1. Форвардні ставки

1.1. **Мотивація.** Основна ідея полягає у наступному. Уявімо, що через рік ми отримаємо 1 грн. Після цього ми захочемо його інвестувати. Як нам зафіксувати відсоткову ставку сьогодні? І що це буде за ставка? Тут мова йде про безризикове інвестування, або інвестування з мінімальним ризиком. Нехай r_1 - це відсоткова ставка по однорічній безкупонній облігації. А r_2 - аналогічна відсоткова ставка по дворічній облігації.

Тоді ми позичимо кількість $1/(1+r_1)$ першої облігації та купимо на них других. Тоді через рік, ми повинні повернути суму $\frac{1+r_1}{1+r_1} = 1$, як ми повертаємо з нашого очікуваного доходу в 1. Через два роки ми отримаємо дохід по другій облігації розміром $\frac{(1+r_2)^2}{1+r_1}$. Тоді наша ефективна ставка на інтервалі $1, 2$ рівна:

$$f_{1,2} = \frac{(1+r_2)^2}{1+r_1} - 1.$$

1.2. **Формальне визначення.** . Нехай P_n - це ціна облігації одинчного номіналу, без купонів, строком на n років яка погашається за номіналом. Чому рівна прибутковість такої облігації? Позначимо прибутковість через r_n, тоді

$$P_n = (1+r_n)^{-n},$$

звідки

$$r_n = P_n^{-1/n} - 1.$$

Тоді величина r_n - називається спотовою ставкою. Очевидно, що на ринку торгуються також інші облігації, і прибутковість між ними має бути узгоджена. Розглянемо облігацію яка купується продається за номіналом і запезпечує купонні виплати розміром g, раз на рік. Очевидно прибутковість такої облігації рівна g. Назвемо цю величину n-річним номінальним доходом і позначимо yc_n. Очевидно, що yc_n має бути пов'язаним з r_n. Яким чином?

Подібну n річну облігацію (з купоном) можна представити у вигляді n безкупонних облігацій номіналом yc_n та одну безкупонну облігацію номіналом 1. Маємо грошовий потік прибутків:
1-ий рік yc_n,
2-ий рік yc_n,
3-ій рік yc_n,
...
n-ий рік yc_n та 1. Аналогічний грошовий потік буде згенеровано портфелем з безкупонних облігацій номіналом yc_n на 1, 2, ..., n - років (тобто всього n-облігацій) та однією n-річною облігацією номіналом 1.

Тоді ціна n-річної облігації з купоном має дорівнювати ціні вказаного портфелю. Вартість кожної з перших n облігацій рівна P_k на одиницю номіналу, $k = \overline{1, n}$, тобто $yc_n P_k$, а вартість останньої рівна P_n. Тоді маємо рівність:

$$1 = yc_n(P_1 + \ldots + P_n) + P_n,$$

$$yc_n = \frac{1 - P_n}{P_1 + \ldots + P_n} = \frac{1 - (1+r_n)^{-n}}{(1+r_1)^{-1} + \ldots + (1+r_n)^{-n}}.$$

Розглянемо облігацію, по якій сплачується купон g раз на рік, номіналом 1, яка погашається за номіналом. Ціну такої облігації позначимо через $P_n(g)$. Чому рівна прибутковість такої облігації?

$$P_n(g) = g a_{\overline{n|}} + \nu^n.$$

Розв'язок цього рівняння позначається $y_n(g)$ і називається n-річним прибутком для купонної g. Тому величини r_n, $y_n(g)$, та yc_n взаємозалежні. Величина $y_n(g)$ називається кривою прибутку (при фіксованому g як функція часу n), англ. yield curve. Криві прибутку розглядають для певних видів цінних паперів, наприклад облігацій уряду США.

Приклад 10.3. Акція приносить дохід розміром 5 і розмір доходу збільшується на 4% на рік у складних відсотках. Ставка інфляції $\xi = 0.015$. Нехай реальна відсоткова ставка рівна r, тоді $1+r = \frac{1+i}{1+\xi}$. Тоді дисконтний множник

$$\nu^t = (1+i)^{-t} = \frac{1}{(1+r)(1+\xi)}.$$

грошовий потік дисконтується за допомогою ефективної ставки i! Тоді рівняння вартостей матиме вигляд: Спочатку без урахування інфляції. Нехай i - ефективна ставка пов'язана з цим грошовим потоком. Тоді

$$125 = \frac{5}{(1+i)^{1/4}} + \frac{5(1.04)}{(1+i)^{5/4}} + \ldots = (1+i)^{-1/4} \sum_{k=1}^{\infty} 5(1+i)^{-k} 1.04^{k-1} =$$

$$\frac{5}{(1+i)^{1/4} 1.04} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1.04}{1+i}\right)^k = \frac{5}{(1+i)^{1/4} 1.04} \left(\frac{1}{1-\frac{1.04}{1+i}}\right) =$$

$$= \frac{5}{(1+i)^{1/4} 1.04} \left(\frac{1+i}{i-0.04}\right) = \frac{5(1+i)^{3/4}}{(i-0.04)1.04}.$$

$$i \approx 0.081,$$

тепер обчилимо r:

$$r = \frac{1+i}{1+\xi} - 1 = \frac{1.081}{1.015} - 1 = 0.065$$

Це ефективний дохід без урахування інфляції.

Задача 12.2. Однорічна форвардна ставка $f_{n,n+1}$ для $n = 0, 1, 2$ дорівнює відповідно $f_{0,1} = 0.06$, $f_{1,2} = 0.065$, $f_{2,3} = 0.07$, Обчислити номінальний дохід 3-річної облігації (тобто yc_3).

