+\infty) \times M \to \mathbb{R}$ і $g : [a;+\infty) \to \mathbb{R}$ задовольняють умови:

1) $\forall A > a : \sup\limits_{x \in [a;A]} |f(x,\alpha) - g(x)| \to 0,\ \alpha \to \alpha_0;$

2) інтеграл (3.6) збігається рівномірно на множині M.

Тоді

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \int\limits_a^{+\infty} f(x,\alpha)\, dx \to \int\limits_a^{+\infty} g(x)\, dx.$$

Теорема 3 (про диференційовність за параметром). Нехай $f : [a;+\infty) \times [c;d] \to \mathbb{R}$ задовольняє умови:

1) існує f_2' і $f_2' \in C([a;+\infty) \times [c;d]);$

2) для деякого $\alpha_0 \in [c;d]$ інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x,\alpha_0)\,dx$ збігається;

3) інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f_2'(x,\alpha)\,dx$ збігається рівномірно на $[c;d]$.

Тоді інтеграл (3.6) збігається при кожному $\alpha \in [c;d]$, $I \in C^{(1)}([c;d])$ та

$$I'(\alpha) = \int\limits_a^{+\infty} f_2'(x,\alpha)\,dx, \ \ \alpha \in [c;d].$$

Теорема 4 (про інтегровність за параметром по відрізку). Нехай $f \in C([a;+\infty) \times [c;d])$ і інтеграл (3.6) збігається рівномірно на $[c;d]$. Тоді $I \in C([c;d])$ і

$$\int\limits_c^d I(\alpha)\,d\alpha = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx \right) d\alpha = \int\limits_a^{+\infty} \left(\int\limits_c^d f(x,\alpha)\,d\alpha \right) dx.$$

Теорема 5 (про інтегровність за параметром по необмеженому проміжку). Нехай $f : [a;+\infty) \times [c;+\infty) \to \mathbb{R}$ задовольняє умови:

1) $f \in C([a;+\infty) \times [c;+\infty))$;

2) $\forall\, d > c: \ \int\limits_a^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx$ збігається рівномірно на $[c;d]$;

3) $\forall\, b > a: \ \int\limits_c^{+\infty} f(x,\alpha)\,d\alpha$ збігається рівномірно на $[a;b]$;

4) для $x \ge a, \ \ \alpha \ge c$ збігаються інтеграли $\int\limits_c^{+\infty} |f(x,\alpha)|\,d\alpha$ та $\int\limits_a^{+\infty} |f(x,\alpha)|\,dx$;

5) збігається принаймні один з інтегралів

$$\int\limits_c^{+\infty} \left(\int\limits_a^{+\infty} |f(x,\alpha)|\,dx \right) d\alpha, \quad \int\limits_a^{+\infty} \left(\int\limits_c^{+\infty} |f(x,\alpha)|\,d\alpha \right) dx.$$

Тоді виконується рівність

$$\int\limits_c^{+\infty} \left(\int\limits_a^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx \right) d\alpha = \int\limits_a^{+\infty} \left(\int\limits_c^{+\infty} f(x,\alpha)\,d\alpha \right) dx,$$

де всі інтеграли збігаються.

Приклад 1. Інтеграл Діріхле.

$$D(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

⌈ Інтеграл збігається при кожному $\alpha \ne 0$ за ознакою Діріхле. При $\alpha = 0$ очевидно, що $D(\alpha) = 0$. Крім того, заміною змінної легко встановити, що $D(-\alpha) = -D(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, і $D(\alpha) = D(1)$, $\alpha > 0$. Знайдемо $D(1)$. Означимо функцію

$$f(x,\beta) := \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} e^{-\beta x}, & x > 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases} \quad \beta \ge 0.$$

Інтеграл $I(\beta) := \int\limits_0^{+\infty} f(x,\beta)\,dx$ від функції $f \in C([0;+\infty)\times[0;+\infty))$ збігається рівномірно на $[0;+\infty)$ за ознакою Абеля, тому за теоремою 1 функція $I \in C([0;+\infty))$. Похідна $f_2'(x,\beta) = -e^{-\beta x}\sin x$ неперервна на $[0;+\infty)\times[0;+\infty)$, інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} f_2'(x,\beta)\,dx$ збігається рівномірно за ознакою Вейєрштрасса на кожному відрізку $[c;d] \subset (0;+\infty)$. Тому за теоремою 3 функція $I \in C^{(1)}([c;d])$ і для кожного $\beta > 0$

$$I'(\beta) = \int\limits_0^{+\infty} f_2'(x,\beta)\,dx = -\int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x}\sin x\,dx.$$

Інтегруванням частинами одержимо лінійне рівняння відносно похідної

$$I'(\beta) = -\int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x}\sin x\,dx = \frac{1}{\beta}\left(e^{-\beta x}\sin x\Big|_0^{+\infty} - \int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x}\cos x\,dx \right) =$$

$$= \frac{1}{\beta^2}\left(e^{-\beta x}\cos x\Big|_0^{+\infty} + \int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x}\sin x\,dx \right) = \frac{1}{\beta^2}(-1 - I'(\beta)),$$

з якого

$$I'(\beta) = -\frac{1}{1+\beta^2}, \qquad I(\beta) = \operatorname{arcctg}\beta + C, \quad \beta > 0.$$

Число C можна знайти такими міркуваннями. При кожному $\delta > 0$:

$$\forall\, A > \delta \quad \forall\, x \in [\delta; A] : \quad |f(x,\beta)| \le e^{-\beta\delta}.$$

Звідси за теоремою 2 одержуємо $\lim\limits_{\beta\to+\infty} \int\limits_\delta^{+\infty} f(x,\beta)\,dx = 0$. Оскільки

$$\forall\, x \in [0;\delta] \quad \forall\, \beta \ge 0 : \quad |f(x,\beta)| \le 1,$$

то $\left|\int\limits_0^\delta f(x,\beta)\,dx\right| \le \delta$ при всіх $\beta \ge 0$. Таким чином,

$$\lim_{\beta\to+\infty} I(\beta) = \lim_{\beta\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} f(x,\beta)\,dx = 0.$$

Тому $C = 0$. Отже, $I(\beta) = \operatorname{arcctg}\beta$, $\beta > 0$. Ураховуючи доведену вище неперервність функції I, остаточно знаходимо

$$D(1) = I(0) = \lim_{\beta\to 0+} I(\beta) = \frac{\pi}{2}.$$

⌋

Приклад 2. Інтеграл Фруллані. Нехай $f \in C^{(1)}([0;+\infty))$, похідна f' монотонна на $[0;+\infty)$, існує границя $f(+\infty) := \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Тоді для довільних додатних a, b :

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x}\,dx = (f(+\infty) - f(0))\ln\frac{b}{a}.$$

⌈ За правилом Лопіталя

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} = \lim_{x\to 0+}\big(bf'(bx) - af'(ax)\big) = (b-a)f'(0).$$

Тому інтеграл Фруллані є невласним інтегралом першого роду. Нехай $a < b$. Інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} f'(\alpha x)\,dx$ збігається рівномірно на $[a;b]$ за ознакою Вейєрштрасса (інтегровною мажорантою є $|f'(ax)|$ або $|f'(bx)|$, $x \in [0;+\infty)$, у залежності від характеру монотонності і знака f'). Тому за теоремою 4 можливе інтегрування за параметром α по відрізку $[a;b]$ і

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\,dx =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_a^b f'(\alpha x)\,d\alpha \right) dx = \int\limits_a^b \left(\int\limits_0^{\infty} f'(\alpha x)\,dx \right) d\alpha = \big(f(+\infty) - f(0)\big) \int\limits_a^b \frac{d\alpha}{\alpha} =$$

$$= \big(f(+\infty) - f(0)\big) \ln \frac{b}{a}.$$

⌋

Зауваження. При зроблених у прикладі 3 п. 3.3 припущеннях стосовно функції f за умови монотонності її похідної $f(+\infty) = 0$.

Приклад 3. Інтеграл Ойлера – Пуассона.

$$I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

⌈ Збіжність інтеграла випливає з ознаки порівняння:

$$\forall\, x \geq 1: \; e^{-x^2} \leq e^{-x}, \qquad \int\limits_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = e^{-1}.$$

При кожному $\alpha > 0$:

$$I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{ll} x = \alpha t & dx = \alpha\,dt \\ x = 0 & t = 0 \\ x \to +\infty & t \to +\infty \end{array} \right| = \int\limits_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2 t^2}\,dt.$$

Тому

$$I^2 = \int\limits_0^{+\infty} I e^{-\alpha^2}\,d\alpha = \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2(t^2+1)}\,dt \right) d\alpha.$$

Зовнішній інтеграл збігається. Ураховуючи неперервність інтеграла як функції межі інтегрування, маємо

$$I^2 = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_\varepsilon^{+\infty} \left(\int\limits_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2(t^2+1)}\,dt \right) d\alpha.$$

Тепер за теоремою 5 можна змінити порядок інтегрування. Дійсно, підінтегральна функція $f(t,\alpha) = \alpha e^{-\alpha^2(t^2+1)}$ невід'ємна і неперервна на $[\varepsilon;+\infty) \times [0;+\infty)$, тому умови 1), 4), 5) виконуються. Рівномірна збіжність інтегралів $\int\limits_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2(t^2+1)}\,d\alpha$ на $[0;b]$, $b > 0$, і $\int\limits_\varepsilon^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2(t^2+1)}\,dt$ на $[\varepsilon;d]$, $d > \varepsilon$, випливає з нерівностей

$$\forall\,(t,\alpha) \in [0;+\infty) \times [\varepsilon;+\infty): \; 0 \leq f(t,\alpha) \leq \alpha e^{-\alpha^2},$$

$$\forall\,(t,\alpha)\in[0;+\infty)\times[\varepsilon;d]:\ 0\le f(t,\alpha)\le de^{-\varepsilon^2t^2}$$

і ознаки Вейєрштрасса. Отже,

$$I^2=\lim_{\varepsilon\to0+}\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_\varepsilon^{+\infty}\alpha e^{-\alpha^2(t^2+1)}\,d\alpha\right)dt=\lim_{\varepsilon\to0+}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\varepsilon^2(t^2+1)}\frac{dt}{2(1+t^2)}.$$

Означимо неперервну функцію $g(t,\varepsilon)=\dfrac{1}{2(1+t^2)}e^{-\varepsilon^2(t^2+1)}$, $(t,\varepsilon)\in[0;+\infty)\times[0;1]$. Оскільки

$$\forall\,(t,\varepsilon)\in[0;+\infty)\times[0;1]:\ 0\le g(t,\varepsilon)\le\frac{1}{2(1+t^2)}\ \text{ та }\ \int\limits_0^{+\infty}\frac{dt}{2(1+t^2)}=\frac{\pi}{4},$$

то за теоремою 1

$$I^2=\int\limits_0^{+\infty}\left(\lim_{\varepsilon\to0+}e^{-\varepsilon^2(t^2+1)}\frac{1}{2(1+t^2)}\right)dt=\int\limits_0^{+\infty}\frac{dt}{2(1+t^2)}=\frac{\pi}{4}.$$

Зауважимо, що

$$\int\limits_{-\infty}^0 e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2},\qquad\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}.$$

$\rfloor$

3.62. Нехай для функції $f:[0;+\infty)\to\mathbb{R}$ невласний інтеграл $\int\limits_0^{+\infty}f(x)\,dx$ збігається. Довести, що при кожному $\alpha\ge0$ інтеграл

$$I(\alpha):=\int\limits_0^{+\infty}e^{-\alpha x}f(x)\,dx$$

збігається, і

$$\lim_{\alpha\to0+}I(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}f(x)\,dx.$$

3.63. Довести неперервність на множині M функцій:

1) $I(\alpha):=\int\limits_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\sin\sqrt{x}\,dx,\ \alpha\in M=(0;+\infty);$

2) $I(\alpha):=\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{\cos x}{x}e^{-\alpha x}\,dx,\ \alpha\in M=[0;+\infty).$

3.64. Довести, що функція

$$I(\alpha):=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}\,dx,\ \alpha\in\mathbb{R},$$

диференційовна на $\mathbb{R}$.

3.65. Довести, що функція

$$I(\alpha):=\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x}e^{-\alpha x}\,dx$$

неперервно диференційовна на $(0;+\infty)$.

3.66. Нехай $a>0,\ b>0$. Використовуючи рівність
$$\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}=\int\limits_a^b e^{-\alpha x}\,d\alpha,\ x>0,$$
обчислити інтеграл
$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx\quad a>0,\ b>0.$$

3.67. Обчислити інтеграл
$$\int\limits_0^1\frac{x^2\,dx}{(1-x)\ln^2(1-x)}.$$

3.68. Чи можна перейти до границі під знаком інтеграла у виразі
$$\lim_{\alpha\to 0+}\int\limits_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}\,dx?$$

3.69. Для неперервної обмеженої функції $f:[0;+\infty)\to\mathbb{R}$ довести рівність
$$\lim_{\alpha\to 0+}\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\alpha f(x)}{x^2+\alpha^2}\,dx=f(0).$$

3.70***.** Довести неперервність функції
$$I(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{|\sin x|^\alpha}\,dx,\quad \alpha\in(0;1).$$

3.71. Нехай
$$f(x,\alpha)=\begin{cases}\dfrac{\alpha^3}{x^2}\exp\left(-\dfrac{\alpha^2}{x}\right), & x>0,\ \alpha\in\mathbb{R},\\ 0, & x=0,\ \alpha\in\mathbb{R}.\end{cases}$$
Довести, що функція f має частинні похідні, неперервні за кожною змінною, однак у точці $\alpha=0$
$$\frac{d}{d\alpha}\int\limits_0^1 f(x,\alpha)\,dx\neq\int\limits_0^1 f'_\alpha(x,\alpha)\,dx.$$

3.72. Довести, що для функції
$$f(x,\alpha)=\begin{cases}x^{-2}, & 0<\alpha<x<1,\\ -\alpha^{-2}, & 0<x<\alpha<1,\\ 0, & \text{у решті точок,}\end{cases}$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,\alpha)\,dx \right) d\alpha \neq \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,\alpha)\,d\alpha \right) dx,$$

хоча всі інтеграли збігаються.

3.73. Довести неперервність функції I на множині M :

1) $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{1+x^4}\,dx$, $M = \mathbb{R}$;

2) $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2}\,dx$, $M = \mathbb{R}$;

3) $I(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(-(x-\alpha)^2)\,dx$, $M = \mathbb{R}$;

4) $I(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 \sin \alpha x}{1+x^4}\,dx$, $M = \mathbb{R}$;

5) $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2 x^2}\,dx$, $M = (0; +\infty)$;

6) $I(\alpha) = \int\limits_0^1 \frac{x+\alpha}{x^{1-\alpha}}\,dx$, $M = [0; +\infty)$;

7) $I(\alpha) = \int\limits_0^1 \ln^\alpha (1+x^2)\,dx$, $M = \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$;

8) $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^3}{1+x^\alpha}\,dx$, $M = (4; +\infty)$;

9) $I(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha + x^{\alpha/2}}\,dx$, $M = (0; +\infty)$;

10) $I(\alpha) = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^\alpha (\pi - x)^\alpha}\,dx$, $M = (0; 2)$.

3.74. Довести неперервну диференційовність функції I на множині M :

1) $I(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos \alpha x - \cos 2\alpha x}{x^2}\,dx$, $M = (0; +\infty)$;

2) $I(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 \alpha x}{x^2}\,dx$, $M = (0; +\infty)$;

3) $I(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{1 - \cos \alpha x}{x^2}\,dx$, $M = (0; +\infty)$;

4) $I(\alpha) = \int\limits_0^1 x^\alpha \cdot \ln^n x\,dx,\ n \in \mathbb{N}$, $M = (-1; +\infty)$;

5) $I(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{1 - \exp(-\alpha x^2)}{x^2}\,dx$, $M = (0; +\infty)$;

6) $I(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{1 - e^{-\alpha x}}{x} \cdot e^{-x}\,dx$, $M = (-1; +\infty)$;

7) $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} x^n \exp(-\alpha x^n)\,dx$, $n \in \mathbb{N},\ M = (0; +\infty)$;

8) $I(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} \exp(-\alpha x^2)\,dx$, $M = (0; +\infty)$;

9) $I(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x - \operatorname{arctg} 2\alpha x}{x}\,dx,\ M = (0; +\infty)$;

10) $I(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-2\alpha x}}{x} \cos x \, dx, \ M = (0; +\infty)$.

3.75. Довести інтегровність функції I по відрізку M :

1) $I(\alpha) = \int\limits_2^3 \frac{dx}{(3-x)^\alpha} \, dx$, $M = \left[-3; \frac{1}{2}\right]$;

2) $I(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{2\alpha} + \ln(1+x)} \, dx$, $M = \left[\frac{3}{4}; \frac{4}{3}\right]$;

3) $I(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(-(x-\alpha)^4) \, dx$, $M = [-5; 6]$;

4) $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1 + \alpha^3 + x^\alpha} \, dx$, $M = \left[\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right]$;

5) $I(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} x^\alpha \exp(-x^{2\alpha}) \, dx$, $M = \left[\frac{1}{2}; 2\right]$;

6) $I(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos \alpha^4 x}{\sqrt[3]{x}} \operatorname{arctg} \alpha x \, dx$, $M = \left[-1; -\frac{1}{2}\right]$;

7) $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha^2 x}{x + \alpha} \, dx$, $M = \left[\frac{1}{3}; 3\right]$;

8) $I(\alpha) = \int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{(1-x^3)^\alpha} \, dx$, $M = \left[0; \frac{2}{3}\right]$;

9) $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+\alpha)^{3+\alpha} + 1}$, $M = [0; 5]$;

10) $I(\alpha) = \int\limits_1^{10} \frac{\ln^\alpha x}{x\sqrt{x}} \, dx$, $M = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

3.76. Для довільних чисел $a > 0$, $b > 0$ обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\exp(-ax^2) - \exp(-bx^2)}{x} \, dx$;

2) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x} \, dx$;

3) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax^2 - \operatorname{arctg} bx^2}{x} \, dx$;

4) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arcctg} ax - \operatorname{arcctg} bx}{x} \, dx$;

5) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{(ax+1)^{-3/2} - (bx+1)^{-3/2}}{x} \, dx$;

6) $\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{ax+1}} - \frac{1}{\sqrt{bx+1}} \right) \cdot \frac{dx}{x}$;

7) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{(\operatorname{arctg} ax)^2 - (\operatorname{arctg} bx)^2}{x} \, dx$.

3.77. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 \alpha x}{x^2} \, dx, \ \alpha \in \mathbb{R}$;

2) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1 - \cos \alpha x}{x^2} \, dx, \ \alpha \in \mathbb{R}$;

3) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1-e^{-\alpha x^2}}{x^2}\,dx,\ \alpha>0;$

4) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2x^2+10x+3)\,dx;$

5) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}\,dx,$ $\alpha>0,\ \beta>0.$

3.78*. Використовуючи співвідношення

$$\frac{1}{1+x^2} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-y(1+x^2)}\,dy,\ x\in\mathbb{R},$$

обчислити *інтеграл Лапласа*

$$L(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\,dx,\ \alpha\in\mathbb{R}.$$

3.79*. Використовуючи співвідношення

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} e^{-xy^2}\,dy,\ x>0,$$

обчислити *інтеграли Френеля:*

$$I_1 = \int\limits_0^{+\infty} \sin x^2\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx;$$

$$I_2 = \int\limits_0^{+\infty} \cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx.$$

3.80. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x-\sin x}{x^3}\,dx;$

2)* $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{e^{x^2}\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2}.$

3.81. Довести, що інтеграл

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos\alpha x\,dx, \quad \alpha\in\mathbb{R},$$

є розв'язком задачі Коші

$$I'(\alpha) = -\frac{1}{2}\alpha I(\alpha), \quad \alpha\in\mathbb{R}; \qquad I(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Обчислити його.

3.82. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{x^2}\,dx;$

2) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1-e^{-\alpha x}}{x}\cdot e^{-x}\,dx,\ \alpha>0;$

3) $\int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-\alpha x}\,dx,\ n\in\mathbb{N},\ \alpha>0;$

4) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-\alpha x^2}\,dx,\ n\in\mathbb{N},\ \alpha>0;$

5) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \cos x\, dx,$
$\alpha > 0,\ \beta > 0;$

6) $\int\limits_1^{+\infty} x^\alpha \ln^n x\, dx,\ n \in \mathbb{N},\ \alpha < -1;$

7) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{e^{-\alpha x^2} - \cos \beta x}{x^2}\, dx,\ \alpha > 0;$

8) $\int\limits_0^{+\infty} \left(\dfrac{\sin \alpha x}{x} \right)^3 dx,\ \alpha > 0.$

3.83. Обчислити інтеграли:

1)* $\int\limits_0^{+\infty} \exp\left(-\left(x^2 + \dfrac{\alpha^2}{x^2} \right) \right) dx,$
$\alpha > 0;$

2) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x}\, dx;$

3) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin \alpha x \cos \beta x}{x}\, dx,$
$\alpha > \beta > 0;$

4) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin^3 \alpha x}{x}\, dx,\ \alpha \in \mathbb{R};$

5) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin^4 \alpha x - \sin^4 \beta x}{x}\, dx,$
$\alpha > 0,\ \beta > 0;$

6) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{1}{x} \Big(e^{-\alpha x^2} + e^{-\beta x^2} +$
$+ e^{-\gamma x^2} - 3e^{-\delta x^2} \Big)\, dx,$
$\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} \subset (0; +\infty);$

7) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-(x^2+x)}\, dx;$

8) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x e^{-(x^2-x)}\, dx.$

3.7 Γ- і B-функції Ойлера

Гама-функція Ойлера для $\alpha > 0$ визначається рівністю

$$\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1}\, dx.$$

На від'ємну піввісь ця функція продовжується рівністю

$$\Gamma(\alpha) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+\alpha)} + \int\limits_1^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1}\, dx. \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}.$$

Основні властивості Γ-функції і формули для неї

1) $\forall\, \alpha > 0 :\ \Gamma(\alpha) > 0;$

2) $\Gamma(\alpha) \sim \dfrac{1}{\alpha},\ \alpha \to 0+;$

3) $\forall\, n \geq 1 \quad \forall\, \alpha > 0 \quad \exists\, \Gamma^{(n)}(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} \ln^n x\, dx;$

4) *функціональне рівняння (формула зниження)*
$\forall\, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\} :\ \Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, зокрема, $\Gamma(n+1) = n!,\ n \in \mathbb{N};$

5) $\Gamma(1) = 1; \quad \Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi};$

6) *формула Ойлера*
$$\forall\,\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}:\quad \Gamma(\alpha)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha}n!}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)};$$
7) *зображення Вейєрштрасса*
$$\forall\,\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}:\quad \Gamma(\alpha)=e^{-\gamma\alpha}\frac{1}{\alpha}\prod_{n=1}^{\infty}e^{\frac{\alpha}{n}}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{-1},$$
де $\gamma=0,5772\ldots$ – стала Ойлера;
8) *формула подвоєння Лежандра*
$$\forall\,\alpha>0:\quad 2^{\alpha-1}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha);$$
9) *функціональне рівняння Ойлера (формула доповнення)*
$$\forall\,\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}:\quad \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha};$$
10) *розклад синуса у нескінченний добуток*
$$\forall\,\alpha\in\mathbb{R}:\quad \sin\pi\alpha=\pi\alpha\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\alpha^2}{n^2}\right);$$
11) *формула Стірлінга*
$$\forall\,\alpha>0\quad \exists\,\theta(\alpha)\in(0;1):\quad \Gamma(\alpha)=\sqrt{2\pi}\alpha^{\alpha-\frac{1}{2}}e^{-\alpha}e^{\frac{\theta(\alpha)}{12\alpha}},$$
зокрема,
$$\forall\,n\in\mathbb{N}\quad \exists\,\theta(n)\in(0;1):\quad n!=\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}e^{\frac{\theta(n)}{12n}}.$$

Бета-функція Ойлера для $\alpha>0,\ \beta>0$ визначається рівністю
$$\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx.$$

Γ- і B-функції Ойлера пов'язані між собою тотожністю
$$\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},\quad \alpha>0,\ \beta>0.$$

Приклад 1. Звести до B-функції інтеграл
$$\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{\alpha}x\cos^{\beta}x\,dx.$$

⌈ Оскільки $\sin x\sim x$, $x\to0$, та $\cos x\sim\frac{\pi}{2}-x$, $x\to\frac{\pi}{2}$, то за ознакою порівняння інтеграл збігається лише при $\alpha>-1$ і $\beta>-1$. Заміною змінної інтегрування зведемо його до B-функції:
$$\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{\alpha}x\cos^{\beta}x\,dx=\left|\begin{array}{ll}\sin^2x=t & 2\sin x\cos x\,dx=dt\\ x\to0\iff t\to0 & x\to\frac{\pi}{2}\iff t\to1\end{array}\right|=$$
$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 t^{\frac{\alpha-1}{2}}(1-t)^{\frac{\beta-1}{2}}\,dt=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{\alpha+1}{2},\frac{\beta+1}{2}\right).$$
⌋

Приклад 2. Обчислити інтеграл $I(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha}\ln x}{1+x^4}\,dx.$

⌈ Інтеграл збігається за ознакою порівняння при $\alpha \in (-1;3)$. Функція

$$J(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^4}\,dx$$

диференційовна на $(-1;3)$ за теоремою про диференціювання невласного інтеграла за параметром. При цьому

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{x^\alpha}{1+x^4}\right) = \frac{x^\alpha \ln x}{1+x^4},\ (x,\alpha) \in (0;+\infty)\times(-1;3).$$

Тому $I(\alpha) = J'(\alpha),\ \alpha \in (-1;3)$. Зауважимо, що

$$J(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^4}\,dx = \left|\begin{array}{ll} 1+x^4 = t^{-1} & x = t^{-\frac14}(1-t)^{\frac14} \\ x \to 0+ \iff t \to 1- & x \to +\infty \iff t \to 0+ \end{array}\right| =$$

$$= \frac14 \int\limits_0^1 t^{-\frac{\alpha}{4}+1}(1-t)^{\frac{\alpha}{4}}\left(t^{-\frac54}(1-t)^{\frac14} + t^{-\frac14}(1-t)^{-\frac34}\right)dt = \frac14 \mathrm{B}\left(\frac{3-\alpha}{4}, \frac{\alpha+1}{4}\right) =$$

$$= \frac14 \Gamma\left(\frac{3-\alpha}{4}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{4}\right) = \pi\left(4\sin\frac{\pi(\alpha+1)}{4}\right)^{-1},\ -1<\alpha<3.$$

Звідси $I(\alpha) = -\frac{\pi^2}{16}\cos\frac{\pi(\alpha+1)}{4}\left(\sin\frac{\pi(\alpha+1)}{4}\right)^{-2}, \quad \alpha \in (-1;3).$ ⌋

3.84. Обчислити інтеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2}\,dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

3.85. Нехай

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \exp(-x^\alpha)\,dx, \quad \alpha > 0.$$

1) Виразити функцію I через Γ-функцію Ойлера.
2) Знайти $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} I(\alpha)$.

3.86. Звести інтеграл

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^6 x \cos^4 x\,dx$$

до Γ-функції та обчислити його.

3.87. Звести інтеграли до Γ-функції та обчислити:

1) $\int\limits_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx$;

2) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[\alpha]{1-x^\alpha}},\ \alpha > 1.$

3.88. Знайти значення α, β, за яких збігаються інтеграли. Виразити інтеграли через ойлерові та обчислити їх:

1) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}}\,dx$; 2) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x^{\beta}}\,dx$.

3.89*. Довести, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ має місце рівність

$$\prod_{m=1}^{n} \int\limits_0^{+\infty} x^{m-1}\exp(-x^n)\,dx = n^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}.$$

3.90*. Довести формулу Ойлера

$$\int\limits_0^{+\infty} x^{\beta-1}\exp(-\lambda x\cos\alpha)\cos(\lambda x\sin\alpha)\,dx = \Gamma(\beta)\lambda^{-\beta}\cos\alpha\beta,$$

де $\alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\beta > 0$, $\lambda > 0$.

3.91. Для $a > 0$ і $n \in \mathbb{N}$ знайти довжину дуги кривої

$$r^n = a^n\cos n\varphi, \quad |\varphi| \le \frac{\pi}{2n}.$$

3.92. 1) Довести, що $\Gamma \in C^{(\infty)}((0,+\infty))$.
2) Довести, що $\mathrm{B} \in C^{(\infty)}((0,+\infty)\times(0,+\infty))$.

3.93. Визначити множину тих α, за яких збігаються інтеграли. Виразити інтеграли через Γ-функцію:

1) $\int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha}\exp(-x^{\beta})\,dx$, $\beta > 0$;

2) $\int\limits_0^{1} \left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^{\alpha} dx$;

3) $\int\limits_0^{+\infty} \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right)\cdot\dfrac{dx}{x^{\alpha}}$;

4) $\int\limits_0^{+\infty} 2^{-x}x^{\alpha}\,dx$;

5) $\int\limits_1^{+\infty} 3^{-x}(x-1)^{\alpha}\,dx$;

6) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x|^{\alpha}\exp(-x^4)\,dx$;

7) $\int\limits_1^{+\infty} x(x^2-1)^{\alpha}\exp(-x^2)\,dx$;

8) $\int\limits_1^{+\infty} (\ln x)^{\alpha}\cdot\dfrac{dx}{x^2}$;

9) $\int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha}e^{-\sqrt{x}}\,dx$.

3.94. Довести рівність

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^4}\,dx\cdot\int\limits_0^{+\infty} x^2e^{-x^4}\,dx = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}.$$

3.95. Визначити множину тих α, за яких збігаються інтеграли. Виразити інтеграли через ойлерові, обчислити:

1) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x^\alpha\,dx}{(1+x^2)^2}$;

2) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x\,dx}{2+3x^\alpha}$;

3) $\int\limits_0^1 \dfrac{x^\alpha(1-x)}{(x+1)^{\alpha+3}}\,dx$;

4) $\int\limits_1^2 \dfrac{(x-1)^\alpha(2-x)^2}{(x+2)^{\alpha+4}}\,dx$;

5) $\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx,\ a>0$;

6) $\int\limits_0^1 (1-x^\alpha)^\beta\,dx,\ \beta>-1$;

7) $\int\limits_0^1 x^2(1-x^\alpha)^\beta\,dx,\ \beta>-1$;

8) $\int\limits_0^1 x^\alpha(1-x^3)\,dx$;

9) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{dx}{(x(1+x))^{3/4}}$;

10) $\int\limits_{-1}^1 \dfrac{((1+x)^2(1-x)^2)^\alpha}{(1+x^2)^{2\alpha+1}}\,dx$.

3.96. Знайти площу фігури, обмеженої кривою

$$r^4=\sin^3\varphi\cos\varphi,\quad \varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right].$$

3.97. Визначити множину тих α, за яких збігаються інтеграли. Виразити інтеграли через ойлерові, обчислити:

1) $\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^\alpha x\,dx$;

2) $\int\limits_0^{\pi} \sin^\alpha x\,dx$;

3) $\int\limits_0^{\pi} \dfrac{dx}{\sqrt{3-\cos x}}\,dx$ (заміна $\cos x = 1-2\sqrt{t}$);

4) $\int\limits_0^{\pi} \left(\dfrac{\sin x}{1+\beta\cos x}\right)^{\alpha-1}\cdot\dfrac{dx}{1+\beta\cos x},\ 0<\beta<1$

(заміна $\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}=\sqrt{\dfrac{1-\beta}{1+\beta}}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$);

5) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^4e^{-x^2}\,dx$;

6) $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^3}\,dx$;

7) $\int\limits_0^{+\infty} x^{-1/3}e^{-\sqrt[3]{x}}\,dx$;

8) $\int\limits_0^{+\infty} x^{2n+1}e^{-x^2}\,dx,\ n\in\mathbb{N}$;

9) $\int\limits_0^{+\infty} \sqrt{x}e^{-(\sqrt{x})^3}\,dx$.

3.98. Виразити інтеграли через Γ-функцію та її похідні, обчислити їх:

1) $\int\limits_0^{+\infty} x^\alpha e^{-ax}\ln x\,dx,$ $\qquad a>0,\ \alpha>-1$;

2) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}\ln x}{1+x}\,dx, \qquad 0<\alpha<1.$

3.99. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^1 \ln\Gamma(x)\,dx.$

3.100. Довести рівність

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}\cdot\int\limits_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{4}.$$

3.101. Знайти інтеграли

1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{x^\beta}\,dx, \quad \alpha>0,\ 0<\beta<1;$

2) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x^\beta}\,dx, \quad \alpha\in\mathbb{R},\ 0<\beta<2,$

використовуючи рівність

$$\frac{1}{x^\beta} = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^{+\infty} t^{\beta-1}e^{-xt}\,dt, \quad x>0,\ \beta>0.$$

3.102. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^1 \ln\Gamma(x)\cdot\sin\pi x\,dx.$

3.103. Знайти площу, обмежену кривою

$$|x|^s+|y|^s=a^s, \quad s>0,\ a>0.$$

3.104. Виразити інтеграли через ойлерові та їх похідні, обчислити:

1) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\ln x\,dx;$

2) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}\ln 2x}{1+x}\,dx,\ 0<\alpha<1;$

3) $\int\limits_0^1 \ln(-\ln x)\,dx;$

4) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}\ln^2 x}{1+x}\,dx,\ 0<\alpha<1;$

5) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{1+x^3}\,dx;$

6) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{1+x^4}\,dx;$

7) $\int\limits_0^{+\infty} x^\alpha e^{-\beta x}\ln^2 x\,dx,$
$\alpha>-1,\ \beta>0;$

8) $\int\limits_1^{+\infty} (\ln x)^\alpha\frac{\ln\ln x}{x^2}\,dx,\ \alpha>-1;$

9) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}-x^{\beta-1}}{(1+x)\ln x}\,dx$
$0<\alpha<1,\ 0<\beta<1;$

10) $\int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^3 x\,dx,\ \alpha>0.$

3.105. Виразити інтеграли через похідні B-функції:

1) $\int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\ln x\,dx$, $\alpha>0,\ \beta>0$;

2) $\int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\ln(1-x)\,dx$, $\alpha>0,\ \beta>0$;

3) $\int\limits_0^{\pi} \sin^{\alpha}x\ln(\sin x)\,dx,\ \alpha>-1$;

4) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{\alpha}x\cos^{2\alpha}x(\ln(\sin x)+ +2\ln(\cos x))\,dx,\ \alpha>-\dfrac{1}{2}$;

5) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^{\alpha}x\ln(\cos x)\,dx,\ \alpha>-1$;

6) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x^{\alpha-1}\ln x}{(1+x)^{\beta}}\,dx,\ \beta>\alpha>0$;

7) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x^{\alpha-1}\ln x}{(a^2+x^2)^{\beta}}\,dx$, $2\beta>\alpha>0,\ a>0$;

8) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x^{\alpha-1}\ln^2 x}{(1+x^3)^{\beta}}\,dx,\ 3\beta>\alpha>0$;

9) $\int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\ln x\,\times \times\ln(1-x)\,dx,\ \alpha>0,\ \beta>0.$

3.106. Використовуючи формулу Вейєрштрасса для Γ-функції, обчислити нескінченні добутки

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(n+\alpha_1)(n+\alpha_2)}{(n+\beta_1)(n+\beta_2)}$$

за таких значень параметрів:

1) $\alpha_1=\alpha_2=1,\ \beta_1=\dfrac{1}{2},\ \beta_2=\dfrac{3}{2}$;

2) $\alpha_1=\alpha_2=\dfrac{1}{2},\ \beta_1=\dfrac{3}{4},\ \beta_2=\dfrac{1}{4}$;

3) $\alpha_1=-\alpha_2=-\dfrac{1}{2},\ \beta_1=-\beta_2=-\dfrac{3}{4}$;

4) $\alpha_1=3,\ \alpha_2=5,\ \beta_1=\dfrac{5}{2},\ \beta_2=\dfrac{11}{2}$;

5) $\alpha_1=\dfrac{1}{2},\ \alpha_2=\dfrac{3}{2},\ \beta_1=\beta_2=1.$

3.107. Використовуючи розклад синуса в нескінченний добуток, розкласти в нескінченний добуток функції:

1) $\cos\pi\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$;

2) $\operatorname{tg}\pi\alpha,\ \alpha\neq n-\frac{1}{2},\ n\in\mathbb{Z}.$

3.108. Обчислити нескінченні добутки $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\Big(1-\dfrac{\alpha^2}{n^2}\Big)\Big(1-\dfrac{\beta^2}{n^2}\Big)$, якщо:

1) $\alpha=\dfrac{1}{3},\ \beta=\dfrac{1}{6}$;

2) $\alpha=\dfrac{1}{4},\ \beta=\dfrac{1}{3}$;

3) $\alpha=\dfrac{5}{4},\ \beta=\dfrac{5}{6}.$

Розділ 4

Кратні інтеграли

4.1 Означення і обчислення інтеграла по брусу

Брусом в m-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^m$ називається множина вигляду

$$Q = \prod_{k=1}^{m} [a_k; b_k] = [a_1; b_1] \times [a_2; b_2] \times \ldots \times [a_m; b_m],$$
$$-\infty < a_k < b_k < +\infty, \ k = 1, 2, \ldots, m.$$

Діаметром бруса Q називається число $d(Q) = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{m} (b_k - a_k)^2}$. *Мірою Жордана (об'є-мом)* бруса Q називається число $m(Q) = \prod\limits_{k=1}^{m} (b_k - a_k)$. Розбиття сторін бруса

$$\lambda_k = \{a_k = x_k(0) < x_k(1) < \ldots < x_k(n_k) = b_k\}, \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

визначає набір брусів

$$Q(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m) = \prod_{k=1}^{m} [x_k(\nu_k); x_k(\nu_k + 1)], \quad 1 \le \nu_k \le n_k - 1, \ k = 1, 2, \ldots, m,$$

який називається *розбиттям* λ бруса Q. *Діаметром* розбиття λ називається число $|\lambda| = \max\{d\big(Q(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m)\big) \mid 1 \le \nu_k \le n_k - 1, \ k = 1, 2, \ldots, m\}$. Підрозбиття $\lambda'_k \supset \lambda_k$ ребер бруса Q визначають його розбиття λ', яке називається *підрозбиттям (подрібненням)* розбиття λ.

Нехай на брусі Q задана обмежена функція $f : Q \to \mathbb{R}$. *Нижньою сумою Дарбу* для функції f і розбиття λ бруса Q називається число

$$L(f, \lambda) = \sum_{\substack{0 \le \nu_k \le n_k - 1, \\ k = 1, \ldots, m}} \inf_{Q(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m)} f \cdot m\big(Q(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m)\big).$$

Верхньою сумою Дарбу для функції f і розбиття λ бруса Q називається число

$$U(f, \lambda) = \sum_{\substack{0 \le \nu_k \le n_k - 1, \\ k = 1, \ldots, m}} \sup_{Q(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m)} f \cdot m\big(Q(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m)\big).$$

Точки

$$\vec{\xi}(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m) \in Q(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m), \quad 1 \le \nu_k \le n_k - 1, \ k = 1, 2, \ldots, m,$$

називаються *відміченими точками*, що відповідають розбиттю λ. *Інтегральною сумою* для функції f, розбиття λ бруса Q і відмічених точок $\big\{\vec{\xi}(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m)\big\}$ називається число

$$S(f, \lambda, \{\vec{\xi}(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m)\}) = \sum_{\substack{0 \le \nu_k \le n_k - 1, \\ k = 1, \ldots, m}} f\big(\vec{\xi}(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m)\big) \cdot m\big(Q(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m)\big).$$

Нижнім інтегралом від обмеженої функції f по брусу Q називається число

$$\underline{\int\limits_Q} f(\vec{x})\,d\vec{x} := \sup_\lambda L(f,\lambda).$$

Верхнім інтегралом від обмеженої функції f по брусу Q називається число

$$\overline{\int\limits_Q} f(\vec{x})\,d\vec{x} := \inf_\lambda U(f,\lambda).$$

Точні межі тут беруться за всіма можливими розбиттями λ бруса Q.

Функція f називається *інтегровною* по брусу Q, якщо

$$\underline{\int\limits_Q} f(\vec{x})\,d\vec{x} = \overline{\int\limits_Q} f(\vec{x})\,d\vec{x}.$$

Для інтегровної функції f число $\underline{\int\limits_Q} f(\vec{x})\,d\vec{x} = \overline{\int\limits_Q} f(\vec{x})\,d\vec{x}$ називається m-кратним інтегралом Рімана від функції f по брусу Q і позначається одним із символів

$$\int\limits_Q f(\vec{x})\,d\vec{x}, \quad \int\limits_Q f(x_1,\dots,x_m)\,dx_1\dots dx_m, \quad \int\limits_{a_1}^{b_1}\int\limits_{a_2}^{b_2}\dots\int\limits_{a_m}^{b_m} f(x_1,x_2,\dots,x_m)\,dx_1\,dx_2\dots dx_m.$$

Теорема 1. Нехай функція $f \in C(Q)$. Тоді f інтегровна по брусу Q і

$$\int\limits_Q f(\vec{x})\,d\vec{x} = \int\limits_{a_1}^{b_1}\Big(\int\limits_{a_2}^{b_2}\dots\Big(\int\limits_{a_m}^{b_m} f(x_1,x_2,\dots,x_m)\,dx_m\Big)\dots dx_2\Big)dx_1.$$

Повторний інтеграл у правій частині рівності не залежить від порядку інтегрування, наприклад,

$$\int\limits_Q f(\vec{x})\,d\vec{x} = \int\limits_{a_m}^{b_m}\Big(\int\limits_{a_{m-1}}^{b_{m-1}}\dots\Big(\int\limits_{a_1}^{b_1} f(x_1,x_2,\dots,x_m)\,dx_1\Big)\dots dx_{m-1}\Big)dx_m.$$

Теорема 2. Нехай функції $\{f,g\} \subset C(Q)$. Тоді для довільних чисел α і β

$$\int\limits_Q \big(\alpha f(\vec{x}) + \beta g(\vec{x})\big)\,d\vec{x} = \alpha\int\limits_Q f(\vec{x})\,d\vec{x} + \beta\int\limits_Q g(\vec{x})\,d\vec{x}.$$

Приклад 1. Знайти за означенням нижній та верхній інтеграли по брусу $Q = [0;1]\times$ $\times\,[0;2]$ від функції $f(x_1,x_2) = x_1x_2^2$. Довести інтегровність функції f.

$\lceil$ Запишемо суми Дарбу для довільного розбиття λ бруса Q, породженого розбиттями його сторін $\lambda_1 = \{0 = x_1(0) < x_1(1) < \dots < x_1(n) = 1\}$ і $\lambda_2 = \{0 = x_2(0) < x_2(1) < \dots < x_2(k) = 2\}$:

$$L(f,\lambda) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k-1} x_1(i)x_2^2(j)\cdot\big(x_1(i+1)-x_1(i)\big)\big(x_2(j+1)-x_j(j)\big) = L_1(f_1,\lambda_1)\cdot L_2(f_2,\lambda_2),$$

$$U(f,\lambda) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k-1} x_1(i+1)x_2^2(j+1)\cdot\big(x_1(i+1)-x_1(i)\big)\big(x_2(j+1)-x_j(j)\big) =$$

$$= U_1(f_1,\lambda_1)\cdot U_2(f_2,\lambda_2),$$

де L_i, U_i, $i = 1, 2$, – нижні і верхні суми Дарбу для інтегровних функцій $f_1(t) = t$, $t \in [0;1]$, $f_2(t) = t^2$, $t \in [0;2]$, і відповідних розбиттів. Ураховуючи невід'ємність функцій f_1, f_2, одержуємо

$$\underline{\int_Q} f(\vec{x})\,d\vec{x} = \sup_{\lambda} L(f,\lambda) = \sup_{\lambda_1} L_1(f_1,\lambda_1)\cdot \sup_{\lambda_2} L_2(f_2,\lambda_2) =$$

$$= \underline{\int_0^1} f_1(x_1)\,dx_1 \cdot \underline{\int_0^2} f_2(x_2)\,dx_2 = \int_0^1 x_1\,dx_1 \cdot \int_0^2 x_2^2\,dx_2 = \frac{4}{3},$$

Аналогічно

$$\overline{\int_Q} f(\vec{x})\,d\vec{x} = \inf_{\lambda} U(f,\lambda) = \overline{\int_0^1} f_1(x_1)\,dx_1 \cdot \overline{\int_0^2} f_2(x_2)\,dx_2 = \frac{4}{3}.$$

Звідси випливає інтегровність функції f і рівність $\int_Q f(\vec{x})\,d\vec{x} = \frac{4}{3}$. ⌋

Приклад 2. Обчислити інтеграл

$$\int_{[0;1]^m} (x_1x_2^2 + x_2^2x_3^3 + x_3^3x_4^4 + \ldots + x_{m-1}^{m-1}x_m^m)\,dx_1dx_2\ldots dx_m.$$

⌈ За теоремами 1 і 2

$$\int_{[0;1]^m} (x_1x_2^2 + x_2^2x_3^3 + x_3^3x_4^4 + \ldots + x_{m-1}^{m-1}x_m^m)\,dx_1dx_2\ldots dx_m =$$

$$= \int_{[0;1]^{m-2}} \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 x_1\,dx_1\right) x_2^2\,dx_2\right) dx_3\ldots dx_m +$$

$$+ \int_{[0;1]^{m-2}} \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 x_2^2\,dx_2\right) x_3^3\,dx_3\right) dx_1dx_4\ldots dx_m +$$

$$+ \ldots + \int_{[0;1]^{m-2}} \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 x_{m-1}^{m-1}\,dx_{m-1}\right) x_m^m\,dx_n\right) dx_1dx_2\ldots dx_{m-2} =$$

$$= \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{m(m+1)} = \frac{m-1}{2(m+1)}.$$

⌋

4.1. Нехай брус $Q = [0;1]\times[0;1]$, його розбиття $\lambda(n) = \lambda_1(n)\times\lambda_2(n)$ породжене розбиттями відрізків $[0;1]$ на координатних осях

$$\lambda_1(n) = \left\{0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \ldots < \frac{n}{n} = 1\right\},$$

$$\lambda_2(n) = \left\{0 < \frac{1}{2^n} < \frac{2}{2^n} < \ldots < \frac{2^n-1}{2^n} < \frac{2^n}{2^n} = 1\right\}, \quad n \ge 1.$$

Описати розбиття $\lambda(1), \lambda(2), \lambda(3)$. Чи є $\lambda(3)$ підрозбиттям $\lambda(2)$? При якому n розбиття $\lambda(n+1)$ є підрозбиттям $\lambda(n)$? Обчислити діаметр розбиття $\lambda(n)$.

4.2. Нехай брус $Q = [0;2] \times [0;1]$, його розбиття $\lambda(n) = \lambda_1(n) \times \lambda_2(n)$ породжене розбиттями відрізків $[0;2]$ і $[0;1]$ на координатних осях

$$\lambda_1(n) = \left\{0 < \frac{1}{2^n} < \frac{2}{2^n} < \ldots < \frac{2 \cdot 2^n - 1}{2^n} < \frac{2 \cdot 2^n}{2^n} = 2\right\},$$

$$\lambda_2(n) = \left\{0 < \frac{1}{2^n} < \frac{2}{2^n} < \ldots < \frac{2^n - 1}{2^n} < \frac{2^n}{2^n} = 1\right\}, \quad n \geq 0.$$

Визначити кількість елементів розбиття $\lambda(n)$ та обчислити його діаметр $|\lambda(n)|$. Показати, що розбиття $\lambda(1)$ є підрозбиттям $\lambda(0)$ і описати бруси $\{Q(1, 0/i, j)\}$ розбиття $\lambda(1)$ як підрозбиття $\lambda(0)$. Показати, що розбиття $\lambda(n+1)$ є підрозбиттям $\lambda(n)$ при кожному $n \geq 0$.

4.3. Нехай розбиття $\lambda(m,n) = \lambda_1(m) \times \lambda_2(n)$ бруса $Q = [0;2] \times [0;1]$ породжене розбиттями відрізків $[0;2]$ і $[0;1]$ на координатних осях

$$\lambda_1(m) = \left\{0 < \frac{1}{m} < \frac{2}{m} < \ldots < \frac{2m-1}{m} < \frac{2m}{m} = 2\right\},$$

$$\lambda_2(n) = \left\{0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \ldots < \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1\right\}, \quad m \geq 1,\ n \geq 1.$$

Для функцій: 1) $f_1(x_1, x_2) = x_1 - x_2^2$, 2) $f_2(x_1, x_2) = \dfrac{1}{1 + x_1 x_2}$, $(x_1, x_2) \in Q$ –

а) обчислити $L(f_k, \lambda(m,n))$, $U(f_k, \lambda(m,n))$;

б) для відмічених точок

$$\vec{\xi}(i,j) = \left(\frac{i+1}{m}, \frac{j+1}{n}\right) \in \left[\frac{i}{m}; \frac{i+1}{m}\right] \times \left[\frac{j}{n}; \frac{j+1}{n}\right],$$

$i = 0, 1, \ldots, 2m-1$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, записати інтегральну суму $S(f_k, \lambda(m,n), \{\xi(i,j)\})$, $k = 1, 2$.

4.4. Нехай для бруса $Q = [0;1] \times [0;2] \times [0;3]$ задано його розбиття $\lambda(m,n) = \lambda_1(n) \times \lambda_2(m) \times \lambda_3(n)$, породжене розбиттями відрізків $[0;1]$, $[0;2]$ і $[0;3]$ на координатних осях

$$\lambda_1(n) = \left\{0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \ldots < \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1\right\},$$

$$\lambda_2(m) = \left\{0 < \frac{1}{m} < \frac{2}{m} < \ldots < \frac{2m-1}{m} < \frac{2m}{m} = 2\right\},$$

$$\lambda_3(n) = \left\{0 < \frac{1}{2^n} < \frac{2}{2^n} < \ldots < \frac{3 \cdot 2^n - 1}{2^n} < \frac{3 \cdot 2^n}{2^n} = 3\right\}, \quad m, n \geq 1,$$

і відмічені точки

$$\vec{\xi}(i,j,k) = \left(\frac{i+1}{n}, \frac{j}{m}, \frac{k}{2^n}\right) \in \left[\frac{i}{n}; \frac{i+1}{n}\right] \times \left[\frac{j}{m}; \frac{j+1}{m}\right] \times \left[\frac{k}{2^n}; \frac{k+1}{2^n}\right],$$

$i = 0, \dots, n-1$, $j = 0, \dots, 2m-1$, $k = 0, \dots, 3 \cdot 2^n - 1$. Записати $L(f, \lambda(m,n))$, $U(f, \lambda(m,n))$, $S(f, \lambda(m,n), \{\vec{\xi}(i,j,k)\})$ для функцій:

1) $f(\vec{x}) = x_1 x_2 - x_3$;
2) $f(\vec{x}) = x_1 + x_2 x_3$;
3) $f(\vec{x}) = x_1 \ln(1 + x_2) - x_3$;
4) $f(\vec{x}) = x_3 \sin \dfrac{\pi x_1}{2} \cos \dfrac{\pi x_2}{4}$;
5) $f(\vec{x}) = (1 + x_1)^{x_2 - x_3}$;
6) $f(\vec{x}) = \dfrac{x_1}{1 + x_2 x_3}$;
7) $f(\vec{x}) = \left(\dfrac{x_1 x_2}{2}\right)^{1+x_3}$;
8) $f(\vec{x}) = \dfrac{x_1 x_2}{1 + x_3}$;
9) $f(\vec{x}) = \dfrac{x_1 + x_2}{1 + x_3}$;
10) $f(\vec{x}) = x_1 - x_2 - x_3$,

де $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in Q$.

4.5. Довести, що для функції $f \in C(Q)$ кожні нижня й верхня суми Дарбу є інтегральними сумами.

4.6. Обчислити нижній та верхній інтеграли по брусу $Q = [0;1] \times [0;1]$ від функцій:

а) $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$; б) $g(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) + h(x_1, x_2)$, де

$$h(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & x \in Q \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}), \\ 0, & x \in Q \setminus (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}). \end{cases}$$

4.7. Нехай $Q = [0;1] \times [1;2] \times [2;3]$,

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 1, & \{x_1, x_2, x_3\} \subset \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{в іншому випадку}. \end{cases}$$

Знайти нижній та верхній інтеграли від функції f по брусу Q.

4.8. Знайти нижній та верхній інтеграли по брусу $Q = [0;1] \times [0;2]$ від функції f :

1) $f(\vec{x}) = (1 - x_1) \sin x_2$;
2) $f(\vec{x}) = x_1(1 - x_2)$;
3) $f(\vec{x}) = \cos x_1 \sin x_2$;
4) $f(\vec{x}) = x_1^3(1 - x_2)$;
5) $f(\vec{x}) = e^{x_1 - x_2}$;
6) $f(\vec{x}) = \left|x_1 - \dfrac{1}{2}\right| x_2$;
7) $f(\vec{x}) = x_1 x_2^2$;
8) $f(\vec{x}) = \dfrac{x_1}{1 + x_2}$;
9) $f(\vec{x}) = x_1 \sqrt{x_2}$;
10) $f(\vec{x}) = x_1 \ln(1 + x_2)$,

де $\vec{x} = (x_1, x_2) \in Q$.

4.9. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_{[-1;1]\times[0;2]} (x_1^2 x_2 + \sqrt{x}_2)\, dx_1 dx_2;$

2) $\int\limits_{[0;1]^3} \sin(x_1 + x_2 + x_3)\, dx_1 dx_2 dx_3;$

3) $\int\limits_{[-1;1]\times[0;1]} \left(|x_1| \cos \frac{\pi x_2}{2}\right)\, dx_1 dx_2;$

4) $\int\limits_{[0;1]\times[1;2]\times[1;3]} (x_1 x_3^2 + e^{x_2})\, dx_1 dx_2 dx_3.$

4.10. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_{[0;1]\times[1;2]} (x_1 + x_2^3)\, dx_1 dx_2;$

2) $\int\limits_{[0;1]\times[2;3]} x_1 \sin(\pi x_2)\, dx_1 dx_2;$

3) $\int\limits_{[0;2\pi]\times[0;2]} x_2^2 \sin^2 x_1\, dx_1 dx_2;$

4) $\int\limits_{[1;2]\times[3;4]} (x_1 + x_2)^{-2}\, dx_1 dx_2;$

5) $\int\limits_{[0;1]^2} (x_1 \operatorname{sh} x_2 + \operatorname{ch} x_1)\, dx_1 dx_2;$

6) $\int\limits_{[-1;1]\times[-2;2]} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\, dx_1 dx_2,$
де $f \in C^{(2)}(\mathbb{R}^2);$

7) $\int\limits_{[0;1]^3} x_1 x_2^2 x_3^3\, dx_1 dx_2 dx_3;$

8) $\int\limits_{[0;1]\times[0;2]\times[0;3]} (x_1 + x_2 + x_3)\, dx_1 dx_2 dx_3;$

9) $\int\limits_{[0;1]\times[1;2]\times[2;3]} (x_1 \sqrt{x_3} \cos x_2 + x_1 x_2)\, dx_1 dx_2 dx_3;$

10) $\int\limits_{[0;1]^n} (x_1 + x_2^3 + x_3^7 + \ldots + x_n^{2^n - 1})\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$

4.11. Знайти похідні функцій:

1) $f(x) = \int\limits_{[0;x]\times[0;x^2]} x_1 x_2 e^{-x_1 x_2^2}\, dx_1 dx_2,\ x \in (0; +\infty);$

2) $f(x) = \int\limits_{[0;x]^2} x_1 \ln(1 + x_1 x_2)\, dx_1 dx_2,\ x \in (0; +\infty);$

3) $f(x) = \int\limits_{[1;x]\times[x;1+x]} x_1^2 x_2^3\, dx_1 dx_2,\ x \in (1; +\infty);$

4) $f(x) = \int\limits_{[0;2]\times[0;x]} |x_1 - 1| \cdot |x_2 - 1|\, dx_1 dx_2,\ x \in (0; +\infty);$

5) $f(x) = \int\limits_{[0;x^2]\times[0;1]} x_1 e^{-x_1^2 x_2}\, dx_1 dx_2,\ x \in (0; +\infty);$

6) $f(x) = \int\limits_{[-1;x]\times[-2;x]} (|x_1| + |x_2|)\, dx_1 dx_2,\ x \in (-1; +\infty);$

7) $f(x) = \int\limits_{[0;x]^2} \sqrt{x_1^5 x_2^3}\, dx_1 dx_2,\ x \in (0;+\infty);$

8) $f(x) = \int\limits_{[0;x^2]\times[0;x^3]} x_1 x_2 e^{x_1 - x_2}\, dx_1 dx_2,\ x \in (0;+\infty);$

9) $f(x) = \int\limits_{[0;x]^2} \sin(x_1 x_2)\, dx_1 dx_2,\ x \in (0;+\infty);$

10) $f(x) = \int\limits_{[0;x]^3} x_1 e^{x_3} \cos x_2\, dx_1 dx_2 dx_3,\ x \in (0;+\infty).$

4.2 Вимірні за Жорданом множини

Для $n \geq 0$ символом $Q(\nu_1, \ldots, \nu_m)$ позначимо m-вимірний куб

$$Q(\nu_1, \ldots, \nu_m) = \prod_{k=1}^{m} \left[\frac{\nu_k}{2^n}; \frac{\nu_k + 1}{2^n}\right], \quad (\nu_1, \ldots, \nu_m) \in \mathbb{Z}^m.$$

При фіксованому $n \geq 0$ два різні такі куби не мають спільних внутрішніх точок. Для обмеженої множини A в $\mathbb{R}^m$ означимо скінченні об'єднання брусів

$$A_{(n)} := \bigcup_{Q(\nu_1,\ldots,\nu_m)\subset A} Q(\nu_1, \ldots, \nu_m), \quad A^{(n)} := \bigcup_{Q(\nu_1,\ldots,\nu_m)\cap A\neq\varnothing} Q(\nu_1, \ldots, \nu_m),$$

$$\Delta A_{(n)} := \bigcup_{\substack{Q(\nu_1,\ldots,\nu_m)\cap A \neq \varnothing, \\ Q(\nu_1,\ldots,\nu_m)\cap(\mathbb{R}^m \setminus A) \neq \varnothing}} Q(\nu_1, \ldots, \nu_m).$$

Мірою Жордана об'єднання брусів без спільних внутрішніх точок називається сума їх мір.

Внутрішньою мірою обмеженої множини A називається число

$$m_*(A) = \sup_{n\geq 0} m(A_{(n)}) = \lim_{n\to\infty} m(A_{(n)}).$$

Зовнішньою мірою обмеженої множини A називається число

$$m^*(A) = \inf_{n\geq 0} m(A^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} m(A^{(n)}).$$

Обмежена множина A називається *вимірною за Жорданом*, якщо

$$m_*(A) = m^*(A).$$

Число $m(A) = m_*(A) = m^*(A)$ називається *мірою Жордана* вимірної множини.

Приклад. Довести, що множина $A = \{(x_1, x_2) \mid |x_2| \leq x_1 \leq 1\}$ вимірна за Жорданом у $\mathbb{R}^2$, та знайти її міру Жордана.

⌈ Для $n \geq 1$

$$A_{(n)} = \bigcup_{j=1}^{2^n-1} \bigcup_{k=-j}^{j-1} \left[\frac{j}{2^n}; \frac{j+1}{2^n}\right] \times \left[\frac{k}{2^n}; \frac{k+1}{2^n}\right],$$

$$A^{(n)} = \bigcup_{j=-1}^{2^n-1} \bigcup_{k=-j-2}^{j+1} \left[\frac{j}{2^n}; \frac{j+1}{2^n}\right] \times \left[\frac{k}{2^n}; \frac{k+1}{2^n}\right] \cup \bigcup_{k=-2^n-1}^{2^n} \left[1; 1 + \frac{1}{2^n}\right] \times \left[\frac{k}{2^n}; \frac{k+1}{2^n}\right],$$

тому

$$m_*(A) = \lim_{n\to\infty} m(A_{(n)}) = \lim_{n\to\infty} 2^{-2n}(2^n-1)2^n = 1,$$

$$m^*(A) = \lim_{n\to\infty} m(A^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} 2^{-2n}\big((2^n+1)(2^n+2)+2(2^n+1)\big) = 1.$$

З рівностей $m_*(A) = m^*(A) = 1$ випливають вимірність множини A і рівність $m(A) = 1$. ⌋

4.12. Нехай

$$A = \{(x_1, x_2) |\; x_1 \ge 0,\; x_2 \ge 0,\; x_1 + x_2 \le 1\}.$$

1) Для $n \ge 0$ визначити множини $A_{(n)}$, $A^{(n)}$, $\Delta A_{(n)}$ і обчислити їх міри Жордана.
2) Знайти внутрішню й зовнішню міри Жордана множини A, довести вимірність множини та знайти її міру.

4.13. Довести, що будь-яка обмежена підмножина прямої в $\mathbb{R}^2$ є вимірною за Жорданом, знайти її міру.

4.14. Знайти внутрішню й зовнішню міри Жордана множини

$$A = [0;1] \cap \mathbb{Q}.$$

Чи вимірна ця множина?

4.15. Довести, що прямокутник $Q = [a;b] \times [c;d]$ є вимірною за Жорданом множиною в $\mathbb{R}^2$ і має міру $m(Q) = (b-a)(d-c)$.

4.16. Чи завжди об'єднання зліченної сім'ї вимірних за Жорданом множин є вимірною множиною?

4.17. Канторова множина. Нехай $\alpha \in (0;1)$. Означимо

$$A_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{4}; \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{4}\right), \quad K_1 = [0;1] \setminus A_1,$$

$$A_2 = \left(\frac{1}{4} - \frac{3\alpha}{16}; \frac{1}{4} - \frac{\alpha}{16}\right) \cup \left(\frac{3}{4} + \frac{\alpha}{16}; \frac{3}{4} + \frac{3\alpha}{16}\right), \quad K_2 = K_1 \setminus A_2$$

і т. д. На n-му кроці з множини K_{n-1} вилучається об'єднання 2^{n-1} інтервалів, середина кожного з яких збігається із серединою відповідного відрізка множини K_{n-1} і довжина дорівнює $2^{1-2n}\alpha$. Покладемо $K := \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n$. Множина K називається *канторовою*. Довести, що канторова множина: а) незліченна; б) компактна; в) не містить жодного інтервалу; г) невимірна за Жорданом.

4.18. Для множини $A \subset \mathbb{R}^2$ і $n \ge 0$ знайти $m(A_{(n)})$, $m(A^{(n)})$, $m(\Delta A_{(n)})$. Знайти внутрішню й зовнішню міри Жордана та довести вимірність множини A. Знайти $m(A)$.

1) $A = [0;1] \times [0;2]$;

2) $A = [-1; 1]^2$;
3) $A = [-1; 1] \times [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$;
4) $A = \{(x_1, x_2) |\ 0 \le x_1 \le x_2 \le 1\}$;
5) $A = \{(x_1, x_2) |\ |x_1| + |x_2| \le 1\}$;
6) $A = \{(x_1, x_2) |\ |x_1| \le x_2 \le 1\}$;
7) $A = \{(x_1, x_2) |\ 1 \le x_2 \le x_1 \le 2\}$;
8) $A = \{(x_1, x_2) |\ |x_1| \le |x_2| \le 1\}$;
9) $A = \{(x_1, x_2) |\ x_1 \le 0,\ x_2 \le 0,\ x_1 + x_2 \ge -2\}$;
10) $A = \{(x_1, x_2) |\ x_1 = 1,\ 0 \le x_2 \le 1\}$.

4.19. Довести вимірність за Жорданом циліндричних множин:
1) $A = \{(x_1, x_2) |\ 0 \le x_2 \le \sqrt{x_1},\ x_1 \in [1; 3]\}$;
2) $A = \{(x_1, x_2) |\ 0 \le x_2 \le \sin x_1,\ x_1 \in [0; \pi]\}$;
3) $A = \{(x_1, x_2) |\ 0 \le x_2 \le \ln x_1,\ 1 \le x_1 \le 2\}$;
4) $A = \{(x_1, x_2) |\ |x_2| \le \operatorname{arctg} x_1,\ 0 \le x_1 \le 1\}$;
5) $A = \{(x_1, x_2) |\ 0 \le x_2 \le e^{x_1},\ 0 \le x_1 \le 1\}$;
6) $A = \{(x_1, x_2) |\ |x_2| \le \sqrt[3]{x_1},\ 1 \le x_1 \le 2\}$;
7) $A = \{(x_1, x_2) |\ 0 \le x_2 \le \sqrt[4]{x_1},\ 0 \le x_1 \le 1\}$;
8) $A = \{(x_1, x_2) |\ 0 \le x_2 \le \cos x_1,\ 0 \le x_1 \le \frac{\pi}{2}\}$;
9) $A = \{(x_1, x_2) |\ |x_2| \le x_1^2,\ -1 \le x_1 \le 1\}$;
10) $A = \{(x_1, x_2) |\ \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \le 1\}$;
11)* $A = \{(x_1, x_2, x_3) |\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_1 + x_2 \le 1,\ 0 \le x_3 \le 1\}$;
12)* $A = \{(x_1, x_2, x_3) |\ 0 \le x_3 \le \ln x_1,\ (x_1, x_2) \in [1; 2] \times [0; 1]\}$.

4.3 Обчислення інтегралів по циліндричних множинах

Нехай множина $A \subset \mathbb{R}^m$ вимірна за Жорданом, $f \in C(A)$ і обмежена. За означенням,

$$\int\limits_A f(\vec{x})\, d\vec{x} := \lim_{n\to\infty} \int\limits_{A_{(n)}} f(\vec{x})\, d\vec{x}.$$

Нехай множина $A \subset \mathbb{R}^{m-1}$, число $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ фіксоване, функції $u_1, u_2 : A \to \mathbb{R}$ задовольняють нерівність

$$u_1(\vec{x}^{(k)}) \le u_2(\vec{x}^{(k)}), \quad \vec{x}^{(k)} \in A, \text{ де } \vec{x}^{(k)} = (x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_m).$$

Множина

$$C = \{\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid u_1(\vec{x}^{(k)}) \le x_k \le u_2(\vec{x}^{(k)}), \quad \vec{x}^{(k)} \in A\}$$

називається *циліндричною* у напрямку осі x_k з основою $baC := A$.

