ЗМІСТ

Передмова **6**

1. Фінансовий аналіз **7**
1.1 Часова вартість грошей. Грошові потоки 7
1.1.1 Часова вартість грошей 7
1.1.2 Ануїтети 19
1.2 Виплата боргу 24
1.2.1 Графік виплати боргу 24
1.2.2 Споживчий кредит 26
1.2.3 Завчасне повернення боргу 29
1.3 Порівняння інвестиційних проектів 32
1.3.1 Грошові індикатори 33
1.3.2 Прибуток фонду 35
1.3.3 Цінні папери з фіксованим відсотком 36
1.3.4 Часова поведінка відсоткових ставок 43

2. Основи теорії фінансів і фінансової звітності **52**
2.1 Ключові принципи фінансів 52
2.2 Власність і капітал 58
2.2.1 Власність компанії 58
2.2.2 Типи капіталу компанії 61
2.2.3 Оподаткування 66
2.2.4 Фінансові інструменти 71
2.2.5 Випуск цінних паперів 82
2.3 Вступ до фінансової звітності 91
2.3.1 Сутність фінансового обліку 91
2.3.2 Облікові принципи 98
2.3.3 Балансовий звіт 101
2.3.4 Рахунок прибутків і збитків 105
2.3.5 Капітал та резерви 112
2.3.6 Консолідовані фінансові звіти 113
2.4 Інтерпретація рахунків 117

2.4.1 Вимірювання ризику, пов'язаного з позичковим капіталом 117
2.4.2 Міри, які використовують інвестори в акції . 122
2.4.3 Облікові коефіцієнти 126
2.5 Фінансове управління 131
2.5.1 Структура капіталу і дивідендна політика . 131
2.5.2 Вартість капіталу 140
2.5.3 Оцінка капітального проекту 149

3. Фінансова математика 164
3.1 Вступ 164
3.2 Фінансові ринки з дискретним часом 168
3.2.1 Первинні цінні папери 168
3.2.2 Портфель інвестора. Безарбітражні ринки . 172
3.2.3 Міри, нейтральні до ризику. Фундаментальна теорема оцінювання фінансових активів в одноперіодній моделі . 176
3.2.4 Платіжні зобов'язання та похідні цінні папери. Справедливі ціни. Досяжні платіжні зобов'язання. Закон однієї ціни . . 182
3.2.5 Повнота фінансового ринку 189
3.2.6 Відносний дохід платіжних зобов'язань . . . 191
3.2.7 Динамічна теорія портфеля 195
3.2.8 Три форми гіпотези ефективних ринків . . . 206
3.2.9 Американські платіжні зобов'язання 231
3.2.10 Квадратична теорія хеджування на неповному ринку 252
3.2.11 Означення та деякі властивості мінімальних мартингальних мір 266
3.2.12 Експонента Долеан та теорема Гірсанова для дискретного часу 268
3.2.13 Характеризація еквівалентних мартингальних мір 272
3.2.14 Характеризація мінімальної мартингальної міри 273
3.2.15 Існування та єдиність мінімальної мартингальної міри в одновимірному випадку 277

3.3 Фінансові ринки з неперервним часом 280
3.3.1 Перехід від моделі з дискретним часом до неперервного часу 280
3.3.2 Формула Блека-Шоулса справедливої ціни Європейського деривативу в моделі з неперервним часом 287
3.3.3 Залежність ціни Блека-Шоулса від параметрів моделі. Грецькі символи . . . 288
3.3.4 Рівняння Блека-Шоулса як результат аналізу зміни портфеля інвестора 291
3.3.5 Теорія арбітражу для ринків з неперервним часом 293
3.3.6 Американські платіжні зобов'язання у неперервній моделі 297
3.3.7 Екзотичні деривативи у неперервній моделі 302

A. Елементи стохастичного аналізу **308**
A.1 Вінерівський процес 308
A.2 Інтеграл Іто 309
A.2.1 Формула Іто 313
A.2.2 Стохастичні диференціальні рівняння 318
A.2.3 Зв'язок з рівняннями математичної фізики . 320
A.2.4 Теорема Гірсанова 322
A.3 Мартингальне зображення 324
A.3.1 Стохастична похідна 327

B. Таблиці **329**
B.1 Ануїтетні таблиці 329
B.2 Стандартна нормальна функція розподілу 337

Список рекомендованої літератури **339**

Покажчик позначень **345**

Покажчик термінів **346**

ПЕРЕДМОВА

Цей підручник охоплює основні курси з математичних фінансів, що викладаються на механіко-математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Першу частину присвячено фінансовому аналізу, у ній висвітлено основні теми курсу CT1 “Фінансова математика” Британського інституту актуаріїв та інших програм підготовки актуаріїв та фінансових аналітиків: дисконтування та акумулювання, ануїтети, оцінки та порівняння інвестиційних проектів, зміни відсоткової ставки в часі, теорію імунізації, тощо.

У другій частині дано основні поняття теорії фінансів і фінансової звітності. За змістом ця частина відповідає курсу CT2 “Фінанси та фінансова звітність” Британського інституту актуаріїв. З огляду на це, багато прикладів та понять стосуються Великої Британії. Тим не менш, оскільки теорію фінансів викладено тут на найвищому, концептуальному, щаблі, то більшість матеріалу стосується й України.

У третій частині розглянуто питання, пов’язані з функціонуванням фінансових ринків, купівлею та продажем цінних паперів, обрахуванням справедливих цін в умовах, коли зміна цін основних активів відбувається залежно від випадку. Ця частина частково охоплює курс CT8 “Фінансова економіка”.

У додатку A наведено необхідні поняття стохастичного аналізу: стохастичні диференціальні рівняння, формули Іто й Гірсанова, тощо. У додатку B дано таблиці, що можуть бути використаними при розв’язуванні задач з курсів.

В цілому, даний посібник буде корисним читачам з різним рівнем підготовки, студентам молодших і старших курсів спеціальностей “математика”, “статистика”, “прикладна математика”, аспірантам і всім бажаючим вивчити основи фінансового аналізу, теорії фінансів і фінансової математики.

Матеріал для посібника зібрано та підготовлено за підтримки програми Tempus у рамках проекту TEMPUS PROJECT IB-JEP-25054-2004, за що автори висловлюють щиру вдячність керівникам проекту.

Частина 1
Фінансовий аналіз

1.1 Часова вартість грошей. Грошові потоки

1.1.1 Часова вартість грошей

Вартість грошей змінюється з часом. Сто гривень, отриманих зараз, коштують більше, ніж сто гривень, отриманих через рік, і для будь-якої людини вибір, отримати одну і ту саму суму зараз чи через рік, є очевидним. Це явище зменшення вартості грошей, яке називається *часовою вартістю грошей*, пояснюється не лише інфляцією. Інші фактори, що зумовлюють цю зміну у вартості, включають: ризик неотримання суми у майбутній час (який називають *кредитним* ризиком, або ризиком дефолту), *ризик втрати ліквідності*, який полягає у тому, що активи, у які можна вкласти гроші зараз, будуть недоступними через певний проміжок часу.

Врешті, гроші, які ми отримаємо лише у майбутньому, не можуть використовуватися за своїм прямим призначенням і тому не мають для нас миттєвої цінності. Тобто, позичаючи гроші, ми тимчасово передаємо право їхнього використання іншому, і за це потрібно платити, як за оренду. Винагороду, яку боржник сплачує кредитору за користування позикою, називають *відсотками*, або іноді *відсотком*, коли йдеться про єдиний платіж.

Про розмір відсотків зазвичай домовляються заздалегідь, це може бути, наприклад, певна сума, що виплачується разом із поверненням позики, або серія платежів, після якої відбувається повернення позиченої суми. Разом із позикою, основним прикладом у теорії відсотка буде депозит: сума вкладається у банк на певний термін, і наприкінці цього терміну повертається разом з відсотками. Тому часто ми будемо казати не про позичання, а про інвестування.

Якщо відсотки виплачуються наприкінці терміну позичання, то розмір відсотків зазвичай виражають через *відсоткову ставку*, що дорівнює частці суми позики, яку потрібно виплатити у вигляді відсотків; при цьому вказують період, за який нараховуються відсотки, частіше за все це рік. Наприклад, якщо кажуть, що річна відсоткова ставка $i = 0{,}1$, то при позичанні суми у 100 грн через рік потрібно повернути 100 грн (повернення *капіталу*, або *основного капіталу*) і відсоток $100 \times 0{,}1 = 10$ грн. У загальному випадку, якщо позичається сума C, а річна відсоткова ставка дорівнює i, то через рік потрібно повернути суму $C(1 + i)$. Відзначимо також, що i частіше подається не в абсолютних одиницях, а у процентах, наприклад, замість $i = 0{,}06$ пишуть $i = 6\ \%$.

Припустимо, що відсоткова ставка є річною, тобто сторони домовилися про те, якою має бути сума відсотків при поверненні позики через рік. Якою має бути ця сума при поверненні грошей через декілька років? Загалом, є дві принципово різні схеми нарахування відсотків при позичанні на декілька років.

Просте нарахування відсотка Така схема є лінійною за часом, тобто сума відсотків, яка виплачується наприкінці терміну, лінійно залежить від терміну позичання. Таким чином, якщо сума C позичається на t років, а річна відсоткова ставка дорівнює i, то наприкінці повернути потрібно $C(1 + ti)$. Зауважимо, що t тут не обов'язково має бути цілим, це може бути чверть або половина року.

Складне нарахування відсотка Уявімо банк, який пропонує вкласти гроші принаймні на рік, річна відсоткова ставка дорівнює i, і можливість відкрити такий депозит є на початку кожного року. Інвестор може відкрити депозит на суму C на один рік і, знявши через рік накопичену на рахунку суму $C(1+i)$, знов вкласти її на рік. Тоді через два роки загальна сума становитиме

$$C(1 + i)(1 + i) = C(1 + i)^2 = C(1 + 2i + i^2),$$

і це строго більше, ніж сума $C(1 + 2i)$, яку він мав би при простому нарахуванні відсотків. Очевидна вигода змусила б кожного вкладника діяти так само, закриваючи щороку депозит і відкриваючи новий, що у свою чергу привело би до великих операційних витрат банку. Тому звичайним у комерційній практиці є складне нарахування відсотка.

Таким чином, найбільш суттєвою рисою складного нарахування відсотків є те, що відсотки нараховуються і на відсотки, а не тільки на основний капітал. Тобто сума, яку вкладник одержить наприкінці терміну, дорівнює сумі, яку б він отримав, закриваючи і відкриваючи депозити кожного року, як це описано у попередньому абзаці. Продовжуючи викладені вище міркування, маємо, що за умови вкладення суми C на депозит з відсотковою ставкою i накопичена через t років сума становитиме $C(1+i)^t$. З цієї суми C є поверненням капіталу, а $C[(1+i)^t - 1]$ – відсотками. Як і вище, число t не обов'язково має бути цілим. Наприклад, сума, накопичена за d днів внеском розміром C, дорівнює[1]

$$C(1+i)^{d/365}. \tag{1.1.1}$$

Окрім описаних схем простого і складного нарахування відсотків існують інші схеми. Прикладом є так звана *змішана схема*: якщо термін інвестування t у роках не є цілим числом, то для цілої частини цього терміну застосовується складне нарахування відсотка, а для залишку – просте нарахування відсотка, тобто якщо $t = n + s$, де n – ціле, а $s \in [0, 1)$, то сума, накопичена за t років інвестицією розміром C, дорівнює $C(1+i)^n(1+si)$. Тим не менш, така схема, як і схема простого нарахування відсотків, є не дуже поширеною – у переважній більшості випадків застосовується складне нарахування відсотка. Тому у подальшому, якщо не сказано інше, будемо вважати, що відсотки нараховуються за складною схемою, а одиницею виміру часу є рік.

Розглянемо випадок, коли відсотки виплачуються не наприкінці, а на початку терміну, тобто авансом. Ставка d, за якою обчислюється сума відсотка, називається у такому разі не відсотковою, а *дисконтною* ставкою. Якщо сума C вкладається на рік з умовою виплати відсотка авансом, то відсоток, який негайно сплачується, дорівнює Cd. Таким чином, можна вважати, що

[1] Тут неявно припускається, що рік не є високосним, тобто складається з 365 днів. Насправді, загальною практикою є застосовувати формулу (1.1.1) для будь якого року – як звичайного, так і високосного.

сума внеску становить $C(1-d)$, а через рік повертається C, причому з цієї суми Cd є відсотком. Отже, можна визначити відсоткову ставку i, яка відповідає даній дисконтній ставці, з рівності $iC(1-d) = Cd$, тобто

$$i = \frac{1}{1-d} - 1.$$

Вправа 1.1.1. Доведіть, що дисконтна ставка завжди менша за відсоткову ставку, яка їй відповідає. Спробуйте пояснити цей факт за допомогою загальних міркувань, тобто без обчислень.

Грошові потоки. Сучасна вартість

Як було сказано на початку цього пункту, гроші мають різну вартість у різні моменти часу. Тому природно виникає питання – як порівняти суми грошей, що надходять у різні моменти часу? Якщо ці моменти часу вже відбулися, відповісти на це питання просто. Нехай річна відсоткова ставка дорівнює i. Суму C, що надійшла t років тому, можна вкласти в банк, отримавши наприкінці *накопичення* розміром $C(1+i)^t$. У такому сенсі $C(1+i)^t$ є сучасною вартістю цієї грошової суми, і для того, щоб порівняти різні суми грошей, що надійшли у різні моменти часу в минулому, потрібно просто порівняти їхні сучасні вартості – їхні накопичення. Так само, сума, що коштує K зараз, через t років коштуватиме $K(1+i)^t$. Значить, щоб визначити, скільки зараз коштує сума, яка через t років коштуватиме C, потрібно розв'язати рівняння $K(1+i)^t = C$. Його розв'язок

$$K = \frac{C}{(1+i)^t} = C\nu^t$$

називається *сучасною вартістю* (або дисконтованою сучасною вартістю) суми розміром C у момент t. Множник $\nu = 1/(1+i)$, що дорівнює сучасній вартості одиничної суми грошей, яка надійде через рік, називається *дисконтним множником*. Процес визначення сучасної вартості майбутніх грошових сум називають *дисконтуванням*.

Більш загально, можна визначити вартість на момент t_1 грошової суми C у момент t_2 як $C(1+i)^{t_1-t_2}$. При $t_1 > t_2$ це буде накопиченням на момент t_2 цієї суми, а при $t_1 < t_2$ – дисконтованим значенням цієї суми.

Досі розглядалися лише окремі грошові суми. Звичайно, цього недостатньо, оскільки більшість реальних інвестицій включають декілька грошових витрат і декілька надходжень у різні моменти часу. У такому випадку кажуть про *грошовий потік*, або *потік платежів*. Складові грошового потоку – окремі грошові суми – можуть бути як додатними (надходження), так і від'ємними (витрати).

Оскільки гроші у різні моменти часу мають різну вартість, то для підрахування вартості грошового потоку не можна просто додавати розміри грошових сум, з яких він складається, а потрібно звести усі грошові суми до одного і того самого моменту часу. Зокрема, якщо йдеться про поточний момент часу, потрібно підрахувати сучасні вартості цих сум. Отже, вартість грошового потоку на поточний момент – *сучасна вартість* – дорівнює сумі сучасних вартостей грошових сум, з яких він складається. Таким чином, якщо грошовий потік складається із сум $C_1, C_2, \ldots, C_n$ у моменти $t_1, t_2, \ldots, t_n$, відповідно, то його сучасна вартість становить

$$C_1 v^{t_1} + C_2 v^{t_2} + \cdots + C_n v^{t_n} = \sum_{k=1}^{n} C_k v^{t_k}.$$

Під *накопиченням* грошового потоку на момент t розуміють сумарне накопичення тих його складових, що передують моменту t, тобто воно дорівнює

$$\sum_{k: t_k \le t} C_i (1+i)^{t-t_k}.$$

Дисконтування дає можливість порівнювати і додавати гроші, що надходять у різні моменту часу, у той час як безпосереднє додавання цих сум не має жодного сенсу.

Загальна теорія відсотка

В попередньому пункті ми розглянули спрощену ситуацію, коли відсоткові ставки у різні роки є однаковими. У дійсності відсоткова ставка змінюється з часом, оскільки вона є “ціною” грошей у тому сенсі, що її величина визначається в основному поточним попитом на гроші та їхньою пропозицією. Все ж при початковому фінансовому аналізі припускають, що відсоткові ставки є сталими: це суттєво спрощує розрахунки, але дозволяє побачити найбільш суттєве, щоб зробити належні висновки і прийняти рішення. Саме тому в більшій частині матеріалу, що стосується фінансового аналізу, ми будемо припускати сталість відсоткових ставок. Тим не менш, потрібно висвітлити принаймні найважливіші концепції фінансового аналізу за змінних відсоткових ставок.

Припустимо, що час вимірюється роками (зрозуміло, що дане припущення не є дуже суттєвим – просто слово “рік” коротше, за, скажімо, “місяць” або “одиниця часу”). Припустимо, що інвестування 1 грн у момент t (на початку $t+1$-го року) дає через рік суму $1+i(t)$. Величина $i(t)$ називається *річною ефективною відсотковою ставкою* за період від моменту t до моменту $t+1$. Слово “ефективна” підкреслює складне нарахування відсотка. Його зазвичай опускають, тобто завжди, коли написано просто “відсоткова ставка”, йдеться про ефективну відсоткову ставку і складне нарахування відсотка. Його використовують лише для того, що відрізнити ефективну відсоткову ставку від незмінної або номінальної відсоткових ставок, які будуть описані далі.

Як і в попередньому пункті, легко бачити, що за умови вкладання суми C в початковий момент часу, через n років одержимо накопичення

$$C[1+i(0)][1+i(1)]\dots[1+i(n-1)].$$

Розглянемо тепер інвестицію на період h, що не обов’язково є цілим числом років. Річна *номінальна відсоткова ставка* $i_h(t)$ за період від t до $t+h$ визначається так: якщо в момент t робиться інвестиція розміром C на період h, то розмір відсотка становить $Chi_h(t)$, а накопичення – $C[1+hi_h(t)]$.

Коли відсоткові ставки не залежать від часу, номінальна відсоткова ставка позначається i_h. У цьому випадку, якщо $h=1/p$, де p – ціле число, то номінальна відсоткова ставка має спеціальну назву: *номінальна відсоткова ставка, що конвертується* p

разів на рік (або сплачується p разів на рік), і позначається

$$i^{(p)} = i_{1/p}.$$

Таким чином, після кожної $1/p$ року інвестована сума збільшуватиметься в $(1 + i^{(p)}/p)$ разів. Отже, за умови інвестування на початку року суми C через рік матимемо $(1 + i^{(p)}/p)^p$. З іншого боку, накопичення через рік дорівнюватиме $C(1 + i)$, де i – річна ефективна відсоткова ставка. Звідси одержуємо наступне співвідношення між номінальною та ефективною відсотковими ставками:

$$1 + i = \left(1 + \frac{i^{(p)}}{p}\right)^p.$$

Аналогічним чином можна визначити і номінальну дисконтну ставку $d^{(p)}$, яка відповідає сплаті відсотків авансом. Цілком зрозуміло, що

$$1 + \frac{i^{(p)}}{p} = \left(1 - \frac{d^{(p)}}{p}\right)^{-1},$$

звідки можна вивести подальші співвідношення між дисконтними і відсотковими ставками.

Вправа 1.1.2. Доведіть, що відсоткові і дисконтні ставки задовольняють наступні співвідношення:

$$d < d^{(n)} < d^{(m)} < i^{(m)} < i^{(n)} < i$$

при $n < m$. Спробуйте пояснити сенс цих співвідношень за допомогою загальних міркувань.

Накопичення та дисконтування

Основним суттєвим припущенням фінансового аналізу є те, що відсоткові ставки не залежать від сум, які інвестуються або позичаються. Таким чином, відношення накопичених сум дорівнює відношенню інвестованих. Тому природно ввести *накопичувальні множники* $A(t_1, t_2)$, що дорівнюють накопиченню в момент t_2 одиничної інвестиції в момент t_1: для того, щоб підрахувати накопичення суми довільного розміру, потрібно цей розмір помножити на відповідний накопичувальний множник.

Очевидною, але дуже важливою властивістю накопичувальних множників є так званий *принцип узгодженості*: для $t_1 < t_2 < t_3$ має місце рівність

$$A(t_1, t_3) = A(t_1, t_2)A(t_2, t_3).$$

Сенс цієї рівності зрозумілий: вкладання грошей на один період з подальшим вкладанням накопиченої суми на інший період приносить наприкінці те саме накопичення, що і вкладання усіх грошей на обидва періоди одразу. Ця рівність не завжди є точною через наявність податків, операційних та інших витрат, але частіше за все принцип узгодженості виконується. Причиною цього є те, що, як вже було зазначено на початку цього пункту, значення відсоткових ставок обумовлюються попитом і пропозицією. Невиконання принципу узгодженості привело би до дисбалансу попиту і пропозиції на інвестиції з різними термінами, і за рахунок цього відсоткові ставки швидко стали би узгодженими.