Розв'язання. Маємо формулу для

$$yc_3 = \frac{1-(1+r_3)^{-3}}{(1+r_1)^{-1} + (1+r_2)^{-2} + (1+r_3)^{-3}}$$

Тепер знайдемо спотові ставки r_1, r_2 та r_3. Що таке спотова ставка r_n? Це ставка яка діє на інтервалі $[0, n]$.

$$r_1 = f_{0,1} = 0.06,$$

$$(1+r_2)^2 = (1+f_{0,1})(1+f_{1,2}), \ (1+r_2)^{-2} = [(1+f_{0,1})(1+f_{1,2})]^{-1},$$

$$(1+r_3)^3 = (1+f_{0,1})(1+f_{1,2})(1+f_{2,3}), \ (1+r_3)^{-3} = [(1+f_{0,1})(1+f_{1,2})(1+f_{2,3})]^{-1}$$

Тоді:

$$yc_3 = \frac{1-[(1+f_{0,1})(1+f_{1,2})(1+f_{2,3})]^{-1}}{(1+f_{0,1})^{-1} + [(1+f_{0,1})(1+f_{1,2})]^{-1} + [(1+f_{0,1})(1+f_{1,2})(1+f_{2,3})]^{-1}}.$$

$$yc_3 = \frac{1-(1.06*1.065*1.07)^{-1}}{1.06^{-1} + (1.06*1.065)^{-1} + (1.06*1.065*1.07)^{-1}} = 0.0647826.$$

Задача 12.2. модифікована Однорічна форвардна ставка дорівнює $f_{0,1} = 0.06$, $f_{1,2} = 0.065$, а дворічна $f_{1,3} = 0.07$, Обчислити номінальний дохід 3-річної облігації (тобто yc_3).
Розв'язання. Маємо формулу для

$$yc_3 = \frac{1 - (1 + r_3)^{-3}}{(1 + r_1)^{-1} + (1 + r_2)^{-2} + (1 + r_3)^{-3}}$$

Тепер знайдемо спотові ставки r_1, r_2 та r_3. Що таке спотова ставка r_n? Це ставка яка діє на інтервалі $[0, n]$.

$$r_1 = f_{0,1} = 0.06,$$
$$(1 + r_2)^2 = (1 + f_{0,1})(1 + f_{1,2}),\ (1 + r_2)^{-2} = [(1 + f_{0,1})(1 + f_{1,2})]^{-1},$$
$$(1 + r_3)^3 = (1 + f_{0,1})(1 + f_{1,3})^2,\ (1 + r_3)^{-3} = [(1 + f_{0,1})(1 + f_{1,3})^2]^{-1}$$

Тоді:

$$yc_3 = \frac{1 - [(1 + f_{0,1})(1 + f_{1,3})^2]^{-1}}{(1 + f_{0,1})^{-1} + [(1 + f_{0,1})(1 + f_{1,2})]^{-1} + [(1 + f_{0,1})(1 + f_{1,2})^2]^{-1}}.$$

$$yc_3 = \frac{1 - (1.06 * 1.07^2)^{-1}}{1.06^{-1} + (1.06 * 1.065)^{-1} + (1.06 * 1.07^2)^{-1}} = 0.06633512.$$

Якщо нам потрібно знайти $f_{2,3}$ то повинна виконуватися рівність:

$$(1 + f_{1,2})(1 + f_{2,3}) = (1 + f_{1,3})^2,\ f_{2,3} = \frac{(1 + f_{1,3})^2}{(1 + f_{1,2})} - 1.$$

Задача 12.3. Інвестор купив облігацію з купонами в 10% на рік, які виплачуються наприкінці кожного півріччя. Облігацію буде погашено через 20 років сумою в 110 гривень. З купонних виплат береться податок розміром 25%. Номінал облігації 100 грн. Обчислити ціну та волатильність облігації при відсотковій ставці у 10% річних.
Розв'язання. Для обчислення ціни скористаємось формулою Мейкема.
Маємо: $R = 1.1$, $D = 0.1$, $g = D/R = 0.1/1.1$, $p = 2$, $T = 20$, $t_1 = 0.25$, $i = 0.1$, $i^{(2)} = 2(1.1^{1/2} - 1)$.

$$A = \frac{g(1 - t_1)}{i^{(p)}}(C - K) + K = \frac{(0.1/1.1) * 0.75}{2 * (1.1^{1/2} - 1)}(110 - 110 * 1.1^{-20}) + 110 * 1.1^{-20} = 81.76$$

Обчислимо волатильність:

$$v = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} C_k t_k \nu^{t_k + 1}}{\sum\limits_{k=1}^{n} C_{t_k} \nu^{t_k}}.$$

При обчисленні волатильності цінних паперів, мають на увазі волатильність доходів (без урахування ціни). Наш потік доходів від купонів по облігації має такий вигляд:

$$C_k = 5 * 0.75,\ k = 1, 40,\ t_k = k/2,$$

та остання виплата наприкінці, розміром 110 гривень в момент часу $t = 20$.

$$v = \frac{\sum\limits_{k=1}^{40} 5 * 0.75 * \frac{k}{2} * \nu^{\frac{k}{2} + 1} + 110 * 20 * \nu^{21}}{\sum\limits_{k=1}^{40} 5 * 0.75 * \nu^{k/2} + 110 * \nu^{20}} = \frac{728.5246}{87.76} \approx 8.3.$$