Теорема. Нехай основа baC циліндричної множини C компактна і вимірна за Жорданом, функції $u_1,\ u_2$ неперервні на baC. Тоді:

1) множина C компактна і вимірна за Жорданом;
2) неперервна функція $f : C \to \mathbb{R}$ інтегровна і

$$\int\limits_C f(\vec{x})\,d\vec{x} = \int\limits_{baC} \left(\int\limits_{u_1(\vec{x}^{(k)})}^{u_2(\vec{x}^{(k)})} f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_m)\,dx_k \right) d\vec{x}^{(k)}.$$

Наслідок. За умов теореми

$$m(C) = \int\limits_{baC} (u_2(\vec{x}^{(k)}) - u_1(\vec{x}^{(k)}))\,d\vec{x}^{(k)}.$$

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int\limits_C (x_1 + x_3)\,dx_1dx_2dx_3$, де

$$C = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 \ge x_2 \ge 0,\ x_1 + x_2 \le 2,\ x_3 \ge 0,\ x_2 + x_3 \le 1\}.$$

⌈ Множина C циліндрична у напрямку осі x_3 з основою

$$baC = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \ge x_2 \ge 0,\ x_1 + x_2 \le 2\}$$

і функціями $u_1(x_1, x_2) = 0$, $u_2(x_1, x_2) = 1 - x_2$, $(x_1, x_2) \in baC$. Згідно з теоремою,

$$\int\limits_C (x_1 + x_3)\,dx_1dx_2dx_3 = \int\limits_{baC} \left(\int\limits_{u_1(x_1,x_2)}^{u_2(x_1,x_2)} (x_1 + x_3)\,dx_3 \right) dx_1dx_2 =$$

$$= \int\limits_{baC} \left(\int\limits_0^{1-x_2} (x_1 + x_3)\,dx_3 \right) dx_1dx_2 = \int\limits_{baC} \left(x_1(1 - x_2) + \frac{(1 - x_2)^2}{2} \right) dx_1dx_2.$$

Основа $A = baC$ в свою чергу є циліндричною множиною в $\mathbb{R}^2$ у напрямку осі x_1 з основою $baA = [0; 1]$ і функціями $v_1(x_2) = x_2$, $v_2(x_2) = 2 - x_2$, $x_2 \in [0; 1]$. Тому

$$\int\limits_{baC} \left(x_1(1 - x_2) + \frac{(1 - x_2)^2}{2} \right) dx_1dx_2 =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{x_2}^{2-x_2} \left(x_1(1 - x_2) + \frac{(1 - x_2)^2}{2} \right) dx_1 \right) dx_2 =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(2(1 - x_2)^2 + (1 - x_2)^3 \right) dx_2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{11}{12}.$$

⌋

Приклад 2. Обчислити об'єм n-вимірного симплекса

$$C_n(a) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 + x_2 + \ldots + x_n \le a,\ x_k \ge 0,\ k = 1, 2, \ldots, n\}.$$

⌈ Симплекс $C_n(a)$ можна розглядати як циліндричну множину в $\mathbb{R}^n$ у напрямку осі x_n з основою

$$baC_n(a) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \mid x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} \le a,\ x_k \ge 0,\ k = 1, 2, \ldots, n-1\}$$

і функціями $u_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = 0$, $u_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = a - x_1 - x_2 - \ldots - x_{n-1}$, $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in baC_n(a)$. Множина $baC_n(a)$ у свою чергу є $(n-1)$-вимірним симплексом $C_{n-1}(a)$ у напрямку осі x_{n-1} і т.д. Одновимірний симплекс – це вимірний за

Жорданом відрізок $[0;a] \subset \mathbb{R}$. Тому двовимірний симплекс є вимірною множиною і т.д. Таким чином встановлюється вимірність симплексів і рівність

$$m\big(C_n(a)\big) = \int\limits_0^a \left(\int\limits_0^{a-x_1} \ldots \left(\int\limits_0^{a-x_1-\ldots-x_{n-1}} dx_n\right)\ldots dx_2\right) dx_1 = \int\limits_0^a m\big(C_{n-1}(a-x_1)\big)dx_1.$$

З іншого боку, послідовними замінами $x_k = ay_k$, $k = 1, \ldots, n$, встановлюється рівність

$$m\big(C_n(a)\big) = a^n m\big(C_n(1)\big).$$

Тому

$$m\big(C_n(a)\big) = m\big(C_{n-1}(1)\big)\int\limits_0^a (a-x_1)^{n-1}\,dx_1 = \frac{a^n}{n} m\big(C_{n-1}(1)\big) =$$
$$= \frac{a^n}{n}\cdot\frac{1}{n-1} m\big(C_{n-2}(1)\big) = \ldots = \frac{a^n}{n!}.$$

⌋

Приклад 3. Обчислити об'єм n-вимірної кулі

$$B_n(a) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \le a^2\}, \quad a > 0.$$

⌈ Кулю $B_n(a)$ можна розглядати як циліндричну множину в $\mathbb{R}^n$ у напрямку осі x_n з основою

$$baB_n(a) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \mid x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 \le a^2\}$$

і функціями

$$u_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = -\sqrt{a^2 - (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2)},$$
$$u_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = \sqrt{a^2 - (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2)},$$

$(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in ba_nB(a)$. Множина $baB_n(a)$ у свою чергу є $(n-1)$-вимірною кулею $B_{n-1}(a)$ у напрямку осі x_{n-1} і т.д. Таким чином встановлюється вимірність куль і рівність

$$m\big(B_n(a)\big) = \int\limits_{-a}^a m\Big(B_{n-1}\big(\sqrt{a^2 - x_1^2}\big)\Big)dx_1.$$

З іншого боку, послідовними замінами $x_k = ay_k$, $k = 1, \ldots, n$, встановлюється рівність

$$m\big(B_n(a)\big) = a^n m\big(B_n(1)\big).$$

Тому

$$m\big(B_n(a)\big) = a^n m\big(B_{n-1}(1)\big)\int\limits_{-1}^1 (1-x^2)^{(n-1)/2}\,dx = a^n m\big(B_{n-1}(1)\big) B\left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) =$$
$$= a^n m\big(B_{n-2}(1)\big) B\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right) B\left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) =$$
$$= a^n m\big(B_1(1)\big) B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \ldots B\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right) B\left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) = a^n \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

У випадку парного числа $n = 2k$, $k \ge 1:$

$$m\big(B_{2k}(a)\big) = \frac{\pi^k a^{2k}}{k!}.$$

У випадку непарного числа $n = 2k+1$, $k \geq 0$:

$$m(B_{2k+1}(a)) = \frac{2^{k+1}\pi^k a^{2k+1}}{(2k+1)!!}.$$

$\rfloor$

4.20. Нехай $A = \{(x_1, x_2) |\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_1 + x_2 \leq 1\}$. Обчислити за означенням інтеграл

$$\int\limits_A x_1\, dx_1 dx_2.$$

4.21. Нехай A – вимірна за Жорданом множина в $\mathbb{R}^2$, f – неперервна обмежена функція на A. Звести інтеграл $\int\limits_A f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2$ до повторного всіма можливими способами:

1) $A = \{(x_1, x_2) |\ x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$;
2) $A = \{(x_1, x_2) |\ 1 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 4\}$;
3) A – трикутник з вершинами в точках $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$;
4) $A = \{(x_1, x_2) |\ x_1^2 \leq x_2 \leq 1,\ x_1 \in [0; 1]\}$.

4.22. Для функції $f \in C(\mathbb{R}^2)$ змінити порядок інтегрування в інтегралах:

1) $\int\limits_0^1 \Big(\int\limits_{x_1^3}^{x_1^2} f(x_1, x_2)\, dx_2\Big) dx_1$;
2) $\int\limits_0^2 \Big(\int\limits_{\sqrt{2x_1 - x_1^2}}^{\sqrt{2x_1}} f(x_1, x_2)\, dx_2\Big) dx_1$.

4.23. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

1) $x_1 x_2 = a^2,\ x_1 + x_2 = \dfrac{5a}{2}$, де $a > 0$;
2) $x_2^2 = 2x_1 + 1,\ x_2^2 = -4x_1 + 4$.

4.24. Нехай $A = \{(x_1, x_2) |\ 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1\}$, $f \in C([0; 1])$, $n \in \mathbb{N}$. Звести до інтеграла Рімана подвійний інтеграл

$$\int\limits_A f(x_1)(x_2 - x_1)^n\, dx_1 dx_2.$$

4.25. Нехай $A(t) = \{(x_1, x_2) |\ 0 \leq x_2 \leq (x_1 + t)^2,\ 0 \leq x_1 \leq 1\}$,

$$F(t) = \int\limits_{A(t)} x_1 e^{\sqrt{x_2}}\, dx_1 dx_2,\ t \geq 0.$$

Обчислити $F'(t)$ на $[0; +\infty)$.

4.26. Нехай A – вимірна за Жорданом множина в $\mathbb{R}^2$, f – неперервна обмежена функція на A. Звести інтеграл $\int\limits_A f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2$ до повторного всіма можливими способами, якщо:

1) A – трикутник з вершинами у точках $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(1, -2)$;

2) A – трапеція з вершинами у точках $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,2)$, $(0,1)$;
3) $A = \{(x_1,x_2)|\ x_1^2 + x_2^2 \le x_1\}$;
4) A обмежена кубічними параболами $x_2 = x_1^3$, $x_1 = x_2^3$;
5) A – паралелограм зі сторонами $x_2 = x_1$, $x_2 = x_1 + 3$, $x_2 = -2x_1 + 1$, $x_2 = -2x_1 + 5$;
6) A обмежена гіперболою $x_2^2 - x_1^2 = 1$ і колом $x_1^2 + x_2^2 = 4$;
7) A – трикутник зі сторонами $x_2 = x_1$, $x_2 = 2x_1$, $x_1 + x_2 = 6$;
8) $A = \{(x_1,x_2)|\ x_2 \ge x_1^2,\ x_2 \le 4 - x_1^2\}$;
9) $A = \{(x_1,x_2)|\ x_2 - 2x_1 \le 0,\ 2x_2 - x_1 \ge 0,\ x_1x_2 \le 2\}$;
10) $A = \{(x_1,x_2)|\ x_1 + x_2 \le 1,\ x_1 - x_2 \le 1,\ x_1 \ge 0\}$.

4.27. Для функції $f \in C(\mathbb{R}^2)$ змінити порядок інтегрування в інтегралах:

1) $\int\limits_0^4 \Big(\int\limits_{x_1}^{2x_1} f(x_1,x_2)\,dx_2 \Big) dx_1$;
2) $\int\limits_{-6}^2 \Big(\int\limits_{\frac{x_1}{4}-1}^{2-x_1} f(x_1,x_2)\,dx_2 \Big) dx_1$;
3) $\int\limits_1^e \Big(\int\limits_0^{\ln x_1} f(x_1,x_2)\,dx_2 \Big) dx_1$;
4) $\int\limits_{-1}^1 \Big(\int\limits_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{1-x_1^2} f(x_1,x_2)\,dx_2 \Big) dx_1$;
5) $\int\limits_1^2 \Big(\int\limits_{2-x_1}^{\sqrt{2x_1-x_1^2}} f(x_1,x_2)\,dx_2 \Big) dx_1$;
6) $\int\limits_0^{2\pi} \Big(\int\limits_0^{\sin x_1} f(x_1,x_2)\,dx_2 \Big) dx_1$;
7) $\int\limits_{-2}^2 \Big(\int\limits_{-\sqrt{2-x_1^2/2}}^{\sqrt{2-x_1^2/2}} f(x_1,x_2)\,dx_2 \Big) dx_1$;
8) $\int\limits_0^1 \Big(\int\limits_{x_2}^{\sqrt{x_2}} f(x_1,x_2)\,dx_1 \Big) dx_2$;
9)* $\int\limits_0^1 \Big(\int\limits_0^{x_1^{2/3}} f(x_1,x_2)\,dx_2 \Big) dx_1 + \int\limits_1^2 \Big(\int\limits_0^{1-\sqrt{4x_1-x_1^2-3}} f(x_1,x_2)\,dx_2 \Big) dx_1$;
10) $\int\limits_{-\pi/2}^{3\pi/2} \Big(\int\limits_{-1}^{\sin x_1} f(x_1,x_2)\,dx_2 \Big) dx_1 + \int\limits_{\pi/2}^{5\pi/2} \Big(\int\limits_{\sin x_1}^{1} f(x_1,x_2)\,dx_2 \Big) dx_1$.

4.28. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

1) $(x_1 - x_2)^2 + x_1^2 = 1$;
2) $x_1 = x_2,\ x_1 = 2x_2,\ x_1 + x_2 = 4,\ x_1 + 3x_2 = 4$;
3) $x_1x_2 = 1,\ x_1x_2 = 4,\ x_2 = 3,\ x_2 = 5$;
4) $x_1 = x_2,\ x_2 = 5x_1,\ x_1 = 1$;
5) $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = 1,\ x_1 + x_2 = 1$;
6) $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} = 1,\ \{a,b\} \subset (0,+\infty)$;
7) $x_2^2 = 10x_1 + 25,\ x_2^2 = -6x_1 + 9$;

8) $x_1^2x_2 = 4,\ x_1^2x_2 = 9,\ x_2 = 1,\ x_2 = 2;$

9) $\cos x_1 - x_2 + 1 = 0,\ x_1 = 0,\ x_1 = \pi,\ x_2 = 0.$

4.29. Нехай $f \in C(\mathbb{R}^3)$. Різними можливими способами розставити межі інтегрування в інтегралах:

1) $\int\limits_{-1}^{1}\Big(\int\limits_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{\sqrt{1-x_1^2}}\Big(\int\limits_{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}^{1} f(x_1,x_2,x_3)\,dx_3\Big)dx_2\Big)dx_1;$

2) $\int\limits_{0}^{1}\Big(\int\limits_{0}^{1-x_1}\Big(\int\limits_{0}^{x_1+x_2} f(x_1,x_2,x_3)\,dx_3\Big)dx_2\Big)dx_1;$

3) $\int\limits_{0}^{1}\Big(\int\limits_{0}^{1}\Big(\int\limits_{0}^{x_1^2+x_2^2} f(x_1,x_2,x_3)\,dx_3\Big)dx_2\Big)dx_1;$

4) $\int\limits_{0}^{1}\Big(\int\limits_{0}^{1-x_1}\Big(\int\limits_{0}^{x_2} f(x_1,x_2,x_3)\,dx_3\Big)dx_2\Big)dx_1;$

5) $\int\limits_{0}^{1}\Big(\int\limits_{0}^{x_1}\Big(\int\limits_{0}^{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} f(x_1,x_2,x_3)\,dx_3\Big)dx_2\Big)dx_1;$

6) $\int\limits_{-2}^{2}\Big(\int\limits_{0}^{\sqrt{4-x_1^2}}\Big(\int\limits_{1}^{2} f(x_1,x_2,x_3)\,dx_3\Big)dx_2\Big)dx_1;$

7) $\int\limits_{0}^{1}\Big(\int\limits_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{0}\Big(\int\limits_{0}^{1-\sqrt{x_1^2+x_2^2}} f(x_1,x_2,x_3)\,dx_3\Big)dx_2\Big)dx_1;$

8) $\int\limits_{-1}^{1}\Big(\int\limits_{0}^{\sqrt{1-x_1^2}}\Big(\int\limits_{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}^{2\sqrt{x_1^2+x_2^2}} f(x_1,x_2,x_3)\,dx_3\Big)dx_2\Big)dx_1;$

9) $\int\limits_{0}^{1}\Big(\int\limits_{0}^{1}\Big(\int\limits_{0}^{x_1+x_2+1} f(x_1,x_2,x_3)\,dx_3\Big)dx_2\Big)dx_1;$

10) $\int\limits_{-1}^{1}\Big(\int\limits_{-1}^{1}\Big(\int\limits_{0}^{x_1+x_2+2} f(x_1,x_2,x_3)\,dx_3\Big)dx_2\Big)dx_1;$

11) $\int\limits_{0}^{1}\Big(\int\limits_{0}^{x_1}\Big(\int\limits_{0}^{x_1^2+x_2^2} f(x_1,x_2,x_3)\,dx_3\Big)dx_2\Big)dx_1;$

12) $\int\limits_{0}^{1}\Big(\int\limits_{x_1}^{1}\Big(\int\limits_{0}^{x_1+x_2} f(x_1,x_2,x_3)\,dx_3\Big)dx_2\Big)dx_1.$

4.30. Нехай $f \in C([0;1])$. Замінити однократним інтеграл

$$\int_0^1 \Big(\int_0^{x_1} \Big(\int_0^{x_2} f(x_3)\, dx_3\Big) dx_2\Big) dx_1.$$

4.31. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями

1) $x_3 = x_1^2 + x_2^2$, $x_3 = 2(x_1^2 + x_2^2)$, $x_1 = x_2$, $x_2 = x_1^2$;
2) $6x_3 = x_1^2 + x_2^2$, $x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$;
3) $x_3 = x_1 + x_2,\ x_3 = x_1 x_2,\ x_1 + x_2 = 1,\ x_1 = 0,\ x_2 = 0$;
4) $x_1^2 + x_3^2 = 1,\ x_1 + x_2 = \pm 1,\ x_1 - x_2 = \pm 1$;
5) $x_3 = 1 - x_1^2 - x_2^2,\ x_3 = 1 - x_1 - x_2,\ x_i = 0,\ i = 1, 2, 3$;
6) $x_3 = 6 - x_1^2 - x_2^2,\ x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$;
7) $x_3 = 4 - x_2^2,\ x_3 = x_2^2 + 2,\ x_1 = -1,\ x_1 = 2$;
8) $x_3 = x_1^2 + x_2^2,\ x_3 = x_1^2 + 2x_2^2,\ x_2 = x_1,\ x_2 = 2x_1,\ x_1 = 1$;
9) $x_3 = x_1^2 + x_2^2,\ x_3 = 2(x_1^2 + x_2^2),\ x_2 = x_1^2,\ x_2 = x_1^3$;
10) $x_3 = \ln(x_1 + 2),\ x_3 = \ln(6 - x_1),\ x_1 = 0,\ x_1 + x_2 = 2,\ x_1 - x_2 = 2$;
11) $x_3 = x_1^2 + x_2^2,\ x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$;
12) $x_3 = x_1^2 + x_2^2,\ x_3 = 2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

4.32. Зобразити одне з можливих тіл, об'єм якого дорівнює наведеному інтегралу. Виразити цей об'єм через потрійний інтеграл:

1) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^{1-x_1} (x_1^2 + x_2^2)\, dx_2\right) dx_1$;
2) $\displaystyle\int_A \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{4} - \frac{x_2^2}{9}}\, dx_1 dx_2$, де $A = \left\{(x_1, x_2) \mid \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} \le 1\right\}$;
3) $\int_A (x_1 + x_2)\, dx_1 dx_2,\ A = \{(x_1, x_2) \mid 0 \le x_1 + x_2 \le 2,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0\}$;
4) $\int_A \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\, dx_1 dx_2,\ A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le x_2\}$;
5) $\int_A (x_1^2 + x_2^2)\, dx_1 dx_2,\ A = \{(x_1, x_2) \mid |x_1| + |x_2| \le 2\}$;
6) $\int_A \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\, dx_1 dx_2,\ A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 4\}$;
7) $\int_A (1 - x_1^2 - x_2^2)\, dx_1 dx_2,\ A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$;
8) $\int_A (1 - x_1 - x_3)\, dx_1 dx_3,\ A = \{(x_1, x_3) \mid 0 \le x_1 + x_3 \le 1,\ x_1 \ge 0,\ x_3 \ge 0\}$;
9) $\int_A \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\, dx_1 dx_2,\ A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1,\ 0 \le x_1 \le x_2\}$;

10)* $\int\limits_A \sin\left(\pi\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)\,dx_1dx_2$, $A=\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2\le 1\}$.

4.33. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

1) $x_3=x_1^2+x_2^2,\quad x_2=x_1^2,\quad x_2=1,\quad x_3=0;$

2) $x_3=1+x_1+x_2,\ x_3=0,\ x_1+x_2=1,\ x_1=0,\ x_2=0;$

3) $x_1+x_2+x_3=2,\ x_1^2+x_2^2=1,\ x_i=0,\ i=1,2,3;\ x_i\ge 0,\ i=1,2;$

4) $x_3=\cos x_1\cos x_2,\ x_3=0,\ |x_1+x_2|\le\frac{\pi}{2},\ |x_1-x_2|\le\frac{\pi}{2};$

5) $x_3=x_1x_2,\ x_1+x_2+x_3=1,\ x_3=0;\ x_i\ge 0,\ i=1,2,3;$

6) $x_3=x_1^2+x_2^2+1,\ x_1=4,\ x_2=4,\ x_i=0,\ i=1,2,3;$

7) $3x_1+x_2=6,\ 3x_1+2x_2=12,\ x_1+x_2+x_3=6,\ x_2=0,\ x_3=0;$

8) $x_3=x_1^2+x_2^2,\ x_1+x_2=1,\ x_i=0,\ i=1,2,3;$

9) $x_3=x_1^2+x_2^2,\ x_3=0,\ x_2=1,\ x_2=2x_1,\ x_2=6-x_1;$

10) $x_2=\sqrt{x_1},\ x_2=2\sqrt{x_1},\ x_1+x_3=6,\ x_3=0;$

11) $x_3=9-x_2^2,\ 3x_1+4x_2=12,\ x_i=0,\ i=1,2,3.$

4.34. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_C \dfrac{dx_1dx_2dx_3}{(2+x_1+x_2+x_3)^3}$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1+x_2+x_3=2,\ x_i=0,\ i=1,2,3;$

2) $\int\limits_C x_1x_2^2x_3^3\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_3=x_1x_2$, $x_2=x_1,\ \ x_1=1,\ x_3=0,\ x_1\ge x_2,\ x_i\ge 0,\ i=1,2,3;$

3) $\int\limits_C x_1x_2x_3\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$, $x_i=0,\ i=1,2,3,\ x_i\ge 0,\ i=1,2,3;$

4) $\int\limits_C x_1\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_2=1,\ x_1+x_3=2$, $x_i=0,\ i=1,2,3;$

5) $\int\limits_C (1+3x_1x_2x_3+x_1^2x_2^2x_3^2)e^{x_1x_2x_3}\,dx_1dx_2dx_3$, де $C=[0;1]\times[0;1]\times[0;1];$

6) $\int\limits_C x_1x_2x_3\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1^2+x_2^2=1$, $x_3=0,\ x_3=1;$

7) $\int\limits_C x_3\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $|x_1|+|x_2|=1,\ x_3=0$, $x_3=\sqrt{x_1^2+x_2^2};$

8) $\int\limits_C x_1x_2\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $|x_1|+|x_2|=1$, $x_3=0,\ x_3=x_1^2+x_2^2;$

9) $\int\limits_C (x_1 + x_2)\, dx_1 dx_2 dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1 - x_3 = 0$, $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, $x_i = 0,\ i = 1, 3$;

10) $\int\limits_C (1 + x_1)^{-1}\, dx_1 dx_2 dx_3$, де $C = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1,\ x_1 \ge 0,$ $x_2 \ge 0,\ 0 \le x_3 \le x_1 x_2, \}$;

11) $\int\limits_C (x_2 + x_3)\, dx_1 dx_2 dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1^2 + x_2^2 = 1$, $x_1 = x_2$, $x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $x_1 = 0$, $x_3 = 0$;

12) $\int\limits_C (x_1 - x_3)\, dx_1 dx_2 dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_3 = 2\sqrt{x_1 x_2}$, $x_1 = x_2$, $x_1 = 1$, $x_i = 0$, $i = 2, 3$;

13) $\int\limits_C (1 + x_1 + x_2 + x_3)^{-2}\, dx_1 dx_2 dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, $x_i = 0$, $i = 1, 2, 3$.

4.35. Обчислити m-кратні інтеграли:

1) $\int\limits_{[0;1]^m} (x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^2\, dx_1 dx_2 \ldots dx_m$;

2) $\int\limits_{[0;1]^m} (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_m$;

3) $\int\limits_{[0;1]\times[0;1]\times[0;2]^{m-2}} (x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_m^3)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_m$;

4) $\int\limits_{[0;\pi]^m} \sin(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_m$;

5) $\int\limits_{[-\pi;\pi]^m} \cos^2(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_m$;

6) $\int\limits_{[0;1]\times[0;2]^{m-1}} (x_1 + x_2^2 + x_3^3 + \ldots + x_m^m)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_m$;

7) $\int\limits_{[0;1]\times[0;2]\times[0;1]^{m-2}} (x_1 - x_2 + x_3 - \ldots + (-1)^{m+1} x_m)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_m$;

8) $\int\limits_{[0;1]^m} (e^{x_1 - x_2} + e^{x_2 - x_3} + \ldots + e^{x_{m-1} - x_m} + e^{x_m - x_1})\, dx_1 dx_2 \ldots dx_m$;

9) $\int\limits_{[0;\pi]^m} (\sin x_1 + \sin 2x_2 + \ldots + \sin m x_m)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_m$;

10) $\int\limits_{[-\pi;\pi]^m} \left(\cos x_1 + \cos \frac{x_2}{2} + \ldots + \cos \frac{x_m}{m}\right)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_m$.

4.36. Обчислити інтеграли по m-вимірному симплексу A (див. приклад 2):

1) $\int\limits_A \sqrt{x_1 + x_2 + \ldots + x_m}\, dx_1 dx_2 \ldots dx_m$;

2) $\int\limits_A x_1 x_2 \ldots x_m \, dx_1 dx_2 \ldots dx_m$.

4.37. Для функції $f \in C([0;+\infty))$ довести рівність

$$\int\limits_0^t \Bigl(\int\limits_0^{x_1} \Bigl(\int\limits_0^{x_2} \Bigl(\ldots \Bigl(\int\limits_0^{x_{m-1}} f(x_1)f(x_2)\ldots f(x_m)\,dx_m\Bigr)\ldots\Bigr)dx_3\Bigr)dx_2\Bigr)dx_1 =$$

$$= \frac{1}{m!}\left(\int\limits_0^t f(x)\,dx\right)^m, \quad t \geq 0.$$

Вказівка. Показати, що обидві частини рівності є розв'язком однієї й тієї самої задачі Коші.

4.4 Формула заміни змінних у кратному інтегралі

Нехай U – відкрита множина в $\mathbb{R}^m$, $U \supset B$ – компактна і вимірна за Жорданом підмножина. Припустимо, що відображення $\vec{g} = (g_1, \ldots, g_m) : U \to \mathbb{R}^m$ задовольняє умови:

1) $\vec{g}$ – бієкція B на $\vec{g}(B)$;

2) $\vec{g} \in C^{(1)}(U)$;

3) $\forall\, \vec{x} \in B: \; J(\vec{x}) := \dfrac{\partial(g_1, \ldots, g_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_m)}(\vec{x}) \neq 0$.

Тоді множина $A = \vec{g}(B)$ компактна вимірна за Жорданом, для функції $f \in C(A)$ має місце *формула заміни змінних* у кратному інтегралі:

$$\int\limits_A f(\vec{y})\,d\vec{y} = \int\limits_B f(\vec{g}(\vec{x}))\bigl|J(\vec{x})\bigr|\,d\vec{x}.$$

Зокрема,

$$m(\vec{g}(B)) = \int\limits_B \bigl|J(\vec{x})\bigr|\,d\vec{x}.$$

Можна показати, що формула заміни змінних має місце у випадках, коли умови $1), \ 3)$ порушуються на множині нульової міри Жордана.

Приклад 1. Обчислити інтеграл

$$\int\limits_A \sqrt[3]{x_1^2 + x_2^2}\,dx_1 dx_2,$$

де $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1, \ x_1 + x_2 \geq 0\}$.

⌈ Множина A є образом прямокутника $B = [0;1] \times [-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}]$ при відображенні $x_1 = g_1(r,\varphi) = r\cos\varphi$, $x_2 = g_2(r,\varphi) = r\sin\varphi$. Це відображення визначає перехід до полярних координат. Воно має якобіан $J(r,\varphi) = \dfrac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(r,\varphi)} = r$ і задовольняє умови теореми в усіх точках множини B, за винятком відрізка $\{0\} \times [-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}]$ міри нуль. Тому

$$\int\limits_A \sqrt[3]{x_1^2 + x_2^2}\,dx_1 dx_2 = \int\limits_{-\pi/4}^{3\pi/4} \left(\int\limits_0^1 r^{5/3}\,dr\right) d\varphi = \frac{3\pi}{8}.$$

⌋

Приклад 2. Обчислити площу фігури A, що лежить у четвертому квадранті площини $\mathbb{R}^2$ і обмежена лінією $(x_1 - x_2)^5 = 4x_1^2 x_2^2$.

$\lceil$ При заміні $x_1 = g_1(r,\varphi) = r\cos^2\varphi$, $x_2 = g_2(r,\varphi) = -r\sin^2\varphi$ множина A є образом вимірної циліндричної множини $B = \{(r,\varphi) \mid -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le 0,\ 0 \le r \le \frac{1}{4}\sin^4 2\varphi\}$. Якобіан відображення $\vec{g} = (g_1, g_2)$ дорівнює

$$J(r,\varphi) = \frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos^2\varphi & -r\sin 2\varphi \\ -\sin^2\varphi & -r\sin 2\varphi \end{vmatrix} = -r\sin 2\varphi \ge 0.$$

Відображення $\vec{g}$ вироджується в точках відрізка $\{0\} \times [-\frac{\pi}{2}; 0]$, що має міру нуль. Тому за теоремою про заміну змінних міра Жордана (площа) множини A дорівнює

$$m(A) = -\int_{-\pi/2}^{0} \left(\int_0^{1/4\,\sin^4 2\varphi} r\sin 2\varphi\, dr \right) d\varphi = -\frac{1}{32} \int_{-\pi/2}^{0} \sin^9 2\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{32} \int_0^{\pi/2} \sin^9 2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{64} \int_0^{\pi} \sin^9 \varphi\, d\varphi = \frac{1}{32} \int_0^{\pi/2} \sin^9 \varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{64} \mathrm{B}\left(5, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{64} \frac{\Gamma(5)\,\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)} = \frac{4}{315}. \qquad \rfloor$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл

$$\int_{-1}^{0} \Big(\int_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{0} \Big(\int_{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}^{3\sqrt{x_1^2+x_2^2}} x_1 x_2 x_3\, dx_3 \Big) dx_2 \Big) dx_1.$$

$\lceil$ Перейдемо до сферичних координат за формулами

$$x_1 = g_1(r,\varphi,\psi) = r\cos\varphi\cos\psi,\ \ x_2 = g_2(r,\varphi,\psi) = r\sin\varphi\cos\psi,\ \ x_3 = g_3(r,\varphi,\psi) = r\sin\psi.$$

$$B = \left\{ (r,\varphi,\psi) \;\middle|\; \pi \le \varphi \le \frac{3\pi}{2},\ \frac{\pi}{4} \le \psi \le \operatorname{arctg} 3,\ 0 \le r \le \frac{1}{\cos\psi} \right\}$$

при відображенні $\vec{g}$. Якобіан цього відображення

$$J(r,\varphi,\psi) = \frac{\partial(g_1,g_2,g_3)}{\partial(r,\varphi,\psi)} = r^2\cos\psi \ge 0 \quad \text{(див. задачу 2.126).}$$

Множина інтегрування є образом вимірної циліндричної множини Відображення $\vec{g}$ вироджується на множині $\{0\} \times \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right] \times \left[\frac{\pi}{4}; \operatorname{arctg} 3\right]$, що має жорданову міру нуль. Тому за формулою заміни змінних

$$\int_{-1}^{0} \Big(\int_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{0} \Big(\int_{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}^{3\sqrt{x_1^2+x_2^2}} x_1 x_2 x_3\, dx_3 \Big) dx_2 \Big) dx_1 =$$

$$= \int_{\pi}^{3\pi/2} \Big(\int_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 3} \Big(\int_0^{\cos^{-1}\psi} r^5 \cos\varphi\sin\varphi\cos^3\psi\sin\psi\, dr \Big) d\psi \Big) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{6} \int_{\pi}^{3\pi/2} \sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi \cdot \int_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 3} \cos^{-3}\psi\sin\psi\, d\psi = \frac{1}{3}.$$

⌋

Приклад 4. Знайти координати центра маси однорідного тіла, обмеженого поверхнями $x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $x_3 = \sqrt{2(x_1^2 + x_2^2)}$, $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

⌈ Координати центра маси однорідного тіла (множини A у тривимірному евклідовому просторі) визначаються формулами

$$x_i^0 = m^{-1}(A) \cdot \int\limits_A x_i \, d\vec{x}.$$

Потрібні інтеграли обчислимо, перейшовши до циліндричних координат за формулами

$$x_1 = g_1(r, \varphi, z) = r\cos\varphi, \quad x_2 = g_2(r, \varphi, z) = r\sin\varphi, \quad x_3 = g_3(r, \varphi, z) = z.$$

Тоді

$$A = \vec{g}(B), \ \text{ де } \ B = \{(r, \varphi, z) \mid 0 \le \varphi \le 2\pi, \ 0 \le r \le 1, \ r \le z \le \sqrt{2}r\}.$$

Якобіан відображення $\vec{g} = (g_1, g_2, g_3)$ дорівнює $J(r, \varphi, z) = \dfrac{\partial(g_1, g_2, g_3)}{\partial(r, \varphi, z)} = r$. Відображення $\vec{g}$ вироджується на плоскому прямокутнику $\{0\} \times [0; 2\pi] \times [0; \sqrt{2}]$, що має жорданову міру нуль. За формулою заміни змінних

$$m(A) = \int\limits_B |J(r, \varphi, z)| \, dr \, d\varphi \, dz = \int\limits_0^{2\pi} \left(\int\limits_0^1 \Big(\int\limits_r^{\sqrt{2}r} r \, dz \Big) dr \right) d\varphi = \frac{2(\sqrt{2} - 1)\pi}{3},$$

$$\int\limits_A x_1 \, d\vec{x} = \int\limits_B r^2 \cos\varphi \, dr \, d\varphi \, dz = \int\limits_0^{2\pi} \left(\int\limits_0^1 \Big(\int\limits_r^{\sqrt{2}r} r^2 \cos\varphi \, dz \Big) dr \right) d\varphi = 0,$$

$$\int\limits_A x_2 \, d\vec{x} = \int\limits_B r^2 \sin\varphi \, dr \, d\varphi \, dz = \int\limits_0^{2\pi} \left(\int\limits_0^1 \Big(\int\limits_r^{\sqrt{2}r} r^2 \sin\varphi \, dz \Big) dr \right) d\varphi = 0,$$

$$\int\limits_A x_3 \, d\vec{x} = \int\limits_B zr \, dr \, d\varphi \, dz = \int\limits_0^{2\pi} \left(\int\limits_0^1 \Big(\int\limits_r^{\sqrt{2}r} zr \, dz \Big) dr \right) d\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Звідси знаходимо координати центра маси $\vec{x}^{\,0} = \left(0, 0, \frac{3(\sqrt{2}+1)}{8}\right)$. ⌋

4.38. Нехай $A \subset \mathbb{R}^2$, $f \in C(A)$. В інтегралі $\int\limits_A f(x_1, x_2) \, dx_1 dx_2$ перейти до полярних координат, поклавши $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$. Звести одержаний інтеграл до повторного всіма можливими способами:

1) $A = \{(x_1, x_2) \mid 1 \le x_1^2 + x_2^2 \le 4\}$;
2) $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 2x_1\}$;
3) $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le \pi^2\}$;
4) $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 4, \ x_1 \le x_2\}$;
5) $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1, \ x_1 x_2 \ge 0\}$;
6) $A = \{(x_1, x_2) \mid 4 \le x_1^2 + x_2^2 \le 9, \ x_1 x_2 \le 0\}$;
7) $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \le x_1^2 + x_2^2 \le 2x_1\}$;
8) $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 9, \ x_1 \le 2x_2\}$;

9) $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1,\ |x_1| \le x_2\}$;
10) $A = \{(x_1, x_2) \mid 1 \le x_1^2 + x_2^2 \le 4,\ |x_1| \le |x_2|\}$;
11) $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 4x_2\}$;
12) $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 9,\ x_1 + x_2 \ge 0\}$.

4.39. Нехай $f \in C([0, +\infty))$. Перейти до полярних координат, поклавши $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$. Звести одержаний інтеграл до повторного всіма можливими способами:

1) $\int\limits_0^2 \left(\int\limits_{x_1}^{\sqrt{3}x_1} f\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) dx_2 \right) dx_1$;

2) $\int\limits_{\{(x_1,x_2) \mid \ x_1^2+x_2^2 \le 1\}} f\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) dx_1 dx_2$.

4.40. Нехай $f \in C(\mathbb{R})$. Перейти до полярних координат і замінити інтеграли однократними:

1) $\int\limits_A f(\sqrt{x_1^2 + x_2^2})\, dx_1 dx_2, \quad A = \{(x_1, x_2) \mid |x_2| \le |x_1| \le 1\}$;

2) $\int\limits_A f(x_2/x_1)\, dx_1 dx_2, \quad A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le x_1 - \frac{5}{36}\}$;

3) $\int\limits_A f(\sqrt{x_1^2 + x_2^2})\, dx_1 dx_2, \quad A = \{(x_1, x_2) \mid 1 \le x_1^2 + x_2^2 \le 4\}$;

4) $\int\limits_A f(\sqrt[3]{x_1^2 + x_2^2})\, dx_1 dx_2, \quad A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 4,\ x_1 \le x_2\}$;

5) $\int\limits_A f(\sqrt[4]{x_1^2 + x_2^2})\, dx_1 dx_2, \quad A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le x_2\}$.

4.41. Нехай $f \in C(\mathbb{R}^2)$, $a \in (0; 2\pi)$. Уважаючи r та φ полярними координатами, змінити порядок інтегрування і зобразити множину інтегрування в декартових координатах:

1) $\int\limits_0^a \Big(\int\limits_0^\varphi f(r,\varphi)\, dr\Big) d\varphi$;

2) $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \Big(\int\limits_0^{2\cos\varphi} f(r,\varphi)\, dr\Big) d\varphi$;

3) $\int\limits_0^{\pi/2} \Big(\int\limits_0^{\sqrt{\sin 2\varphi}} f(r,\varphi)\, dr\Big) d\varphi$;

4) $\int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} \Big(\int\limits_{\frac{1}{\sin\varphi}}^{\sqrt{2}} f(r,\varphi)\, dr\Big) d\varphi$;

5) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \Big(\int\limits_0^{\frac{1}{\sin\varphi}} f(r,\varphi)\, dr\Big) d\varphi$;

6) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \Big(\int\limits_0^{\frac{1}{\sin\varphi - \cos\varphi}} f(r,\varphi)\, dr\Big) d\varphi$;

7) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \Big(\int\limits_{\frac{1}{\sin\varphi - \cos\varphi}}^{2} f(r,\varphi)\, dr\Big) d\varphi$;

8) $\int\limits_0^{\pi/2} \Big(\int\limits_0^{\frac{1}{\sin\varphi+\cos\varphi}} f(r,\varphi)\,dr\Big)d\varphi;$

9) $\int\limits_0^{\pi/2} \Big(\int\limits_{\frac{1}{\sin\varphi+\cos\varphi}}^{1} f(r,\varphi)\,dr\Big)d\varphi;$

10) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \Big(\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}\sin\varphi}}^{1} f(r,\varphi)\,dr\Big)d\varphi;$

11) $\int\limits_0^{\pi/3} \Big(\int\limits_0^{\frac{\sqrt{3}}{2\sin(\pi/3+\varphi)}} f(r,\varphi)\,dr\Big)d\varphi.$

4.42. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_A \sin(\sqrt{x_1^2+x_2^2})\,dx_1dx_2, \quad A = \{(x_1,x_2) \mid \pi^2 \le x_1^2+x_2^2 \le 4\pi^2\};$

2) $\int\limits_A \sqrt{1-\frac{x_1^2}{R^2}-\frac{x_2^2}{R^2}}\,dx_1dx_2, \quad A = \{(x_1,x_2) \mid x_1^2+x_2^2 \le R^2\},\ R>0;$

3) $\int\limits_A \ln(1+x_1^2+x_2^2)\,dx_1dx_2, \quad A = \{(x_1,x_2) \mid x_1^2+x_2^2 \le 1,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0\};$

4) $\int\limits_A \cos(x_1^2+x_2^2)\,dx_1dx_2, \quad A = \{(x_1,x_2) \mid x_1^2+x_2^2 \le 1,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0\};$

5) $\int\limits_A (1-2x_1-3x_2)\,dx_1dx_2, \quad A = \{(x_1,x_2) \mid x_1^2+x_2^2 \le 4\};$

6) $\int\limits_A \sqrt{4-x_1^2-x_2^2}\,dx_1dx_2, \quad A = \{(x_1,x_2) \mid x_1^2+x_2^2 \le 2x_1\};$

7) $\int\limits_A \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}\,dx_1dx_2,$

$A = \{(x_1,x_2) \mid 1 \le x_1^2+x_2^2 \le 9,\ \frac{x_1}{\sqrt{3}} \le x_2 \le \sqrt{3}x_1\};$

8) $\int\limits_A \left(\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}\right)^2 dx_1dx_2,$

$A = \{(x_1,x_2) \mid 1 \le x_1^2+x_2^2 \le 4,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \le x_1\};$

9) $\int\limits_A \exp(x_1^2+x_2^2)\,dx_1dx_2, \quad A = \{(x_1,x_2) \mid 1 \le x_1^2+x_2^2 \le 4\};$

10) $\int\limits_A \sin(x_1^2+x_2^2)\,dx_1dx_2, \quad A = \{(x_1,x_2) \mid x_1^2+x_2^2 \le 4,\ |x_1| \le |x_2|\};$

11) $\int\limits_A \operatorname{sh}(x_1^2+x_2^2)\,dx_1dx_2, \quad A = \{(x_1,x_2) \mid 4 \le x_1^2+x_2^2 \le 9\}.$

4.43. Перейшовши до полярних координат, обчислити площу фігури

$$A = \{(x_1,x_2) \mid (x_1^2+x_2^2)^2 \le 2(x_1^2-x_2^2), \quad x_1^2+x_2^2 \ge 1\}.$$

4.44. Обчислити площу фігур, обмежених лініями:

1) $(x_1^2+x_2^2)^2 = x_1^2x_2;$

2) $(x_1^2+x_2^2)^3 = x_1x_2^4;$

3) $x_1^2+x_2^2 = 1,\ x_1^2+x_2^2 = 2x_1;$

4) $(x_1^2+x_2^2)^2 = x_1^3-3x_1x_2^2;$

5) $x_1^2 + x_2^2 = 4,\ \dfrac{x_2}{2} \le x_1 \le 2x_2;$
6) $x_1^2 + x_2^2 = 1,\ x_1^2 + x_2^2 = 4,$
$x_1 \ge \dfrac{1}{2};$
7) $x_1^2 + x_2^2 = 1,\ x_1^2 + x_2^2 = 4,$
$x_2 \ge -\dfrac{1}{2};$
8) $x_1^2 + x_2^2 = 1,\ x_1 + x_2 \ge 1;$
9) $x_1^2 + x_2^2 = 2\sqrt{2}x_1 - 1,$
$x_1 = x_2,\ x_1 = -x_2;$
10) $x_1^2 + x_2^2 = 4x_1 - 3,\ x_1 = 0,$
$x_2 = -1,\ x_2 = 1.$

4.45. Знайти похідні функцій:

1) $\mathbb{R} \ni t \mapsto g(t) := \int\limits_{A(t)} \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\, dx_1 dx_2,$
де $A(t) = \{(x_1, x_2) \mid (x_1 - t)^2 + (x_2 - t)^2 \le t^2\};$
2) $[0, +\infty) \ni t \mapsto g(t) := \int\limits_{A(t)} f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2,$
де $A(t) = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le t^2\},\ f \in C(\mathbb{R}^2).$

4.46. Запровадити узагальнені полярні координати за формулами

$$x_1 = x_1^0 + ar\cos^\alpha \varphi, \quad x_2 = x_2^0 + br\sin^\alpha \varphi, \quad \{a, b, \alpha\} \subset (0; +\infty),$$

обчислити якобіан переходу до цих координат. Обчислити площу фігур, обмежених лініями:

1) $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} = \dfrac{x_1}{c} + \dfrac{x_2}{d}, \quad \{a, b, c, d\} \subset (0, +\infty);$
2) $\sqrt[4]{\dfrac{x_1}{a}} + \sqrt[4]{\dfrac{x_2}{b}} = 1, \quad x_1 = 0,\ x_2 = 0;\ \{a, b\} \subset (0, +\infty).$
3) $x_1^3 + \dfrac{x_2^3}{8} = x_1^2 + 4x_2^2,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$
4) $(x_1 - x_2)^4 = x_1^2 + x_2^2,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0;$
5) $(x_1 + 2x_2)^4 = x_1^2 + 4x_2^2,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$
6) $(2x_1 + 3x_2)^4 = 4x_1^2 - x_2^2,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$
7) $\left(\dfrac{x_1}{2} + \dfrac{x_2}{3}\right)^5 = x_1^2 x_2^2;$
$x_i \ge 0, i = 1, 2;$
8) $\left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\right)^{12} = x_1 x_2;$
9) $\left(2\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\right)^{12} = 2x_1 x_2;$
10) $\left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\right)^{10} = x_1^2 x_2^2;$
11) $x_1^3 + x_2^3 = 9x_1^2 + x_2^2;$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

4.47. Обчислити площі фігур, що лежать в указаній частині площини $\mathbb{R}^2$ і обмежені лініями:

1) $x_1 x_2 = 1,\ x_1 x_2 = 2,\ x_2 = x_1,\ x_2 = 2x_1,\ x_1 > 0,\ x_2 > 0;$
2) $x_2^2 = 2x_1,\ x_2^2 = 4x_1,\ x_1^2 = 6x_2,\ x_1^2 = 8x_2;$

3) $x_1 + x_2 = 1,\ x_1 + x_2 = 2,\ x_2 = 2x_1,\ x_2 = 3x_1;$
4) $x_1^2 = x_2,\ x_1^2 = 2x_2,\ x_1^3 = x_2^2,\ x_1^3 = 2x_2^2;$
5) $x_2 = x_1^5,\ x_2 = 2x_1^5,\ x_2 = x_1^6,\ x_2 = 2x_1^6;$
6) $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = 1,\ \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = 2,\ x_1 = x_2,\ 4x_1 = x_2;$
7) $\sqrt[3]{x_1^2} + \sqrt[3]{x_2^2} = 1,\ \sqrt[3]{x_1^2} + \sqrt[3]{x_2^2} = 4,\ x_1 = x_2,\ 8x_1 = x_2;\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0;$
8) $x_2 = \sqrt{x_1},\ x_2 = 2\sqrt{x_1},\ x_1 + x_2 = 1,\ x_1 + x_2 = 2;$
9) $x_2 = x_1^3,\ x_2 = 5x_1^3,\ x_2 = x_1^2,\ x_2 = 2x_1^2;$
10) $x_2 = x_1\sqrt{x_1},\ x_2 = 2x_1\sqrt{x_1},\ x_2 = 2x_1,\ x_2 = \frac{1}{2}x_1;$
11) $x_2 = 7x_1^7,\ x_2 = 9x_1^7,\ x_2 = 7x_1^9,\ x_2 = 9x_1^9;$
12) $x_1x_2 = 4,\ x_1x_2 = 8,\ x_1 = 2x_2,\ x_1 = \frac{1}{2}x_2;\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$

4.48. Площу фігур, обмежених указаними лініями, обчислити інтегруванням по брусу у відповідній системі координат:

1) $x_1 + x_2 = 2,\ x_1 + x_2 = 3,\ x_1 - 2x_2 = 0,\ x_1 - 2x_2 = 1;$
2) $x_1 - x_2 = 3,\ x_1 - x_2 = 4,\ x_1 + 2x_2 = 1,\ x_1 + 2x_2 = 2;$
3) $5x_1 + 7x_2 = 3,\ 6x_1 + 8x_2 = 2,\ 5x_1 + 7x_2 = 4,\ 6x_1 + 8x_2 = 1;$
4) $x_1 - 3x_2 = 5,\ x_2 - 3x_1 = 6,\ x_1 - 3x_2 = 6,\ x_2 - 3x_1 = 5;$
5) $x_1 + \pi x_2 = 3,\ \pi x_1 + x_2 = 4,\ x_1 + \pi x_2 = 5,\ \pi x_1 + x_2 = 6;$
6) $6x_1 + 7x_2 = 4,\ 7x_1 + 8x_2 = 5,\ 6x_1 + 7x_2 = 6,\ 7x_1 + 8x_2 = 6;$
7) $x_1 + 3x_2 = 1,\ x_1 + 3x_2 = 2,\ x_1 = 2x_2,\ x_2 = 2x_1;$
8) $x_1 + 2x_2 = 1,\ x_1 + 2x_2 = 3,\ x_1 = 3x_2,\ x_2 = 3x_1;$
9) $x_1 + x_2 = 1,\ x_1 + x_2 = -1,\ x_1 = 2x_2,\ x_2 = 2x_1;$
10) $5x_1 + x_2 = 2,\ 5x_1 + x_2 = 3,\ x_1 + 5x_2 = 1,\ x_1 + 5x_2 = 2.$

4.49. Обчислити об'єми тіл, обмежених поверхнями:

1) $x_3 = x_1^2 + x_2^2,\ x_1^2 + x_2^2 = x_1,\ x_1^2 + x_2^2 = 2x_1,\ x_3 = 0;$
2) $x_3^2 = x_1x_2,\ x_1^2 + x_2^2 = 4;$
3) $x_3 = x_1^2 + x_2^2,\ x_1x_2 = 1,\ x_1x_2 = 2,\ x_2 = \dfrac{x_1}{2},\ x_2 = 2x_1,\ x_3 = 0;$
4) $x_3 = x_1 + x_2,\ (x_1^2 + x_2^2)^2 = 2x_1x_2,\ x_3 = 0;\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0;$
5) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,\ x_1^2 + x_2^2 \geq |x_1|;$
6) $x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0,\ (x_1^2 + x_2^2)^2 = x_1^2 - x_2^2,\ x_3 = 0;$
7) $x_3 = \exp(-x_1^2 - x_2^2),\ x_3 = 0,\ x_1^2 + x_2^2 = 4;$
8) $x_3 = \cos\dfrac{\pi\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{2},\ x_3 = 0,\ x_2 = \dfrac{x_1}{\sqrt{3}},\ x_2 = \sqrt{3}x_1;\ x_1^2 + x_2^2 \leq 1;$
9) $x_3 = x_1^2 + x_2^2,\ x_3 = x_1 + x_2;$

10) $\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{x_2^2}{b^2}-\dfrac{x_3^2}{c^2}=-1,\ \dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{x_2^2}{b^2}=1;\ \{a,b,c\}\subset(0,+\infty);$

11) $\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{x_2^2}{b^2}=x_3,\ \dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{x_2^2}{b^2}=\dfrac{x_1}{a}+\dfrac{x_2}{b},\ x_3=0;\ \{a,b\}\subset(0,+\infty);$

12) $(x_1^2+x_2^2)^2+x_3=1,\ x_3=0;$

13) $x_3=x_1x_2,\ x_1^2=x_2,\ x_1^2=2x_2,\ x_2^2=x_1,\ x_2^2=2x_1,\ x_3=0.$

4.50. Обчислити інтеграл
$$\int\limits_C(x_1^2+x_2^2)\,dx_1dx_2dx_3,$$
де тіло C обмежене поверхнями $x_1^2+x_2^2=2x_3$ та $x_3=2$, перейшовши до циліндричних координат.

4.51. Перейшовши до циліндричних координат, обчислити об'єм тіла, що лежить в області $\{(x_1,x_2,x_3)\,|\ x_1^2+x_2^2\le x_3^2\}$ і обмежене поверхнею $x_1^2+x_2^2+x_3^2=2x_3$.

4.52. Обчислити інтеграли, перейшовши до циліндричних координат:

1) $\int\limits_C(x_1^2+x_2^2)^2\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1^2+x_2^2=x_3$, $x_1^2+x_2^2=2x_3$, $x_1^2+x_2^2=1$;

2) $\int\limits_C\sqrt{x_1^2+x_2^2}\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1^2+x_2^2=x_3$, $x_3=3$, $|x_1|\le|x_2|$;

3) $\int\limits_C dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1^2+x_2^2+x_3^2=4$, $(x_1^2+x_2^2)^2=4(x_1^2-x_2^2)$;

4) $\int\limits_C dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1^2+x_2^2=x_3$, $x_1+x_3=2$;

5) $\int\limits_C dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$, $x_1^2+x_2^2+\left(x_3-\frac{1}{2}\right)^2=1$;

6) $\int\limits_C dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1^2+x_2^2+x_3^2=2x_3$, $x_1^2+x_2^2=x_3$; $x_1^2+x_2^2\le x_3$;

7) $\int\limits_0^2\Big(\int\limits_0^{\sqrt{2x_1-x_1^2}}\Big(\int\limits_0^3 x_3\sqrt{x_1^2+x_2^2}\,dx_3\Big)dx_2\Big)dx_1;$

8) $\int\limits_C\sqrt{x_1^2+x_2^2}\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1^2+x_2^2=2x_1$, $x_3=x_1^2+x_2^2$, $x_3=0$;

9) $\int\limits_C x_3\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C є перетином куль $\overline{B}((0,0,0),1)$ і $\overline{B}((0,0,1),1)$ в евклідовій метриці;

10) $\int\limits_C \sqrt{x_1^2+x_2^2}\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C є перетином куль $\overline{B}((0,0,0),2)$ і $\overline{B}((0,0,-2),2)$ в евклідовій метриці.

4.53. Обчислити інтеграли, перейшовши до сферичних координат:

1) $\int\limits_C \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнею $x_1^2+x_2^2+x_3^2=x_3$;

2) $\int\limits_0^1\Big(\int\limits_0^{\sqrt{1-x_1^2}}\Big(\int\limits_{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}^{\sqrt{2-x_1^2-x_2^2}} x_3^2\,dx_3\Big)dx_2\Big)dx_1$;

3) $\int\limits_C (x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнею $x_1^2+x_2^2+x_3^2=-x_3$;

4) $\int\limits_C \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1=2x_2,\ x_2=2x_1;\ \ x_1^2+x_2^2+x_3^2=1,\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$;

5) $\int\limits_C \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\,dx_1dx_2dx_3$, де $C=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1^2+x_2^2+x_3^2\le 4,\ x_i\ge 0,\ i=1,2,3\}$;

6) $\int\limits_C \exp((x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2})\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1,\ x_1^2+x_2^2+x_3^2=4$;

7) $\int\limits_{-1}^1\Big(\int\limits_0^{\sqrt{1-x_1^2}}\Big(\int\limits_{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}}^{\sqrt{4-x_1^2-x_2^2}} x_1x_3\,dx_3\Big)dx_2\Big)dx_1$;

8) $\int\limits_0^{1/\sqrt{2}}\Big(\int\limits_{x_1}^{\sqrt{1-x_1^2}}\Big(\int\limits_{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}^{\sqrt{4-x_1^2-x_2^2}} x_3^3\,dx_3\Big)dx_2\Big)dx_1$;

9)* $\int\limits_C \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1=x_2$, $x_2=1,\ x_1=0,\ x_3=0,\ x_3=x_1^2+x_2^2$;

10) $\int\limits_C \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_3=\sqrt{x_1^2+x_2^2},\ x_3=2\sqrt{x_1^2+x_2^2},\ x_1=\pm x_2,\ x_1^2+x_2^2=1;\ \ x_1\ge 0$;

11) $\int\limits_C \sin(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1,\ x_1^2+x_2^2+x_3^2=4;\ \ x_i\ge 0,\ i=1,2,3.$

4.54. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x_3=x_1^2+x_2^2$, $x_3=2(x_1^2+x_2^2),\ x_1x_2=1,\ x_1x_2=2,\ x_1=2x_2,\ 2x_1=x_2;\ \ x_1\ge 0$, $x_2\ge 0$, зробивши відповідну заміну змінних.

4.55. Зробити відповідну заміну змінних і обчислити об'єми тіл, обмежених поверхнями:

1) $\left(x_1^2 + \frac{x_2^2}{4} + \frac{x_3^2}{9}\right)^2 = x_1;$
2) $(x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2)^2 = x_1^2 + 4x_2^2;$
3) $(x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2)^2 = \\ = x_1^2 + 4x_2^2 - 9x_3^2;$
4) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^4 = 1;$
5) $\frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} + x_3^2 = 1,\ \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} = x_3;$ $\frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} \le x_3;$
6) $(x_1^2 + x_2^2)^2 + x_3^4 = 1;$
7) $(x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1 + x_2;$ $x_i \ge 0,\ i = 1,2,3;$
8) $(x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1 - x_2;$ $x_i \ge 0,\ i = 1,2,3;$
9) $x_1^2 + x_3^2 = 1,\ x_1^2 + x_3^2 = 4,$ $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0;\ x_1 > 0;$
10) $x_1 - x_2 + x_3 = \pm 1,$ $x_1 + x_2 - x_3 = \pm 1,$ $-x_1 + x_2 + x_3 = \pm 1.$

4.56. Знайти координати центрів маси однорідних тіл, обмежених поверхнями:

1) $4x_1^2 + 4x_2^2 = x_3^2,\ x_3 = 2;$
2) $x_3^2 = x_1^2 + x_2^2,\ x_3 = 0,\ x_1^2 + x_2^2 = 1;$
3) $x_3 = x_1^2 + x_2^2,\ x_3 = 1;\quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$
4) $x_3 = x_1^2 + 9x_2^2,\ x_3 = 4;\quad x_1 \ge 0;$
5) $x_3^2 = 1 - x_1^2 - x_2^2,\ x_3 = 0;\quad x_3 \ge 0;$
6) $x_1^2 + x_2^2 = 1,\ x_3 = \pm 1;\quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$
7) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,\ x_3 = 0;\quad x_3 \le 0;$
8) $x_3 = x_1^2 + x_2^2,\ x_3 = 1;\quad x_1 \le x_2 \le 2x_1;$
9) $x_3^2 = x_1^2 + x_2^2,\ x_3^2 = 2(x_1^2 + x_2^2),\ x_1^2 + x_2^2 = 1;$
10) $x_1^2 + x_2^2 = 1,\ x_3 = \pm 1;\quad 0 \le x_1 \le x_2;$
11) $x_1^2 + x_2^2 = 1,\ x_3 = 0,\ x_3 = 2;\quad x_1/2 \le x_2 \le 2x_1.$

4.5 Невласні кратні інтеграли

Нехай для необмеженої множини $A \subset \mathbb{R}^m$ існує послідовність множин $\{D_n : n \ge 1\}$, що задовольняють умови

1) $\forall n \ge 1 :\ D_n$ – вимірна за Жорданом множина;
2) $\forall n \ge 1 :\ D_n \subset A;$
3) $\forall r > 0 \quad \exists N \ge 1 \quad \forall n \ge N : \quad A \cap B(\vec{0}, r) \subset D_n.$

Таку послідовність $\{D_n : n \ge 1\}$ будемо називати *вичерпною* для множини A.

Нехай функція $f : A \to \mathbb{R}$ неперервна і обмежена на кожній обмеженій підмножині A.

Невласним інтегралом від функції f по множині A називається границя

$$\int\limits_A f(\vec{x})\, d\vec{x} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{D_n} f(\vec{x})\, d\vec{x}, \tag{4.1}$$

якщо вона існує для кожної вичерпної послідовності та не залежить від її вибору. Інтеграл називається *збіжним*, якщо границя в (4.1) скінченна.

Нехай A – компактна вимірна за Жорданом множина в $\mathbb{R}^m$, $\vec{x}^{\,0} \in A$, $B := A \setminus \{\vec{x}^{\,0}\}$. Розглянемо послідовність відкритих вимірних за Жорданом множин $\{E_n \ : \ n \geq 1\}$, що задовольняють умови

1) $\forall n \geq 1 : \ E_n \ni \vec{x}^{\,0}$;
2) $\operatorname{diam}(E_n) \to 0, \ n \to \infty$.

Нехай функція $f : B \to \mathbb{R}$ неперервна і необмежена в околі точки $\vec{x}^{\,0}$.

Невласним інтегралом від функції f по множині A називається границя

$$\int\limits_A f(\vec{x})\, d\vec{x} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{A\setminus E_n} f(\vec{x})\, d\vec{x}, \tag{4.2}$$

якщо вона існує для кожної такої послідовності $\{E_n \ : \ n \geq 1\}$ та не залежить від її вибору. Інтеграл називається *збіжним*, якщо границя в (4.2) скінченна.

У випадку невід'ємної функції f невласні інтеграли (4.1), (4.2) збігаються тоді й лише тоді, коли послідовності інтегралів у їх означеннях обмежені хоча б для однієї з можливих послідовностей множин $\{D_n : n \geq 1\}$ (відповідно $\{E_n \ : \ n \geq 1\}$).

Збіжність інтегралів (4.1), (4.2) від функції f еквівалентна збіжності таких інтегралів від функції $|f|$.

Приклад 1. Дослідити збіжність і обчислити значення інтеграла

$$\int\limits_A \frac{d\vec{x}}{\|\vec{x}\|^a}, \qquad \text{де } A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m \mid \|\vec{x}\| \geq 1\}. \tag{4.3}$$

⌈ Підінтегральна функція невід'ємна, тому досить розглянути яку-небудь одну вичерпну послідовність множин. Беручи до уваги вигляд функції та множини A, зручно обрати вичерпну послідовність $D_n = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m \mid 1 \leq \|\vec{x}\| \leq n\}$, $n \geq 1$. Для обчислення інтегралів

$$\int\limits_{D_n} \frac{d\vec{x}}{\|\vec{x}\|^a}$$

можна перейти до сферичних координат (див. задачу 2.127 п.3). Тоді

$$\int\limits_{D_n} \frac{d\vec{x}}{\|\vec{x}\|^a} =$$

$$= \int\limits_1^n r^{m-a-1} \Big(\int\limits_0^\pi \ldots \big(\int\limits_0^\pi \big(\int\limits_0^\pi \big(\int\limits_0^{2\pi} d\varphi_{m-1} \big) \sin\varphi_{m-2}\, d\varphi_{m-2} \big) \sin^2 \varphi_{m-3}\, d\varphi_{m-3} \big) \times$$

$$\times \ldots \sin^{m-2}\varphi_1\, d\varphi_1 \Big) dr =$$

$$= 2\pi \mathrm{B}(1, \tfrac{1}{2}) \mathrm{B}(\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}) \ldots \mathrm{B}(\tfrac{m-1}{2}, \tfrac{1}{2}) \int\limits_1^n r^{m-a-1}\, dr =$$

$$= 2\pi^{m/2} \Gamma^{-1}(\tfrac{m}{2}) \int\limits_1^n r^{m-a-1}\, dr.$$

Таким чином, збіжність інтеграла (4.3) еквівалентна збіжності інтеграла $\int\limits_1^{+\infty} r^{m-a-1}\, dr$.

Останній інтеграл збігається лише при $a > m$, і

$$\int\limits_A \frac{d\vec{x}}{\|\vec{x}\|^a} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{D_n} \frac{d\vec{x}}{\|\vec{x}\|^a} = \frac{2\pi^{m/2}}{(a-m)\Gamma\left(\dfrac{m}{2}\right)}.$$

⌋

Приклад 2. Обчислити інтеграл

$$\int\limits_{[0;+\infty]\times[0;+\infty]} \exp(-x_1^2 - x_2^2)\, dx_1 dx_2.$$

⌈ Підінтегральна функція невід'ємна. Обираючи вичерпну послідовність

$$D_n = [0;n] \times [0;n], \quad n \geq 1,$$

отримуємо збіжність інтеграла:

$$\int\limits_{[0;+\infty]\times[0;+\infty]} \exp(-x_1^2 - x_2^2)\, dx_1 dx_2 = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{D_n} \exp(-x_1^2 - x_2^2)\, dx_1 dx_2 =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^n \exp(-x_1^2)\, dx_1 \cdot \int\limits_0^n \exp(-x_2^2)\, dx_2 = \left(\int\limits_0^{+\infty} \exp(-x^2)\, dx \right)^2 < +\infty.$$

Для вичерпної послідовності

$$D'_n = \{(x_1, x_2) |\ x_1^2 + x_2^2 \leq n^2,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}, \quad n \geq 1,$$

перейшовши до полярних координат, отримаємо

$$\int\limits_{[0;+\infty]\times[0;+\infty]} \exp(-x_1^2 - x_2^2)\, dx_1 dx_2 = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{D'_n} \exp(-x_1^2 - x_2^2)\, dx_1 dx_2 =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^n r \exp(-r^2)\, dr = \frac{\pi}{4} \int\limits_0^{+\infty} e^{-s}\, ds = \frac{\pi}{4}.$$

Звідси маємо значення *інтеграла Ойлера – Пуассона*

$$\int\limits_0^{+\infty} \exp(-x^2)\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

⌋

Приклад 3. Дослідити збіжність і обчислити значення інтеграла

$$\int\limits_A \frac{d\vec{x}}{\|\vec{x}\|^a}, \qquad \text{де } A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m \mid \|\vec{x}\| \leq 1\}. \tag{4.4}$$

⌈ Підінтегральна функція додатна на множині $A \setminus \{\vec{0}\}$ і при $a > 0$ необмежена в околі точки $\vec{x} = \vec{0}$. Міркуючи так само, як і в прикладі 1, виберемо $E_n = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m \mid \|\vec{x}\| < \frac{1}{n}\}$, $n \geq 1$. Для обчислення інтегралів

$$\int\limits_{A\setminus E_n} \frac{d\vec{x}}{\|\vec{x}\|^a}$$

перейдемо до сферичних координат (див. задачу 2.127 п.3). Тоді

$$\int\limits_{A\setminus E_n} \frac{d\vec{x}}{\|\vec{x}\|^a} = 2\pi^{m/2}\Gamma^{-1}(\tfrac{m}{2}) \int\limits_{1/n}^1 r^{m-a-1}\, dr.$$

Таким чином, збіжність інтеграла (4.4) еквівалентна збіжності інтеграла $\int\limits_0^1 r^{m-a-1}\, dr$. Останній інтеграл збігається лише при $a < m$, і

$$\int\limits_A \frac{d\vec{x}}{\|\vec{x}\|^a} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{A\setminus E_n} \frac{d\vec{x}}{\|\vec{x}\|^a} = \frac{2\pi^{m/2}}{(m-a)\Gamma\left(\dfrac{m}{2}\right)}.$$

⌋

4.57. Нехай $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \geq 1\}$, $f \in C(A)$, і
$$0 < \inf_{(x_1,x_2)\in A} |f(x_1, x_2)| \leq \sup_{(x_1,x_2)\in A} |f(x_1, x_2)| < +\infty.$$
Для яких $\alpha \in \mathbb{R}$ збігається невласний інтеграл
$$\int\limits_A \frac{f(x_1, x_2)}{(x_1^2 + x_2^2)^\alpha}\, dx_1 dx_2\,?$$

4.58. Дослідити, для яких $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R}$ збігається невласний інтеграл
$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{dx_1 dx_2}{(1 + |x_1|^\alpha)(1 + |x_2|^\beta)}.$$

4.59. Дослідити, для яких $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R}$ збігається невласний інтеграл
$$\int\limits_A \frac{dx_1 dx_2}{x_1^\alpha x_2^\beta}, \quad A = \{(x_1, x_2) \mid x_1 x_2 \geq 1,\ x_1 \geq 1\},$$
і обчислити його.

4.60. Обчислити інтеграл
$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} \exp(-x_1^2 - x_2^2) \cos(x_1^2 + x_2^2)\, dx_1 dx_2.$$

4.61. Нехай $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$, $f \in C(A)$ і $f(x_1, x_2) \neq 0$, $(x_1, x_2) \in A$. Для яких $\alpha \in \mathbb{R}$ збігається невласний інтеграл
$$\int\limits_A \frac{f(x_1, x_2)}{(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2)^\alpha}\, dx_1 dx_2\,?$$

4.62. Дослідити збіжність невласного інтеграла
$$\int\limits_A \frac{dx_1 dx_2}{x_1^2 + x_2^2},\ \text{де } A = \{(x_1, x_2) \mid |x_2| \leq x_1^2 \leq 1\}.$$

4.63. Нехай $A \subset \mathbb{R}^3$, $f \in C(A)$, і
$$0 < \inf_{(x_1,x_2,x_3)\in A} |f(x_1, x_2, x_3)| \leq \sup_{(x_1,x_2,x_3)\in A} |f(x_1, x_2, x_3)| < +\infty.$$
Дослідити, для яких $\alpha \in \mathbb{R}$ збігається невласний інтеграл
$$\int\limits_A \frac{f(x_1, x_2, x_3)}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^\alpha}\, dx_1 dx_2 dx_3$$
у таких випадках:

1) $A = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 1\}$;
2) $A = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$.

4.64. Нехай

$$A_n = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le \pi(2n+1)\},$$
$$B_n = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 2\pi n\}, \quad n \ge 1.$$

Довести співвідношення:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{A_n} \sin(x_1^2 + x_2^2)\, dx_1 dx_2 = 2\pi;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{B_n} \sin(x_1^2 + x_2^2)\, dx_1 dx_2 = 0.$

Чи збігається інтеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} \sin(x_1^2 + x_2^2)\, dx_1 dx_2 \ ?$$

4.65. Довести, що інтеграл

$$\int\limits_{\{(x_1,x_2) \mid \ x_1 \ge 1, \ x_2 \ge 1\}} \frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}\, dx_1 dx_2$$

розбігається, хоча обидва повторні інтеграли

$$\int\limits_1^{+\infty} \Big(\int\limits_1^{+\infty} \frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}\, dx_1 \Big) dx_2 \quad \text{та} \quad \int\limits_1^{+\infty} \Big(\int\limits_1^{+\infty} \frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}\, dx_2 \Big) dx_1$$

збігаються.