За означенням, $A(t, t+h) = 1 + hi_h(t)$, або

$$i_h(t) = \frac{A(t, t+h) - 1}{h}.$$

При $h \to 0$ ми одержимо *інтенсивність відсотка*

$$\delta(t) = \lim_{h \to 0} i_h(t) = \lim_{h \to 0} \frac{A(t, t+h) - 1}{h},$$

яку природно інтерпретувати як номінальну річну відсоткову ставку, що конвертується щомиті: якщо суму C інвестовано у момент t, то накопичення через дуже малий проміжок часу dt становитиме приблизно $C(1 + \delta(t)dt)$. Тоді, використовуючи наближену формулу

$$1 + \delta(t)dt \approx e^{\delta(t)dt},$$

можна виразити накопичувальні множники через інтенсивність відсотка:

$$A(t_1, t_2) = \exp\left\{\int_{t_1}^{t_2} \delta(t)\, dt\right\}. \tag{1.1.2}$$

У частковому випадку, коли інтенсивність відсотка (а тому і відсоткові ставки) не залежить від часу, маємо $A(t_1, t_2) = e^{\delta(t_2 - t_1)}$.

Вправа 1.1.3. Вважаючи інтенсивність відсотка неперервною, доведіть строго формулу (1.1.2). Вказівка: використайте принцип узгодженості та елементарну теорію диференціальних рівнянь.

Аналогічно можна визначити *дисконтувальний множник* $\nu(t_1, t_2)$, який дорівнює вартості на момент t_1 одиничної суми в момент t_2. Зрозуміло, що

$$\nu(t_1, t_2) = (A(t_1, t_2))^{-1} = \exp\left\{-\int_{t_1}^{t_2} \delta(t)\, dt\right\}.$$

Дисконтувальні множники $\nu(0, t)$ грають важливу роль, оскільки вони застосовуються при підрахуванні сучасної вартості, тому для них вживають скорочене позначення: $\nu(t) = \nu(0, t)$. Для сталої в часі інтенсивності відсотка $\nu(t) = \nu^t = \exp\{-\delta t\}$.

Нехай грошовий потік складається с грошових сум $C_1, C_2 \ldots$ у моменти $t_1, t_2, \ldots$ відповідно. Ми можемо записати формулу для сучасної вартості та накопичення цього потоку, використовуючи дисконтувальні та накопичувальні множники. Так, сучасна вартість такого потоку дорівнює

$$C_1\nu(t_1) + C_2\nu(t_2) + \cdots = \sum_k C_k\nu(t_k),$$

а накопичення на момент t дорівнює

$$\sum_{k: t_k \leq t} C_k A(t_k, t).$$

Якщо інтенсивність відсотка стала, то ці формули збігаються з наведеними у одному з попередніх пунктів, оскільки у цьому випадку, очевидно, $1 + i = e^{\delta}$.

У багатьох випадках природно вважати, що грошовий потік є неперервним, тобто гроші надходять щомиті. Наприклад, якщо термін, впродовж якого здійснюються виплати, становить декілька років, а виплати надходять щотижня або навіть щодня, можна вважати такий грошовий потік неперервним. Або при оцінюванні майбутніх грошових потоків відома їхня приблизна величина, але невідомо, у які моменти часу надійде яка сума, тоді ці потоки з метою оцінювання можна вважати неперервними (така ситуація є типовою для торговельної компанії).

За означенням, *неперервний грошовий потік* з інтенсивністю $\rho(t)$, $t \geq 0$ має наступну властивість: якщо позначити валову (тобто без урахування часової вартості) суму грошей, що надійшли з моменту t_1 до моменту t_2, через $S(t_1, t_2)$, то

$$S(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \rho(t) dt.$$

Таким чином, протягом малого проміжку часу від t до $t+dt$ надходить сума $\rho(t)dt$. Отже, сучасна вартість неперервного грошового потоку дорівнює

$$\int_0^\infty \rho(t)\nu(t) dt.$$

(Неперервний грошовий потік не обов'язково є нескінченним – тоді $\rho(t) = 0$ зовні деякого інтервалу.)

Підсумовуючи, якщо грошовий потік складається з окремих платежів C_i в моменти t_k і з неперервної частини інтенсивністю $\rho(t)$, то його сучасна вартість дорівнює

$$\sum_k C_k \nu(t_k) + \int_0^\infty \rho(t)\nu(t) dt.$$

Приклад 1.1.4. Однією з гнучких моделей інтенсивності відсоткової ставки для оцінювання майбутніх грошових потоків є так звана *формула Студлі*:

$$\delta(t) = p + \frac{s}{1 + re^{st}},$$

де p, r, s – певні параметри, які можна оцінити за попередніми значеннями відсоткової ставки. Безпосереднім підрахунком можна переконатися, що відповідна дисконтувальна функція дорівнює

$$\nu(t) = \frac{1}{1+r}\nu_1^t + \frac{r}{1+r}\nu_2^t, \qquad (1.1.3)$$

де $\nu_1 = e^{-(p+s)}$, $\nu_2 = e^{-p}$. Таким чином, при застосуванні формули Студлі сучасна вартість грошового потоку є середньозваженим значенням сучасних вартостей цього потоку при сталих інтенсивностях відсотка p та $p + s$.

Вправа 1.1.5. 1. Дослідіть поведінку функції $\delta(t)$, заданої формулою Студлі, при різних значеннях параметрів p, r, s. 2. Доведіть формулу (1.1.3).

Рівняння вартостей

Для інвестора, що отримує прибутки в обмін на початкові внески, нерідко цікавим є питання, яке є протилежним до тих, що розглядалися в цьому розділі, а саме: яку плату він одержує за те, що втрачає можливість використовувати гроші протягом певного періоду до повернення інвестицій. У випадку інвестування ця плата називається *прибутком*, на відміну від ситуації з позичанням, коли вона називається відсотками. Річний рівень прибутку при цьому звичайно називається *річною нормою прибутку* за інвестицією. Нехай витрати (пасиви) інвестора у моменти $t_1, t_2, \ldots$ становлять $L_1, L_2, \ldots$, а надходження (активи) у ті самі[2] моменти – $A_1, A_2, \ldots$. Тоді чистий платіж у момент t_k дорівнює $C_k = A_k - L_k$, і річна норма прибутку інвестора i визначається з рівняння (СВ – сучасна вартість)

$$\text{СВ}(i) = C_1 v^{t_1} + C_2 v^{t_2} + \cdots = 0, \tag{1.1.4}$$

або

$$A_1 v^{t_1} + A_2 v^{t_2} + \cdots = L_1 v^{t_1} + L_2 v^{t_2} + \cdots ,$$

де $v = 1/(1+i)$. Це рівняння, або еквівалентне йому рівняння (1.1.4), називається *рівнянням вартостей*.

Так само, якщо боржнику потрібно дізнатися, яку річну *ефективну* відсоткову ставку він сплачує за позикою, він може зробити це за допомогою рівняння (1.1.4).

Рівняння (1.1.4) іноді можна розв'язати точно: наприклад, коли це рівняння є лінійним, квадратним або іншим простим алгебраїчним рівнянням. У тому випадку, коли воно має декілька розв'язків, то за річну ефективну норму прибутку (або за річну відсоткову ставку у разі позичання) береться найменший додатний розв'язок цього рівняння, якщо таких розв'язків не існує,

[2] Звичайно надходження і витрати відбуваються в різні моменти. Тим не менш, якщо у певний момент t_k гроші лише надходять, ми можемо покласти $L_k = 0$, якщо ж гроші тільки витрачаються – $A_k = 0$.

тобто інвестор має збитки, то у якості річного рівня збитків береться найбільший від'ємний розв'язок.

Однак, у більшості випадків рівняння (1.1.4) є алгебраїчним дуже високого степеня, і його неможливо розв'язати точно. Тут у нагоді стають наближені методи, найпопулярнішим та найпоширенішим з яких є *метод лінійної інтерполяції*. Він полягає у наступному. Спочатку вибираються два достатньо близькі значення i_1 та i_2 такі, що сучасні вартості $\mathrm{CB}(i_1)$ та $\mathrm{CB}(i_2)$ мають різні знаки. Потім функція $\mathrm{CB}(i)$ вважається приблизно лінійною на проміжку $[i_1, i_2]$. Таким чином, наближеним розв'язком рівняння (1.1.4) буде

$$i \approx i_1 + \frac{\mathrm{CB}(i_1)(i_1 - i_2)}{\mathrm{CB}(i_2) - \mathrm{CB}(i_1)}.$$

Значення i_1 та i_2 зазвичай вибирають так, щоб вони відрізнялися на піввідсотка, або максимум на відсоток. Зрозуміло, що повний перебір і підстановка усіх можливих значень відсотка є непростою справою, тому потрібен метод для отримання першого наближення для відсоткової ставки. Одним можливим підходом є розвинення Тейлора: вирази $\nu^k = (1+i)^k$ можна записати за формулою Тейлора–Маклорена у вигляді

$$\frac{1}{(1+i)^k} = 1 - ki + \frac{k(k+1)}{2} i^2 + \cdots$$

і використати у рівнянні (1.1.4) лише два члени цього розвинення, одержуючи лінійне рівняння, або три члени, одержуючи квадратне рівняння. Приклад застосування формули Тейлора для наближеного розв'язування рівняння вигляду (1.1.4) наведено у пункті 1.2.2.

На останок наведемо достатню умову для того, щоб рівняння (1.1.4) мало єдиний додатний розв'язок. Її доведення буде простою вправою для читача. Позначимо $S(k) = C_1 + \cdots + C_k$.

Твердження 1.1.6. *Припустимо, що існує натуральне n таке, що $S(k) < 0$ при $k < n$, $S(n) \leq 0$, та $S(k) > 0$ при $k > n$. Тоді існує єдина додатна відсоткова ставка, що задовольняє рівняння вартостей* (1.1.4).

1.1.2 Ануїтети

Нерідко грошові потоки складаються з виплат, що відбуваються через однакові моменти часу і їхні розміри заздалегідь визначено за простим правилом. Такі грошові потоки (або угоди, за якими виплачуються ці платежі) називають *ануїтетами*. Навіть коли грошовий потік не є таким, часто його можна розбити на прості складові. Саме тому потрібно розглядати ануїтети окремо. Ми будемо припускати, що річна відсоткова ставка на весь час є сталою і дорівнює i, а відповідна їй інтенсивність відсотка дорівнює δ.

Сталі ануїтети

Найпростіший тип ануїтету – це *сталий ануїтет*, за яким однакові виплати виплачуються щорічно. Якщо ці виплати відбуваються наприкінці кожного року – він називається ануїтетом *постнумерандо*, або ануїтетом *із заборгованістю*. Якщо виплати відбуваються на початку кожного року – ануїтет називається *авансовим* або *пренумерандо*. Оскільки сталий ануїтет пренумерандо є найпоширенішим, його ще називають просто ануїтетом, або звичайним чи простим ануїтетом.

За стандартний сталий ануїтет зручно взяти такий, в якого щорічна виплата дорівнює 1, тому що його сучасна вартість і накопичення виконують роль множників при підрахунку сучасної вартості довільного сталого ануїтету. Сучасну вартість сталого ануїтету із заборгованістю на n років і одиничною щорічною виплатою позначають $a_{\overline{n|}}$ і дорівнює

$$a_{\overline{n|}} = \nu + \nu^2 + \cdots + \nu^n = \frac{1-\nu^n}{i},$$

а сучасна вартість такого ж авансового ануїтету дорівнює

$$\ddot{a}_{\overline{n|}} = 1 + \nu + \nu^2 + \cdots + \nu^{n-1} = (1+i)a_{\overline{n|}} = \frac{1-\nu^n}{d},$$

де d – річна дисконтна ставка, що відповідає i. Накопичення цих ануїтетів на момент n позначаються $s_{\overline{n|}}$ та $\ddot{s}_{\overline{n|}}$ і дорівнюють відповідно

$$s_{\overline{n|}} = (1+i)^n a_{\overline{n|}} = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \cdots + 1 = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

та

$$\ddot{s}_{\overline{n|}} = (1+i)^n \ddot{a}_{\overline{n|}} = (1+i)^n + (1+i)^{n-1} + \cdots + (1+i) = \frac{(1+i)^n - 1}{d}.$$

Якщо виплата ануїтету починається не зараз, а через t років, ануїтет називають *відстроченим* на t років. Сучасна вартість відстроченого звичайного ануїтету дорівнює

$$_{t|}a_{\overline{n|}} = \nu^{t+1} + \nu^{t+2} + \cdots + \nu^{t+n} = \nu^t a_{\overline{n|}}.$$

Очевидно, що

$$a_{\overline{n+m|}} = a_{\overline{n|}} + {}_{n|}a_{\overline{m|}} = a_{\overline{n|}} + \nu^n a_{\overline{m|}}.$$

Останню тотожність називають *ануїтетним рівнянням* і застосовують, коли є таблиця значень ануїтету для різних термінів, та потрібно знайти значення для терміну, якого немає в таблиці.

Якщо виплати за ануїтетом не припиняються, ануїтет називають *довічним* або *безстроковим* і його сучасну вартість позначають

$$a_{\overline{\infty|}} = \frac{1}{i}$$

для ануїтету із заборгованістю та

$$\ddot{a}_{\overline{\infty|}} = \frac{1}{d}$$

для авансового ануїтету. Ануїтетне рівняння для довічних ануїтетів має вигляд

$$a_{\overline{\infty|}} = a_{\overline{n|}} + \nu^n a_{\overline{\infty|}},$$

звідки також можна одержати формулу для вартості ануїтету.

Вправа 1.1.7. Доведіть, що

$$\frac{1}{s_{\overline{n|}}} + i = \frac{1}{a_{\overline{n|}}}.$$

Поясніть цей факт за допомогою загальних міркувань.

Змінні ануїтети

Зростаючим ануїтетом на n років називають ануїтет, за яким наприкінці k-го року виплачується сума k, $k = 1, \ldots, n$. Сучасна вартість цього ануїтету дорівнює

$$(Ia)_{\overline{n|}} = \nu + 2\nu^2 + \cdots + n\nu^n = \frac{\ddot{a}_{\overline{n|}} - n\nu^n}{i},$$

у чому можна переконатися, домножуючи сучасну вартість ануїтету на $(1 + i)$. Цю рівність ще можна записати у вигляді

$$\ddot{a}_{\overline{n|}} = i(Ia)_{\overline{n|}} + n\nu^n,$$

що має просту інтерпретацію як рівність сучасних вартостей надходжень і витрат інвестора, який позичає на початку кожного року одиничну суму, щоб повернути її у момент n, щороку виплачуючи i відсотків на кожну позику. Таким чином, наприкінці k-го року інвестор виплатить ki відсотка, і наприкінці n-го року поверне суму позики n. Накопичення зростаючого ануїтету на момент n дорівнює

$$(Is)_{\overline{n|}} = (1 + i)^n (Ia)_{\overline{n|}}.$$

Відповідно, спадним ануїтетом на n років називається ануїтет, за яким наприкінці k-го року виплачується сума

$$n - k + 1, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Легко побачити, що сучасна вартість такого ануїтету дорівнює

$$(Da)_{\overline{n|}} = \frac{n - a_{\overline{n|}}}{i}.$$

Узагальнюючи, можна розглянути ануїтет із заборгованістю на n років, виплати за яким утворюють арифметичну прогресію. Якщо перша виплата за таким ануїтетом дорівнює a, а різниця прогресії – b, то сучасна вартість такого ануїтету дорівнює

$$(a - b)a_{\overline{n|}} + b(Ia)_{\overline{n|}}.$$

Ануїтети, що сплачуються декілька разів на рік

Всі розглянуті ануїтети є щорічними. Розглянемо тепер ануїтети, що виплачуються p разів на рік. Почнемо зі сталих ануїтетів. Зауважимо, що у даному випадку за стандартний ануїтет беруть такий, за яким виплачується сумарна річна виплата дорівнює одиниці, тобто кожної $\frac{1}{p}$ року виплачується сума $\frac{1}{p}$. Сучасна вартість такого ануїтету на n років із заборгованістю дорівнює

$$a_{\overline{n}|}^{(p)} = \frac{1}{p}\left(\nu^{1/p} + \nu^{2/p} + \dots + \nu^{n}\right) = \frac{1-\nu^n}{i^{(p)}} = \frac{i}{i^{(p)}} a_{\overline{n}|}.$$

Рівність $ia_{\overline{n}|} = i^{(p)} a_{\overline{n}|}^{(p)}$ можна легко пояснити: ліва частина дорівнює сучасній вартості відсотків, які виплачуються наприкінці кожного з n наступних років за одиничною позикою, а права частина – сучасній вартості відсотків, які виплачуються за такою самою позикою, але що $\frac{1}{p}$ року.

Далі, сучасна вартість авансового ануїтету, за яким на початку кожної $\frac{1}{p}$ року виплачується $\frac{1}{p}$, дорівнює

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(p)} = \frac{1}{p}\left(1 + \nu^{1/p} + \nu^{2/p} + \dots + \nu^{n-1/p}\right) = \frac{1-\nu^n}{d^{(p)}} = \frac{i}{d^{(p)}} a_{\overline{n}|}.$$

Накопичення на момент n ануїтетів із заборгованістю та авансом, що виплачуються p разів на рік, дорівнюють, відповідно,

$$s_{\overline{n}|}^{(p)} = (1+i)^n a_{\overline{n}|}^{(p)} \quad \text{та} \quad \ddot{s}_{\overline{n}|}^{(p)} = (1+i)^n \ddot{a}_{\overline{n}|}.$$

Зауважимо, що для ануїтетів, які сплачуються p разів на рік, їхній термін n не обов'язково має бути цілим числом, цілою повинна бути тільки кількість платежів. Отже, число np має бути цілим. При цьому залишаються правильними ті формули для сучасної вартості і накопичення, у яких не фігурують вартості щорічних ануїтетів, наприклад,

$$a_{\overline{n}|}^{(p)} = (1-\nu^n)/i^{(p)}.$$

Неперервні ануїтети

Неперервні ануїтети можна розуміти як граничний випадок ануїтетів, що виплачуються p разів на рік, при $p \to \infty$. Для таких ануїтетів немає розділення на "авансові" та "із заборгованістю" – виплати відбуваються щомиті і немає різниці, на початку чи наприкінці моменту робиться виплата.

Сталим неперервним ануїтетом на n років називається грошовий потік сталою інтенсивністю протягом n років. У якості стандартного ануїтету беруть такий, для якого інтенсивність одинична (або, що рівносильне, сумарна річна виплата одинична). Сучасна вартість такого ануїтету дорівнює

$$\overline{a}_{\overline{n|}} = \int_0^n \nu^t dt = \frac{1 - \nu^n}{\delta} = \frac{i}{\delta} a_{\overline{n|}},$$

а накопичення – $\overline{s}_{\overline{n|}} = (1+i)^n \overline{a}_{\overline{n|}}$.

Існують два стандартні типи зростаючих ануїтетів на n років: той, в якого інтенсивність виплати протягом k-го періоду є сталою і дорівнює k і той, інтенсивність виплат за яким у момент t дорівнює t. Для першого ануїтету інтенсивність є ступінчастою функцією і його сучасна вартість дорівнює

$$(I\overline{a})_{\overline{n|}} = \sum_{k=1}^{n} k \int_{k-1}^{k} \nu^t dt = \frac{\ddot{a}_{\overline{n|}} - n\nu^n}{\delta} = \frac{i}{\delta}(Ia)_{\overline{n|}}.$$

Для другого інтенсивність виплат є лінійною функцією і його сучасна вартість дорівнює

$$(\overline{I}\overline{a})_{\overline{n|}} = \int_0^n t\nu^t dt = \frac{\overline{a}_{\overline{n|}} - n\nu^n}{\delta}.$$

Накопичення неперервних зростаючих ануїтетів позначають, відповідно, $(I\overline{s})_{\overline{n|}}$ та $(\overline{I}\overline{s})_{\overline{n|}}$.

Зауважимо, що для неперервних ануїтетів їхній термін може бути будь-яким додатним числом, або нескінченним. В останньому випадку ануїтети також називаються довічними, і їхні сучасні вартості дорівнюють

$$(\overline{a})_{\overline{\infty|}} = \frac{1}{\delta}, \quad (I\overline{a})_{\overline{\infty|}} = \frac{1}{d\delta}, \quad (\overline{I}\overline{a})_{\overline{\infty|}} = \frac{1}{\delta^2}.$$

Вправа 1.1.8. Доведіть формули для сучасних вартостей зростаючих неперервних ануїтетів.

1.2 Виплата боргу

1.2.1 Графік виплати боргу

Для боржника, який взяв позику, завжди є цікавим, скільки з тих грошей, що він сплачує при поверненні боргу, йде власне на повернення боргу (тобто наскільки зменшується залишок боргу), а скільки є платою за користування кредитом, тобто відсотками. Якщо борг розміром L повертають єдиним платежем розміром C, відповісти на це запитання просто: сума L йде на повернення боргу, вона називається *капітальною складовою* платежу, а сума $C - L$ є відсотком, або *відсотковою складовою* платежу.

Коли боржник повертає борг декількома платежами, він може розбити послідовно виплати на відсоткові і капітальні складові, зменшуючи наступний залишок боргу на розмір капітальної складової платежу. Якщо черговий платіж не покриває розміру відсотків, нарахованих за період на попередній залишок боргу, тоді наступний залишок боргу, навпаки, збільшиться. Таке розбиття виплат за позикою на капітальні та відсоткову складові зазвичай називають *графіком виплати* боргу. Складення графіку виплат боргу є дуже важливим при визначенні суми, що потрібно повернути при завчасному поверненні позики, а також при оподаткуванні, оскільки капітальні складові виплат, зрозуміло, не мають оподатковуватися.

Припустимо, що в момент часу $t = 0$ особа позичає суму L в кредитної установи, натомість сплачуючи $x_1, x_2, \ldots$ в моменти $1, 2, \ldots$. Нехай відсоткова ставка від моменту $t = k$ до моменту $t = k + 1$ дорівнює $i(k)$. Тоді має місце рівняння вартостей: сучасна вартість сум, що повертаються, має дорівнювати сумі позики,

$$L = x_1[1 + i(0)]^{-1} + x_2[1 + i(0)]^{-1}[1 + i(1)]^{-1} + \cdots +$$
$$+ x_k[1 + i(0)]^{-1} \cdots [1 + i(k - 1)]^{-1} + \cdots .$$

Сума $F_0 = L$ є залишком боргу в початковий момент часу. В момент $t = 1$ нарахований відсоток становить $i(0)F_0$, це і є відсотковою складовою першого платежу: $g_1 = i(0)F(0)$. Капітальна складова дорівнює $f_1 = x_1 - i(0)F_0$, а залишок боргу після першої виплати дорівнює

$$F_1 = F_0 - f_1 = L[1 + i(0)] - x_1 =$$
$$= x_2[1 + i(1)]^{-1} + x_3[1 + i(1)]^{-1}[1 + i(2)]^{-1} + \cdots .$$

Продовжуючи далі, ми можемо позначити F_t – залишок боргу після виплати у момент t, тоді відсоткова складова $t+1$-го платежу дорівнює $g_{t+1} = F_t i(t)$, а капітальна складова – $f_{t+1} = x_{t+1} - i(t+1)F_t$. Залишок боргу в момент $t+1$ дорівнює $F_{t+1} = F_t - f_{t+1}$. Послідовно підраховуючи залишки боргу, неважко переконатися, що

$$F_t = L[1 + i(0)] \cdots [1 + i(t-1)] - x_1[1 + i(1)] \cdots [1 + i(t-1)] -$$
$$- \cdots - x_t = x_{t+1}[1 + i(t)]^{-1} + x_{t+2}[1 + i(t)]^{-1}[1 + i(t+1)]^{-1} + \cdots ,$$

тобто залишок боргу в момент t, з одного боку, дорівнює накопиченню суми позики на момент t мінус накопичення платежів, зроблених до цього моменту, а з іншого боку, – вартості на момент t платежів, які боржник має зробити після моменту t.

Графік виплати боргу для сталого ануїтету

Розглянемо просту ситуацію, коли відсоткова ставка i є сталою на весь період позики, а сама позика повертається n однаковими щорічними платежами із заборгованістю. Для спрощення вважатимемо, що розмір щорічних виплат дорівнює 1, тобто сума позики дорівнює $a_{\overline{n|}}$.

Після t-го платежу залишок боргу дорівнює $F_t = a_{\overline{n-t|}}$, сучасній вартості платежів, що залишаються. Тому капітальна складова t-го платежу дорівнює

$$f_t = F_{t-1} - F_t = a_{\overline{n-t+1|}} - a_{\overline{n-t|}} = \nu^{n-t+1}.$$

Графік виплати боргу зручно подати у вигляді таблиці (див. табл. 1.1).

№ року	Залишок боргу на початку року	Відсотко-ва складова	Капіталь-на складова	Залишок боргу наприкінці року
1	$a_{\overline{n}\vert}$	$1-\nu^n$	ν^n	$a_{\overline{n-1}\vert}$
2	$a_{\overline{n-1}\vert}$	$1-\nu^{n-1}$	ν^{n-1}	$a_{\overline{n-2}\vert}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
t	$a_{\overline{n-t+1}\vert}$	$1-\nu^{n-t+1}$	ν^{n-t+1}	$a_{\overline{n-t}\vert}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$a_{\overline{1}\vert}=\nu$	$1-\nu$	ν	0

Табл. 1.1: Графік виплати боргу для сталого ануїтету.

Вправа 1.2.1. Складіть графік виплат для n-річної позики, яка повертається сталим ануїтетом із заборгованістю що $\frac{1}{p}$ року.

1.2.2 Споживчий кредит

Останнім часом уряди багатьох країн приймають закони, які змушують кредитні установи давати інформацію про справжню ціну, яку споживачі сплачують за користування позиками. Прикладами таких законів є британський Закон про споживчий кредит 1974 р. та американський Закон про захист кредитів 1968 р. Ми детальніше розглянемо британське законодавство з цього приводу.

Закон про споживчий кредит і підзаконні акти містять багато положень, що стосуються визначення вартості кредиту для споживача. Вони, по-перше, встановлюють, які саме виплати споживача мають входити до загальної плати за кредит. Наприклад, більшість установ, які надають позики на придбання автомобілів, вимагають від боржника застрахувати придбаний автомобіль на певну суму. Звичайно вартість страхування не додається до загальної плати за кредит. По-друге, цими законами встановлюється, що у всіх рекламних пропозиціях і договорах про кредитування має бути вказано справжню річну плату за користування кредитом, відому як *річна фактична вартість* кредиту (англійською annual percentage rate of charge), РФВ. До того ж, ці закони встановлюють, що ця річна фактична вартість має підраховуватися як додатний розв'язок рівняння (1.1.4). У читача може виникнути запитання: як має діяти кредитна установа, якщо таких розв'язків декілька? Насправді, це є дуже рідкою ситуацією, оскільки зазвичай боржник одержує всю суму позики раніше, ніж він починає її повертати, у такому випадку єдиність розв'язку гарантується твердженням 1.1.6. У тих рідких випадках, коли рівняння вартостей має декілька додатних коренів, за РФВ береться найменший з них.

Річна фактична вартість має бути вказаною з точністю до десятих часток відсотка (із закругленням у менший бік), тому рівняння вартостей потрібно розв'язувати з високою точністю. Щоб полегшити підрахунок річної фактичної вартості, опубліковано таблиці для переведення так званої незмінної відсоткової ставки (її означення див. нижче) у РФВ.

Незмінна відсоткова ставка і річна фактична вартість кредиту

Найпоширеніша схема повернення боргу в споживчому кредитуванні така: борг повертається однаковими внесками із заборгованістю через однакові проміжки часу. Для такої схеми загальною практикою підрахування розміру платежу є використання незмінної відсоткової ставки. Сенс цієї відсоткової ставки полягає у наступному. Припустимо, що борг розміром L повертається n однаковими внесками протягом k років, причому розмір внесків підраховують, виходячи з незмінної відсоткової ставки F на рік. Тоді *загальна плата за кредит*, тобто сума відсотків за цим кредитом, підраховується так:

$$D = LFk.$$

Отже, сума платежів споживача дорівнюватиме

$$L + D = L(1 + Fk),$$

а розмір одного платежу – $(L + D)/n$. Іншими словами, річна незмінна відсоткова ставка для позик, що повертаються сталим ануїтетом із заборгованістю, дорівнює сумі відсоткових виплат боржника на одиницю позики за один рік. (Не треба плутати "відсоткові виплати" у цій фразі з розглянутими у попередньому пункті відсотковими складовими платежів. Зараз йдеться просто про загальну суму, сплачену понад суми позики, розділену на суму позики і на кількість років.)

Звернемося тепер до питання про річну фактичну вартість позики. Нехай знов позика розміром L повертається n однаковими внесками m разів на рік із заборгованістю (тобто термін позики – n/m років), і річна незмінна відсоткова ставка дорівнює F. Тоді, як вже було сказано, загальна плата за кредит дорівнює $D = LFn/m$, а розмір одного внеску

$$\frac{L+D}{n} = L\left(\frac{1}{n} + \frac{F}{m}\right).$$

Річна фактична вартість кредиту є річною ефективною ставкою, яку сплачує боржник, і визначається з рівняння вартостей

$$L = mL\left(\frac{1}{n} + \frac{F}{m}\right) a^{(m)}_{\overline{n/m}|}.$$

(Нагадаємо, що за стандартним сталим ануїтетом сплачується одинична сума за рік; тому для визначення сучасної вартості сталого ануїтету потрібно помножити сучасну вартість стандартного ануїтету на сумарну річну виплату.) Це рівняння можна переписати, виключивши з нього L:

$$1 = m\left(\frac{1}{n} + \frac{F}{m}\right) a^{(m)}_{\overline{n/m}|}.$$

Використовуючи формулу для $a^{(m)}_{\overline{k}|}$, прийдемо до рівняння

$$m[(1+i)^{1/m} - 1] = \left(\frac{m}{n} + F\right)[1 - (1+i)^{-n/m}].$$

Записуючи розвинення виразів $(1+i)^{1/m}$ та $(1+i)^{-n/m}$ у ряд Тейлора і нехтуючи членами з i^l та Fi^{l-1} при $l \geq 3$ (F та i мають однаковий порядок), отримаємо наступну наближену рівність

$$-\frac{n}{m}F + \frac{n+1}{2m}i + \frac{n(n+m)}{2m^2}Fi - \frac{(n+1)(n+3m+1)}{6m^2}i^2 = 0. \quad (1.2.1)$$

Якщо знехтувати членами з i^2 та Fi, одержимо лінійне рівняння, розв'язуючи яке, матимемо перше наближення для РФВ:

$$i \approx 2F\frac{n}{n+1}.$$

Підставляючи це значення замість одного зі співмножників у виразі i^2 у формулі 1.2.1, знов одержимо лінійне рівняння, яке легко розв'язати, отримавши друге наближення для РФВ:

$$i \approx \frac{2F}{\frac{n+1}{n} + \frac{n-3m+2}{3m}F}.$$

При $m = 1$, тобто коли платежі відбуваються щороку, ця формула спрощується до

$$i \approx \frac{2F}{\frac{n+1}{n} + \frac{n-1}{3}F}.$$

Хоч ці формули дають достатньо близьке до РФВ значення, тим не менш, на практиці потрібно завжди перевіряти, чи підходить це значення (воно підходить, якщо при закругленні цієї ставки до десятих часток відсотка у більший бік ліва частина рівняння вартостей більша за праву, а при закругленні у менший бік – навпаки) і, якщо воно не підходить, використовувати більш точні методи для наближеного розв'язування рівняння вартостей. У будь-якому разі, маємо дуже хороше перше наближення, яке нерідко навіть співпадає з РФВ.

1.2.3 Завчасне повернення боргу

Нерідкою є ситуація, коли боржник не хоче чекати закінчення терміну кредитування і хоче повернути завчасно наявний залишок боргу. При цьому, зрозуміло, сума S, яку він має повернути, буде меншою за суму O платежів, які залишилося сплатити, оскільки він не має сплачувати відсотки на наявний залишок боргу. Різниця $O - S$ між цими величинами називається *відсотковою компенсацією* за раннє повернення позики, вона є тією частиною загальної плати за кредит, яка приходиться на платежі після завчасного повернення позики.

Нехай суму L позичають на n одиниць часу і повертають сталим ануїтетом із заборгованістю. Для простоти вважатимемо, що платежі роблять щорічно. Якщо загальна плата за кредит дорівнює D, то маємо рівняння вартостей

$$L = \frac{L+D}{n} a_{\overline{n}|},$$

звідки одержуємо $L(n - a_{\overline{n}|}) = D a_{\overline{n}|}$ та (поділивши вихідне рівняння на це)

$$\frac{L+D}{n} = \frac{D}{n - a_{\overline{n}|}}. \tag{1.2.2}$$

Останнє рівняння є важливим, оскільки воно пов'язує розмір одного внеску із загальною платою за кредит та терміном кредиту.

Припустимо тепер, що боржник бажає завчасно повернути борг одразу після чергового платежу за кредитом, коли залишаються t платежів. Потрібно визначити суму, яку він має сплатити, або, що рівносильне, суму відсоткової компенсації. Якщо відсотки нараховують за складною схемою, залишок боргу у момент t становить $(L+D)a_{\overline{t}|}/n$. Сума I відсоткової компенсації дорівнює, як вже було сказано, частині загальної плати за кредит, що міститься в останніх t платежах, тобто фактично дорівнює загальній платі за залишок боргу після $n - t$ виплат. Тоді з рівняння (1.2.2) маємо

$$\frac{L+D}{n} = \frac{I}{t - a_{\overline{t}|}},$$

звідки

$$I = \frac{t - a_{\overline{t}|}}{n - a_{\overline{n}|}} D.$$

Іншим шляхом цю рівність можна обґрунтувати, користуючись графіком виплати боргу для сталого ануїтету (табл. 1.1).

Відсоткову компенсацію дуже часто виражають не в абсолютних, а у відносних термінах, як частину загальної плати за кредит, тобто у термінах $k = I/D$. Тоді у випадку, коли відсотки нараховують за складною схемою, ця пропорційна частина становить

$$k = \frac{t - a_{\overline{t}|}}{n - a_{\overline{n}|}}.$$

На практиці зазвичай використовують іншу схему, відому як *правило 78* (правило сімдесяти восьми): вона дає близькі значення до схеми складних відсотків, але є простішою у використанні. Ця схема полягає у наступному. Загальну плату за кредит ділять на $1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$ частин і вважають, що у перший рік виплачується n частин плати, у другий рік – $n-1$ частина, ..., у n-й рік – одна частина. Оскільки загальна плата за кредит становить D, то розмір однієї частини дорівнює $2D/[n(n+1)]$. Таким чином, відсоткова складова k-го платежу вважається рівною

$$\frac{2D(n-k+1)}{n(n+1)}.$$

Зауважимо, що при застосуванні такої схеми капітальні складові платежів боржника утворюють арифметичну прогресію, а не геометричну, як при застосуванні схеми складного нарахування відсотків; до того ж, для такої схеми немає прозорого зв'язку між відсотковою складовою платежу та залишком боргу після попереднього платежу. Якщо борг повертається щомісячними платежами протягом року, то кількість частин загальної плати за кредит дорівнює $12 \cdot 13/2 = 78$, звідси й походить ця назва.

Повернімося до визначення відсоткової компенсації. Нехай боржник бажає повернути борг після щойно зробленого платежу, і залишаються t платежів. Тоді відсоткова компенсація за правилом 78 дорівнює сумі "відсоткових складових" виплат, що залишаються, тобто

$$I' = \frac{2D}{n(n+1)}[t + (t-1) + \cdots + 1] = \frac{t(t+1)}{n(n+1)}D,$$

або, у відносних термінах, $k'D$, де

$$k' = \frac{t(t+1)}{n(n+1)}.$$

Можна переконатися, що $k' < k$, тобто відсоткова компенсація, підрахована за схемою складного нарахування відсотків буде завжди більшою, ніж за правилом 78. Тому річна ефективна відсоткова ставка, яку сплачуватиме боржник, буде більшою при застосуванні правила 78. Отже, ця схема є більш вигідною для кредитора. Тим не менш, її не можна назвати несправедливою: завчасне повернення позики завжди відбувається за ініціативою боржника – воно може бути викликане, скажімо, загальним падінням відсоткових ставок і бажанням боржника взяти більш вигідну позику. З іншого боку, різниця $k - k'$ не є занадто великою.

Нерідко завчасне повернення боргу відбувається між двома платежами. З цієї причини, а також для того, щоб урахувати витрати кредитора, пов'язані із завчасним поверненням, часто використовують *модифіковане правило 78*: при підрахунку відсоткової компенсації дату повернення позики відстрочують на певний термін α, тобто пропорційну частку відсоткової компенсації від загальної плати за кредит підраховують як

$$k'' = \frac{(t-\alpha)(t-\alpha+1)}{n(n+1)},$$

при $t < \alpha$ $k'' = 0$ (тобто відсоткової компенсації немає). Типовими значеннями α є $1, 2, 3$. Наприклад, у Великій Британії застосовується значення $\alpha = 1$ для кредитів більш ніж на п'ять років і $\alpha = 2$ для кредитів на п'ять років і менше.

Вправа 1.2.2. Доведіть, що $k' < k$.

1.3 Порівняння інвестиційних проектів

У цій частині ми обговоримо застосування теорії відсотка до оцінювання інвестиційних проектів. Будь-який проект природно описується очікуваними від нього грошовими потоками. Іноді грошові потоки є відомими, наприклад, коли йдеться про інвестування у цінні папери з фіксованим відсотком. Проте у більшості випадків існує невизначеність щодо грошових потоків, та потрібен великий досвід і ретельний аналіз для їхнього оцінювання. Часто оцінювання роблять при різних наборах припущень: наприклад, можна взяти нейтральний, песимістичний та оптимістичний сценарії і за допомогою ймовірнісних методів проаналізувати майбутні грошові потоки. Зрозуміло, що точність таких прогнозів може бути низькою, тому цілком можливі помилкові рішення.

Є дуже багато методів для оцінювання проектів. У цьому розділі ми зупинимося на найпростіших з цих методів, які пов'язані з аналізом відсоткових ставок. Більше інформації можна знайти у розділі 2.5.3.

Більшість грошових потоків, які породжуються інвестиційними проектами, мають схожу структуру: спочатку йдуть від'ємні платежі (інвестиції), за ними слідують додатні (прибутки). Можливі й інші схеми, наприклад, спочатку може бути позичання (додатні платежі), після якого йдуть інвестиції та повернення позики (від'ємні платежі).

1.3.1 Грошові індикатори

Нехай чистий (тобто зменшений на розмір податків та інших виплат) грошовий потік складається з окремих платежів C_k у моменти t_k та неперервного грошового потоку інтенсивністю $\rho(t)$. Найпростішою характеристикою грошового потоку є його сучасна вартість

$$\sum_k C_k \nu^{t_k} + \int_0^\infty \rho(t)\nu^t dt, \tag{1.3.1}$$

яку ще часто називають *чистою сучасною вартістю*, щоб підкреслити те, що платежі у потоці є зменшеними на розмір податків та інших виплат інвестора. Вибір відсоткової ставки для використання у формулі (1.3.1) не завжди є очевидним. Тут ми обмежимося ситуацією, коли інвестор, хоча б приблизно, знає відсоткову ставку, під яку він позичатиме та вкладатиме гроші у майбутньому, і будемо вважати, що ця відсоткова ставка використовується у (1.3.1). Детальніше обговорення буде здійснено в розділі 2.5.3. Використання чистої сучасної вартості для порівняння інвестиційних проектів є дуже прозорим: той проект, що має більшу чисту сучасну вартість, є привабливішим.

Суттєвим недоліком чистої сучасної вартості як показника привабливості інвестиційного проекта є те, що вона не відображає прибуток на одиницю інвестицій: збільшивши грошовий потік удвічі, ми збільшимо вдвічі і його чисту сучасну вартість, але зрозуміло, що від цього він не стане вдвічі привабливішим. З цієї точки зору більш прийнятним показником є *рентабельність*, або прибутковість. Цей показник визначається для тих інвестиційних проектів, що передбачають від'ємний платіж $C_1 = -C$ в момент $t_1 = 0$ (початкову інвестицію) і додатні платежі потому (прибутки бізнесу), як

$$P = \frac{1}{C}\Big(\sum_{k>1} C_k \nu^{t_k} + \int_0^\infty \rho(t)\nu^t dt\Big).$$

Як і у випадку чистої сучасної вартості, привабливість проекту зростає зі зростанням рентабельності.

Іншим простим показником, пов'язаним з грошовою структурою платежів, є *термін окупності* проекту. Нехай для грошового потоку існує момент t_0 такий, що

$$S(t) := \sum_{t_k \le t} C_k + \int_0^t \rho(s)ds < 0$$

для $t < t_0$ і $S(t) \ge 0$ при $t \ge t_0$. Тоді термін t_0 називається терміном окупності проекта. Якщо такого моменту t_0 не існує, то період окупності вважають рівним нескінченності. Певне покращення цього показника можна одержати, якщо розглядати не просте підсумовання платежів, а сучасну вартість. А саме, позначивши

$$V(t) = \sum_{t_k < t} C_k \nu^{t_k} + \int_0^t \rho(s)\nu^s ds,$$

визначимо *дисконтований термін окупності* як найменший момент t_0 такий, що $V(t) < 0$ для $t < t_0$, $V(t) \ge 0$, $t \ge t_0$. Іншими словами, дисконтований термін окупності – це момент, коли накопичення грошового потоку стає додатним. Зрозуміло, що чим меншим є період окупності, тим кращим є проект з точки зору інвестора.

Іншим важливим показником грошового потоку, породженого інвестиційним проектом, є ефективна норма прибутку, яку при застосуванні до оцінювання інвестиційних проектів називають ще *внутрішньою нормою прибутку* від проекта.

1.3.2 Прибуток фонду

Нехай фонди певної фінансової установи у момент t мають значення $F(t)$. Річну ефективну норму прибутку i фонду від моменту t_1 до моменту t_2 можна визначити з рівняння

$$F(t_1)(1+i)^{t_2-t_1} + \sum_{t_1<t\le t_2} C_t(1+i)^{t-t_1} + \int_{t_1}^{t_2} \rho(t)(1+i)^{t-t_1}dt = F(t_2), \quad (1.3.2)$$

де C_t позначає суму, одержану в момент t, $\rho(t)$ – інтенсивність у момент t неперервного грошового потоку.