4.66. Дати означення невласного інтеграла

$$\int\limits_{[0,1]^2} \frac{dx_1 dx_2}{|x_1 - x_2|^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

та дослідити його збіжність. Обчислити цей інтеграл.

Зауваження. При $\alpha > 0$ в околі кожної точки прямої $x_1 = x_2$ підінтегральна функція необмежена.

4.67. Дослідити, для яких значень параметрів збігаються інтеграли:

1) $\displaystyle\int\limits_A \frac{dx_1 dx_2}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^\alpha}, \quad A = \{(x_1, x_2) \mid 0 \le x_2 \le 1\}, \ \alpha \in \mathbb{R};$

2) $\displaystyle\int\limits_A \frac{dx_1 dx_2}{|x_1|^\alpha + |x_2|^\beta}, \quad A = \{(x_1, x_2) \mid |x_1| + |x_2| \ge 1\}, \ \alpha > 0, \ \beta > 0;$

3) $\displaystyle\int\limits_A \frac{\sin x_1 \sin x_2}{(x_1 + x_2)^\alpha}\, dx_1 dx_2, \quad A = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 \ge 1\}, \ \alpha \in \mathbb{R};$

4) $\displaystyle\int\limits_A \frac{\sin(x_1^2 + x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^\alpha}\, dx_1 dx_2, \quad A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \ge 4\}, \ \alpha \in \mathbb{R};$

5) $\displaystyle\int_A \frac{\cos(x_1^2+x_2^2)}{(x_1^2+x_2^2)^\alpha}\,dx_1dx_2,\ A=\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2\ge 1,\ x_1\le x_2\},\ \alpha\in\mathbb{R};$

6) $\int\limits_{\mathbb{R}^2} \exp(-(x_1^4+x_2^4)^\alpha)\,dx_1dx_2,\ \alpha\in\mathbb{R};$

7) $\int\limits_A \exp(-(x_1+x_2)^\alpha)\,dx_1dx_2,\quad A=\{(x_1,x_2)\mid 0\le x_1\le x_2\},\ \alpha\in\mathbb{R};$

8) $\int\limits_A (x_1^2+x_2^2-1)^\alpha\,dx_1dx_2,\quad A=\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2\ge 4\},\ \alpha\in\mathbb{R};$

9) $\int\limits_A \sin((x_1^2+x_2^2)^\alpha)\,dx_1dx_2,\ A=\{(x_1,x_2)\ x_1^2+x_2^2\ge 1\},\ \alpha\in\mathbb{R};$

10) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \frac{dx_1dx_2}{(1+|x_1|+|x_2|)^\alpha},\ \alpha\in\mathbb{R}.$

4.68. Обчислити інтеграли (задачі 1–5) чи виразити їх через інтеграли Ойлера (задачі 6–10):

1) $\displaystyle\int_A \frac{dx_1dx_2}{(x_1+x_2)^2},\quad A=\{(x_1,x_2)\mid x_1+x_2\ge 1,\ 0\le x_1\le 1\};$

2) $\displaystyle\int_A \frac{dx_1dx_2}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}},\quad A=\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2\le 1\};$

3) $\displaystyle\int_A \frac{dx_1dx_2}{(x_1^2+x_2^2)^2},\quad A=\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2\ge 1\};$

4) $\displaystyle\int_A \frac{dx_1dx_2}{x_1^2+x_2},\quad A=\{(x_1,x_2)\mid x_1\ge 0,\ x_1\ge 0,\ x_1^2+x_2\le 1\};$

5) $\int\limits_A \exp(-(x_1+x_2))\,dx_1dx_2,\quad A=\{(x_1,x_2)\mid 0\le x_1\le x_2\};$

6) $\int\limits_A e^{-x_1}x_2^\alpha\,dx_1dx_2,\quad A=\{(x_1,x_2)\mid 0\le x_2\le x_1\},\ \alpha>0;$

7) $\int\limits_{\mathbb{R}^2} \exp(-(x_1^2+x_2^2)^\alpha)\,dx_1dx_2,\ \alpha>0;$

8) $\int\limits_A (1-x_1)^\alpha x_2^\beta\,dx_1dx_2,\quad A=\{(x_1,x_2)\mid 0\le x_2\le x_1\le 1\},\ \alpha>-1,$ $\beta>-1;$

9) $\int\limits_A (x_1^2+x_2^2)^\alpha(1-x_1^2-x_2^2)^\beta\,dx_1dx_2,\quad A=\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2\le 1,$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0\},\ \alpha>-1,\ \beta>-1;$

10)* $\int\limits_A x_1^\alpha x_2^\beta\,dx_1dx_2,\quad A=\{(x_1,x_2)\mid 0\le x_2\le 1-x_1,\ x_1\ge 0\},$ $\alpha>-1,\ \beta>-1.$

4.69. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_A \exp(-x_1^2 - x_2^2)\, dx_1 dx_2,\ A = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\};$

2) $\int\limits_{\mathbb{R}^2} x_1 x_2 \exp(-x_1^2 - x_2^2)\, dx_1 dx_2;$

3) $\int\limits_{\mathbb{R}^2} \exp(-(x_1^2 + x_1 + x_2^2 - x_2))\, dx_1 dx_2;$

4) $\int\limits_{\mathbb{R}^2} x_1 \exp(-x_1^2 + x_1 - x_2^2)\, dx_1 dx_2;$

5) $\int\limits_{\mathbb{R}^2} x_1^3 x_2^3 \exp(-x_1^4 - x_2^4)\, dx_1 dx_2;$

6) $\int\limits_{\mathbb{R}^2} (x_1 + x_2) \exp(-(x_1^2 + 2x_2^2 + x_1 + x_2))\, dx_1 dx_2;$

7) $\int\limits_{\mathbb{R}^2} (1 + x_1 x_2) \exp(-(x_1^2 - x_1 + x_2^2))\, dx_1 dx_2;$

8) $\int\limits_{\mathbb{R}^2} (x_1^2 + x_2^2) \exp(-x_1^2 - x_2^2)\, dx_1 dx_2;$

9) $\int\limits_{\mathbb{R}^2} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \exp(-x_1^2 - x_2^2)\, dx_1 dx_2;$

10) $\int\limits_{\mathbb{R}^2} \exp(-(2x_1^2 + 3x_1 + 5x_2^2 + 4x_2 + 1))\, dx_1 dx_2.$

4.70. Дослідити, для яких значень параметрів збігаються інтеграли:

1) $\int\limits_A \dfrac{dx_1 dx_2}{|x_1|^\alpha + |x_2|^\beta},\ A = \{(x_1, x_2) \mid |x_1| + |x_2| \leq 1\},\ \alpha > 0,\ \beta > 0;$

2) $\int\limits_A |\ln \sqrt{x_1^2 + x_2^2}|^\alpha\, dx_1 dx_2,\ A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\},\ \alpha \in \mathbb{R};$

3) $\int\limits_A (x_1^2 + x_2^2)^\alpha\, dx_1 dx_2,\ A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq x_1\},\ \alpha \in \mathbb{R};$

4) $\int\limits_{[0,1]^3} \dfrac{dx_1 dx_2 dx_3}{x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma},\ \{\alpha, \beta, \gamma\} \in \mathbb{R};$

5) $\int\limits_A \exp(-(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^\alpha)\, dx_1 dx_2 dx_3,$
$A = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\},\ \ \alpha \in \mathbb{R};$

6) $\int\limits_A (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^\alpha\, dx_1 dx_2 dx_3,\ A = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 2x_1\},$
$\alpha \in \mathbb{R};$

7) $\int\limits_A (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^\alpha\, dx_1 dx_2 dx_3,\ A = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq x_2\},$
$\alpha \in \mathbb{R};$

8) $\int\limits_A (|x_1| + |x_2| + |x_3|)^\alpha \, dx_1 dx_2 dx_3,$
$A = \{(x_1, x_2, x_3) \mid |x_1| + |x_2| + |x_3| \le 1\}, \ \ \alpha \in \mathbb{R};$

9) $\int\limits_A (x_1^4 + x_2^4 + x_3^4)^\alpha \, dx_1 dx_2 dx_3, \ A = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 \le 1\},$
$\alpha \in \mathbb{R};$

10) $\int\limits_A (|x_1|^\alpha + |x_2|^\alpha + |x_3|^\alpha)^{\alpha-6} \, dx_1 dx_2 dx_3,$
$A = \{(x_1, x_2, x_3) \mid |x_1|^\alpha + |x_2|^\alpha + |x_3|^\alpha \le 1\}, \ \alpha > 0.$

Розділ 5

Інтеграли по многовидах

5.1 Криволінійні інтеграли другого роду

Нехай $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_m) \in C^{(1)}([a;b], \mathbb{R}^m)$ і $\Gamma = \vec{u}([a;b])$ – *гладенька крива* в $\mathbb{R}^m$ з указаним напрямком руху по ній (заданою *орієнтацією*).

Нехай $f_j \in C(\Gamma),\ 1 \le j \le m$. Вираз $\omega = f_1(\vec{x})\,dx_1 + \ldots + f_m(\vec{x})\,dx_m$ називається *диференціальною формою першого степеня* на Γ. *Криволінійним інтегралом другого роду* від форми ω по орієнтованій кривій Γ називається число

$$\int\limits_\Gamma \omega = j \int\limits_a^b \big(f_1(u_1(t), \ldots, u_m(t))u_1'(t) + \ldots + f_m(u_1(t), \ldots, u_m(t))u_m'(t)\big)\,dt,$$

де $j = +1$ у випадку, коли вказаний рух по кривій відповідає зростанню параметра t від a до b, і $j = -1$ у випадку, коли рух по кривій відповідає спаданню параметра t від b до a. Вектор $\vec{u}\,'(t) = \big(u_1'(t), \ldots, u_m'(t)\big)$ є дотичним до кривої Γ у точці $\vec{u}(t)$. Для векторнозначного відображення $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ криволінійний інтеграл другого роду може бути означений рівністю

$$\int\limits_\Gamma \omega = j \int\limits_a^b \big(\vec{f}(\vec{u}(t)), \vec{u}\,'(t)\big)\,dt,$$

При зміні напрямку руху по кривій знак j змінюється на протилежний. Криволінійний інтеграл другого роду має властивість лінійності. Інтеграл по кусково-гладенькій неперервній кривій означається як сума інтегралів по гладеньких ланках.

Фізична інтерпретація

Нехай на матеріальну точку з координатами $(x_1, x_2, x_3) \in U \subset \mathbb{R}^3$ діє сила

$$\vec{F}(\vec{x}) = (F_1(x_1, x_2, x_3), F_2(x_1, x_2, x_3), F_3(x_1, x_2, x_3)).$$

Тоді робота, яку виконує сила $\vec{F}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж орієнтованої кривої $\Gamma \subset U$ в указаному напрямку, дорівнює

$$A = \int\limits_\Gamma (F_1(x_1, x_2, x_3)\,dx_1 + F_2(x_1, x_2, x_3)\,dx_2 + F_3(x_1, x_2, x_3)\,dx_3).$$

Аналогічна формула має місце у випадку плоскої кривої.

Приклад 1. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду

$$\int\limits_\Gamma x_1\,dx_2 - x_1 x_2\,dx_1,$$

де Γ – гіпербола $x_2 = \dfrac{5}{x_1},\ x_1 \in [1;3]$, яка пробігається у напрямку, що відповідає зростанню x_1.

⌈ Оскільки крива задана явно, доцільно покласти $x_1 = t,\ t \in [1;3]$. Тоді $x_2 = \dfrac{5}{t}$, $t \in [1;3]$, $j = +1$ і

$$\int\limits_\Gamma x_1\,dx_2 - x_1 x_2\,dx_1 = \int\limits_1^3 \left(t\left(-\frac{5}{t^2}\right) - t \cdot \frac{5}{t} \cdot 1\right)\,dt =$$

$$= -5\int\limits_1^3 \left(\frac{1}{t} + 1\right)\,dt = -5(\ln|t| + t)\,\Big|_1^3 = -5(\ln 3 + 2).$$ ⌋

Приклад 2. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду

$$\int_\Gamma x_1^2\,dx_1 + 2e^{x_1+x_2}\,dx_2,$$

де Γ – межа трикутника з вершинами $(1,0),(-1,3),(-2,0)$, що пробігається проти руху годинникової стрілки.

⌈ Крива Γ складається з трьох гладеньких частин – прямолінійних відрізків, тому інтеграл можна подати як суму інтегралів по цих частинах. Підрахуємо кожен з них.

1) Γ_1 – відрізок від точки $(1,0)$ до точки $(-1,3)$. Параметризація: $x_1 = 1-2t$, $x_2 = 3t$, $t \in [0;1]$; $j = +1$.

$$\int_{\Gamma_1} x_1^2\,dx_1 + 2e^{x_1+x_2}\,dx_2 = \int_0^1 ((1-2t)^2(-2) + 2e^{1+t}\cdot 3)\,dt =$$
$$= \int_0^1 (-2+8t-8t^2+6e^{1+t})\,dt = \left(-2t+4t^2-\frac{8}{3}t^3+6e^{1+t}\right)\Big|_0^1 =$$
$$= (-2+4-\frac{8}{3}+6e^2) - 6e = -\frac{2}{3} - 6e + 6e^2.$$

2) Γ_2 – відрізок від точки $(-1,3)$ до точки $(-2,0)$. Параметризація: $x_1 = -1-t$, $x_2 = 3-3t$, $t \in [0;1]$; $j = +1$.

$$\int_{\Gamma_1} x_1^2\,dx_1 + 2e^{x_1+x_2}\,dx_2 = \int_0^1 ((1+t)^2(-1) + 2e^{2-4t}\cdot(-3)\,dt =$$
$$= \int_0^1 (-1-2t-t^2-6e^{2-4t})\,dt = \left(-t-t^2-\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}e^{2-4t}\right)\Big|_0^1 =$$
$$= (-1-1-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}e^{-2}) - \frac{3}{2}e^2 = -\frac{7}{3}+\frac{3}{2}e^{-2}-\frac{3}{2}e^2.$$

3) Γ_3 – відрізок від точки $(-2,0)$ до точки $(1,0)$. Параметризація: $x_1 = -2+3t$, $x_2 = 0$, $t \in [0;1]$.

$$\int_{\Gamma_1} x_1^2\,dx_1 + 2e^{x_1+x_2}\,dx_2 = \int_0^1 ((-2+3t)^2\cdot 3 + 2e^{-2+3t}\cdot 0)\,dt =$$
$$= \int_0^1 (12-36t-27t^2)\,dt = (12t-18t^2-9t^3)\Big|_0^1 = (12-18-9)-0 = -15.$$

Отже,

$$\int_\Gamma x_1^2\,dx_1 + 2e^{x_1+x_2}\,dx_2 = \sum_{n=1}^3 \int_{\Gamma_n} x_1^2\,dx_1 + 2e^{x_1+x_2}\,dx_2 =$$
$$= \left(-\frac{2}{3}-6e+6e^2\right) + \left(-\frac{7}{3}+\frac{3}{2}e^{-2}-\frac{3}{2}e^2\right) - 15 = -18-6e+\frac{9}{2}e^2+\frac{3}{2}e^{-2}.$$ ⌋

Приклад 3. У початок координат поміщено точкову масу m. Обчислити роботу, яку виконує утворене поле сили тяжіння по переміщенню одиничної маси вздовж прямолінійного відрізка з точки $A(2,3,1)$ у точку $B(1,2,2)$.

⌈ Відомо, що на одиничну масу, розміщену в точці (x_1,x_2,x_3), діє сила тяжіння

$$\vec{F}(x_1,x_2,x_3) = -\frac{mG}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}}(x_1,x_2,x_3), \quad (x_1,x_2,x_3) \neq (0,0,0).$$

Тут G – гравітаційна стала. Параметризуємо відрізок: $x_1 = 2-t$, $x_2 = 3-t$, $x_3 = 1+t$, $t \in [0;1]$; $j = +1$. Тоді

$$A = \int\limits_{\Gamma} (F_1(x_1,x_2,x_3)\,dx_1 + F_2(x_1,x_2,x_3)\,dx_2 + F_3(x_1,x_2,x_3)\,dx_3) =$$

$$= mG\int\limits_0^1 \frac{(2-t)+(3-t)-(t+1)}{((2-t)^2+(3-t)^2+(t+1)^2)^{3/2}}\,dt =$$

$$= mG\int\limits_0^1 \frac{4-3t}{(3t^2-8t+14)^{3/2}}\,dt = \begin{vmatrix} s = 3t^2-8t+14, \\ ds = -2(4-3t)dt \end{vmatrix} =$$

$$= mG\int\limits_{14}^{9} \frac{ds}{-2s^{3/2}} = \frac{mG}{\sqrt{s}}\bigg|_{14}^{9} = mG\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{14}}\right).$$

⌋

5.1. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{\Gamma} x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1$ вздовж кривої Γ з початком у точці $O(0,0)$ і кінцем у точці $A(1,2)$, якщо:

1) Γ – відрізок прямої;
2) Γ – парабола, вісь якої – вісь ординат Ox_2;
3) Γ – ламана, що складається з відрізка OB осі Ox_1 і відрізка BA, паралельного осі Ox_2.

5.2. Обчислити криволінійні інтеграли другого роду $\int\limits_{\Gamma} \omega$:

1) $\omega = (x_1^2 - 2x_1x_2)\,dx_1 + (x_2^2 - 2x_1x_2)\,dx_2$, Γ – відрізок параболи $x_2 = x_1^2$, $x_1 \in [-1;1]$, рух по якому відповідає зростанню x_1;
2) $\omega = \dfrac{(x_1+x_2)\;dx_1 - (x_1-x_2)\;dx_2}{x_1^2+x_2^2}$, Γ – коло $x_1^2+x_2^2 = 1$, що пробігається проти руху годинникової стрілки;
3) $\omega = x_1^2x_2\,dx_1 + x_1x_2^2\,dx_2$, Γ – межа трикутника з вершинами $(0,0)$, $(2,1)$, $(1,2)$, що пробігається в напрямку $(0,0) \to (2,1) \to (1,2) \to (0,0)$;
4) $\omega = x_1\,dx_1 - x_1x_2\,dx_2$, Γ – квадрат $|x_1| + |x_2| = 1$, що пробігається за годинниковою стрілкою;
5) $\omega = x_1x_2\,dx_1 + x_2^2\,dx_2$, Γ – межа фігури $\{(x_1,x_2) \mid x_1^2 \le x_2 \le x_1+2\}$, що пробігається проти руху годинникової стрілки;
6) $\omega = x_1\,dx_1 + x_1x_2\,dx_2$, Γ – крива, що складається з відрізка прямої від точки $(-1,0)$ до точки $(0,1)$ і розташованої у першому квадранті дуги одиничного кола з центром у точці $(0,0)$, рух по якій відбувається від точки $(0,1)$ до точки $(1,0)$;

7) $\omega = -x_2(x_1^2+x_2^2)^{-1}\,dx_1 + x_1(x_1^2+x_2^2)^{-1}\,dx_2$, Γ – квадрат з вершинами $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$, $(1,-1)$, що пробігається проти руху годинникової стрілки;

8) $\omega = (x_1^2+x_2^2)\,dx_1+(x_1^2-x_2^2)\,dx_2$, Γ – крива $x_2 = 1-|1-x_1|$, $0 \le x_1 \le 2$, що пробігається у напрямку зростання x_1;

9) $\omega = (x_1+x_2)\,dx_1+(x_1-x_2)\,dx_2$, Γ – еліпс $\dfrac{x_1^2}{4}+\dfrac{x_2^2}{9} = 1$, що пробігається проти руху годинникової стрілки;

10) $\omega = (2-x_2)\,dx_1+x_1\,dx_2$, Γ – арка циклоїди $x_1 = t-\sin t$, $x_2 = 1-\cos t$, $0 \le t \le 2\pi$, що пробігається у напрямку зростання t;

11) $\omega = \sin x_2\,dx_1 + \sin x_1\,dx_2$, Γ – відрізок прямої, що пробігається від точки $(0,\pi)$ до точки $(\pi,0)$;

12) $\omega = x_1^2x_2\,dx_1 + 2x_1x_2^2\,dx_2$, Γ – межа фігури $\{(x_1,x_2) \mid x_1^2 \le x_2 \le x_1\}$, що пробігається проти руху годинникової стрілки.

5.3. Обчислити криволінійні інтеграли другого роду $\int\limits_\Gamma \omega$:

1) $\omega = -x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2 - x_3\,dx_3$, Γ – ламана, що з'єднує послідовно точки $(1,0,0)$, $(1,0,2)$, $(0,1,0)$;

2) $\omega = -x_1\,dx_1 + x_2x_3\,dx_2 - x_1x_2\,dx_3$, Γ – відрізок прямої, що пробігається від точки $(0,0,0)$ до точки $(1,2,3)$;

3) $\omega = x_1x_3\,dx_1 + x_1x_2\,dx_2 + x_1x_3\,dx_3$, Γ – трикутник, що пробігається у напрямку переліку його вершин $(1,0,0) \to (0,1,0) \to (0,0,1) \to (1,0,0)$;

4) $\omega = x_1x_2\,dx_1 - x_2\,dx_2 + x_1x_3\,dx_3$, Γ – прямокутник, що пробігається у напрямку переліку його вершин $(1,0,0) \to (1,1,0) \to (0,1,1) \to (0,0,1) \to (1,0,0)$;

5) $\omega = x_1x_2\,dx_1+x_2^2\,dx_2+x_1x_2\,dx_3$, крива $\Gamma = \{(x_1,x_2,x_3) \mid |x_2| = 4-x_1^2,\ x_3 = 0\}$ пробігається від точки $(2,0,0)$ до точки $(0,4,0)$ проти руху годинникової стрілки, якщо дивитися з точки $(0,0,1)$;

6) $\omega = \dfrac{x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2 + x_3\,dx_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1-x_2+2x_3}}$, Γ – відрізок прямої, що пробігається від точки $(1,1,1)$ до точки $(4,4,4)$;

7) $\omega = x_1x_2\,dx_1 - dx_2$, Γ – прямокутник, що пробігається у напрямку $(1,0,0) \to (1,1,0) \to (0,1,1) \to (0,0,1) \to (1,0,0)$;

8) $\omega = \sin x_1\,dx_1 + \sin x_2\,dx_2 + \sin x_3\,dx_3$, Γ – ламана, що з'єднує послідовно точки $(1,0,0), (0,1,0), (1,0,1)$;

9) $\omega = x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2 + (x_1+x_2-1)\,dx_3$, Γ – відрізок прямої, що пробігається від точки $(1,1,1)$ до точки $(2,3,4)$;

10) $\omega = \dfrac{x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2 + x_3\,dx_3}{\sqrt{x_1+x_2+x_3}}$, Γ – трикутник з вершинами в точках $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, напрямок обходу – проти руху годинникової стрілки, якщо дивитися з початку координат.

5.4. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_\Gamma \omega$:

1) $\omega = (x_2\,dx_1 + x_3\,dx_2 + x_1\,dx_3)$; Γ – виток гвинтової лінії $x_1 = \cos t$, $x_2 = \sin t$, $x_3 = 2t$, $0 \le t \le 2\pi$, рух по Γ відповідає зростанню t;

2) $\omega = (x_2^2 - x_3^2)\,dx_1 + (x_3^2 - x_1^2)\,dx_2 + (x_1^2 - x_2^2)\,dx_3$; Γ – межа частини сфери $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, $x_i \ge 0$, $1 \le i \le 3$, яка пробігається так, що зовнішній бік цієї поверхні залишається зліва;

3) $\omega = x_2x_3\,dx_1 + x_3x_1\,dx_2 + x_1x_2\,dx_3$; Γ – дуга гвинтової лінії $x_1 = 2\cos t$, $x_2 = 2\sin t$, $x_3 = \dfrac{t}{2\pi}$, $t \in \mathbb{R}$, що пробігається від точки перетину з площиною $x_3 = 0$ до точки перетину з площиною $x_3 = 1$;

4) $\omega = (x_2 - x_3)\,dx_1 + (x_3 - x_1)\,dx_2 + (x_1 - x_2)\,dx_3$; Γ – коло $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, $x_2 = x_1$, яке пробігається проти руху годинникової стрілки коли дивитися з додатного напрямку осі Ox_1;

5) $\omega = x_2^2\,dx_1 + x_3^2\,dx_2 + x_1^2\,dx_3$; Γ – частина кривої Вівіані $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, $x_1^2 + x_2^2 = x_1$, $x_3 \ge 0$, що пробігається проти руху годинникової стрілки коли дивитися з додатного напрямку осі Ox_1 $(x_1 > 1)$;

6) $\omega = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(\,dx_1 + \,dx_2 + \,dx_3)$; Γ – частина кривої Вівіані $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$, $x_1^2 + x_2^2 = 2x_1$, $x_3 \ge 0$, що пробігається проти руху годинникової стрілки коли дивитися з початку координат;

7) $\omega = x_1\,dx_1 - x_3\,dx_2 + x_2\,dx_3$; Γ – перетин поверхні куба $|x_i| \le 1$, $1 \le i \le 3$, площиною $2x_1 - x_2 + x_3 = 0$; напрямок обходу – проти руху годинникової стрілки, якщо дивитися з додатного напрямку осі Ox_1;

8) $\omega = x_3\,dx_1 + x_2\,dx_2 + x_1\,dx_3$; Γ – перетин циліндра $x_1^2 + x_2^2 = 1$ площиною $x_1 + x_2 + x_3 = 0$; напрямок обходу – проти руху годинникової стрілки, якщо дивитися з додатного напрямку осі Ox_3;

9) $\omega = x_1^2x_2\,dx_1 + \,dx_2 + x_1\,dx_3$; Γ – перетин циліндра $|x_1| + |x_2| = 1$ площиною $x_1 = x_3$; напрямок обходу – проти руху годинникової стрілки, якщо дивитися з додатного напрямку осі Ox_3;

10) $\omega = x_1x_2(dx_1 + dx_2 + dx_3)$; Γ – перетин циліндра $\max\{|x_1|, |x_2|\} = 1$ площиною $x_2 = x_3$; напрямок обходу – проти руху годинникової стрілки, якщо дивитися з додатного напрямку осі Ox_3;

11) $\omega = (x_1 + x_2)(\,dx_1 + \,dx_2 + \,dx_3)$; Γ – коло $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, $x_2 = x_1\sqrt{3}$, що пробігається проти руху годинникової стрілки коли дивитися зі сторони додатного напрямку осі Ox_1;

12) $\omega = (x_1 - x_2)(\,dx_1 + \,dx_2 + \,dx_3)$; Γ – коло $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$, $x_2 = -x_1$, що пробігається за годинниковою стрілкою коли дивитися зі сторони додатного напрямку осі Ox_1.

5.5. Сила $\vec{F}(x_1, x_2) = (-x_1, -x_2)$. Знайти роботу сили, яка витрачається на переміщення матеріальної точки по дузі параболи $x_2^2 = 8x_1$ від точки $(2, 4)$ до точки $(4, 4\sqrt{2})$.

5.6. Знайти роботу, що виконує сила земного тяжіння з переміщення матеріальної точки масою m з точки (x_1, x_2, x_3) у точку (y_1, y_2, y_3). Вважати вісь аплікат Ox_3 спрямованою вертикально вгору.

5.7. Нехай $\vec{F}(x_1, x_2), (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, – силове поле. Знайти роботу поля, що витрачається на переміщення матеріальної точки з точки A в точку B уздовж орієнтованої кривої Γ.

1) Сила $\vec{F}$ має постійну величину F і напрямлена вздовж додатної півосі Ox_1; $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$; Γ – чверть кола $x_1^2 + x_2^2 = 1$, що лежить у першому квадранті.

2) Сила $\vec{F}$ напрямлена в початок координат і за абсолютною величиною дорівнює відстані від точки докладання до початку координат; $A = (0, 0)$, $B = (1, 1)$; Γ – відрізок прямої.

3) Задача 2) для частини параболи $x_2 = x_1^2$, $0 \le x_1 \le 1$.

4) Напрямок сили $\vec{F}$ повернутий на кут $\frac{\pi}{2}$ за годинниковою стрілкою відносно радіус-вектора $\vec{r}$ точки її докладання, $\|\vec{F}\| = \|\vec{r}\|^{-1}$; $A = (2, 0)$, $B = (0, 2)$; Γ – чверть кола $x_1^2 + x_2^2 = 4$, що лежить у першому квадранті.

5) $\vec{F}(x_1, x_2) = \left(x_1 x_2 + \dfrac{x_2^2 \sin x_1}{2}, \dfrac{x_1^2 - 2x_2 \cos x_1}{2}\right)$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$; $A = B = (1, 0)$; Γ – коло $x_1^2 + x_2^2 = 1$, що пробігається за годинниковою стрілкою.

6) $\vec{F}(x_1, x_2) = (x_1 x_2, x_1 + x_2)$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$; $A = (0, 0)$, $B = (1, 1)$, Γ – відрізок прямої.

7) Задача 6), де Γ – дуга параболи $x_2 = x_1^2$.

8) $\vec{F}(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1)$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$; $A = B = (0, 1)$; Γ – коло $x_1^2 + x_2^2 = 1$, що пробігається проти годинникової стрілки.

9) $\vec{F}(x_1, x_2) = (2x_1 x_2, x_1^2)$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$; $A = (1, 0)$, $B = (0, 3)$; Γ – відрізок прямої.

10) Сила $\vec{F}$ напрямлена в початок координат і за модулем дорівнює відстані від точки докладання до початку координат; $A = (1, 0)$, $B = (0, 2)$; Γ – чверть еліпса $x_1^2 + \frac{x_2^2}{4} = 1$, що лежить у першому квадранті.

5.2 Поверхневі інтеграли другого роду

Нехай T – компактна вимірна множина на площині $\mathbb{R}^2$ з обраною декартовою системою координат (t_1, t_2), відображення $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \in C^{(1)}(T, \mathbb{R}^3)$ визначає *гладеньку двосторонню поверхню* $S = \vec{u}(T)$ в просторі $\mathbb{R}^3$, одна зі сторін якої фіксована (поверхня *орієнтована*). Нехай $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3) \in C(S, \mathbb{R}^3)$. Вираз

$$\omega = f_1(\vec{x})\, dx_2 \wedge dx_3 + f_2(\vec{x})\, dx_3 \wedge dx_1 + f_3(\vec{x})\, dx_1 \wedge dx_2$$

називається *диференціальною формою другого степеня* на S.

Поверхневим інтегралом другого роду від форми ω по орієнтованій поверхні S називається число

$$\int_S \omega := j \int_T \Bigg(f_1(u_1(t_1, t_2), u_2(t_1, t_2), u_3(t_1, t_2)) \frac{\partial(u_2, u_3)}{\partial(t_1, t_2)} +$$

$$+ f_2(u_1(t_1, t_2), u_2(t_1, t_2), u_3(t_1, t_2)) \frac{\partial(u_3, u_1)}{\partial(t_1, t_2)} +$$

$$+ f_3(u_1(t_1, t_2), u_2(t_1, t_2), u_3(t_1, t_2)) \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(t_1, t_2)} \Bigg) dt_1 dt_2 =$$

$$= j \int_T \left(\vec{f}(\vec{u}(\vec{t})),\ \vec{N}(\vec{t}) \right) d\vec{t},$$

де $j = +1$ у випадку, коли нормальний вектор

$$\vec{N} = [\vec{u}\,'_{t_1}, \vec{u}\,'_{t_2}] = \left(\frac{\partial(u_2, u_3)}{\partial(t_1, t_2)}, \frac{\partial(u_3, u_1)}{\partial(t_1, t_2)}, \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(t_1, t_2)} \right)$$

виходить з фіксованої сторони поверхні. Це має місце тоді й лише тоді, коли точка $\vec{t} \in T$ та її образ $\vec{u}(\vec{t}) \in S$, рухаючись по замкненій кривій без самоперетинів на площині та по образу цієї кривої на фіксованій стороні поверхні S, залишають найближчу обмежену кожною з кривих частину відповідної поверхні або одночасно ліворуч, або одночасно праворуч. Знак $j = -1$ у випадку, коли протилежний вектор $\left(-\vec{N}\right)$ виходить з фіксованої сторони поверхні.

При зміні фіксованої сторони поверхні знак j змінюється на протилежний. Поверхневий інтеграл другого роду має властивість лінійності. Інтеграл по кусково-гладенькій неперервній поверхні визначається як сума інтегралів по гладеньких частинах.

Приклад 1. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду

$$\int_S 2x_1\, dx_2 \wedge dx_3 - 3x_2\, dx_3 \wedge dx_1 + 5\, dx_1 \wedge dx_2,$$

де S – внутрішній бік сфери $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.

⌈ У сферичних координатах рівняння сфери має вигляд $r = 1$. Тому доречна така параметризація:

$$x_1 = u_1(t_1, t_2) = \cos t_1 \cos t_2,\ x_2 = u_2(t_1, t_2) = \sin t_1 \cos t_2,\ x_3 = u_3(t_1, t_2) = \sin t_2,$$

$$(t_1, t_2) \in T = [0; 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right].$$

Обчислимо координати вектора нормалі:

$$N_1 = \frac{\partial(u_2, u_3)}{\partial(t_1, t_2)} = (\cos t_1 \cos t_2)(\cos t_2) - (-\sin t_1 \sin t_2) \cdot 0 = \cos t_1 \cos^2 t_2;$$

$$N_2 = \frac{\partial(u_3, u_1)}{\partial(t_1, t_2)} = 0 \cdot (-\cos t_1 \sin t_2) - (\cos t_2)(-\sin t_1 \cos t_2) = \sin t_1 \cos^2 t_2;$$

$$N_3 = \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(t_1, t_2)} = (-\sin t_1 \cos t_2)(-\sin t_1 \sin t_2) - (-\cos t_1 \sin t_2)(\cos t_1 \cos t_2) =$$
$$= \sin t_2 \cos t_2.$$

Зауважимо, що вектор $\vec{N}(0,0) = (1,0,0)$ у точці $\vec{u}(0,0) = (1,0,0)$ на сфері має напрямок осі Ox_1 і є нормальним до зовнішньої сторони сфери. Тому для внутрішньої сторони сфери $j = -1$.

Орієнтацію можна встановити інакше. На множині T замкнений прямокутник $(0,0) \to \to (\frac{\pi}{2}, 0) \to (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}) \to (0, \frac{\pi}{4}) \to (0,0)$ пробігається так, що обмежена ним частина площини лишається ліворуч. Образ цього прямокутника на сфері пробігається у напрямку $(1,0,0) \to (0,1,0) \to \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \to \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \to (1,0,0)$, при цьому обмежена цим образом частина внутрішньої сторони сфери лишається праворуч. Тому для внутрішньої сторони сфери $j = -1$.

За означенням,

$$\int_S \omega = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^{2\pi} (2\cos^2 t_1 \cos^3 t_2 - 3\sin^2 t_1 \cos^3 t_2 + 5 \sin t_2 \cos t_2)\, dt_1\Big)\, dt_2 =$$
$$= \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t_2\, dt_2 = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t_2\, dt_2 = \frac{4\pi}{3}.$$

⌋

5.8. Обчислити поверхневий інтеграл $\int_S \omega$:

1) $\omega = x_1\, dx_2 \wedge dx_3 + x_2\, dx_3 \wedge dx_1 + x_3\, dx_1 \wedge dx_2$; S – зовнішній бік сфери $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$;
2) $\omega = (x_2 - x_3)\, dx_2 \wedge dx_3 + (x_3 - x_1)\, dx_3 \wedge dx_1 + (x_1 - x_2)\, dx_1 \wedge dx_2$; S – нижній бік конічної поверхні $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$, $0 \le x_3 \le 1$;
3) $\omega = x_1\, dx_2 \wedge dx_3 + x_1 x_2\, dx_3 \wedge dx_1 + x_1 x_2 x_3\, dx_1 \wedge dx_2$; S – зовнішній бік поверхні циліндра $x_1^2 + x_3^2 = 1$, $|x_2| \le 2$;
4) $\omega = x_1^2\, dx_2 \wedge dx_3 + x_2^2\, dx_3 \wedge dx_1 + x_3^2\, dx_1 \wedge dx_2$; S – нижній бік конічної поверхні $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$, $1 \le x_3 \le 2$;
5) $\omega = (x_1 + 1)\, dx_2 \wedge dx_3 - (2x_2 + 1)\, dx_3 \wedge dx_1$; S – верхній бік трикутника з вершинами $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$;
6) $\omega = x_1\, dx_2 \wedge dx_3 + x_2\, dx_3 \wedge dx_1 + x_3\, dx_1 \wedge dx_2$; S – нижній бік поверхні параболоїда $2x_3 = x_1^2 + x_2^2$, $(x_1 - 1)^2 + x_2^2 \le 1$;
7) $\omega = dx_1 \wedge dx_3 + 2x_1\, dx_1 \wedge dx_2$; S – зовнішній бік циліндричної поверхні $x_1^2 + x_2^2 = 1$, $|x_3| \le 1$;

8) $\omega = dx_2 \wedge dx_3 + dx_3 \wedge dx_1 + dx_1 \wedge dx_2$; S – зовнішній бік еліпсоїда $x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 = 1$;
9) $\omega = x_1^2\, dx_2 \wedge dx_3 + x_2^2\, dx_3 \wedge dx_1 + x_3^2\, dx_1 \wedge dx_2$; S – зовнішній бік сфери $x_1^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 + 1)^2 = 1$;
10) $\omega = x_1^2 x_2^2 x_3\, dx_1 \wedge dx_2$; S – зовнішній бік нижньої половини сфери $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$, $x_3 \le 0$;
11) $\omega = x_3\, dx_1 \wedge dx_2$; S – зовнішній бік еліпсоїда $\dfrac{x_1^2}{9} + \dfrac{x_2^2}{4} + x_3^2 = 1$;
12) $\omega = x_2^2\, dx_2 \wedge dx_3 + x_3\, dx_3 \wedge dx_1 - x_1\, dx_1 \wedge dx_2$; S – той бік циліндричної поверхні $x_2^2 = 1 - x_1, 0 \le x_3 \le x_1$, що видно з додатного напрямку осі Ox_1;
13) $\omega = 2x_1\, dx_2 \wedge dx_3 - x_2\, dx_3 \wedge dx_1 + 3x_3\, dx_1 \wedge dx_2$; S – той бік поверхні $x_3^2 = x_1$, $x_2^2 \le 1 - x_1$, $x_2 \ge 0$, що видно з додатного напрямку осі Ox_1;
14) $\omega = x_1 x_2\, dx_2 \wedge dx_3$; S – внутрішній бік верхньої половини сфери $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.

5.9. Обчислити поверхневий інтеграл $\int\limits_S \omega$:

1) $\omega = x_1 x_2\, dx_1 \wedge dx_2 + x_3\, dx_1 \wedge dx_3$; S – зовнішній бік поверхні симплекса $\{(x_1, x_2, x_3) |\, x_1 + x_2 + x_3 \le 1,\ x_i \ge 0,\ 1 \le i \le 3\}$;
2) $\omega = x_1\, dx_2 \wedge dx_3 + x_1 x_2\, dx_3 \wedge dx_1 + (x_1 + x_3)\, dx_1 \wedge dx_2$; S – зовнішній бік поверхні призми з вершинами $(1,0,0)$, $(1,1,0)$, $(0,1,0)$, $(0,1,1)$, $(0,0,1)$, $(0,0,0)$;
3) $\omega = x_1^2\, dx_2 \wedge dx_3 - 3x_1\, dx_3 \wedge dx_1 + (x_1^2 - x_2^2)\, dx_1 \wedge dx_2$; S – зовнішній бік поверхні призми з вершинами $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,0,1)$, $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(1,1,0)$;
4) $\omega = 2x_1\, dx_2 \wedge dx_3 + x_2\, dx_3 \wedge dx_1$; S – внутрішній бік поверхні симплекса $\{(x_1, x_2, x_3) |\, x_1 + x_2 + x_3 \le 1,\ x_i \ge 0,\ 1 \le i \le 3\}$;
5) $\omega = x_1 x_2\, dx_2 \wedge dx_3 + 3x_1 x_2 x_3\, dx_1 \wedge dx_2$; S – зовнішній бік поверхні куба $[0,1]^3$;
6) $\omega = x_1^2 x_2^2\, dx_2 \wedge dx_3 - (x_1^2 + x_3^2)\, dx_3 \wedge dx_1$; S – зовнішній бік поверхні циліндра $|x_1| + |x_2| = 1$, $0 \le x_3 \le 2$;
7) $\omega = x_1\, dx_2 \wedge dx_3 + x_2\, dx_3 \wedge dx_1 + x_3\, dx_1 \wedge dx_2$; S – зовнішній бік поверхні куба $[0;1]^3$;
8) $\omega = e^{x_1}\, dx_2 \wedge dx_3 + e^{x_2}\, dx_3 \wedge dx_1 + e^{x_3}\, dx_1 \wedge dx_2$; S – зовнішній бік поверхні паралелепіпеда $0 \le x_1 \le 1$, $0 \le x_2 \le 2$, $0 \le x_3 \le 3$;
9) $\omega = x_2 x_3\, dx_1 \wedge dx_2 + x_1 x_3\, dx_2 \wedge dx_3 + x_1 x_2\, dx_1 \wedge dx_3$; S – зовнішній бік поверхні, розташованої у першому октанті і складеної з поверхні циліндра $x_1^2 + x_2^2 = 4$ і площин $x_3 = 3$, $x_i = 0; 1 \le i \le 3$;

10) $\omega = x_1^2 x_3\, dx_1 \wedge dx_2 + x_1 x_3\, dx_2 \wedge dx_3 + x_1^2 x_2\, dx_1 \wedge dx_3$; S – зовнішній бік поверхні, розташованої у першому октанті і складеної з поверхонь параболоїда обертання $x_3 = x_1^2 + x_2^2$, циліндра $x_1^2 + x_2^2 = 1$ і координатних площин.

5.10. Обчислити поверхневий інтеграл $\int\limits_S \omega$:

1) $\omega = x_3 x_1\, dx_1 \wedge dx_2$; S – зовнішній бік поверхні тіла $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1,\ 0 \le x_3 \le 2,\ x_1 \ge 0\}$;
2) $\omega = x_1\, dx_2 \wedge dx_3$; S – зовнішній бік поверхні тіла $\{(x_1, x_2, x_3) \mid 0 \le x_3 \le 1 - x_1^2 - x_2^2\}$;
3) $\omega = x_2^2\, dx_1 \wedge dx_3$; S – зовнішній бік поверхні тіла $\{(x_1, x_2, x_3) \mid 0 \le x_3 \le 1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\}$;
4) $\omega = x_1 x_2\, dx_1 \wedge dx_3$; S – внутрішній бік поверхні піраміди з вершинами $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, -1, 0)$;
5) $\omega = (x_1 + x_2)\, dx_2 \wedge dx_3$; S – внутрішній бік поверхні тіла $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_3^2 \ge x_1^2 + x_2^2,\ 1 \le x_3 \le 2\}$;
6) $\omega = dx_2 \wedge dx_1$; S – зовнішній бік поверхні куба $[-1, 1]^3$;
7) $\omega = x_1^2 x_2^2\, dx_2 \wedge dx_3$; S – внутрішній бік поверхні тіла $\{(x_1, x_2, x_3) \mid |x_1| + |x_2| + |x_3| \le 1\}$;
8) $\omega = x_1\, dx_2 \wedge dx_3 + x_2\, dx_3 \wedge dx_1$; S – зовнішній бік поверхні тіла $\{(x_1, x_2, x_3) \mid$
$1 \le x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 4\}$;
9) $\omega = x_3\, dx_1 \wedge dx_2$; S – зовнішній бік поверхні тіла $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 1,\ x_i \ge 0,\ 1 \le i \le 3\}$;
10) $\omega = (x_1 - x_3)\, dx_2 \wedge dx_3$; S – внутрішній бік поверхні тіла $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 \le 1,\ x_i \ge 0,\ 1 \le i \le 3\}$;
11) $\omega = (x_1 + x_2 + x_3)\, dx_1 \wedge dx_2$; S – зовнішній бік поверхні тіла $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 4,\ x_1 \le x_2\}$.

5.11*. Обчислити похідну $\dfrac{d}{dt} \int\limits_{S(t)} (x_1\, dx_1 \wedge dx_2 + x_1 x_2\, dx_1 \wedge dx_3),\ t > 0$, де $S(t)$ – зовнішній бік сфери $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = t^2,\ t > 0$.

5.3 Формули Гріна, Остроградського – Гаусса і Стокса

Нехай M – відкрита множина в евклідовому просторі $\mathbb{R}^m$, $f_k : M \to \mathbb{R}$, $1 \le k \le q$. Вираз $\omega = f_1(\vec{x})\, dx_{\nu(1)} \wedge \ldots \wedge dx_{\nu(p)} + \ldots + f_q(\vec{x})\, dx_{\mu(1)} \wedge \ldots \wedge dx_{\mu(p)}$, де $\vec{x} \in M$, $1 \le \nu(i) \le m$, $1 \le \mu(i) \le m$, називається *диференціальною формою степеня* $p \in \mathbb{N}$ на множині M з коефіцієнтами $f_1, f_2, \ldots, f_q$. Функція $f : M \to \mathbb{R}$ уважається *диференціальною формою степеня* 0 на M.

Нехай $f_k \in C^{(1)}(M)$, $1 \le k \le q$, $0 \le p \le m$. *Зовнішнім диференціалом* форми ω степеня p називається диференціальна форма $d\omega$ степеня $p+1$, що визначається рівністю

$$d\omega = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_k}\, dx_k \wedge dx_{\nu(1)} \wedge \ldots \wedge dx_{\nu(p)} + \ldots +$$
$$+ \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_q(\vec{x})}{\partial x_k}\, dx_k \wedge dx_{\mu(1)} \wedge \ldots \wedge dx_{\mu(p)}.$$

Зокрема, зовнішнім диференціалом від форми степеня 0 (функції f) є диференціал цієї функції

$$d\omega = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_k}\, dx_k.$$

При спрощенні запису диференціальних форм використовують комутативність доданків, а також такі правила:

1) $dx_{\nu(1)} \wedge \ldots \wedge dx_{\nu(l)} \wedge dx_{\nu(l+1)} \wedge \ldots \wedge dx_{\nu(p)} = -dx_{\nu(1)} \wedge \ldots \wedge dx_{\nu(l+1)} \wedge dx_{\nu(l)} \wedge \ldots \wedge dx_{\nu(p)}$;

2) $dx_{\nu(1)} \wedge \ldots \wedge dx_s \wedge dx_s \wedge \ldots \wedge dx_{\nu(p)} = 0$.

Теорема (Пуанкаре). Нехай ω – диференціальна форма степеня p на M з коефіцієнтами, що належать класу $C^{(2)}(M)$. Тоді $d(d\omega) = 0$.

$\mathbf{1}^\circ$. Нехай $M \subset \mathbb{R}^2$ – вимірна множина з кусково-гладенькою межею ∂M (кривою або набором кривих), орієнтованою так, що при її пробіганні найближча частина множини M залишається зліва (цю орієнтацію будемо ще називати *додатною*); $\{P, Q\} \subset C^{(1)}(M)$. Тоді справджується *формула Гріна*

$$\int\limits_M \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = \int\limits_{\partial M} P\, dx_1 + Q\, dx_2.$$

З формули Гріна випливають такі формули для обчислення площі (міри Жордана) фігури M :

$$S(M) = \int\limits_{\partial M} x_1\, dx_2 = -\int\limits_{\partial M} x_2\, dx_1 = \frac{1}{2} \int\limits_{\partial M} x_1\, dx_2 - x_2\, dx_1.$$

$\mathbf{2}^\circ$. Розглянемо вимірну множину $M \subset \mathbb{R}^3$ і диференціальну форму

$$P(x_1, x_2, x_3)\, dx_2 \wedge dx_3 + Q(x_1, x_2, x_3)\, dx_3 \wedge dx_1 + R(x_1, x_2, x_3)\, dx_1 \wedge dx_2$$

з коефіцієнтами $\{P, Q, R\} \subset C^{(1)}(M)$. Нехай ∂M – зовнішня сторона кусково-гладенької поверхні (або набору поверхонь), що обмежує множину M. Цю сторону поверхні будемо вважати *додатно орієнтованою*. Тоді справджується *формула Остроградського – Гаусса*

$$\int\limits_M \left(\frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x_2} + \frac{\partial R}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3 = \int\limits_{\partial M} P\, dx_2 \wedge dx_3 + Q\, dx_3 \wedge dx_1 + R\, dx_1 \wedge dx_2.$$

З формули Остроградського – Гаусса випливають такі формули для обчислення об'єму (міри Жордана) тіла M :

$$V(M) = \int\limits_{\partial M} x_1\,dx_2 \wedge dx_3 = \int\limits_{\partial M} x_2\,dx_3 \wedge dx_1 = \int\limits_{\partial M} x_3\,dx_1 \wedge dx_2 =$$
$$= \frac{1}{3}\int\limits_{\partial M} x_1\,dx_2 \wedge dx_3 + x_2\,dx_3 \wedge dx_1 + x_3\,dx_1 \wedge dx_2.$$

$\mathbf{3}^{\circ}$. Нехай M – фіксована сторона частини гладенької двосторонньої поверхні в $\mathbb{R}^3$, обмеженої кусково-гладенькою замкненою кривою без самоперетинів ∂M. Напрямок обходу кривої встановимо таким чином, що найближча до неї частина обраної сторони поверхні лишається ліворуч. Тоді для диференціальної форми

$$\omega = P(x_1,x_2,x_3)\,dx_1 + Q(x_1,x_2,x_3)\,dx_2 + R(x_1,x_2,x_3)\,dx_3$$

з коефіцієнтами $\{P,Q,R\} \subset C^{(1)}(M)$ справджується *формула Стокса*

$$\int\limits_M \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2 + \left(\frac{\partial R}{\partial x_2} - \frac{\partial Q}{\partial x_3}\right) dx_2 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial P}{\partial x_3} - \frac{\partial R}{\partial x_1}\right) dx_3 \wedge dx_1 =$$
$$= \int\limits_{\partial M} P\,dx_1 + Q\,dx_2 + R\,dx_3.$$

Зауважимо, що в лівих частинах формул Гріна, Остроградського – Гаусса та Стокса під знаком інтеграла стоять зовнішні диференціали форм, що стоять у правих частинах під знаком інтеграла.

Приклад 1. Знайти зовнішній диференціал форми

$$\omega = x_1\,dx_1 + (x_1 + 2x_2 - x_3^2)\,dx_2 + (x_3 - x_2)\,dx_3.$$

$\ulcorner$ За означенням зовнішнього диференціала та правилами спрощення диференціальних форм маємо:

$$d\omega = dx_1 \wedge dx_1 + (dx_1 \wedge dx_2 + 2\,dx_2 \wedge dx_2 - 2x_3\,dx_3 \wedge dx_2) + (dx_3 \wedge dx_3 - dx_2 \wedge dx_3) =$$
$$= dx_1 \wedge dx_2 + (2x_3 - 1)\,dx_2 \wedge dx_3. \qquad \lrcorner$$

Приклад 2. Використовуючи формулу Гріна, обчислити криволінійний інтеграл
$$\int\limits_{\Gamma} 5x_1x_2\,dx_1 - x_1^2\,dx_2,$$
де Γ – межа множини $M = \{(x_1,x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 9,\ -1 \le x_1 \le 2\}$, що пробігається в додатному напрямку.

$\ulcorner$

$$\int\limits_{\Gamma} 5x_1x_2\,dx_1 - x_1^2\,dx_2 = \int\limits_M (-2x_1 - 5x_1)\,dx_1dx_2 = -7\int\limits_{-1}^{2} \Big(\int\limits_{-\sqrt{9-x_1^2}}^{\sqrt{9-x_1^2}} x_1\,dx_2\Big)\,dx_1 =$$
$$= -14\int\limits_{-1}^{2} x_1\sqrt{9-x_1^2}\,dx_1 = \frac{14}{3}(9-x_1^2)^{3/2}\Big|_{-1}^{2} = \frac{14(5\sqrt{5} - 16\sqrt{2})}{3}. \qquad \lrcorner$$

Приклад 3. Обчислити криволінійний інтеграл
$$\int\limits_{\Gamma} x_1 e^{x_1+x_2}\,dx_1 - x_1^2 e^{x_2}\,dx_2,$$

доповнивши ламану $\Gamma = ABCD$, $A = (1,5)$, $B = (4,5)$, $C = (4,3)$, $D = (1,3)$, до замкненої кривої і скориставшись формулою Гріна.

$\lceil$ Доповнимо ламану Γ відрізком прямої $\Gamma_1 = DA$. Для цього відрізка при параметричному зображенні $\vec{u}(t) = (1, 3+t)$, $t \in [0;2]$, знак $j = -1$. Тому

$$\int_{\Gamma_1} x_1 e^{x_1+x_2}\,dx_1 - x_1^2 e^{x_2}\,dx_2 = \int_0^2 (-e^{3+t})\,dt = e^3 - e^5.$$

При обході замкненої ламаної $\Gamma \cup \Gamma_1 = ABCDA$ у порядку переліку вершин, обмежений нею прямокутник $[1;4]\times[3;5]$ лишається справа.Тому за формулою Гріна

$$\int_{\Gamma\cup\Gamma_1} x_1 e^{x_1+x_2}\,dx_1 - x_1^2 e^{x_2}\,dx_2 = -\int_1^4 \Big(\int_3^5 (-2x_1 e^{x_2} - x_1 e^{x_1+x_2})\,dx_2\Big)\,dx_1 =$$
$$= \int_1^4 2x_1\,dx_1 \int_3^5 e^{x_2}\,dx_2 + \int_1^4 x_1 e^{x_1}\,dx_1 \int_3^5 e^{x_2}\,dx_2 =$$
$$= (15+3e^4)(e^5-e^3).$$

Остаточно,
$$\int_{\Gamma} x_1 e^{x_1+x_2}\,dx_1 - x_1^2 e^{x_2}\,dx_2 = \int_{\Gamma\cup\Gamma_1} - \int_{\Gamma_1} x_1 e^{x_1+x_2}\,dx_1 - x_1^2 e^{x_2}\,dx_2 = (16+3e^4)(e^5-e^3).$$
$\rfloor$

Приклад 4. За допомогою формули Гріна обчислити площу фігури, обмеженої кривою $x_1 = \cos^5 t,\ x_2 = \sin^5 t,\ t \in [0;2\pi]$.

$\lceil$ Скористаємося третьою формулою для площі:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\partial M} x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (5\cos^6 t\sin^4 t + 5\sin^6 t\cos^4 t)\,dt =$$
$$= \frac{5}{32}\int_0^{2\pi} \sin^4 2t\,dt = \frac{5}{128}\int_0^{2\pi} (1-\cos 4t)^2\,dt =$$
$$= \frac{5}{256}\int_0^{2\pi} (3 - 4\cos 4t + \cos 8t)\,dt = \frac{15\pi}{128}.$$
$\rfloor$

Приклад 5. Використовуючи формулу Остроградського – Гаусса, обчислити поверхневий інтеграл $\int_S (x_1 - 3x_2)\,dx_3 \wedge dx_1$, де S – внутрішній бік поверхні, що обмежує тіло $M = \{(x_1,x_2,x_3) \mid 4x_1^2 + 9x_2^2 \le 1,\ |x_3| \le 2\}$.

$\lceil$ Для внутрішньої сторони поверхні у формулі Остроградського – Гаусса перед потрійним інтегралом слід написати знак мінус. Тоді з формули для об'єму еліптичного циліндра маємо

$$\int_S (x_1 - 3x_2)\,dx_3 \wedge dx_1 = -\int_M (-3)\,dx_1 dx_2 dx_3 = 3m(M) = 3\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 4 = 2\pi.$$
$\rfloor$

Приклад 6. Використовуючи формулу Стокса, обчислити криволінійний інтеграл $\int_\Gamma x_1\,dx_2 + x_2\,dx_3$, де Γ – переріз сфери $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ площиною $x_3 = 2x_1$, який пробігається за годинниковою стрілкою, якщо дивитися з додатного напрямку осі Ox_1.

⌈ Поверхневий інтеграл у формулі Стокса не залежить від вибору гладенької поверхні, межею якої є заданий переріз сфери площиною (коло Γ). Виходячи з вигляду диференціальної форми, такою поверхнею зручно обрати площину $x_3 = 2x_1$. При цьому вказаний в умові задачі рух по колу відповідає вибору верхньої сторони площини. Позначимо через S частину цієї поверхні, обмежену колом Γ. За формулою Стокса

$$\int\limits_{\Gamma} x_1 dx_2 + x_2 dx_3 = \int\limits_{S} dx_1 \wedge dx_2 + dx_2 \wedge dx_3.$$

Інтеграл $\int\limits_{S} dx_1 \wedge dx_2$ зручно обчислити, вибравши параметрами декартові координати

$$(x_1, x_2) \in T_1 := \{(x_1, x_2) \mid 5x_1^2 + x_2^2 \le 1\}.$$

Для такої параметризації знак $j = 1$, оскільки нормаль $\vec{N}_1 = [(1,0,2),(0,1,0)] = (-2,0,1)$ утворює гострий кут з напрямком осі Ox_3 і є нормаллю до обраної верхньої сторони площини. Тому за відомою формулою для площі еліпса

$$\int\limits_{S} dx_1 \wedge dx_2 = \int\limits_{T_1} dx_1 dx_2 = m(T_1) = \frac{\pi}{\sqrt{5}}.$$

Аналогічно для обчислення інтеграла $\int\limits_{S} dx_2 \wedge dx_3$ зручно вибрати параметрами декартові координати

$$(x_2, x_3) \in T_2 := \left\{(x_2, x_3) \mid x_2^2 + \frac{5}{4}x_3^2 \le 1\right\}.$$

Для такої параметризації знак $j = -1$, оскільки нормаль $\vec{N}_2 = [(0,1,0),(\frac{1}{2},0,1)] = (1,0,-\frac{1}{2})$ утворює тупий кут з напрямком осі Ox_3 і є нормаллю до нижньої сторони площини. Тому

$$\int\limits_{S} dx_2 \wedge dx_3 = -\int\limits_{T_2} dx_2 dx_3 = -m(T_2) = -\frac{2\pi}{\sqrt{5}}.$$

Остаточно

$$\int\limits_{S} dx_1 \wedge dx_2 + dx_2 \wedge dx_3 = \int\limits_{S} dx_1 \wedge dx_2 + \int\limits_{S} dx_2 \wedge dx_3 = \frac{\pi}{\sqrt{5}} - \frac{2\pi}{\sqrt{5}} = -\frac{\pi}{\sqrt{5}}.$$ ⌋

5.12. Знайти зовнішній диференціал форми ω :

1) $\omega = x_1\, dx_1 + x_2\, dx_2$;
2) $\omega = x_3\, dx_1 \wedge\, dx_2 - x_1 x_2\, dx_3 \wedge\, dx_2$;
3) $\omega = P(x_1,x_2)\, dx_1 + Q(x_1,x_2)\, dx_2$, де $\{P,Q\} \subset C^{(1)}(\mathbb{R}^2)$;
4) $\omega = P(x_1,x_2,x_3)\, dx_1 + Q(x_1,x_2,x_3)\, dx_2 + R(x_1,x_2,x_3)\, dx_3$, де $\{P,Q,R\} \subset C^{(1)}(\mathbb{R}^3)$;
5) $\omega = P(x_1,x_2,x_3)\, dx_2 \wedge dx_3 + Q(x_1,x_2,x_3)\, dx_3 \wedge dx_1 + R(x_1,x_2,x_3)\, dx_1 \wedge\, dx_2$, де $\{P,Q,R\} \subset C^{(1)}(\mathbb{R}^3)$;
6) $\omega = x_2\, dx_1 + x_1 dx_2$;
7) $\omega = x_1 x_2\, dx_1 + \sin(x_1 x_2)\, dx_2$;
8) $\omega = \operatorname{ch} x_1\, dx_1 + \operatorname{sh}(x_1 + x_2)\, dx_2$;
9) $\omega = x_1 x_3\, dx_1 + x_2 x_3\, dx_2 + x_3 x_1\, dx_3$;
10) $\omega = e^{x_1 + x_2}\, dx_1 + \cos^2 x_2\, dx_2 + \operatorname{arctg}(x_1 x_3)\, dx_3$;
11) $\omega = x_1\, dx_2 \wedge dx_3 + x_2\, dx_3 \wedge dx_1 + x_3\, dx_1 \wedge dx_2$;

12) $\omega = 2\,dx_2 \wedge dx_3 + x_1x_2\,dx_3 \wedge dx_1 + (x_1 - x_2)\,dx_1 \wedge dx_2$;
13) $\omega = x_1\,dx_1 \wedge dx_2 + x_1x_2\,dx_1 \wedge dx_3$;
14) $\omega = \sum\limits_{k=1}^{m} \exp(x_k^k)\,dx_k$;
15)* $\omega = \sum\limits_{k=1}^{m} \sin(x_k)\,dx_{k+1} \wedge \ldots \wedge dx_m \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{k-1}$.

5.13. Використовуючи формулу Гріна, обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_\Gamma \omega$ по межі $\Gamma = \partial M$ заданої множини M, що пробігається у додатному напрямку:

1) $\omega = (x_1+x_2)^2\,dx_1 - (x_1^2+x_2^2)\,dx_2$; M – трикутник ABC з вершинами $A(1,1)$, $B(0,0)$, $C(0,2)$;
2) $\omega = (x_1 + x_2)\,dx_1 - (x_1 - x_2)\,dx_2$; M – еліпс $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} \le 1$, $a > 0$, $b > 0$;
3) $\omega = e^{x_1}\big((1-\cos x_2)\,dx_1 - (x_2 - \sin x_2)\,dx_2\big)$; $M = \{(x_1, x_2) \mid 0 < x_1 < \pi,$ $0 < x_2 < \sin x_1\}$;
4) $\omega = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,dx_1 + x_2\big(x_1x_2 + \ln(x_1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2})\big)\,dx_2$; $M = \{(x_1, x_2) \mid (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \le 1\}$;
5) $\omega = (x_1 + 2x_2)\,dx_1 + x_1x_2\,dx_2$; $M = \{(x_1, x_2) \mid 0 \le x_1 \le 2,$ $0 \le x_2 \le 1 + x_1\}$;
6) $\omega = x_1x_2^2\,dx_1 + x_1^3\,dx_2$; $M = \{(x_1, x_2) \mid |x_1| + |x_2| \le 1\}$;
7) $\omega = x_1^2\,dx_1 + x_1x_2\,dx_2$; M – множина точок квадрата $[0;1]^2$, що лежать поза кругом $\left(x_1 - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(x_2 - \dfrac{1}{2}\right)^2 \le \dfrac{1}{4}$;
8) $\omega = (x_1 + 2x_2)\,dx_1 + x_1x_2\,dx_2$; $M = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \ge x_2^2 - 2,\ x_1 \le 2\}$;
9) $\omega = x_1x_2\,dx_1 + (x_1 + 3x_2)\,dx_2$; $M = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \ge x_1^2 - 2,\ x_1 \le |x_2|\}$;
10) $\omega = x_2\,dx_1 + x_1\,dx_2$; $M = \{(x_1, x_2) \mid (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \le 1\}$;
11) $\omega = -3x_1^2x_2\,dx_1 + 3x_1x_2^2\,dx_2$; $M = \{(x_1, x_2) \mid -1 \le x_1 \le 1,\ 0 \le x_2 \le \sqrt{1 - x_1^2}\}$;
12) $\omega = (x_1 + 2x_2)\,dx_1 - x_1x_2\,dx_2$; $M = \{(x_1, x_2) \mid -1 \le x_1 \le x_2^2,\ 0 \le x_2 \le 1\}$;
13) $\omega = (x_1^2 + x_2^2)^{-1}(-x_2\,dx_1 + x_1\,dx_2)$; $M = \{(x_1, x_2) \mid 1 \le x_1^2 + x_2^2 \le 4\}$.

5.14. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_\Gamma \omega$, доповнивши криву Γ до замкненої кривої і скориставшись формулою Гріна:

1) $\omega = (e^{x_1}\sin x_2 - x_2)\,dx_1 + (e^{x_1}\cos x_2 - 1)\,dx_2$; Γ – верхнє півколо $x_1^2 + x_2^2 = 2x_1$, $x_2 \geq 0$, що пробігається від точки $A(2,0)$ до точки $O(0,0)$;
2) $\omega = x_1 x_2^2\,dx_2 - x_1^2 x_2\,dx_1$; Γ – верхнє півколо $x_1^2 + x_2^2 = 1$, $x_2 \geq 0$, що пробігається від точки $A(1,0)$ до точки $B(-1,0)$;
3) $\omega = e^{-(x_1^2 - x_2^2)}(\cos(2x_1x_2)\,dx_1 + \sin(2x_1x_2)\,dx_2)$; Γ – дуга кола $x_1^2 + x_2^2 = 4$, $x_1 \geq 0$, що пробігається від точки $A(0,-2)$ до точки $B(0,2)$;
4) $\omega = (x_1x_2 + x_1 + x_2)\,dx_1 + (x_1x_2 + x_1 - x_2)\,dx_2$; Γ – дуга еліпса $x_1^2 + \dfrac{x_2^2}{4} = 1$, $x_2 \geq 0$, що пробігається від точки $A(1,0)$ до точки $B(-1,0)$;
5) $\omega = (x_1x_2 + x_1 + x_2)\,dx_1 + (x_1x_2 + x_1 - x_2)\,dx_2$; Γ – нижнє півколо $x_1^2 + x_2^2 = 2x_1$, $x_2 \leq 0$, що пробігається від точки $O(0,0)$ до точки $A(2,0)$;
6) $\omega = (x_2 - x_1^2)\,dx_1 + (x_1 + x_2^2)\,dx_2$; Γ – чверть кола $x_1^2 + x_2^2 = 1$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, що пробігається від точки $A(1,0)$ до точки $B(0,1)$;
7) $\omega = x_1x_2^2\,dx_1 - x_1^3\,dx_2$; Γ – дуга кола $x_1^2 + x_2^2 = 1$, $x_1 \leq x_2$, що пробігається від точки $A\Big(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big)$ до точки $B\Big(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big)$;
8) $\omega = (2x_1 + 3x_2)\,dx_1 + 5x_2\,dx_2$; Γ – дуга косинусоїди $x_2 = \cos x_1$, $-\dfrac{\pi}{2} \leq x_1 \leq \dfrac{\pi}{2}$, що пробігається в напрямку зростання x_1;
9) $\omega = x_1x_2^2\,dx_1 + e^{x_1+x_2}\,dx_2$; Γ – ламана, що з'єднує послідовно точки $(-1,0)$, $(-1,1)$, $(1,1)$, $(1,0)$;
10) $\omega = x_1^2x_2\,dx_1 + (x_1 - x_2)\,dx_2$; Γ – ламана, що з'єднує послідовно точки $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$;
11) $\omega = x_2^2\,dx_1 + x_1x_2\,dx_2$; крива Γ складена з відрізка прямої з кінцями в точках $(-1,0)$ і $(0,1)$ та дуги кола з центром в точці $(0,0)$ радіуса 1, розташованої в першій чверті площини; пробігається в напрямку $(-1,0) \to (0,1) \to (1,0)$.

5.15. Використовуючи формулу Гріна, обчислити криволінійний інтеграл
$$\int_{\Gamma} \frac{x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1}{x_1^2 + x_2^2},$$
де Γ – проста замкнена крива, що не проходить через початок координат і пробігається проти руху годинникової стрілки.

Вказівка. Розглянути два випадки: 1) початок координат поза множиною, обмеженою кривою Γ; 2) крива Γ оточує початок координат.

5.16. Використовуючи формулу Гріна, обчислити площу фігури, обмеженої кривою:

1) еліпсом $\{(a\cos t, b\sin t) \mid 0 \le t \le 2\pi\}$, $a > 0$, $b > 0$;
2) параболою $(x_1 + x_2)^2 = x_1$ і віссю Ox_1;
3) астроїдою $\left\{(\cos^3 t, \sin^3 t) \mid 0 \le t \le 2\pi\right\}$;
4)* кривою $x_1^3 + x_2^3 = x_1^2 + x_2^2$ і осями координат;
5) кривою $(x_1 + x_2)^3 = x_1 x_2$;
6)* кривою $x_1^4 + x_2^4 = x_1^3 + x_2^3$ і осями координат;
7) кардіоїдою $\{(2\cos t - \cos 2t,\ 2\sin t - \sin 2t) \mid 0 \le t \le 2\pi\}$;
8) параболою $(x_1 - x_2)^2 = x_1$ і віссю Ox_1;
9) гіпоциклоїдою $\{(2\cos t + \cos 2t,\ 2\sin t - \sin 2t) \mid\ \le t \le 2\pi\}$;
10)* петлею декартового листа $x_1^3 + x_2^3 = 3x_1x_2$ (покласти $x_2 = x_1 t$);
11) лемніскатою $(x_1^2 + x_2^2)^2 = x_1^2 - x_2^2$;
12) дугою гіперболи $x_1 = \operatorname{ch} t,\ x_2 = 2\operatorname{sh} t$ від точки $M(x_1^0, x_2^0)$ до точки перетину з віссю Ox_1, відрізком цієї осі та відрізком прямої OM;
13) кривою $\left(\dfrac{x_1}{a}\right)^n + \left(\dfrac{x_2}{b}\right)^n = 1$, $\{a, b, n\} \subset (0; +\infty)$, і осями координат (покласти $x_1 = a(\cos\varphi)^{\frac{2}{n}}$, $x_2 = a(\sin\varphi)^{\frac{2}{n}}$, $\varphi \in [0; \frac{\pi}{2}]$).

5.17. *Епіциклоїдою* називають криву, що описується точкою рухомого кола радіуса r, яке котиться без ковзання по нерухомому колу радіуса R і залишається зовні круга, обмеженого нерухомим колом. Знайти площу, обмежену епіциклоїдою, вважаючи, що відношення $\dfrac{R}{r} = n \in \mathbb{N}$. Розглянути окремий випадок $R = r$ (кардіоїда).

5.18. *Гіпоциклоїдою* називають криву, що описується точкою рухомого кола радіуса r, яке котиться без ковзання по нерухомому колу радіуса R і залишається всередині круга, обмеженого нерухомим колом. Знайти площу, обмежену епіциклоїдою, вважаючи, що відношення $\dfrac{R}{r} = n$ – натуральне число, $n \ge 2$. Розглянути випадок $R = 4r$ (астроїда).

5.19. Нехай тіло утворено обертанням навколо осі Ox_1 плоскої фігури, обмеженої гладеньким замкненим контуром без самоперетинів Γ, що лежить у верхній півплощині $x_2 \ge 0$. Довести, що об'єм цього тіла дорівнює $V = -\pi \int\limits_{\Gamma} x_2^2\, dx_1$, де Γ пробігається у додатному напрямку.

5.20. Нехай межею компактної вимірної за Жорданом множини $M \subset \mathbb{R}^3$ є кусково-гладенька замкнена поверхня. Використовуючи формулу Остроградського – Гаусса, обчислити поверхневий інтеграл $\int\limits_S \omega$ по зовнішній стороні цієї поверхні S від заданої диференціальної форми ω :

1) $\omega = x_2x_3\,dx_2 \wedge dx_3 + x_3x_1\,dx_3 \wedge dx_1 + x_1x_2\,dx_1 \wedge dx_2$;
2) $\omega = \left(\frac{\partial R}{\partial x_2} - \frac{\partial Q}{\partial x_3}\right) dx_2 \wedge dx_3 + {}$ $+ \left(\frac{\partial P}{\partial x_3} - \frac{\partial R}{\partial x_1}\right) dx_3 \wedge dx_1 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2$;
3) $\omega = x_1^4\,dx_2 \wedge dx_3 + x_2^4\,dx_3 \wedge dx_1 + x_3^4\,dx_1 \wedge dx_2$, множина M симетрична відносно координатних площин;
4) $\omega = x_1^3\,dx_2 \wedge dx_3 + x_2^3\,dx_3 \wedge dx_1 + x_3^3\,dx_1 \wedge dx_2$, S– зовнішній бік сфери $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$.

5.21. Обчислити поверхневий інтеграл $\int\limits_S \omega$, використовуючи формулу Остроградського – Гаусса:

1) $\omega = (x_1 + 2x_2)\,dx_2 \wedge dx_3$; S – зовнішній бік поверхні тіла $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1,\ |x_3| \le 1\}$;
2) $\omega = x_1x_3\,dx_2 \wedge dx_3 + (x_1^2 + x_3^2)\,dx_1 \wedge dx_2$; S – внутрішній бік поверхні тіла $[0; 1]^3$;
3) $\omega = x_1\,dx_2 \wedge dx_3 + 2x_2\,dx_3 \wedge dx_1$; S – зовнішній бік поверхні тіла $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 1\}$;
4) $\omega = x_1^2\,dx_2 \wedge dx_3 + x_3^2\,dx_1 \wedge dx_2$; S – внутрішній бік поверхні тіла $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_2^2 \le 2 - x_1,\ 0 \le x_3 \le x_1\}$;
5) $\omega = x_1^3\,dx_2 \wedge dx_3 + x_2^3\,dx_3 \wedge dx_1 + x_3^3\,dx_1 \wedge dx_2$; S – зовнішній бік поверхні тіла $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 1\}$;
6) $\omega = (x_1 - x_2 + x_3)\,dx_2 \wedge dx_3 + (x_2 - x_3 + x_1)\,dx_3 \wedge dx_1 + (x_3 - x_1 + x_2)\,dx_1 \wedge dx_2$; S – зовнішній бік поверхні $|x_1 - x_2 + x_3| + |x_2 - x_3 + x_1| + |x_3 - x_1 + x_2| = 1$;
7) $\omega = x_1x_3dx_1 \wedge dx_2 + x_3\,dx_2 \wedge dx_3 + x_1x_2x_3\,dx_3 \wedge dx_1$; S – зовнішній бік поверхні призми $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 \le 1,\ x_3 \le 1,\ x_i \ge 0,\ 1 \le i \le 3\}$ без нижньої основи;
8) $\omega = x_1^2x_2\,dx_2 \wedge dx_3 + dx_1 \wedge dx_2$; S – зовнішній бік поверхні призми $\{(x_1, x_2, x_3) \mid |x_1| + |x_2| \le 1,\ 0 \le x_3 \le 1\}$ без верхньої основи;

9) $\omega = x_2^2 x_3\, dx_1 \wedge dx_2 + x_1^2 x_3\, dx_2 \wedge dx_3$; S – зовнішній бік поверхні тіла $\{(x_1, x_2, x_3) \mid$
$x_1^2 + x_2^2 \le 1,\ x_3 \le x_1^2 + x_2^2,\ x_i \ge 0,\ 1 \le i \le 3\}$ без нижньої основи $\{(x_1, x_2, x_3) \mid$
$x_1^2 + x_2^2 \le 1,\ x_3 = 0,\ x_i \ge 0,\ 1 \le i \le 2\}$;

10) $\omega = x_1^2\, dx_2 \wedge dx_3 + x_2^2\, dx_3 \wedge dx_1 + x_3^2\, dx_1 \wedge dx_2$; S – зовнішній бік конічної поверхні $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2,\ 0 \le x_3 \le 1.$
Вказівка. Приєднати частину площини $x_3 = 1,\ x_1^2 + x_2^2 \le 1.$

5.22. Використовуючи формулу Остроградського – Гаусса, обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

1) тором $x_1 = (b + a\cos\psi)\cos\varphi,\ x_2 = (b + a\cos\psi)\sin\varphi,\ x_3 = a\sin\psi$; $\{\varphi, \psi\} \subset [0; 2\pi]$; $0 < a \le b$;
2) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2,\ r > 0$;
3) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2x_2$;
4) поверхнею $x_1 = \cos(\varphi - \psi),\ x_2 = \sin(\varphi - \psi),\ x_3 = \sin\psi$, $\{\varphi, \psi\} \subset [0; 2\pi]$, і площинами $x_3 = \pm 1$;
5) поверхнею $x_1 = t_1 \cos t_2,\ x_2 = t_1 \sin t_2,\ x_3 = -t_1 + \cos t_2,\ t_1 \ge 0,$ $t_2 \in [0; 2\pi]$, і площиною $x_3 = 0.$
6) поверхнею $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$ і площиною $x_3 = h,\ h > 0$;
7) поверхнею $x_1^2 + x_2^2 = r^2$ і площинами $x_3 = 0,\ x_3 = h,\ h > 0,\ r > 0$;
8) поверхнею $x_3 = x_1^2 + x_2^2$ і площиною $x_3 = h,\ h > 0$;
9) поверхнею $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2$ і площиною $x_3 = h,\ r > h > 0,\ x_3 \ge h$;
10) $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} + \dfrac{x_3^2}{c^2} = 1,\ a, b, c > 0$;
11)* поверхнями $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ і $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + x_3^2 = 1.$

5.23. Використовуючи формулу Стокса, обчислити криволінійний інтеграл $\int_\Gamma \omega$ по орієнтованій кривій Γ від заданої диференціальної форми ω :

1) $\omega = x_2\, dx_1 + x_3\, dx_2 + x_1\, dx_3$; Γ – коло $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,\ x_1 + x_2 + x_3 = 0$, рух проти годинникової стрілки, якщо дивитися з боку додатного напрямку осі Ox_1;
2) $\omega = (x_2 - x_1)\, dx_1 + (x_3 - x_1)\, dx_2 + (x_1 - x_2)\, dx_3$; Γ – еліпс $x_1^2 + x_2^2 = 1,$ $x_1 + 2x_3 = 1$, рух проти годинникової стрілки, якщо дивитися з боку додатного напрямку осі Ox_1;
3) $\omega = (x_3 - x_2)\, dx_1 + (x_1 - x_3)\, dx_2 + (x_2 - x_1)\, dx_3$; Γ – перетин поверхні $x_1^2 + x_2^2 = 1$ площиною $x_1 + x_2 + x_3 = 1$; рух за годинниковою стрілкою, якщо дивитися з боку додатного напрямку осі Ox_3;

4) $\omega = (x_2^2 + x_3^2)\,dx_1 + (x_1^2 + x_3^2)\,dx_2 + (x_1^2 + x_2^2)\,dx_3$; Γ – перетин сфери $x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 2Rx_1$ і циліндра $x_1^2+x_2^2 = 2rx_1$, $x_3 > 0$, $0 < r < R$, при русі по цій кривій менша область, обмежена нею на поверхні сфери, залишається зліва;
5) $\omega = (x_2^2 - x_3^2)\,dx_1 + (x_3^2 - x_1^2)\,dx_2 + (x_1^2 - x_2^2)\,dx_3$; Γ – перетин поверхні куба $[0;1]^3$ і площини $x_1+x_2+x_3 = \frac{3}{2}$, рух проти годинникової стрілки, якщо дивитися з додатного напрямку осі Ox_1;
6) $\omega = (x_1 + x_2)\,dx_2 + (x_1 - x_3)\,dx_3$; Γ – перетин сфери $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ і площини $x_3 = \frac{1}{2}$, рух проти годинникової стрілки, якщо дивитися з боку додатного напрямку оі Ox_3;
7) $\omega = (x_1 + x_2)\,dx_2 + (x_1 - x_3)\,dx_3$; Γ – перетин сфери $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$ і площини $x_2 = 1$, рух проти годинникової стрілки, якщо дивитися з боку додатного напрямку осі Ox_2;
8) $\omega = (x_1^2 + x_2^2)\,dx_1 + (x_1^2 - x_3^2)\,dx_3$; Γ – перетин сфери $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ і площини $x_1 + x_2 - x_3 = 0$, рух за годинниковою стрілкою, якщо дивитися з боку додатного напрямку осі Ox_1;
9) $\omega = x_1^2\,dx_1 + x_1x_2\,dx_2 + x_1x_3\,dx_3$; Γ – перетин сфери $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ і площини $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, рух за годинниковою стрілкою, якщо дивитися з боку додатного напрямку осі Ox_1;
10) $\omega = (x_2 - x_3)\,dx_1 + (x_3 - x_1)\,dx_2 + (x_1 - x_2)\,dx_3$; Γ – перетин еліпсоїда $x_1^2 + \dfrac{x_2^2}{4} + x_3^2 = 1$ і площини $x_3 = \dfrac{1}{2}$, рух за годинниковою стрілкою, якщо дивитися з боку додатного напрямку осі Ox_3;
11) $\omega = (x_1 + x_2)\,dx_1 + x_1x_2\,dx_3$; Γ – перетин циліндричної поверхні $x_1^2 + x_2^2 = 1$ з площиною $x_1 = x_3$, рух проти годинникової стрілки, якщо дивитися з боку додатного напрямку осі Ox_1;
12) $\omega = (x_1 - x_2 + x_3)\,dx_1 + x_2x_3\,dx_2$; Γ – перетин конічної поверхні $x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ і площини $x_1 + 2x_3 = 1$, рух проти годинникової стрілки, якщо дивитися з початку координат;
13) $\omega = (x_2+x_3)\,dx_1+(x_3+x_1)\,dx_2+(x_1+x_2)\,dx_3$; Γ – еліпс $\{(\sin^2 t, \sin 2t, \cos^2 t) \mid 0 \le t \le \pi\}$, що пробігається в напрямку зростання параметра;
14) $\omega = x_2^2x_3^2\,dx_1 + x_1^2x_3^2\,dx_2 + x_1^2x_2^2\,dx_3$; крива $\Gamma = \{(\cos t, \cos 2t, \cos 3t) \mid 0 \le t \le 2\pi\}$ пробігається в напрямку зростання параметра t;
15) $\omega = x_1^2x_3\,dx_1 + x_1^2x_3\,dx_2 + x_1x_2^2\,dx_3$; крива $\Gamma = \{(\sin t, \sin 5t, \sin 3t) \mid 0 \le t \le \pi\}$ пробігається в напрямку зростання параметра t;
16) $\omega = (x_1^2 - x_2x_3)\,dx_1 + (x_2^2 - x_3x_1)\,dx_2 + (x_3^2 - x_1x_2)\,dx_3$; виток гвинтової лінії $\Gamma = \{(\cos t, \sin t, t) \mid 0 \le t \le 2\pi\}$ пробігається в напрямку

зростання параметра t.

Вказівка. Доповнити криву Γ прямолінійним відрізком.

5.4 Інтеграл від диференціала

Визначена на M диференціальна форма ω називається *точною* на M, якщо вона є зовнішнім диференціалом деякої форми на M.

Зауважимо, що повний диференціал функції $g \in C^{(1)}(M)$ є точною диференціальною формою першого степеня.

Теорема 1. Нехай $g \in C^{(1)}(M)$ і $M \supset \Gamma = \vec{u}([a;b])$ – кусково-гладенька крива в M, що пробігається від точки $\vec{u}(a)$ до точки $\vec{u}(b)$. Тоді

$$\int\limits_{\Gamma} dg = \int\limits_{\Gamma} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g(\vec{x})}{\partial x_k}\, dx_k = g(\vec{u}(b)) - g(\vec{u}(a)).$$

Наслідок. Якщо $g \in C^{(1)}(M)$ і Γ – кусково-гладенька замкнена крива в M, то $\int\limits_{\Gamma} dg = 0$.

Диференціальна форма ω з коефіцієнтами з класу $C^{(1)}(M)$ називається *замкненою* в M, якщо $d\omega = 0$ в M.

Кожна точна диференціальна форма є замкненою.

Під кусково двічі неперервно диференційовною кривою будемо розуміти множину $\Gamma = \vec{u}([a;b])$, де $\vec{u} \in C([a;b])$ і для деякого розбиття відрізка $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$: $\vec{u} \in C^{(2)}([t_{i-1};t_i])$, $i = 1,\ldots,n$ (у точках розбиття маються на увазі відповідні односторонні похідні компонентів відображення $\vec{u}$). Замкнена кусково двічі неперервно диференційовна крива $\Gamma = \vec{u}([a;b]) \subset M$ називається *гомотопною точці* в M, якщо існують відображення $\vec{\varphi} : \ F := [a;b] \times [0;1] \to \mathbb{R}^m$ і точка $\vec{x}^{\,0} \in M$, для яких виконуються умови:

1) $\forall\, (t,\alpha) \in F : \ \vec{\varphi}(t,\alpha) \in M$;
2) $\forall\, t \in [a;b] : \ \vec{\varphi}(t,0) = \vec{u}(t), \ \vec{\varphi}(t,1) = \vec{x}^{\,0}$;
3) $\forall\, \alpha \in [0;1] : \ \vec{\varphi}(a,\alpha) = \vec{\varphi}(b,\alpha)$;
4) для деякого розбиття $a = i_0 < t_1 < \ldots < t_p = b$: $\vec{\varphi} \in C^{(2)}(F_i)$, де $F_i = [t_i;t_{i+1}] \times [0;1]$, $i = 0,1,\ldots,p-1$.

Множина M називається *однозв'язною*, якщо будь-які дві точки цієї множини можна сполучити неперервною кривою, що лежить в M, і будь-яка замкнена крива, що лежить в M, гомотопна точці в M.

Теорема 2. Нехай M – однозв'язна множина в $\mathbb{R}^m$, ω – замкнена диференціальна форма першого степеня з коефіцієнтами з класу $C^{(1)}(M)$. Тоді для довільної замкненої кусково двічі неперервно диференційовної кривої Γ, що лежить в M, $\int\limits_{\Gamma} \omega = 0$.

Наслідок. Інтеграл від точної форми за умов теореми 1 та інтеграл від замкненої форми за умов теореми 2 не залежить від шляху інтегрування, розташованого у відповідній множині, а залежить лише від початкової та кінцевої точок цього шляху. У такому випадку інтеграл часто записують у формі $\int\limits_{A}^{B} \omega$.

Теорема 3. Нехай M – відкрита однозв'язна множина в $\mathbb{R}^m$ і $\omega = f_1(\vec{x})\, dx_1 + \ldots + f_m(\vec{x})\, dx_m$ – диференціальна форма першого степеня, коефіцієнти якої належать класу $C^{(1)}(M)$. Для того, щоб форма ω була точною на M, необхідно й достатньо, щоб

$$\forall\,\vec{x}\in M\ \forall\,k,j,\ 1\le k,j\le m\ :\ \frac{\partial f_k(\vec{x})}{\partial x_j}=\frac{\partial f_j(\vec{x})}{\partial x_k}.$$

При цьому функцію z з умови $dz=\sum\limits_{k=1}^{m} f_k\,dx_k$ можна визначити як криволінійний інтеграл другого роду

$$z(\vec{x})=\int\limits_{\Gamma(\vec{x})}\sum_{k=1}^{m} f_k\,dx_k,$$

по довільній кусково-гладенькій кривій $\Gamma(\vec{x})\subset M$ з початком у довільно обраній фіксованій точці $\vec{x}^{\,0}$ і з кінцем у змінній точці $\vec{x}$.

Фізична інтерперетація

Нехай M – однозв'язна відкрита множина в $\mathbb{R}^3$. Силове векторне поле

$$\vec{F}=(F_1,F_2,F_3):M\to\mathbb{R}^3$$

називається *потенціальним*, якщо для деякого скалярного поля $P:M\to\mathbb{R}$ векторне поле $\vec{F}=\operatorname{grad}P=\left(\dfrac{\partial P}{\partial x_1},\dfrac{\partial P}{\partial x_2},\dfrac{\partial P}{\partial x_3}\right)$. Функція P при цьому називається *скалярним потенціалом* поля $\vec{F}$. Потенціал відновлюється за полем $\vec{F}$ однозначно з точністю до довільної адитивної сталої. Диференціальна форма $\omega=F_1(\vec{x})\,dx_1+F_2(\vec{x})\,dx_2+F_3(\vec{x})\,dx_3$ для потенціального поля $\vec{F}$ є точною, тому робота сил потенціального поля вздовж будь-якої замкненої гладенької кривої в M дорівнює нулю. Очевидно, робота сил потенціального поля залежить лише від початку та кінця кривої в M, а не від конкретного її вигляду.

Теорема 3 дає необхідні й достатні умови потенціальності поля $\vec{F}\in C^{(1)}(M)$ на відкритій однозв'язній множині:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}=\frac{\partial F_j}{\partial x_i},\ i,j=1,2,3.$$

Приклад 1. Знайти функцію $z:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ за її диференціалом

$$dz=(x_2+x_3)\,dx_1+(x_1+1)\,dx_2+(2x_3+x_1)\,dx_3.$$

⌈ Безпосереднім диференціюванням легко перевірити, що форма dz задовольняє умови теореми 3 і є точною на $\mathbb{R}^3$. Функцію $z=z(\vec{x})$ можна знайти як інтеграл по довільній кусково-гладенькій кривій з кінцем у точці $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$ (інтеграли по кривих з різними початковими точками відрізняються на сталу). Виберемо контуром інтегрування ламану $\Gamma(\vec{x}):(0,0,0)\to(x_1,0,0)\to(x_1,x_2,0)\to(x_1,x_2,x_3)$. Тоді

$$\int\limits_{\Gamma} dz=\int\limits_0^{x_1}0\,dt+\int\limits_0^{x_2}(x_1+1)\,dt+\int\limits_0^{x_3}(2t+x_1)\,dt=x_2(x_1+1)+x_3(x_1+x_3).$$

Будь-яка функція з указаним зовнішнім диференціалом має вигляд

$$z=x_2(x_1+1)+x_3(x_1+x_3)+C,\ C\in\mathbb{R}.$$ ⌋

Приклад 2. Довести, що форма $\omega=e^{x_2+x_3}\,dx_1+x_1e^{x_2+x_3}\,dx_2+x_1e^{x_2+x_3}\,dx_3$ є повним диференціалом, і обчислити $\int\limits_A^B\omega$, де $A=(0,0,0),\ B=(2,1,-1)$.

⌈ Форма визначена на $\mathbb{R}^3$ і за теоремою 3 є точною. Згідно з наслідком з теореми 2 контуром інтегрування можна вибрати, наприклад, відрізок прямої з параметричним рівнянням $\Gamma = \{\vec{u}(t) = (2t, t, -t) \mid t \in [0; 1]\}$. При цьому $j = +1$. Тому

$$\int\limits_A^B \omega = \int\limits_0^1 (2 + 2t - 2t)\, dt = 2.$$

Інший спосіб розв'язання випливає з того, що $\omega = d(x_1 e^{x_2+x_3})$, $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}$. Тому за теоремою 1

$$\int\limits_A^B \omega = x_1 e^{x_2+x_3} \Big|_{(0,0,0)}^{(2,1,-1)} = 2.$$ ⌋

5.24. Довести, що форма ω є повним диференціалом, обчислити $\int\limits_A^B \omega$:

1) $\omega = (x_2\, dx_1 - x_1\, dx_2)x_1^{-2},\ A = (2, 1),\ B = (1, 2)$, шлях інтегрування не перетинає вісь Ox_2;
2) $\omega = (x_1^4 + 4x_1x_2^3)\, dx_1 + (6x_1^2x_2^2 - 5x_2^4)\, dx_2,\ A = (-2, -1),\ B = (3, 0)$;
3) $\omega = e^{x_1}(\cos x_2\, dx_1 - \sin x_2\, dx_2),\ A = (0, 0),\ B = (2, 3)$;
4) $\omega = x_2x_3\, dx_1 + x_3x_1\, dx_2 + x_1x_2\, dx_3,\ A = (1, 2, 3),\ B = (6, 1, 1)$;
5) $\omega = x_1\, dx_2 + x_2\, dx_1,\ A = (1, -2),\ B = (2, -1)$;
6) $\omega = x_1^2\, dx_1 + x_2^2\, dx_2,\ A = (1, 0),\ B = (-3, 2)$;
7) $\omega = (x_1 + x_2)\, dx_1 + (x_1 - x_2)\, dx_2,\ A = (2, 2),\ B = (0, 1)$;
8) $\omega = (x_1\, dx_1 + x_2\, dx_2)(x_1^2 + x_2^2)^{-1/2},\ A = (3, 4),\ B = (0, 1)$, шлях інтегрування не містить точку $(0, 0)$;
9) $\omega = (x_1\, dx_2 - x_2\, dx_1)(x_1 - x_2)^{-2},\ A = (-1, 0),\ B = (0, 1)$, шлях інтегрування не перетинає пряму $x_1 = x_2$;
10) $\omega = \cos(x_1x_2)(x_2\, dx_1 + x_1\, dx_2),\ A = (0, \pi),\ B = (\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$;
11) $\omega = e^{x_2}(dx_1 + x_1\, dx_2),\ A = (1, 0),\ B = (2, 1)$;
12) $\omega = (dx_1 + 2\, dx_2)(x_1 + 2x_2)^{-1},\ A = (e, 2e),\ B = (0, e)$, шлях інтегрування не перетинає пряму $x_1 + 2x_2 = 0$;
13) $\omega = (4x_1^3 + x_2)\, dx_1 + x_1\, dx_2,\ A = (1, 1),\ B = (-1, 2)$;
14)* $\omega = f(x_1 + x_2)(dx_1 + dx_2),\ f \in C(\mathbb{R}),\ A = (0, 0),\ B = (5, 2)$;
15) $\omega = x_1^2\, dx_1 - x_2\, dx_2 + x_3^3\, dx_3,\ A = (1, 1, 1),\ B = (2, 0, 2)$;
16) $\omega = (x_1\, dx_1 + x_2\, dx_2 + x_3\, dx_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-1/2},\ A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 3, 4)$, шлях інтегрування не містить точку $(0, 0, 0)$;
17) $\omega = \sin(x_1 + x_2 + x_3)(dx_1 + dx_2 + dx_3),\ A = (\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}),\ B = (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$;
18) $\omega = \sin(x_2x_3)\, dx_1 + x_1x_3\cos(x_2x_3)\, dx_2 + x_1x_2\cos(x_2x_3)\, dx_3$, $A = (1, 1, \pi), B = (2, \frac{\pi}{2}, 3)$;

19) $\omega = 4x_1^3x_2\,dx_1 + (x_1^4 + 2x_2x_3)\,dx_2 + x_2^2\,dx_3,\ A = (1,-1,1),$
$B = (-1,1,-1);$

20) $\omega = (x_1^2+x_2^2+x_3^2)(x_1\,dx_1+x_2\,dx_2+x_3\,dx_3),\ A = (3,4,0),\ B = (0,0,5);$

21) $\omega = e^{x_1x_2}(x_2x_3\,dx_1 + x_1x_3\,dx_2 + \,dx_3),\ A = (1,1,e),\ B = (0,2,1);$

22) $\omega = (2x_1x_2x_3 + x_2^2x_3)\,dx_1 + (x_1^2x_3 + 2x_1x_2x_3)\,dx_2 + (x_1^2x_2 + x_1x_2^2)\,dx_3,$
$A = (1,3,1),\ B = (3,1,3);$

23) $\omega = (x_2x_3\,dx_1 + x_3x_1\,dx_2 - x_1x_2\,dx_3)x_3^{-2},\ A = (1,1,1),\ B = (2,2,4),$ шлях інтегрування не перетинає вісь Ox_3;

24) $\omega = \operatorname{sh} x_1\,dx_1 + \operatorname{ch} x_2\,dx_2 + e^{x_3}\,dx_3,\ A = (0,0,0),\ B = (1,-1,1).$

5.25. Визначити функцію $z : A \to \mathbb{R}$, що на A має такий диференціал:

1) $dz = (x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2)\,dx_1 + (x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2)\,dx_2,\ (x_1,x_2) \in A = \mathbb{R}^2;$

2) $dz = (x_1\,dx_2 - 2x_2\,dx_1)x_1^{-3},\ (x_1,x_2) \in A = [1,+\infty) \times \mathbb{R};$

3) $dz = \cos x_2\,dx_1 - x_1 \sin x_2\,dx_2,\ (x_1,x_2) \in A = \mathbb{R}^2;$

4) $dz = (x_1^2 - 2x_2x_3)\,dx_1 + (x_2^2 - 2x_1x_3)\,dx_2 + (x_3^2 - 2x_1x_2)\,dx_3,$
$(x_1,x_2,x_3) \in A = \mathbb{R}^3;$

5) $dz = x_1^{x_2-1}(x_2\,dx_1 + x_1 \ln x_1\,dx_2),\ (x_1,x_2) \in A = (0,+\infty) \times \mathbb{R};$

6) $dz = (x_2\,dx_1 - x_1\,dx_2)(x_1 + x_2)^{-2},\ (x_1,x_2) \in A = [1,+\infty)^2;$

7) $dz = (x_2\,dx_1 + x_1\,dx_2)(x_1x_2)^{-1/2},\ (x_1,x_2) \in A = [1,+\infty)^2;$

8) $dz = (3x_1^2 + 2x_1x_2)\,dx_1 + x_1^2\,dx_2,\ (x_1,x_2) \in A = \mathbb{R}^2;$

9) $dz = \dfrac{dx_1 + \,dx_2}{\cos^2(x_1 + x_2)},\ (x_1,x_2) \in A = \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right)^2;$

10) $dz = \left(\ln(x_1+x_2) + \dfrac{x_1}{x_1+x_2}\right)dx_1 + \dfrac{x_1}{x_1+x_2}\,dx_2,\ (x_1,x_2) \in A = [1,+\infty)^2;$

11) $dz = (4x_1^3 + x_1 - x_2)\,dx_1 + (x_2 - x_1)\,dx_2,\ (x_1,x_2) \in A = \mathbb{R}^2;$

12) $dz = 2x_1x_2\,dx_1 + (x_1^2 + 9x_2^2)\,dx_2),\ (x_1,x_2) \in A = \mathbb{R}^2;$

13) $dz = (\cos(x_1 + x_2) - \sin(x_1 - x_2))\,dx_1 + (\cos(x_1 + x_2) +$
$+ \sin(x_1 - x_2))\,dx_2,\ (x_1,x_2) \in A = \mathbb{R}^2;$

14) $dz = (\operatorname{sh}(x_1 + x_2) + \operatorname{ch}(x_1 - x_2))\,dx_1 + (\operatorname{sh}(x_1 + x_2) - \operatorname{ch}(x_1 - x_2))\,dx_2,$
$(x_1,x_2) \in A = \mathbb{R}^2.$

5.26. Знайти роботу сили $\vec{F}(x_1,x_2) = (0,-mg),\ (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2,\ g > 0$, що витрачається на переміщення матеріальної точки масою m з положення (x_1^0, x_2^0) у положення (y_1^0, y_2^0).

5.27. Обчислити роботу сили $\vec{F}$, що витрачається на переміщення матеріальної точки масою m з положення A в положення B :

1) $\vec{F}(x_1,x_2) = (-x_1,-x_2),\ (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2,\ A = (0,1),\ B = (2,0);$

2) $\vec{F}(x_1,x_2)=\left(-\dfrac{mx_1}{(x_1^2+x_2^2)^{3/2}},-\dfrac{mx_2}{(x_1^2+x_2^2)^{3/2}}\right),\ (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\},$
$A=(1,0),\ B=(3,4)$, шлях точки не містить точки $(0,0)$;

3) $\vec{F}(x_1,x_2)=(-mx_1(x_1^2+x_2^2-1),-mx_2(x_1^2+x_2^2-1)),\ (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,$
$A=(\frac{1}{2},\frac{1}{2}),\ B=(2,1)$;

4) $\vec{F}(x_1,x_2)=\left(x_1x_2+\dfrac{x_2^2\sin x_1}{2},\dfrac{x_1^2-2x_2\cos x_1}{2}\right),\ (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,$
$A=(0,0),\ B=(\pi,1)$;

5) $\vec{F}(x_1,x_2)=(x_1+x_2,x_1),\ (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,\ A=B=(1,1)$;

6) $\vec{F}(x_1,x_2)=(2x_1x_2,x_1^2),\ (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,\ A=(2,0),\ B=(0,1)$;

7) $\vec{F}(x_1,x_2)=(-m,-m),\ (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,\ A=(1,2),\ B=(2,1)$;

8) $\vec{F}(x_1,x_2)=(m,2m),\ (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,\ A=(1,3),\ B=(3,2)$;

9) $\vec{F}(x_1,x_2)=(m,-3m),\ (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,\ A=(5,5),\ B=(4,6)$;

10) $\vec{F}(x_1,x_2)=(m,0),\ (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,\ A=(2,1),\ B=(-5,-6)$.

5.28***.** Нехай $f\in C(\mathbb{R})$, Γ – кусково-гладенька замкнена крива в $\mathbb{R}^3$. Довести, що

$$\int\limits_{\Gamma} f(x_1^2+x_2^2)(x_1\,dx_1+x_2\,dx_2)=0.$$

5.29***.** Довести, що множина $A=\left\{(x_1,x_2)\mid 0<x_1^2+x_2^2<R^2\right\}$ при будь-якому $R>0$ не є однозв'язною.

Вказівка. Розглянути інтеграл від форми

$$\omega=\frac{x_2\,dx_1-x_1\,dx_2}{x_1^2+x_2^2},\ (x_1,x_2)\in A,$$

по замкненій кривій в A.

5.5 Довжина дуги. Криволінійні інтеграли першого роду

Нехай $\Gamma=\vec{u}([a;b])$ – крива в $\mathbb{R}^m$, $\vec{u}=(u_1,u_2,\ldots,u_m)\in C^{(1)}([a;b])$. *Криволінійним інтегралом першого роду* від функції $f\in C(\Gamma)$ називється число

$$\int\limits_{\Gamma} f\,dl=\int\limits_{\Gamma} f(\vec{x})\,dl:=\int\limits_a^b f(\vec{u}(t))\sqrt{\sum_{k=1}^m (u_k'(t))^2}\,dt=\int\limits_a^b f(\vec{u}(t))\,\|\vec{u}\,'(t)\|\,dt.$$

Інтеграл по кусково-гладенькій кривій визначається як сума інтегралів по її гладеньких ланках.

Між криволінійними інтегралами першого та другого роду існує такий зв'язок. Припустимо, що гладенька крива Γ орієнтована, $\vec{\tau}(\vec{x})=\|\vec{u}\,'(t)\|^{-1}\,\vec{u}\,'(t)$ – одиничний вектор дотичної до кривої Γ в точці $\vec{x}=\vec{u}(t)\in\Gamma$, напрямок якого збігається з напрямком руху по Γ. Для форми $\omega=f_1\,dx_1+f_2\,dx_2+\ldots+f_m\,dx_m$ з коефіцієнтами

$\vec{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n) \in C(\Gamma)$ справедлива рівність

$$\int\limits_\Gamma \omega = \int\limits_\Gamma (\vec{f}(\vec{x}), \vec{\tau}(\vec{x}))\, dl.$$

Геометрична інтерпретація
Інтеграл $l(\Gamma) = \int\limits_\Gamma dl = \int\limits_\Gamma 1\, dl$ визначає довжину кусково-гладенької кривої Γ.

Деякі поняття механіки
Маса кривої Γ з лінійною густиною розподілу маси $\rho(\vec{x})$ дорівнює $M(\Gamma) = \int\limits_\Gamma \rho(\vec{x})\, dl$.

Центр маси кривої Γ з лінійною густиною розподілу маси $\rho(\vec{x})$ має координати

$$x_i^0(\Gamma) = \frac{1}{M(\Gamma)} \int\limits_\Gamma x_i \rho(\vec{x})\, dl, \quad i = 1, 2, 3.$$

Приклад 1. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_\Gamma (x_1 + x_3)\, dl$, де

$$\Gamma = \{(6t, 5t^2, 1 - 8t) \mid t \in [0; 1]\}.$$

⌈

$$\int\limits_\Gamma (x_1 + x_3)\, dl = \int\limits_0^1 (6t + (1 - 8t))\sqrt{6^2 + (10t)^2 + (-8)^2}\, dt =$$

$$= 10 \int\limits_0^1 (1 - 2t)\sqrt{1 + t^2}\, dt = 5 \left(t\sqrt{1 + t^2} + \ln\left(t + \sqrt{1 + t^2}\right) - \frac{4}{3}\left(1 + t^2\right)^{3/2} \right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 5 \left(\ln(1 + \sqrt{2}) + \frac{4 - 5\sqrt{2}}{3} \right).$$

⌋

Приклад 2. Знайти координати центра маси однорідної кривої $x_1^2 + x_2^2 = 4$, $x_i \geq 0,\ i = 1, 2$.

⌈ Довжина заданої чверті кола дорівнює $l = \pi$. Параметризуємо криву:

$$x_1 = 2\cos t,\ \ x_2 = 2\sin t,\ \ t \in [0; \tfrac{\pi}{2}].$$

Тоді

$$x_1^0(\Gamma) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} 2\cos t \cdot 2\, dt = \frac{4}{\pi}.$$

З симетрії дуги відносно прямої $x_1 = x_2$ випливає рівність координат центра маси, тому

$$x_1^0(\Gamma) = x_2^0(\Gamma) = \frac{4}{\pi}.$$

⌋

5.30. Обчислити довжину кривої Γ :

1) Γ– дуга кривої $\{(3t, 3t^2, 2t^3) \mid t \in \mathbb{R}\}$ від точки $(0, 0, 0)$ до точки $(3, 3, 2)$;
2) $\Gamma = \{(t\cos t, t\sin t, t) \mid t \in [0; \pi]\}$;
3) $\Gamma = \{(e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t, e^{-t}) \mid t \in [0; 1]\}$;
4) $\Gamma = \left\{ \left(t, \frac{2\sqrt{2}}{3} t^{3/2}, \frac{t^2}{2} \right) \mid t \in [0; 1] \right\}$;

5) $\Gamma = \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2} t^2, \frac{t^3}{3}, t \right) \mid t \in [0;4] \right\}$;

6) $\Gamma = \left\{ \left(\frac{t^2}{2}, \frac{2\sqrt{2}}{5} t^{5/2}, \frac{t^3}{3} \right) \mid t \in [4;9] \right\}$;

7) $\Gamma = \left\{ \left(t, \frac{4\sqrt{2}}{5} t^{5/4}, \frac{2}{3} t^{3/2} \right) \mid t \in [0;1] \right\}$;

8) $\Gamma = \left\{ \left(\frac{t^4}{4}, t, \frac{2\sqrt{2}}{5} t^{5/2} \right) \mid t \in [1;2] \right\}$;

9) $\Gamma = \left\{ \left(\frac{t^2}{2}, \sqrt{2} t, \ln t \right) \mid t \in [e^{-1}; e] \right\}$;

10) $\Gamma = \left\{ \left(\frac{2}{3} t^{3/2}, t\sqrt{2}, 2t^{1/2} \right) \mid t \in [1;4] \right\}$;

11) $\Gamma = \left\{ (t, 2\sqrt{2} e^{t/2}, e^t) \mid t \in [\ln 2; \ln 3] \right\}$;

12)* Γ – дуга кривої $\left\{ \left(t, \arcsin t, \frac{1}{4} \ln \frac{1-t}{1+t} \right) \mid t \in [-1;1] \right\}$ від точки $(0,0,0)$ до точки (x_1^0, x_2^0, x_3^0).

5.31. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_\Gamma f\,dl$ по кривій в $\mathbb{R}^2$:

1) $f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2,\ (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$; Γ – межа півкруга $\{(x_1,x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1,\ x_1 \ge x_2\}$;

2) $f(x_1,x_2) = x_1^2 x_2,\ (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$; $\Gamma = \{(x_1,x_2) \mid |x_1| + |x_2| = 1\}$;

3) $f(x_1,x_2) = x_1 + x_2^2,\ (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$; Γ – межа трикутника з вершинами $(0,0)$, $(2,1)$, $(1,2)$;

4) $f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2,\ (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$; Γ – межа сектора круга $x_1^2 + x_2^2 \le 1$, $x_1 \ge |x_2|$;

5) $f(x_1,x_2) = x_1 x_2,\ (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$; Γ – межа трикутника з вершинами $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$;

6) $f(x_1,x_2) = x_1^2,\ (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$; $\Gamma = \{(t - \sin t, 1 - \cos t) \mid t \in [0;2\pi]\}$;

7) $f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2,\ (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$; $\Gamma = \{(\cos t + t\sin t, \sin t - t\cos t) \mid t \in [0;2\pi]\}$;

8) $f(x_1,x_2) = x_1 x_2,\ (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$; $\Gamma = \{(\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t) \mid t \in [0;t_0]\}$, $t_0 > 0$;

9) $f(x_1,x_2) = x_1^{4/3} + x_2^{4/3},\ (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$; $\Gamma = \{(x_1,x_2) \mid x_1^{2/3} + x_2^{2/3} = 1\}$;

10) $f(x_1,x_2) = \exp(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}),\ (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$; Γ – межа сектора $\{(x_1,x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1,\ 0 \le x_2 \le x_1\}$.

5.32. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_\Gamma f\,dl$ по кривій в $\mathbb{R}^3$:

1) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$; $\Gamma = \{(a\cos t, a\sin t, bt) \mid t \in [0; 2\pi]\}$, $a > 0$, $b > 0$;
2) $f(x_1, x_2, x_3) = x_3,\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$; Γ – дуга кривої $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$, $x_2^2 = x_1$ від точки $(0, 0, 0)$ до точки $(1, 1, \sqrt{2})$;
3) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2^2 + x_3^3,\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$; Γ – межа трикутника з вершинами $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$;
4) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2^2 x_3^3,\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$; Γ – межа прямокутника з вершинами $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(0, 0, 1)$;
5) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 + 3x_3,\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$; Γ – ламана, що з'єднує послідовно точки $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$;
6) $f(x_1, x_2, x_3) = x_2,\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$; Γ – межа трикутника з вершинами $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$;
7) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2,\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$; Γ – ламана, що з'єднує послідовно точки $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(3, 2, 1)$;
8)* $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2,\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$; Γ – коло $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, $x_1 + x_2 + x_3 = 0$;
9) $f(x_1, x_2, x_3) = x_3,\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$; $\Gamma = \{(t\cos t, t\sin t, t) \mid t \in [0; t_0]\}$, $t_0 > 0$;
10) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2$, $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$; Γ – чверть кола $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, $x_1 = x_2$, що лежить у першому октанті;
11) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3$, $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$; Γ – чверть кола $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$,
$x_1^2 + x_2^2 = 1$, $x_3 \geq 0$, що лежить у першому октанті;
12) $f(x_1, x_2, x_3) = x_2 - x_3$, $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$; Γ – коло $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, $x_2 = x_3$.

5.33. Знайти масу плоскої кривої Γ з лінійною густиною ρ:
1) $\Gamma = \{(x_1, x_2) \mid x_2^2 = 4x_1,\ x_1 \in [0; 1]\}$, $\rho(x_1, x_2) = |x_2|$, $(x_1, x_2) \in \Gamma$;
2) $\Gamma = \{(x_1, \ln x_1) \mid x_1 \in [1; e]\}$, $\rho(x_1, x_2) = x_1^2$, $(x_1, x_2) \in \Gamma$;
3) $\Gamma = \{(a\cos t, b\sin t) \mid t \in [0; \frac{\pi}{2}]\}$, $a > 0$, $b > 0$; $\rho(x_1, x_2) = x_2$, $(x_1, x_2) \in \Gamma$;
4) $\Gamma = \left\{\left(t, \dfrac{t^2}{2}, \dfrac{t^3}{3}\right) \mid t \in [0; 1]\right\}$, $\rho(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{2x_2}$, $(x_1, x_2, x_3) \in \Gamma$;
5) $\Gamma = \left\{\left(x_1, \dfrac{x_1^2}{2}\right) \mid x_1 \in [1; 2]\right\}$, $\rho(x_1, x_2) = \dfrac{x_2}{x_1}$, $(x_1, x_2) \in \Gamma$;
6) $\Gamma = \{(\ln(1+t^2), 2\operatorname{arctg} t - t) \mid t \in [0; 1]\}$, $\rho(x_1, x_2) = x_2 e^{-x_1}$, $(x_1, x_2) \in \Gamma$.

5.34. Визначити координати центра маси однорідної кривої Γ :

1) $\Gamma = \{(t - \sin t, 1 - \cos t) \mid t \in [0;\pi]\}$;
2) $\Gamma = \{(e^t \cos t, e^t \sin t, e^t) \mid t \in [-1;0]\}$;
3) $\Gamma = \{(x_1, x_2) \mid \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = 1\}$;
4) $\Gamma = \{(x_1, x_2) \mid x_2^2 = x_1^3 - x_1^4\}$;
5) $\Gamma = \{(x_1, \operatorname{ch} x_1) \mid x_1 \in [-1;1]\}$;
6) Γ – дуга кола радіуса a, що стягує центральний кут 2φ, $\varphi \in (0;\pi)$;
7) $\Gamma = \{(x_1, x_2) \mid x_1^{2/3} + x_2^{2/3} = 1,\ x_2 \geq 0\}$.

5.35*. Обчислити довжину і координати центра маси кривої

$$\{(e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t, e^{-t}) \mid 0 \leq t < +\infty\}.$$

5.36. Нехай функції $f_1,\ f_2$ неперервні на кусково-гладенькій кривій Γ в $\mathbb{R}^2$. Довести, що для криволінійного інтеграла другого роду справджується оцінка

$$\left| \int\limits_\Gamma f_1(x_1, x_2)\, dx_1 + f_2(x_1, x_2)\, dx_2 \right| \leq LM,$$

де L – довжина кривої Γ, $M := \max\limits_{(x_1,x_2)\in\Gamma} \sqrt{f_1^2(x_1, x_2) + f_2^2(x_1, x_2)}$.

5.37. Оцінити інтеграл

$$I(R) = \int\limits_{x_1^2 + x_2^2 = R^2} \frac{x_2\, dx_1 - x_1\, dx_2}{(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2)^2}.$$

Довести, що $\lim\limits_{R\to+\infty} I(R) = 0$.

5.38. Для довільної замкненої гладенької кривої Γ і фіксованого напрямку $\vec{a}$ довести, що $\int\limits_\Gamma \cos(\vec{a}, \vec{n})\, dl = 0$, де $\vec{n}$ – одинична зовнішня нормаль до кривої Γ.

5.39. Знайти значення інтеграла $I = \int\limits_\Gamma (x_1 \cos(\vec{n}, \vec{e}_1) + x_2 \cos(\vec{n}, \vec{e}_2))\, dl$, де Γ – проста гладенька замкнена крива на площині, що обмежує область з площею S, $\vec{n}$ – одинична зовнішня нормаль до кривої, $\vec{e}_k$ – орт координатної осі Ox_k, $k = 1, 2$.

5.40. Обчислити інтеграл Гаусса

$$u(x_1^0, x_2^0) = \int\limits_\Gamma \frac{\cos(\widehat{\vec{r}, \vec{n}})}{\|\vec{r}\|}\, dl,$$

де Γ – проста замкнена гладенька крива, що обмежує множину M на площині, $\vec{r} = (x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0)$, $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \Gamma$, $\vec{n}$ – одинична зовнішня нормаль до кривої Γ у точці $\vec{x}$.

5.6 Площа поверхні. Поверхневі інтеграли першого роду

Нехай множина T компактна і вимірна за Жорданом у просторі $\mathbb{R}^2$, $\vec{u} \in C^{(1)}(T; \mathbb{R}^3)$, $S = \vec{u}(T)$ – поверхня в $\mathbb{R}^3$. *Поверхневим інтегралом першого роду* від функції $f \in C(S)$ називається число

$$\int_S f\, d\sigma = \int_S f(\vec{x})\, d\sigma := \int_T f(\vec{u}(t_1, t_2)) \sqrt{EG - F^2}\, dt_1 dt_2,$$

де E, G, F – коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні, що визначаються за дотичними векторами

$$\vec{u}_1'(t_1, t_2) = \left(\frac{\partial u_1}{\partial t_1}, \frac{\partial u_2}{\partial t_1}, \frac{\partial u_3}{\partial t_1} \right), \quad \vec{u}_2'(t_1, t_2) = \left(\frac{\partial u_1}{\partial t_2}, \frac{\partial u_2}{\partial t_2}, \frac{\partial u_3}{\partial t_2} \right)$$

формулами

$$E := \|\vec{u}_1'\|^2 = \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial u_k}{\partial t_1} \right)^2, \qquad G := \|\vec{u}_2'\|^2 = \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial u_k}{\partial t_2} \right)^2,$$

$$F := (\vec{u}_1', \vec{u}_2') = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_k}{\partial t_1} \frac{\partial u_k}{\partial t_2}.$$

При цьому довжина нормального до поверхні вектора

$$\vec{N} = [\vec{u}_1', \vec{u}_2'] = (A, B, C),$$

з координатами

$$A := \frac{\partial(u_2, u_3)}{\partial(t_1, t_2)}, \quad B := \frac{\partial(u_3, u_1)}{\partial(t_1, t_2)}, \quad C := \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(t_1, t_2)},$$

обчислюється за формулою

$$\|\vec{N}\| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \sqrt{EG - F^2}.$$

У випадку явно заданої поверхні $S = \vec{u}(T)$, $\vec{u}(t_1, t_2) = (t_1, t_2, u(t_1, t_2))$, $(t_1, t_2) \in T$, довжина нормального вектора $\|\vec{N}\| = \sqrt{1 + (u_1')^2 + (u_2')^2}$.

Між поверхневими інтегралами першого і другого роду існує такий зв'язок. Нехай $\vec{n}$ – одиничний вектор нормалі до певної сторони двосторонньої гладенької поверхні $S = \vec{u}(T)$, координати відображення $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3) \in C(S)$ є коефіцієнтами диференціальної форми $\omega = f_1(\vec{x})\, dx_2 \wedge dx_3 + f_2(\vec{x})\, dx_3 \wedge dx_1 + f_3(\vec{x})\, dx_1 \wedge dx_2$ на S. Тоді

$$\int_S \omega = \int_S (\vec{f}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x}))\, d\sigma,$$

де в лівій частині рівності стоїть інтеграл другого роду по обраній стороні поверхні S.

Геометрична інтерпретація
Інтеграл $\sigma(S) = \int\limits_{\Gamma} d\sigma = \int\limits_{\Gamma} 1\, d\sigma$ визначає *площу* кусково-гладенької поверхні S.

Деякі поняття механіки
Маса поверхні S з поверхневою густиною розподілу маси $\rho(\vec{x})$ дорівнює

$$m(S) = \int\limits_{S} \rho(\vec{x})\, d\sigma.$$

Центр маси поверхні S з поверхневою густиною розподілу маси $\rho(\vec{x})$ має координати

$$x_i^0(S) = \frac{1}{m(S)} \int\limits_{S} x_i \rho(\vec{x})\, d\sigma, \quad i = 1, 2, 3.$$

Приклад 1. Знайти площу поверхні $x_3 = 4 + 3x_1^2 - x_2^2,\ 9x_1^2 + x_2^2 \le 4,\ x_3 \ge 4.$
⌈ Поверхня задана явно, тому за відповідною формулою

$$\sigma(S) = \int\limits_{T} \sqrt{1 + 36x_1^2 + 4x_2^2}\, dx_1 dx_2, \text{ де } T = \{(x_1, x_2) \mid 9x_1^2 + x_2^2 \le 4,\ |x_2| \le \sqrt{3}|x_1|\}.$$

Перейдемо в подвійному інтегралі до узагальнених полярних координат:

$$x_1 = r\cos\varphi,\ x_2 = 3r\cos\varphi,\ r \in \left[0; \frac{2}{3}\right],\ \varphi \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right]; \quad J = 3r.$$

Внаслідок симетричності поверхні відносно площин $x_1 = 0$ і $x_2 = 0$, досить знайти площу чверті поверхні. Тоді

$$\sigma(S) = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \int\limits_0^{\frac{2}{3}} 3r\, dr d\varphi = 2\pi \int\limits_0^{\frac{2}{3}} dr^2 = \frac{8\pi}{9}.$$ ⌋

Приклад 2. Обчислити поверхневий інтеграл першого роду $\int\limits_S x_1\, d\sigma$, де S – частина сферичної поверхні $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \quad x_1, x_2, x_3 \ge 0.$
⌈ Параметризуємо поверхню сферичними координатами ($r = 1$):

$$x_1 = \cos\varphi\cos\psi,\ x_2 = \sin\varphi\cos\psi,\ x_3 = \sin\psi, \quad \varphi, \psi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

Тоді
$E = (-\sin\varphi\cos\psi)^2 + (\cos\varphi\cos\psi)^2 + 0^2 = \cos^2\psi,$
$G = (-\sin\psi\cos\varphi)^2 + (-\sin\psi\sin\varphi)^2 + (\cos\psi)^2 = 1,$
$F = (-\sin\varphi\cos\psi)(-\sin\psi\cos\varphi) + (\cos\varphi\cos\psi)(-\sin\psi\sin\varphi) = 0.$
Отже,

$$\int\limits_S x_1\, d\sigma = \int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{\pi/2} \cos\varphi\cos\psi\cos^2\psi\, d\varphi d\psi = \sin\varphi\Big|_0^{\pi/2} \cdot \left(\sin\psi - \frac{1}{3}\sin^3\psi\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}.$$ ⌋

5.41. Обчислити площу поверхні (випадок явного задання поверхні):
1) $x_3 = x_1x_2,\ x_1^2 + x_2^2 \le 1;$
2) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2,\ \dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} \le 1;\ 0 < b < a;$

3) $x_1^2 + x_2^2 = 1,\ x_1^2 + x_3^2 = 1;$
4) $\frac{1}{2}x_3^2 = x_1 x_2,\ \frac{1}{2} \le x_1 + x_2 \le 1,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$
5) $x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},\ x_1^2 + x_2^2 \le 2x_2;$
6) $x_3 = x_1 - x_2,\ |x_1 - x_2| \le 1,\ |x_1 + x_2| \le 1;$
7) $x_1^2 + x_2^2 = 1,\ -x_1 \le x_3 \le x_1,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$
8) $(x_1^2 + x_2^2)^{3/2} + x_3 = 8,\ x_3 \ge 0;$
9) $(x_1 + 2x_2)^2 + x_3 = 1,\ 0 \le x_2 \le \frac{1}{2},\ x_3 \ge 0;$
10) $x_3 = x_1^2 - 2x_2^2,\ x_1^2 + 4x_2^2 \le 1,\ x_3 \ge 0;$
11) $x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},\ x_1^2 + x_2^2 \le 1,\ x_2^2 \le x_1^2;$
12) $(x_1^2 + x_2^2)x_3 = x_1 + x_2,\ 1 \le x_1^2 + x_2^2 \le 4,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

5.42. Обчислити площу поверхні (випадок параметричного задання поверхні):

1) $x_1 = (b + a\cos\psi)\cos\varphi$, $x_2 = (b + a\cos\psi)\sin\varphi$, $x_3 = a\sin\psi$; $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$, $\psi_1 \le \psi \le \psi_2$; $0 < a \le b$, $0 \le \varphi_1 < \varphi_2 \le 2\pi$, $0 \le \psi_1 < \psi_2 \le 2\pi$. Чому дорівнює площа поверхні всього тора ($\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 2\pi$, $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = 2\pi$)?
2) $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$, $x_3 = \varphi$; $0 \le r \le 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$;
3) $x_1 = R\cos\varphi\sin\psi$, $x_2 = R\sin\varphi\sin\psi$, $x_3 = R\cos\psi$; $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \psi \le \pi$, $R > 0$;
4) $x_1 = R\cos\varphi\cos\psi$, $x_2 = R\sin\varphi\cos\psi$, $x_3 = R\sin\psi$; $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$, $\psi_1 \le \psi \le \psi_2$; $R > 0$, $0 \le \varphi_1 < \varphi_2 \le 2\pi$, $0 \le \psi_1 < \psi_2 \le \frac{\pi}{2}$;
5) $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$, $x_3 = r\sqrt{\cos 2\varphi}$; $-\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$, $0 \le r \le \sqrt{\cos 2\varphi}$;
6) $x_1 = \cos\varphi\cos\psi$, $x_2 = \sin\varphi\cos\psi$, $x_3 = \sin\psi$; $0 \le \varphi \le 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} \le \psi \le \frac{\pi}{2}$,
$|\cos\psi| \ge |\cos\varphi|$;
7) $x_1 = \cos\varphi\sin\psi$, $x_2 = \sin\varphi\sin\psi$, $x_3 = \cos\psi$; $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \psi \le \pi$, $|\sin\psi| \le |\sin\varphi|$;
8) $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$, $x_3 = \dfrac{r^2}{2}$; $r \ge 0$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, $r^2 \le \sin 2\varphi$;
9) $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$, $x_3 = \dfrac{r^2\cos 2\varphi}{2}$; $0 \le r \le 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$;
10) $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$, $x_3 = \dfrac{r^2}{2}$; $0 \le r \le 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$;
11) $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$, $x_3 = r$; $0 \le r \le 2\sin\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi$;

12) $x_1 = 2r\cos\varphi,\ x_2 = 3r\sin\varphi,\ x_3 = r^2\Big(\cos^2\varphi - \dfrac{3\sin^2\varphi}{2}\Big);\quad 0 \le r \le 1,$ $0 \le \varphi \le 2\pi,\ |\cos 2\varphi| \ge \dfrac{\sqrt{3}\,|\sin\varphi|}{2}.$

5.43. Обчислити поверхневий інтеграл першого роду $\int\limits_S f\,d\sigma$:

1) S – поверхня $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2,\ x_3 \ge 0,\ a > 0;$
$f(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2 + x_3,\ (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3;$

2) S – поверхня тетраедра $x_1 + x_2 + x_3 \le 1,\ x_i \ge 0,\ 1 \le i \le 3;$
$f(x_1,x_2,x_3) = (1 + x_1 + x_2)^{-2},\ (x_1,x_2,x_3) \in S;$

3) S – частина поверхні конуса $x_1 = r\cos\varphi\sin\alpha,\ x_2 = r\sin\varphi\sin\alpha,\ x_3 = r\cos\alpha;$
$0 \le r \le a,\ 0 \le \varphi \le 2\pi;\ a, \alpha$ – сталі, $a > 0,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2};$
$f(x_1,x_2,x_3) = x_3^2,\ (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3;$

4) $S = \big\{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 = 4,\ 0 \le x_3 \le x_2 + 3\big\};$
$f(x_1,x_2,x_3) = x_3^2,\ (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3;$

5) $S = \{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1,\ x_i \ge 0,\ 1 \le i \le 3\};$
$f(x_1,x_2,x_3) = x_1,\ (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3;$

6) $S = \big\{(x_1,x_2,x_3) \mid x_3^2 = x_1^2 + x_2^2,\ 1 \le x_3 \le 2\big\};$
$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2,\ (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3;$

7) S – частина циліндра $x_1^2 + x_2^2 = 1$, що вирізана площинами $x_3 = 0$, $x_3 = x_1 + 2;\ f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_3,\ (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3;$

8) $S = \big\{(x_1,x_2,x_3) \mid 2x_3 = x_1^2,\ x_2 \ge 0,\ x_1 \le 2,\ x_1 \ge x_2\big\};$
$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2,\ (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3;$

9) $S = \big\{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\big\};$
$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2,\ (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3;$

10) $S = \{(x_1,x_2,x_3) \mid |x_1| + |x_2| = 1,\ 0 \le x_3 \le 1\};$
$f(x_1,x_2,x_3) = x_1 + 2x_2 + 3x_3,\ (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3;$

11) S – поверхня призми з вершинами $(0,0,0),\ (0,0,1),\ (0,1,1),\ (0,1,0),$ $(1,1,0),\ (1,1,1);\quad f(x_1,x_2,x_3) = x_1 + 2x_2 + 3x_3,\ (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3;$

12) S – поверхня куба $[0;1]^3;\quad f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2x_3,\ (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3.$

5.44***.** Нехай $f \in C(\mathbb{R}), a, b, c \in \mathbb{R}$. Довести формулу Пуассона

$$\int\limits_S f(ax_1 + bx_2 + cx_3)\,d\sigma = 2\pi\int\limits_{-1}^{1} f\big(x\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\big)\,dx,$$

де S – сфера $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$

5.45. Знайти масу:

1) параболічної оболонки
$S = \left\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_3 = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{2},\ 0 \le x_3 \le 1\right\}$ з густиною
$\rho(x_1, x_2, x_3) = x_3,\ (x_1, x_2, x_3) \in S$;
2) півсфери $S = \left\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,\ x_3 \ge 0\right\}$ з густиною
$\rho(x_1, x_2, x_3) = x_3,\ (x_1, x_2, x_3) \in S$;
3) сфери $S = \left\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\}$ з густиною
$\rho(x_1, x_2, x_3) = x_3^2,\ (x_1, x_2, x_3) \in S$.

5.46. Знайти центр маси однорідної поверхні:

1) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,\ x_i \ge 0,\ 1 \le i \le 3$;
2) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,\ a \le x_3 \le 1,\ a \in [-1; 1)$;
3) $x_1 = r\cos\varphi,\ x_2 = r\sin\varphi,\ x_3 = \varphi;\ 0 \le r \le 1,\ 0 \le \varphi \le \pi$;
4) $x_1^2 = 2 - 2x_3,\ 0 \le x_2 \le x_1,\ x_3 \ge 0$;
5) $3x_3 = 2(x_1\sqrt{x_1} + x_2\sqrt{x_2}),\ x_1 + x_2 \le 1$;
6) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,\ x_1^2 + x_2^2 \le x_1,\ x_3 \ge 0$;
7) $x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},\ x_1^2 + x_2^2 \le x_1$;
8) $x_3 = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2},\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_1 + x_2 \le 1$.

5.47. Для довільної замкненої гладенької поверхні $S \subset \mathbb{R}^3$ і фіксованого напрямку $\vec{a}$ довести, що $\int\limits_S \cos(\vec{a}, \vec{n})\, d\sigma = 0$, де $\vec{n}$ – одинична зовнішня нормаль до поверхні S.

5.48. Довести, що об'єм тіла, обмеженого гладенькою поверхнею S, дорівнює

$$V = \frac{1}{3}\int\limits_S (x_1\cos\alpha + x_2\cos\beta + x_3\cos\gamma)\, d\sigma,$$

де $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – напрямні косинуси зовнішньої нормалі до поверхні S.

5.49. Довести, що об'єм конуса, обмеженого конічною поверхнею з гладенькою замкненою напрямною і площиною, дорівнює $V = \frac{1}{3}SH$, де S – площа основи конуса, розташованої в заданій площині, H – його висота.

5.50. Для функції $f \in C^{(1)}(\mathbb{R}^4)$ довести формулу

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{x_1^2+x_2^2+x_3^2 \le t^2} f(x_1, x_2, x_3, t)\, dx_1 dx_2 dx_3 =$$

$$= \int\limits_{x_1^2+x_2^2+x_3^2 = t^2} f(x_1, x_2, x_3, t)\, d\sigma + \int\limits_{x_1^2+x_2^2+x_3^2 \le t^2} \frac{\partial f}{\partial t}(x_1, x_2, x_3, t)\, dx_1 dx_2 dx_3,\ \ t > 0.$$

5.51. Нехай $\vec{x}^{\,0}$ – фіксована точка в $\mathbb{R}^3$, $\vec{r} = \vec{r}(\vec{x}) := \vec{x} - \vec{x}^{\,0}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$. Довести рівність

$$\int\limits_V \frac{dx_1 dx_2 dx_3}{\|\vec{r}\|} = \frac{1}{2} \int\limits_S \cos(\vec{r}, \vec{n})\, d\sigma,$$

де S – проста замкнена гладенька поверхня, що обмежує тіло V, $\vec{n}$ – одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні S.

5.52. За умов задачі 5.51 обчислити *інтеграл Гаусса*

$$u(\vec{x}^{\,0}) = \int\limits_S \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{\|\vec{r}\|^2}\, d\sigma$$

у випадках: а) $\vec{x}^{\,0} \in \mathbb{R}^3 \setminus V$; б) $\vec{x}^{\,0} \in V \setminus S$.

5.7 Основні поняття теорії поля

Нехай M – непорожня відкрита підмножина в $\mathbb{R}^3$.

Функція $u : M \to \mathbb{R}$ називається *скалярним полем* на M. Векторне відображення $\vec{a} = (P, Q, R) : M \to \mathbb{R}^3$ називається *векторним полем* на M. Надалі, як правило, розглядаються неперервно диференційовні поля.

Означимо символічний вектор $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial x_2}, \dfrac{\partial}{\partial x_3} \right)$.

Градієнтом скалярного поля u в точці $\vec{x}^{\,0} \in M$ називається вектор

$$\operatorname{grad} u(\vec{x}^{\,0}) = \nabla u(\vec{x}^{\,0}) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(\vec{x}^{\,0}), \frac{\partial u}{\partial x_2}(\vec{x}^{\,0}), \frac{\partial u}{\partial x_3}(\vec{x}^{\,0}) \right).$$

Векторне поле $\vec{a}$ називається *потенціальним* на множині M, якщо воно є градієнтом деякого скалярного поля u.

Дивергенцією векторного поля $\vec{a}$ в точці $\vec{x}^{\,0} \in M$ називається число

$$\operatorname{div} \vec{a}(\vec{x}^{\,0}) = (\nabla, \vec{a}) = \frac{\partial P}{\partial x_1}(\vec{x}^{\,0}) + \frac{\partial Q}{\partial x_2}(\vec{x}^{\,0}) + \frac{\partial R}{\partial x_3}(\vec{x}^{\,0}).$$

Ротором векторного поля $\vec{a}$ в точці $\vec{x}^{\,0} \in M$ називається вектор

$$\operatorname{rot} \vec{a}(\vec{x}^{\,0}) = [\nabla, \vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ P & Q & R \end{vmatrix} (\vec{x}^{\,0}) =$$

$$:= \left(\frac{\partial R(\vec{x}^{\,0})}{\partial x_2} - \frac{\partial Q(\vec{x}^{\,0})}{\partial x_3} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P(\vec{x}^{\,0})}{\partial x_3} - \frac{\partial R(\vec{x}^{\,0})}{\partial x_1} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q(\vec{x}^{\,0})}{\partial x_1} - \frac{\partial P(\vec{x}^{\,0})}{\partial x_2} \right) \vec{k}.$$

З теореми 3 п. 5.4 випливає, що необхідною й достатньою умовою потенціальності неперервно диференційовного поля $\vec{a}$ на відкритій однозв'язній множині M є рівність $\operatorname{rot} \vec{a} = \vec{0}$.

Лінійним інтегралом (роботою) векторного поля $\vec{a}$ вздовж орієнтованої кусково-гладенької кривої Γ називається інтеграл

$$\int\limits_\Gamma (\vec{a}, \vec{\tau})\, dl,$$

де $\vec{\tau}$ – одиничний вектор дотичної до кривої Γ у напрямку руху по ній. *Циркуляцією* векторного поля називається лінійний інтеграл по замкненій кривій.

Потоком векторного поля $\vec{a}$ через орієнтовану кусково-гладеньку поверхню S називається інтеграл

$$\int_S (\vec{a}, \vec{n})\, d\sigma,$$

де $\vec{n}$ – одиничний вектор нормалі до обраної сторони поверхні S.

У векторній формі основні інтегральні рівності можна переписати таким чином:

- **формула Остроградського – Гаусса**
$$\int_V \operatorname{div} \vec{a}\, d\vec{x} = \int_S (\vec{a}, \vec{n})\, d\sigma,$$
де $\vec{n}$ – одинична нормаль до зовнішньої сторони замкненої поверхні S, що обмежує тіло V;

- **формула Стокса**
$$\int_S (\operatorname{rot} \vec{a}, \vec{n})\, d\sigma = \int_\Gamma (\vec{a}, \vec{\tau})\, dl,$$
де $\vec{\tau}$ – одинична дотична до замкненої кривої Γ, яка є межею поверхні S; $\vec{n}$ – одинична нормаль до тієї сторони поверхні S, найближча частина якої лишається ліворуч від спостерігача при русі по Γ у напрямку $\vec{\tau}$.

Приклад 1. Для векторного поля $\vec{a}(\vec{x}) = (x_1^2, x_2^2, x_3^2)$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, знайти: 1) дивергенцію, 2) ротор, 3) потік через зовнішній бік поверхні сфери $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, 4) циркуляцію вздовж кривої $x_1^2 + 4x_2^2 = 4,\ x_3 = 0$.