Наближені значення для внутрішньої норми прибутку можна одержати за допомогою, скажімо, методу лінійної інтерполяції або інших наближених методів. Ми розглянемо метод, запропонований Г. Ф. Харді. Нехай розглядається річний період, тобто $t_2 = t_1 + 1$, а N є загальною сумою *нових грошей*, іншими словами, сумою, на яку збільшиться вартість фонду без урахування відсотків та приростів капіталу, тобто

$$N = \sum_{t_1<t\le t_2} C_t + \int_{t_1}^{t_2} \rho(t)dt.$$

Зрозуміло, що можна записати

$$F(t_2) = F(t_1) + N + I, \quad (1.3.3)$$

де I – відсотки, зароблені фондом протягом часу від моменту t_1 до моменту t_2. З цих відсотків на гроші фонду на початку періоду зароблено $iF(t_1)$, а на нові гроші зароблено приблизно $iN/2$ (такою величина відсотків буде у випадку, якщо половина нових грошей надходить на початку року, а інша половина – наприкінці). Тоді маємо

$$N + I \approx N + iF(t_1) + \frac{iN}{2} = F(t_1)i + (F(t_2) - F(t_1) - I)\left(1 + \frac{i}{2}\right)$$

і, підставивши це у (1.3.3), після простих перетворень одержуємо наближену *формулу Харді*:

$$i \approx \frac{2I}{F(t_1) + F(t_2) - I}.$$

Часто потрібно визначити прибуток фонду протягом декількох років. Нехай весь період часу від t_0 до t_n розбито на менші частини (не обов'язково довжиною в один рік) моментами $t_1, \ldots, t_n$, і для кожного k відомо річний ефективний прибуток i_k на інтервалі $[t_{k-1}, t_k]$. Тоді *зв'язана внутрішня норма прибутку інвестора i* визначається з рівняння

$$(1+i)^{t_n - t_0} = (1+i_1)^{t_1 - t_0} \cdots (1+i_n)^{t_n - t_{n-1}}.$$

1.3.3 Цінні папери з фіксованим відсотком

Цінні папери з фіксованим відсотком (ЦПФВ) випускаються компаніями та урядами для залучення позичкових коштів. Такими цінними паперами зазвичай торгують на біржі, вони дозволяють взяти гроші в борг опосередковано та на конкурентних засадах (часто випуск цінних паперів з фіксованим відсотком відбувається через тендер). Ми коротко розглянемо основні типи цінних паперів з фіксованим відсотком, більш детально позичковий капітал розглядатиметься у розділі 2.2.4.

За строком погашення цінні папери з фіксованим відсотком поділяють на короткострокові (до 1 року), середньострокові (від 1 до 5 років), довгострокові (більше 5 років) та безстрокові, або довічні (без конкретного строку погашення).

Основні види ЦПФВ є такими.

- *Державні облігації* випускаються національним банком країни і їх деноміновано у валюті тієї країни, що їх випустила. Ризик дефолту для таких облігацій, звичайно, залежіть від країни, але є дуже малим. До того ж, державні облігації є надзвичайно ліквідними цінними паперами, особливо для розвинених економік. Єдиний ризик, від якого потерпають власники таких облігацій – інфляційний ризик. Однак у багатьох країнах, серед яких Велика Британія, випускаються також так звані індексовані облігації, які захищені й від інфляційного ризику.

- *Облігації місцевих урядів, державних установ і компаній* є також доволі захищеними, хоча дефолти за ними час від часу трапляються. Вони також є менш ліквідними, ними часто торгують лише всередині країни або навіть адміністративного округу.

- Ризикові характеристики *облігацій зарубіжних урядів* в основному подібні до ризикових характеристик місцевих державних облігацій. Суттєвою відмінністю є те, що зарубіжні облігації деноміновано у валюті країни, що їх випустила, тому є ризики, пов'язані з валютними курсами.

- *Єврооблігації* (Євробонди) – облігації, які уряд або компанія випускає на міжнародному "Євро"-ринку. Їх деноміновано у валюті іншій країни (частіше за все у доларах США) і вони використовуються для залучення надзвичайно великих позик (детальніше див. розділ 2.2.4). Є дуже ліквідними і доволі захищеними.

- *Корпоративні облігації* (облігації компаній) випускаються різноманітними компаніями і призначені як для внутрішнього, так і для зовнішніх ринків. Ризик дефолту і ліквідність суттєво залежать від компанії, що їх випустила. Часто є низьколіквідними і досить ризиковими, але пропонують більший відсоток, ніж державні облігації.

На цінному папері з фіксованим відсотком вказано *номінальну вартість* (номінал) N, *купонну ставку* D та час погашення. Купонна ставка означає суму, що її буде сплачено протягом року на одиницю номіналу. Таким чином, якщо номінал становить N, купонна ставка D, а купони виплачуються p разів на рік, то розмір однієї купонної виплати становить DN/p. За деякими облігаціями немає купонних виплат, прибуток виникає від різниці між ціною купівлі та ціною погашення, такі облігації часто є короткостроковими.

Крім купонних виплат, цінні папери з фіксованим відсотком ще мають виплату при погашенні. Зазвичай вона також вказується у розрахунку на одиницю номіналу. Суму R, за якою погашається одиниця номіналу, називають *ціною погашення*. Якщо $R = 1$, то кажуть, що цінний папір погашається за номіналом, якщо $R < 1$ – нижче номіналу, або з дисконтом, $R > 1$ – вище номіналу, або з премією. Частіше за все облігації погашаються за номіналом.

Два найважливіші питання: яким є річний ефективний прибуток для інвестора, який придбає цінний папір з фіксованим відсотком за певну ціну і яку ціну погодиться сплатити інвестор, який бажає отримати даний чистий ефективний прибуток. Відповідь на обидва питання дає рівняння вартостей: (СВ – сучасна вартість)

$$\text{Ціна} = \text{СВ купонних виплат} + \text{СВ виплати при погашенні}.$$

Річний ефективний дохід інвестора у цінний папір з фіксованим відсотком часто називають *доходом при погашенні*, щоб відрізнити від так званого *поточного доходу*, який дорівнює D/P, відношенню купонної ставки до суми, сплаченої за цінний папір з фіксованим відсотком.

Розглянемо позику розміром N з ціною погашення R, купони за купонною ставкою D. Нехай інвестор, що сплачує прибутковий податок розміром t_1, придбає позику у момент випуску за ціною A, або P за одиницю номіналу. Задамося питанням про прибуток інвестора.

В обмін на інвестицію P інвестор одержує щорічні купонні виплати розміром D, що перетворюються на $D(1-t_1)$ після оподаткування, а також виплату при погашенні R. Таким чином, рівняння вартості можна записати у вигляді

$$P = D(1-t_1)a_{\overline{n|}} + R\nu^n. \tag{1.3.4}$$

Розв'язок i цього рівняння є річним чистим ефективним прибутком інвестора. Це рівняння можна розв'язати чисельно, методом лінійної інтерполяції або іншими наближеними методами. Для застосування наближених методів потрібні певні попередні наближення для прибутку. Їх можна одержати такими міркуваннями. Якщо $R = P$, то, як неважко бачити з рівняння (1.3.4), $i = D(1-t_1)/P$. Тому, якщо $R > P$, то $i > D(1-t_1)/P$, а якщо $R < P$, то $i < D(1-t_1)/P$. З іншого боку, якщо $R > P$, то прибуток за ЦПФВ буде меншим, ніж прибуток за n-річним ЦПФВ, ціни купівлі й погашення якого дорівнюють P, а чисті купонні виплати на одиницю номіналу – $D(1-t_1) + (R-P)/n$. Справді, для цього другого ЦПФВ загальна сума виплат буде такою самою, але виплати здійснюватимуться раніше, ніж для першого.

Якщо ж $P < R$, то аналогічними міркуваннями доходимо висновку, що прибуток за другим цінним папером буде меншим. Але прибуток за другим цінним папером становить, очевидно, $[D(1-t_1)+(R-P)/n]/P$. Таким чином, в будь-якому разі шуканий прибуток знаходиться між $D(1-t_1)/P$ та $[D(1-t_1)+(R-P)/n]/P$. Доволі часто це дає значення, придатні для подальшого наближеного розв'язування методом лінійної інтерполяції.

Ще одне наближення розв'язку (1.3.4) можна одержати за допомогою формули Тейлора. Позначивши $g = D/R$ *купонну ставку на одиницю погашення*, одержимо таке рівняння з (1.3.4):

$$P = R[g(1-t_1)a_{\overline{n}|} + \nu^n] = R[g(1-t_1)a_{\overline{n}|} + 1 - ia_{\overline{n}|}],$$

або

$$g(1-t_1) - i - \frac{k}{a_{\overline{n}|}} = 0,$$

де $k = (P-R)/R$. Розкладаючи $1/a_{\overline{n}|} = i/(1-\nu^n)$ у ряд Тейлора за степенями i та нехтуючи степенями, вищими за першу, одержимо

$$i \approx \frac{g(1-t_1) - \frac{k}{n}}{1 + k\frac{n+1}{2n}}.$$

Загалом це наближення є добрим для не дуже великих значень k та n. Більш точне значення для i можна одержати, нехтуючи степенями i вище другої.

Формула Мейкема

Розглянемо позику (ЦПФВ) номіналом N з ціною погашення R, за якою купони сплачуються p разів на рік за ставкою D. Сума $C = NR$ є загальною сумою погашення. Припустимо, що позика погашається єдиним платежем через n років після випуску.

Нехай інвестор, який сплачує прибутковий податок за ставкою t_1, бажає придбати позику. Припустимо, що тоді ціну у момент випуску можна знайти як сучасну вартість усіх платежів за ЦПФВ – купонних виплат та виплати при погашенні. Позначимо $g = D/R$ купонну ставку на одиницю погашення. Ціна, яку сплатить інвестор, дорівнює

$$A = (1 - t_1) D N a^{(p)}_{\overline{n}|} + C v^n =$$
$$= \frac{(1-t_1)g}{i^{(p)}} C(1 - v^n) + C v^n = K + \frac{g(1-t_1)}{i^{(p)}}(C - K),$$

де K – сучасна вартість суми погашення, а $g(1-t_1)(C-K)/i^{(p)}$ – сучасна вартість відсоткових виплат. Ця формула називається *формулою Мейкема*[3].

Формула Мейкема залишається правильною, якщо позика повертається (або ЦПФВ погашається) не одиничним платежем, а декількома. Справді, нехай позика погашається m платежами: через n_l років погашається номінал N_l, причому $N = N_1 + N_2 + \cdots + N_m$. Тоді ціна тієї частини позики, що погашається у момент n_l, дорівнює

$$A_l = K_l + \frac{g(1-t_1)}{i^{(p)}}(C_l - K_l),$$

де $C_l = RN_l$ – сума l-го погашення, $K_l = C_l v^{n_l}$ – його сучасна вартість. Отже, ціна всієї позики дорівнює

$$A = \sum_{l=1}^{m} A_l = K - \frac{g(1-t_1)}{i^{(p)}}(C - K),$$

де $C = \sum_{l=1}^{m} C_l$ – загальна сума погашення, $K = \sum_{l=1}^{m} K_l$ – сучасна вартість платежів при погашенні.

Зауважимо, що формула Мейкема є правильною лише тоді, коли

- купівля позики і погашення відбуваються в моменти купонних виплат, одразу після цих виплат;
- купонна ставка D, ставка прибуткового податку t_1 та ціна погашення R залишаються незмінними протягом терміну дії позики.

[3]Уільям Мейкем (1826–1891) – відомий британський актуарій, більш прославлений законом Гомпертца-Мейкема тривалості життя.

Якщо якась із указаних величин змінюється протягом дії позики, можливі два підходи:

- розбити позику на частини, для кожної з яких можна застосувати формулу Мейкема і додати отримані ціни;
- підрахувати ціну позики у припущенні, що всі величини є сталими, потім внести необхідні корективи у ціну.

Формула Мейкема може використовуватися як для визначення ціни позики за даним значенням чистого прибутку, так і для визначення чистого прибутку власника цінного паперу з фіксованим відсотком. Зрозуміло, що ціна A зменшується при збільшенні прибутку i, і навпаки.

Залежність прибутку від терміну погашення

Нехай позика номіналом N має ціну погашення R, купони виплачуються p разів на рік за ставкою D. Тоді ціна, яку сплатить інвестор, дорівнює

$$A(n,i) = (1-t_1)DNa_{\overline{n}|}^{(p)} + C\nu^n = C + [(1-t_1)g - i^{(p)}]Ca_{\overline{n}|}^{(p)}.$$

З останнього рівняння одразу випливає, що:

- якщо $i^{(p)} = g(1-t_1)$, то для будь-якого n $A(n,i) = C$;
- якщо $i^{(p)} > g(1-t_1)$, то $A(n,i) < C$ і ціна $A(n,i)$ спадає зі збільшенням n;
- якщо $i^{(p)} < g(1-t_1)$, то $A(n,i) > C$ і ціна $A(n,i)$ зростає зі збільшенням n.

З іншого боку, якщо зафіксовано не чистий прибуток, а ціну купівлі A, то, оскільки $a_{\overline{n}|}^{(p)}$ й $(1-t_1)g - i^{(p)}$ є спадними функціями i, то конвертований p разів на рік номінальний прибуток $i^{(p)}$:

- не залежить від n і дорівнює $g(1-t_1)$ при $A = C$;
- зростає за n і є меншим за $g(1-t_1)$ при $A > C$;
- спадає за n і є більшим, ніж $g(1-t_1)$ при $A < C$.

Це спостереження є важливим у випадку, коли термін погашення не є чітко фіксованим та вибирається інвестором. Наприклад, при $A > C$ інвестору потрібно вибирати дату погашення якнайпізніше (зокрема, якщо останню можливу дату погашення не зафіксовано, при визначенні найбільшого чистого прибутку інвестора потрібно вважати, що цінний папір з фіксованим відсотком не погашається ніколи).

Вплив податку на приріст капіталу

Припустимо, що інвестор, який крім прибуткового податку розміром t_1 сплачує податок на приріст капіталу розміром t_2, бажає придбати у день випуску позику номіналом N з ціною погашення R, за якою купони виплачуються p разів на рік за річною ставкою D. Нам потрібно визначити ціну, яку він має сплатити, щоб одержати чистий річний ефективний прибуток i. Нехай позика погашається у купонні дати наступним чином: N_1 номіналу в момент n_1, N_2 номіналу в момент n_2, $\ldots$, N_k номіналу в момент n_k. Тоді ціна позики без урахування податку за формулою Мейкема становитиме

$$A = K + \frac{g(1-t_1)}{i^{(p)}}(C-K),$$

де $C = RN$ – загальна сума погашення, $K = \sum_{l=1}^{k} RN_l v^{n_l}$ – сучасна вартість виплат при погашенні, $g = D/R$ – купонна ставка на одиницю погашення. Якщо $i^{(p)} \le g(1-t_1)$, то немає приросту капіталу, тому і податок на приріст капіталу не стягуватимуть, тобто ціна буде підрахована за цією формулою. З іншого боку, або $i^{(p)} > g(1-t_1)$, – ціна за одиницю номіналу, то приріст капіталу є, і ціна A', яку має сплатити інвестор для того, щоб одержати чистий прибуток, буде меншою, ніж A, на сучасну вартість податку на приріст капіталу, який стягується при погашенні позики. Для частини позики, що погашається у момент n_l, приріст капіталу дорівнює $(R-P')N_l$, де $P' = A'/N$ – ціна за одиницю номіналу. Відповідно, податок на приріст капіталу для цієї частини позики дорівнює $t_2(R-P)N_l$, а сучасна вартість податку на приріст капіталу для всієї позики становить

$$t_2(R-P)\sum_{l=1}^{k} N_l v^{n_l} = t_2(1-P'/R)\sum_{l=1}^{k} RN_l v^{n_l} =$$
$$= t_2(1-P'/R)K = t_2(1-A'/C)K.$$

Таким чином, ціна позики за наявності приросту капіталу задовольняє рівняння

$$A' = K + \frac{g(1-t_1)}{i^{(p)}}(C-K) - t_2\left(1-\frac{A'}{C}\right)K,$$

з якого

$$A' = \frac{(1-t_2)K + (1-t_1)I}{1-t_2\frac{K}{C}},$$

де K – сучасна вартість валових капітальних виплат (погашення), а $I = g(C-K)/i^{(p)}$ – сучасна вартість валових відсоткових (купонних) виплат.

1.3.4 Часова поведінка відсоткових ставок

У цьому розділі ми розглянемо питання, пов'язані в основному з інвестуванням у цінні папери з фіксованим відсотком. Незважаючи на те, що такі типи інвестицій здаються найменш ризиковими, вони, тим не менш, є вразливими. Одним джерелом вразливості є ризик дефолту компанії, яка видала ці цінні папери. Хоча дефолти великих компаній, тим більше – урядів, трапляються рідко, на цей ризик потрібно звертати увагу. Ми, однак, розглянемо це питання пізніше у частині, що стосуватиметься основ теорії фінансів. Інше джерело вразливості — це ризик зміни відсоткових ставок на ринку. Як уже зазначалося, відсоткові ставки подібні до котировок активів у тому сенсі, що їх обумовлюють існуючі на ринку величини попиту і пропозиції на гроші. Угасання позичкової активності призводить до падіння відсоткових ставок, розвиток системи споживчого кредитування – до їхнього зростання. З іншого боку, поведінка ринкових значень відсоткових ставок дуже подібна до поведінки облікової ставки уряду (центрального банку), яка використовується урядом як один з головних важелів впливу на економіку і тому нерідко змінюється. Саме питанням, що виникають у зв'язку з мінливістю відсоткових ставок, присвячено даний розділ.

Часова структура відсоткової ставки. Криві прибутку

У попередньому абзаці було сказано, що відсоткові ставки встановлює ринок, і тому вони змінюються з часом. Більше того, природно, що відсоткові ставки можуть залежати й від терміну інвестування (частіше зростати). Природно виникає питання: як саме ринок встановлює відсоткові ставки? Відповідь на нього проста: через вартості цінних паперів із *чітко визначеним* грошовим потоком – цінних паперів з фіксованим відсотком. Припустимо, наприклад, що ціна безкупонної облігації одиничного номіналу, яка погашатиметься через n років за номіналом, дорівнює P_n. Природно вважати річною відсотковою ставкою за вкладами, що робляться зараз на n років, таку ставку r_n, що

$$P_n = (1 + r_n)^{-n}.$$

Ця ставка $r_n = P_n^{-1/n} - 1$ називається *n-річною спотовою ставкою*, слово "спотова" означає, що ставка починає діяти з даного моменту.

Є декілька близьких понять. Наприклад, якщо є облігація, за якою щороку виплачуються купони за ставкою g, і яка купується й погашається за номіналом, то у випадку сталої ставки відсотка i ми маємо $g = i$. Отже, й у випадку змінної відсоткової ставки значення купонної ставки g облігації номіналом 1, яка погашається за номіналом і коштує зараз 1, також певним чином відображує відсоткову ставку. Це значення називається *n-річним номінальним прибутком* та позначається yc_n. Оскільки n-річна облігація номіналом 1 з купоном g – це те саме, що n безкупонних облігацій номіналом g строком $1, 2, \ldots, n$ років та n-річна безкупонна облігація номіналом 1, то ми маємо

$$1 = yc_n\big(P_1 + P_2 + \cdots + P_n\big) + P_n,$$

звідки

$$yc_n = \frac{1 - P_n}{P_1 + \cdots + P_n} =$$
$$= \frac{1 - (1 + r_n)^{-n}}{(1 + r_1)^{-1} + (1 + r_2)^{-2} + \cdots + (1 + r_n)^{-n}}$$

Нарешті, якщо є n-річна облігація номіналом 1 з купоном g, яка погашається за номіналом, а коштує $P_n(g)$, то відсоткову ставку можна просто визначити за рівнянням вартості

$$P_n(g) = g a_{\overline{n|}} + v^n.$$

Розв'язок цього рівняння називається *n-річним прибутком при погашенні для купонної ставки g* і позначається $y_n(g)$. Зрозуміло, що для $g = 0$ маємо n-річну спотову ставку.

Зрозуміло, що величини P_n, $P_n(g)$, r_n, yc_n та $y_n(g)$ є пов'язаними одна з іншою. Насправді, будь-яка з них визначає решту і може бути використаною у якості мірила n-річних відсоткових ставок. Можна стартувати з P_n, як зробили ми, і визначати майбутні відсоткові ставки з P_n. У такому підході вартість n-річної безкупонної облігації (як функція строку погашення) називається *часовою структурою* відсоткової ставки. Інший підхід – дивитися на прибуток при погашенні для облігацій, які існують на ринку і розглядати, як змінюється цей прибуток з часом. У такому підході $y_n(g)$ як функція n називається *кривою прибутку* для купонної ставки g.

Існують декілька теорій, які намагаються пояснити вигляд кривих прибутку.