⌈ За означенням:

1) $\operatorname{div} \vec{a}(\vec{x}) = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3$,
2) $\operatorname{rot} \vec{a}(\vec{x}) = \vec{0}$.
3) За формулою Остроградського – Гаусса $\int_S (\vec{a}, \vec{n})\, d\sigma = \int_V \operatorname{div} \vec{a}\, d\vec{x} =$ $= 2\int_V (x_1 + x_2 + x_3)\, dx_1 dx_2 dx_3$. Цей інтеграл можна обчислити безпосередньо, однак неважко помітити, що це сума координат центра маси однорідної кулі $\overline{B}(\vec{0}; 2)$, помножена на її подвоєний об'єм. Тому потік дорівнює нулю.
4) За формулою Стокса з п.2 випливає рівність $\int_\Gamma (\vec{a}, \vec{\tau})\, dl = \int_S (\operatorname{rot} \vec{a}, \vec{n})\, d\sigma = 0$. ⌋

Приклад 2. Знайти потік векторного поля $\vec{a}(x_1, x_2, x_3) = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$, $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, через зовнішній бік циліндричної поверхні $x_2^2 + x_3^2 = 1$, $0 \le x_1 \le 1$.

⌈ Одиничний вектор нормалі до зовнішньої сторони циліндричної поверхні у точці (x_1, x_2, x_3) цієї поверхні дорівнює $\vec{n} = x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$. Тому за означенням потоку та формулою для площі циліндричної поверхні

$$\int_S (\vec{a}, \vec{n})\, d\sigma = \int_S (x_2^2 + x_3^2)\, d\sigma = \int_S d\sigma = 2\pi.$$
⌋

5.53. Знайти градієнт скалярного поля u в точці $\vec{x}^{\,0}$:

1) $u(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + x_1x_2 + 3x_1 - 2x_2 - 6x_3$, $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{x}^{\,0} = (2, 0, 1)$. В якій точці градієнт є нульовим вектором?
2) $u(x_1, x_2, x_3) = x_1x_3 - x_2^2$, $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{x}^{\,0} = (1, -3, 4)$;

3) $u(x_1,x_2,x_3) = x_1^3+x_2^3+x_3^3+3x_1x_2x_3$, $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$, $\vec{x}^{\,0} = (1,-1,1)$;
4) $u(x_1,x_2,x_3) = \sqrt{x_1^2+x_2^2+(x_3-1)^2}$, $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$, $\vec{x}^{\,0} = (2,1,3)$;
5) $u(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{x_2}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$, $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\setminus\{\vec{0}\}$, $\vec{x}^{\,0} = (2,1,1)$;
6) $u(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}$, $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\setminus\{\vec{0}\}$, $\vec{x}^{\,0} = (1,2,2)$;
7) $u(x_1,x_2,x_3) = e^{x_2x_3}\sin x_1$, $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$, $\vec{x}^{\,0} = (\pi,2,-1)$;
8) $u(x_1,x_2,x_3) = \arcsin\dfrac{x_1}{x_1+x_2+x_3}$, $x_i>0$, $1\le i\le 3$; $\vec{x}^{\,0} = (1,1,2)$;
9) $u(x_1,x_2,x_3) = x_1^{x_2-x_3}$, $x_1>0$; $\vec{x}^{\,0} = (2,3,4)$;
10) $u(x_1,x_2,x_3) = x_1\,\mathrm{arctg}(x_1x_2x_3)$, $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$, $\vec{x}^{\,0} = (1,3,\frac{1}{\sqrt{3}})$;
11) $u(x_1,x_2,x_3) = \cos(x_1x_2)\cdot\sin(x_1x_3)$, $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$, $\vec{x}^{\,0} = (\frac{\sqrt{\pi}}{2},\frac{\sqrt{\pi}}{2},\sqrt{\pi})$.

5.54. Нехай функція $u : M \to \mathbb{R}$ диференційовна на опуклій відкритій множині $M\subset\mathbb{R}^3$ і для деякого числа $C\in\mathbb{R} : \|\operatorname{grad} u(\vec{x})\| \le C$, $\vec{x}\in M$. Довести, що

$$\forall\,\{\vec{x},\vec{y}\}\subset M :\ |u(\vec{x})-u(\vec{y})|\le C\|\vec{x}-\vec{y}\|.$$

5.55. Знайти дивергенцію векторного поля $\vec{a}$ в точці $\vec{x}^{\,0}$:
1) $\vec{a}(\vec{r}) = \vec{r}$, $\vec{r}\in\mathbb{R}^3$, $\vec{x}^{\,0} = (2,2,1)$;
2) $\vec{a}(\vec{r}) = \dfrac{\vec{r}}{||\vec{r}||}$, $\vec{r}\in\mathbb{R}^3\setminus\{\vec{0}\}$, $\vec{x}^{\,0} = (3,1,1)$;
3) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{x_1\vec{i}-x_2\vec{j}+x_3\vec{k}}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$, $(x_1,x_2)\ne(0,0)$, $\vec{x}^{\,0} = (3,4,5)$;
4) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2\vec{i}+x_2x_3\vec{j}+x_3x_1\vec{k}$, $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$, $\vec{x}^{\,0} = (1,-3,\pi)$;
5) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = e^{x_1+x_2+x_3}(\vec{i}+\vec{j})+\ln(1+x_1^2)\vec{k}$, $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$, $\vec{x}^{\,0} = (1,-1,1)$;
6) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = x_1^{x_2}\vec{i}+x_2^{x_3}\vec{j}+x_3^{x_1}\vec{k}$, $x_i>0$, $1\le i\le 3$; $\vec{x}^{\,0} = (2,3,1)$;
7) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = \sqrt{x_1^2+x_2^2}\vec{i}+\sqrt{x_2^2-x_3^2}\vec{j}+\sqrt{x_1^2-x_3^2}\vec{k}$, $|x_1|\ge|x_2|\ge|x_3|$, $\vec{x}^{\,0} = (4,3,2)$;
8) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = \sin(x_1+x_2)\vec{i}+\cos(x_2-x_3)\vec{j}+\mathrm{tg}(x_1-x_3)\vec{k}$, $|x_1-x_3|<\frac{\pi}{2}$, $\vec{x}^{\,0} = (\pi,\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6})$;
9) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{x_1}{(1+x_1+x_2+x_3)^2}(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$, $x_1+x_2+x_3\ne-1$, $\vec{x}^{\,0} = (1,2,-2)$;

10) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{x_1 - x_2}{1 + x_3^2}(\vec{i} + \vec{j}) + e^{x_1 x_2}\vec{k}$, $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{x}^{\,0} = (1, 2, -3)$.

5.56. Нехай векторне поле $\vec{a} \in C^{(1)}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, точка $\vec{x}^{\,0} \in \mathbb{R}^3$, S – гладенька замкнена поверхня, що обмежує тіло $V \ni \vec{x}^{\,0}$ об'єму $m(V)$, $\vec{n}$ – зовнішня нормаль до поверхні S, $\operatorname{diam}(S) = \max\{\|\vec{x} - \vec{y}\| \mid \vec{x}, \vec{y} \in S\}$ – діаметр поверхні S. Довести, що

$$\operatorname{div} \vec{a}(\vec{x}^{\,0}) = \lim_{\operatorname{diam}(S) \to 0} \frac{1}{m(V)} \int\limits_S (\vec{a}, \vec{n})\, d\sigma.$$

5.57. Знайти:

1) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$; 2) $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} u)$; 3) $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v)$.

5.58. Знайти ротор векторного поля $\vec{a}$ в точці $\vec{x}^{\,0}$:

1) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{x_2}{x_3}\vec{i} + \dfrac{x_3}{x_1}\vec{j} + \dfrac{x_1}{x_2}\vec{k}$, $x_1 x_2 x_3 \neq 0$, $\vec{x}^{\,0} = (1, 2, -2)$;
2) $\vec{a}(\vec{r}) = \vec{r}$, $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{x}^{\,0} = (2, 1, 2)$;
3) $\vec{a}(\vec{r}) = \exp(\|\vec{r}\|^2)\,\vec{r}$, $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{x}^{\,0} = (1, -2, -2)$;
4) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{x_2}{x_1}\vec{i} + \dfrac{x_3}{x_2}\vec{j} + \dfrac{x_1}{x_3}\vec{k}$, $x_1 x_2 x_3 \neq 0$, $\vec{x}^{\,0} = (1, 1, -1)$;
5) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}(\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k})$, $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{x}^{\,0} = (5, 2, 3)$;
6) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = (x_1 x_2 - x_3)\vec{i} + (x_2 + x_3)\vec{j} - x_2\vec{k}$, $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{x}^{\,0} = (1, 2, -1)$;
7) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = (x_1^2 + x_2^2)\vec{i} - x_2 x_3\vec{j} + x_1 x_2 x_3\vec{k}$, $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{x}^{\,0} = (3, 2, 1)$;
8) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = (x_1^3 + x_1)\vec{i} - x_1\vec{j} + x_3\vec{k}$, $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{x}^{\,0} = (1, 1, 1)$;
9) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + 2x_2)\vec{i} + 2x_2^3\vec{j} + \vec{k}$, $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{x}^{\,0} = (2, -1, 2)$;
10) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = (x_1^2 + x_3^2)\vec{i} + |x_2|\vec{j} + |x_3|\vec{k}$, $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{x}^{\,0} = (1, -1, 2)$;
11) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = |x_1 - x_2|\vec{i} + |x_2 - x_3|\vec{j} + |x_3 - x_1|\vec{k}$, $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{x}^{\,0} = (1, 2, 3)$.

5.59. Знайти роботу векторного поля $\vec{a}$ вздовж гладенької лінії Γ :

1) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = -x_2\vec{i} + x_1\vec{j} + 2\vec{k}$, $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\Gamma = \left\{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1,\ x_3 = 0\right\}$, напрямок обходу – проти годинникової стрілки, якщо дивитися з додатного напрямку осі Ox_3;

2) $\vec{a}$ з п.1), $\Gamma = \left\{(x_1, x_2, x_3) \mid (x_1 - 2)^2 + x_2^2 = 1,\ x_3 = 0\right\}$, напрямок обходу – проти годинникової стрілки, якщо дивитися з додатного напрямку осі Ox_3;
3) $\vec{a}(x_1, x_2, x_3) = (-x_2\vec{i} + x_1\vec{j})(x_1^2 + x_2^2)^{-1}$, $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$, $\Gamma \subset \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 > 0\}$;
4) $\vec{a}$ з п.3); $\Gamma = \{(\sin t, \cos t, t(2\pi - t)) \mid 0 \leq t \leq 2\pi\}$, крива пробігається в напрямку зростання t;
5) $\vec{a}(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{1}{x_2}\vec{i} + \dfrac{1}{x_3}\vec{j} + \dfrac{1}{x_1}\vec{k}$, $x_1x_2x_3 \neq 0$, Γ – прямолінійний відрізок від точки $(1, 1, 1)$ до точки $(2, 4, 8)$;
6) $\vec{a}(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3)\vec{i} + (2 + x_1)\vec{j} + (x_1 + x_2)\vec{k}$, $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, Γ – менша дуга великого кола сфери $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 25$ від точки $A(3, 4, 0)$ до точки $B(0, 0, 5)$;
7) $\vec{a}(\vec{r}) = \sin\|\vec{r}\| \cdot \vec{r}$, $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$, Γ – крива з початком у точці $(0, 0, 0)$ і з кінцем у точці $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \pi\right)$;
8) $\vec{a}(\vec{r}) = -m\|\vec{r}\|^{-3}\vec{r}$, $\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$, $m > 0$; Γ – крива з початком в точці $(1, 2, 2)$ і кінцем в точці $(0, 0, 1)$, що не проходить через точку $(0, 0, 0)$;
9) $\vec{a}(x_1, x_2, x_3) = x_2x_3(2x_1 + x_2 + x_3)\vec{i} + x_1x_3(x_1 + 2x_2 + x_3)\vec{j} + x_1x_2(x_1 + {}$ ${}+ x_2 + 2x_3)\vec{k}$, $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, Γ – крива з початком в точці $(3, 5, -4)$ і кінцем в точці $(0, 1, 2)$.

5.60. Знайти роботу радіус-вектора $\vec{r}$ вздовж відрізка гвинтової лінії $\{(a\cos t, a\sin t, bt) \mid 0 \leq t \leq 2\pi\}$, де a, b – фіксовані додатні сталі; крива пробігається в напрямку зростання параметра.

5.61. Знайти роботу поля $\vec{a}(x_1, x_2, x_3) = \left(e^{x_2 - x_3}, e^{x_3 - x_1}, e^{x_1 - x_2}\right)$, вздовж прямолінійного відрізка від точки $(0, 0, 0)$ до точки $(1, 3, 5)$.

5.62. Знайти потік радіус-вектора $\vec{r}$:
1) через зовнішню сторону бічної поверхні конуса $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq x_3 \leq 1$;
2) через зовнішній бік основи цього конуса.

5.63. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ через зовнішній бік поверхні S:
1) $\vec{a}(x_1, x_2, x_3) = x_2x_3\vec{i} + x_3x_1\vec{j} + x_1x_2\vec{k}$, $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, S – бічна поверхня циліндра $x_1^2 + x_2^2 \leq 1,\ 0 \leq x_3 \leq 1$;
2) $\vec{a}$ з п.1), S – повна поверхня циліндра $x_1^2 + x_2^2 \leq 4,\ 0 \leq x_3 \leq 2$;
3) $\vec{a}(\vec{r}) = \vec{r}$, $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$, $S = \left\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_3 = 1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2},\ x_3 \geq 0\right\}$;
4) $\vec{a}(x_1, x_2, x_3) = x_2\vec{i} + x_3\vec{j} + x_1\vec{k}$, $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, S – поверхня тетраедра, обмеженого площинами $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, $x_i = 0$, $1 \leq i \leq 3$;

5) $\vec{a}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2\vec{i} + x_2^2\vec{j} + x_3^2\vec{k}$, $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, S – бічна поверхня конуса $x_1^2 + x_2^2 \leq 4x_3^2$, $0 \leq x_3 \leq 1$;

6) $\vec{a}$ з п.5), S – повна поверхня конуса $x_1^2 + x_2^2 \leq x_3^2$, $0 \leq x_3 \leq 1$;

7) $\vec{a}(x_1, x_2, x_3) = x_1^3\vec{i} + x_2^3\vec{j} + x_3^3\vec{k}$, $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, S – повна поверхня циліндра $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$, $-1 \leq x_3 \leq 1$;

8) $\vec{a}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$, $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, S – поверхня куба $[0; 1]^3$;

9) $\vec{a}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)\vec{i} + (x_2 - x_3)\vec{j} + (x_3 - x_1)\vec{k}$, $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, S – поверхня піраміди, обмеженої площинами $x_1 + x_2 + x_3 = 2$, $x_i = 0$, $1 \leq i \leq 3$;

10) $\vec{a}(x_1, x_2, x_3) = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$, $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$,
$S = \{(x_1, x_2, x_3) \mid |x_1| + |x_2| + |x_3| = 1\}$.

5.64. Нехай M – відкрита непорожня множина в $\mathbb{R}^3$, $\vec{x}^{\,0} \in M$, поле $\vec{a} \in C^{(1)}(M, \mathbb{R}^3)$. Довести, що для довільного одиничного вектора $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ з початком у точці $\vec{x}^{\,0}$:

$$(\operatorname{rot} \vec{a}(\vec{x}^{\,0}), \vec{n}) = \lim_{\operatorname{diam}(S) \to 0} \frac{1}{m(S)} \int\limits_{\Gamma} (\vec{a}, \vec{\tau})\, dl.$$

Тут S – обмежена орієнтованою гладенькою замкненою кривою Γ частина площини площі $m(S)$, що містить точку $\vec{x}^{\,0}$ і перпендикулярна до вектора $\vec{n}$; $\vec{\tau}$ – одиничний вектор дотичної до Γ, рух по Γ у напрямку якого здійснюється проти годинникової стрілки, якщо дивитися з кінця вектора-нормалі $\vec{n}$.

5.65. Тверде тіло M рухається зі швидкістю

$$\vec{v} = \vec{v}^{\,0} + [\vec{\omega}, \vec{r}],$$

де $\vec{v}^{\,0}$ – швидкість руху деякої фіксованої точки $\vec{x}^{\,0} \in M$, $\vec{\omega} = \vec{\omega}(\vec{x})$ – кутова швидкість довільної точки $\vec{x} \in M$, $\vec{r} = \vec{r}(\vec{x}) := \vec{x} - \vec{x}^{\,0}$. Довести, що $\operatorname{rot} \vec{v} = 2\vec{\omega}$.

5.66. Довести, що поле

$$\vec{a}(x_1, x_2, x_3) = x_2x_3(2x_1 + x_2 + x_3)\vec{i} + x_3x_1(x_1 + 2x_2 + x_3)\vec{j} + x_1x_2(x_1 + x_2 + 2x_3)\vec{k}$$

є потенціальним на $\mathbb{R}^3$, і знайти потенціал цього поля.

5.67. Переконатися в потенціальності поля

$$\vec{a}(x_1, x_2, x_3) = \frac{2}{(x_2 + x_3)^{1/2}}\vec{i} - \frac{x_1}{(x_2 + x_3)^{3/2}}\vec{j} - \frac{x_1}{(x_2 + x_3)^{3/2}}\vec{k}$$

на $(0; +\infty)^3$ і знайти роботу цього поля вздовж шляху, що лежить в першому октанті і веде від точки $A(1, 1, 3)$ до точки $B(2, 4, 5)$.

5.68. Знайти потенціал гравітаційного поля

$$\vec{a} = -\frac{m}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}}(x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}), \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\},$$

що створюється масою m, розташованою в початку координат.

5.69*. Знайти потік гравітаційного поля (задача 5.68) через зовнішній бік гладенької замкненої поверхні, що оточує початок координат.

5.70*. Нехай $\{c_i,\ 1 \le i \le n\} \subset \mathbb{R}$, $\{\vec{r}_i,\ 1 \le i \le n\} \subset \mathbb{R}^3$. Знайти потік вектора

$$\vec{a}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{grad}\left(-\frac{c_i}{4\pi\|\vec{r} - \vec{r}_i\|}\right),\ \vec{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{r}_i,\ 1 \le i \le n\},$$

через зовнішній бік замкненої поверхні S, що оточує всі точки $\vec{r}_i,\ 1 \le i \le n$.

Розділ 6

Ряд та інтеграл Фур'є

6.1 Простір інтегровних функцій

Множина усіх інтегровних за Ріманом функцій $R([a;b])$ є векторним простором. У подальшому не будемо розрізняти функції $\{f,g\} \subset R([a;b])$, якщо $f(t) = g(t)$ у кожній точці $t \in [a;b]$, у якій обидві функції f та g неперервні. Таким чином, $f = 0 \iff f(t) = 0$ у точках неперервності $t \in [a;b]$. Тоді відображення

$$\varphi(f,g) := \int_a^b f(t)g(t)\,dt, \qquad \{f,g\} \subset R([a;b]),$$

є *скалярним добутком*, який позначається символом (f,g). Скалярний добуток має такі властивості:

1) $\forall\, f \in R([a;b]): \ (f,f) \geq 0, \qquad (f,f) = 0 \iff f = 0;$
2) $\forall\, \{f,g\} \subset R([a;b]): \ (f,g) = (g,f);$
3) $\forall\, \{f,g\} \subset R([a;b])\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}: \ (\alpha f, g) = \alpha(f,g);$
4) $\forall\, \{f_1,f_2,g\} \subset R([a;b]): \ (f_1+f_2,g) = (f_1,g)+(f_2,g);$
5) *нерівність Коші – Буняковського:* $\forall\, \{f,g\} \subset R([a;b]): \ (f,g)^2 \leq (f,f)(g,g).$

Нормою функції $f \in R([a;b])$ називається число

$$\|f\| := \sqrt{(f,f)} = \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,dt}.$$

Норма має такі властивості:

1) $\forall\, f \in R([a;b]): \ \|f\| \geq 0, \qquad \|f\| = 0 \iff f = 0;$
2) $\forall\, f \in R([a;b])\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}: \ \|\alpha f\| = |\alpha|\,\|f\|;$
3) $\forall\, \{f,g\} \subset R([a;b]): \ \|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|.$

Функція $f \in R([a;b])$ називається *нормованою*, якщо $\|f\| = 1$. Функції f, g називаються *ортогональними*, якщо $(f,g) = 0$. Набір функцій $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ називається *ортонормованим*, якщо

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Функції $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\} \subset R([a;b])$ $(n \geq 2)$ називаються *лінійно залежними*, якщо для деяких $c_1, c_2, \ldots, c_n$, $|c_1| + |c_2| + \ldots + |c_n| > 0$:

$$\|c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_n f_n\| = 0.$$

Якщо функції $f_1, f_2, \ldots, f_n$ не є лінійно залежними, вони називаються *лінійно незалежними*. Нескінченна множина функцій називається *множиною лінійно незалежних функцій*, якщо функції з будь-якої її скінченної підмножини лінійно незалежні.

За довільною послідовністю лінійно незалежних функцій $\{f_n : \ n \geq 1\}$ *методом ортогоналізації Шмідта* можна побудувати послідовність ортонормованих функцій

$$\varphi_1 := \frac{f_1}{\|f_1\|}, \quad \varphi_n := \frac{f_n - (f_n,\varphi_1)\varphi_1 - \ldots - (f_n,\varphi_{n-1})\varphi_{n-1}}{\|f_n - (f_n,\varphi_1)\varphi_1 - \ldots - (f_n,\varphi_{n-1})\varphi_{n-1}\|}, \ n \geq 2.$$

Приклад 1. Послідовність функцій

$$1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \ldots, \cos nt, \sin nt, \ldots$$

лінійно незалежна на $[-\pi; \pi]$.

⌈ Члени цієї послідовності попарно ортогональні

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nt \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin mt \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \sin mt \, dt = 0, \ n \geq 1, \ m \geq 1,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos mt \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \sin mt \, dt = 0, \ n \geq 1, \ m \geq 1, \ n \neq m.$$

При цьому

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \, dt = 2\pi, \ \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nt \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nt \, dt = \pi, \ n \geq 1.$$

Якщо лінійна комбінація (тригонометричний многочлен)

$$T_n(t) := \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt), \quad t \in [-\pi; \pi],$$

має норму $\|T_n\| = 0$, то неперервна функція $T_n(t) = 0$, $t \in [-\pi; \pi]$. Тому

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T_n(t) \, dt = 0,$$

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T_n(t) \cos kt \, dt = 0, \ \beta_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T_n(t) \sin kt \, dt = 0, \ k = 1, \ldots, n.$$

⌋

Приклад 2. Послідовність функцій

$$1, t, t^2, t, \ldots, t^n, \ldots$$

лінійно незалежна на довільному відрізку $[a; b]$.

⌈ Якщо при $n \geq 0$ лінійна комбінація (многочлен) $P(t) = c_0 + c_1 t + \ldots + c_n t^n$ має норму $\|P\| = 0$, то неперервна функція $P(t) = 0$, $t \in [a; b]$. Однак, якщо хоча б один з коефіцієнтів $c_0, c_1, \ldots, c_n$ відмінний від нуля, то за основною теоремою алгебри многочлен P не може мати більше, ніж n коренів. Тому $c_0 = c_1 = \ldots = c_n = 0$. ⌋

6.1. Нехай $f \in R([0; 1])$. За якої умови на функцію f існує таке $a \in \mathbb{R}$, що для функції $g(t) = 1 + at, \ t \in [0; 1]$, справджується рівність $(f, g) = 0$?

6.2. Визначити співвідношення між $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, при якому функції $1 + \alpha t$, $1 + \beta t$, $t \in [0; 1]$, ортогональні.

6.3. Визначити числа $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ так, щоб були ортогональними функції:

1) $1 + \alpha t, \beta t^2, \ t \in [0; 1]$;
2) $\alpha t, 1 + \beta t^2, \ t \in [-1; 1]$;
3) $\alpha t, 1 - \beta t^3, \ t \in [0; 1]$;
4) $\alpha t + t^2, \beta t, \ t \in [0; 2]$.

6.4. За яких $m, n \in \mathbb{N}$ функції $\sin nt$, $\sin mt$, $t \in [0; 2\pi]$, ортогональні в $R([0; 2\pi])$?

6.5. За яких значень $m, n \in \mathbb{N}$ наведені функції є ортогональними:

1) $\cos nt, \cos mt,\ t \in [0; \frac{\pi}{2}]$;
2) $\sin nt, \sin mt,\ t \in [0; \frac{\pi}{2}]$;
3) $\sin nt, \cos mt,\ t \in [0; \frac{\pi}{2}]$;
4) $\sin nt, \sin mt,\ t \in [0; 3\pi]$;
5) $\cos nt, \cos mt,\ t \in [0; 3\pi]$;
6) $\sin nt, \cos mt,\ t \in [0; 3\pi]$?

6.6. Довести, що функція $f \in R([-1; 1])$ ортогональна довільному поліному степеня не вище n у $R([-1; 1])$ тоді й лише тоді, коли f ортогональна кожній з функцій $1, t, t^2, \ldots, t^n$, $t \in [-1; 1]$.

6.7. Довести, що функція $f \in R([0; 2\pi])$ ортогональна довільному тригонометричному поліному

$$T_n = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j \cos jt + \beta_j \sin jt), t \in [0; 2\pi],\ \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R},\ 1 \le j \le n,$$

тоді й лише тоді, коли f ортогональна кожній із функцій

$$1, \cos t, \sin t, \ldots, \cos nt, \sin nt, \quad t \in [0; 2\pi].$$

6.8. Довести, що функції $1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \ldots, \cos nt, \sin nt, \ldots$, $t \in [0; 2\pi]$, попарно ортогональні та мають відмінну від нуля норму в просторі $R([0; 2\pi])$. Вивести звідси лінійну незалежність цих функцій.

6.9. Довести, що довільний набір ортогональних і нормованих функцій є набором лінійно незалежних функцій.

6.10. Довести лінійну незалежність функцій:

1) $t^{\alpha_1}, t^{\alpha_2}, \ldots, t^{\alpha_n},\ t \in [a; b]$, де $\alpha_i \in (0; +\infty)$, $\alpha_i \ne \alpha_j$, $i \ne j$, $a > 0$;
2) $e^{\alpha_1 t}, e^{\alpha_2 t}, \ldots, e^{\alpha_n t},\ t \in [a; b]$, де $\alpha_i \in \mathbb{R},\ \alpha_i \ne \alpha_j,\ i \ne j$.

6.11. Чи є функції $1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \ldots, \cos nt, \sin nt, \ldots,\ t \in \mathbb{R}$, лінійно незалежними на відрізку: а) $[a; b]$ при $b - a \ge 2\pi$; б) $[0; \pi]$?

6.12. Нехай $f_1, f_2, \ldots, f_n$ – набір лінійно незалежних функцій у $R([a; b])$. Довести, що $\det\big((f_i, f_j)_{i,j=1}^n\big) \ne 0$.

6.13. Нехай $f_1, f_2, \ldots, f_n$ – набір лінійно незалежних функцій у $R([a; b])$. Довести, що для довільних дійсних чисел $c_1, \ldots, c_n$ існує функція $f \in R([a; b])$, для якої $(f, f_i) = c_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

6.14. Для функцій $1, t, t^2,\ t \in [-1; 1]$, провести процес ортогоналізації.

6.15. Провести процес ортогоналізації наведених функцій:

1) $1,\ \cos t,\ \sin t,\ t \in [0; 3\pi]$;
2) $1,\ \sin t,\ \sin 2t,\ t \in [0; 3\pi]$;
3) $1,\ \cos t,\ \cos 2t,\ t \in [0; 3\pi]$;
4) $1,\ \sin 2t,\ \sin 3t,\ t \in [0; 3\pi]$;
5) $1,\ \cos 2t,\ \cos 3t,\ t \in [0; 3\pi]$;
6) $1,\ t,\ t^2,\ t \in [0; 1]$;

7) $1,\ t,\ t^2,\ t\in[0;2]$;
8) $t,\ t^2,\ t^3,\ t\in[0;1]$;
9) $t,\ t^2,\ t^3,\ t\in[0;2]$;
10) $1,\ t^2,\ t^3,\ t\in[-1;1]$.

6.16. Нехай функція f кусково-стала на $[a;b]$ і

$$\forall\, n\geq 0\ :\ \int_a^b t^n f(t)\,dt=0.$$

Довести, що f дорівнює нулю в усіх точках неперервності.

6.17. Нехай деякий поліном $P(t)=a_0+a_1t+\ldots+a_mt^m,\ a_i\in\mathbb{R}$, $0\leq i\leq m$, задовольняє умову $\int_a^b P(t)t^n\,dt=0, n\geq 0$. Довести, що $P(t)=0$, $t\in\mathbb{R}$. Що можна стверджувати про поліном P, якщо умова ортогональності виконується для всіх $n\geq 2$?

6.2 Середньоквадратична відстань. Ряд Фур'є

Норма породжує *метрику (середньоквадратичну відстань)* на $R([a;b])$ за формулою

$$\rho(f,g)=\|f-g\|,\quad \{f,g\}\subset R([a;b]).$$

Нехай задана ортонормована послідовність функцій $\{\varphi_n\ :\ n\geq 1\}\subset R([a;b])$. Для функції $f\in R([a;b])$ її *коефіцієнтами Фур'є* за цією послідовністю називаються числа

$$c_n(f)=(f,\varphi_n)=\int_a^b f(t)\varphi_n(t)\,dt,\quad n\geq 1.$$

Рядом Фур'є за цією послідовністю називається функціональний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(f)\varphi_n.$$

При фіксованому $n\in\mathbb{N}$ найменша середньоквадратична відстань між функцією $f\in R([a;b])$ і функцією вигляду $P=d_1\varphi_1+d_2\varphi_2+\ldots+d_n\varphi_n$ досягається лише у випадку, коли $d_i=c_i(f),\ i=1,\ldots,n$.

Коефіцієнти Фур'є функції $f\in R([a;b])$ мають такі властивості:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^2(f)\leq\|f\|^2$ *(нерівність Бесселя)*;

2) $c_n(f)\to 0,\ n\to\infty$.

Послідовність функцій $\{f_n\ :\ n\geq 1\}\subset R([a;b])$ називається *замкненою* в $R([a;b])$, якщо

$$\forall\, f\in R([a;b])\quad \forall\,\varepsilon>0\quad \exists\, n\geq 1\quad \exists\,\{d_1,\ldots,d_n\}\subset\mathbb{R}:\quad \Big\|f-\sum_{k=1}^{n} d_kf_k\Big\|<\varepsilon.$$

Послідовність функцій $\{f_n\ :\ n\geq 1\}\subset R([a;b])$ називається *повною* в $R([a;b])$, якщо з ортогональності функції $f\in R([a;b])$ кожному члену цієї послідовності випливає, що $\|f\|=0$.

Кожна замкнена в $R([a;b])$ послідовність є повною.

Для кожної функції $f \in R([a;b])$ її ряд Фур'є за замкненою ортонормованою послідовністю $\{\varphi_n : \ n \geq 1\} \subset R([a;b])$ збігається у середньому квадратичному до функції f, тобто

$$\Big\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k(f)\varphi_k \Big\| \to 0, \quad n \to \infty.$$

При цьому має місце *рівність Парсеваля*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2(f) = \|f\|^2.$$

Приклад 1. Нехай $[a;b] \subset \mathbb{R}$. Послідовність функцій $f_n(t) = t^n$, $t \in [a;b]$, $n \geq 0$, замкнена в $R([a;b])$.

$\lceil$ (i) Спочатку наблизимо довільну функцію $f \in R([a;b])$ у сенсі середньоквадратичної відстані неперервною. Інтегровна функція f обмежена, тобто для деякого числа $C > 0$:

$$\forall\, t \in [a;b] : \ |f(t)| \leq C.$$

Для довільного числа $\varepsilon > 0$ розглянемо таке розбиття відрізка $\lambda([a;b]) = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$, що для відповідної нижньої суми Дарбу $L(f, \lambda)$

$$0 \leq \int_a^b f(t)\, dt - L(f, \lambda) < \frac{\varepsilon^2}{18C}.$$

Нижню суму Дарбу можна розглядати як інтеграл від функції

$$\varphi_\varepsilon(t) = \inf_{(t_k;t_{k+1})} f, \ t \in (t_k; t_{k+1}), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

довизначеної у точках розбиття довільним чином, наприклад, значеннями самої функції f. Тоді

$$-C \leq \varphi_\varepsilon(t) \leq C, \ t \in [a;b], \quad \text{і} \ \ \|f - \varphi_\varepsilon\| \leq \left(\int_1^b \big(f(t) - \varphi_\varepsilon(t)\big) \cdot 2C\, dt \right)^{1/2} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Неперервну функцію $g_\varepsilon : [a;b] \to \mathbb{R}$ означимо таким чином. Покладемо $g_\varepsilon(t_k) = f(t_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Число $\delta > 0$ виберемо з умови

$$\delta < \min\Big\{ \frac{\varepsilon^2}{36nC^2}, \ \frac{1}{2} \min |\Delta t_k|, \, k = 0, 1, \ldots, n-1 \Big\}.$$

Тепер покладемо

$$g_\varepsilon(t) = \inf_{[t_k;t_{k+1}]} f, \quad t_k + \delta \leq t \leq t_{k+1} - \delta, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

і лінійно продовжимо її на проміжки $(t_k - \delta; t_k]$, $[t_k; t_k + \delta)$. Зауважимо, що

$$-C \leq g_\varepsilon(t) \leq C, \ t \in [a;b],$$

і

$$\|g_\varepsilon - \varphi_\varepsilon\| \leq \left(\int_a^b \big(g_\varepsilon(t) - \varphi_\varepsilon(t)\big) \cdot 2C\, dt \right)^{1/2} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тому

$$\|f-g_\varepsilon\| \le \|f-\varphi_\varepsilon\| + \|\varphi_\varepsilon - g_\varepsilon\| \le \frac{2\varepsilon}{3}.$$

(ii) Тепер за апроксимаційною теоремою Вейєрштрасса виберемо поліном P_ε, для якого

$$\forall\, t \in [a;b]: \ |g_\varepsilon(t) - P_\varepsilon(t)| < \frac{\varepsilon}{3\sqrt{b-a}}.$$

Тоді

$$\|g_\varepsilon - P_\varepsilon\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{і} \quad \|f-P_\varepsilon\| \le \|f-g_\varepsilon\| + \|g_\varepsilon - P_\varepsilon\| < \varepsilon.$$

Зауваження. Без жодних змін у подальших міркуваннях можна було б покласти $g_\varepsilon(a) = g_\varepsilon(b) := \max\{f(a), f(b)\}$. ⌋

Приклад 2. Послідовність функцій

$$1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \ldots, \cos nt, \sin nt, \ldots$$

замкнена в $R([-\pi;\pi])$.

⌈ Так само, як і в частині (i) приклада 1, з урахуванням зробленого там зауваження, для довільної функції $f \in R([-\pi;\pi])$ і числа $\varepsilon > 0$ побудуємо неперервну функцію g_ε з властивостями:

1) $g_\varepsilon(-\pi) = g_\varepsilon(\pi)$; 2) $\|f-g_\varepsilon\| < \dfrac{2\varepsilon}{3}$.

За апроксимаційною теоремою Вейєрштрасса виберемо тригонометричний поліном T_ε, для якого

$$\forall\, t \in [-\pi;\pi]: \ |g_\varepsilon(t) - T_\varepsilon(t)| < \frac{\varepsilon}{3\sqrt{2\pi}}.$$

Тоді

$$\|g_\varepsilon - T_\varepsilon\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{і} \quad \|f-T_\varepsilon\| \le \|f-g_\varepsilon\| + \|g_\varepsilon - T_\varepsilon\| < \varepsilon.$$

⌋

6.18. Для функції $f(t) = e^t, t \in [-1;1]$ знайти $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ такі, щоб відстань $||f-g||$ від функції f до функції $g(t) = \alpha + \beta t, t \in [-1;1]$, була найменшою. Задачу розв'язати двома способами:

1) безпосередньою мінімізацією $||f-g||^2$ як функції від змінних α, β;
2) побудовою за функціями $f_1(t) = 1,\ f_2(t) = t,\ t \in [-1;1]$, ортогональної пари нормованих функцій.

6.19. Для функції

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < \pi, \\ 1, & \pi \le t \le 2\pi, \end{cases}$$

і заданого $m \in \mathbb{N}$ визначити тригонометричний поліном T_m степеня не вище за m, який мінімізує відстань $||f - T_m||$.

Вказівка. Послідовність функцій

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}, \ldots,\ t \in [0;2\pi],$$

є ортонормованою.

6.20. Довести повноту й замкненість у просторі $R([a;b])$ послідовності
$$1, t^2, t^4, \ldots, t^{2n}, \ldots, \quad t \in [a;b] \qquad (a \geq 0).$$
Вказівка. Використати замкненість в $R([c;d])$ послідовності
$$1, t, t^2, t^3, \ldots, t^n, \ldots, \quad t \in [c;d].$$

6.21. Довести повноту й замкненість у просторі $R([0;\pi])$ послідовності
$$1, \cos t, \cos 2t, \ldots, \cos nt, \ldots, \quad t \in [0;\pi].$$
Вказівка. Використати замкненість в $R([0;2\pi])$ послідовності
$$1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \ldots, \quad t \in [0;2\pi].$$

6.22. Довести повноту й замкненість у просторі $R([0;1])$ послідовності
$$1, e^{-t}, e^{-2t}, \ldots, e^{-nt}, \ldots, \quad t \in [0;1].$$

6.23. Нехай $\{\varphi_n : n \geq 1\}$ – замкнена ортонормована послідовність у просторі $R([a;b])$. Для функцій $\{f, g\} \subset R([a;b])$ довести *узагальнену рівність Парсеваля*:
$$(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f) c_n(g),$$
де $c_n(f) = (f, \varphi_n)$, $c_n(g) = (g, \varphi_n)$, $n \geq 1$.

6.24. Нехай $m \in \mathbb{N}$ фіксоване. Для функції $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ визначити тригонометричний поліном T заданого вигляду, що мінімізує середньоквадратичну відстань $||f - T||$:

1) $f(t) = t,\ t \in [0;2\pi];\ T$ – тригонометричний поліном степеня не вище m;
2) $f(t) = \dfrac{\pi - t}{2},\ t \in [0;2\pi];\ T$ – тригонометричний поліном степеня не вище m;
3) $f(t) = t,\ t \in [0;\pi];\ T(t) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{m} \alpha_n \cos nt,\ t \in [0;\pi];\ \alpha_n \in \mathbb{R}$, $1 \leq n \leq m$;
4) $f(t) = t,\ t \in [0;\pi];\ T(t) = \sum_{n=1}^{m} \beta_n \sin nt,\ t \in [0;\pi];\ \beta_n \in \mathbb{R},\ 1 \leq n \leq m$;
5) $f(t) = t,\ t \in [0;2\pi];\ T(t) = \alpha \sin t + \beta \sin^2 t,\ t \in [0;2\pi];\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
6) $f(t) = t,\ t \in [0;3\pi];\ T(t) = \alpha + \beta \cos t + \gamma \cos 2t,\ t \in [0;3\pi];\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.
Вказівка. Переконатися, що функції $\varphi_1(t) = t$, $\varphi_2(t) = \cos t$, $\varphi_3(t) = \cos 2t$, $t \in [0;3\pi]$, попарно ортогональні на $[0;3\pi]$;

7) $f(t) = t,\ t \in [0; 3\pi];\ T(t) = \alpha \sin t + \beta \sin 2t,\ t \in [0; 3\pi];\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Вказівка. Переконатися, що функції $\varphi_1(t) = \sin t,\ \varphi_2(t) = \sin 2t$, $t \in [0; 3\pi]$, ортогональні на $[0; 3\pi]$;

8) $f(t) = t,\ t \in [0; 3\pi];\ T(t) = \alpha \cos t + \beta \cos 3t,\ t \in [0; 3\pi];\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Вказівка. Переконатися, що функції $\varphi_1(t) = \cos t,\ \varphi_2(t) = \cos 3t$, $t \in [0; 3\pi]$, ортогональні на $[0; 3\pi]$.

6.25. Довести повноту й замкненість послідовностей функцій:

1) $\sin t, \sin 2t, \sin 3t, \ldots, \sin nt, \ldots$, у просторі $R([0; \pi])$;

2) $1, \cos 2t, \sin 2t, \ldots, \cos 2nt, \sin 2nt, \ldots$, у просторі $R\Big([0; \dfrac{\pi}{2}]\Big)$;

3) $t^3, t^4, \ldots, t^{3+n}, \ldots$, у просторі $R([a; b])$, $a > 0$;

4) $t^3, t^6, t^9, \ldots, t^{3n}, \ldots$, у просторі $R([1; 2])$;

5) $1, \ln t, \ln^2 t, \ln^3 t, \ldots, \ln^n t, \ldots$, у просторі $R([e; e^2])$.

6.26. Довести, що жодна з послідовностей функцій не є повною:

1) $1, t^2, t^4, t^6, \ldots, t^{2n}, \ldots$, у просторі $R([-1; 1])$;

2) $t, t^3, t^5, \ldots, t^{2n+1}, \ldots$, у просторі $R([-1; 1])$;

3)* $1, \cos t, \sin t, \ldots, \cos nt, \sin nt, \ldots$, у просторі $R([0; 3\pi])$.

6.27. Довести повноту й замкненість послідовності функцій
$$1, e^{-t^2}, e^{-2t^2}, \ldots, e^{-nt^2}, \ldots$$
у просторі $R([1; 2])$.

6.28. Для замкненої (див. задачу 6.21) у $R([0; \pi])$ послідовності функцій $1, \cos t, \cos 2t, \ldots, \cos nt, \ldots$ і заданої на $[0; \pi]$ функції f записати рівність Парсеваля:

1) $f(t) = t$; 2) $f(t) = \sin t$; 3) $f(t) = \sin 2t$.

6.29. Для замкненої (див. задачу 6.25 п. 1)) у $R([0; \pi])$ послідовності функцій $\sin t, \sin 2t, ..., \sin nt, ...,\ t \in [0; \pi]$, і заданої на $[0; \pi]$ функції f записати рівність Парсеваля:

1) $f(t) = t$;

2) $f(t) = 1$;

3) $f(t) = \cos t$;

4) $f(t) = \cos 2t$.

6.30. Для замкненої (див. задачу 6.25 п. 2)) у $R\left([0; \dfrac{\pi}{2}]\right)$ послідовності функцій $1, \cos 2t, \sin 2t, \cos 4t, \sin 4t, ..., \cos 2nt, \sin 2nt, ...,\ t \in \Big[0; \dfrac{\pi}{2}\Big]$, і заданої на $\Big[0; \dfrac{\pi}{2}\Big]$ функції f записати рівність Парсеваля:

1) $f(t) = t$; 2) $f(t) = \sin t$; 3) $f(t) = \cos t$.

6.3 Ряд Фур'є за тригонометричною системою

Позначимо через $R_0([0;2\pi])$ клас усіх функцій $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, що мають період $T=2\pi$ та інтегровні по відрізку $[0;2\pi]$. Коефіцієнти Фур'є функції $f\in R_0([0;2\pi])$ за ортогональною замкненою в $R_0([0;2\pi])$ послідовністю

$$\frac{1}{2}, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots, \cos nt, \sin nt, \dots$$

визначаються формулами

$$a_n(f)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt,\ n\ge 0;\quad b_n(f)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt,\ n\ge 1.$$

Ряд Фур'є має вигляд

$$f(t)\sim\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n(f)\cos nt+b_n(f)\sin nt\big) \tag{6.1}$$

і збігається у середньому квадратичному до функції f. Рівність Парсеваля має вигляд

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f^2(t)\,dt=\frac{a_0^2(f)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n^2(f)+b_n^2(f)\big).$$

Зручні для перевірки достатні умови поточкової збіжності ряду Фур'є містяться у наступних твердженнях.

Теорема 1. Нехай функція $f\in R_0([0;2\pi])$ має похідну в точці $x\in\mathbb{R}$. Тоді ряд Фур'є для функції f збігається у точці x до числа $f(x)$.

Теорема 2. Нехай функція $f\in R_0([0;2\pi])$ має розрив першого роду в точці $x\in\mathbb{R}$. Припустимо, що існують скінченні границі

$$\lim_{u\to 0-}\frac{f(x+u)-f(x-)}{u},\qquad \lim_{u\to 0+}\frac{f(x+u)-f(x+)}{u}.$$

Тоді ряд Фур'є для функції f збігається у точці x до числа

$$\frac{f(x-)+f(x+)}{2}.$$

Для функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, що має період $T=2l$, $l>0$, та інтегровна по відрізку $[0;2l]$. коефіцієнти Фур'є за ортогональною замкненою в $R_0([0;2l])$ послідовністю

$$\frac{1}{2}, \cos\frac{\pi t}{l}, \sin\frac{\pi t}{l}, \cos\frac{2\pi t}{l}, \sin\frac{2\pi t}{l}, \dots, \cos\frac{n\pi t}{l}, \sin\frac{n\pi t}{l}, \dots$$

визначаються формулами

$$a_n(f)=\frac{1}{l}\int\limits_0^{2l} f(t)\cos\frac{n\pi t}{l}\,dt,\ n\ge 0;\quad b_n(f)=\frac{1}{l}\int\limits_0^{2l} f(t)\sin\frac{n\pi t}{l}\,dt,\ n\ge 1.$$

Ряд Фур'є має вигляд

$$f(t)\sim\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n(f)\cos\frac{n\pi t}{l}+b_n(f)\sin\frac{n\pi t}{l}\big)$$

і збігається у середньому квадратичному до функції f. Рівність Парсеваля має вигляд

$$\frac{1}{l}\int\limits_0^{2l} f^2(t)\,dt=\frac{a_0^2(f)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n^2(f)+b_n^2(f)\big).$$

Умови поточкової збіжності ряду Фур'є такі самі, як і у частковому випадку $l = \pi$.

Для рядів Фур'є теореми про почленне диференціювання та інтегрування можуть бути сформульовані таким чином.

Теорема 3. Нехай функція $f \in C^{(1)}(\mathbb{R})$, має період $T = 2\pi$ і за винятком хіба що скінченної множини точок відрізка $[0; 2\pi]$ існує f'', причому $f'' \in R_0([0; 2\pi])$. Тоді ряд Фур'є (6.1) збігається до функції f рівномірно на $\mathbb{R}$, його можна почленно диференціювати і

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(nb_n(f) \cos nt - na_n(f) \sin nt\big), \quad t \in \mathbb{R},$$

де ряд у правій частині збігається рівномірно на $\mathbb{R}$.

Теорема 4. Нехай функція $f \in R_0([0; 2\pi])$. Ряд, отриманий почленним інтегруванням ряду Фур'є (6.1), збігається до функції

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \int_0^t f(u)\, du$$

рівномірно на $\mathbb{R}$.

Приклад 1. Для функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такої, що $f(t) = e^{|t|}$, $t \in [-\pi; \pi]$, f періодична з періодом $T = 2\pi$, записати ряд Фур'є, дослідити його збіжність і записати рівність Парсеваля.

⌈Зважаючи на парність функції f, її коефіцієнти Фур'є зручніше обчислити інтегруванням по відрізку $[-\pi; \pi]$. Маємо

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^t\, dt = \frac{2(e^\pi - 1)}{\pi},$$

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^t \cos nt\, dt = \frac{2\big((-1)^n e^\pi - 1\big)}{\pi(1+n^2)},$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt\, dt = 0, \ n \geq 1.$$

Таким чином,

$$f(t) \sim \frac{(e^\pi - 1)}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\big((-1)^n e^\pi - 1\big)}{(1+n^2)} \cos nt.$$

Функція f диференційовна на множині $A := \mathbb{R} \setminus \{\pi k |\, k \in \mathbb{Z}\}$. Тому за теоремою 1 в усіх точках множини A ряд Фур'є збігається до функції. У точках множини $\{\pi k |\, k \in \mathbb{Z}\}$ функція f неперервна та існують односторонні похідні. Тому за теоремою 2 в цих точках ряд Фур'є так само збігається до функції. Таким чином,

$$f(x) = \frac{(e^\pi - 1)}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\big((-1)^n e^\pi - 1\big)}{(1+n^2)} \cos nx, \ x \in \mathbb{R}.$$

Рівність Парсеваля має вигляд

$$e^{2\pi} - 1 = \frac{2(e^\pi - 1)^2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e^\pi - (-1)^n)^2}{(1+n^2)^2}.$$

⌋

Приклад 2. Нехай $\alpha \in (-1; 1)$. Розкласти функцію

$$f(t) = \frac{1 - \alpha \cos t}{1 - 2\alpha \cos t + \alpha^2}, \ t \in \mathbb{R},$$

в ряд Фур'є.

⌈За формулою Ойлера

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}, \quad \varphi\in\mathbb{R}.$$

Тому, використавши розклад бінома в геометричний ряд Тейлора, отримаємо

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1-\alpha\cos t}{1-2\alpha\cos t+\alpha^2} = \frac{1}{2}\frac{(1-\alpha e^{-it})+(1-\alpha e^{it})}{(1-\alpha e^{-it})(1-\alpha e^{it})} = \\ &= \frac{1}{2}\big((1-\alpha e^{it})^{-1}+(1-\alpha e^{-it})^{-1}\big) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\frac{e^{int}+e^{-int}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\cos nt,\ t\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

За ознакою Вейєрштрасса при кожному $\alpha\in(-1;1)$ отриманий ряд збігається рівномірно за $t\in\mathbb{R}$. Тому коефіцієнти Фур'є його суми можна обчислити почленним інтегруванням:

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\int_0^{2\pi}\cos nt\,dt = 2;$$

$$a_m(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos mt\,dt = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\int_0^{2\pi}\cos mt\cos nt\,dt = \alpha^m,\ m\ge 1;$$

$$b_m(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin mt\,dt = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\int_0^{2\pi}\sin mt\cos nt\,dt = 0,\ m\ge 1.$$

Звідси випливає, що цей ряд Тейлора за змінною α є рядом Фур'є своєї суми. ⌋

Зауваження. Взагалі, тригонометричний ряд

$$\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nt+\beta_n\sin nt),$$

що збігається рівномірно на $\mathbb{R}$, є рядом Фур'є своєї суми.

6.31. Функцію f, періодичну з періодом 2π, розкласти в ряд Фур'є й визначити точки, в яких ряд збігається до відповідного значення функції f. Записати рівність Парсеваля.

1) $f(t)=\sin^2 t,\ t\in[0;2\pi]$;

2) $f(t)=\begin{cases}\operatorname{sgn} t, & t\in(-\pi;\pi),\\ 0, & t=\pi;\end{cases}$

3) $f(t)=t,\ t\in(-\pi;\pi]$;

4) $f(t)=\begin{cases}\dfrac{\pi-t}{2}, & t\in(0;2\pi),\\ 0, & t=0;\end{cases}$

5) $f(t)=\pi^2-t^2, t\in[-\pi;\pi]$.

6.32. Розкласти функцію $f(t)=t^2$ у ряд вигляду:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n\cos nt,\ t\in[0;\pi],\ \alpha_n\in\mathbb{R},\ n\ge 0$, на $[0;\pi]$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin nt,\ t \in [0;\pi],\ \beta_n \in \mathbb{R},\ n \geq 1$, на $[0;\pi]$;

3) $\frac{\alpha_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt),\ t \in [0;2\pi),\ \alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R},\ n \geq 0$, на $[0;2\pi)$.

В яких точках ці ряди збігаються до відповідних значень функції f? Записати для них рівність Парсеваля.

6.33. Функцію f, періодичну з періодом 2π, розкласти в ряд Фур'є й визначити точки, у яких він збігається до відповідного значення функції f :

1) $f(t) = |t|,\ t \in [-\pi;\pi]$;

2) $f(t) = \operatorname{sgn}(\cos t),\ t \in [0;2\pi]$;

3) $f(t) = \operatorname{sgn}(\sin t),\ t \in [0;2\pi]$;

4) $f(t) = |\sin t|,\ t \in [0;2\pi]$;

5) $f(t) = |\cos t|,\ t \in [0;2\pi]$;

6) $f(t) = \cos(t\sqrt{2}),\ t \in [0;2\pi)$;

7) $f(t) = \sin(t\sqrt{2}),\ t \in [0;2\pi)$;

8)* $f(t) = \arcsin(\sin t),\ t \in [0;2\pi]$;

9)* $f(t) = \arccos(\cos t),\ t \in [0;2\pi]$;

10) $f(t) = \begin{cases} 1, & t \in (-\pi;0), \\ 3, & t \in [0;\pi); \end{cases}$

11) $f(t) = \begin{cases} 0, & t \in [-\pi;0), \\ t, & t \in [0;\pi); \end{cases}$

12) $f(t) = \begin{cases} t, & t \in (-\pi;0), \\ 0, & t \in [0;\pi]; \end{cases}$

13) $f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-\pi;0), \\ t, & t \in [0;\pi). \end{cases}$

6.34. Розкласти функцію f у ряд вигляду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos nt,\ t \in [0;\pi],\ \alpha_n \in \mathbb{R}$, $n \geq 0$, і визначити точки, в яких цей ряд збігається до відповідного значення функції f :

1) $f(t) = \sin t, t \in [0;\pi]$;

2) $f(t) = \begin{cases} t, & t \in [0;\frac{\pi}{2}], \\ \pi - t, & t \in [\frac{\pi}{2};\pi]; \end{cases}$

3) $f(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0;\frac{\pi}{2}], \\ t - \frac{\pi}{2}, & t \in (\frac{\pi}{2};\pi]. \end{cases}$

6.35. Розкласти функцію f у ряд вигляду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin nt,\ t \in [0;\pi],\ \beta_n \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$, і визначити точки, в яких цей ряд збігається до відповідного значення функції f :

1) $f(t) = \cos t, t \in [0;\pi]$;

2) $f(t) = \begin{cases} t, & t \in [0;\frac{\pi}{2}], \\ \pi - t, & t \in [\frac{\pi}{2};\pi]; \end{cases}$

3) $f(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0; \frac{\pi}{2}], \\ t - \frac{\pi}{2}, & t \in (\frac{\pi}{2}; \pi]. \end{cases}$

6.36. Нехай функція f періодична з періодом 2π та

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{\pi}, & t \in [0; \pi], \\ -1, & t \in (\pi; 2\pi). \end{cases}$$

Не виписуючи ряду Фур'є для f, знайти значення суми цього ряду в точках $t_k = k\pi,\ k = 0, 1, 2, 3.$

6.37. Знайти суми тригонометричних рядів для $t \in \mathbb{R}$:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nt}{2^n}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nt}{2^n}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n\alpha \, \sin nt}{3^n},\ \alpha \in \mathbb{R}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin^2 nt}{2^n}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(2n-1)t}{e^{2n-1}}$;

6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\cos nt}{n!}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nt}{n!}$.

Вказівка. Розглянути тригонометричні ряди як дійсну та уявну частини суми степеневого ряду в комплексній площині $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, де $z = e^{it}$.

6.38. Функцію f, періодичну з періодом $2l$, розкласти в ряд Фур'є й визначити точки, в яких ряд збігається до відповідного значення функції f. Записати рівність Парсеваля.

1) $l > 0,\ f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0; l), \\ 0, & t \in [l; 2l); \end{cases}$

2) $l = \dfrac{1}{2},\ f(t) = \{t\},\ t \in \mathbb{R}$ ($\{t\}$ – дробова частина числа t);

3) $l = 1,\ f(t) = \begin{cases} 1, & -1 \le t < 0, \\ t, & 0 \le t \le 1; \end{cases}$

4) $l = 2,\ f(t) = \begin{cases} 0, & -2 \le t < 0, \\ 2, & 0 \le t < 2; \end{cases}$

5) $f(t)=\begin{cases} t, & 0\le t<l/2, \\ l-t, & l/2\le t\le l, \end{cases}$ f – непарна функція;

6) $f(t)=\begin{cases} 0, & 0\le t\le l/2, \\ t-l/2, & l/2\le t\le l, \end{cases}$ f – парна функція;

7) $f(t)=\begin{cases} l/2-t, & 0\le t\le l/2, \\ 0, & l/2< t\le l, \end{cases}$ f – парна функція;

8) $l=2,\ f(t)=\dfrac{t}{2},\ 0\le t\le 2, f$ – парна функція.

6.39. Використовуючи розклад $t=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\sin nt}{n},\ t\in(-\pi;\pi)$, почленним інтегруванням отримати розклад у ряд Фур'є функцій:

1) $f(t)=t^2,\ t\in(-\pi;\pi)$; 2) $f(t)=t^3,\ t\in(-\pi;\pi)$.

6.40. Нехай $\alpha\in[0;\pi)$. Записати рівність Парсеваля для функції f, періодичної з періодом 2π і такої, що $f(t)=\begin{cases} 1, & |t|<\alpha, \\ 0, & \alpha\le|t|\le\pi. \end{cases}$ Використовуючи цю рівність Парсеваля, знайти суми рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^2 n\alpha}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos^2 n\alpha}{n^2}$.

6.41. Нехай f – періодична функція з періодом 2π така, що

$$f(t)=\begin{cases} \sin^2 t, & t\in[0;\pi], \\ 0, & t\in(\pi;2\pi). \end{cases}$$

Розкласти функцію f у ряд Фур'є та застосувати до нього теорему про почленне диференціювання.

6.42*. Нехай

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n^4+1}\sin nt,\ t\in\mathbb{R}.$$

Довести, що $f\in C^{(\infty)}((0;2\pi))$.

6.43. Нехай $f(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nt}{n^3}, t\in\mathbb{R}$. Довести, що існує $f'\in C(\mathbb{R})$, значення якої можуть бути отримані почленним диференціюванням ряду. Довести, що для довільного $t\in\mathbb{R}\setminus\{2\pi n\mid n\in\mathbb{Z}\}$: $f''(t)=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nt}{n}$. За допомогою формули для суми цього ряду знайти функцію f.

6.44. Нехай $\alpha \in (-1;1)$. Користуючись формулами Ойлера

$$\cos t = \frac{1}{2}(z+\overline{z}),\ \sin t = \frac{1}{2i}(z-\overline{z}),\ t\in\mathbb{R},\quad \text{де } z=e^{it},\ \overline{z}=e^{-it},$$

розкласти у ряд Фур'є функції

1) $f(t) = \dfrac{\alpha \sin t}{1-2\alpha\cos t+\alpha^2},\ t\in\mathbb{R};$

2) $f(t) = \dfrac{1-\alpha^2}{1-2\alpha\cos t+\alpha^2},\ t\in\mathbb{R}.$

6.4 Інтеграл та перетворення Фур'є

Нехай $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ та $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,dt<+\infty$. Означимо функції

$$a(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda t\,dt,\qquad b(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda t\,dt,\qquad \lambda\in\mathbb{R}.$$

Невласний інтеграл

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\big(a(\lambda)\cos\lambda t+b(\lambda)\sin\lambda t\big)\,d\lambda,\quad t\in\mathbb{R},$$

називається *інтегралом Фур'є* для функції f.

Достатні умови збіжності інтеграла Фур'є містяться у наступних твердженнях.

Теорема 1. Нехай $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,dt<+\infty$ і функція f має похідну в точці $x\in\mathbb{R}$. Тоді інтеграл Фур'є для функції f збігається у точці x до числа $f(x)$.

Теорема 2. Нехай $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,dt<+\infty$ і функція f має розрив першого роду в точці $x\in\mathbb{R}$. Припустимо, що існують скінченні границі

$$\lim_{u\to0-}\frac{f(x+u)-f(x-)}{u},\qquad \lim_{u\to0+}\frac{f(x+u)-f(x+)}{u}.$$

Тоді інтеграл Фур'є для функції f збігається у точці x до числа

$$\frac{f(x-)+f(x+)}{2}.$$

Перетворенням Фур'є функції f називається функція

$$\widehat{f}(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda t}f(t)\,dt,\quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

Якщо функція f неперервна в точці $x\in\mathbb{R}$ і перетворення Фур'є абсолютно інтегровне по $\mathbb{R}$, то має місце *формула обернення*

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\lambda x}\widehat{f}(\lambda)\,d\lambda.$$

Приклад 1. Записати інтеграл Фур'є для функції

$$f(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \le 1; \\ 0, & |t| > 1, \end{cases}$$

і дослідити його збіжність. Знайти перетворення Фур'є для функції f.
⌈ Обчислимо

$$a(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda t \, dt = 2 \int\limits_0^1 (1-t) \cos \lambda t \, dt = \frac{2(1-\cos\lambda)}{\lambda^2}, \ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad a(0) = 1,$$

$$b(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \lambda t \, dt = 0, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Тому

$$f(t) \sim \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \big(a(\lambda) \cos \lambda t + b(\lambda) \sin \lambda t\big) \, d\lambda = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{1 - \cos\lambda}{\lambda^2} \cos \lambda t \ d\lambda.$$

У точках множини $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ функція f має похідну, тому за теоремою 1 на цій множині інтеграл Фур'є збігається до цієї функції. У точках множини $\{-1, 0, 1\}$ функція f неперервна і має односторонні похідні, тому за теоремою 2 і на цій множині інтеграл Фур'є збігається до f. (Звичайно, можна безпосередньо обчислити значення інтеграла у точках $0, \pm 1$.) Таким чином,

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{1 - \cos\lambda}{\lambda^2} \cos \lambda x \ d\lambda, \quad x \in \mathbb{R}.$$

За означенням,

$$\widehat{f}(\lambda) = a(\lambda) + ib(\lambda) = \frac{2(1-\cos\lambda)}{\lambda^2}, \ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \widehat{f}(0) = 1.$$

⌋

6.45. Зобразити інтегралом Фур'є функцію f. Встановити, при яких значеннях t інтеграл Фур'є збігається до відповідного значення функції f :

1) $f(t) = \begin{cases} \operatorname{sgn} t, & |t| \le 1, \\ 0, & |t| > 1; \end{cases}$ 2) $f(t) = \begin{cases} \sin t, & |t| \le \pi, \\ 0, & |t| > \pi \ ? \end{cases}$

6.46. Знайти перетворення Фур'є функцій:

1) $f(t) = \begin{cases} 1, & |t| \le a, \\ 0, & |t| > a; \end{cases} \quad a \ge 0;$

2) $f(t) = \exp\left(-\dfrac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right), \ t \in \mathbb{R}; \quad a \in \mathbb{R}, \ \sigma > 0;$

3) $f(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t \ge 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases}$

4) $f(t) = e^{-a|t|},\ t \in \mathbb{R};\ a > 0;$
5) $f(t) = (1+t^2)^{-1},\ t \in \mathbb{R}.$

6.47. Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ така, що $\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1+t^2)|f(t)|\,dt < +\infty$. Виразити перетворення Фур'є функції $t^2 f(t),\ t \in \mathbb{R},$ через перетворення Фур'є функції f.

6.48. Нехай $f \in C^{(1)}(\mathbb{R}),\quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f^{(k)}(t)|\,dt < +\infty,\ k = 0, 1;\quad f(t) \to 0,$ $|t| \to +\infty$. Знайти зв'язок між перетвореннями Фур'є функцій f і f'.