- *Теорія очікування* базується на тому, що спостережувані довгострокові спотові ставки визначаються з поточних короткострокових та очікувань ринку щодо майбутніх короткострокових ставок. Скажімо, якщо ринок очікує, що короткострокові ставки падатимуть, то згідно з теорією очікування теперішні довгострокові ставки будуть меншими за короткострокові.
- *Теорія переваг ліквідності* базується на тому, що довгострокові облігації є вразливішими до коливань відсоткових

ставок, тобто більш ризиковими, з іншого боку вони зменшують ліквідність інвестованих грошей. Тому довгострокові відсоткові ставки мають тенденцію до перевищення короткострокових, оскільки вони містять премію за ризик і за втрату ліквідності.

- *Теорія сегментації ринку* виходить з припущення, що ринки короткострокових і довгострокових інвестицій є доволі відокремленими один від іншого, тому довгострокові й короткострокові ставки визначаються кон'юнктурою цих ринків – існуючим попитом і пропозицією щодо короткострокових та довгострокових інвестицій.

Насправді, всі ці теорії є пов'язаними. Скажімо, а пріорі довгострокові позичання є привабливішими, ніж довгострокові внески, що робить пропозицію на ринку довгострокових інвестицій слабшою за попит, і таке міркування пов'язує теорію очікування з теорією сегментації ринку. З іншого боку, якщо очікується падіння ставок, то учасник ринку, який бажає позичити гроші на великий термін, радше зачекає певний час, щоб одержати кращу відсоткову ставку. Така поведінка призведе до падіння попиту на довгострокові позики і тим самим до зменшення довгострокових ставок. Таке міркування пов'язує теорію очікування з теорією сегментації ринку.

Тривалість

Як було відмічено на початку цього курсу, вартість грошей залежить від моменту часу, коли вони надходять. Гроші, які надходять пізніше, коштують зараз менше. Тому при інвестуванні у цінні папери з фіксованим відсотком інвестор зацікавлений знати час, коли надійдуть гроші. Аналіз кожного платежу окремо, особливо для складно влаштованих грошових потоків, є занадто громіздким і рідко є виправданим. Тому потрібна певна характеристика грошового потоку, що вказує на середній час, коли надходять платежі.

Однією такою характеристикою є *середній час* надходження платежів. Якщо грошовий потік складається з окремих платежів C_k у моменти t_k та неперервної частини інтенсивністю $\rho(t)$, то для нього середній час визначається як

$$\frac{\sum_k t_k C_k + \int_0^\infty t\rho(t)\,dt}{\sum_k C_k + \int_0^\infty \rho(t)\,dt}.$$

Ця формула нагадує формулу для центру мас системи тіл: кожна координата (момент часу) зважується масою тіла, що там знаходиться, (розміром платежу) і сума таких величин ділиться на загальну масу (загальну суму платежів). Проте, така "фізична" інтерпретація є хоча й дуже ілюстративною, але не повністю адекватною – зараз розмір платежу може бути від'ємним (що свідчить про витрату), на відміну від маси тіла.

Середній час є не дуже гарною характеристикою часу надходження платежів – ми зважуємо моменти часу абсолютними розмірами грошових сум. Це означає, що 100 грн, які надходять зараз, "важать" менше 101 грн, які надійдуть через 100 років; проте для більшості людей перший варіант є, авжеж, більш "вагомим" і вони його зволіють. Тому доречнішим є використання не розмірів платежів, а їхніх сучасних вартостей, а більш адекватною часовою характеристикою платежів – *дисконтований середній час*, або *тривалість*, грошового потоку:

$$\tau(i) = \frac{\sum_k t_k C_k \nu^{t_k} + \int_0^\infty t\rho(t)\nu^t\,dt}{\sum_k C_k \nu^{t_k} + \int_0^\infty \rho(t)\nu^t\,dt}.$$

Дисконтований середній час теж можна інтерпретувати як центр мас грошового потоку, проте, на відміну від середнього часу, кожен платіж дисконтовано. Попри неповну аналогію (наприклад, можливість від'ємних "мас"), для визначення дисконтованого середнього часу можна застосовувати ті ж методи, що й для визначення центру мас. Зокрема, якщо розбити грошовий потік на декілька частин і кожну з частин замінити єдиним платежем; момент τ надходження цього платежу має співпадати з дисконтованим середнім часом цієї частини, а його сума – з її вартістю на момент τ.

Волатильність

Як було зазначено на початку цього розділу, інвестора цікавить, як зміни у відсотковій ставці впливають на його інвестиційний портфель, наскільки серйозним є вплив цих змін. Нехай чистий грошовий потік, породжений інвестиційним портфелем, складається з окремих платежів C_k у моменти t_k та неперервної частини інтенсивністю $\rho(t)$. Найпростішою та найзручнішою у використанні мірою ефективності цього портфеля є його сучасна вартість:

$$V(i) = \sum_k C_k \nu^{t_k} + \int_0^\infty \rho(t)\nu^t\,dt.$$

Тому за міру вразливості грошового потоку до змін у відсотковій ставці варто взяти похідну сучасної вартості за відсотковою ставкою. Зазвичай так і роблять – але з певними модифікаціями. По-перше, грошовий потік і такий самий потік, збільшений удвічі, є однаково вразливими до змін у відсотковій ставці. Тому краще працювати не з абсолютними величинами, а з відносними, тобто ділити цю похідну на сучасну вартість грошового потоку. По-друге, частіше за все оцінюються потоки, які складаються з додатних платежів, а для них ця похідна є від'ємною, бо сучасна вартість зменшується при збільшенні відсоткової ставки. Тому цю похідну беруть з протилежним знаком. Отримана величина, таким чином, дорівнює

$$v(i) = -\frac{V_i'(i)}{V(i)} = \frac{\sum_k t_k C_k \nu^{t_k+1} + \int_0^\infty t\rho(t)\nu^{t+1}\,dt}{\sum_k C_k \nu^{t_k} + \int_0^\infty \rho(t)\nu^t\,dt}$$

і називається *волатильністю* грошового потоку. Вона є мірою пропорційних змін чистої сучасної вартості грошового потоку по відношенню до змін у відсотковій ставці.

Зауважимо, що $v(i) = \tau(i)\nu$, тобто волатильність грошового потоку пропорційна тривалості. Це очевидно із загальних міркувань: чим довшою у часі є інвестиція, тим вона є більш вразливою до змін у відсотковій ставці.

Зауваження 1.3.1. Нерідко волатильність визначають по відношенню до змін у інтенсивності відсотка, а не відсоткової ставки:

$$v_1 = -\frac{V_\delta'}{V}.$$

Легко бачити (залишимо це читачеві як вправу), що при такому означенні волатильність дорівнює тривалості: $v_1 = \tau$.

Імунізація

На початку цього курсу зазначалося, що відсоткові ставки є змінними в часі. Більше того, ці зміни є непередбачуваними, випадковими. Багато компаній уникають надмірного ризику у своїй діяльності, тому мають спеціальні відділи з управління ризиками. *Імунізація* – це концепція управління активами, стратегія, що забезпечує покриття пасивів компанії її активами, незважаючи на зміни у відсотковій ставці.

Нехай надходження (активи) компанії складаються з сум $A_1, A_2, \ldots$ у моменти $t_1, t_2, \ldots$, а витрати (пасиви) – з сум $L_1, L_2, \ldots$ у ті самі моменти (див. коментар на с. 17). Тоді сучасна вартість активів компанії за відсоткової ставки i дорівнює $V_A(i) = \sum_k A_k \nu^{t_k}$, а пасивів – $V_L(i) = \sum_k L_k \nu^{t_k}$. Ідеальною ситуацією для керівництва компанії є рівність $A_k = L_k$, яку називають *ідеальним балансом*. Зрозуміло, що досягти ідеального балансу вкрай важко. Тим не менш, зазвичай припускають, що активи і пасиви збалансовані в тому сенсі, що надходження в точності покривають витрати,

$$V_A(i) = V_L(i). \tag{1.3.5}$$

Нерівність $V_A(i) \geq V_L(i)$ є природною метою для компанії. Адже якщо сучасна вартість пасивів більша, то немає гарантії того, що компанія у майбутньому буде здатною сплатити за своїми зобов'язаннями. Це, у свою чергу, може призвести до зниження кредитного рейтингу компанії і, як наслідок, до підвищення для неї вартості капіталу, тобто до підвищення ставки позичання для неї. Це все зменшить шанси компанії на подолання нею чорної смуги і збільшить шанси на банкрутство. Але навіщо прагнути рівності у (1.3.5)? Причин тут декілька. Найважливішим є те, що балансування активів і пасивів значно спрощує й уточнює облік і, фактично, таке балансування (подвійна бухгалтерія у своєму прямому сенсі) є каноном обліку. В принципі, будь-які "надлишкові" кошти можна використати для розвитку виробництва, виплати дивідендів, заробітної плати, спонсорства, тощо, іншими словами, можна збільшити майбутні пасиви. В решті решт, надлишкові надходження є гарним важелем у випадку, коли потрібно перерозподілити активи і пасиви з метою, скажімо, імунізації.

Тепер подивимося на те, що відбудеться при раптовій малій зміні відсоткової ставки у нульовий момент, тобто одразу після того, як активи і пасиви було збалансовано[4], на інше значення i'. Як зазначалося вище, нормальне функціонування компанії можливо лише за умови $V_A(i') \geq V_L(i')$. Оскільки відсоткові ставки змінюються незначно, достатньо, щоб цю умову було виконано для значень i', досить близьких до i. Іншими словами якщо визначити $f(i) = V_A(i) - V_L(i)$, потрібно щоб для усіх досить близьких до i значень i' виконувалося $f(i') \geq 0 = f(i)$. Це є нічим іншим, як означенням того, що у точці i функція f має локальний мінімум. Як відомо з математичного аналізу, необхідною умовою для цього є $f'(i) = 0$, або $V_L'(i) = V_A'(i)$. Розділивши цю рівність на i і взявши її з протилежним знаком, одержимо

$$v_A(i) = v_L(i), \tag{1.3.6}$$

тобто що волатильності активів і пасивів однакові. Цю умову називають *другою умовою імунізації за Редінгтоном* (перша умова – (1.3.5)). Першу (1.3.5) і другу (1.3.6) умови імунізації ще називають *необхідними умовами імунізації за Редінгтоном*. Зазначимо, можливо повторюючи думку, яка вже лунала, що перша умова насправді не є умовою імунізації – це умова балансу активів і пасивів. Також зауважимо, що друга умова рівносильна до $\tau_A = \tau_L$.

Читачеві добре відомо також, що достатньою умовою локального мінімуму (якщо виконано необхідну умову) є $f''(i) > 0$. Поділивши цю нерівність на (1.3.5), одержимо

$$c_A(i) > c_L(i), \tag{1.3.7}$$

тобто що опуклість активів більша за опуклість пасивів. Цю умову називають *третьою*, або достатньою, умовою імунізації за Редінгтоном. Отже, підсумовуючи все сказане вище, за умов (1.3.5)–(1.3.7) компанія є *імунізованою* від досить малих змін у

[4]Це припущення не є насправді обмеженням. Справді, якщо активи та пасиви компанії збалансовано зараз і протягом певного періоду відсоткова ставка залишається сталою, то наприкінці цього періоду баланс зберігатиметься.

відсотковій ставці, тобто при малих змінах у відсоткових ставках її активів достатньо для покриття пасивів.

Щоб надати умові (1.3.7) більш прозорого сенсу, можна умову (1.3.7) з використанням (1.3.5), (1.3.6) перетворити наступним чином:

$$\sum_k (t-\tau_A(i))^2 A_k \nu^{t_k} \geq \sum_k (t-\tau_L(i))^2 L_k \nu^{t_k}. \tag{1.3.8}$$

Вирази у лівій та правій частині рівності (1.3.8) називаються *розкидами* активів і пасивів, відповідно. Сенс розкиду для грошового потоку полягає у його назві: це міра сукупного відхилення моментів платежів від середнього цих моментів – тривалості. Умова (1.3.8), по-перше, є більш інтуїтивно зрозумілою, по-друге, з неї легко одержати достатню умову так званої *повної* імунізації. Повна імунізація за означенням – це захист від довільних, а не тільки малих, змін у значенні відсоткової ставки, тобто для будь-якого i' $V_A(i') \geq V_L(i')$.

Твердження 1.3.2. *Нехай виконано необхідні умови імунізації, а також існують два моменти t', t'', такі що $L_k = 0$ для $t_k \leq t'$ або $t_k \geq t''$, а $A_k = 0$ для $t' \leq t_k \leq t''$. Тоді імунізація є повною.*

Вправа 1.3.3. Виведіть нерівність (1.3.8) з умов (1.3.5)–(1.3.7) та доведіть твердження 1.3.2.

Зауважимо нарешті, що компанія може відмовлятися від умови (1.3.6) у разі, якщо вона впевнена у напрямку майбутніх змін відсоткової ставки. Скажімо, зниження відсоткових ставок робить більш вигідними довгострокові позики і менш вигідними довгострокові внески. Тому, якщо компанія упевнена у зниженні відсоткових ставок, то вона може скористатися тимчасовою перевагою довгострокових внесків і короткострокових позичань та зайняти нерівноважну позицію, зробивши тривалість активів більшою за тривалість пасивів.

Частина 2 Основи теорії фінансів і фінансової звітності

2.1 Ключові принципи фінансів

Відносини між фінансами, ресурсами і цілями організації Для ведення бізнесу компаніям потрібно використовувати реальні активи. Вони можуть бути як матеріальними: це обладнання, нерухомість, тощо, так і нематеріальними: це патенти, дозволи, розробки, тощо. Для одержання таких активів компанія повинна залучати фінанси. Залученням фінансів займається фінансовий менеджер, він є посередником між фірмою та фінансовими ринками, де інвестори тримають фінансові активи, випущені компаніями задля отримання грошей. Щодо фінансів, є два головні питання:

- в які реальні активи має інвестувати фірма;
- як залучати кошти для інвестування.

За друге питання – питання *фінансування* – відповідальним є *скарбник*, що наглядає за касою компанії, залучає новий капітал, підтримує стосунки з банками, власниками акцій та іншими інвесторами. Перше питання – питання *капітального бюджетування* – звичайно передається *контролеру* (часто ним є фінансовий директор). Однак рішення про капітальне бюджетування також торкаються планів розвитку виробництва, маркетингу і, таким чином, включаються в діяльність менеджерів з цих галузей (так само як і в діяльність штатних фахівців з корпоративного планування). Кінцева відповідальність за фінансові питання покладається (традиційно або юридично) на раду директорів. На практиці ради звичайно передоручають рішення за малими та середніми справами відповідальним менеджерам.

Капітальне бюджетування є важливим з-за складності потрібного аналізу та втрат через хибні рішення. Інвестиції в обіговий (робочий) капітал є переважно рутинними та включають небагато складностей або ризиків. З іншого боку, інвестиції у фіксований капітал (такий, як приміщення, обладнання, тощо) часто включають складний вибір між різноманітними капітальними активами, датами початку та методами фінансування. Подібний вибір одночасно є складним і критичним, зважаючи на можливість помилкових рішень (і їхню дуже високу вартість). Більш того, витрати на фіксований капітал часто мають серйозний вплив на напрям та темп зростання фірми. По суті вони визначають можливості, відкриті для фірми, та напрями, в яких вона може рухатись.

Успіх у менеджменті залежить від застосування логічного аналізу до досвіду, до відомих фактів або припущень. Навіть коли фінансовий аналіз не може покращити долю конкретного проекту, тим не менш можливо окреслити ризики, притаманні проекту, висвітлити помітні фактори і, можливо, запропонувати методи, за допомогою яких ці ризики можуть бути зменшені. Фінансовий аналіз в капітальному бюджетуванні включає спільне використання оцінок та ідей з багатьох дисциплін – маркетингу, технологій, обліку, оподаткування, правознавства – щоб виявляти їх фінансові наслідки.

В решті решт, проблеми капітального бюджетування будь-якого підприємства є одночасно і фінансовими, і політичними. Покладання відповідальності за інвестиційну оцінку проекту на саме тих фахівців, які в більшому степені зацікавлені у прийнятті проекту – відділ первинного вивчення проекту – є очікуванням неможливої об'єктивності. Використання спеціалістів з фінансів є спробою підсилення безпристрасності та реалізму.

Відносини між зацікавленими сторонами *Теорія договору* висвітлює фірму як систему договорів, явних та неявних, які встановлюють ролі різних учасників в організації (робочих, менеджерів, власників, кредиторів, тощо) та визначають їхні права, обов'язки й виплати за різних обставин. Більшість учасників домовляються про обмежений ризик і фіксовані виплати, в той час як власники фірми відповідальні за будь-який залишковий ризик (і тому володіють *залишковою вимогою* на будь-які активи та прибутки фірми, що лишаються після покриваючих витрат).

Проте, тут є потенційні конфлікти. Один з них – між власниками фірми та її кредиторами. Якщо менеджери істотно змінюють ризиковість інвестиційної активності, то це буде відчутно збільшувати вигоди співвласників (у разі успішності інвестицій). Однак, ризикові інвестиції, які не є успішними, будуть погіршувати захист кредиторів та зменшувати величини позик. Якщо фірма не надає кредиторам достатніх гарантій того, що інвестиційну політику не буде змінено їм у збиток, вона буде змушена сплачувати досить високі відсотки, щоб компенсувати кредиторам можливість подібної збиткової зміни у політиці.

Треба також поміркувати про соціальну відповідальність. Ефективні, добре керовані операції (узгоджені зі структурою споживчого попиту) призводять до нової продукції, нових технологій та зростання зайнятості. Але фірми мають брати до уваги й наслідки їхньої діяльності та дію на суспільство в цілому. Сподівання робітників, покупців і різних груп людей, об'єднаних спільними інтересами, створюють інші виміри зовнішнього середовища, на які повинна реагувати фірма. При формуванні політики компанії треба зважати на зовнішні чинники (такі, як забруднення, безпека продукції та виробнича безпека). Промисловість та уряд мають співпрацювати у встановленні правил корпоративної поведінки, так, щоб фірми прагнули максимізації добробуту власників за зовнішніх обмежень.

Ринки капіталу Для великих акціонерних компаній, акції яких відкрито котируються, фондовий ринок (ринок цінних паперів) виконує роль монітору – індикатору ефективності їхньої діяльності. В той час, як ціни акцій можуть реагувати на значні економічні та промислові фактори, базовою компонентою ціни акції є ринкове сприйняття поточної та майбутньої очікуваної успішності конкретної фірми. Якщо менеджери фірми неефективно використовують потенціал активів, що знаходяться під їхнім контролем, то невдовзі це відобразиться у зниженні ціни акцій. Це може зробити фірму вигідною покупкою для корпоративного покупця, і буде зроблено пропозицію про придбання контрольного пакету акцій. Тому комерційні підприємства прямо залежать від порядків, що встановлюються на фінансових ринках. Ці ринки неперервно визначають вартості цінних паперів підприємств, забезпечуючи цим показники успішності діяльності фірми. Тому наявність неперервної оцінки з боку ринків капіталу стимулює та спонукає менеджерів підприємств удосконалювати свою діяльність.

Ключовими чинниками впливу ринків капіталу на рішення фірм є наступні:

- якісні інвестиційні рішення вимагають точного вимірювання вартості капіталу;
- обмеження у пропозиції капіталу зосереджують увагу на методах залучення фінансів;
- поглинання і злиття створюють загрози, а також можливості, якими можна скористатися;
- зовнішні чинники вимагають від менеджерів визначення належної ролі організації.

Вступ до теорії представництва Кінцева відповідальність за фінансові рішення в компанії зазвичай покладається на її директорат. На практиці директори часто доручають оперативні рішення виконавцям, залишаючи собі контроль за стратегічними рішеннями. Директори діють від імені власників акцій (які їх обирають).

Подібне розділення власності та менеджменту має переваги: свободу зміни власності без впливу на поточну діяльність, свободу наймати професійних менеджерів, – але також недоліки та незручності, якщо інтереси власників і менеджерів розбігаються. На такі конфлікти посилаються як на проблеми *керівництва і представництва*, і вони ведуть до представницьких витрат. Це включає витрати, пов'язані з моніторингом дій інших та пошуком впливу на їхні дії. Сфера для конфлікту між власниками і менеджерами очевидна – менеджери можуть бути мотивованими цілями, відмінними від бажань (та інтересів) власників акцій. Конфлікти інтересів можуть також виникати і з іншими зацікавленими сторонами: молодшими менеджерами, іншими службовцями, клієнтами, постачальниками, пенсіонерами та державою.

Особливо цікавим є потенційний конфлікт між постачальниками фінансів, а саме: кредиторами (наприклад банками) та постачальниками власного капіталу (акціонерами). По суті, це може бути охарактеризоване як різниця між короткотерміновими прагненнями кредиторів до безпеки та довготерміновими інтересами власників акцій у розвитку компанії. Час від часу, однак, інтереси різних підгруп фінансистів можуть розбігатися.

Подібні проблеми можна легше вирішувати, якщо співвласники мають однакове розуміння стану компанії. Проте, між різними зацікавленими сторонами часто мають місце *інформаційні асиметрії*. Письмові угоди між різними класами акціонерів можуть встановлювати головні аспекти взаємовідносин між ними, але не в змозі реалістично передбачити всі можливі майбутні сценарії. Тому подібні угоди потребують доповнень через менш формальні згоди та заходи. Теорія представництва, що розглядає взаємовідносини між керівником та агентом цього керівника, включає такі питання, як природа представницьких витрат, конфлікти інтересів (та як уникати їх) і те, як агентів можна мотивувати та заохочувати.

Максимізація багатства власників акцій Більшість сучасних бізнесових організацій можуть мати тисячі, а то й мільйони, окремих акціонерів. Потреби (та цілі) цих власників акцій будуть змінюватися згідно з такими факторами, як:

- відношення до ризику;
- часові переваги та споживчі потреби;
- баланс між потребами в доході та зростанні капіталу;
- позиція щодо оподаткування.

Як менеджери та директори, представляючи інтереси кінцевих власників, можуть задовольняти різноманітні бажання цих власників? Як вони взагалі можуть дізнаватися, які ці бажання? На щастя, існує механізм, який дозволяє розв'язати цю складну задачу – це ринок. У припущенні, що існує прозорий, конкурентний ринок капіталу, власники акцій можуть вибирати свої інвестування так, щоб досягти своїх потреб у грошовому потоці, ризику тощо. Якщо ж ми припустимо, що всі власники акцій зацікавлені у якнайбільшому збагаченні (тобто що вони прагнуть максимізувати *теперішню* вартість), то ціль фінансових менеджерів формулюється просто: підвищувати ринкову вартість кожної частки власника акцій у фірмі.

Цю ціль можна ще більше конкретизувати і перетворити її на інструмент для фінансового менеджменту наступним чином. Кожне оперативне рішення треба зобразити як схему майбутніх грошових потоків (додатних і від'ємних). Дисконтуючи ці потоки відносно належної відсоткової ставки, ми можемо встановити *чисту сучасну вартість* будь-якої альтернативи. Якщо у якості відсоткової ставки для дисконтування використовується вартість капіталу, то всі альтернативи, що мають додатну чисту сучасну вартість, будуть збільшувати сучасну вартість багатства акціонерів. Альтернативи, що показують негативну сучасну вартість, "руйнують вартість" і їх треба уникати.

Ринок також дозволяє визначити вартість капіталу, прийнятну для використання у прийнятті рішень – це норма прибутку, яку дають еквівалентні інвестиційні альтернативи на ринку капіталу. Таким чином, нам потрібно оцінювати можливості з точки зору власників акцій (і, отже, альтернатив, у які вони можуть вкласти свій капітал), а не просто перевіряти, що прибутковість проекту більша, ніж вартість запозичення фондів, потрібних для його фінансування. Останній підхід може підвищувати (облікову) вартість компанії, але він не буде максимізувати її вартість з точки зору акціонерів.

Зверніть увагу на те, що ми повинні розглядати норми прибутку *еквівалентних* інвестиційних альтернатив. Тобто, крім рентабельності, нам потрібно розглядати ризики, пов'язані з проектом, щоб бути впевненими, що ми порівнюємо подібне з подібним.

2.2 Власність і капітал

2.2.1 Власність компанії

Бізнесові одиниці

Індивідуальним підприємцем є бізнес, що належить одній особі і не є компанією з обмеженою відповідальністю. Індивідуальний підприємець несе необмежену правову відповідальність за свої бізнесові борги. Підкреслимо, що одноосібним тут є саме володіння бізнесом. Зокрема, є індивідуальні підприємці, які мають найманих працівників. Для юридичного заснування цієї форми бізнесової одиниці не потрібно ніякої спеціальної документації. (Звичайно, для певних типів бізнесу можливі специфічні вимоги, скажімо, у громадському харчуванні, медичній практиці, тощо.)

Індивідуальний підприємець сплачує звичайний прибутковий податок зі своїх прибутків.

Партнерство є бізнесом, який належить декільком особам і не є компанією з обмеженою відповідальністю. Партнери можуть володіти однаковими або різними частками в партнерстві.

Власники несуть необмежену відповідальність, і всі партнери спільно відповідають за будь-які бізнесові борги. Більше того, вони також є відповідальними *окремо*: кожен партнер є зобов'язаним на повну величину свого майна у разі банкрутства.

До ведення справ зазвичай долучаються всі партнери, але можливо, що деякі з них лише надають гроші і не беруть участі у щоденних справах бізнесу (таких партнерів називають "сплячими").

Більшість партнерств повинна мати "партнерську" угоду, яка встановлює права індивідуальних партнерів.

Компанія з обмеженою відповідальністю є бізнесом з юридичною особою, відокремленою від власників бізнесу. Власники компанії називаються *акціонерами*. Акціонери мають призначати директорів, які відповідатимуть за контроль над компанією від їхнього імені.

Зобов'язання власників обмежено повною величиною виплат за їхні акції. Таким чином, якщо акції випущено "частково оплаченими”, то у випадку ліквідації акціонери матимуть зобов'язання сплатити несплачений внесок. Якщо ж акції випущено “повністю оплаченими”, то акціонери не матимуть подальших зобов'язань.

Прибутки потрібно декларувати щороку, а дивіденди, як правило, сплачуються кожному акціонеру пропорційно до його частки (номінальної вартості акцій, якими він володіє). Зазвичай акції дають право голосу на зборах компанії.

Компанії з обмеженою відповідальністю повинні мати Меморандум і Статут акціонерного товариства. Усі компанії мають щороку проходити зовнішній аудиторський облік.

Нову корпоративну одиницю – *партнерство з обмеженою відповідальністю* (Limited liability partnership) – було введено у Великій Британії в 2001 р. Ця бізнесова одиниця дає переваги обмеженої відповідальності, у той час як решта характеристик традиційного бізнесового партнерства залишаються.

Будь-яка фірма, що складається з двох або більшої кількості членів (підкреслимо: не партнерів) і займається прибутковим бізнесом, може стати партнерством з обмеженою відповідальністю (ПОВ). ПОВ, як і компанія з обмеженою відповідальністю, є окремою юридичною особою і, хоча ПОВ відповідає за свої активи і пасиви, відповідальність окремих членів обмежена. (Однак, проти окремих членів, яких викрито у халатності або шахрайстві, можуть бути вжитими відповідні заходи; це справедливо і для компанії з обмеженою відповідальністю.)

На відміну від компанії з обмеженою відповідальністю, ПОВ не мають меморандуму і статуту. Загалом ПОВ керуються партнерською угодою, яка могла вже бути в силі в існуючому партнерстві. На відміну від компанії з обмеженою відповідальністю, тут не існує директорів (або секретарів) і, звичайно, немає акціонерів. ПОВ оподатковується так само, як і партнерство.

ПОВ виявляються найбільш зручними для професійних фірм (таких, як аудиторські та адвокатські контори).

Закриті та відкриті компанії з обмеженою відповідальністю *Відкрита* компанія з обмеженою відповідальністю є компанією, у меморандумі якої встановлено, що вона відкрита, та яка випустила акціонерний капітал на суму, не меншу 50 000 фунтів стерлінгів. Назва відкритої компанії з обмеженою відповідальністю має закінчуватися словами “public limited company” (або, скорочено, plc).

Всі інші компанії з обмеженою відповідальністю вважають *закритими*. Назва закритої компанії з обмеженою відповідальністю має закінчуватися словом “limited” (або, скорочено, ltd). Закритій компанії не дозволяється робити свої акції загальнодоступними.

Вимогою фондової біржі для компанії, що бажає мати лістинг (бути допущеною до котирування) на фондовій біржі, є те, щоб вона була відкритою компанією з обмеженою відповідальністю.

Переваги компаній з обмеженою відповідальністю Обмежена відповідальність полегшує залучення капіталу. Це особливо важливо у випадках комерційних підприємств, діяльність яких пов’язана з ризиком накопичення великих боргів, та тих, що вимагають великих капіталовкладень.

Розділення володіння і менеджменту допускає зміну власника (власників) акцій без впливу на хід бізнесу. Воно також дозволяє фірмі наймати професійних менеджерів.

Обмежена відповідальність дозволяє великій кількості людей інвестувати гроші в малих кількостях з мінімальною перевіркою перспектив компанії. У свою чергу, це дозволяє інвесторам диверсифікувати області їхньої діяльності і їхній ризик збанкрутіти.

Недоліки компаній з обмеженою відповідальністю Якщо активи компанії вичерпано, гарантії, що комерційні кредитори одержать гроші після банкруства, немає. Так само, клієнти, які внесли передоплату за товари чи послуги, не можуть гарантувати їхнє одержання. (Згадайте історії про збанкрутілі авіакомпанії, чиї пасажири були змушеними терміново шукати інші шляхи подорожі.)

Обмежена відповідальність дозволяє людям ставати співвласниками без активного врахування довгострокових потреб компанії. Більше того, інтереси біржових гравців – зростання ціни акції у якомога коротший термін – прямо суперечать довгостроковим інтересам компанії.

Менеджері компанії можуть мати цілі, що не найкращим чином відображають інтереси акціонерів (це відомо, як проблема представництва).

Існує також проблема інформаційних асиметрій, коли різні зацікавлені сторони (менеджери, акціонери, кредитори) мають різну інформацію про справжню величину фінансових активів. Це підсилює потребу у прийнятті належних стандартів обліку.

2.2.2 Типи капіталу компанії

Всім організаціям потрібний капітал для фінансування приміщень, обладнання й операцій. Головні джерела фінансів – довгострокових, середньострокових та короткострокових – розглядаються нижче. Альтернативні категорії довгострокових боргів і акціонерних фінансів будуть розглянуті більш детально в пункті 2.2.4.

Довгостроковий капітал

Позичковий капітал Компанія випускає *позичковий капітал*, щоб збільшити надходження грошей від інвесторів. При поверненні боргу компанія сплачує інвесторам потік відсоткових платежів разом з кінцевим поверненням капіталу. Величини відсоткових та капітальних платежів можуть бути конкретизованими на початку операції. Випуски позичкового капіталу можуть котируватися на фондовій біржі.

Прийнято виражати позичковий капітал в одиницях номіналу. Зазвичай відсоткові платежі виражають як долю номінальної вартості. Частіше за все позичковий капітал випускають за номінальною ціною або дещо дешевше (*з дисконтом*). Майже весь позичковий капітал погашається за номінальною вартістю. Іноді його погашають вище номіналу (*з премією*).

Власники позичкового капіталу є кредиторами компанії. Вони не мають права голосу. Права власників позичкового капіталу мають бути встановлені в угоді про позику, складеній у момент випуску позики. У більшості випадків призначається *довірена особа*, яка діятиме від імені власників позичкових цінних паперів. Довірена особа є зазвичай корпоративною організацією, такою, як банк або страхова компанія. Юридична документація, що встановлює обов’язки компанії-емітента щодо власників позичкового капіталу, відома як *довірча угода*.

Звичайні акції *Звичайні акції* – це головний шлях фінансування компаній у Великій Британії. Акціонери є власниками бізнесу. Вони мають право *залишкової вимоги*, тобто вони отримують усі активи і прибутки, що залишаються у бізнесу після сплати усіх боргів. Звичайні акції пропонують інвесторам високі потенційні прибутки за високий ризик, особливо, ризик втрат капіталу. Початкова поточна доходність (тобто норма прибутку на акцію за її поточної ринкової ціни) є низькою, але дивіденди мають зростати з інфляцією і реальним зростанням активів компанії. Історично склалося, що звичайні акції дають найбільший дохід порівняно з будь-яким іншим класом довготривалих активів. Через це, інвестори були готовими погодитися з високою дисперсією доходів, що приводить до низької короткострокової ефективності навіть для добре диверсифікованого портфелю.

Звичайні акції майже ніколи не погашаються. Акціонери матимуть кількість голосів на зборах пропорційно до числа акцій, якими вони володіють. Вони отримуватимуть *дивідендні* платежі, що робляться з прибутків компанії. При ліквідації компанії вони у черзі після всіх кредиторів компанії.

Всі акції мають *номінальну вартість*, часто 25 пенсів. Номінальна вартість не має відношення до ринкової вартості акції. Компаніям не дозволяється випускати акції ціною нижче номіналу (а номінал не може бути меншим за 25 пенсів). У обліку компанії вказується номінальна вартість випущеного акціонерного капіталу. Меморандум компанії встановлює загальну номінальну величину статутного акціонерного капіталу. *Випущений акціонерний капітал* – це фактично номінальна вартість випущених акцій. Випущений акціонерний капітал не може бути більшим за статутний акціонерний капітал.

Звичайні акції мають найнижчий ранг серед усіх фінансів, випущених компанією. Дивіденди не є правовим зобов’язанням компанії. Дивіденди сплачуються тільки за рішенням ради директорів. На практиці директори намагаються сплачувати постійно зростаючий потік дивідендів.

Середньострокові фінанси компанії

Закупівля у відстрочку Угода про *закупівлю у відстрочку* є угодою про взяття товарів в оренду на певний період часу з регулярними рентними виплатами і подальшу купівлею товарів наприкінці періоду прокату. Законне володіння приходить до покупця тільки тоді, коли зроблено останній платіж. Якщо покупець не зробив належних платежів протягом дії угоди, продавець може забрати товар.

Продаж у кредит *Продаж у кредит* є нормальним продажем товару з угодою про те, що оплату буде зроблено серією регулярних внесків протягом встановленого періоду часу. Законне володіння товаром приходить до покупця при укладанні угоди. Продавець не може вимагати повернення товару, навіть якщо покупець не сплатив, він може лише вимагати сплати через суд.

Орендування, лізинг *Оренда* є угодою, за якою власник активу (*орендодавець*) віддає *орендатору* право використовувати актив протягом певного періоду часу в обмін на регулярну серію виплат. Законна власність при цьому не переходить в інші руки. Є два типи оренди: *операційна* та *фінансова* оренда.

При операційній оренді орендатор бере на себе більшість ризиків, пов'язаних з володінням активом. Оренда триватиме протягом періоду часу, порівняного з імовірним експлуатаційним терміном активу. Сучасне вартість платежів при угоді показують в балансі орендатора двічі: як актив і як відповідний пасив.

При фінансовій оренді всі ризики, пов'язані з володінням та експлуатацією активу, залишаються в орендодавця. Зокрема, якщо протягом оренди актив вийде з ладу, орендодавець матиме замінити актив робочим.

Банківський кредит *Банківський кредит* є видом середньострокового позичання в банку, коли повна сума позики сплачується на поточний рахунок боржника, і боржник бере на себе відповідальність робити відсоткові виплати та капітальну виплату в повному розмірі позики. Банківські кредити зазвичай забезпечуються активами боржника *плаваючої застави* – тобто всі активи компанії (або особи) слугують гарантією позики. Відсоткова ставка звичайно коливається. Більшість британських банків кредитують на період 7 років або менше, однак терміни часто змінюються.

Є кредити, коли боржник може повертати позику платежами, повідомляючи банк за декілька днів до кожної чергової виплати. Такі угоди називаються *кредитними лініями*.

У разі масштабного позичання використовуються комплексні кредити. Наприклад, багатовалютні кредити та синдиковані кредити (коли кредит надається групою банків).

Короткострокові фінанси компанії

Банківські овердрафти *Овердрафт* є формою короткострокового позичання у банка, коли позичальник має можливість брати гроші з поточного рахунку так, що він стає негативним, до певної узгодженої границі. Позичальник сплачує відсотки тільки в розмірі, в якому він у дійсності робив овердрафт. Ніяких конкретних капітальних виплат не робиться.

Овердрафти, що надаються компаніям, є зазвичай забезпеченими плаваючою заставою. Відсотки, що стягуються за овердрафт, є вищими, ніж при позичанні такої ж суми. Банк може вимагати негайного відшкодування овердрафту без жодного попередження.

Комерційний (торговельний) кредит *Комерційний кредит* є угодою між компанією і одним з її постачальників оплатити товари або послуги після того, як вони були надані.

У більшості випадків ніяких явних відсотків не стягується. У багатьох галузях відстрочений платіж є настільки звичайним, що при терміновий сплаті можна домовитися про певні знижки.

Факторинг Є два типи *факторингу*: факторинг без регресу та факторинг з регресом.

Факторинг без регресу має місце, коли постачальник продає свої комерційні борги фактору (комісіонеру), щоб отримати готівкові платежі за рахунками раніше дати, вказаної в цих рахунках. Фактор переймає на себе всю відповідальність за кредитний аналіз нових рахунків, збір платежів і кредитні збитки.

Факторинг з регресом забезпечує тільки ранню оплату за рахунками. Це позика, що є забезпеченою рахунками-фактурами. Кредитний ризик залишається за початковим постачальником.

Перевідні векселі *Перевідний вексель* (фактично, вимога на сплату боргу покупця товару в кредит) може бути “акцептованим” банком (за певну плату). Це означає, що банк гарантує виплату за векселем будь-кому, хто триматиме вексель у момент погашення. Таким чином, вексель можна продати для збільшення короткострокових фінансів. Коли *індосант* (особа, що робить передавальний запис на векселі) є “прийнятним” банком, то вексель називають *прийнятним перевідним векселем*. Перевідний вексель, якщо він є “прийнятним”, є дуже надійною інвестицією.

Перевідні векселі відомі як “двоіменні” папери, тому що на них вказано назву компанії-боржника та акцептуючого банку.

Комерційні папери *Комерційний папір* – це синонім короткострокового позичання великими компаніями. Він є документом на пред’явника, який випускається з дисконтом та погашається за номіналом. Номінал стерлінгового комерційного паперу не може бути меншим 500 000 фунтів. Комерційні папери не котируються на фондовій біржі. Компанії, які бажають залучити фінанси за допомогою випуску стерлінгових комерційних паперів, мають дотримуватися певних мінімальних стандартів. Компанія-емітент мусить:

- мати лістинг на Лондонській фондовій біржі;
- дати заяву з підтвердженням того, що вона виконуватиме вимоги фондової біржі і що не було ніяких несприятливих змін відтоді, коли компанія востаннє оприлюднила облікові документи у відповідності з правилами фондової біржі.

2.2.3 Оподаткування

Особисте оподаткування

Особистому оподаткуванню типово підлягають усі фінансові ресурси індивідуума, основними джерелами яких є:

- дохід (або зароблений – зарплата й оклад, або незароблений – інвестиційний дохід та рента);
- прибуток від діяльності як індивідуального підприємця або партнера;
- успадкований статок;
- прирости капіталу;
- величина активів у володінні.

У багатьох країнах оподатковуються лише надходження готівки, оскільки вони вказують на гроші, доступні для фінансування сплати податків. Там, де податок визначається величиною активів, припускається можливість реалізації активів, щоб утворити фонди, потрібні для сплати податків.

Крім платоспроможності, уряди також намагаються гарантувати громадянам достатній залишковий прибуток та статок для забезпечення їхніх основних потреб. Тому зазвичай податкові зобов'язання стягуються після врахування всіх істотних джерел статку та/або прибутку, і певні базові рівні прибутку або статку віднімаються при розрахунку. Однак може бути особливий механізм, за яким податки стягуються з джерел прибутку протягом періоду оподаткування, щоб прискорювати потік податків для уряду. У такому разі при остаточному розрахунку для періоду встановлюють кінцеву виплату (або кредит), потрібну для коригування податкових платежів.

Загалом уряди прагнуть гарантувати, щоб потоки доходів оподатковувалися лише один раз і не раніше, ніж вони потрапляють до одержувача. Однак, якщо податки також накладаються на статок або особливі активи, "подвійне" оподаткування можливе (оскільки активи можуть бути придбаними з фондів, що вже сплатили податки). Потрібно аналізувати, чи мають граничні ставки податку зростати, спадати, або залишатися сталими при зміні бази оподаткування особи.

Неоподаткований рівень прибутку або статку може коригуватися залежно від особистих чи сімейних обставин. Таким чином, неоподаткована частка прибутку, відома як особиста *податкова пільга*, може відніматися з прибутку перед обчисленням податкових зобов'язань. Існують також інші податкові пільги, наприклад, пільги за віком. У деяких країнах можливі додаткові пільги для подружніх пар.

Деякі прибутки не підлягають оподаткуванню. Наприклад, у Великій Британії не оподатковуються:

- більшість доходів від азартних ігор;
- більшість форм соціальної допомоги;
- прибутки від певних типів інвестицій, як-от:
  - TESSA (організація з підтримки жертв насильства у сім'ї);
  - PEP (програма капіталовкладень у британські компанії);
  - ISA (програма пенсійних ощадних рахунків).

Звільнення від податку також можливе для певних форм видатків, наприклад, внесків у затверджені пенсійні схеми.

Коли наймані робітники одержують "додаткові бонуси" (пенсія, оплачувана відпустка, відрядження) разом з заробітною платою або окладом, величина таких бонусів зазвичай входить до визначення оподаткованого доходу. Для інвестиційного прибутку податок звичайно стягується з джерела прибутку. Для цілей оподаткування валовий прибуток включається у розмір оподаткованого прибутку, але стягнутий з джерела податок віднімається від податкових зобов'язань особи.

Податок на приріст капіталу

Особи та компанії типово підлягають *податку на приріст капіталу*. Прирости капіталу для більшості активів оподатковуються. Однак можуть бути виключення. Наприклад, у Великій Британії такі активи звільняються від податку на приріст капіталу:

- особисті автомобілі;
- основне приватне помешкання;
- іноземна валюта, отримана для особистого використання;
- цінні папери британського уряду та інші кваліфікаційні цінні папери з фіксованим відсотком.