Відповіді

Розділ 1. Метричні простори

1.1. 1) Так; 2) ні. **1.4.** 1) Так; 2) так; 3) ні. **1.9.** 1) Ні; 2) так; 3) так. **1.10.** 1) Ні; 2) так; 3) так; 4) ні; 5) так; 6) ні. **1.12.** 1) Ні; 2) так. **1.13.** 1) Так; 2) ні; 3) так. **1.20.** 1) Так; 2) так. **1.25.** $\overline{B}(x_0;1)$ у дискретному просторі (див. 1.22). **1.28.** 0. **1.34.** 1) Збігається до $(0,2)$; 2) розбігається; 3) розбігається; 4) збігається до $(1,2,0)$; 5) збігається до $(0,0,\ldots,0)$; 6) розбігається; 7) збігається до $(1,0,0,\ldots,0)$; 8) збігається до $(0,0,\ldots,0)$; 9) збігається до $(0,0,\ldots,0)$; 10) розбігається. **1.35.** 1) Розбігається; 2) збігається до $x(t)=t^2$, $t\in[0;1]$; 3) збігається до $x(t)=0, t\in[0;1]$; 4) розбігається; 5) розбігається; 6) збігається до $x(t)=t$, $t\in[0;1]$; 7) розбігається. **1.36.** 1) збігається до $x(t)=0$, $t\in[0;1]$; 2) збігається до $x(t)=0$, $t\in[0;1]$. **1.39.** $B(x;1)=\{x\}$, $\overline{B}\Big(x;\frac{1}{2}\Big)=\{x\}$, $S\Big(x;\frac{1}{2}\Big)=\varnothing$, $S(x;1)=X\setminus\{x\}$; $x_n\to x,\ n\to\infty \iff \exists n_0\ \forall n\geq n_0:\ x_n=x$. **1.40.** $x_n\to x$, $n\to\infty$, у просторі $(C^{(1)}([0;1]),\rho) \iff \exists t_0\in[0;1]:\ x_n(t_0)\to x(t_0)$, $n\to\infty$, і $x'_n \underset{[0;1]}{\rightrightarrows} x'$, $n\to\infty$. 1) Розбігається; 2) збігається до $x(t)=0$, $t\in[0;1]$. **1.43.** $x_n(t)=\left(\frac{t-a}{b-a}\right)^n$, $t\in[a;b]$, $n\geq 1$. **1.44.** Рівномірна збіжність. **1.47.** 1) $A^\circ=(0;1)$, $A'=A$, $\widetilde{A}=\varnothing$; 2) $A^\circ=A$, $A'=[0;1]$, $\widetilde{A}=\varnothing$; 3) $A^\circ=A'=\varnothing$, $\widetilde{A}=\mathbb{N}$; 4) $A^\circ=\widetilde{A}=\varnothing$, $A'=\mathbb{R}$; 5) $A^\circ=A'=\varnothing$, $\widetilde{A}=A$; 6) $A^\circ=\widetilde{A}=\varnothing$, $A'=\mathbb{R}$; 7) $A^\circ=\varnothing$, $A'=\{0\}$, $\widetilde{A}=A$, 8) $A^\circ=\varnothing$, $A'=\{1\}$, $\widetilde{A}=\{1+\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}\}$; 9) $A^\circ=\widetilde{A}=\varnothing$, $A'=[-1;1]$. **1.48.** 1) $A^\circ=\varnothing$, $A'=\mathbb{R}$; 2) $A^\circ=\varnothing$, $A'=[-1;1]$; 3) $A^\circ=\varnothing$, $A'=[0;1]$. **1.49.** 1) $A^\circ=\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2<1\}$, $A'=A$, $\widetilde{A}=\varnothing$; 2) $A^\circ=A$, $A'=\{(x_1,x_2)\mid 1\leq x_1^2+x_2^2\leq 4\}$, $\widetilde{A}=\varnothing$; 3) $A^\circ=A$, $A'=\{(x_1,x_2)\mid x_2\geq \geq x_1\}$, $\widetilde{A}=\varnothing$; 4) $A^\circ=\widetilde{A}=\varnothing$, $A'=\{(x_1,x_2)\mid x_1=x_2\}$; 5) $A^\circ=A$, $A'=\{(x_1,x_2)\mid x_2\geq x_1^2\}$, $\widetilde{A}=\varnothing$; 6) $A^\circ=\varnothing$, $A'=A$, $\widetilde{A}=\varnothing$; 7) $A^\circ=A$, $A'=\{(x_1,x_2)\mid x_1\geq 0\}$, $\widetilde{A}=\varnothing$; 8) $A^\circ=\{(x_1,x_2)\mid |x_1|+|x_2|<1\}$, $A'=A$, $\widetilde{A}=\varnothing$; 9) $A^\circ=\varnothing$, $A'=\{(0,0)\}$, $\widetilde{A}=A$; 10) $A^\circ=A'=\varnothing$, $\widetilde{A}=A$; 11) $A^\circ=\varnothing$, $A'=\{(-1,1),(1,1)\}$, $\widetilde{A}=A$; 12) $A^\circ=\widetilde{A}=\varnothing$, $A'=\{(x_1,x_2)\mid x_1x_2=1, x_1>0\}$; 13) $A^\circ=\varnothing$, $A'=\mathbb{R}^2$, $\widetilde{A}=\varnothing$; 14) $A^\circ=\varnothing$, $A'=\{(0,1)\}$, $\widetilde{A}=A$. **1.50.** 1) $A^\circ=\varnothing$, $A'=\mathbb{R}^2$; 2) $A^\circ=\varnothing$, $A'=\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2=1\}$; 3) $A^\circ=\varnothing$, $A'=[-1;1]\times[-1;1]$. **1.51.** 1) $A^\circ=A$, $A'=\{x\in C([0;1])\mid 1\leq x(0)\leq 2\}$, $\widetilde{A}=\varnothing$; 2) $A^\circ=\varnothing$, $A'=A$,

$\widetilde{A} = \varnothing$; 3) $A^\circ = \{x \in C([0;\,1]) |\, x(0) > 1\}$, $A' = A$, $\widetilde{A} = \varnothing$; 4) $A^\circ = \varnothing$, $A' = A$, $\widetilde{A} = \varnothing$; 5) $A^\circ = A$, $A' = \{x |\, x(0) + x(1) \ge 0\}$, $\widetilde{A} = \varnothing$; 6) $A^\circ = A$, $A' = \{x |\, x(0) \cdot x(1) \le 0\}$, $\widetilde{A} = \varnothing$; 7) $A^\circ = A$, $A' = \{x |\, \forall\, t \in [0;1] : x(t) \ge t\}$, $\widetilde{A} = \varnothing$; 8) $A^\circ = \varnothing$, $A' = \{x(t) = 0,\, t \in [0;1]\}$, $\widetilde{A} = A$. **1.52.** 1) $A^\circ = A$, $A' = \{x |\, \max\limits_{t\in[0;\,1]} x(t) \le 1\}$; 2) $A^\circ = \{x |\, \max\limits_{t\in[0;\,1]} x(t) < 1\}$, $A' = A$; 3) $A^\circ = A$, $A' = \{x \in C([0;\,1]) \mid \min\limits_{t\in[0;\,1]} x(t) \ge 0\}$; 4) $A^\circ = A$, $A' = C([0;1])$; 5) $A^\circ = \varnothing$, $A' = C([0;1])$; 6) $A^\circ = \varnothing$, $A' = C([0;1])$; 7) $A^\circ = A$, $A' = \{x |\, \int\limits_0^1 x^2(t)\, dt \ge 1\}$. **1.53.** $A^\circ = \{(x_1, x_2) | x_1^2 + x_2^2 < 1,\, (x_1 - \frac{3}{4})^2 + x_2^2 < 1\}$, $A' = \{(x_1, x_2) |\, x_1^2 + x_2^2 < 1,\ (x_1 - \frac{3}{4})^2 + x_2^2 \le 1\}$. **1.57.** 1) Невідкрита, замкнена; 2) відкрита, незамкнена; 3) невідкрита, незамкнена; 4) невідкрита, замкнена; 5) невідкрита, замкнена; 6) невідкрита, замкнена; 7) невідкрита, незамкнена; 8) невідкрита, незамкнена; 9) невідкрита, замкнена. **1.58.** 1) Відкрита, незамкнена; 2) невідкрита, незамкнена; 3) невідкрита, замкнена; 4) відкрита, незамкнена; 5) невідкрита, замкнена; 6) відкрита, незамкнена; 7) відкрита, незамкнена; 8) невідкрита, замкнена; 9) невідкрита, незамкнена; 10) невідкрита, незамкнена. **1.59.** 1) Відкрита, незамкнена; 2) невідкрита, незамкнена; 3) невідкрита, замкнена. **1.60.** 1) Невідкрита, замкнена; 2) невідкрита, замкнена; 3) відкрита, незамкнена; 4) відкрита, незамкнена; 5) невідкрита, замкнена; 6) відкрита, незамкнена; 7) невідкрита, замкнена. **1.62.** Відкритою є тільки порожня підмножина. $\mathcal{A} = \{(x_1, 0) |\, x_1 \in A\}$ замкнена $\iff$ A замкнена в $(\mathbb{R}, \rho)$. **1.65.** 1) Невідкрита, замкнена; 2) відкрита, незамкнена; 3) невідкрита, замкнена; 4) відкрита, незамкнена; 5) невідкрита, незамкнена; 6) невідкрита, незамкнена; 7) невідкрита, замкнена; 8) невідкрита, замкнена; 9) невідкрита, замкнена; 10) відкрита, незамкнена; 11) невідкрита, замкнена; 12) невідкрита, замкнена. **1.66.** Невідкрита, незамкнена. **1.70.** Множина A – довільна. **1.71.** Кожна множина є відкритою та замкненою одночасно. **1.73.** 1) Не є скрізь щільною; 2) не є скрізь щільною; 3) скрізь щільна; 4) скрізь щільна; 5) скрізь щільна; 6) скрізь щільна; 7) скрізь щільна; 8) скрізь щільна; 9) скрізь щільна; 10) скрізь щільна. **1.74.** Скрізь щільна. **1.75.** 1) Не є скрізь щільною; 2) скрізь щільна; 3) скрізь щільна. **1.76.** 1) Скрізь щільна; 2) скрізь щільна; 3) скрізь щільна; 4) не є скрізь щільною; 5) скрізь щільна; 6) скрізь щільна; 7) не є скрізь щільною. **1.77.** 1) Скрізь щільна; 2) скрізь щільна; 3) скрізь щільна; 4) не є скрізь щільною; 5) скрізь щільна; 6) скрізь щільна; 7) скрізь щільна; 8) скрізь щільна; 9) скрізь щільна. **1.78.** 1) Скрізь щільна; 2) скрізь щільна; 3) скрізь щільна; 4) скрізь щільна. **1.79.** 1) Скрізь щільна; 2) скрізь щільна; 3) скрізь щільна. **1.84.** Множина X не більш ніж злічення. **1.85.** 1) Не є скрізь щільною; 2) скрізь щільна. **1.93.** 8) Ні. **1.98.** 1) Так; 2) ні; 3) так; 4) ні; 5) ні; 6) ні; 7) так; 8) так; 9) так; 10) так. **1.100.** Так. **1.109.** Ні. **1.110.** 1) $\{(x_1, x_2) | \, x_1 + x_2 < 0\}$; 2) $\{(x_1, x_2) | \, x_1^2 + x_2^2 \le 3\}$; 3) $\{(x_1, x_2) | \, x_1 \le 0, \, x_2 \le 0\}$; 4) $\{(x_1, x_2) | \, 0 < x_1^2 + x_2^2 < 1, \, 4x_1^2 - x_2^2 \ge 0\}$; 5) $\{(x_1, x_2, x_3) | \, x_1 x_2 x_3 > 0\}$; 6) $\{(x_1, x_2) | \, |x_1| \le 1, \, |x_2| \ge 1\}$; 7) $\{(x_1, x_2) | \, 1 \le x_1^2 + x_2^2 \le 4\}$; 8) $\{(x_1, x_2, x_3) \, | \, x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 < -1\}$; 9) $\{(x_1, x_2, x_3) \, | \, x_2^2 < x_3\}$; 10) $\{(x_1, x_2, x_3) | \, |x_1| \le |a|, \, |x_2| \le |b|, \, |x_3| \le |c|\}$. **1.111.** 0. **1.112.** 1) 1; 2) 0; 3) 1. **1.116.** 1) 1; 2) $\ln 2$; 3) 0; 4) 0; 5) 1. **1.117.** a. **1.119.** 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) 0; 5) e; 6) 0; 7) 0; 8) 0; 9) 1; 10) $\frac{4}{3}$; 11) $\frac{1}{2}$; 12) e; 13) 2. **1.121.** 1) Не існує; 2) 0; 3) 1 при $m = 1$, не існує при $m \ge 2$; 4) не існує. **1.122.** 1) 0; 2) 0; 3) $\frac{1}{3}$; 4) не існує; 5) 0. **1.123.** 1) $\lim\limits_{x_1 \to 0} (\lim\limits_{x_2 \to +\infty} f(x_1, x_2)) = 0$, $\lim\limits_{x_2 \to +\infty} (\lim\limits_{x_1 \to 0} f(x_1, x_2)) = 1$; 2) $\lim\limits_{x_1 \to 1} (\lim\limits_{x_2 \to 0} f(x_1, x_2)) = 1$, $\lim\limits_{x_2 \to 0} (\lim\limits_{x_1 \to 1} f(x_1, x_2)) = \infty$. **1.124.** 1) 0, 1; 2) 1, 1; 3) 0, 1. **1.125.** 1) $\lim\limits_{\substack{x_1 \to 0 \\ x_2 \to 0}} f(x_1, x_2)$ не існує; $\lim\limits_{x_1 \to 0} (\lim\limits_{x_2 \to 0} f(x_1, x_2)) = 0$; $\lim\limits_{x_2 \to 0} (\lim\limits_{x_1 \to 0} f(x_1, x_2)) = 1$; 2) $\lim\limits_{\substack{x_1 \to 0 \\ x_2 \to 0}} f(x_1, x_2) = 0$; $\lim\limits_{x_1 \to 0} (\lim\limits_{x_2 \to 0} f(x_1, x_2))$ не існує; $\lim\limits_{x_2 \to 0} (\lim\limits_{x_1 \to 0} f(x_1, x_2)) = 0$; 3) $\lim\limits_{\substack{x_1 \to 0 \\ x_2 \to 0}} f(x_1, x_2) = 0$; $\lim\limits_{x_1 \to 0} (\lim\limits_{x_2 \to 0} f(x_1, x_2)) = 0$; $\lim\limits_{x_2 \to 0} (\lim\limits_{x_1 \to 0} f(x_1, x_2)) = 0$; 4) $\lim\limits_{\substack{x_1 \to 0 \\ x_2 \to 0}} f(x_1, x_2)$ не існує; $\lim\limits_{x_1 \to 0} (\lim\limits_{x_2 \to 0} f(x_1, x_2)) = 0$; $\lim\limits_{x_2 \to 0} (\lim\limits_{x_1 \to 0} f(x_1, x_2)) = 0$; 5) $\lim\limits_{\substack{x_1 \to 0 \\ x_2 \to 0}} f(x_1, x_2) = 0$; $\lim\limits_{x_1 \to 0} (\lim\limits_{x_2 \to 0} f(x_1, x_2)) = 0$; $\lim\limits_{x_2 \to 0} (\lim\limits_{x_1 \to 0} f(x_1, x_2))$ не існує; 6) $\lim\limits_{\substack{x_1 \to 0 \\ x_2 \to 0}} f(x_1, x_2)$ не існує; $\lim\limits_{x_1 \to 0} (\lim\limits_{x_2 \to 0} f(x_1, x_2)) = 0$; $\lim\limits_{x_2 \to 0} (\lim\limits_{x_1 \to 0} f(x_1, x_2))$ не існує. **1.127.** 1) $f(x_1, x_2) = x_1 (\sin \frac{1}{x_1} + \sin \frac{1}{x_2})$; 2) $f(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2}$. **1.129.** 1) $f \in C(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$; 2) $f \in C(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$. **1.130.** 1) $\{(x_1, x_2) | \, x_1^2 + x_2^2 = 16\}$; 2) $\{(x_1, x_2) | \, x_1 + x_2 = 0\}$; 3) $\{(x_1, x_2) | \, x_1^2 + x_2^2 = 4\}$; 4) $\{(x_1, x_2) | \, x_1 + x_2^2 = 0\}$; 5) $\{(x_1, x_2) | x_1 = x_2, \, x_1 \ne \pm\frac{1}{3}\}$; 6) $\{(x_1, x_2) | \, x_1^2 + x_2^2 = 9\}$; 7) $(0, 0)$; 8) $\{(x_1, x_2) | \, |x_1| = |x_2|\}$; 9) $\{(x_1, x_2) | \, x_1 = -x_2\}$; 10) $\{(x_1, x_2) | \, x_1 x_2 = 0\}$. **1.132.** 1) $\mathbb{R}^m$; 2) $\mathbb{R}^m$. **1.133.** 1) $f(1, 2) = 1$; 2) $f(0, 0) = \frac{1}{2}$; 3) $f(0, 0) = 0$; 4) $f(0, 0) = 0$; 5) $f(0, 0) = 1$; 6) $f(0, 0) = 0$; 7) $f(0, 0) = 0$; 8) $f(0, 0) = 0$; 9) $f(0, 0) = 0$; 10) $f(0, 0) = 0$;

11) $f(0,0)=0$; 12) $f(0,0)=1$. **1.146.** $\mathbb{R}^2$. **1.150.** Обмежена при $m=1$, необмежена при $m\geq 2$. **1.151.** 1) Замкнена, невідкрита; 2) замкнена, невідкрита; 3) незамкнена, відкрита; 4) незамкнена, відкрита; 5) замкнена, невідкрита; 6) замкнена, невідкрита; 7) замкнена, невідкрита; 8) замкнена, невідкрита; 9) незамкнена, відкрита; 10) незамкнена, відкрита. **1.152.** 1) Замкнена, невідкрита; 2) незамкнена, відкрита; 3) замкнена, невідкрита; 4) замкнена, невідкрита; 5) незамкнена, відкрита; 6) незамкнена, відкрита; 7) незамкнена, відкрита; 8) замкнена, невідкрита; 9) замкнена, невідкрита; 10) незамкнена, відкрита. **1.155.** Необмежена. **1.161.** 1) Компактна; 2) може бути компактною (напр., якщо $F_1\cap F_2=\varnothing$), може бути некомпактною (напр., якщо $F_2=\{x\}$, де x – гранична точка множини F_1). **1.162.** 1) Компактна; 2) не обов'язково компактна, напр. $F_k=[k,k+1]$ в $(\mathbb{R},\rho)$; 3) компактна; 4) не обов'язково компактна, напр. $F_1=\{0\}$ в $(\mathbb{R},\rho)$. **1.163.** 1) Компактна; 2) некомпактна; 3) некомпактна; 4) компактна. **1.175.** 1) Компактна; 2) компактна; 3) компактна; 4) компактна; 5) некомпактна; 6) некомпактна; 7) компактна; 8) некомпактна; 9) компактна; 10) компактна.

Розділ 2. Диференціальне числення функцій кількох змінних

2.1. 1) $f_1'=4x_1^3-8x_1x_2^2+\frac{1}{x_1+x_2^2}+\sin(x_1+x_2)+x_1\cos(x_1+x_2)$; $f_2'=$ $=8x_2(x_2^2-x_1^2)+\frac{2x_2}{x_1+x_2^2}+x_1\cos(x_1+x_2)$; 2) $f_1'=x_2+x_2^{-1}-\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2}+$ $+\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{x_2-1}$, $f_2'=x_1-\frac{x_1}{x_2^2}+\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}+\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{x_2}\left(\ln\frac{x_1}{x_2}-1\right)$; 3) $f_1'=x_2^2(x_1^2+$ $+x_2^2)^{-3/2}+x_2x_1^{x_2-1}-2x_2(1+x_1^2x_2^2)^{-1}(2+x_1^2x_2^2)^{-1/2}$, $f_2'=-x_1x_2(x_1^2+$ $+x_2^2)^{-3/2}+x_1^{x_2}\ln x_1-2x_1(1+x_1^2x_2^2)^{-1}(2+x_1^2x_2^2)^{-1/2}$; 4) $f_1'=\cos x_1+$ $+2^{x_2}\cos^{-2}x_1-6x_2\sin(x_1x_2)\cos^5(x_1x_2)$, $f_2'=2^{x_2}\ln 2\cdot\operatorname{tg}x_1-6x_1\sin(x_1x_2)\times$ $\times\cos^5(x_1x_2)$; 5) $f_1'=-x_2e^{\operatorname{ctg}(x_1x_2)}\sin^{-2}(x_1x_2)\operatorname{arctg}x_1^2+2x_1e^{\operatorname{ctg}(x_1x_2)}(1+$ $+x_1^4)^{-1}$, $f_2'=-x_1e^{\operatorname{ctg}(x_1x_2)}\sin^{-2}(x_1x_2)\operatorname{arctg}x_1^2$; 6) $f_1'=\frac{x_2}{x_3}x_1^{x_2/x_3-1}$, $f_2'=$ $=x_3^{-1}x_1^{x_2/x_3}\ln x_1$, $f_3'=x_2x_3^{-2}x_1^{x_2/x_3}\ln x_1$; 7) $f_1'=x_1^{\arcsin(x_2/x_3)-1}\times$ $\times\arcsin(x_2/x_3)$, $f_2'=(x_3^2-x_2^2)^{-1/2}x_1^{\arcsin(x_2/x_3)}\ln x_1$, $f_3'=-x_2x_3^{-1}(x_3^2-$ $-x_2^2)^{-1/2}x_1^{\arcsin(x_2/x_3)}\ln x_1$; 8) $f_1'=x_2x_3(x_1^2+x_2^2)^{-1}\left(\operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2}\right)^{x_3-1}$, $f_2'=$ $=-x_1x_3(x_1^2+x_2^2)^{-1}\left(\operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2}\right)^{x_3-1}$, $f_3'=\left(\operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2}\right)^{x_3}\ln\operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2}$; 9) $f_1'=$ $=x_2^{-1}x_3\left(\sin\frac{x_1}{x_2}\right)^{x_3-1}\cos\frac{x_1}{x_2}$, $f_2'=x_1x_2^{-2}x_3\left(\sin\frac{x_1}{x_2}\right)^{x_3-1}\cos\frac{x_1}{x_2}$, $f_3'=$ $=\left(\sin\frac{x_1}{x_2}\right)^{x_3}\ln\sin\frac{x_1}{x_2}$; 10) $f_1'=\cos^{-2}x_1(\operatorname{tg}x_1)^{x_2/x_3-1}$, $f_2'=(\operatorname{tg}x_1)^{x_2/x_3}\times$ $\times x_3^{-1}\ln\operatorname{tg}x_1$, $f_3'=-x_2x_3^{-2}(\operatorname{tg}x_1)^{x_2/x_3}\ln\operatorname{tg}x_1$; 11) $f_1'=(3x_1^2+x_2^2+$ $+x_3^2)\exp\bigl(x_1(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\bigr)$, $f_2'=2x_1x_2\exp\bigl(x_1(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\bigr)$, $f_3'=2x_1x_3\times$

$\times \exp\big(x_1(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\big)$; 12) $f_1' = (x_1+\ln x_2+\ln\ln x_3)^{-1}$, $f_2' = (x_2(x_1+ + \ln x_2 + \ln\ln x_3))^{-1}$, $f_3' = (x_3(x_1+\ln x_2+\ln\ln x_3)\ln x_3)^{-1}$; 13) $f_i' = = 2x_i\big((x_1^2+x_2^2+x_3^2-1)\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\big)^{-1}$, $i=1,2,3$; 14) $f_1' = -\sin x_1\cos x_1\cdot \cdot(\cos^2 x_1+\sin^2 x_2+\operatorname{ctg}^2 x_3)^{-1/2}$, $f_2' = \sin x_2\cos x_2(\cos^2 x_1+\sin^2 x_2+ + \operatorname{ctg}^2 x_3)^{-1/2}$, $f_3' = -\cos x_3\sin^{-3} x_3\cdot(\cos^2 x_1+\sin^2 x_2+\operatorname{ctg}^2 x_3)^{-1/2}$; 15) $f_1' = \big(x_2(1+\sin x_2)+(x_2-x_1x_2+x_3)e^{x_1}\big)(1+e^{x_1}+\sin x_2)^{-2}$, $f_2' = = \big(x_1(1+e^{x_1}+\sin x_2)-(x_1x_2-x_3)\cos x_2\big)(1+e^{x_1}+\sin x_2)^{-2}$, $f_3' = -(1+ + e^{x_1}+\sin x_2)^{-1}$. **2.2.** 1) $g(x_1,x_2) = -f(x_1,x_2)$; 2) $h(x_1,x_2) = f(x_1,x_2)$. **2.3.** 1) $(0,0)$; 2) $(0,0)$. **2.4.** 1) $1-\frac{5\sqrt3}{2}$; 2) $f_{\vec a}'(1,1,1) = \cos\alpha+2\cos\beta+ 3\cos\gamma$, $|\operatorname{grad} f| = \sqrt{14}$. **2.5.** 1) $\operatorname{grad} f(\vec x^{\,0}) = m^{-1/2}(1,1,\dots,1)$, $f_{\vec a}'(\vec x^{\,0}) = \frac{1}{2\sqrt m}(1+(-1)^{m-1})$; 2) $\operatorname{grad} f(\vec x^{\,0}) = (2e,0,\dots,0)$, $f_{\vec a}'(\vec x^{\,0}) = 0$;
3) $\operatorname{grad} f(\vec x^{\,0}) = \frac{1}{m+\sqrt m}\times(1,-1,1,\dots,(-1)^{m+1})$, $f_{\vec a}'(\vec x^{\,0}) = \frac{1}{2(m+\sqrt m)}(1+ + (-1)^{m-1})$; 4) $\operatorname{grad} f(\vec x^{\,0}) = \frac{1}{6\sqrt5}(1,2,0,\dots,0)$, $f_{\vec a}'(\vec x^{\,0}) = \frac{\sqrt5}{6}$;
5) $\operatorname{grad} f(\vec x^{\,0}) = \frac{\cos\sqrt2}{\sqrt2}(1,0,0,\dots,0,1)$, $f_{\vec a}'(\vec x^{\,0}) = \frac{(m+1)\cos\sqrt2}{\sqrt2}$;
6) $\operatorname{grad} f(\vec x^{\,0}) = (0,0,\dots,0)$, $f_{\vec a}'(\vec x^{\,0}) = 0$; 7) $\operatorname{grad} f(\vec x^{\,0}) = = \frac{2}{3\sqrt5}(1,1,0,0,\dots,0)$, $f_{\vec a}'(\vec x^{\,0}) = \frac{2}{3\sqrt5}$; 8) $\operatorname{grad} f(\vec x^{\,0}) = (0,0,\dots,0)$, $f_{\vec a}'(\vec x^{\,0}) = 0$; 9) $\operatorname{grad} f(\vec x^{\,0}) = -\frac{1}{\sqrt m(\sqrt m+\pi)\ln^2(\sqrt m+\pi)}(1,1,\dots,1)$, $f_{\vec a}'(\vec x^{\,0}) = = \frac{1}{2\sqrt m(\sqrt m+\pi)\ln^2(\sqrt m+\pi)}(-1+(-1)^m)$; 10) $\operatorname{grad} f(\vec x^{\,0}) = (m-1)\times \times(m+1)^{-2}(1,1,\dots,1)$, $f_{\vec a}'(\vec x^{\,0}) = m(m-1)(m+1)^{-2}$. **2.6.** 1) $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 6x_1\times \times\sin(x_2x_3)+(2+4x_1+x_2^2)e^{x_1+x_2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_3} = -x_1^3x_2x_3\sin(x_2x_3)+2x_2e^{x_1+x_3}$; 2) $\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2\partial x_2} = x_3(2+x_1)(1+x_2)e^{x_1+x_2+x_3}$, $\frac{\partial^6 f}{\partial x_1\partial x_2^2\partial x_3^3} = (1+x_1)(2+x_2)(3+ + x_3)e^{x_1+x_2+x_3}$; 3) $\frac{\partial^m f(0)}{\partial x_1\partial x_2\dots\partial x_m} = 1+(-1)^{m-1}(m-1)!$. **2.8.** 1) 0; 2) 0. **2.9.** 1) $2(-1)^m(m+n-1)!(nx_1+mx_2)(x_1-x_2)^{-(m+n+1)}$; 2) $2^n\sin(x_1+ +2x_2+\frac{m+n}{2}\pi)$; 3) $(-1)^n((x_1+m)^2+(x_2-n)^2-m-n)$; 4) $(-1)^{m+n-1}(m+ +n-1)!(1+x_1+x_2)^{-(m+n)}$; 5) $2^m\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-m-n+1)(1+2x_1+ +x_2)^{\alpha-m-n}$. **2.12.** 1) $f_{11}''(x_1,x_2) = f_{12}''(x_1,x_2) = f_{22}''(x_1,x_2) = g''(x_1+x_2)$, 2) $f_{11}''(x_1,x_2) = x_1^{-4}x_2^2g''(\frac{x_2}{x_1})+2x_1^{-3}x_2g'(\frac{x_2}{x_1})$, $f_{12}''(x_1,x_2) = -x_2x_1^{-3}g''(\frac{x_2}{x_1})- - x_1^{-2}g'(\frac{x_2}{x_1})$, $f_{22}''(x_1,x_2) = x_1^{-2}g''(\frac{x_2}{x_1})$; 3) $f_{11}''(x_1,x_2) = (x_1^2+x_2^2)^{-1}\times \times\big(x_1g''(\sqrt{x_1^2+x_2^2})+x_2^2g'(\sqrt{x_1^2+x_2^2})\big)$, $f_{12}''(x_1,x_2) = x_1x_2(x_1^2+x_2^2)^{-1}\times \times\big(g''(\sqrt{x_1^2+x_2^2})-(x_1^2+x_2^2)^{-1/2}g'(\sqrt{x_1^2+x_2^2})\big)$, $f_{22}''(x_1,x_2) = (x_1^2+x_2^2)^{-1}\times \times\big(x_2g''(\sqrt{x_1^2+x_2^2})+x_1^2g'(\sqrt{x_1^2+x_2^2})\big)$; 4) $f_{11}''(x_1,x_2) = x_2^2g'(x_1x_2)$, $f_{12}''(x_1,x_2) = g(x_1x_2)+x_1x_2g'(x_1x_2)$, $f_{22}''(x_1,x_2) = x_1^2g'(x_1x_2)$;
5) $f_{11}''(x_1,x_2) = f_{12}''(x_1,x_2) = f_{22}''(x_1,x_2) = g'(x_1+x_2)$; 6) $f_{ii}''(x_1,x_2,x_3) =$

$2(g'(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_i^2 g''(x_1^2+x_2^2+x_3^2))$, $i=1,2,3$, $f''_{ij}(x_1,x_2,x_3) = 4x_i x_j g''(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$, $i \neq j$, $i,j=1,2,3$. **2.15.** 1) Недиференційовна; 2) недиференційовна; 3) $df(\vec{x}^{\,0};\vec{a}) = a_1+a_2$; 4) $df(\vec{x}^{\,0};\vec{a}) = 2(2a_1-a_2)$; 5) $df(\vec{x}^{\,0};\vec{a})=0$; 6) $df(\vec{x}^{\,0};\vec{a})=0$; 7) $df(\vec{x}^{\,0};\vec{a})=0$; 8) недиференційовна. **2.16.** 1) $df(\vec{x};\vec{a}) = x_1^{m-1}x_2^{n-1}(mx_2a_1+nx_1a_2)$; $df(\vec{x}^{\,0};\vec{a}) = 2^{n-1}(4m+n)$; 2) $df(\vec{x};\vec{a}) = (x_2^{-1}+x_1(x_1^2+x_2^2)^{-1})a_1-(x_1x_2^{-2}-x_2(x_1^2+x_2^2)^{-1})a_2$; $df(\vec{x}^{\,0};\vec{a}) = \frac{1}{2}$; 3) $df(\vec{x};\vec{a}) = (x_1(x_1^2+x_2^2)^{-1/2}\cos(x_1^2+x_2^2)^{1/2}-\sin(x_1-x_2))a_1 + (x_2(x_1^2+x_2^2)^{-1/2}\cos(x_1^2+x_2^2)^{1/2}+\sin(x_1-x_2))a_2$; $df(\vec{x}^{\,0};\vec{a}) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.
2.18. 1) $df = (x_2^3-6x_1x_2^2)\,dx_1+2x_2(3x_1x_2-3x_1^2+4)\,dx_2$; $d^2f = -6x_2^2\,dx_1^2+12x_2(x_2-2x_1)\,dx_1dx_2+2(6x_1x_2-3x_1^2+4)\,dx_2^2$; 2) $df = \frac{1}{3}(x_1+x_2^2)^{-2/3}(dx_1+2x_2\,dx_2)$; $d^2f = \frac{1}{3}(x_1+x_2^2)^{-2/3}(-\frac{2}{3}(x_1+x_2^2)^{-1}(dx_1^2+4x_2\,dx_1dx_2)+(-\frac{8}{3}(x_1+x_2^2)^{-1}x_2^2+2)\,dx_2^2)$; 3) $df = \frac{1}{2\sqrt{\ln x_1x_2}} \times (x_1^{-1}\,dx_1+x_2^{-1}\,dx_2)$; $d^2f = -\frac{1}{2\sqrt{\ln x_1x_2}}\big((\frac{1}{2\ln x_1x_2}+1)x_1^{-2}\,dx_1^2+(x_1x_2\times \ln x_1x_2)^{-1}\,dx_1dx_2+(\frac{1}{2\ln x_1x_2}+1)x_2^{-2}\,dx_2^2\big)$; 4) $df = 3(x_1^3+2x_2^3-x_3^3)^{-1}\times(x_1^2\,dx_1+2x_2^2\,dx_2-x_3^2\,dx_3)$; $d^2f = 3(x_1^3+2x_2^3-x_3^3)^{-1}\big(x_1(2-3x_1^3(x_1^3+2x_2^3-x_3^3)^{-1})\,dx_1^2+2x_2(2-3x_2^3(x_1^3+2x_2^3-x_3^3)^{-1})\,dx_2^2-x_3(2-3x_3^3(x_1^3+2x_2^3-x_3^3)^{-1})dx_3^2-6(x_1^3+2x_2^3-x_3^3)^{-1}(2x_1^2x_2^2dx_1dx_2-x_1^2x_3^2dx_1dx_3-2x_2^2x_3^2dx_2dx_3)\big)$; 5) $df = x_2x_3x_1^{x_2x_3-1}\,dx_1+x_3x_1^{x_2x_3}\ln x_1\,dx_2+x_2x_1^{x_2x_3}\ln x_1\,dx_3$; $d^2f = x_2x_3(x_2x_3-1)x_1^{x_2x_3-2}\,dx_1^2+x_3^2x_1^{x_2x_3}\ln^2 x_1\,dx_2^2+x_2^2x_1^{x_2x_3}\ln^2x_1\,dx_3^2+2\big(x_3\times(1+x_2x_3\ln x_1)x_1^{x_2x_3-1}\,dx_1dx_2+x_2(1+x_2x_3\ln x_1)x_1^{x_2x_3-1}\,dx_1dx_3+(1+x_2x_3\ln x_1)x_1^{x_2x_3}\ln x_1\,dx_2dx_3\big)$; 6) $df = -2x_1x_3(x_1^2+x_2^2)^{-2}\,dx_1-2x_2x_3(x_1^2+x_2^2)^{-2}\,dx_2+(x_1^2+x_2^2)^{-1}\,dx_3$; $d^2f = 2(x_1^2+x_2^2)^{-2}\big(x_3(3x_1^2-x_2^2)(x_1^2+x_2^2)^{-1}\,dx_1^2+x_3(3x_2^2-x_1^2)(x_1^2+x_2^2)^{-1}\,dx_2^2+8x_1x_2x_3(x_1^2+x_2^2)^{-1}\,dx_1dx_2-2x_1\,dx_1dx_3-2x_2\,dx_2dx_3\big)$; 7) $df = \big(x_2\cos(x_1x_2)+\cos^{-2}(x_3-x_1)\sin(\mathrm{tg}(x_3-x_1))\big)\,dx_1+x_1\cos(x_1x_2)\,dx_2-\big(\cos^{-2}(x_3-x_1)\sin(\mathrm{tg}(x_3-x_1))\big)\,dx_3$; $d^2f = \big(-x_2^2\sin x_1+(2\sin(x_3-x_1)\cdot\sin\mathrm{tg}(x_3-x_1)-\cos\mathrm{tg}(x_3-x_1)\cdot\cos^{-1}(x_3-x_1))\cos^{-3}(x_3-x_1)\big)\,dx_1^2-x_1^2\sin x_1x_2\,dx_2^2-\cos^{-3}(x_3-x_1)\cdot(\cos^{-1}(x_3-x_1)\cdot\cos\mathrm{tg}(x_3-x_1)+2\sin(x_3-x_1)\cdot\sin\mathrm{tg}(x_3-x_1))\,(dx_3^2-2\,dx_1dx_3)+2(\cos x_1x_2-x_1x_2\sin x_1x_2)\,dx_1dx_2$; 8) $df = \big((1-x_1x_2x_3)^2+(x_1+x_2+x_3)^2\big)^{-1}\big((1+x_2x_3(x_2+x_3))\,dx_1+(1+x_1x_3(x_1+x_3))\,dx_2+(1+x_1x_2(x_1+x_2))\,dx_3\big)$; $d^2f = 2\big((1-x_1x_2x_3)^2+(x_1+x_2+x_3)^2\big)^{-2}\Big(\big((1+x_2x_3(x_2+x_3))(x_2x_3(1-x_1x_2x_3)-x_1-x_2-x_3)\big)\,dx_1^2+\big((1+x_1x_3(x_1+x_3))(x_1x_3(1-x_1x_2x_3)-x_1-x_2-x_3)\big)\,dx_2^2+\big((1+x_1x_2(x_1+x_2))(x_1x_2(1-x_1x_2x_3)-x_1-x_2-x_3)\big)\,dx_3^2+\big(x_3(2x_2+x_3)((1-x_1x_2x_3)^2+(x_1+x_2+x_3)^2)-2(1+x_2x_3(x_2+x_3))(x_1x_3(x_1x_2x_3-1)+x_1+x_2+x_3)\big)\,dx_1dx_2+\big(x_2(2x_3+$

$+x_2)((1-x_1x_2x_3)^2+(x_1+x_2+x_3)^2)-2(1+x_2x_3(x_2+x_3))(x_1x_2(x_1x_2x_3- -1)+x_1+x_2+x_3)\big)\,dx_1dx_3+\big(x_1(2x_3+x_1)((1-x_1x_2x_3)^2+(x_1+x_2+ +x_3)^2)-2(1+x_1x_3(x_1+x_3))(x_1x_2(x_1x_2x_3-1)+x_1+x_2+x_3)\big)\,dx_2dx_3\Big)$; 9) $df=e^{-x_3}\cos^{-2}x_1\big(x_2x_3(1+2x_1\sin x_1\cos^{-1}x_1)\cos^{-2}x_1\,dx_1+x_1x_3\,dx_2+ +x_1x_2(1-x_3)\,dx_3\big)$; $d^2f=2x_2x_3e^{-x_3}\cos^{-2}x_1(2\operatorname{tg}x_1+3x_1\operatorname{tg}^2x_1+x_1)\,dx_1^2+ +x_1x_2(x_3-2)e^{-x_3}\cos^{-2}x_1\,dx_3^2+2x_3e^{-x_3}\cos^{-2}x_1(1+2x_1\operatorname{tg}x_1)\,dx_1dx_2+ +2x_2(1-x_3)e^{-x_3}\cos^{-2}x_1(1+2x_1\operatorname{tg}x_1)\,dx_1dx_3+2x_1(1-x_3)e^{-x_3}\cos^{-2}x_1\times \times dx_2dx_3$; 10) $df=(1-(x_1-x_2x_3)^2)^{-1/2}\,(dx_1-x_3\,dx_2-x_2\,dx_3)$; $d^2f= =(1-(x_1-x_2x_3))^{-3/2}(x_1-x_2x_3)\,(dx_1^2+x_3^2\,dx_2^2+x_2^2\,dx_3^2-2x_3\,dx_1dx_2- -2x_2\,dx_1dx_3+2(x_1^2-1-x_1x_2x_3)(x_1-x_2x_3)^{-1}\,dx_2dx_3)$. **2.19.** 1) $108,972$; 2) $\frac{61}{180}$; 3) $0,005$; 4) $\frac{(3-\sqrt{3})\pi}{360}$; 5) $257,408$; 6) $0,97$; 7) $4,99$; 8) $1,08$; 9) $\frac{1}{2}+\big(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\big)\frac{\pi}{180}$; 10) $1,0575$; 11) $\frac{\pi}{4}$. **2.20.** 1) $d^3f=6(dx_1^3-3(dx_1^2dx_2- -dx_1dx_2^2)+dx_2^3)$; 2) $d^3f=-4(3\sin(x_1^2+x_2^2)+2x_1^3\cos(x_1^2+x_2^2))\,dx_1^3- -12x_2(\sin(x_1^2+x_2^2)+2x_1^2\cos(x_1^2+x_2^2))\,dx_1^2dx_2-12x_1(\sin(x_1^2+x_2^2)+2x_2^2\times \times\cos(x_1^2+x_2^2))\,dx_1dx_2^2-4(3\sin(x_1^2+x_2^2)+2x_1^3\cos(x_1^2+x_2^2))\,dx_2^3$; 3) $d^{10}f= =-9!\,(x_1+x_2)^{-10}\sum\limits_{k=0}^{10}C_{10}^k\,dx_1^kdx_2^{10-k}$; 4) $d^6f=\frac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{6}C_6^k\cos(x_1+\frac{k\pi}{2})\times \times(e^{x_2}+(-1)^{6-k}e^{-x_2})\,dx_1^kdx_2^{6-k}$; 5) $d^5f=e^{ax_1+bx_2}\sum\limits_{k=0}^{5}C_5^ka^kb^{5-k}\,dx_1^kdx_2^{5-k}$; 6) $d^3f=2(1+\operatorname{tg}^2x_1)(1+3\operatorname{tg}^2x_1)\operatorname{ctg}x_2\,dx_1^3-6\operatorname{tg}x_1(1+\operatorname{tg}^2x_1)(1+\operatorname{ctg}^2x_2)\times \times dx_1^2dx_2+6(1+\operatorname{tg}^2x_1)\operatorname{ctg}x_2(1+\operatorname{ctg}^2x_2)\,dx_1dx_2^2-2(1+\operatorname{ctg}^2x_2)(1+ +3\operatorname{ctg}^2x_2)\,dx_2^3$; 7) $d^7f=-7!\,(1+x_1+x_2+x_3)^{-8}(dx_1+dx_2+dx_3)^7$; 8) $d^8f=\exp(ax_1+bx_2+cx_3)\cdot(a\,dx_1+b\,dx_2+c\,dx_3)^8$; 9) $2(x_1^{-3}\,dx_1^4+ x_2^{-3}\,dx_2^4+x_3^{-3}\,dx_3^4)$; 10) $17153136\,dx_1^6dx_2^6dx_3^6$. **2.24.** $\alpha>\frac{1}{2}$. **2.26.** 1) $x_2f_1'= =x_1f_2'$; 2) $f_{11}''=f_{22}''$. **2.27.** 1) $x_1^2f_{11}''=x_2^2f_{22}''$; 2) $2x_1f_1'+x_2f_2'=2f$; 3) $f_{12}''=0$; 4) $x_1f_1'+x_2f_2'=f$; 5) $x_1^2f_{11}''-x_2^2f_{22}''=x_2f_2'-x_1f_1'$; 6) $f_1'+f_2'+f_3'=0$; 7) $x_1f_1'+x_2f_2'+x_3f_3'=0$; 8) $x_1f_1'+x_2f_2'+x_3f_3'=kf$. **2.28.** 1) $(x_1^2+2x_2^2)^{-1/2}g'\cdot(x_1\,dx_1+2x_2\,dx_2)$, $d^2f=(x_1^2+x_2^2)^{-1}\big(2x_2^2(x_1^2+ +x_2^2)^{-1/2}g'+x_1^2g''\big)\,dx_1^2+2(x_1^2+x_2^2)^{-1}\big(x_1^2(x_1^2+x_2^2)^{-1/2}g'+2x_2^2g''\big)\,dx_2^2+ +4x_1x_2(x_1^2+x_2^2)^{-1}\big((x_1^2+x_2^2)^{-1/2}g'+x_1g''\big)\,dx_1dx_2$; 2) $df=(h_1'+h_2')\,dx_1+ +(h_1'-h_2')\,dx_2$, $d^2f=(h_{11}''+2h_{12}''+h_{22}'')\,dx_1^2+(h_{11}''-2h_{12}''+h_{22}'')\,dx_2^2+ +(h_{11}''-h_{22}'')\,dx_1dx_2$; 3) $df=(2x_1x_2h_1'+x_2^{-2}h_2')\,dx_1+(x_1^2h_1'-2x_1x_2^{-3}h_2')\,dx_2$, $d^2f=\big(2(x_2h_1'+2x_1^2x_2^2h_{11}''+2x_1x_2^{-1}h_{12}'')+x_2^{-4}h_{22}''\big)\,dx_1^2+2\big(2x_1h_1'-2x_2^{-3}h_2'+ +2x_1^3x_2h_{11}''-3x_1^2x_2^{-2}h_{12}''-2x_1x_2^{-5}h_{22}''\big)\,dx_1dx_2+\big(6x_1x_2^{-4}h_2'+x_1^4h_{11}''-2x_1x_2^{-3}\times \times(1+x_1)^2h_{12}''+4x_1^2x_2^{-6}h_{22}''\big)\,dx_2^2$; 4) $df=(u_1'+2xu_2'+3x^2u_3')\,dx$, $d^2f= =(2u_2'+6xu_3'+u_{11}''+4x^2u_{22}''+9x^4u_{33}''+4xu_{12}''+6x^2u_{13}''+12x^3u_{23}'')dx^2$; 5) $df= =x_2g_1'\,dx_1+(x_1g_1'+x_3^{-1}g_2')\,dx_2-x_2x_3^{-2}g_2'\,dx_3$, $d^2f=x_2^2g_{11}''\,dx_1^2+(x_1^2g_{11}''+$

$+ x_3^{-2}g''_{22})\,dx_2^2 + x_2x_3^{-3}(2g'_2 + x_2x_3^{-1}g''_{22})\,dx_3^2 + 2(g'_1 + x_1x_2g''_{11} + x_2x_3^{-1}g''_{12})\times$
$\times dx_1dx_2 + 2x_2^2x_3^{-2}g''_{12}\,dx_1dx_3 - 2x_3^{-2}(g'_2 + x_2(x_1g''_{12} + x_3^{-1}g''_{22}))\,dx_2dx_3$; 6) $df =$
$= 2\big((x_1(h'_1+h'_2) + x_2h'_3)\,dx_1 + (x_2(h'_1-h'_2)+x_1h'_3)\,dx_2\big)$, $d^2f = 2\Big(\big(h'_1 +$
$+ h'_2 + 2x_1^2(h''_{11}+2h''_{12}+h''_{22}) + 4x_1x_2(h''_{13}+h''_{23}) + 2x_2^2h''_{33}\big)\,dx_1^2 + 2\big(h'_3 +$
$+2x_1^2(h''_{13}+h''_{23}) + 2x_1x_2(h''_{11}-h''_{22}+h''_{33}) + 2x_2^2(h''_{13}-h''_{23})\big)\,dx_1dx_2 + \big(h'_1 -$
$- h'_2 + 2x_1^2h''_{33} + 4x_1x_2(h''_{13}-h''_{23}) + 2x_2^2(h''_{11}-2h''_{12}+h''_{22})\big)\,dx_2^2\Big)$; 7) $df =$
$= g'\cdot(x_2x_3\,dx_1 + x_1x_3\,dx_2 + x_1x_2\,dx_3)$, $d^2f = g''\cdot(x_2^2x_3^2\,dx_1^2 + x_1^2x_3^2\,dx_2^2 +$
$+ x_1^2x_2^2\,dx_3^2) + 2(g''\cdot x_1x_2x_3^2 + g'\cdot x_3)\,dx_1dx_2 + 2(g''\cdot x_1^2x_2x_3 + g'\cdot x_1)\,dx_2dx_3 +$
$+2(g''\cdot x_1x_2^2x_3 + g'\cdot x_2)\,dx_1dx_3$; 8) $df = 2g'\cdot(x_1\,dx_1 - x_2\,dx_2 + x_3\,dx_3)$,
$d^2f = 2\big((2g''\cdot x_1^2+g')\,dx_1^2 + (2g''\cdot x_2^2 - g')\,dx_2^2 + (2g''\cdot x_3^2+g')\,dx_3^2 + 4g''\times$
$\times(-x_1x_2\,dx_1dx_2 - x_2x_3\,dx_2dx_3 + x_1x_3\,dx_1dx_3)\big)$; 9) $df = h'_1\,dx_1 - h'_1\,dx_2 +$
$+h'_2\,dx_3$, $d^2f = h''_{11}\,dx_1^2 + h''_{11}\,dx_2^2 + h''_{22}\,dx_3^2 + 2(-h''_{11}\,dx_1dx_2 + h''_{12}(dx_1dx_3 -$
$- dx_2dx_3))$; 10) $df = (x_2^{-1}u'_1 + u'_2 + u'_3)\,dx_1 + (-x_1x_2^{-2}u'_1 - u'_2 + u'_3)\,dx_2$,
$d^2f = \big(x_2^{-2}u''_{11} + u''_{22} + u''_{33} + 2(x_2^{-1}(u''_{12}+u''_{13}) + u''_{23})\big)\,dx_1^2 + \big(2x_1x_2^{-3}u'_1 +$
$+x_1^2x_2^{-4}u''_{11} + u''_{22} + u''_{33} + 2x_1x_2^{-2}(u''_{12}-u''_{13}) - 2u''_{23}\big)\,dx_2^2 + 2\big(-x_2^{-2}u'_1 -$
$-x_1x_2^{-3}u''_{11} - u''_{22} + u''_{33} - x_2^{-2}(x_1+x_2)u''_{12} - x_2^{-2}(x_1-x_2)u''_{12}\big)\,dx_1dx_2$; 11) $df =$
$= au'_1\,dx_1 + bu'_2\,dx_2 + cu'_3\,dx_3$, $d^2f = a^2u''_{11}\,dx_1^2 + b^2u''_{22}\,dx_2^2 + c^2u''_{33}\,dx_3^2 +$
$+2abu''_{12}\,dx_1dx_2 + 2acu''_{13}\,dx_1dx_3 + 2bcu''_{23}\,dx_2dx_3$; 12) $df = (x_2u'_1 + u'_3)\,dx_1 +$
$+(x_1u'_1 + \cos x_2\cdot u'_2)\,dx_2 + u'_3\,dx_3$, $d^2f = (x_2^2u''_{11} + u''_{33})\,dx_1^2 + (x_1^2u''_{11} -$
$-\sin x_2\cdot u'_2 + \cos^2 x_2\cdot u''_{22})\,dx_2^2 + u''_{33}\,dx_3^2 + 2(u'_1 + x_1(x_2u''_{11}+u''_{13}) + (x_2u''_{12} +$
$+u''_{23})\cos x_2)\,dx_1dx_2 + 2(x_1u''_{13} + \cos x_2\cdot u''_{23})\,dx_2dx_3 + 2(x_2u''_{13} + u''_{33})\,dx_1dx_3$.

2.29. 1) $df = \Big((\sin y_2 - y_2\sin y_1)\sqrt{y_1y_2^{-1}} + (y_1\cos y_2 + \cos y_1)\sqrt{y_1^{-1}y_2}\Big)\,dx_1 +$
$+\Big(-(\sin y_2 - y_2\sin y_1)y_1\sqrt{y_1y_2^{-1}} + (y_1\cos y_2+\cos y_1)\sqrt{y_1y_2}\Big)\,dx_2$; 2) $df =$
$= \Big(2\big(y_2\operatorname{arctg}(y_1y_2) + y_1y_2^2(1+y_1^2y_2^2)^{-1}\big)\sqrt[3]{y_2} + 3\big(y_1\operatorname{arctg}(y_1y_2) + y_1^2y_2(1+$
$+y_1^2y_2^2)^{-1}\big)(y_1-1)\Big)\,dx$; 3) $df = \sqrt2\big(\sqrt{y_1+y_2}(y_2y_1^{y_2-1} + y_1y_2^{y_1-1} + y_2^{y_1}\ln y_2 +$
$+ y_1^{y_2}\ln y_1)\,dx_1 + \sqrt{y_1-y_2}(y_2y_1^{y_2-1} - y_1y_2^{y_1-1} + y_2^{y_1}\ln y_2 - y_1^{y_2}\ln y_1)\,dx_2\big)$;
4) $df = y_1y_2^2y_3^3\big((2y_3 - 3y_1y_2^{-1}y_3e^{y_3}\sin y_1)\,dx_1 + (-2y_3\sin y_1 + 3y_1y_2^{-1}y_3e^{y_3} +$
$+4y_1y_2e^{-y_3})\,dx_2\big)$; 5) $df = 2(1+y_1^2y_2)^{-1}\big(y_1(x_1y_1+y_2)\,dx_1 + y_1(x_2y_1 +$
$+y_2)\,dx_2 + y_1(x_3y_1+y_2)\,dx_3\big)$; 6) $df = (y_2 + \cos y_1\cos y_2)\sin\sqrt{y_2}\,dx_1 +$
$+\big(y_1(y_2+\cos y_1\cos y_2)(\sin\sqrt{y_2})^{-1}\cos\sqrt{y_2} + \sqrt{y_2}\big)\,dx_2$; 7) $df = \big((2y_1 +$
$+y_2)\cos(\ln y_2) + y_2(y_1+2y_2)\big)\,dx$; 8) $df = x_1(\cos x_2 - \sin x_2)\big(3x_1\sin x_2\times$
$\times\cos x_2\,dx_1 - x_1^2(1-\sin x_2\cos x_2)\,dx_2\big)$; 9) $df = y_1y_2^{-1}\Big(\big(2(3y_1-2)\ln y_2 +$
$+3y_1\big)\,dx_1 - 2y_1\big((3y_1-2)\ln y_2 - 1\big)\,dx_2\Big)$; 10) $df = \big(3 - 4y_1^3 - (2y_2)^{-1}\big)\times$

$\times\cos^{-2}\big(3y_1^{-1}+2y_1^2-y_2\big)\,dx$; 11) $df=e^{y_1y_2}\big((2x_1y_2+x_2y_1y_2)\,dx_1+(-2x_2y_2+$ $+x_1y_1y_2)\,dx_2\big)$. **2.30.** $1+x_1^2x_2-\cos x_2$. **2.31.** $f(x_1,x_2)=|x_2|$, $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$, $\vec{x}^{\,0}=\vec{0}$. **2.32.** $\overline{\{x|\ f(x)\neq 0\}}=[a;\,b]$. **2.33.** 1) Безліч. Напр., $y_\alpha(x)=$ $=-\sqrt{1-x^2}\cdot\mathbb{I}_{[-1;\alpha]}(x)+\sqrt{1-x^2}\cdot\mathbb{I}_{(\alpha;1]}(x)$, $x\in[-1;1]$; $\alpha\in[-1;1]$; 2) y_{-1}, y_1; 3) а) y_1; б) y_{-1}, y_1. **2.34.** $y_\alpha(x)=-\sqrt{1+x^2}\cdot\mathbb{I}_{(-\infty;\alpha]}(x)+\sqrt{1+x^2}\cdot$ $\mathbb{I}_{(\alpha;+\infty)}(x)$, $x\in\mathbb{R}$; $\alpha\in\mathbb{R}$; а) $y(x)=\sqrt{1+x^2}$, $x\in\mathbb{R}$; б) y; $z(x)=-\sqrt{1+x^2}$, $x\in\mathbb{R}$. **2.35.** 1) Безліч. Напр., $y_\alpha(x)=-x\cdot\mathbb{I}_{(-\infty;\alpha)}(x)+x\cdot\mathbb{I}_{(\alpha;+\infty)}(x)$, $x\in\mathbb{R}$; $\alpha\in\mathbb{R}$; 2) $y_{-\infty}$, $y_{+\infty}$, y_0, $-y_0$; 3) $y_{-\infty}$, $y_{+\infty}$; 4) а) $y_{-\infty}$, y_0; б) $y_{-\infty}$, $y_{+\infty}$, y_0, $-y_0$; 5) $y(x)=x$, $x\in(\frac{1}{2};\,\frac{3}{2})$. **2.36.** $y_1'=x_2y(y^2-x_1x_2)^{-1}$, $y_2'=x_1y(y^2-x_1x_2)^{-1}$, $x_1x_2\neq y^2$. **2.37.** $y_{11}''=-2/5$, $y_{12}''=-1/5$, $y_{22}''=$ $=-394/25$. **2.38.** $y_{12}''=4x_2\big(y(f_2')^2f_{11}''-(1+y)f_1'f_2'f_{12}''-f_1'f_{22}''-f_1'f_2'\big)(f_1'+$ $+2yf_2')^{-3}$. **2.39.** 1) $y'=(x+y)(y-x)^{-1}$, $y''=2(x^2+2xy-y^2)\times$ $\times(x-y)^{-3}$; 2) $y'=(1-\varepsilon\cos y)^{-1}$, $y''=\varepsilon\sin y(\varepsilon\cos y-1)^{-3}$; 3) $y'=$ $=x^{-1}y(y^2-3x^2)(x^2-3y^2)^{-1}$, $y''=12x^{-2}y(x^2+y^2)^2(x^2-y^2)(x^2-3y^2)^{-3}$; 4) $y'=x(y^2-2x)\big(y(2y^2-x)\big)^{-1}$, $y''=\big(y^2-6x^2+y(2x+1)y'+(x-$ $-6y^2)y'^2\big)\big(y(2y^2-x)\big)^{-1}$; 5) $y'=x(a^2-2(x^2+y^2))\big(y(a^2+2(x^2+y^2))\big)^{-1}$, $y''=-\big(4xyy'+(a^2+2(x^2+3y^2))y'^2\big)\big(y(a^2+2(x^2+y^2))\big)^{-1}$; 6) $y'=$ $=(x+y)(x-y)^{-1}$, $y''=2(x^2+y^2)(x-y)^{-3}$; 7) $y'=(e^y+ye^x-ye^{xy})(xe^{xy}-$ $-e^x-xe^y)^{-1}$, $y''=y'(2e^x+2e^y-2(1+xy)e^{xy}-x(xe^{xy}-e^y)y')(xe^{xy}-$ $-e^x-xe^y)^{-1}$. **2.41.** 1) $y_1'=x_2y(x_1x_2+e^y)^{-1}$, $y_2'=x_1y(x_1x_2+e^y)^{-1}$; 2) $y_1'=y_2'=(e^y-1)^{-1}$; 3) $y_1'=-(x_2+y)(x_1+2x_2y)^{-1}$, $y_2'=-(x_1+$ $+y^2)(x_1+2x_2y)^{-1}$; 4) $y_1'=y(x_1+y)^{-1}$, $y_2'=y^2(x_1+y)^{-1}$; 5) $y_1'=y_2'=-1$; 6) $y_1'=(2-x_1)(1+y)^{-1}$, $y_2'=2x_2(1+y)^{-1}$; 7) $y_1'=x_2y(y^2-x_1x_2)^{-1}$, $y_2'=x_1y(y^2-x_1x_2)^{-1}$; 8) $y_1'=-x_1y^{-1}$, $y_2'=-x_2y^{-1}$; 9) $y_1'=(\cos x_2-$ $-y\sin x_1)(x_2\sin y-\cos x_1)^{-1}$, $y_2'=(\cos y-x_1\sin x_2)(x_2\sin y-\cos x_1)^{-1}$. **2.44.** 1) -2; 2) -1. **2.45.** 1) $8/9$; 2) $4/5$; 3) 1; 4) 0; 5) 4; 6) 0; 7) 0; 8) -7; 9) 1; 10) $-4/3$. **2.46.** 1) $f_1'=(x-f_2)(f_2-f_1)^{-1}$, $f_2'=(f_1-x)(f_2-f_1)^{-1}$; 2) $f_1''=-1/4$, $f_2''=1/4$. **2.47.** 1) $f(x_1,x_2)=$ $=\frac{1}{2}x_1(3x_2-x_1^2)$, $2x_2\geq x_1^2$. 2) $\frac{\partial f}{\partial x_1}=-3y_1y_2$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}=\frac{3}{2}(y_1+y_2)$. **2.48.** $f'=$ $=\frac{\partial(F_1,F_2,F_3)}{\partial(x,y_1,y_2)}\left(\frac{\partial(F_2,F_3)}{\partial(y_1,y_2)}\right)^{-1}$. **2.49.** $f_1'=\frac{\partial F_1}{\partial x_1}$, $f_2'=\frac{\partial F_2}{\partial x_2}+\frac{\partial(F_3,F_1)}{\partial(y_1,y_2)}\left(\frac{\partial(F_2,F_3)}{\partial(y_1,y_2)}\right)^{-1}$. **2.50.** $\frac{\partial y}{\partial x_1}=x_2-\frac{g\big(\sin(x_1+x_2)\big)\cos(x_1+x_2)}{g(x_1x_2-y)}$. **2.51.** 1) $f_1'=2x$, $f_2'=3(x^2-1)$; 2) $f_1'=6x^{-1}\ln x$, $f_2'=\big(x(1+\ln x)\big)^{-1}$; 3) $f_1'=-\big(2\sqrt{-x}\cos^2\sqrt{-x}\big)^{-1}$, $f_2'=-\cos\sqrt{-x}\big(2\sqrt{-x}\big)^{-1}$; 4) $f_1'=(\cos^2 x-f_1^2)(2f_2-1)^{-1}\cos^{-2}x$, $f_2'=$ $=\big(f_2(\cos^2 x+f_1^2)-f_1^2\big)\big(f_1(2f_2-1)\cos^2 x\big)^{-1}$; 5) $f_1'=f_2e^{-f_2}\sin x\cdot(f_1^2-$ $f_2)^{-1}$, $f_2'=f_1e^{-f_2}\sin x\cdot(f_2-f_1^2)^{-1}$; 6) $f_1'=2(f_2^2-x^2)(2f_2-x)^{-1}$,

$f_2' = (f_2 - 2x)(2f_2 - x)^{-1}$; 7) $f_1' = 4x(5f_1)^{-1}$, $f_2' = x(5f_2)^{-1}$; 8) $f_1' = (2x\sin f_2 + \cos f_2)(\cos f_1 \cos f_2 - \sin f_1 \sin f_2)^{-1}$, $f_2' = (2x\cos f_1 + \sin f_1) \times (\sin f_1 \sin f_2 - \cos f_1 \cos f_2)^{-1}$; 9) $f_1' = \big(xf_1 + f_2(1+xf_1)^{-1}\big)\Delta^{-1}$, $f_2' = \big(xf_2 + f_1(xf_2-1)^{-1}\big)\Delta^{-1}$, де $\Delta = x^2 + \big((1+xf_1)(xf_2-1)\big)^{-1}$; 10) $f_1' = (xf_1 - f_2^2 - f_1f_2)\Delta^{-1}$, $f_2' = (f_1^2 - xf_2 + f_1f_2)\Delta^{-1}$, де $\Delta = (f_2 - f_1)(x + f_1 + f_2)$. **2.52.** 1) $f_1''(x^0) = 26/45$, $f_2''(x^0) = 4/3$; 2) $f_1''(x^0) = -4/5$, $f_2''(x^0) = 4/5$; 3) $f_1''(x^0) = -2$, $f_2''(x^0) = 0$; 4) $f_1''(x^0) = 2$, $f_2''(x^0) = 12$; 5) $f_1''(x^0) = -46/9$, $f_2''(x^0) = 34/9$; 6) $f_1''(x^0) = -4/\sqrt{5}$, $f_2''(x^0) = -1/\sqrt{5}$; 7) $f_1''(x^0) = f_2''(x^0) = -2/3$. **2.53.** 1) $f = \frac{1}{4}(x_1^2 - x_2^2)$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $f_1' = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$, $f_2' = \frac{1}{2}(y_2 - y_1)$; 2) $f = x_2(x_1+1)(2x_1+1)^{-1}$, $x_1 \neq -1/2$, $f_1' = y_2^2(y_2 - y_1)(2y_1 + y_2)^{-2}$, $f_2' = (y_1 + y_2)(2y_1 + y_2)^{-1}$; 3) $f = x_2^{-2}(x_1^2 - 2x_2)$, $x_2 \neq 0$, $x_1^2 \geq 4x_2$, $f_1' = 2(y_1y_2)^{-2}(y_1 + y_2)$, $f_2' = -2(y_1y_2)^{-3}(y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2)$; 4) $f = 2\operatorname{arctg} x_1^{-1}x_2$, $x_1 \neq 0$, $f_1' = -y_1^{-1}\sin y_2$, $f_2' = -y_1^{-1}\cos y_2$, $y_1 \neq 0$; 5) $f = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$, $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$, $f_1' = -\cos y_1 \sin y_2 (\cos y_2)^{-1}$, $f_2' = -\sin y_1 \sin y_2 (\cos y_2)^{-1}$, $y_2 \neq \pm\frac{\pi}{2}$; 6) $f = x_1(x_1^2 + 3x_2)$, $x_1^2 + 4x_2 \geq 0$, $f_1' = 3(y_1^2 - y_1y_2 + y_2^2)$, $f_2' = 3(y_1 - y_2)$. **2.54.** 1) $df = \frac{1}{4}(x_1^2 - x_2^2)(x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2)$; 2) $df = 2(x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2)$; 3) $df = a^{-1}(x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2)$; 4) $df = 2(x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2)$. **2.55.** 1) $df = e^{-y_1}\big((y_2\cos y_2 - y_1 \sin y_2)\,dx_1 + (y_2 \sin y_2 + y_1\cos y_2)\,dx_2\big)$; 2) $df = (1 + y_1y_2)^{-1}\big(y_2(2y_1+1)\,dx_1 + y_1(y_2 - 2)\,dx_2\big)$; 3) $df = \frac{1}{2}\big(x_1^{-1}\ln x_1\,dx_1 - x_2^{-1}\ln x_2\,dx_2\big)$; 4) $df = 2(4y_1y_2 + 3y_2^2)^{-1}\big((3y_2^3 + 2y_1^2)\,dx_1 + (2y_2^2 - y_1)\,dx_2\big)$; 5) $df = -c{\cdot}\operatorname{ctg} y_1(a^{-1}\sin y_2\,dx_1 + b^{-1}\cos y_2\,dx_2)$, $y_1 \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **2.56.** 1) $y''_{t^2} + y = 0$; 2) $y''_{t^2} + y = 0$; 3) $y''_{t^2} + y = 0$; 4) $y''_{t^2} - y = 0$; 5) $y''_{t^2} + y = 0$; 6) $y''_{t^2} + m^2 y = 0$; 7) $2y''_{t^2} + y'_t = 0$; 8) $y'''_{t^3} + by = 0$. **2.57.** 1) $3x'' + y = 0$; 2) $x'' = y$; 3) $x'' + x = e^y$; 4) $15(x'')^2 + 10x'' + 2 = 0$. **2.58.** 1) $r' = r$. 2) $r' = kr^3$, $\varphi' = -1$. **2.59.** $u'' + (q - \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}p')u = 0$. **2.60.** 1) $z = \varphi(x_1 + x_2)$; 2) $z = \varphi(x_1^2 + x_2^2)$. **2.61.** 1) $r'\sqrt{\sin 2\varphi} = r|\sin\varphi - \cos\varphi|$; 2) $r' = \sqrt[3]{r}(r'\cos\varphi - r\sin\varphi)$; 3) $((r')^2 + r^2)^{3/2} = r^2 + 2(r')^2 - rr''$; 4) $(r'')^2 = r^4 - r^2$. **2.62.** $2r'\varphi' + r\varphi'' = 0$. **2.63.** 1) $z = x_1a^{-1} + \varphi(x_2 - bz)$; 2) $z = x_1\varphi(x_2x_1^{-1})$. **2.64.** 1) $\frac{\partial z}{\partial y_1} + \frac{\partial z}{\partial y_2} = e^{y_1}\operatorname{sh} y_2$; 2) $\frac{\partial z}{\partial y_1} = \frac{\partial z}{\partial y_2}$; 3) $\frac{\partial z}{\partial y_2} = \frac{1}{2}$; 4) $y_2(z^2 - y_1)\frac{\partial z}{\partial y_2} = y_1 z + z^3$; 5) $(2y_1 + y_2 - z)\frac{\partial z}{\partial y_1} + (y_1 + 2y_2 - z)\frac{\partial z}{\partial y_2} = y_1 + y_2 - z$; 6) $y_1 \ln\frac{ey_1}{z}\frac{\partial z}{\partial y_1} + y_2\ln\frac{ey_2}{z}\frac{\partial z}{\partial y_2} = z$; 7) $\left(\frac{\partial z}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y_2}\right)^2 = y_1^2 + y_2^2$; 8) $\frac{\partial z}{\partial y_1} = 0$. **2.65.** 1) $\frac{\partial z}{\partial y_1} = 0$; 2) $\frac{\partial z}{\partial y_1} + \frac{\partial z}{\partial y_2} + \frac{\partial z}{\partial y_3} = -(e^{y_1} + e^{y_2} + e^{y_3} + 3z)$; 3) $\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y_3^2} = 0$; 4) $\frac{\partial z}{\partial y_3} = 0$. **2.66.** $\frac{dy_1}{dx_1} = x$, $\frac{d^2y_1}{dx_1^2} = (f'')^{-1}$, $\frac{d^3y_1}{dx_1^3} = -f'''(f'')^{-3}$. **2.67.** $k = |r^2 + 2(r')^2 - rr''|\big(r^2 + (r')^2\big)^{-3/2}$. **2.68.** 1) $W = r\frac{\partial z}{\partial r}$; 2) $W =$