Оподаткований приріст типово визначається як ціна продажу мінус вартість купівлі. Ціну продажу при підрахунку може бути знижено, щоб відобразити певні витрати, пов'язані з продажем. Вартість купівлі може бути збільшеною на будь-які суми, пов'язані з придбанням, і на витрати, зроблені для підвищення вартості активу під час володіння ним. У нормальних обставинах ціною покупки є початкова ціна активу. Однак, сказане вище означає, що прирости номінальної вартості активу, які спричинила інфляція, мають оподатковуватися. Щоб уникнути цього, можлива індексація ціни покупки.

У Великій Британії у особистому оподаткуванні індексаційну знижку було замінено (з квітня 1998 р.) системою "звуження", знижуючою сплачуваний податок на прирости капіталу для довгострокових інвестицій. Однак індексація все ще застосовується з дати купівлі до березня 1998 р., а також при оподаткуванні компаній.

Втрати капіталу звичайно можуть відніматися від приростів капіталу у тому ж самому році. Будь-яка невикористана втрата капіталу може бути перенесена на наступний рік (роки). Правило зменшення приростів капіталу не застосовується, якщо втрата капіталу відбувається лише з-за індексаційної знижки.

У більшості країн особи сплачують податок тільки на ті оподатковані прирости, що перевищують певний допустимий річний рівень. Для особи величина оподаткованого приросту капіталу додається до оподаткованого прибутку і підлягає податку на приріст капіталу за граничною ставкою податку для особи. Компанії сплачують корпоративний податок на оподатковані прирости за ставкою, за якою вони звичайно сплачують корпоративний податок.

Корпоративний податок

Компанії зобов'язані сплачувати *корпоративний податок* на їхні оподатковані прибутки. Оподатковані прибутки включають як прибуток (без витрат), так і прирости капіталу. Відправною точкою для оцінювання оподаткованого прибутку є "прибуток від звичайної діяльності до стягнення податку" (ПСП) з рахунку прибутків і збитків. Але ці цифри потребують уточнення.

По-перше, при підрахунку ПСП віднято всі витрати, навіть ті, що не звільняються від податку, наприклад, розважання клієнтів, штрафи, тощо, тому їх треба додати назад. По-друге, податкова адміністрація використовує власний підхід до амортизації (це природно, оскільки методи різних компаній сильно відрізняються, і не можна підлаштуватися під усі), а саме: вона дозволяє списати *дозволене капітальне відрахування* – певну частку вартості активу, залежну від його природи і віку. Наприклад, за перший рік використання можна списати 50 % вартості виробничих активів. Але відображені в рахунку амортизаційні витрати слід додати назад до ПСП. По-третє, ПСП включає прибуток від інвестиційної діяльності, зокрема дивіденди за акціями. Компанія, що виплачує дивіденди, вже сплатила корпоративний податок на прибутки, з яких виплачуються дивіденди, тому дивіденди виплачуються разом із закріпленим податковим кредитом. Такий прибуток, що виплачується британськими компаніями разом зі закріпленим податковим кредитом при розподілі їхніх прибутків після утримання податків, називають *звільненим інвестиційним прибутком*. Таким чином, щоб уникнути подвійного оподаткування, цей прибуток віднімають від ПСП для визначення оподаткованого прибутку.

Однак уряди іноді намагаються мотивувати компанії на збереження і реінвестування прибутків. Це може бути досягнено стягненням більших податків на дивіденди, ніж на "збережені" прибутки, або звільненням від податку на нові інвестиції (такі, як згадані вище капітальні відрахування). Доходи від таких інвестицій мають тоді оподатковуватися звичайним чином. Частковий приклад цього стосується пенсійного забезпечення, коли уряд може намагатися заохотити приватні та інституціональні пенсійні плани, пропонуючи звільнення від податку (або навіть субсидії) на внески і, можливо, на інвестиційні прибутки з пенсійних схем. У той час як кінцева пенсійна виплата буде оподатковуватися при виплаті, окремі отримувачі часто будуть мати вигоду від режиму низьких податків, коли вийдуть на пенсію. В деяких країнах такі фонди з податковими перевагами можуть слугувати й іншим цілям (таким, як придбання домівок, медичні витрати, фінансування освіти та тренінгів).

Звільнення від подвійного оподаткування Більшість країн мають угоди про подвійне оподаткування з іншими країнами. Звільнення від подвійного оподаткування означає, що місцева податкова влада дозволяє компаніям та окремим особам із закордонними доходами віднімати податок, сплачений за кордоном, від їхніх податкових зобов'язань вдома. Найбільшою сумою, що може відніматися, є ставка податку на валовий прибуток вдома. Звільнення від подвійного оподаткування застосовується лише для прибутку, що отримано за кордоном, але не для доходу капітальної природи.

Інші податки

Інші категорії податків, що накладаються на доходи компаній і індивідуумів, включають:

- гербовий збір на контрактуальні документи;
- податки на спадщину;
- податок з продажів;
- податок на додану вартість;
- ввізне мито;
- майнові податки.

Також можлива система оподаткування витрат, як загальних (наприклад, податок з обігу), так і специфічних (наприклад, ввізне мито або акциз). Система таких специфічних податків може бути влаштована таким чином, щоб підтримати певні види споживчих витрат або щоб збільшити доходи для певних категорій урядових витрат. Деякі групи “основних” витрат, такі, як витрати на основні продукти харчування, можуть звільнятися від податку з обігу.

2.2.4 Фінансові інструменти

Основні види фінансових інструментів

Борг або позичковий капітал Головні характеристики боргу або позичкового капіталу було обговорено вище. Тепер ми розглянемо основні типи облігацій (боргових цінних паперів).

Боргові акції (дебентури) *Боргові акції* – це позики, що забезпечуються деякими або всіма активами компанії. Це означає, що якщо компанія неспроможна зробити один з купонних платежів або капітальний платіж, то власники акцій можуть вдаватися до різних заходів. Вони можуть призначити ліквідатора (тимчасово управляючого майном боржника) для отримання прибутків з забезпечених активів або заволодіти забезпеченим активом для продажу з метою сплати боргу.

Є два типи боргових акцій.

Іпотечна (заставна) облігація, або облігація з *фіксованою заставою*: фіксована застава означає, що у правовій документації про іпотечну облігацію зазначено конкретні забезпечені активи.

Дебентура з *плаваючою заставою*: компанія може змінити забезпечені активи за нормального ходу справ. Наприклад, вона може продати активи за умови заміни їх на рівнозначні активи. Коли компанія неспроможна зробити капітальні або відсоткові виплати, то власники дебентури можуть звернутися до суду, щоб перетворити плаваючу заставу на фіксовану.

Боргові акції несуть той ризик, що купонні або капітальні виплати не буде зроблено, але їхніх власників захищено забезпеченими активами. Величина всіх виплат, як капітальних, так і відсоткових, може зменшитися за рахунок інфляції.

Боргові акції також можуть бути не достатньо ринковими. Загальний дохід за ними відображає всі ці ризики.

Боргові акції й облігації використовуються для залучення великих фондів. Вони мають фіксовану дату погашення і фіксовану відсоткову ставку, так що боржник несе відомі зобов’язання з обслуговування боргу. Відсоткові платежі віднімаються з податкових зобов’язань (як витрати компанії). Власники боргових облігацій є кредиторами компанії і не мають права втручатися в її роботу.

Однак відсоткові виплати повинні здійснюватися незалежно від прибутковості компанії або стану готівкового потоку, нездатність дотримуватися узгоджених термінів може поставити подальше існування компанії під загрозу.

Незабезпечені облігації Для *незабезпечених облігацій* немає конкретного забезпечення позики. Якщо компанія оголошує дефолт, власники облігацій можуть відшкодувати збитки через суд. Власники незабезпечених облігацій мають нижчий ранг за власників боргових акцій. Інші кредитори компанії мають однаковий ранг з власниками незабезпечених облігацій.

Валовий дохід при погашенні вищий, ніж дохід за борговими акціями, що компенсує нижчу ринковість та вищий ризик.

Єврооблігації Традиційно британські компанії випускали облігації у рамках діючих у Великій Британії податкових та правових норм. Проте можливо позичати і в іншій країні. З 1950-х років стало можливо заключати угоди з комерційними банками про випуск позичкового капіталу так, щоб він не підпадав під правові або податкові норми жодної країни. Ринок такого типу позичкового капіталу відомий як ринок "Євро". Компанії в усьому світі залучають гроші, випускаючи єврооблігації. Єврооблігації можуть випускатися у будь-якій валюті, включаючи євро. Частіше за все їх деноміновано у доларах, такі облігації називають "євродоларовими" або просто "євродоларами". Поширеними є наступні типи єврооблігацій:

- "бульдоги" – деноміновані у фунтах і призначені для британського ринку облігації;
- "янкі" – євродоларові облігації, призначені для американського ринку;
- "самураї" – деноміновані у ієнах і призначені для японського ринку.

Більшість єврооблігацій погашається за номіналом у встановлений день, протягом дії єврооблігації виплачуються фіксовані купонні виплати. Однак купони за єврооблігаціями виплачуються щорічно, а не що півроку. Майже всі єврооблігації є незабезпеченими. Єврооблігації випускаються у формі документів "на пред'явника". Вимагаючи відсоткових виплат, власники мають відрізати купони з документу та надсилати їх компанії (або її платіжному агенту).

Незначна кількість єврооблігацій має змінні купонні виплати. Це так звані "облігації (ноти) з плаваючим відсотком" (див. с. 77). Випущено багато інноваційних типів єврооблігацій. Торгівля більшістю єврооблігацій здійснюється через банки, а не через фондові біржі.

Валовий дохід при погашенні залежить від емітента (звідси ризик) і від величини емісії (звідси ринковість). На реальний дохід впливатиме інфляція.

Єврооблігації також використовуються для залучення значних сум — мінімальна допустима величина емісії становить 75 млн $. Вони є зручним засобом залучення великих сум іноземної валюти без виходу на іноземні фінансові ринки. Можливе залучення фондів за нижчою ставкою, ніж за відсоткову ставку вдома, але тут можуть виникати ризики, пов'язані з обмінним курсом, якщо залучені фонди конвертуються в місцеву валюту для використання в домашніх проектах.

Власний (акціонерний) капітал

Загальні характеристики акцій, або власного капіталу, обговорювалися вище. Тепер ми розглянемо деякі подальші аспекти акцій. Ринковість звичайних акцій змінюється відповідно до розміру, але зазвичай вона значно вища, ніж у позичкового капіталу тієї ж самої компанії. Три основні причини цього:

1) для багатьох компаній значна частина їхнього капіталу виступає у вигляді звичайних акцій. Тому є тенденція випускати великі кількості звичайних акцій;
2) більшість компаній мають тільки один тип звичайних акцій, у той час як їхній позичковий капітал скоріш за все розбито на декілька різних випусків;
3) інвестори схильні купляти і продавати звичайні акції більш часто, ніж торгувати позичковим капіталом, оскільки залишкова натура звичайних акцій робить їх більш чутливими до змін поглядів інвестора про компанію.

Час від часу компанії випускають варіації описаних вище базових звичайних акцій, наприклад: акції “з відстроченим дивідендом”, звичайні акції з можливістю погашення, акції без права голосу, акції з правом декількох голосів та “золоті” акції у нещодавно приватизованих галузях.

Привілейовані акції *Привілейовані акції* значно менш поширені, ніж звичайні акції. Якщо компанія одержує достатні доходи, вони пропонують фіксований потік звільненого інвестиційного прибутку.

Привілейовані акціонери мають переважне право на будь-які дивіденди, або на повернення капіталу, або на те й інше разом, порівняно зі звичайними акціонерами. За привілейованими акціями сплачуються фіксовані дивіденди, тому їх можна розглядати як певний вид цінних паперів з фіксованим відсотком. Зазвичай вони не дають права голосу.

Дивіденди не обов’язково мають сплачуватися. Проте, якщо дивіденди не сплачуються за привілейованими акціями, то і за звичайними акціями не може бути сплачено дивідендів. Зазвичай привілейовані акціонери набувають права голосу, якщо їм не сплачуються дивіденди. Вони також отримуватимуть право голосу, якщо права, що прикріплено до їхніх акцій, змінюються.

Більшість привілейованих акцій є кумулятивними і не погашаються. Привілейовані акції також можуть бути: некумулятивними, такими, що погашаються, акціями участі, конвертованими, ступінчастими.

За *кумулятивними* привілейованими акціями треба сплачувати заборговані дивіденди, так само, як і поточний щорічний дивіденд, перед сплатою дивідендів звичайним акціонерам.

Акції участі дають право на частку прибутків понад фіксованого дивіденду, якщо дивіденди за звичайною акцією перевищують певну величину.

За ступінчастими акціями (акціями з доходом, що підвищується) дивіденди підвищуються попередньо встановленим чином.

Для всіх інвесторів очікуваний дохід за привілейованими акціями вірогідно буде нижчим, ніж дохід за звичайними акціями, тому що ризик від володіння привілейованими акціями менший.

Для більшості інвесторів привілейовані акції дають менший післяподатковий прибуток, ніж позичковий капітал. Однак для платників корпоративного податку привілейовані акції можуть іноді давати більший чистий прибуток, ніж позичковий капітал.

Ринковість привілейованих акцій подібна до ринковості акціонерного капіталу.

Вирішальною відмінністю привілейованих акцій від звичайних є те, що дивіденди за привілейованими акціями (крім акцій участі) є обмеженим фіксованою величиною, яка сплачується майже завжди. Тому за інвестиційними якостями привілейовані акції більше подібні до незабезпечених облігацій, ніж до звичайних акцій.

Конвертовані цінні папери

Конвертованими видами цінних паперів компанії є *конвертовані незабезпечені облігації* та *конвертовані привілейовані акції*. Вони є, відповідно, незабезпеченими облігаціями та привілейованими акціями, які можна обміняти на звичайні акції компанії-емітента пізніше. Додатковий прибуток у перспективі означає, що емітенту не потрібно пропонувати надмірно великі відсотки за облігаціями, щоб залучити кредиторів.

Інвестор нічого не сплачує за конвертацію, крім відмови від привілейованих акцій. Конвертований цінний папір має встановлену річну відсоткову ставку, виплати здійснюються двічі на рік. Для конвертованих привілейованих акцій установлена ставка буде чистою, оскільки прибуток за ними є звільненим і сплачується з податковим кредитом. Дата обміну може бути єдиною датою або, на вибір власника, одною з ряду конкретних дат. Період перед першою можливою датою для обміну відомий як *період спокою*.

Для кожного обміну буде виділятися конкретна кількість звичайних акцій. Якщо інвестор вирішує не обмінювати, тоді цінний папір може продовжувати дію як облігація або привілейована акція протягом певного періоду часу, відомого як *залишок*. Альтернативою може бути негайне погашення на встановленій основі. У будь-який час ціна одержання однієї звичайної акції шляхом придбання належної кількості конвертованих акцій і подальшого обміну має бути порівнянною з ринковою ціною акції. Різниця між цими цінами відома як *конверсійна премія* (премія за конвертацію).

Характеристики конвертованого цінного паперу протягом часу перед обміном є чимось середнім між характеристиками цінного паперу з фіксованим відсотком і звичайної акції. При наближенні дати конвертації стає зрозумілішим, чи залишиться він облігацією, чи стане звичайною акцією. Таким чином, його поведінка стає ближчою до поведінки цінного паперу, на який він перетвориться.

Конвертовані цінні папери загалом забезпечують більш високий прибуток, ніж звичайні акції, та більш низький прибуток, ніж традиційні облігації і привілейовані акції.

Щодо приростів капіталу, для всіх конвертованих цінних паперів можлива сплата податку. Облігації дають незвільнений прибуток, а привілейовані акції – звільнений.

Загалом ціни конвертованих цінних паперів є менш волатильними (мінливими), ніж ціни відповідних акцій.

З точки зору інвестора конвертовані цінні папери дають можливість комбінувати нижчий ризик боргових цінних паперів з потенціалом високих прибутків за акцією. Ціною за це є нижчий поточний дохід, ніж за облігацією або привілейованою акцією.

Варанти

Варанти є опціонами купівлі, що виписано компанією на її власну акцію. (Детальніше про опціони див. нижче.) Коли вони виконуються, компанія випускає додаткові акції і продає їх власникам опціонів за *страйковою ціною* (ціною виконання). Таким чином, виконання варантів веде до збільшення кількості акцій, що знаходяться в обігу. Це, в свою чергу, веде до “розчинення” величини компанії.

Варанти часто додаються до випуску облігацій з фіксованим відсотком, щоб зробити їх більш привабливими для інвесторів – значна частина облігацій з приватним розміщенням продається з варантами. Варанти також часто надаються інвестиційним банкам у якості компенсації за *андеррайтинг* (гарантоване розміщення цінних паперів) або використовуються для відшкодування збитків кредиторам у разі банкрутства.

Власникам варантів не надається право голосу або отримання дивідендів. Але ціна виконання автоматично коригується при виплаті дивідендів або дробленні акції.

Типово варант діє декілька років. Після їхнього утворення варантами іноді торгують окремо від облігацій, до яких вони були прикріплені з початку.

Облігації з плаваючим відсотком

Облігації з плаваючим відсотком є випущеними на ринку Євро середньостроковими борговими цінними паперами, відсоткові платежі за якими "плавають" разом зі зміною короткострокових відсоткових ставок, можливо, з оговореною мінімальною ставкою. Таким чином, емітент не повинен оцінювати майбутні вірогідні рівні інфляції і відсоткових ставок при випуску, а позичальник не вимагає премії за інфляційний ризик.

Субординований борг

У разі дефолту власник *субординованого боргу* має ранг нижче основних кредиторів фірми (але вище привілейованих акціонерів і звичайних акціонерів). Борг субординованому кредитору є "молодшим боргом" і повертається після задоволення претензій всіх "старших" кредиторів. Рейтинг боргу, а отже й умови, на яких він випускається, відображатимуть цей нижчий рівень безпеки.

Опціони, випущені компаніями

На додачу до варантів і конвертованих цінних паперів, головним класом опціонів, що випускаються компаніями, є управлінські опціони на акції (executive stock options). Вони є, фактично, варантами, випущеними для старших менеджерів компанії як частина їх компенсаційного пакету, з ціною виконання, яка слугує ціллю для управлінця. Як зауважено вище, результатом такого випуску є розчинення величини акцій в обігу. Відповідно, від фірм зі значною кількістю випущених варантів вимагається звітувати про доходи, що підраховано на “повністю розчиненій” основі. Це формально враховує потенційне зростання кількості акцій.

Ф’ючерси

Ф’ючерсні контракти є стандартизованими контрактами, які укладаються між двома сторонами про торгівлю конкретним активом у призначену дату за встановленою ціною і якими торгують на біржі.

Фінансові ф’ючерси базуються на відповідних фінансових інструментах у більшій мірі, ніж на фізичних товарах. Існують чотири основні категорії:

- ф’ючерси на облігації;
- ф’ючерси на короткострокові відсоткові ставки;
- ф’ючерси на фондові індекси;
- валютні ф’ючерси.

На деяких ринках також доступні ф’ючерси на окремі цінні папери.

Кожна сторона у ф’ючерсному контракті повинна вкласти суму грошей, відому як *маржа*, до клірінгової (розрахункової) палати. Виплати маржі пом’якшують потенційні втрати, яких сторони можуть зазнати з-за майбутніх несприятливих рухів цін.

Коли контракт вперше укладено, у клірінгову палату вноситься первісна маржа.

Додаткові внески варіаційної маржі робляться щоденно, щоб забезпечити контроль над кредитним ризиком клірінгової палати. Цей ризик може зростати після укладання контракту через подальший несприятливий рух ціни.

Ф’ючерси на облігації Для виконання контракт вимагає фізичної доставки облігації. Якщо у контракті вказано конкретну облігацію, тоді можливо просто доставити необхідну кількість цього цінного паперу. Якщо в контракті вказано уявну облігацію, то має бути певний її зв’язок з готівковим ринком.

Облігації, придатні для доставки, є в реєстрі біржі. Сторона, що доставляє облігацію, має вибрати з реєстру цінний папір з найдешевшою доставкою. Ціна, яку сплачує отримуюча сторона, може бути відкоригована, щоб врахувати той факт, що купонна ставка реальної облігації може не дорівнювати купонній ставці уявної облігації, на який ґрунтується вказана в контракті ціна.

Ф'ючерси на короткострокові відосткові ставки Шлях, за ким відбувається котирування, означає, що при падінні відсоткових ставок ціни зростають і навпаки. Вказана ціна дорівнює 100 мінус тримісячна відсоткова ставка. Наприклад, для відсоткової ставки 6,25 % ціною ф'ючерсу буде 93,75.

Контракт базується на відсотках, що сплачуються за уявним депозитом на визначений період у майбутньому. Однак капітальні і відсоткові виплати не переходять з рук у руки. По закінченні покупець буде мати прибуток (або збиток) відповідно до різниці між ціною, вказаною в контракті і ціною, за якою насправді здійснюється торгівля.

При цьому сторона, що виконує доставку, матиме відповідний збиток (або прибуток).

Ф'ючерси на фондові індекси Контракт забезпечує уявну передачу активів, що лежать в основі біржового індексу за конкретною ціною у конкретну дату. Насправді передача активів не відбувається, а контракт розраховується у грошах, як ф'ючерс на короткострокову ставку.