$= \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + r^{-2}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2$; 3) $W = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + r^{-2}\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} + r^{-1}\frac{\partial z}{\partial r}$; 4) $W = r^2\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}$; 5) $W = \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}$; 6) $W = f''(r)+r^{-1}f'(r)+kf(r)$. **2.69.** 1) $\operatorname{grad} z = \left(\cos\varphi\frac{\partial z}{\partial r} - r^{-1}\sin\varphi\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)\vec{i} + \left(\sin\varphi\frac{\partial z}{\partial r} + r^{-1}\cos\varphi\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)\vec{j}$; 2) $\|\operatorname{grad} z\| = \left(\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + r^{-2} \times \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2\right)^{1/2}$. **2.70.** 1) $(\cos\varphi+2\sin\varphi)\frac{\partial z}{\partial r}+r^{-1}(2\cos\varphi-\sin\varphi)\frac{\partial z}{\partial \varphi}$; 2) $(\sin\varphi - \cos\varphi)\frac{\partial z}{\partial r}+r^{-1}(\cos\varphi+\sin\varphi)\frac{\partial z}{\partial \varphi}$; 3) $\cos\varphi\frac{\partial z}{\partial r} - r^{-1}\sin\varphi\frac{\partial z}{\partial \varphi}$; 4) $\frac{1}{2}\big((\cos\varphi + \sqrt{3}\sin\varphi)\frac{\partial z}{\partial r} + r^{-1}(\sqrt{3}\cos\varphi - \sin\varphi)\frac{\partial z}{\partial \varphi}\big)$; 5) $\frac{1}{\sqrt{2}}\big((\cos\varphi - \sin\varphi)\frac{\partial z}{\partial r} - r^{-1} \times (\cos\varphi + \sin\varphi)\frac{\partial z}{\partial \varphi}\big)$. **2.71.** 1) $\operatorname{div}\vec{f} = \cos\varphi\frac{\partial f_1}{\partial r} - r^{-1}\sin\varphi\frac{\partial f_1}{\partial \varphi} + \sin\varphi\frac{\partial f_2}{\partial r} + r^{-1}\cos\varphi\frac{\partial f_2}{\partial \varphi}$; 2) $W = r^{-1}\left(\frac{\partial f_1}{\partial r}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial \varphi} - \frac{\partial f_2}{\partial r}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial \varphi}\right)$. **2.72.** $z = \varphi(x_1 - ax_2) + \psi(x_1 + ax_2)$, $\{\varphi,\psi\} \subset C^{(2)}(\mathbb{R})$. **2.73.** 1) $\left(1 - \frac{\partial z}{\partial y_2}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y_1\partial y_2} + \frac{\partial z}{\partial y_1}\frac{\partial^2 z}{\partial y_2^2} = 1$; 2) $3\frac{\partial^2 z}{\partial y_1\partial y_2} + \frac{\partial z}{\partial y_1} = 0$; 3) $\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial y_1\partial y_2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y_2^2} = \frac{\partial z}{\partial y_1} + \frac{\partial z}{\partial y_2}$; 4) $\frac{\partial^2 z}{\partial y_1\partial y_2} = 0$; 5) $\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial y_1\partial y_2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y_2^2} = 0$; 6) $2y_1\frac{\partial^2 z}{\partial y_1\partial y_2} = \frac{\partial z}{\partial y_2}$; 7) $2\frac{\partial z}{\partial y_2} = y_1(4 - y_1y_2) \times \frac{\partial^2 z}{\partial y_1\partial y_2}$; 8) $2y_2\frac{\partial z}{\partial y_2} = (y_1^2 + y_2^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2}$; 9) $(y_1^2 - y_2^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y_1\partial y_2} = y_1\frac{\partial z}{\partial y_2} - y_2\frac{\partial z}{\partial y_1}$; 10) $\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y_2^2}+m^2z(y_1^2+y_2^2) = 0$. **2.74.** $2\frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2} = 1$. **2.75.** $\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = 0$. **2.77.** 1) $\frac{\partial^2 w}{\partial y_2^2} = 0$; 2) $2\frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2} = 1$; 3) $\frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y_1\partial y_2} = 2w$; 4) $y_1\frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2} = (y_1 - y_2)\frac{\partial^2 w}{\partial y_2^2}$; 5) $\frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y_2^2} + \left(\frac{\partial w}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y_2}\right)^2 = 0$; 6) $\frac{\partial^2 w}{\partial y_1\partial y_2} = 0$; 7) $\frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2}\cdot\frac{\partial w}{\partial y_2} = 0$. **2.80.** $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1-1)^3+(x_2-1)^3+(x_3-1)^3-3(x_1-1)(x_2-1)(x_3 - 1)+3\big((x_1-1)^2+(x_2-1)^2+(x_3-1)^2-(x_1-1)(x_2-1)-(x_1-1)(x_3-1) - (x_2-1)(x_3-1)\big)$. **2.81.** $f(x_1,x_2) = 1+(x_1-1)+(x_1-1)(x_2-1)+o(\|\vec{x} - \vec{x}^{\,0}\|^2)$, $\vec{x} \to \vec{x}^{\,0}$; $x_1^{x_2} \approx 1 - x_2 + x_1x_2$. **2.82.** 1) $f(x_1,x_2) = x_1 + r(\vec{x})$; 2) $f(x_1,x_2) = 1 + (x_1 - 1) - (x_2 - 1) - (x_1 - 1)(x_2 - 1) + (x_2 - 1)^2 + r(\vec{x})$; 3) $f(x_1,x_2) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}(x_2 - \frac{\pi}{3}) - \frac{\sqrt{3}}{4}\big((x_1 - \frac{\pi}{2})^2 + (x_2 - \frac{\pi}{3})^2\big) + r(\vec{x})$; 4) $f(x_1,x_2) = -1-(x_1-1)+(x_2-2)-(x_1-1)^2+2(x_1-1)(x_2-2)-(x_2-2)^2+r(\vec{x})$; 5) $f(x_1,x_2) = 1+\frac{1}{2}(x_1-2)+\frac{1}{2}(x_2+1)-\frac{1}{8}(x_1-2)^2-\frac{1}{4}(x_1-2)(x_2+1) - \frac{1}{8}(x_2+1)^2 + r(\vec{x})$; 6) $f(x_1,x_2) = 1 + e^{-1}(x_1 - 3e) - 2e^{-1}(x_2 - e) - (2e^2)^{-1}(x_1-3e)^2+2e^{-2}(x_1-3e)(x_2-e)-2e^{-2}(x_2-e)^2+r(\vec{x})$; 7) $f(x_1,x_2) = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}(x_1 - 1) + \frac{1}{2\sqrt{3}}(x_2 - 2) - \frac{1}{6\sqrt{3}}(x_1 - 1)^2 + \frac{2}{3\sqrt{3}}(x_1 - 1)(x_2 - 2) + \frac{1}{3\sqrt{3}}(x_2-2)^2+r(\vec{x})$; 8) $f(x_1,x_2) = 1+2(x_1-\frac{\pi}{4})+2(x_1-\frac{\pi}{4})^2+2x_2^2+r(\vec{x})$; 9) $f(x_1,x_2) = -\pi-(x_1-\pi)+\frac{\pi}{2}(x_1-\pi)^2-\pi(x_1-\pi)(x_2-2\pi)+\frac{\pi}{2}(x_2-2\pi)^2 + r(\vec{x})$; 10) $f(x_1,x_2) = 1-2(x_1-1)+(x_2-1)+3(x_1-1)^2-4(x_1-1)(x_2 -$

$-1)+(x_2-1)^2+r(\vec{x})$, де $r(\vec{x})=o(\|\vec{x}-\vec{x}^{\,0}\|^2)$, $\vec{x}\to\vec{x}^{\,0}$. **2.83.** 1) $1-\frac{x_1^2}{2}+\frac{x_2^2}{2}$; 2) $x_2+x_1x_2-\frac{x_2^2}{2}$; 3) x_1-x_2; 4) $1+x_1x_2$; 5) $1+x_1-x_2-x_1x_2$; 6) $-x_2+\frac{\pi}{2}x_1^2$; 7) $\frac{\pi}{4}+x_1-x_1x_2$; 8) $\frac{\pi}{6}-\frac{1}{\sqrt3}x_1+\frac{1}{2\sqrt3}x_2+\frac{1}{6\sqrt3}x_1^2+\frac{1}{3\sqrt3}x_1x_2-\frac{5}{24\sqrt3}x_2^2$; 9) x_1x_2; 10) $-2x_1x_2$. **2.84.** $\sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{\substack{i_1\ge0,\ldots,i_m\ge0,\\ i_1+\ldots+i_m=k}}(i_1!\,i_2!\ldots i_m!)^{-1}x_1^{i_1}x_2^{i_2}\ldots x_m^{i_m}+$

$$+\sum_{\substack{i_1\ge0,\ldots,i_m\ge0,\\ i_1+\ldots+i_m=n+1}}(i_1!\,i_2!\ldots i_m!)^{-1}\exp(\theta_1x_1+\theta_2x_2+\ldots+\theta_mx_m)x_1^{i_1}x_2^{i_2}\ldots x_m^{i_m},$$

$\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_m\in[0;1]$. **2.85.** $g(h)=8f''_{12}(x_1^0,x_2^0)h^2+\frac{4}{3}(f^{(4)}_{1112}(x_1^0,x_2^0)+$ $+4f^{(4)}_{1222}(x_1^0,x_2^0))h^4+o(h^4)$, $h\to0$. **2.86.** 1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{x_1^kx_2^{2(n-k)+1}}{k!\,(2(n-k)+1)!}$, $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{x_1^kx_2^{2(n-k)}}{k!\,(2(n-k))!}$, $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$; 3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{k}\frac{x_1^{2k}x_2^{2(n-k)}}{(2k)!\,(2(n-k))!}$, $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$; 4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{k}\frac{x_1^{2k+1}x_2^{2(n-k)}}{(2k+1)!\,(2(n-k))!}$, $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$; 5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{k}\frac{x_1^{2k}x_2^{2(n-k)+1}}{(2k)!\,(2(n-k)+1)!}$, $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$; 6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{k}\frac{x_1^{2k+1}x_2^{2(n-k)+1}}{(2k+1)!\,(2(n-k)+1)!}$, $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$; 7) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\times$ $\times\sum\limits_{k=0}^{2n+1}\frac{1}{k!\,(2n+1-k)!}x_1^{2k}x_2^{2(2n+1-k)}$, $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$; 8) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\sum\limits_{k=0}^{2n}(-1)^k\times$ $\times\frac{1}{k!\,(2n-k)!}x_1^{2k}x_2^{2(2n-k)}$, $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$; 9) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^kx_1^kx_2^{n+1-k}$, x_1+ $+x_2>-1$; 10) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)(n-k+1)}x_1^{k+1}x_2^{n-k+1}$, $x_i>-1$, $i=1,2$; 11) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}x_1^kx_2^{n-k}$, $|x_i|<\frac13$, $i=1,2$. **2.87.** $f(x_1,x_2)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!\,(n-k)!}(x_1-$ $-1)^k(x_2+1)^{n-k}$, $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$. **2.88.** $g(r)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\Big(2^{-2n}(n!)^{-2}\times$ $\times\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k\frac{\partial^{2n}f(x_1,x_2)}{\partial x_1^{2k}\partial x_2^{2(n-k)}}\Big)r^{2n}$, $r\in(-r_0;r_0)$, якщо для деякого числа $C>0$ при кожному $n\ge0$ і $k=0,\ldots,n:$ $\left|\frac{\partial^nf(y_1,y_2)}{\partial y_1^k\partial y_2^{n-k}}\right|\le C^n$ у r_0-околі точки (x_1,x_2). **2.89.** $\frac13x_1x_2-\frac16x_1^2x_2+\frac{1}{10}x_1^2x_2^2+\ldots$ **2.90.** Одночлени лише за парними степенями змінних. **2.93.** 1) $z(x_1,x_2)=1+(x_1-1)+\frac14(x_2-1)-\frac18(x_1-1)\times$ $\times(x_2-1)+\frac{9}{64}(x_2-1)^2+r_2(x_1,x_2)$; 2) $z(x_1,x_2)=1+(x_1-1)-(x_2-1)+$

$+(x_1-1)^2-4(x_1-1)(x_2-1)+3(x_2-1)^2+r_2(x_1,x_2)$; 3) $z(x_1,x_2)=$ $=-1-(x_1-1)+\frac{1}{2}(x_2-1)+(x_1-1)^2-\frac{5}{4}(x_1-1)(x_2-1)+\frac{3}{8}(x_2-1)^2+r_2(x_1,x_2)$; 4) $z(x_1,x_2)=1-\frac{1}{4}(x_1-1)+\frac{1}{2}(x_2-1)+\frac{1}{64}(x_1-1)^2+\frac{1}{16}(x_1-1)(x_2-1)-$ $-\frac{3}{16}(x_2-1)^2+r_2(x_1,x_2)$; 5) $z(x_1,x_2)=1+\frac{8}{5}(x_1-1)-\frac{3}{5}(x_2-1)+$ $+\frac{308}{125}(x_1-1)^2-\frac{256}{125}(x_1-1)(x_2-1)+\frac{123}{125}(x_2-1)^2+r_2(x_1,x_2)$; 6) $z(x_1,x_2)=$ $=-1-\frac{1}{4}(x_2-1)+\frac{1}{16}(x_1-1)(x_2-1)+\frac{3}{64}(x_2-1)^2+r_2(x_1,x_2)$; 7) $z(x_1,x_2)=$ $=1+\frac{3}{4}(x_1-1)+\frac{3}{4}(x_2-1)-\frac{11}{64}(x_1-1)^2+\frac{5}{32}(x_1-1)(x_2-1)-\frac{11}{64}(x_2-1)^2+$ $+r_2(x_1,x_2)$; 8) $z(x_1,x_2)=-1-\frac{\pi}{4}(x_1-1)-\frac{\pi}{4}(x_2-1)+\frac{3\pi^2}{32}(x_1-1)^2+$ $+\frac{\pi}{4}\left(\frac{3\pi}{4}-1\right)(x_1-1)(x_2-1)+\frac{3\pi^2}{32}(x_2-1)^2+r_2(x_1,x_2)$; 9) $z(x_1,x_2)=1+\frac{3}{4}(x_1-$ $-1)-\frac{11}{64}(x_1-1)^2+\frac{1}{16}(x_1-1)(x_2-1)+r_2(x_1,x_2)$; 10) $z(x_1,x_2)=1+\frac{1}{4}(x_1-$ $-1)+(x_2-1)-\frac{7}{64}(x_1-1)^2+\frac{3}{8}(x_1-1)(x_2-1)-\frac{1}{4}(x_2-1)^2+r_2(x_1,x_2)$. **2.94.** 1) $\operatorname{loc\,min} f=f(1,0)=-1$; 2) $\operatorname{loc\,min} f=f(0,0)=0$; 3) $\operatorname{loc\,min} f=$ $=f\left(-\frac{1}{26},-\frac{3}{26}\right)=-26e^{-\frac{1}{52}}$, $\operatorname{loc\,max} f=f(1,3)=e^{-13}$; 4) $\operatorname{loc\,min} f=$ $=f(0,1)=0$; 5) $\operatorname{loc\,min} f=f(x,x+1)=0,\ x\in\mathbb{R}$; 6) $\operatorname{loc\,min} f=$ $=f(1,1)=-1$; 7) $\operatorname{loc\,min} f=f(\frac{1}{2},1,1)=4$; 8) $\operatorname{loc\,min} f=f\left(\frac{1}{\sqrt{2e}},\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)=$

$=f\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}},-\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)=-\frac{1}{2e}$, $\operatorname{loc\,max} f=f\left(\frac{1}{\sqrt{2e}},-\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)=f\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}},\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)=\frac{1}{2e}$. **2.98.** $\operatorname{loc\,min} f=f\left(\frac{5\pi}{12}+\pi(m+n),-\frac{7\pi}{12}+\pi(m-n)\right)=-2-\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}+2\pi m$, $\operatorname{loc\,max} f=f\left(\frac{7\pi}{12}+\pi(m+n),\frac{7\pi}{12}+\pi(m-n)\right)=2+\sqrt{3}+\frac{7\pi}{6}+2\pi m$, $\{m,n\}\subset\mathbb{Z}$. **2.99.** Не має. **2.102.** 1) $\operatorname{loc\,min} f=f(-1,-1)=f(1,1)=-2$; 2) $\operatorname{loc\,min} f=f(0,y)=0,\ y\in(0;6)$, $\operatorname{loc\,max} f=f(2,3)=108$, $\operatorname{loc\,max} f=$ $=f(0,y)=0,\ y\in(-\infty;0)\cup(6;+\infty)$, 3) $\operatorname{loc\,min} f=f(x_1,x_2)=-\frac{9}{8}$, де $|x_1|=\frac{1}{2}$, $|x_2|=1$; 4) $\operatorname{loc\,max} f=f(\frac{1}{3},\frac{1}{3})=\frac{1}{27}$; 5) $\operatorname{loc\,min} f=f(3,3)=0$; 6) $\operatorname{loc\,min} f=f\left(\frac{\sqrt{3}a}{2},-\frac{3a}{2}\right)=-\frac{3\sqrt{3}a^3}{4}$, $\operatorname{loc\,max} f=f\left(-\frac{\sqrt{3}a}{2},-\frac{3a}{2}\right)=$ $=\frac{3\sqrt{3}a^3}{4}$; 7) $\operatorname{loc\,min} f=f(1,-1)=-12$; 8) $\operatorname{loc\,min} f=f\left(\frac{17}{2},-\frac{11}{2}\right)=$ $=-\frac{81}{4}$; 9) $\operatorname{loc\,min} f=f(\sqrt{2},-\sqrt{2})=f(-\sqrt{2},\sqrt{2})=-8$; 10) $\operatorname{loc\,min} f=$ $=f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{4}$. **2.103.** 1) $\operatorname{loc\,min} f=f(5,2)=30$; 2) $\operatorname{loc\,min} f=f\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},\sqrt{3}\right)=f\left(\frac{2}{\sqrt{3}},-\sqrt{3}\right)=-\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\operatorname{loc\,max} f=$ $=f\left(\frac{2}{\sqrt{3}},\sqrt{3}\right)=f\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},-\sqrt{3}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}$; 3) $\operatorname{loc\,max} f=f(0,0)=1$; 4) $\operatorname{loc\,min} f=f(0,0)=0$, $\operatorname{loc\,max} f=f(x_1,x_2)=e^{-1}$ при $x_1^2+x_2^2=1$; 5) $\operatorname{loc\,max} f=f\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$; 6) $\operatorname{loc\,min} f=f\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{8}$, $\operatorname{loc\,max} f=f\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{8}$, 7) $\operatorname{loc\,min} f=f(1,2)=7-10\ln 2$; 8) $\operatorname{loc\,min} f=f(0,0)=0$; 9) функція не має локальних екстремумів;

10) $\operatorname{loc\,min} f = f\left(\frac{1}{2}, -1\right) = -\frac{1}{2e}$. **2.104.** 1) $\operatorname{loc\,min} f = f(-1, -2, 3) = -14$; 2) $\operatorname{loc\,min} f = f(24, -144, -1) = -6913$; 3) $\operatorname{loc\,max} f = f(\frac{a}{7}, \frac{a}{7}, \frac{a}{7}) = \left(\frac{a}{7}\right)^7$; 4) $\operatorname{loc\,min} f = f\left(2^{-11/15}, 2^{-6/5}, 2^{-17/15}\right) = \frac{15}{4} \cdot 2^{-4/15}$; 5) $\operatorname{loc\,max} f = f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 4$; 6) $\operatorname{loc\,max} f = f(a, a, a) = a^4$; 7) $\operatorname{loc\,min} f = f\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -1\right) = -\frac{4}{3}$; 8) $\operatorname{loc\,min} f = f(x, x, x) = 3$, де $x > 0$; 9) $\operatorname{loc\,min} f = f(x, x, x) = \frac{3}{2}$, де $x > 0$; 10) $\operatorname{loc\,max} f = f\left(\frac{a}{2A}, \frac{b}{2A}, \frac{c}{2A}\right) = A\sqrt{e}$, де $A = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}}$. **2.107.** 1) Паралелепіпед з вимірами $\frac{4}{3}R$, $\frac{4}{3}R$, $\frac{1}{3}H$, де R – радіус основи, H – висота конуса. 2) $x_1 = \frac{ma}{m+n+p}$, $x_2 = \frac{na}{m+n+p}$, $x_3 = \frac{pa}{m+n+p}$. 3) $4 \times 4 \times 2$. 4) Куб зі стороною $\frac{r}{\sqrt{3}}$. 5) $R = H = d + \sqrt[3]{\pi^{-1}V}$. 6) $\left(\frac{21}{13}, 2, \frac{63}{26}\right)$. 7) a^3. 8) $6x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 18$. **2.108.** 1) $\operatorname{loc\,max} f = f\left(\frac{1}{11}, \frac{1}{11}, \frac{1}{11}, \frac{1}{11}\right) = \frac{1}{11^{11}}$; 2) $\operatorname{loc\,min} f = f(2^{1/5}, 2^{2/5}, 2^{3/5}, 2^{4/5}) = 5 \cdot 2^{1/5}$; 3) функція не має локальних екстремумів; 4) $\operatorname{loc\,max} f = f\left(\frac{4}{11}, \frac{3}{22}, \frac{2}{33}, \frac{1}{44}\right) = 96 \cdot 11^{-11}$; 5) $\operatorname{loc\,max} f = f\left(\frac{1}{11}, \frac{1}{11}, \frac{1}{11}, \frac{1}{11}\right) = 11^{-11}$; 6) $\operatorname{loc\,max} f = f\left(\frac{1}{11}, \frac{1}{22}, \frac{1}{33}, \frac{1}{44}\right) = 2^{-10}3^{-3}11^{-11}$; 7) функція не має локальних екстремумів; 8) $\operatorname{loc\,max} f = f\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{2}{e}}$; 9) $\operatorname{loc\,min} f = f\left(3^{4/5}, 3^{3/5}, 3^{2/5}, 3^{1/5}\right) = 5 \cdot 3^{1/5}$; 10) $\operatorname{loc\,max} f = f\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right) = \sqrt{\frac{2}{e}}$.

2.109. 1) У точці $\left(-\frac{b_1}{2c_{11}}, -\frac{b_2}{2c_{22}}, \ldots, -\frac{b_m}{2c_{mm}}\right)$: строгий локальний максимум $a + \frac{1}{4}\sum\limits_{i=1}^{m} b_i^2$ при $c_{11} = \ldots = c_{mm} = -1$, строгий локальний мінімум $a - \frac{1}{4}\sum\limits_{i=1}^{m} b_i^2$ при $c_{11} = \ldots = c_{mm} = 1$, в інших випадках функція не має локальних екстремумів; 2) $\operatorname{loc\,min} f = f(\vec{x}^{\,0})$, де $\vec{x}^{\,0} = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ – єдиний розв'язок системи рівнянь $\alpha^j x_1 + \alpha^{2j} x_2 + \ldots + \alpha^{mj} x_m = -\frac{b_j}{2}$, $j = 1, 2, \ldots, m$, з визначником $\Delta_m = \alpha^{\frac{1}{6}m(m+1)(m+2)}(\alpha - 1)^{m-1}(\alpha^2 - 1)^{m-2} \times \times \ldots (\alpha^{m-1} - 1) > 0$; 3) при $m = 1$ $\operatorname{loc\,max} f = f\left(-\frac{b_1}{2c_{11}}\right) = a - \frac{b_1^2}{4c_{11}}$, при $m \geq 2$ функція не має локальних екстремумів. **2.110.** $\operatorname{loc\,max} f = f(1, 1, \ldots, 1) = e^{-m}$. **2.111.** $\operatorname{loc\,max} f = f\left(\frac{1}{\sqrt{2m}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{2m}}\right) = \sqrt{\frac{m}{2e}}$. **2.112.** $\operatorname{loc\,min} z = -\frac{a}{2\sqrt{2}}$ при $x_1^2 + x_2^2 = \frac{3a^2}{8}$, $z < 0$; $\operatorname{loc\,max} z = \frac{a}{2\sqrt{2}}$ при $x_1^2 + x_2^2 = \frac{3a^2}{8}$, $z > 0$. **2.113.** $\operatorname{loc\,min} z = z\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$. **2.114.** 1) $\operatorname{loc\,min} z = z(-1, 1) = -3$, $z < -1$; $\operatorname{loc\,max} z = z(-1, 1) = 1$, $z > -1$; 2) $\operatorname{loc\,min} z = z(1, -1) = -2$, $z < 2$; $\operatorname{loc\,max} z = z(1, -1) = 6$, $z > 2$;

3) $\operatorname{loc\,min} z = z(-3-\sqrt{6}, -3-\sqrt{6}) = -4-2\sqrt{6}$, $\operatorname{loc\,max} z = z(-3+\sqrt{6}, -3+\sqrt{6}) = -4+2\sqrt{6}$; 4) $\operatorname{loc\,min} z = z(-2,0) = 1$, $\operatorname{loc\,max} z = z(\frac{16}{7},0) = -\frac{8}{7}$; 5) $\operatorname{loc\,min} z = z(-1,-1) = -4$, $\operatorname{loc\,max} z = z(1,1) = 4$; 6) $\operatorname{loc\,min} z = z\big(-\frac{16}{7},0\big) = \frac{8}{7}$, $\operatorname{loc\,max} z = z(2,0) = -1$; 7) $\operatorname{loc\,min} z = z(-6, 6\sqrt{3}) = 12\sqrt{3}$, $\operatorname{loc\,max} z = z(-6,-6\sqrt{3}) = -12\sqrt{3}$; 8) $\operatorname{loc\,min} z = z(-\frac{\sqrt{6}+1}{3}, \frac{2}{3}) = \frac{2}{3}+\frac{1}{\sqrt{6}}$, $\operatorname{loc\,max} z = z(\frac{\sqrt{6}-1}{3}, \frac{2}{3}) = \frac{2}{3}-\frac{1}{\sqrt{6}}$; 9) $\operatorname{loc\,min} z = z(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = -1$, $z < \frac{2}{3}$; $\operatorname{loc\,max} z = z(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = \frac{7}{3}$, $z > \frac{2}{3}$; 10) $\operatorname{loc\,min} z = z(\pm a, \pm a) = -a\sqrt{\sqrt{3}+1}$, $z < 0$; $\operatorname{loc\,max} z = z(\pm a, \pm a) = a\sqrt{\sqrt{3}+1}$, $z > 0$. **2.115.** $a = (\overline{xy} - \bar{x}\cdot\bar{y})\cdot\Delta^{-1}$, $b = (\overline{x^2}\cdot\bar{y} - \bar{x}\cdot\overline{xy})\cdot\Delta^{-1}$, де $\Delta = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 \neq 0$, $\bar{x} = n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, $\bar{y} = n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n} y_i$, $\overline{x^2} = n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$, $\overline{xy} = n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$. **2.116.** $2(\overline{xy} - \bar{x}\bar{y})\cos 2\alpha = \big(\bar{x}^2 - \overline{x^2} - \bar{y}^2 + \overline{y^2}\big)\sin 2\alpha$, $p = \bar{x}\cos\alpha + \bar{y}\sin\alpha$, де $\bar{x} = n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, $\bar{y} = n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n} y_i$, $\overline{x^2} = n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$, $\overline{y^2} = n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2$, $\overline{xy} = n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$. **2.117.** $g(x) = 4x - \frac{7}{2}$. **2.118.** $x_k = aq^k$, $k = 1,2,\ldots,m$, де $q = \sqrt[m+1]{a^{-1}b}$. **2.119.** $x_j = M^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_j(i)$, $j = 1,2$, $M = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i$. **2.120.** Нехай $x_j(i_1) < x_j(i_2) < \ldots < x_j(i_n)$, $j = 1,2$. Тоді $x_j = x_j(i_k)$ при $n = 2k-1$, $k \geq 1$; $x_j \in [x_j(i_k); x_j(i_k+1)]$ при $n = 2k$, $k \geq 1$, $j = 1,2$. **2.121.** 1) $\vec{f}(A) = [0;1]^2$, $\vec{f} \in C(A)$, не бієкція; 2) а) $\vec{f}(A) = \{(y_1,y_2)|\, 1 \leq y_1^2 + y_2^2 \leq 4, y_1 \leq 0, y_2 \geq 0\}$, $\vec{f} \in C(A)$, бієкція; б) $\vec{f}(A) = \{(y_1,y_2)|\, 1 \leq y_1^2 + y_2^2 \leq 4\}$, $\vec{f} \in C(A)$, не бієкція; 3) $\vec{f}(A) = [0;1]\times[-1;0]$, $\vec{f} \in C(A)$, бієкція; 4) $\vec{f}(A) = \{(y_1,y_2)|\, 0 \leq y_1 + y_2 \leq 2, 0 \leq y_1 - y_2 \leq 2\}$, $\vec{f} \in C(A)$, бієкція; 5) а) $\vec{f}(A) = \{(y_1,y_2)|\, 1 \leq y_1^2 + y_2^2 \leq e^2, y_2 \geq 0\}$, $\vec{f} \in C(A)$, бієкція; б) $\vec{f}(A) = \{(y_1,y_2)|\, 1 \leq y_1^2 + y_2^2 \leq e^2\}$, $\vec{f} \in C(A)$, не бієкція; 6) $\vec{f}(A) = [\frac{1}{4};1]\times\{0\}$, $\vec{f} \in C(A)$, бієкція; 7) $\vec{f}(A) = \{(y_1,y_2)|\, y_1^2 - y_2^2 = 4, 2 \leq y_1 \leq \frac{17}{4}, y_2 \geq 0\}$, $\vec{f} \in C(A)$, бієкція; 8) $\vec{f}(A) = \{(y_1,y_2)|\, 2(y_1 - y_2) = (y_1+y_2)^2,\ 0 \leq y_1 \leq 272,\ y_1 + y_2 \geq 0\}$, $\vec{f} \in C(A)$, бієкція; 9) $\vec{f}(A) = \{(y_1,y_2)|\, (y_1-1)^2 + 4y_2^2 \leq 1,\ (2y_1-1)^2 + 16y_2^2 \geq 1,\ 4y_1^2 + (4y_2-1)^2 \geq 1,\ y_2 \geq 0\}$, $\vec{f} \in C(A)$, бієкція; 10) $\vec{f}(A) = \{(y_1,y_2)|\ y_2^2 - 4 \leq 4y_1 \leq 4 - y_2^2,\ y_2 \in [0;2]\}$, $\vec{f} \in C(A)$, бієкція; 11) $\vec{f}(A) = \big(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\big)\times(-\infty;4\ln 2)$, $\vec{f} \in C(A)$, бієкція; 12) $\vec{f}(A) = \{(y_1,y_2)|\ 0 \leq y_1+y_2 \leq 2,\ 0 \leq y_2-y_1 \leq 4\}$, $\vec{f} \in C(A)$, бієкція; 13) $\vec{f}(A) = [0;1]\times[2;3]$,

$\vec{f} \in C(A)$, не бієкція; 14) $\vec{f}(A) = \{(y_1, y_2)|\ 0 \le y_1 + y_2 \le 4, 0 \le y_1 - y_2 \le 2\}$, $\vec{f} \in C(A)$, бієкція; 15) $\vec{f}(A) = [-\sqrt{3}; 1] \times [-1; 1]$, $\vec{f} \in C(A)$, не бієкція. **2.122.** 1) $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -1$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0$, $f'(\vec{x}^0)\vec{a} = (-a_1, 0)$; 2) $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 2$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -2$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 1$, $f'(\vec{x}^0)\vec{a} = (2a_1 + a_2, -2a_1 + a_2)$; 3) $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -5$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0$, $f'(\vec{x}^0)\vec{a} = (-5a_2, -5a_1)$; 4) $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = $ $= \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 2$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -2$, $f'(\vec{x}^0)\vec{a} = (2a_1 + 2a_2, 2a_1 - 2a_2)$; 5) $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 14$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -2$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 2$, $f'(\vec{x}^0)\vec{a} = (14a_1 + 14a_2, -2a_1 + 2a_2)$; 6) $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 2$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = $ $= \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 2$, $f'(\vec{x}^0)\vec{a} = (2a_1, 2a_2)$; 7) $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -2$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -2$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -1$, $f'(\vec{x}^0)\vec{a} = (-2a_1 + a_2, -2a_1 - a_2)$; 8) $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -1$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 1$, $f'(\vec{x}^0)\vec{a} = (-a_1 - a_2, a_1 + a_2)$; 9) $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{1}{8}$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{16}$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -\frac{1}{4}$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{1}{8}$, $f'(\vec{x}^0)\vec{a} = (\frac{1}{8}a_1 - \frac{1}{16}a_2, -\frac{1}{4}a_1 + \frac{1}{8}a_2)$; 10) $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = $ $= \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 1$, $f'(\vec{x}^0)\vec{a} = (0, a_2)$, де $\vec{a} = (a_1, a_2)$. **2.123.** 1) $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 1$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 4$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_3} = \frac{\partial f_3}{\partial x_1} = \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = 0$, $\frac{\partial f_3}{\partial x_3} = -1$, $f'(\vec{x}^0)\vec{a} = (a_1, 4a_2, -a_3)$; 2) $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -1$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{1}{2}$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_3} = \frac{\partial f_3}{\partial x_1} = \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = 0$, $\frac{\partial f_3}{\partial x_3} = 1$, $f'(\vec{x}^0)\vec{a} = (-a_1, \frac{1}{2}a_2, a_3)$; 3) $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -1$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 1$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_3} = \frac{\partial f_3}{\partial x_1} = \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = 0$, $\frac{\partial f_3}{\partial x_3} = -1$, $f'(\vec{x}^0)\vec{a} = (-a_1, a_2, -a_3)$; 4) $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 2\ln 2$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 2$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_3} = 0$, $\frac{\partial f_3}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial f_3}{\partial x_2} = 0$, $\frac{\partial f_3}{\partial x_3} = 1$, $f'(\vec{x}^0)\vec{a} = ((2\ln 2)a_1, 2a_2, a_3)$; 5) $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 2$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_3} = \frac{\partial f_3}{\partial x_1} = \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = 0$, $\frac{\partial f_3}{\partial x_3} = 1$, $f'(\vec{x}^0)\vec{a} = (\frac{2}{\sqrt{3}}a_1, 2a_2, a_3)$; 6) $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_3} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = \frac{\partial f_3}{\partial x_1} = 1$, $\frac{\partial f_3}{\partial x_2} = 0$, $\frac{\partial f_3}{\partial x_3} = 1$, $f'(\vec{x}^0)\vec{a} = (a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_1 + a_3)$; 7) $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 1$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -1$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_3} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 1$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_3} = \frac{\partial f_3}{\partial x_1} = -1$, $\frac{\partial f_3}{\partial x_2} = 0$, $\frac{\partial f_3}{\partial x_3} = 1$, $f'(\vec{x}^0)\vec{a} = (a_1 - a_2, a_2 - a_3, -a_1 + a_3)$; 8) $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{1}{2}$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -1$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_3} = \frac{\partial f_3}{\partial x_1} = \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = 0$, $\frac{\partial f_3}{\partial x_3} = 1$, $f'(\vec{x}^0)\vec{a} = (\frac{1}{2}a_1, -a_2, a_3)$; 9) $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -\pi$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_3} = 0$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -\pi$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = \frac{\partial f_3}{\partial x_1} = \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = 0$, $\frac{\partial f_3}{\partial x_3} = 1$, $f'(\vec{x}^0)\vec{a} = (-\pi a_2, -\pi a_1, a_3)$; 10) $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 1$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 1$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_3} = \frac{\partial f_3}{\partial x_1} = \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = 0$, $\frac{\partial f_3}{\partial x_3} = 1$, $f'(\vec{x}^0)\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, де $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$. **2.124.** 1) а) $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 1$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 1$, $f'(\vec{x}^0)\vec{a} = (a_1, a_2)$; б) $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 1$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{2}{3}$, $f'(\vec{x}^0)\vec{a} = (a_1, \frac{2}{3}a_2)$; $J = 2x_2$; вироджується в точках $(x_1, 0)$, $x_1 \in \mathbb{R}$; 2) а) $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{1}{2}$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{1}{4}$, $f'(\vec{x}^0)\vec{a} =$

$= (\frac{1}{2}a_1 - \frac{\sqrt{3}}{4}a_2, \frac{\sqrt{3}}{2}a_1 + \frac{1}{4}a_2)$; б) $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -1$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 1$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0$, $f'(\vec{x}^0)\vec{a} = (-a_2, a_1)$; $J = x_1$; вироджується в точках $(0, x_2)$, $x_2 \in \mathbb{R}$; 3) а) $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 1$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -1$, $f'(\vec{x}^0)\vec{a} = (a_1, -a_2)$; б) $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 1$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -1$, $f'(\vec{x}^0)\vec{a} = (a_1, -a_2)$; $J = -1$; не вироджується; 4) а) $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 1$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -1$, $f'(\vec{x}^0)\vec{a} = (a_1 + a_2, a_1 - a_2)$; б) $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 1$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -1$, $f'(\vec{x}^0)\vec{a} = (a_1 + a_2, a_1 - a_2)$; $J = -2$; не вироджується; 5) а) $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\sqrt{e}}{2}$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -\frac{\sqrt{3e}}{2}$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{\sqrt{3e}}{2}$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{\sqrt{e}}{2}$, $f'(\vec{x}^0)\vec{a} = (\frac{\sqrt{e}}{2}a_1 - \frac{\sqrt{3e}}{2}a_2, \frac{\sqrt{3e}}{2}a_1 + \frac{\sqrt{e}}{2}a_2)$; б) $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -e$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = e$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0$, $f'(\vec{x}^0)\vec{a} = (-ea_2, ea_1)$; $J = e^{x_1}$; не вироджується. **2.125.** 1) $J = r$, вироджується в точках $(0, \varphi)$, $\varphi \in \mathbb{R}$; 2) $J = 6r\cos^2\varphi\sin^2\varphi$, вироджується в точках $(0, \varphi)$, $\varphi \in \mathbb{R}$; $(r, \frac{k\pi}{2})$, $r \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $J = 8r\cos^3\varphi\sin^3\varphi$, вироджується в точках $(0, \varphi)$, $\varphi \in \mathbb{R}$; $(r, \frac{k\pi}{2})$, $r \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$; 4) $J = 4r^2\cos^3\psi\sin\psi$, вироджується в точках $(0, \varphi, \psi)$, $(\varphi, \psi) \in [0; 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$; (r, φ, ψ), $r > 0$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, $\psi \in \{0, \pm\frac{\pi}{2}\}$; 5) $J = 8r^2\cos\varphi\sin\varphi\cos\psi$, вироджується в точках $(0, \varphi, \psi)$, $(\varphi, \psi) \in [0; 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$; (r, φ, ψ), $r > 0$, $\varphi \in \{\frac{k\pi}{2} | \, k = 0, 1, 2, 3, 4\}$, або $\psi \in \{\pm\frac{\pi}{2}\}$; 6) $J = \frac{1}{2}r^2\cos^{-\frac{1}{2}}\varphi\sin^{-\frac{1}{2}}\varphi\sin^{-\frac{1}{2}}\psi$, вироджується в точках $(0, \varphi, \psi)$, $\varphi, \psi \in (0; \frac{\pi}{2})$; 7) $J = 2r\psi$, вироджується в точках $(0, \varphi, \psi)$, $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$; $(r, \varphi, 0)$, $r, \varphi \in \mathbb{R}$; 8) $J = \frac{1}{3}r\psi^{-\frac{2}{3}}$, вироджується в точках $(0, \varphi, \psi)$, $\varphi \in \mathbb{R}$, $\psi \neq 0$; 9) $J = 2r^2\cos^{-\frac{2}{3}}\varphi\sin^{-\frac{2}{3}}\varphi\cos\psi$, вироджується в точках $(0, \varphi, \psi)$, $\varphi \in (0; \frac{\pi}{2})$, $|\psi| \leq \frac{\pi}{2}$; $(r, \varphi, \pm\frac{\pi}{2})$, $r > 0$, $\varphi \in (0; \frac{\pi}{2})$; 10) $J = \frac{2}{3}r^2\cos^{-\frac{1}{3}}\psi\sin^{-\frac{2}{3}}\psi$, вироджується в точках $(0, \varphi, \psi)$, $(\varphi, \psi) \in [0; 2\pi] \times (0; \frac{\pi}{2})$; 11) $J = \frac{1}{2}\sqrt{r}\cos\psi$, вироджується в точках (r, φ, ψ), $r > 0$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, $\psi \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$. **2.126.** $\frac{\partial f_1}{\partial r} = \cos\varphi$, $\frac{\partial f_1}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi$, $\frac{\partial f_1}{\partial \psi} = 0$, $\frac{\partial f_2}{\partial r} = \sin\varphi$, $\frac{\partial f_2}{\partial \varphi} = r\cos\varphi$, $\frac{\partial f_2}{\partial \psi} = 0$, $\frac{\partial f_3}{\partial r} = 0$, $\frac{\partial f_3}{\partial \varphi} = 0$, $\frac{\partial f_3}{\partial \psi} = 1$; $\frac{\partial g_1}{\partial x_1} = \cos x_3$, $\frac{\partial g_1}{\partial x_2} = 0$, $\frac{\partial g_1}{\partial x_3} = -x_1\sin x_3$, $\frac{\partial g_2}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial g_2}{\partial x_2} = \cos x_3$, $\frac{\partial g_2}{\partial x_3} = -x_2\sin x_3$, $\frac{\partial g_3}{\partial x_1} = x_1(x_1^2 + x_2^2)^{-\frac{1}{2}}\sin x_3$, $\frac{\partial g_3}{\partial x_2} = x_2(x_1^2 + x_2^2)^{-\frac{1}{2}}\sin x_3$, $\frac{\partial g_3}{\partial x_3} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\cos x_3$; $\frac{\partial h_1}{\partial r} = \cos\varphi\cos\psi$, $\frac{\partial h_1}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi\cos\psi$, $\frac{\partial h_1}{\partial \psi} = -r\cos\varphi\sin\psi$, $\frac{\partial h_2}{\partial r} = \sin\varphi \times \cos\psi$, $\frac{\partial h_2}{\partial \varphi} = r\cos\varphi\cos\psi$, $\frac{\partial h_2}{\partial \psi} = -r\sin\varphi\sin\psi$, $\frac{\partial h_3}{\partial r} = \sin\psi$, $\frac{\partial h_3}{\partial \varphi} = 0$, $\frac{\partial h_3}{\partial \psi} = r\cos\psi$; $\frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(r, \varphi, \psi)} = r$, $\frac{\partial(g_1, g_2, g_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\cos x_3$, $\frac{\partial(h_1, h_2, h_3)}{\partial(r, \varphi, \psi)} = r^2\cos\psi$. **2.128.** $\vec{h}(x_1, x_2) = \big((x_1 - x_2)^3, (x_1 - x_2)(x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2)\big)$; $\frac{\partial(h_1, h_2)}{\partial(x_1, x_2)} = 18(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)^3$. **2.129.** $f_2^2 = f_1 + 2f_3$. **2.130.** 1) $\vec{f}\big(\{(c, x_2) | \, x_2 \in \mathbb{R}\}\big) = \{(y_1, y_2) | \, y_1^2 + y_2^2 = e^{2c}\}$, $\vec{f}\big(\{(x_1, c) | \, x_1 \in \mathbb{R}\}\big) = \{(t\cos c, t\sin c) |$

$t > 0\}$, $c \in \mathbb{R}$; 2) $\vec{f}\big(\{(c, x_2) | \, x_2 \in \mathbb{R}\}\big) = \vec{f}\big(\{(x_1, c) | \, x_1 \in \mathbb{R}\}\big) = \{(y_1, y_2) | \, (y_1 - y_2)^2 = 8c^2(y_1 + y_2 - 2c^2), \, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0\}$, $c \in \mathbb{R}$; 3) $\vec{f}\big(\{(c, x_2) | \, x_2 \in \in \mathbb{R}\}\big) = \{(y_1, y_2) | \, c(y_1^2 + y_2^2) = 4y_1\}$, $\vec{f}\big(\{(x_1, c) | \, x_1 \in \mathbb{R}\}\big) = \{(y_1, y_2) | \, c(y_1^2 + +y_2^2) = 4y_2\}$, $c \in \mathbb{R}$. **2.131.** $\vec{f}(A) = A$, $\det f' \neq 0$ на A, $\vec{g}(y_1, y_2) = \big(y_1, \frac{y_2}{2y_1}\big)$, $(y_1, y_2) \in A$. **2.132.** 1) $\vec{f}(A) = A$, $\det f' \neq 0$ на A, $\vec{g}(y_1, y_2) = \big(\frac{y_1 + 2y_2}{3}, \frac{y_1 - y_2}{3}\big)$, $(y_1, y_2) \in A$; 2) $\vec{f}(A) = [-\frac{9}{4}; 0] \times \mathbb{R}$, $\det f' = 0$ на $\{\frac{1}{2}\} \times \mathbb{R}$, $\vec{f}$ не є взаємно однозначним на A. **2.133.** 1) $\vec{f}(A) = \mathbb{R}^2$; 4) $\vec{g}(y_1, y_2) = = \left(\sqrt{y_1^2 + y_2^2}, \arccos \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}\right)$; 5) $(f_1)'_1 = \cos x_2$, $(f_1)'_2 = -x_1 \sin x_2$, $(f_2)'_1 = \sin x_2$, $(f_2)'_2 = x_1 \cos x_2$, $(f')^{-1}_{11} = \cos x_2$, $(f')^{-1}_{12} = \sin x_2$, $(f')^{-1}_{21} = = -x_1^{-1} \sin x_2$, $(f')^{-1}_{22} = x_1^{-1} \cos x_2$, $(g_1)'_1 = \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}$, $(g_1)'_2 = \frac{y_2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}$, $(g_2)'_1 = -\frac{y_2}{y_1^2 + y_2^2}$, $(g_2)'_2 = \frac{y_1}{y_1^2 + y_2^2}$. **2.134.** 1) $\vec{f}(A) = \{(y_1, y_2) | \, 2y_1 \geq y_2^2\}$; 2) $\vec{f}^{-1}(y_1, y_2) = \frac{1}{2}\big(\sqrt{2y_1 - y_2^2} + y_2, \sqrt{2y_1 - y_2^2} - y_2\big)$, $2y_1 \geq y_2^2$. **2.135.** $|x_2^0| < < 2$; $y'_1 = 1$, $y'_2 = x_2(x_1 - y)^{-1}$. **2.136.** $\vec{f}(A) = \mathbb{R}^m$, $\vec{g}(\vec{0}) = \vec{0}$, $\vec{g}(\vec{y}) = \|\vec{y}\|^{-1} \times \times (\sqrt{1 + \|\vec{y}\|^2} - 1)\vec{y}$, $\vec{y} \neq \vec{0}$. **2.137.** $f'_1 = (4y_2 + 1)(3 - 2y_2)^{-1}$, $f'_2 = 7(3 - 2y_2)^{-1}$, $2y_2 \neq 3$. **2.139.** 1) $\vec{f}^{-1}(y_1, y_2) = (\frac{1}{2} \ln(y_1^2 + y_2^2), \, g_2(y_1, y_2))$, де $g_2(y_1, y_2) = = \arccos(y_1(y_1^2 + y_2^2)^{-1/2})$ при $y_2 \geq 0$, $g_2(y_1, y_2) = 2\pi - \arccos(y_1(y_1^2 + + y_2^2)^{-1/2})$ при $y_2 \leq 0$; $y_1^2 + y_2^2 > 0$; взаємно однозначне; 2) $\vec{f}^{-1}(y_1, y_2) = = \frac{1}{2}(y_1 + \sqrt{y_2}, y_1 - \sqrt{y_2})$, $y_2 \geq 0$; взаємно однозначне; 3) $\vec{f}^{-1}(y_1, y_2) = = \big(-\sqrt{\frac{y_1}{y_2}}, -\sqrt{y_1 y_2}\big)$; взаємно однозначне. **2.140.** 1) $\vec{g}(y_1, y_2) = \frac{1}{2}(-y_1 + + \sqrt{y_1^2 - 4y_2}, -y_1 - \sqrt{y_1^2 - 4y_2})$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = x_2$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = x_1$, $(\vec{f}\,')^{-1}_{11} = \frac{x_1}{x_1 - x_2}$, $(\vec{f}\,')^{-1}_{12} = \frac{1}{x_2 - x_1}$, $(\vec{f}\,')^{-1}_{21} = \frac{x_2}{x_2 - x_1}$, $(\vec{f}\,')^{-1}_{22} = \frac{1}{x_1 - x_2}$, $\frac{\partial g_1}{\partial y_1} = = \frac{1}{2}\left(\frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 - 4y_2}} - 1\right)$, $\frac{\partial g_1}{\partial y_2} = -\frac{1}{\sqrt{y_1^2 - 4y_2}}$, $\frac{\partial g_2}{\partial y_1} = -\frac{1}{2}\left(\frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 - 4y_2}} + 1\right)$, $\frac{\partial g_2}{\partial y_2} = = \frac{1}{\sqrt{y_1^2 - 4y_2}}$; 2) $\vec{g}(y_1, y_2) = (y_1, -\sqrt{y_2 - y_1^2})$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 1$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 2x_1$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 2x_2$, $(\vec{f}\,')^{-1}_{11} = 1$, $(\vec{f}\,')^{-1}_{12} = 0$, $(\vec{f}\,')^{-1}_{21} = -\frac{x_1}{x_2}$, $(\vec{f}\,')^{-1}_{22} = \frac{1}{2x_2}$, $\frac{\partial g_1}{\partial y_1} = 1$, $\frac{\partial g_1}{\partial y_2} = 0$, $\frac{\partial g_2}{\partial y_1} = \frac{y_1}{\sqrt{y_2 - y_1^2}}$, $\frac{\partial g_2}{\partial y_2} = -\frac{1}{2\sqrt{y_2 - y_1^2}}$; 3) $\vec{g}(y_1, y_2) = (\sqrt[3]{y_1 - y_2}, y_2)$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 3x_1^2$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 1$, $(\vec{f}\,')^{-1}_{11} = (3x_1^2)^{-1}$, $(\vec{f}\,')^{-1}_{12} = = -(3x_1^2)^{-1}$, $(\vec{f}\,')^{-1}_{21} = 0$, $(\vec{f}\,')^{-1}_{22} = 1$, $\frac{\partial g_1}{\partial y_1} = \frac{1}{3}(y_1 - y_2)^{-2/3}$, $\frac{\partial g_1}{\partial y_2} = -\frac{1}{3}(y_1 - - y_2)^{-2/3}$, $\frac{\partial g_2}{\partial y_1} = 0$, $\frac{\partial g_2}{\partial y_2} = 1$; 4) $\vec{g}(y_1, y_2) = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{y_1} + \sqrt{y_2}, \sqrt[3]{y_1} - \sqrt{y_2})$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 3(x_1 + x_2)^2$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 2(x_1 - x_2)$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 2(x_2 - x_1)$, $(\vec{f}\,')^{-1}_{11} = = (\vec{f}\,')^{-1}_{21} = \frac{1}{6}(x_1 + x_2)^{-2}$, $(\vec{f}\,')^{-1}_{12} = \frac{1}{4}(x_1 - x_2)^{-1}$, $(\vec{f}\,')^{-1}_{22} = -\frac{1}{4}(x_1 - x_2)^{-1}$,

$\frac{\partial g_1}{\partial y_1} = \frac{\partial g_2}{\partial y_1} = \frac{1}{6}y_1^{-2/3}$, $\frac{\partial g_1}{\partial y_2} = \frac{1}{4}y_2^{-1/2}$, $\frac{\partial g_2}{\partial y_2} = -\frac{1}{4}y_2^{-1/2}$; 5) $\vec{g}(y_1, y_2) = (y_1, \arcsin y_2 - y_1)$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 1$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \cos(x_1 + x_2)$, $(\vec{f}\,')^{-1}_{11} = 1$, $(\vec{f}\,')^{-1}_{12} = 0$, $(\vec{f}\,')^{-1}_{21} = -1$, $(\vec{f}\,')^{-1}_{22} = \cos^{-1}(x_1 + x_2)$, $\frac{\partial g_1}{\partial y_1} = 1$, $\frac{\partial g_1}{\partial y_2} = 0$, $\frac{\partial g_2}{\partial y_1} = -1$, $\frac{\partial g_2}{\partial y_2} = (1 - y_2^2)^{-1/2}$; 6) $\vec{g}(y_1, y_2) = (\operatorname{arctg} y_1 - y_2, y_2)$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \cos^{-2}(x_1 + x_2)$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 1$, $(\vec{f}\,')^{-1}_{11} = \cos^2(x_1 + x_2)$, $(\vec{f}\,')^{-1}_{12} = -1$, $(\vec{f}\,')^{-1}_{21} = 0$, $(\vec{f}\,')^{-1}_{22} = 1$, $\frac{\partial g_1}{\partial y_1} = (1 + y_1^2)^{-1}$, $\frac{\partial g_1}{\partial y_2} = -1$, $\frac{\partial g_2}{\partial y_1} = 0$, $\frac{\partial g_2}{\partial y_2} = 1$; 7) $\vec{g}(y_1, y_2) = (y_1, y_1^{-1}\ln y_2)$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 1$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = x_2 e^{x_1 x_2}$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = x_1 e^{x_1 x_2}$, $(\vec{f}\,')^{-1}_{11} = 1$, $(\vec{f}\,')^{-1}_{12} = 0$, $(\vec{f}\,')^{-1}_{21} = -x_1^{-1}x_2$, $(\vec{f}\,')^{-1}_{22} = x_1^{-1}e^{-x_1 x_2}$, $\frac{\partial g_1}{\partial y_1} = 1$, $\frac{\partial g_1}{\partial y_2} = 0$, $\frac{\partial g_2}{\partial y_1} = -y_1^{-2}\ln y_2$, $\frac{\partial g_2}{\partial y_2} = (y_1 y_2)^{-1}$; 8) $\vec{g}(y_1, y_2) = (y_2^{-1}e^{y_1}, y_2)$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = x_1^{-1}$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = x_2^{-1}$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 1$, $(\vec{f}\,')^{-1}_{11} = x_1$, $(\vec{f}\,')^{-1}_{12} = -x_1 x_2^{-1}$, $(\vec{f}\,')^{-1}_{21} = 0$, $(\vec{f}\,')^{-1}_{22} = 1$, $\frac{\partial g_1}{\partial y_1} = y_2^{-1}e^{y_1}$, $\frac{\partial g_1}{\partial y_2} = -y_2^{-2}e^{y_1}$, $\frac{\partial g_2}{\partial y_1} = 0$, $\frac{\partial g_2}{\partial y_2} = 1$; 9) $\vec{g}(y_1, y_2) = (\sqrt{y_1}, \operatorname{tg} y_2 - \sqrt{y_1})$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 2x_1$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = (1 + (x_1 + x_2)^2)^{-1}$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = (1 + (x_1 + x_2)^2)^{-1}$, $(\vec{f}\,')^{-1}_{11} = (2x_1)^{-1}$, $(\vec{f}\,')^{-1}_{12} = -(2x_1)^{-1}$, $(\vec{f}\,')^{-1}_{21} = 0$, $(\vec{f}\,')^{-1}_{22} = 1 + (x_1 + x_2)^2$, $\frac{\partial g_1}{\partial y_1} = \frac{1}{2\sqrt{y_1}}$, $\frac{\partial g_1}{\partial y_2} = 0$, $\frac{\partial g_2}{\partial y_1} = -\frac{1}{2\sqrt{y_1}}$, $\frac{\partial g_2}{\partial y_2} = \cos^{-2} y_2$; 10) $\vec{g}(y_1, y_2) = (\sqrt{y_1}, \sqrt{y_2 - y_1})$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 2x_1$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 2x_1$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 2x_2$, $(\vec{f}\,')^{-1}_{11} = (2x_1)^{-1}$, $(\vec{f}\,')^{-1}_{12} = 0$, $(\vec{f}\,')^{-1}_{21} = -(2x_2)^{-1}$, $(\vec{f}\,')^{-1}_{22} = (2x_2)^{-1}$, $\frac{\partial g_1}{\partial y_1} = \frac{1}{2\sqrt{y_1}}$, $\frac{\partial g_1}{\partial y_2} = 0$, $\frac{\partial g_2}{\partial y_1} = -\frac{1}{2\sqrt{y_2 - y_1}}$, $\frac{\partial g_2}{\partial y_2} = \frac{1}{2\sqrt{y_2 - y_1}}$. **2.141.** 1) $\det \vec{f}'(\vec{x}^{\,0}) = -12$, $\det \vec{g}\,'(\vec{f}(\vec{x}^{\,0})) = -\frac{1}{12}$; 2) $\det \vec{f}'(\vec{x}^{\,0}) = 6^5 11^{-5/2}$, $\det \vec{g}\,'(\vec{f}(\vec{x}^{\,0})) = 11^{5/2}6^{-5}$; 3) $\det \vec{f}'(\vec{x}^{\,0}) = \frac{5a}{\sqrt{a^2 - 5\sqrt{3}a + 25}}$, $\det \vec{g}\,' = \frac{\sqrt{a^2 - 5\sqrt{3}a + 25}}{5a}$; 4) $\det \vec{f}'(\vec{x}^{\,0}) = -\frac{3}{8}$, $\det \vec{g}\,'(\vec{f}(\vec{x}^{\,0})) = -\frac{8}{3}$. **2.142.** $y_1' = \frac{x_1}{x_2 + y}$, $y_2' = -\frac{4x_2}{x_2 + y}$, $x_2 + y \neq 0$. **2.143.** 1) $\operatorname{loc\,min} f = f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = f(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{loc\,max} f = f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2}$; 2) $\operatorname{loc\,min} f = f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}) = -\frac{1}{8}$; 3) $\operatorname{loc\,min} f = f\big(\frac{ab^2}{a^2 + b^2}, \frac{a^2 b}{a^2 + b^2}\big) = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$; 4) $\operatorname{loc\,min} f = f(2, -3) = f(-2, 3) = -50$, $\operatorname{loc\,max} f = f(\frac{3}{2}, 4) = f(-\frac{3}{2}, -4) = \frac{425}{4}$; 5) $\operatorname{loc\,min} f = f\big(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3} - 2}{4\sqrt{3}}\big) = \frac{1}{4} + \sqrt{3}$, $\operatorname{loc\,max} f = f\big(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3} + 2}{4\sqrt{3}}\big) = \frac{1}{4} - \sqrt{3}$. **2.144.** 1) $\operatorname{loc\,max} f = f\big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\big) = \sqrt[4]{e}$; 2) $\operatorname{loc\,min} f = f(a, a) = 2a^{-1}$; 3) $\operatorname{loc\,max} f = f\big(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\big) = \frac{\pi}{6}$; 4) $\operatorname{loc\,min} f = f\big(\frac{5\pi}{8} + n\pi, \frac{3\pi}{8} + n\pi\big) = 1 - 2^{-1/2}$, $\operatorname{loc\,max} f = f\big(\frac{\pi}{8} + n\pi, -\frac{\pi}{8} + n\pi\big) = 1 + 2^{-1/2}$; 5) $\operatorname{loc\,min} f = f\big(-\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\big) = -\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{ab}$, $\operatorname{loc\,max} f = f\big(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\big) =$

$= \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$; 6) $\operatorname{loc\,min} f = f\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{3}{2} + \frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{3}{2} + \frac{\pi}{4} + n\pi\right) = \frac{1}{2}(5 - \sqrt{13})$, $\operatorname{loc\,max} f = f\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2}{3} + n\pi, -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2}{3} + n\pi\right) = \frac{1}{2}(5+\sqrt{13})$, $n \in \mathbb{Z}$. **2.145.** 1) $\operatorname{loc\,min} f = f(0, x_2, x_3) = 0$, $3x_2 + 4x_3 = 0$, $x_2 > 0$, $\operatorname{loc\,min} f = f(x_1, x_2, 0) = 0$, $2x_1 + 3x_2 = 0$, $x_2 > 0$, $\operatorname{loc\,max} f = f(0, x_2, x_3) = 0$, $3x_2 + 4x_3 = 0$, $x_2 < 0$, $\operatorname{loc\,max} f = f(x_1, x_2, 0) = 0$, $2x_1 + 3x_2 = 0$, $x_2 < 0$; 2) $\operatorname{loc\,min} f = f(\sqrt{a}d, \sqrt{b}d, \sqrt{c}d) = d^2$, де $d = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$; 3) $\operatorname{loc\,max} f = f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{8}$; 4) $\operatorname{loc\,min} f = f(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}) = -3$, $\operatorname{loc\,max} f = f(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = 3$; 5) $\operatorname{loc\,max} f = f(km, kn, kp) = k^{m+n+p}m^m n^n p^p$, де $k = a(m+n+p)^{-1}$; 6) $\operatorname{loc\,min} f = f(0, 0, \pm c) = c^2$, $\operatorname{loc\,max} f = f(\pm a, 0, 0) = a^2$; 7) $\operatorname{loc\,max} f = f(\frac{a}{6}, \frac{a}{6}, \frac{a}{6}) = (\frac{a}{6})^6$;
8) $\operatorname{loc\,max} f = f(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{8}$; 9) $\operatorname{loc\,min} f = f(-1, -1, -1) = f(-1, 1, 1) = f(1, -1, 1) = f(1, 1, -1) = -1$, $\operatorname{loc\,max} f = f(1, 1, 1) = f(1, -1, -1) = f(-1, 1, -1) = f(-1, -1, 1) = 1$. **2.146.** 1) $\operatorname{loc\,min} f = f(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}) = f(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}) = f(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}) = -\frac{1}{3\sqrt{6}}$;
$\operatorname{loc\,max} f = f(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}) = f(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}) = f(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}) = \frac{1}{3\sqrt{6}}$; 2) $\operatorname{loc\,max} f = f\left(-\frac{1}{\sqrt{11}}, -\frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}}, -\frac{1}{\sqrt{11}}\right) = 3$, $\operatorname{loc\,min} f = f\left(-\frac{36}{\sqrt{1474}}, \frac{13}{\sqrt{1474}}, \frac{3}{\sqrt{1474}}\right) = f\left(\frac{36}{\sqrt{1474}}, -\frac{13}{\sqrt{1474}}, -\frac{3}{\sqrt{1474}}\right) = \frac{80}{67}$;
3) $\operatorname{loc\,max} f = f(\pm\vec{x}_1) = \lambda_1$, $\operatorname{loc\,min} f = f(\pm\vec{x}_2) = \lambda_2$, де $\lambda_1 > \lambda_2$ – розв'язки квадратного рівняння $\left((A - \lambda E)^{-1}\vec{m}, \vec{m}\right) = 0$, A – матриця квадратичної форми $f(x_1, x_2, x_3) = f(\vec{x}) = (A\vec{x}, \vec{x})$, E – одинична матриця, $\vec{m} = (m_1, m_2, m_3)$, $\vec{x}_i = \|(A - \lambda_i E)^{-1}\vec{m}\|^{-1}(A - \lambda_i E)^{-1}\vec{m}$, $i = 1, 2$;
4) $\operatorname{loc\,min} f = f(2, 2, 1) = 4$; $\operatorname{loc\,max} f = f\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right) = \frac{112}{27}$; 5) $\operatorname{loc\,max} f = f(1, 1, 1) = 2$; 6) $\operatorname{loc\,min} f = f(0, 0, 0) = 0$. **2.147.** $\min f = f(\vec{x}^{\,0}) = a^2\|\vec{a}\|^{-2}$, $\vec{x}^{\,0} = a\|\vec{a}\|^{-2}\vec{a}$, $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$. **2.148.** $\max f = f(\frac{a}{m}, \frac{a}{m}, \ldots, \frac{a}{m}) = \left(\frac{a}{m}\right)^m$. **2.149.** $\min f = f(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}) = \left(\frac{a}{2}\right)^n$. **2.150.** $\min f = f(\frac{a}{m}, \frac{a}{m}, \ldots, \frac{a}{m}) = a^2 m^{-1}$. **2.151.** $\min f = f(\frac{a}{m}, \frac{a}{m}, \ldots, \frac{a}{m}) = a^p m^{1-p}$.
2.152. $\min f = f\Big(A\big(\sum\limits_{i=1}^{m} a_i^q\big)^{-1}\vec{a}^{\,q-1}\Big) = A\big(\sum\limits_{i=1}^{m} a_i^q\big)^{-1/q}$, де $\vec{a}^{\,q-1} = (a_1^{q-1}, a_2^{q-1}, \ldots, a_m^{q-1})$. **2.153.** 1) $\operatorname{loc\,min} f = f(\pm\vec{e}\,') = \lambda_1$, $\operatorname{loc\,max} f = f(\pm\vec{e}\,'') = \lambda_k$, де λ_1, λ_k відповідно найменше і найбільше з власних значень матриці A, яким відповідають власні вектори $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k$, $\vec{e}\,'$, $\vec{e}\,''$ – відповідні їм власні вектори: 2) **2.154.** 1) $\max f = f(-3, 4) = 125$, $\min f = f(3, -4) = -75$;
2) $\max f = f(1, 0) = -2$, $\min f = f(0, 1) = -5$; 3) $\max f = f(\pm 1, 0) = f(0, \pm 1) = 1$, $\min f = f(0, 0) = 0$; 4) $\max f = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) = 1 + \sqrt{2}$, $\min f = f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$. **2.155.** $\max f = f(1, 0, \ldots, 0) = e^{-1}$, $\min f = f(0, 0, \ldots, 0) = 0$. **2.156.** $\sqrt[3]{2V}$, $\sqrt[3]{2V}$, $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$. **2.157.** Радіус $\sqrt{\frac{S}{3}}$, довжи-

на $2\sqrt{\frac{S}{3}}$. **2.158.** 1) $\max f = f(0,1) = f(1,1) = 17$, $\min f = f(0,0) = f(1,0) = -4$; 2) $\max f = f(4,0) = 36$, $\min f = f(0,4) = -12$; 3) $\max f = f(\pm a, 0) = a^2$, $\min f = f(0, \pm b) = b^2$; 4) $\min f = f(0,0) = 0$, $\max f = f\big(\pm\sqrt{\frac{3}{5}}, \pm\frac{2}{\sqrt{15}}\big) = 2e^{-13/15}$; 5) $\max f = f\big(1, \frac{4}{3}\big) = \frac{2}{9}$, $\min f = f(x_1, x_2) = 0$, $(x_1, x_2) \in \partial A$; 6) $\max f = f(2,0) = 2$, $\min f = f(1,0) = f(t^2, t) = 0$, $t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$; 7) $\max f = f(0,0) = 1$, $\min f = 0$ при $x_1^2 + x_2^2 = 1$; 8) $\max f = f(\pm 2, 0) = 4$, $\min f = f(0, \pm 2) = -4$; 9) $\max f = f(1,2) = 17$, $\min f = f(1,0) = -3$; 10) $\max f = f\big(\frac{1}{2}, 1\big) = \frac{5}{8}$, $\min f = f(4,2) = -64$. **2.159.** 1) $\frac{2}{27}R^2H$; 2) рівнобедрений; 3) $\frac{\sqrt{5}}{12}\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{\pi}}S^{3/2}$; 4) $\sqrt[3]{9(3+\sqrt{5})\pi V^2}$; 5) $\frac{S}{6}\sqrt{\frac{S}{2\pi}}$; 6) $\big(\frac{21}{13}, -2, \frac{63}{26}\big)$; 7) круг діаметра L; 8) $\frac{4}{\sqrt{5}}$; 9) $r_1 = r_2 = r_3 = \pi^{-1}l$; 10) $\big(1-\sqrt{3}, -\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}\big)$. **2.160.** 1) $2, 3$; 2) рівносторонній зі стороною $\sqrt{3}R$; 3) рівносторонній зі стороною $\frac{2}{3}p$; 4) вершина піраміди проектується в центр кола, вписаного в основу; мінімальна площа бічної поверхні $p\sqrt{r^2+h^2}$, $2p = a+b+c$, r – радіус кола, вписаного в основу; 5) $\frac{1}{3}\big(\vec{x}^{(1)} + \vec{x}^{(2)} + \vec{x}^{(3)}\big)$; 6) квадрат зі стороною $\sqrt{2}R$; 7) $\sqrt{3}$; 8) $(0,6; 1,2)$; 9) $\big(-\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{3}{\sqrt{5}}\big)$, $\big(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\big)$; 10) $\big(-9, -\frac{1}{8}, -\frac{3}{8}\big)$, $\big(9, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}\big)$.

Розділ 3. Невласні інтеграли. Інтеграли, що залежать від параметра

3.1. 1) $\frac{1}{2}$; 2) π. **3.2.** 1) $(b-1)^{-1}a^{1-b}$, $b > 1$; при $b \le 1$ інтеграл розбігається; 2) π; 3) $\frac{2}{3}\ln 2$; 4) -1; 5) $\frac{\pi}{8}$. **3.3.** 1) 1; 2) $n!$. **3.4.** 1) $\frac{a}{a^2+b^2}$; 2) $\frac{b}{a^2+b^2}$. **3.5.** 1) $-\frac{\pi}{2}\ln 2$; 2) $-\frac{\pi}{2}\ln 2$; 3) π при $n = 1$, $\frac{(2n-3)!!}{2(n-1)!!}\pi$ при $n \ge 2$; 4) $0,3$. **3.6.** 1) $\frac{1}{18}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$; 4) $\frac{15}{4}$; 5) $\frac{\pi}{8}$; 6) $\frac{1}{4374}$; 7) $\frac{13}{3}$; 8) $\frac{1}{2}\ln\frac{5}{3}$; 9) $\frac{1}{4}$; 10) $\frac{14\sqrt{2}}{3}$. **3.7.** 1) $\frac{8}{3}$; 2) $\frac{4}{3}$; 3) $0,9$; 4) 3; 5) $-0,25$; 6) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 7) $-0,75$; 8) $\frac{4}{3}$; 9) $\frac{28}{3}$; 10) $\frac{5}{\sqrt[5]{8}}$. **3.8.** 1) 2; 2) 3; 3) 4; 4) 1; 5) $\frac{2\pi}{3}$; 6) $\frac{\pi}{2}$; 7) 2; 8) 3; 9) π; 10) π. **3.9.** 1) Збігається; 2) збігається при всіх $a \in \mathbb{R}$; 3) збігається; 4) збігається при всіх $a \in \mathbb{R}$; 5) збігається при всіх $a \in \mathbb{R}$; 6) збігається; 7) збігається; 8) збігається; 9) збігається; 10) розбігається; 11) збігається; 12) розбігається; 13) збігається; 14) збігається; 15) збігається; 16) збігається лише при $a > -1$; 17) збігається; 18) розбігається; 19) збігається; 20) збігається лише при $a > 1$, $b < 1$; 21) збігається лише при $-2 < a < b-1$. **3.13.** 1) Збігається при $p_i < 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i > 1$; 2) збігається; 3) збігається лише при $a > 4$.

3.14. Збігається. **3.15.** 1) Збігається при $a < 1$; 2) збігається при $a > -1$, $b > -1$; 3) збігається при $a > -1$; 4) збігається; 5) збігається; 6) збігається; 7) збігається; 8) збігається; 9) збігається; 10) розбігається. **3.16.** 1) Збігається; 2) збігається; 3) збігається; 4) збігається; 5) розбігається; 6) розбігається. **3.17.** 1) Збігається при $a > -1$; 2) збігається при $a > -1$, $b > -1$, $a + b < -1$; 3) збігається при $a < 1$; 4) збігається при $a \in (1; 3)$; 5) Збігається; 6) збігається у кожному з трьох випадків: (i) $a < -1$; (ii) $a \geq -1$, $b > 0$, $c \leq 0$; (iii) $a \geq -1$, $c > 0$, $c(1 + a) < b$; 7) збігається у кожному з двох випадків: (i) $a \geq 0$, $b > 1$; (ii) $a < 0$, $b > a + 1$; 8) збігається при $a < 0$, $b < -1$; 9) збігається при $a > 1$, $b < 1$; 10) збігається у кожному з двох випадків: (i) $a < -1$, $b \leq 0$; (ii) $2(a + 1) < b$, $b > 0$. **3.20.** Збігається абсолютно лише при $a < -1$. **3.21.** 1) Збігається умовно; 2) збігається абсолютно; 3) збігається умовно; 4) збігається умовно; 5) розбігається; 6) збігається умовно; 7) збігається абсолютно; 8) збігається умовно. **3.24.** Ні. **3.29.** 1) $\ln \frac{a}{b}$; 2) 0; 3) 0; 4) $2 \ln \frac{a}{b}$. **3.30.** Збігається умовно. **3.31.** Ні. Напр., для $f(x) = x^{2/3} \sin x^3$, $x \geq 0$, $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\, dx$ збігається, а $\int\limits_0^{+\infty} f^3(x)\, dx$ розбігається. **3.32.** 1) Збігається умовно; 2) збігається умовно; 3) збігається умовно. **3.33.** 1) 1; 2) $\frac{8}{3}$; 3) $\frac{\pi}{4}$. **3.34.** $I \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. **3.35.** 1) $I \in C(\mathbb{R})$; 2) $I \in C(\mathbb{R})$; 3) $I \in C((0; +\infty))$; 4) $I \in C((0; +\infty))$; 5) $I \in C(\mathbb{R})$; 6) $I \in C([-4; 4])$; 7) $I \in C((0; \frac{\pi}{4}))$; 8) $I \in C((0; +\infty))$; 9) $I \in C(\mathbb{R})$; 10) $I \in C(\mathbb{R})$; 11) $I \in C(\mathbb{R})$; 12) $I \in C([0; 1])$. **3.36.** 0. **3.38.** $I'_+(0) = \pi/2 \neq 0 = \int\limits_0^1 f'_2(x, 0)\, dx$. **3.39.** Ні. **3.40.** $\ln \frac{4}{3}$. **3.43.** 1) $I''(\alpha) = 2f(\alpha)$, $\alpha \in (a; b)$; $I''(\alpha) = 0$, $\alpha \notin [a; b]$. 2) $f(\alpha) - 2f(\alpha + h) + f(\alpha + 2h)$. **3.47.** $\frac{\pi}{2} \ln(1 + \sqrt{2})$. **3.48.** 1) $\ln \frac{a+1}{b+1}$; 2) $\operatorname{arctg}(b + 1) - \operatorname{arctg}(a + 1)$; 3) $\frac{1}{2} \ln \frac{b^2+2b+2}{a^2+2a+2}$. **3.49.** **3.50.** $(n - 1)! f(\alpha)$. **3.51.** 1) $\pi \ln \frac{|a|+|b|}{2}$; 2) 0, $|\alpha| \leq 1$; $2\pi \ln |\alpha|$, $|\alpha| > 1$; 3) $\frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \alpha \ln(1 + |\alpha|)$. **3.52.** 1) Збігається нерівномірно на M_1, збігається рівномірно на M_2; 2) збігається нерівномірно на M_1, збігається рівномірно на M_2. **3.61.** 1) Збігається рівномірно; 2) збігається рівномірно; 3) збігається рівномірно. **3.66.** $\ln \frac{b}{a}$. **3.67.** $2 \ln 2$. **3.68.** Ні. **3.76.** 1) $\frac{1}{2} \ln \frac{b}{a}$; 2) $\frac{\pi}{2} \ln \frac{a}{b}$; 3) $\frac{\pi}{4} \ln \frac{a}{b}$; 4) $\frac{\pi}{2} \ln \frac{b}{a}$; 5) $\ln \frac{b}{a}$; 6) $\ln \frac{b}{a}$; 7) $\frac{\pi}{2} \ln \frac{a}{b}$. **3.77.** 1) $\frac{\pi}{2}|\alpha|$; 2) $\frac{\pi}{2}|\alpha|$; 3) $\sqrt{\alpha\pi}$; 4) $\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{31/2}$; 5) $\sqrt{\pi}(\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha})$. **3.78.** $\frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|}$. **3.79.** $I_1 = I_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$. **3.80.** 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\sqrt{\pi}$. **3.81.** $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp(-\frac{\alpha^2}{4})$. **3.82.** 1) $\frac{\pi}{2}(|\beta| - |\alpha|)$; 2) $\ln(1 + \alpha)$; 3) $\alpha^{-(n+1)} n!$; 4) $(2\alpha)^{-n} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} (2n - 1)!!$; 5) $\frac{1}{2}(\ln(1 + \beta^2) - \ln(1 + \alpha^2))$;

6) $(-\alpha-1)^{-n-1}n!$; 7) $\frac{\pi|\beta|}{2}-\sqrt{\pi\alpha}$; 8) $\frac{3}{8}\pi\alpha|\alpha|$. **3.83.** 1) $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-2\alpha}$; 2) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right|$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}\alpha$; 5) $\frac{3}{8}\ln\frac{\alpha}{\beta}$; 6) $\frac{1}{2}(3\ln\delta-\ln\alpha\beta\gamma)$; 7) $\frac{3}{4}\sqrt[4]{\pi^2 e}$; 8) $\frac{1}{2}\sqrt[4]{\pi^2 e}$. **3.84.** $\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}$. **3.85.** 1) $\frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$. 2) 1. **3.86.** $\frac{3\pi}{512}$. **3.87.** 1) $\frac{\pi}{8}$; 2) $\pi\left(\alpha\sin\frac{\pi}{\alpha}\right)^{-1}$. **3.88.** 1) $\mathrm{B}(\alpha,\beta)$, $\alpha>0$, $\beta>0$; 2) $\pi\left(|\beta|\sin\frac{\pi\alpha}{\beta}\right)^{-1}$, $\beta\neq 0$, $0<\frac{\alpha}{\beta}<1$. **3.91.** $\frac{a}{n}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2n}\right)$. **3.93.** 1) $\beta^{-1}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)$, $\alpha>-1$; 2) $\Gamma(\alpha+1)$, $\alpha>-1$; 3) $\Gamma(\alpha-1)$, $\alpha>1$; 4) $(\ln 2)^{-\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)$, $\alpha>-1$; 5) $\frac{1}{3}(\ln 3)^{-\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)$, $\alpha>-1$; 6) $\frac{1}{2}\Gamma(\frac{\alpha+1}{4})$, $\alpha>-1$; 7) $(2e)^{-1}\Gamma(\alpha+ +1)$, $\alpha>-1$; 8) $\Gamma(\alpha+1)$, $\alpha>-1$; 9) $2\Gamma(2(\alpha+1))$, $\alpha>-1$. **3.95.** 1) $\frac{1}{2}\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})\Gamma(2-\frac{\alpha+1}{2})$, $-1<\alpha<3$; 2) $2^{\frac{2}{\alpha}-1}\pi(\alpha 3^{\frac{2}{\alpha}}\sin\frac{2\pi}{\alpha})^{-1}$, $\alpha>2$; 3) $(2^{\alpha+1}(\alpha+1)(\alpha+2))^{-1}$, $\alpha>-1$; 4) $(18\cdot 4^{\alpha}(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3))^{-1}$, $\alpha>-1$; 5) $\frac{1}{16}\pi a^4$; 6) $\alpha^{-1}\mathrm{B}(\alpha^{-1},\beta+1)$, $\alpha>0$; 7) $\alpha^{-1}\mathrm{B}(3\alpha^{-1},\beta+1)$, $\alpha>0$; 8) $\frac{1}{3}\mathrm{B}(\frac{\alpha+1}{3},2)$, $\alpha>-1$; 9) $\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$; 10) $\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\alpha+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\alpha>-\frac{1}{2}$. **3.96.** $2\sqrt{2}\pi$. **3.97.** 1) $\pi(2\cos\frac{\pi\alpha}{2})^{-1}$, $|\alpha|<1$; 2) $\mathrm{B}(\frac{\alpha+1}{2},\frac{1}{2})$, $\alpha>-1$; 3) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{B}(\frac{1}{4},\frac{1}{2})$; 4) $(1-\beta^2)^{-\frac{\alpha}{2}}\mathrm{B}(\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2})$, $\alpha>0$; 5) $\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$; 6) $\frac{1}{3}\Gamma(\frac{2}{3})$; 7) 3; 8) $\frac{n!}{2}$; 9) $\frac{2}{3}\Gamma(\frac{9}{4})$. **3.98.** 1) $\frac{d}{d\alpha}\left(a^{-(\alpha+1)}\Gamma(\alpha+1)\right)$; 2) $-\pi^2\frac{\cos\pi\alpha}{\sin^2\pi\alpha}$. **3.99.** $\ln\sqrt{2\pi}$. **3.101.** 1) $\frac{\pi\alpha^{\beta-1}}{2\Gamma(\beta)\cos\frac{\pi\beta}{2}}$; 2) $\frac{\pi\alpha^{\beta-1}}{2\Gamma(\beta)\sin\frac{\pi\beta}{2}}$. **3.102.** $\frac{1}{\pi}\ln\frac{\pi e}{2}$. **3.103.** $\frac{2a^2}{s}\Gamma^2(\frac{1}{s})\Gamma^{-1}(\frac{2}{s})$. **3.104.** 1) $\frac{1}{4}\Gamma'(\frac{1}{2})$; 2) $\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}(\ln 2-\pi\operatorname{ctg}\pi\alpha)$; 3) $\Gamma'(1)$; 4) $\pi^3\frac{1+\cos^2\pi\alpha}{\sin^3\pi\alpha}$; 5) $\frac{2\pi^2}{27}$; 6) $\frac{3\pi^3}{32\sqrt{2}}$; 7) $\beta^{-\alpha-1}(\Gamma''(\alpha+1)-2\Gamma'(\alpha+1)\ln\beta+ +\Gamma(\alpha+1)\ln^2\beta)$; 8) $\Gamma'(\alpha+1)$; 9) $\ln(\operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2})-\ln(\operatorname{tg}\frac{\pi\beta}{2})$; 10) $\Gamma'''(\alpha)$. **3.105.** 1) $\frac{\partial}{\partial\alpha}\mathrm{B}(\alpha,\beta)$; 2) $\frac{\partial}{\partial\beta}\mathrm{B}(\alpha,\beta)$; 3) $\frac{d}{d\alpha}\mathrm{B}(\frac{\alpha+1}{2},\frac{1}{2})$; 4) $\frac{1}{2}\frac{d}{d\alpha}\mathrm{B}(\frac{\alpha+1}{2},\alpha+\frac{1}{2})$; 5) $\frac{1}{2}\frac{d}{d\alpha}\mathrm{B}(\frac{1}{2},\frac{\alpha+1}{2})$; 6) $\frac{\partial}{\partial\alpha}\mathrm{B}(\beta-\alpha,\alpha)$; 7) $\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(a^{\alpha-2\beta}\mathrm{B}(\beta-\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2})\right)$; 8) $\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\mathrm{B}(\beta- -\frac{\alpha}{3},\frac{\alpha}{3})$; 9) $\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}\mathrm{B}(\alpha,\beta)$. **3.106.** 1) $\frac{3\pi}{8}$; 2) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$; 3) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; 4) $\frac{3465\pi}{8192}$; 5) $\frac{8}{3\pi}$. **3.107.** 1) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{4\alpha^2}{(2n-1)^2}\right)$; 2) $\pi\alpha\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1-\alpha^2 n^{-2}}{1-4\alpha^2(2n-1)^{-2}}$. **3.108.** 1) $\frac{9\sqrt{3}}{2\pi^2}$; 2) $\frac{3\sqrt{6}}{\pi^2}$; 3) $-\frac{6\sqrt{2}}{25\pi^2}$.

Розділ 4. Кратні інтеграли

4.1. $\lambda(3)$ не є підрозбиттям $\lambda(2)$. $\lambda(n+1)$ є підрозбиттям $\lambda(n) \iff n=1$. $|\lambda(n)|=\sqrt{n^{-2}+2^{-2n}}$. **4.6.** а) $\underline{\int\limits_Q} f(\vec{x})\,d\vec{x}=\overline{\int\limits_Q} f(\vec{x})\,d\vec{x}=\frac{1}{4}$; б) $\underline{\int\limits_Q} g(\vec{x})\,d\vec{x}=\frac{1}{4}$, $\overline{\int\limits_Q} g(\vec{x})\,d\vec{x}=\frac{5}{4}$. **4.7.** $\underline{\int\limits_Q} f(\vec{x})\,d\vec{x}=0$, $\overline{\int\limits_Q} f(\vec{x})\,d\vec{x}=1$. **4.8.** 1) $\underline{\int\limits_Q} f(\vec{x})\,d\vec{x}=$

$= \overline{\int\limits_Q} f(\vec{x})\,d\vec{x} = \frac{1-\cos 2}{2}$; 2) $\underline{\int\limits_Q} f(\vec{x})\,d\vec{x} = \overline{\int\limits_Q} f(\vec{x})\,d\vec{x} = 0$; 3) $\underline{\int\limits_Q} f(\vec{x})\,d\vec{x} = \overline{\int\limits_Q} f(\vec{x})\,d\vec{x} = (1-\cos 2)\sin 1$; 4) $\underline{\int\limits_Q} f(\vec{x})\,d\vec{x} = \overline{\int\limits_Q} f(\vec{x})\,d\vec{x} = 0$; 5) $\underline{\int\limits_Q} f(\vec{x})\,d\vec{x} = \overline{\int\limits_Q} f(\vec{x})\,d\vec{x} = (e-1)(1-e^{-2})$; 6) $\underline{\int\limits_Q} f(\vec{x})\,d\vec{x} = \overline{\int\limits_Q} f(\vec{x})\,d\vec{x} = \frac{1}{2}$; 7) $\underline{\int\limits_Q} f(\vec{x})\,d\vec{x} = \overline{\int\limits_Q} f(\vec{x})\,d\vec{x} = \frac{4}{3}$; 8) $\underline{\int\limits_Q} f(\vec{x})\,d\vec{x} = \overline{\int\limits_Q} f(\vec{x})\,d\vec{x} = \frac{1}{2}\ln 3$; 9) $\underline{\int\limits_Q} f(\vec{x})\,d\vec{x} = \overline{\int\limits_Q} f(\vec{x})\,d\vec{x} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; 10) $\underline{\int\limits_Q} f(\vec{x})\,d\vec{x} = \overline{\int\limits_Q} f(\vec{x})\,d\vec{x} = \frac{3\ln 3}{2} - 1$. **4.9.** 1) $\frac{4(1+2\sqrt{2})}{3}$; 2) $\cos 3 - 3\cos 2 + 3\cos 1 - 1$; 3) $\frac{2}{\pi}$; 4) $\frac{13}{3} + 2e(e-1)$. **4.10.** 1) $\frac{17}{4}$; 2) $\frac{1}{\pi}$; 3) $\frac{8\pi}{3}$; 4) $\ln\frac{25}{24}$; 5) $\frac{\operatorname{ch} 1 - 1}{2} + \operatorname{sh} 1$; 6) $f(1,2) - f(-1,2) - f(1,-2) + f(-1,-2)$; 7) $\frac{1}{24}$; 8) 18; 9) $\frac{1}{3}(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})(\sin 2 - \sin 1) + \frac{3}{4}$; 10) $1 - \frac{1}{2^n}$. **4.11.** 1) $\frac{1}{2}(1 + \frac{4}{x} - (1 + \frac{4}{x})\exp(-x^5))$; 2) $\frac{1}{2} - \frac{5}{4}x^2 + (1 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2x^2})\ln(1+x^2)$; 3) $\frac{1}{2}(x^3-1)(1+2x)(1+2x+2x^2)$; 4) $\frac{1}{2}(1+(x-1)|x-1|)$; 5) $2x^{-1}(1-e^{-x^4})$; 6) $3|x|(x+1) + \frac{5}{2}$; 7) $\frac{24}{35}x^5$; 8) $2x^3e^{x^2} + 3x^5e^{-x^3} + x^3(3x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 2)e^{x^2-x^3}$; 9) $\frac{2}{x}(1-\cos x^2)$; 10) $xe^x(\sin x + \frac{x}{2}(\sin x + \cos x))$. **4.12.** 1) $m(A_{(n)}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}$, $m(A^{(n)}) = \frac{1}{2} + 7\cdot 2^{-(n+1)} + 2^{-2(n-1)}$, $m(\Delta A_{(n)}) = 2^{-(n-2)} + 2^{-2(n-1)}$; 2) $m_*(A) = m^*(A) = m(A) = \frac{1}{2}$. **4.14.** $m_*(A) = 0$, $m^*(A) = 1$, невимірна. **4.16.** Ні. Див. задачу 4.14 **4.18.** 1) $m(A_{(n)}) = 2$, $m(A^{(n)}) = 2 + 3\times 2^{1-n} + 2^{-2(n+1)}$, $m(\Delta A_{(n)}) = 3\cdot 2^{1-n} + 2^{-2(n+1)}$, $n \ge 0$, $m_*(A) = m^*(A) = m(A) = 2$; 2) $m(A_{(n)}) = 4$, $m(A^{(n)}) = 4 + 2^{-n+3} + 2^{-2(n-1)}$, $m(\Delta A_{(n)}) = 2^{-n+3} + 2^{-2(n-1)}$, $n \ge 0$, $m_*(A) = m^*(A) = m(A) = 4$; 3) $m(A_{(n)}) = 2^{2-n}\times [2^{n+1/2}]$, $m(A^{(n)}) = 2^{-2(n-1)}(2^n+1)([2^{n+1/2}]+1)$, $m(\Delta A_{(n)}) = 2^{-2(n-1)}\times [2^n\sqrt{2}] + 2^{-n+2} + 2^{-2(n-1)}$, $n \ge 0$, $m_*(A) = m^*(A) = m(A) = 4\sqrt{2}$; 4) $m(A_{(n)}) = 2^{-1} - 2^{-(n+1)}$, $m(A^{(n)}) = 2^{-1} + 7\cdot 2^{-(n+1)} + 2^{-2(n-1)}$, $m(\Delta A_{(n)}) = (2^n + 1)2^{-2(n-1)}$, $n \ge 0$, $m_*(A) = m^*(A) = m(A) = \frac{1}{2}$; 5) $m(A_{(n)}) = 2(1 - 2^{-n})$, $m(A^{(n)}) = 2(1 + 2^{-n})(1 + 2^{1-n})$, $m(\Delta A_{(n)}) = 5\cdot 2^{-n} + 2^{1-2n}$, $n \ge 0$, $m_*(A) = m^*(A) = m(A) = 2$; 6) $m(A_{(n)}) = 1 - 2^{-n}$, $m(A^{(n)}) = 1 + 5\cdot 2^{-n} + 2^{2(n-1)}$, $m(\Delta A_{(n)}) = 3\cdot 2^{n-1} + 2^{-2(n-1)}$, $n \ge 0$, $m_*(A) = m^*(A) = m(A) = 1$; 7) $m(A_{(n)}) = 2^{-1} - 2^{-(n+1)}$, $m(A^{(n)}) = 2^{-1} + 7\cdot 2^{-(n+1)} + 2^{-2(n-1)}$, $m(\Delta A_{(n)}) = (2^n+1)2^{-2(n-1)}$, $n \ge 0$, $m_*(A) = m^*(A) = m(A) = \frac{1}{2}$; 8) $m(A_{(n)}) = 2 - 2^{-n+1}$, $m(A^{(n)}) = 2 + 5\cdot 2^{-n+1} + 2^{-2n+3}$, $m(\Delta A_{(n)}) = 3\cdot 2^{-n+2} + 2^{-2n+3}$, $n \ge 0$, $m_*(A) =$

$= m^*(A) = m(A) = 2;$ 9) $m(A_{(n)}) = 2 - 2^{-n}$, $m(A^{(n)}) = 2 + 7\cdot 2^{-n} + 2^{-2(n-1)}$, $m(\Delta A_{(n)}) = 2^{3-n} + 2^{-2(n-1)}$, $n \geq 0$, $m_*(A) = m^*(A) = m(A) = 2$; 10) $m(A_{(n)}) = 0$, $m(A^{(n)}) = m(\Delta A_{(n)}) = 2^{-n+1} + 2^{-2(n-1)}$, $n \geq 0$, $m_*(A) = m^*(A) = m(A) = 0$. **4.20.** $\frac{1}{6}$. **4.23.** 1) $(\frac{15}{8} - 2\ln 2)a^2$; 2) $2\sqrt{2}$. **4.25.** $2e^t(e - 2 + t)$. **4.28.** 1) π; 2) $\frac{4}{15}$; 3) $3\ln\frac{5}{3}$; 4) 2; 5) $\frac{1}{3}$; 6) πab; 7) $\frac{16\sqrt{15}}{3}$; 8) 5; 9) π. **4.31.** 1) $\frac{3}{35}$; 2) 36π; 3) $\frac{7}{24}$; 4) $2\pi - \frac{8}{3}$; 5) $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{6}$; 6) $\frac{32\pi}{3}$; 7) 8; 8) $\frac{7}{12}$; 9) $\frac{83}{1890}$; 10) $4(4 - 3\ln 3)$; 11) $\frac{\pi}{6}$; 12) $\frac{5\pi}{6}$. **4.33.** 1) $88/105$; 2) $\frac{5}{6}$; 3) $\frac{3\pi-4}{6}$; 4) π; 5) $\frac{17}{12} - 2\ln 2$; 6) $\frac{560}{3}$; 7) 12; 8) $\frac{1}{6}$; 9) $\frac{2511}{32}$; 10) $\frac{48\sqrt{6}}{5}$; 11) 45. **4.34.** 1) $\frac{1}{2}(\ln 2 - \frac{5}{8})$; 2) $1/364$; 3) $1/48$; 4) $4/3$; 5) e; 6) 0; 7) $\frac{1}{3}$; 8) 0; 9) $\frac{7}{192}$; 10) $\frac{1}{12}$; 11) $\frac{\pi+4\sqrt{2}}{32}$; 12) $\frac{1}{12}$; 13) $\frac{3}{4} - \ln 2$. **4.35.** 1) $\frac{m(3m+1)}{12}$; 2) $\frac{m}{3}$; 3) $4m - \frac{15}{2}, m \geq 2$; 4) $0, m = 2k; 2^m, m = 4k-3; -2^m, m = 4k-1; k \geq 1$; 5) $2^{m-1}\pi^m$; 6) $2^{m-2}(1 + \frac{2^3}{3} + \frac{2^4}{4} + \ldots + \frac{2^{m+1}}{m+1})$; 7) $-1,\ m = 2k; 0,\ m = 2k+1; k \geq 1$; 8) $\frac{m(e-1)^2}{e}$; 9) $2\pi^{m-1}(1 + 3^{-1} + 5^{-1} + \ldots + (2\left[\frac{m+1}{2}\right] - 1)^{-1})$; 10) $2^m\pi^{m-1}(2\sin\frac{\pi}{2} + 3\sin\frac{\pi}{3} + \ldots + m\sin\frac{\pi}{m})$, $m \geq 2$. **4.36.** 1) $\frac{2}{(2m+1)(m-1)!}a^{m+\frac{1}{2}}$; 2) $\frac{a^{2m}}{(2m)!}$. **4.42.** 1) $-6\pi^2$; 2) $\frac{2}{3}\pi R^2$; 3) $\frac{\pi}{4}\ln\frac{4}{e}$; 4) $\frac{\pi}{4}\sin 1$; 5) 4π; 6) $\frac{8\pi}{3}$; 7) $\frac{1}{6}\pi^2$; 8) $\frac{\pi^3}{128}$; 9) $\pi e(e^3 - 1)$; 10) $\frac{\pi}{2}(1 - \cos 4)$; 11) $\pi(\operatorname{ch} 9 - \operatorname{ch} 4)$. **4.43.** $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$. **4.44.** 1) $\frac{\pi}{32}$; 2) $\frac{\pi}{512}$; 3) $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{\pi}{4}$; 5) $2(\operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arcctg} 2)$; 6) $4\arccos\frac{1}{4} - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{15}}{4}$; 7) $\frac{10\pi}{3} - 4\arccos\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}-\sqrt{15}}{4}$; 8) $\frac{\pi-2}{4}$; 9) $\frac{4-\pi}{4}$; 10) $\frac{8-\pi}{2}$. **4.45.** 1) $2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \times \left(3\Gamma^2(\frac{3}{4}) + \frac{1}{3}\Gamma^2(\frac{1}{4})\right)t^2$; 2) $t\int\limits_0^{2\pi} f(t\cos\varphi, t\sin\varphi)\,d\varphi$. **4.46.** 1) $\frac{\pi ab}{4}\left(\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{d^2}\right)$; 2) $\frac{ab}{70}$; 3) $\frac{1028\pi}{9\sqrt{3}} + \frac{32}{3}$; 4) $\frac{1}{3}$; 5) $\frac{1}{6}$; 6) $\frac{2}{81}$; 7) $\frac{216}{35}$; 8) $\frac{1}{30}$; 9) $\frac{\sqrt{2}}{240}$; 10) $\mathrm{B}(10, 10)$; 11) $\frac{164\pi}{9\sqrt{3}} + 3$. **4.47.** 1) $\frac{\ln 2}{2}$; 2) $\frac{4}{3}$; 3) $\frac{1}{8}$; 4) $\frac{217}{120}$; 5) $\frac{381}{128}$; 6) $\frac{35}{24} - \frac{8\sqrt{6}}{9} + \frac{3\sqrt{2}}{2}$; 7) $\frac{11529}{1600}$; 8) $-\frac{38}{3} + \frac{16\sqrt{2}}{3} + \frac{5\sqrt{5}}{12} + 4\sqrt{3}$; 9) $\frac{31}{100}$; 10) $\frac{3069}{5120}$; 11) $\frac{1}{40}\left(\frac{9^9+7^9}{63^4}\right) - \frac{2}{5}$; 12) $4\ln 2$. **4.48.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{8}$; 5) $\frac{4}{\pi^2-1}$; 6) 2; 7) $\frac{9}{70}$; 8) $\frac{32}{35}$; 9) $\frac{1}{3}$; 10) $\frac{1}{24}$. **4.49.** 1) $\frac{45\pi}{32}$; 2) $\frac{32}{3\sqrt{\pi}}\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)$; 3) $\frac{9}{2}$; 4) $\frac{\pi}{2}$; 5) $\frac{16}{9}$; 6) $\frac{\pi}{8}$; 7) $\pi(1 - e^{-4})$; 8) $\frac{2(\pi-2)}{3\pi}$; 9) $\frac{\pi}{8}$; 10) $\frac{4(2\sqrt{2}-1)\pi abc}{3}$; 11) $\frac{3\pi ab}{8}$; 12) $\frac{2\pi}{3}$; 13) $\frac{3}{4}$. **4.50.** $\frac{16\pi}{3}$; **4.51.** π. **4.52.** 1) $\frac{\pi}{8}$; 2) $\frac{6\sqrt{3}\pi}{5}$; 3) $\frac{16}{9}(3\pi + 20 - 16\sqrt{2})$; 4) $\frac{81\pi}{32}$; 5) $\frac{27\pi}{32}$; 6) $\frac{7\pi}{6}$; 7) 8; 8) $\frac{512}{75}$; 9) $\frac{5\pi}{24}$; 10) $\pi(\frac{8\pi}{3} - 3\sqrt{3})$. **4.53.** 1) $\frac{\pi}{10}$; 2) $\frac{\pi}{15}(\sqrt{8} - 1)$; 3) $\frac{\pi}{21}$; 4) $\operatorname{arctg} 2 - \frac{\pi}{4}$; 5) 2π; 6) $\frac{4\pi e}{3}(e^7 - 1)$; 7) 0; 8) $\frac{3\pi}{8}$; 9) $\left(\frac{1}{6} - \frac{\pi}{256}\right)(\sqrt{6} + \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3})) + \frac{9\pi}{128}\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\pi}{16}\sqrt{\frac{3}{2}}$; 10) $\frac{\pi}{16}(2\sqrt{5} -$

$-\sqrt{2})+\ln(\sqrt{5}+2)(\sqrt{2}-1)$; 11) $\frac{\pi}{6}(\cos 1-\cos 8)$. **4.54.** $\frac{9}{4}$. **4.55.** 1) 2π; 2) $\frac{\pi^2}{24}$; 3) $\frac{\pi^2}{24\sqrt{2}}$; 4) $\frac{8\pi}{5}$; 5) $\pi(6\sqrt{5}-14-\sqrt{2}(3-\sqrt{5})^{3/2})$; 6) $\frac{\pi}{3}B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$; 7) $\frac{1}{15}$; 8) $\frac{1}{120}$; 9) $\frac{7}{3}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$; 10) 2. **4.56.** 1) $(0,0,3/2)$; 2) $\left(0,0,\frac{3}{8}\right)$; 3) $\left(\frac{16}{15\pi},\frac{16}{15\pi},\frac{2}{3}\right)$; 4) $\left(0,\frac{32}{45\pi},\frac{8}{3}\right)$; 5) $\left(0,0,\frac{3}{8}\right)$; 6) $\left(\frac{4}{3\pi},\frac{4}{3\pi},0\right)$; 7) $\left(0,0,-\frac{3}{8}\right)$; 8) $\left(\frac{8(2\sqrt{2}-\sqrt{5})}{15\sqrt{10}(\operatorname{arctg}2-\frac{\pi}{4})},\frac{8(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{15\sqrt{10}(\operatorname{arctg}2-\frac{\pi}{4})},\frac{2}{3}\right)$; 9) $(0,0,\frac{3(\sqrt{2}+1)}{8})$; 10) $\left(\frac{4\sqrt{2}}{3\pi},\frac{4(2-\sqrt{2})}{3\pi},0\right)$; 11) $\left(\frac{4\sqrt{5}}{15(4\operatorname{arctg}2-\pi)},\frac{4\sqrt{5}}{15(4\operatorname{arctg}2-\pi)},1\right)$. **4.57.** $\alpha>1$. **4.58.** $\alpha>1$, $\beta>1$. **4.59.** $\frac{1}{(\alpha-\beta)(\beta-1)}$, $\alpha>\beta>1$. **4.60.** $\frac{\pi}{2}$. **4.61.** $\alpha<1$. **4.62.** Збігається. **4.63.** 1) $\alpha>\frac{3}{2}$; 2) $\alpha<\frac{3}{2}$. **4.66.** $\frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)}$, $\alpha<1$. **4.67.** 1) $\alpha>1$; 2) $\alpha+\beta<\alpha\beta$; 3) $\alpha>2$; 4) $\alpha>1$; 5) $\alpha>1$; 6) $\alpha>0$; 7) $\alpha>0$; 8) $\alpha<-1$; 9) $\alpha<-1$; 10) $\alpha>2$. **4.68.** 1) 1; 2) 2π; 3) π; 4) 2; 5) $\frac{1}{2}$; 6) $\Gamma(\alpha+1)$; 7) $\frac{\pi}{\alpha}\Gamma(\frac{1}{\alpha})$; 8) $\frac{1}{\alpha+\beta+2}\mathrm{B}(\alpha+1,\beta+1)$; 9) $\frac{\pi}{4}\mathrm{B}(\alpha+1,\beta+1)$; 10) $\frac{1}{\alpha+\beta+2}\mathrm{B}(\alpha+1,\beta+1)$. **4.69.** 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) 0; 3) $\pi\sqrt{e}$; 4) $\frac{1}{2}\pi\sqrt[4]{e}$; 5) 0; 6) $-\frac{3\pi}{4\sqrt{2}}e^{3/8}$; 7) $\pi\sqrt[4]{e}$; 8) π; 9) $\frac{1}{2}\pi^{3/2}$; 10) $\frac{\pi}{\sqrt{10}}e^{37/40}$. **4.70.** 1) $\alpha+\beta>\alpha\beta$; 2) $\alpha>-1$; 3) $\alpha>-\frac{3}{2}$; 4) $\alpha<1$, $\beta<1$, $\gamma<1$; 5) $\alpha\in\mathbb{R}$; 6) $\alpha>-\frac{3}{2}$; 7) $\alpha>-\frac{3}{2}$; 8) $\alpha>-3$; 9) $\alpha>-\frac{3}{4}$; 10) $\alpha\in(0,3-\sqrt{6})\cup(3+\sqrt{6},+\infty)$.

Розділ 5. Інтеграли по многовидах

5.1. 1) 0; 2) $\frac{2}{3}$; 3) 2. **5.2.** 1) $-\frac{14}{15}$; 2) -2π; 3) 0; 4) 0; 5) $-\frac{9}{4}$; 6) $-\frac{1}{2}$; 7) 2π; 8) $\frac{4}{3}$; 9) 0; 10) -2π; 11) 0; 12) $\frac{3}{140}$. **5.3.** 1) 1; 2) $\frac{3}{2}$; 3) $\frac{1}{6}$; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) 0; 6) $3\sqrt{3}$; 7) $-\frac{1}{2}$; 8) $1-\cos 1$; 9) 13; 10) 0. **5.4.** 1) $-\pi$; 2) -4; 3) 0; 4) 0; 5) $-\frac{\pi}{4}$; 6) 0; 7) 8; 8) 0; 9) $-\frac{1}{3}$; 10) 0; 11) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}\pi$; 12) $-2\sqrt{2}\pi$. **5.5.** -14. **5.6.** $mg(x_3-y_3)$. **5.7.** 1) $-F$; 2) -1; 3) -1; 4) $-\pi/2$; 5) 0; 6) $\frac{4}{3}$; 7) $\frac{17}{12}$; 8) 0; 9) 0; 10) $-\frac{3}{2}$. **5.8.** 1) 4π; 2) 0; 3) 4π; 4) $\frac{15}{2}\pi$; 5) $-\frac{1}{6}$; 6) $\frac{107}{120}-2\cos 1$; 7) 0; 8) 0; 9) 0; 10) $\frac{32768}{105}\pi$; 11) 8π; 12) $\frac{4}{15}$; 13) $-\frac{\pi}{2}$; 14) 0. **5.9.** 1) 0; 2) $\frac{7}{6}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$; 5) $\frac{5}{4}$; 6) 0; 7) 3; 8) $4(e^3+e^2+e-3)$; 9) $\frac{9\pi}{2}$; 10) $\frac{\pi}{24}$. **5.10.** 1) $\frac{4}{3}$; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) 0; 4) $\frac{1}{12}$; 5) $-\frac{7\pi}{3}$; 6) 0; 7) 0; 8) $\frac{56\pi}{3}$; 9) $\frac{\pi}{6}$; 10) $-\frac{\pi}{36}$; 11) $\frac{8\sqrt{2}-4\sqrt{2}\pi}{3}$. **5.11.** 0. **5.12.** 1) 0; 2) $(1+x_2)\,dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3$; 3) $\left(\frac{\partial Q}{\partial x_1}-\frac{\partial P}{\partial x_2}\right)dx_1\wedge dx_2$; 4) $\left(\frac{\partial R}{\partial x_2}-\frac{\partial Q}{\partial x_3}\right)dx_2\wedge dx_3+\left(\frac{\partial P}{\partial x_3}-\frac{\partial R}{\partial x_1}\right)dx_3\wedge dx_1+\left(\frac{\partial Q}{\partial x_1}-\frac{\partial P}{\partial x_2}\right)dx_1\wedge dx_2$; 5) $\left(\frac{\partial P}{\partial x_1}+\frac{\partial Q}{\partial x_2}+\frac{\partial R}{\partial x_3}\right)dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3$; 6) 0; 7) $(x_2\cos(x_1x_2)-x_1)\,dx_1\wedge x_2$; 8) $\operatorname{ch}(x_1+x_2)\,dx_1\wedge dx_2$; 9) $(x_3-x_1)\,dx_1\wedge dx_3-x_2\,dx_2\wedge dx_3$; 10) $-\frac{x_3}{1+x_1^2x_3^2}\,dx_3\wedge dx_1-e^{x_1+x_2}\,dx_1\wedge dx_2$; 11) $3dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3$; 12) $x_1\,dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3$; 13) $-x_1\,dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3$;

14) 0; 15) $\sum\limits_{k=1}^{m}(-1)^{(k-1)(m-1)}\cos x_k\,dx_1\wedge dx_2\wedge\ldots\wedge dx_m$. **5.13.** 1) $-\frac{10}{3}$; 2) $-2\pi ab$; 3) $\frac{1-e^{\pi}}{5}$; 4) $\frac{5\pi}{4}$; 5) $-\frac{11}{3}$; 6) 1; 7) $\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}$; 8) $-\frac{64}{3}$; 9) $\frac{22}{3}$; 10) 0; 11) $\frac{3\pi}{4}$; 12) $-\frac{41}{12}$; 13) 0. **5.14.** 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) 0; 4) $\frac{8}{3}$; 5) $\frac{4}{3}-\frac{\pi}{2}$; 6) $\frac{2}{3}$; 7) $-\frac{3\pi}{8}$; 8) 6; 9) $-e^2+1+e-e^{-1}$; 10) $-\frac{5}{6}$; 11) $\frac{1}{2}$. **5.15.** 1)0; 2)2π; **5.16.** 1) πab; 2) $\frac{1}{6}$; 3) $\frac{3\pi}{8}$; 4) $\frac{1}{3}+\frac{4\pi}{9\sqrt{3}}$; 5) $\frac{3\pi}{128}$; 6) $\frac{1}{4}+\frac{3\pi}{\sqrt{2}}$; 7) 6π; 8) $\frac{1}{6}$; 9) 2π; 10) $\frac{3}{2}$; 11) 1; 12) $\ln(x_1^0+\frac{x_2^0}{2})$; 13) $\frac{ab}{2n}\frac{\Gamma^2(\frac{1}{n})}{\Gamma(\frac{2}{n})}$. **5.17.** $\pi(n+1)(n+2)r^2$. **5.18.** $\pi(n-1)(n-2)r^2$. **5.20.** 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) $\frac{384}{5}\pi$. **5.21.** 1) 2π; 2) $-\frac{3}{2}$; 3) 4π; 4) $\frac{288}{35}$; 5) $\frac{12\pi}{5}$; 6) 16; 7) $\frac{1}{4}$; 8) -2; 9) $\frac{1}{7}+\frac{\pi}{24}$; 10) $-\frac{\pi}{2}$. **5.22.** 1) $2\pi^2a^2b$; 2) $\frac{4}{3}\pi r^3$; 3) $\frac{4}{3}\pi$; 4) 2π; 5) $\frac{2}{9}$; 6) $\frac{1}{3}\pi h^3$; 7) $h\pi r^2$; 8) $\frac{1}{2}\pi h^2$; 9) $\frac{\pi}{3}(r-h)^3(2r+h)$; 10) $\frac{4}{3}\pi abc$; 11) $\frac{\pi}{6}(8-5\sqrt{2})$. **5.23.** 1) $-\sqrt{3}\pi$; 2) -3π; 3) -6π; 4) $2\pi rR^2$; 5) $-\frac{9\sqrt{3}}{2}$; 6) $\frac{3}{4}\pi$; 7) π; 8) 0; 9) 0; 10) 3π; 11) π; 12) $-\frac{7\pi}{6\sqrt{3}}$; 13) 0; 14) 0; 15) 0; 16) $\frac{8\pi^3}{3}$. **5.24.** 1) $-\frac{3}{2}$; 2) 62; 3) $e^2\cos 3-1$; 4) 0; 5) 0; 6) $-\frac{20}{3}$; 7) $-\frac{9}{2}$; 8) -8; 9) -1; 10) 0; 11) $2e-1$; 12) $\ln\frac{2}{5}$; 13) -3; 14) $\int\limits_0^7 f(t)\,dt$; 15) $\frac{79}{12}$; 16) 8; 17) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$; 18) -2; 19) 0; 20) 0; 21) $1-e^2$; 22) 24; 23) 0; 24) $2(\operatorname{ch}1-1)$. **5.25.** 1) $z=\frac{x_1^3}{3}+x_1^2x_2-x_2^2x_1-\frac{x_2^3}{3}$; 2) $z=\frac{x_2}{x_1^2}$; 3) $z=x_1\cos x_2$; 4) $z=\frac{1}{3}(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-2x_1x_2x_3$; 5) $z=x_1^{x_2}$; 6) $z=-\frac{x_2}{x_1+x_2}$; 7) $z=2\sqrt{x_1x_2}$; 8) $z=x_1^3+x_1^2x_2$; 9) $z=\operatorname{tg}(x_1+x_2)$; 10) $z=x_1\ln(x_1+x_2)$; 11) $z=x_1^4+\frac{x_1^2}{2}-x_1x_2+\frac{x_2^2}{2}$; 12) $z=x_1^2x_2+3x_2^3$; 13) $z=\sin(x_1+x_2)+\cos(x_1-x_2)$; 14) $z=\operatorname{ch}(x_1+x_2)+\operatorname{sh}(x_1-x_2)$. **5.26.** $mg(x_2^0-y_2^0)$. **5.27.** 1) $-\frac{3}{2}$; 2) $-\frac{4m}{5}$; 3) $-\frac{31m}{8}$; 4) $\frac{\pi^2+1}{2}$; 5) 0; 6) 0; 7) 0; 8) 0; 9) $-4m$; 10) $-7m$. **5.30.** 1) 5; 2) $\frac{\pi\sqrt{2+\pi^2}}{2}+\ln\frac{\sqrt{\pi^2+2}+\pi}{\sqrt{2}}$; 3) $\sqrt{3}(1-e^{-1})$; 4) $\frac{3}{2}$; 5) $\frac{76}{3}$; 6) $\frac{1525}{6}$; 7) $\frac{5}{3}$; 8) $\frac{19}{4}$; 9) $2+\operatorname{ch}2$; 10) $\frac{20}{3}$; 11) $1+\ln\frac{3}{2}$; 12) $x_1^0+\frac{1}{4}\ln\frac{1+x_1^0}{1-x_1^0}$. **5.31.** 1) $\frac{1}{3}+\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{3}$; 3) $\frac{19\sqrt{5}+23\sqrt{2}}{6}$; 4) $\frac{\pi}{4}+\frac{5}{6}$; 5) $\frac{\sqrt{2}}{6}$; 6) $16\pi^2-\frac{2048}{45}$; 7) $2\pi^2+4\pi^4$; 8) $\frac{1}{6}(1+2\operatorname{sh}^2 t_0)^{3/2}-\frac{1}{6}$; 9) 1; 10) $2e-2+\frac{\pi e}{4}$. **5.32.** 1) $\sqrt{a^2+b^2}(2\pi a^2+\frac{8\pi^3b^2}{3})$; 2) $\frac{25\sqrt{19}-9\sqrt{2}}{64}-$ $-\frac{17}{256\sqrt{2}}\ln\frac{4\sqrt{38}+25}{17}$; 3) $\frac{13\sqrt{2}}{6}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{20}$; 5) $\frac{3\sqrt{2}}{2}+3\sqrt{3}$; 6) $2\sqrt{2}$; 7) $\frac{\sqrt{5}}{2}$; 8) $\frac{2\pi}{3}$; 9) $\frac{(2+t_0^2)^{3/2}-2\sqrt{2}}{3}$; 10) $\sqrt{2}$; 11) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 12) 0. **5.33.** 1) $\frac{16\sqrt{2}-8}{3}$; 2) $\frac{(e^2+1)^{3/2}-2\sqrt{2}}{3}$; 3) $\frac{b^2}{2}+\frac{ba^2}{2\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}$; 4) $\frac{3\sqrt{3}-1}{8}+\frac{3}{16}\ln\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$; 5) $\frac{5\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{6}$; 6) $\frac{\pi^2}{16}-\frac{\ln 2}{2}$. **5.34.** 1) $(\frac{4}{3},\frac{4}{3})$; 2) $(\frac{2e^2-2\cos 1+\sin 1}{5e(e-1)},\frac{\cos 1+2\sin 1-e^2}{5e(e-1)},$

$\frac{e^{-1}+1}{2})$. 3) $x_1 = x_2 = (\frac{7}{16} - \frac{3\sqrt{2}}{32}\ln(\sqrt{2}-1))\cdot(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}-1))^{-1}$; 4) $l = = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}-1), x_1 = (\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{4}\ln(\sqrt{2}-1))/l, x_2 = (\frac{\sqrt{2}}{32} - \frac{5}{32}\ln(\sqrt{2}-1))/l$; 5) $(0, \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 1 + \frac{1}{\operatorname{sh} 1}))$; 6) $(\frac{r\sin\varphi}{\varphi}, 0)$; 7) $(0, \frac{2}{5})$. **5.35.** $l = \sqrt{3}; (\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2})$. **5.39.** $2S$. **5.40.** 2π, якщо $(x_1^0, x_2^0) \in M \setminus \Gamma$; π, якщо $(x_1^0, x_2^0) \in \Gamma$; 0, якщо $(x_1^0, x_2^0) \in \mathbb{R}^2 \setminus M$. **5.41.** 1) $\frac{2\pi}{3}(\sqrt{8}-1)$; 2) $8a^2 \arcsin\frac{b}{a}$. 3) 4; 4) $\frac{3\sqrt{2}\pi}{16}$; 5) $\pi\sqrt{2}$; 6) $2\sqrt{3}$; 7) 2; 8) $\frac{\pi}{6}(\ln(12+\sqrt{145})+12\sqrt{145})$; 9) $\frac{\sqrt{21}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{20}\ln(2\sqrt{5}+ + \sqrt{21})$; 10) $\frac{5\sqrt{5}-1}{12}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$; 11) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$; 12) $\frac{3\pi\sqrt{2}-\pi\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi\sqrt{2}}{8}\ln\frac{5+2\sqrt{6}}{2}$. **5.42.** 1) $a(\varphi_2-\varphi_1)(b(\psi_2-\psi_1)+a(\sin\psi_2-\psi_1))$, $4\pi^2 ab$; 2) $\pi(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))$. 3) $4\pi R^2$; 4) $R^2(\varphi_2-\varphi_1)(\sin\psi_2-\sin\psi_1)$; 5) $\frac{\pi}{4}$; 6) 8; 7) 8; 8) $\frac{10}{9} - \frac{\pi}{6}$; 9) $\frac{\pi}{3}(4\sqrt{2}-2)$; 10) $\frac{\pi}{3}(4\sqrt{2}-2)$; 11) $\sqrt{2}\pi$; 12) $(16\sqrt{2}-8)(\arcsin\frac{\sqrt{35}-\sqrt{3}}{8} + +\arccos\frac{\sqrt{35}+\sqrt{3}}{8})$. **5.43.** 1) πa^3; 2) $\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + (\sqrt{3}-1)\ln 2$; 3) $\frac{\pi a^4}{2}\sin\alpha\cos^2\alpha$; 4) 60π; 5) $\frac{\sqrt{3}}{6}$; 6) $\frac{15\pi\sqrt{2}}{4}$; 7) 2π; 8) $\frac{10\sqrt{5}}{3} + \frac{2}{15}$; 9) 0; 10) $6\sqrt{2}$; 11) $\frac{29}{3} + 3\sqrt{2}$; 12) $\frac{3}{4}$. **5.45.** 1) $\frac{4}{5}\sqrt{3}\pi + \frac{2}{15}\pi$; 2) π; 3) $\frac{4\pi}{3}$. **5.46.** 1) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; 2) $(0, 0, \frac{1+a}{2})$; 3) $(0, \frac{4}{3}\frac{2\sqrt{2}-1}{\pi(\sqrt{2}-\ln(\sqrt{2}-1))}, \frac{\pi}{2})$; 4) $x_1 = \frac{3}{8}\frac{5\sqrt{6}+\ln(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3\sqrt{3}-1}, x_2 = \frac{x_1}{2}$, $x_3 = \frac{3(3\sqrt{3}-2)}{5(3\sqrt{3}-1)}$; 5) $x_1 = x_2 = \frac{11\sqrt{2}-4}{14+14\sqrt{2}}$, $x_3 = \frac{244\sqrt{2}-15\ln(3+2\sqrt{2})-30\ln(1+\sqrt{2})}{384+384\sqrt{2}}$; 6) $(\frac{2}{3(\pi-2)}, 0, \frac{\pi}{4(\pi-2)})$; 7) $(\frac{1}{2}, 0, \frac{16}{9\pi})$; 8) $(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}+1}{\pi})$. **5.52.** а) 0; б) 4π. **5.53.** 1) $(7,0,0), (-2,1,1)$; 2) $(4,6,1)$; 3) $(0,6,0)$; 4) $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$; 5) $(-\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{18})$; 6) $(-\frac{2}{27}, \frac{5}{27}, -\frac{4}{27})$; 7) $(-e^{-2}, 0, 0)$; 8) $(\frac{\sqrt{15}}{20}, -\frac{\sqrt{15}}{60}, -\frac{\sqrt{15}}{60})$; 9) $(-\frac{1}{4}, \frac{\ln 2}{2}, -\frac{\ln 2}{2})$; 10) $(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{12}, \frac{3}{4})$; 11) $(-\frac{\sqrt{2\pi}}{4}, -\frac{\sqrt{2\pi}}{4}, 0)$. **5.55.** 1) 3; 2) $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$; 3) $\frac{32}{125}$; 4) $\pi - 2$; 5) $2e$; 6) 15; 7) $\frac{4}{5} + \frac{3}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{3}}$; 8) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{4}{3}$; 9) $-\frac{1}{2}$; 10) 0. **5.57.** 1) $\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$; 2) $u\Delta u + \|\operatorname{grad} u\|^2$; 3) $u\Delta v + (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v)$. **5.58.** 1) $(-\frac{5}{4}, -1, -\frac{5}{2})$; 2) $(0,0,0)$; 3) $(0,0,0)$; 4) $(-1,1,-1)$; 5) $(0, -\frac{6\sqrt{38}}{19}, \frac{4\sqrt{38}}{19})$; 6) $(-2,-1,-1)$; 7) $(5,-2,-4)$; 8) $(0,0,-1)$; 9) $(0,0,-2)$; 10) $(0,4,0)$; 11) $(-1,1,-1)$. **5.59.** 1) 2π; 2) 2π; 3) 0; 4) -2π; 5) $\frac{188}{21}\ln 2$; 6) $5\pi - 20$; 7) $\frac{7\pi\sqrt{3}}{12} - \frac{1}{2}$; 8) $\frac{2m}{3}$; 9) 240. **5.60.** $2\pi^2 b^2$. **5.61.** $-3e^{-2} + \frac{3}{4}e^4 + \frac{9}{4}$. **5.62.** 1) 0; 2) π. **5.63.** 1) 0; 2) 0; 3) π; 4) 0; 5) $-\frac{4\pi}{3}$; 6) $\frac{2\pi}{3}$; 7) 5π; 8) 3; 9) 4; 10) 4. **5.66.** $u = x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3) + C$. **5.67.** $\frac{1}{3}$. **5.68.** $u = \frac{m}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}} + C$. **5.69.** $-4\pi m$. **5.70.** $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i$.

Розділ 6. Ряд та інтеграл Фур'є

6.1. $\int\limits_0^1 tf(t)\,dt \neq 0$, або $\int\limits_0^1 tf(t)\,dt = \int\limits_0^1 f(t)\,dt = 0$. **6.2.** $6+3(\alpha+\beta)+2\alpha\beta = 0$. **6.3.** 1) $\beta = 0$ або $\alpha = -\frac{4}{3}$; 2) $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$; 3) $\alpha = 0$ або $\beta = \frac{5}{2}$; 4) $\beta = 0$ або $\alpha = -\frac{3}{2}$. **6.4.** $m \neq n$. **6.5.** 1) $m-n$ – парне, $m \neq n$; 2) $m-n$ – парне, $m \neq n$; 3) $m-n, m+n$ діляться на 4; 4) $m \neq n$; 5) $m \neq n$; 6) $m-n$ – парне. **6.11.** а), б) Так. **6.14.** $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}t, \frac{3}{4}t^2 - \frac{\sqrt{10}}{4})$. **6.15.** 1) $\frac{1}{\sqrt{3\pi}}$, $\sqrt{\frac{2}{3\pi}}\cos t$, $\sqrt{\frac{6\pi}{3\pi^2-8}}(\sin t - \frac{2}{3\pi})$; 2) $\frac{1}{\sqrt{3\pi}}$, $\sqrt{\frac{6\pi}{3\pi^2-8}}(\sin t - \frac{2}{3\pi})$, $\sqrt{\frac{2}{3\pi}}\sin 2t$; 3) $\frac{1}{\sqrt{3\pi}}$, $\sqrt{\frac{2}{3\pi}}\cos t$, $\sqrt{\frac{2}{3\pi}}\cos 2t$; 4) $\frac{1}{\sqrt{3\pi}}$, $\sqrt{\frac{2}{3\pi}}\sin 2t$, $\sqrt{\frac{6\pi}{3\pi^2-8}} \times (\sin 3t - \frac{2}{9\pi})$; 5) $\frac{1}{\sqrt{3\pi}}$, $\sqrt{\frac{2}{3\pi}}\cos 2t$, $\sqrt{\frac{2}{3\pi}}\cos 3t$; 6) $1,\ \sqrt{3}(2t-1),\ 6\sqrt{5}t^2 - 6\sqrt{5}t + \sqrt{5}$; 7) $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{\frac{3}{2}}(t-1)$, $\frac{3\sqrt{10}}{4}t^2 - \frac{3\sqrt{10}}{2}t + \frac{\sqrt{10}}{2}$; 8) $\sqrt{3}t,\ 4\sqrt{5}t^2 - 3\sqrt{5}t,\ 15\sqrt{7}t^3 + 6\sqrt{7}t - 20\sqrt{7}t^2$; 9) $\frac{\sqrt{6}}{4}t$, $\frac{\sqrt{10}}{2}t^2 - \frac{3\sqrt{10}}{4}t$, $\frac{15\sqrt{14}}{16}t^3 - \frac{5\sqrt{14}}{2}t^2 + \frac{3\sqrt{14}}{2}t$; 10) $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{3\sqrt{10}}{4}t^2 - \frac{\sqrt{10}}{4}$, $\frac{\sqrt{14}}{2}t^3$. **6.17.** $P(t) = 0, t \in \mathbb{R}$. **6.18.** $\alpha = \operatorname{sh} 1$, $\beta = 3e^{-1}$. **6.19.** $T_m = \frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum\limits_{k=1}^{p}\frac{\sin(2k-1)t}{2k-1}, p = [\frac{m+1}{2}]$. **6.24.** 1) $T(t) = \pi - \sum\limits_{n=1}^{m}\frac{2}{n}\sin nt$; 2) $T(t) = \sum\limits_{n=1}^{m}\frac{\sin nt}{n}$; 3) $T(t) = \frac{\pi}{2} + \sum\limits_{n=1}^{m}\frac{2((-1)^n-1)}{n^2\pi}\cos nt$; 4) $T(t) = \sum\limits_{n=1}^{m}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nt$; 5) $T(t) = -2\sin t + \frac{4\pi}{3}\sin^2 t$; 6) $T(t) = \frac{3\pi}{2} - \frac{4}{3\pi}\cos t$; 7) $T(t) = 2\sin t - \sin 2t$; 8) $T(t) = -\frac{4}{3\pi}\cos t - \frac{4}{27\pi}\cos 3t$. **6.28.** 1) $\frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^3}{4} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{8}{\pi(2n-1)^4}$; 2) $\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{8}{\pi(4n^2-1)^2}$; 3) $\frac{\pi}{2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{32}{\pi((2n-1)^2-4)^2}$. **6.29.** 1) $\frac{\pi^3}{3} = 2\pi\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$; 2) $\pi = \frac{8}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$; 3) $\frac{\pi}{2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{32n^2}{\pi(4n^2-1)^2}$; 4) $\frac{\pi}{2} - \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{8(2n-1)^2}{\pi((2n-1)^2-4)^2}$. **6.30.** 1) $\frac{\pi^3}{24} = \frac{\pi^3}{32} + \frac{\pi}{4} \times \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} + \frac{1}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$; 2) $\frac{\pi}{4} = \frac{2}{\pi} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{\pi(4n^2-1)^2} + \frac{16n^2}{\pi(4n^2-1)^2}\right)$; 3) $\frac{\pi}{4} = \frac{2}{\pi} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{\pi(4n^2-1)^2} + \frac{16n^2}{\pi(4n^2-1)^2}\right)$. **6.31.** 1) $f(t) = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2t}{2}, t \in \mathbb{R}$; $\frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$; 2) $f(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4\sin(2n-1)t}{\pi(2n-1)}, t \in \mathbb{R}$; $2\pi = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{16}{\pi(2n-1)^2}$ 3) $f(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nt, t \neq \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; $\frac{2\pi^3}{3} = 4\pi\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$; 4) $f(t) =$

$= \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n}$, $t \in \mathbb{R}$; $\frac{\pi^3}{6} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n^2}$; 5) $f(t) = \frac{2\pi^3}{3} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nt$, $t \in \mathbb{R}$; $\frac{16\pi^5}{15} = \frac{8\pi^5}{9} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} 16\pi n^4$. **6.32.** 1) $t^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nt$, $t \in [0, \pi]$; $\frac{2\pi^5}{5} = \frac{2\pi^5}{9} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{16\pi}{n^4}$; 2) $t^2 = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3\pi}(2 + 2(-1)^{n+1} + \pi^2 n^2(-1)^n) \sin nt$, $t \in [0; \pi)$; $\frac{2\pi^5}{5} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^6\pi}(\pi^2 n^2(-1)^n + 2 + 2(-1)^{n+1})^2$; 3) $\frac{4\pi^2}{3} + 4\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \times$ $\times \left(\frac{\cos nt}{n} - \pi \sin nt\right)$, $t \in (0; 2\pi)$; $\frac{32\pi^5}{5} = \frac{32\pi^5}{9} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{16\pi}{n^4} + \frac{16\pi^3}{n^2}\right)$. **6.33.** 1) $\frac{\pi}{2} -$ $- \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)^2} \cos(2n-1)t$, $t \in \mathbb{R}$; 2) $-\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{\pi(2n-1)} \cos(2n-1)t$, $t \in \mathbb{R}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)} \sin(2n-1)t, t \in \mathbb{R}$; 4) $\frac{2}{\pi} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(4n^2-1)} \cos 2nt$, $t \in \mathbb{R}$; 5) $\frac{2}{\pi} -$ $- \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{(4n^2-1)\pi} \cos 2nt$, $t \in \mathbb{R}$; 6) $\frac{\sin(2\sqrt{2}\pi)}{2\sqrt{2}\pi} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{\sqrt{2}\sin(2\sqrt{2}\pi)}{(n^2-2)\pi} \cos nt -$ $- \frac{2n\sin^2(\sqrt{2}\pi)}{(n^2-2)\pi} \sin nt \Big)$, $t \neq 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; 7) $\frac{\sin^2(\sqrt{2}\pi)}{\sqrt{2}\pi} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{2\sqrt{2}\sin^2(\sqrt{2}\pi)}{(n^2-2)\pi} \cos nt +$ $+ \frac{n\sin^2(2\sqrt{2}\pi)}{(n^2-2)\pi} \sin nt \Big)$, $t \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 8) $\frac{4}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n-1)^{-2} \sin(2n -$ $- 1)t$, $t \in \mathbb{R}$; 9) $\frac{\pi}{2} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4\cos(2n-1)t}{(2n-1)^2\pi}$, $t \in \mathbb{R}$; 10) $2 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4\sin(2n-1)t}{(2n-1)\pi}$, $t \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 11) $\frac{\pi}{4} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)^2\pi} \cos(2n-1)t - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin nt$, $t \neq \pi(2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$; 12) $-\frac{\pi}{4} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)^2\pi} \cos(2n-1)t - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin nt$, $t \neq \pi(2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$; 13) $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)^2\pi} \cos(2n-1)t - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+(\pi-1)(-1)^n}{n\pi} \sin nt$, $t \neq$ $\neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **6.34.** 1) $f(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nt}{4n^2-1}$, $t \in [0; \pi]$; 2) $f(t) = \frac{\pi}{4} -$ $- \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)^2\pi} \cos(4n-2)$, $t \in [0; \pi]$; 3) $f(t) = \frac{\pi}{8} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2(\cos\frac{\pi n}{2} - (-1)^n)}{\pi n^2} \cos nt$, $t \in [0; \pi]$. **6.35.** 1) $f(t) = \frac{4}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2-1} \sin 2nt$, $t \in (0; \pi)$; 2) $f(t) =$ $= \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{\pi(2n-1)^2} \sin(2n-1)t, t \in [0; \pi]$; 3) $f(t) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\pi n + 2\sin\frac{\pi n}{2}}{\pi n^2} \sin nt$, $t \in [0; \pi)$. **6.36.** $f(0) = f(2\pi) = -\frac{1}{2}$, $f(\pi) = f(3\pi) = 0$. **6.37.** 1) $\frac{2\sin t}{5-4\cos t}$; 2) $\frac{1-2\cos t}{4\cos t-5}$; 3) $(6\sin\alpha\sin t)^{-1}\ (9\cos^2 t - 3\cos\alpha\cos t + 9\cos^2\alpha + 16)$;

4) $\frac{5\cos^2 t-6}{8\cos^2 t-9}$; 5) $\frac{e(1+e^2)\sin t}{(e^2+1-2e\cos t)(e^2+1+2e\cos t)}$; 6) $e^{\cos t}\cos(\sin t)$; 7) $e^{\cos t}\times$ $\times\sin(\sin t)$. **6.38.** 1) $f(t)=\frac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)\pi}\sin\frac{(2n-1)\pi t}{l}$, $t\neq kl$, $k\in\mathbb{Z}$; $l=\frac{4l}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{l}{2}$; 2) $f(t)=\frac{1}{2}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi nt}{\pi n}$, $t\neq k$, $\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}12\pi^2n^2$; 3) $f(t)=\frac{3}{4}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi^2(2n-1)^2}\cos\pi(2n-1)t-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\pi nt}{\pi n}$, $t\neq 2k$, $k\in\mathbb{Z}$; $\frac{4}{3}=$ $=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^4(2n-1)^2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^2n^2}+\frac{9}{8}$; 4) $f(t)=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2n-1)}\sin\frac{\pi t}{2}(2n-1)$, $t\neq 2k$, $k\in\mathbb{Z}$; $8=4+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{32}{\pi^2(2n-1)^2}$; 5) $f(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4l(-1)^{n+1}}{\pi^2(2n-1)^2}\sin\frac{\pi t(2n-1)}{l}$, $t\in\mathbb{R}$; $\frac{l^3}{6}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{16l^3}{\pi^4(2n-1)^4}$; 6) $f(t)=\frac{l}{4}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n l}{\pi(2n-1)}\cos\frac{\pi t(2n-1)}{l}-$ $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{l(2(-1)^{n+1}\pi n-2\sin\frac{\pi n}{2}+\pi n\cos\frac{\pi n}{2})}{\pi^2n^2}\sin\frac{\pi nt}{l}$, $t\neq l+2kl$, $k\in\mathbb{Z}$; $\frac{5l^3}{6}=\frac{l^3}{8}+$ $+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{l^3}{\pi^2(2n-1)^2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{l^3}{\pi^4n^4}(2(-1)^{n+1}\pi n-2\sin\frac{\pi n}{2}+\pi n\cos\frac{\pi n}{2})^2$; 7) $f(t)=$ $=\frac{l}{4}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\pi(2n-1)}\cos\frac{\pi t(2n-1)}{l}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{l}{\pi^2n^2}(\pi n\cos\frac{\pi n}{2}-2\sin\frac{\pi n}{2})\sin\frac{\pi(2n-1)t}{l}$, $t\in\mathbb{R}$; $\frac{l^3}{3}=\frac{l^3}{8}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{l^3}{\pi^2n^2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{l^3}{\pi^4n^4}\times\times(\pi n\cos\frac{\pi n}{2}-2\sin\frac{\pi n}{2})^2$; 8) $f(t)=$ $=\frac{1}{2}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2(2n-1)^2}\cos\frac{\pi t}{2}(2n-1)$, $t\in\mathbb{R}$; $\frac{4}{3}=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{32}{\pi^4(2n-1)^4}$. **6.39.** 1) $f(t)=$ $=\frac{\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nt}{n^2}$; 2) $f(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\frac{24}{n^3}-\frac{\pi^2}{4n})\sin nt$. **6.40.** $\frac{\alpha\pi-\alpha^2}{2}$, $\frac{\pi^2}{6}-\frac{\alpha\pi-\alpha^2}{2}$. **6.41.** $f(t)=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin(2n-1)t}{\pi(2n-1)(2n+1)(2n-3)}-\frac{1}{8}\cos 2t$, $f'(t)=\frac{\sin 2t}{4}-$ $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(2n+1)(2n-3)}\cos(2n-1)t$. **6.43.** $f(t)=\frac{t^3}{12}-\frac{\pi t^2}{4}+\frac{\pi^2 t}{6}$, $t\in(0;2\pi)$. **6.44.** 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha^n\sin nt$; 2) $1+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha^n\cos nt$. **6.45.** 1) $f(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{1-\cos\lambda}{\lambda}\sin\lambda x\,d\lambda$, $|x|\neq 1$; 2) $f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{2\sin\lambda\pi}{1-\lambda^2}\sin\lambda x\,d\lambda$, $x\in\mathbb{R}$. **6.46.** 1) $\widehat{f}(\lambda)=\frac{2\sin a\lambda}{\lambda}$; 2) $\widehat{f}(\lambda)=\sqrt{2\pi}\sigma e^{i\lambda a-\frac{\sigma^2\lambda^2}{2}}$; 3) $\widehat{f}(\lambda)=\frac{1}{1-i\lambda}$; 4) $\widehat{f}(\lambda)=\frac{2a}{a^2+\lambda^2}$; 5) $\widehat{f}(\lambda)=$ $=\pi e^{-|\lambda|}$. **6.47.** $\widehat{t^2f(t)}\,(\lambda)=-\widehat{f}''(\lambda)$. **6.48.** $\widehat{f'}\,(\lambda)=-\lambda i\widehat{f}(\lambda)$.

Рекомендована література

[1] Дороговцев А.Я. Математичний аналіз: Підручник: У двох частинах. Частина 2.– К.: Либідь, 1993.– 320 с.

[2] Дороговцев А.Я. Математический анализ. Краткий курс в современном изложении.– Издание второе.– К., Факт, 2004.– 560 с.

[3] Дороговцев А.Я. Математический анализ: Сборник задач.– К., Вища школа, 1987.– 408 с.

[4] Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М., Наука, 1972.– 544 с.

[5] Денисьєвський М.О., Курченко О.О., Нагорний В.Н., Нестеренко О.Н., Петрова Т.О., Чайковський А.В. Збірник задач з математичного аналізу. Функції однієї змінної.– К.: ВПЦ "Київський університет", 2005. – 249 с.

[6] Навчальні завдання до практичних занять з математичного аналізу для студентів механіко-математичного факультету (1 семестр другого курсу, частина I)/ Упорядн. А.Я. Дороговцев, М.О. Денисьєвський, О.Г. Кукуш – К.: ВПЦ "Київський університет", 2006. – 79 с.

[7] Навчальні завдання до практичних занять з математичного аналізу для студентів механіко–математичного факультету (1 семестр другого курсу, частина II) / Упорядн. А.Я. Дороговцев, О.Г. Кукуш, М.О. Денисьєвський, А.В. Чайковський. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2004. – 48 с.

[8] Навчальні завдання до практичних занять з математичного аналізу для студентів механіко–математичного факультету (2 семестр другого курсу)/ Упорядн. А.Я. Дороговцев, О.Г. Кукуш, М.О. Денисьєвський, А.В. Чайковський — К.: ВПЦ "Київський університет", 2006. – 94 с.

[9] Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе.– М., Мир, 1967.– 252 с.