Валютні ф'ючерси Контракт вимагає доставки встановленої кількості заданої валюти у вказаний день.

Використання фінансових ф'ючерсів Компанія може використовувати фінансові ф'ючерси, щоб "зафіксувати" вартість активів або пасивів, або щоб гарантувати величину надходжень та платежів. Наприклад, якщо компанія залучила капітал за допомогою позики з плаваючим відсотком, але бажає зафіксувати свої майбутні відсоткові платежі, вона може використовувати ф'ючерси на відсоткові ставки, щоб забезпечити оплату за підвищеними відсотковими ставками (але вона буде змушена переплачувати, якщо відсоткові ставки на ринку впадуть).

Так само валютні ф'ючерси можуть бути використаними для фіксації вартості іноземних надходжень або виплат. На практиці ж використовують ринки валютних форвардів.

Опціони

Опціони дають інвестору право, але не зобов'язання, придбати або продати визначені активи у конкретний день у майбутньому.

Опціон купівлі (кол-опціон) дає право, але не зобов'язання, купити визначений актив у конкретний день у майбутньому за встановленою ціною. *Опціон продажу* дає право, але не зобов'язання, продати визначений актив у конкретний день у майбутньому за встановленою ціною.

Опціон *Американського типу*, або Американський опціон, є опціоном, який можна виконати у будь-який день до закінчення строку дії. Опціон *Європейського типу*, або Європейський опціон, є опціоном, який можна виконати лише при закінченні строку його дії.

Серед опціонів, якими торгують, є опціони на окремі акції, а також на фінансові ф'ючерсні контракти.

Використання опціонів Опціони дають компанії або окремому інвестору можливість захиститися від несприятливих рухів у фінансовому середовищі, в той самий час залишаючи можливість прибутку від сприятливих рухів. Наприклад, компанія, яка позичила грошу за змінною відсотковою ставкою, може придбати опціони для захисту від зростання відсоткових ставок на ринку. Якщо ставки спадатимуть, компанія втратить лише премію, сплачену при купівлі опціону.

Свопи

Своп є контрактом між двома сторонами, за яким вони погоджуються обмінятися серіями платежів за попередньо домовленою формулою.

У найбільш поширеному виді, *відсотковому свопі*, одна сторона погоджується виплатити іншій регулярну серію платежів фіксованої величини протягом певного періоду. Натомість інша сторона погоджується сплатити серію змінних платежів, величини яких залежатимуть від рівня короткострокової відсоткової ставки. Обидві серії платежів здійснюються в одній і тій самій валюті.

Фіксовані платежі можна розглядати як відсоткові виплати за депозитом із фіксованою ставкою, у той час як змінні платежі – як змінні виплати за тим самим депозитом із плаваючою ставкою. Депозит є повністю уявним – ніякого обміну капіталом не відбувається.

Валютний своп є угодою про обмін фіксованої серії відсоткових платежів і виплати капіталу в одній валюті на фіксовану серію відсоткових платежів і виплату капіталу в іншій валюті.

Ціна свопу встановлюється так, що сучасна вартість грошового потоку є дещо від'ємною для інвестора і додатною для випускаючої організації. Різниця представляє ту суму, яку інвестор готовий платити за переваги свопу з одного боку, і очікуваний прибуток емітента з іншого.

Кожна сторона свопу стикається з двома типами ризику:

ринковим ризиком – ризиком того, що ринкові умови зміняться таким чином, що сучасна вартість видатків за угодою збільшиться. Учасники фінансового ринку часто намагаються хеджувати ринковий ризик, укладаючи угоду, що компенсує збитки;

кредитним ризиком – ризиком того, що інша сторона не здійснить зобов'язань з платежів. Це може відбутися тільки якщо своп матиме від'ємну величину для сторони, що не виконує зобов'язань, отже, ризик не такий самий, як ризик дефолту боржника за позикою із порівняним терміном дії.

Використання свопів

Управління ризиками Компанії можуть використовувати свопи для зменшення ризику балансуванням активів і пасивів. Наприклад, компанія, що має короткострокові пасиви, пов'язані із плаваючою ставкою, і довгострокові активи з фіксованими ставками, може використовувати свопи, щоб досягти більш збалансованої позиції. Валютні свопи можуть бути використаними компанією з пасивами у одній валюті й активами – у іншій.

Зменшення вартості боргу Якщо компанія має відносні переваги у запозиченні з плаваючим відсотком, у той час як інша компанія має відносні переваги у запозиченні з фіксованим відсотком, вони можуть використати відсотковий своп для зменшення загальної вартості фінансування і отримати вигоду від зменшення вартості боргу. Зауважимо, що відносна перевага тут означає, що відносні кредитні рейтинги компаній є різними на ринках довготермінових та короткотермінових позик.

2.2.5 Випуск цінних паперів

Отримання котирування на фондовій біржі

Чому потрібно котируватися Отримання котирування потребує витрат (наприклад, виплат адвокатам та брокерам), як і підтримання котирування (наприклад, щорічна плата фондовій біржі). Так чому ж компанії вдаються до цих витрат?

Найпоширенішими мотивами є такі.

- *Щоб залучити капітал для компанії*: отримання котирування дозволяє компанії продавати нові акції на широкому ринку і, таким чином, залучати великі суми грошей настільки дешево, наскільки це можливо. Переважна більшість компаній обирає метод отримання котирування, який одночасно залучає нові гроші.
- *Щоб полегшити подальше залучення капіталу*: як тільки компанія здобуде котирування, їй стає легше продавати свої акції в майбутньому. На додачу, постачальникам позичкових фінансів буде зручніше надавати гроші компанії, що котирується, тому що вони відчуватимуть більшу безпеку, знаючи, що компанія буде задовольняти поточні вимоги котирування на фондовій біржі.
- *Щоб надавати існуючим акціонерам шлях евакуації*: наприклад, спеціалісти з надання капіталу невеликому некотируваному бізнесу (відомі як венчурні капіталісти, venture capitalists) зазвичай хочуть реалізувати свої інвестиції через декілька років. Котирування забезпечує шлях виводу

венчурних капітальних інвестицій (часто вони вказуються як “приватні капіталовкладення”).

- *Що робити акції більш ринковими і полегшити оцінювання*: той факт, що акції легше оцінити, допомагає в успадкуванні та обчисленні податку на приріст капіталу. Через те, що акції є більш ринковими та легше оцінюються, акціонери будуть знаходити акції більш корисним засобом покриття власної заборгованості. Компанії, що котируються, часто використовують власні акції, щоб запропонувати цільовим акціонерам компанії покупку контрольного пакету. Котировані акції значно більш ефективні для цієї цілі. Деякі компанії пропонують службовцям схеми з акціями, щоб допомогти мотивувати штат. Такі схеми будуть більш привабливими, якщо акції котируються.

Пропонування для продажу (за фіксованою ціною)

Звичайним методом для одержання котирування на фондовій біржі та одночасного залучення нових грошей є *пропонування для продажу*. В пропонуванні для продажу за фіксованою ціною заздалегідь визначеної кількості акцій (або інших цінних паперів), пропонування здійснюється для усієї спільноти за конкретною ціною.

Замість того, щоб продавати акції безпосередньо спільноті, компанія або існуючі акціонери продають акції емісійній установі. Емісійна установа тоді стає відповідальною за відкритий продаж акцій. Для цього емісійна установа робить *андеррайтинг* емісії. Емісійна установа зазвичай є частиною інвестиційного банку. Її роль через андеррайтинг при пропонуванні для продажу – діяти подібно до професійних консультантів, що оглядають процес у цілому та координують діяльність інших професійних консультантів.

Календарний план пропонування для продажу

За рік до пропонування Емісійна установа намагатиметься забезпечити те, щоб попередні коментарі, що з'являтимуться у пресі, були сприятливими. Компанії буде потрібно підготуватися до пропонування, наприклад, зміною свого меморандуму, щоб зробитися відкритою компанією з обмеженою відповідальністю.

Тижні, що передують емісії У цей період емісійна установа буде давати поради щодо цін, які мають бути встановлені. Традиція – бути досить консервативними у ціноутворенні нової емісії. Остаточна ціна не буде встановленою доти, доки не опубліковано формальний проспект (об'яву) про випуск.

Випуск проспекту Якщо ціну пропонування встановлено, то проспект (або список учасників) публікується. Проспект, або, по-іншому, заява про пропонування, публікується принаймні в одній газеті національного масштабу та може доступним через інші інформаційні канали. Проспект містить значну частку інформації про компанію та її діяльність, фінансовий стан, причини емісії та людей, що беруть участь в емісії. Обов'язок професійних консультантів – розкрити відповідну інформацію. Проспект також містить реєстраційну форму (заяву).

Заява Типово заяви публіки про купівлю цінних паперів можуть бути зроблені протягом періоду часу близько тижня після випуску проспекту. Зазвичай кількість заяв перевищуватиме розмір емісії на момент закриття пропозиції. У таких випадках емісійна компанія має визначити основу розміщення, тобто те, яким чином визначати тих, чиї пропозиції прийматимуться повністю, тих, чиї пропозиції відхилятимуться, та тих, чиї пропозиції скорочуватимуться.

Пропонування для продажу через тендер

Пропонування для продажу через тендер подібне до пропонування для продажу за фіксованою ціною. Однак, замість залучення заяв за конкретною ціною, емісійна установа залучає учасників до тендеру, що визначатиме число акцій, які вони готові купити, та ціну, яку вони готові сплатити.

Після закриття пропозиції емісійна установа визначить єдину ціну виконання. Це може бути найвища ціна, за якою всі цінні папери можуть бути розміщеними. Проте, буде обрано нижчу ціну, якщо це необхідно, щоб забезпечити достатню різноманітність акціонерів. Заявки усіх заявників, які пропонували щонайменше ціну виконання, буде прийнято. Усі заявники, що мали успіх, сплачуватимуть ціну виконання, незважаючи на те, наскільки більшу ціну вони замовляли. Заяви, у яких вказано ціну, що менша за ціну виконання, буде відхилено.

Пільгові методи отримання лістингу

Пропонування для підписки Подібне до пропонування для продажу. Воно здійснюється, як правило, за фіксованою ціною, але може відбуватися через тендер. Проте не вся емісія відбувається через андеррайтинг, компанія продає свої акції безпосередньо спільноті. При цьому компанія, що випускає акції, несе (принаймні частку) ризику недостатньої підписки. Навіть якщо немає андеррайтингу, зазвичай емісійна установа все ж братиме участь як консультант випуску.

Розміщення (або конкурентні розміщення) Найпростіший та найдешевший метод здійснення малих випусків відомий як *розміщення* (плейсінг), або *конкурентне розміщення*.

Емісійна установа спочатку купує цінні папери у компанії. Потім вона звертається до інституціональних інвесторів, таких, як пенсійні фонди та організації страхування життя безпосередньо. Цінні папери пропонуються установам, радше ніж на відкритий ринок публіці.

Впровадження *Впровадження*, або *інтродукція* не включає продажу жодних акцій. Воно просто означає, що існуючі акції будуть в майбутньому котируватися на фондовій біржі. Для повного лістингу 25 % акцій мають перебувати у відкритому володінні, тобто частка “вільно плаваючих” акцій, виключаючи стратегічне володіння у філіалах або спільне володіння, повинна становити принаймні 25 % від випущених акцій. Фондова біржа дозволяє впровадження лише у разі, коли ці вимоги вже виконано.

Роль андеррайтингу *Андеррайтинг* завжди застосовують при пропонуванні для продажу. Андеррайтинг також може бути використаним для інших типів випуску акцій. Андеррайтинг є формою захисту від ризику неуспішної емісії.

Перелічимо основні етапи андеррайтингу.

1. Радше ніж брати на себе ризик не впоратися із продажем усіх акцій і залученням достатньої суми грошей, компанія здійснить продаж усіх акцій за узгодженою ціною емісійній установі. Компанія оплачуватиме гонорар емісійній установі. Або, у разі пропонування для продажу, гонорар може бути включеним у різницю між ціною, за якою продано акції емісійній установі, та ціною, за якою емісійна установа продає їх спільноті.

2. Емісійна установа бере на себе ризик, що не всі акції будуть продані. Проте емісійна установа не бажатиме брати на себе ризик повністю. Емісійна установа влаштовуватиме субандеррайтинг. В обмін на комісійні субандеррайтери погоджуються взяти частку акцій, що не продані спільноті.

3. Емісії оцінюються таким чином, щоб вони були успішними. Емісійна установа опікується тим, щоб не перевищити ціну емісії. Головний ризик, з яким стикаються андеррайтери, є несподівана подія, що трапляється між угодою прийняття андеррайтингу та датою закриття пропонування для продажу.

4а. Повністю підписана емісія: емісія відбувається та є повністю підписаною. Емісійна установа та субандеррайтери матимуть андеррайтерський прибуток рівним до їхніх андерайтерських комісійних мінус адміністративні витрати.

4б. Частково підписана емісія: емісія відбувається, але не всі акції продано. Андеррайтери та субандеррайтери отримують гонорари/комісійні, але вони також мають оплатити всі акції, що не були продані.

Емісії, зроблені вже котированою компанією

Випуски нових акцій Випуски нових акцій трапляються, коли компанія пропонує подальші акції за даною ціною існуючим акціонерам пропорційно до існуючої в них власності. За вимогами фондової біржі, коли компанія бажає залучити більше капіталу через подальший випуск акцій, вона зобов'язана запропонувати нові акції існуючим акціонерам. Це є частиною прав акціонеру.

Ціна буде з дисконтом від поточної ціни акції.

Основними результатами успішної емісії є:

- створюються нові акції;
- до компанії надходять додаткові гроші;
- загальна ціна компанії в цілому має збільшитися через надходження додаткових грошей;
- ціна за акцію буде спадати у залежності від розміру дисконту та кількості нових акцій, що випущено.

Цілі випусків нових акцій З перспектив компанії стають зрозумілими цілі залучення більшої кількості грошей. Причини потреби в більшій кількості грошей дуже різні. Реакція ринку цінних паперів на окремі випуски нових акцій буде дуже сильно залежати від причин емісії.

Календарний план для випуску нових акцій За декілька тижнів перед випуском нових акцій, компанія обговорює можливість емісії з консультантами. Компанії часто полюбляють робити випуски нових акцій, коли ринок на підйомі, тому що це залучає більше грошей за даних витрат.

Компанія публікує документ про порядок пропонування, що пояснює, чому відбувається випуск нових акцій. Акціонери тоді надсилають листи про попередню участь, та акції починають продаватися без прав (тобто при продажу акції всі права та привілеї за нею залишаються за продавцем). Самі права також можуть бути проданими. Акціонерам надається три тижні або більше для прийняття пропозиції або продажу їхніх "неоплачених прав" (nil-paid rights, привілей акціонерів на купівлю акцій нового випуску з дисконтом).

Вплив на ціну акції Ринкова капіталізація задається як

$$\text{ринкова капіталізація} = P \times \text{кількість акцій},$$

де P є ціною акції.

Перед випуском нових акцій ціна акції визначається як

$$P = \frac{\text{ринкова капіталізація}}{\text{кількість акцій}}.$$

Ціною за акцію після випуску нових акцій є

$$P^* = \frac{\text{початкова ринкова капіталізація} + \text{додаткова вартість}}{\text{кількість нових акцій}}.$$

Щоб визначити ціну акції без прав, необхідно оцінити компоненту додаткової вартості у попередній рівності.

Факторами, включеними у додаткову вартість, є:

$+$ кількість нових грошей, залучених випуском нових акцій;

$-$ витрати емісії;

$\pm$ зміна у вартості, що базується на переглянутому ринковому сприйнятті компанії та призначення грошей, які вкладатимуться.

Коли лише перший з трьох наведених вище факторів розглядається при спробах обчислити ціну акцій після нового випуску, то це відомо як підрахунок теоретичної ціни акції без прав.

Теоретична ціна P' є середньозваженим значенням P, тобто ціни акцій перед випуском нових акцій, та ціни Q, за якою акції пропонуються в новому випуску. Точніше, якщо випуск відбувається за схемою "m нових акцій на кожні n існуючих", то

$$P' = \frac{nP + mQ}{n + m}.$$

Оскільки нові акції пропонуються з дисконтом, ціна акції без прав буде нижчою за початкову ціну акції.

Хоч статті видатків легко включити у підрахунок, неможливо точно обчислити реакцію ринку. Часто ціна акції після випуску нових акцій негайно буде падати нижче теоретичної середньозваженої ціни.

Можливі дії акціонерів Може бути декілька причин, за якими акціонер вирішує не використовувати права, такі, як відсутність грошей або небажання підсилювати свою участь у компанії. У цих випадках акціонери можуть продавати свої права. Те, що вони продаватимуть – це їхні неоплачені права. Теоретична ринкова вартість неоплачених прав є різницею між ціною акцій без прав та ціною акцій нового випуску, тобто

$$P' - Q = \frac{n(P - Q)}{m + n}.$$

Андеррайтинг випуску нових акцій Для випусків нових акцій андеррайтинг не є обов'язковим, зокрема, якщо нові акції пропонуються з великим дисконтом. Однак в більшості випадків андеррайтинг відбувається.

Перевагою для компанії-емітента мати емісію з андеррайтингом є те, що це напевно залучить бажану кількість додаткових грошей. Проте компанії можуть уникнути потреби у андеррайтингу емісії встановленням ціни пропозиції, що є дуже низькою порівняно з ринковою ціною.

Бонусні емісії *Бонусна емісія* (іноді вона називається *капіталізаційною*) – це емісія, при якій компанія надає вільні акції всім звичайним акціонерам пропорційно до їхнього існуючого володіння. Від акціонерів ніякої оплати не вимагається.

Основні наслідки бонусної емісії є такими:

- створюються нові акції;
- ніяких грошей не надходить;
- базова вартість компанії в цілому не змінюється;
- ціна акції зменшується пропорційно збільшенню кількості акцій;
- загальна вартість власності кожного інвестора лишається незмінною;
- резерви акціонерів в балансовому звіті конвертуються в акціонерний капітал (звідси назва – капіталізаційна емісія).

Мета бонусної емісії Аргументи на користь бонусної емісії переважно псіхологічні.

Ринковість: більша кількість акцій з меншою ціною покращує ринковість.

Щось з нічого: акціонерам може сподобатися ідея отримати додаткові акції, які не потрібно оплачувати. Звідси назва “бонусна емісія”.

Минула прибутковість: бонусна емісія може відбутися тільки якщо існують достатні резерви для капіталізації. Це означає, що бонусна емісія частіше пов’язана з успішними компаніями, котрі збудували значні резерви з залишків прибутків. Успішність означає, що бонусна емісія можлива, тобто до бонусної емісії вдаються, щоб неявно повідомити про успішність.

Майбутня довіра: мінімальна ціна, за якою може відбуватися випуск нових акцій, є номінальною ціною акції. Проте випуски нових акцій відбуваються з дисконтом. Тому випуски нових акцій можливі, якщо поточна ціна акцій вища за номінальну ціну. Бонусна емісія зменшує ціну акції. Тому за допомогою бонусної емісії можна знизити здатність компанії до майбутніх випусків нових акцій. Таким чином, якщо директори компанії вирішують мати випуски нових акцій, вони повинні бути впевненими у майбутніх перспективах компанії.

Зростаючі дивіденди: Деякі компанії зазвичай роблять невеликі бонусні емісії (наприклад, 1 нова акція до 10 існуючих) і зберігають ті самі дивіденди на акцію. В цих випадках бонусна емісія призводить до підвищення дивідендів або є його знаком.

Більш прийнятна ставка дивідендів: якщо дивіденди виражено як частину номінальної вартості, то цифри можуть здаватися надмірними. Це може вести до несприятливої реакції суспільства або проблеми зі службовцями, які відчувають, що дивіденди занадто високі. Цього можна уникнути через бонусну емісію.

Статус довіреної особи: вимогою Закону про компанії є те, що компанія мусить мати мінімум випущеного акціонерного капіталу у 1 млн фунтів для того щоб діяти як довірена особа. Бонусна емісія конвертує резерви в акціонерний капітал і таким чином дозволяє компанії виконувати цю вимогу.

Недоліки *Витрати компанії*: Перед компанією постануть адміністративні витрати на емісію нових акцій та інформування акціонерів.

Витрати інших: Кожного разу, коли потрібно зареєструвати розмір дивідендів або цін акцій, наприклад, для інвестиційних досліджень або підрахунку податку на приріст капіталу, виникає потреба позбутися штучного впливу бонусної емісії.

Вплив на ціну акції З теоретичних міркувань, бонусна емісія n нових акцій на m старих знижує ціну акції з P до величини

$$P \times \frac{m}{m+n}.$$

Тут припускається, що ринок повністю байдужий до бонусної емісії. Реальні зміни в ціні акції можуть бути незначними у той чи інший бік, їх можна оцінити наступним чином

- вони можуть дещо підвищитися, якщо переможуть психологічні фактори, або
- вони можуть дещо впасти, якщо ринок вирішить, що витрати на емісію переважають вигоди.

2.3 Вступ до фінансової звітності

2.3.1 Сутність фінансового обліку

Користувачі

Припускається, що фінансова звітність має чотири групи користувачів:

- особи, що інвестують в акції, тобто наявні та потенційні акціонери;
- кредитори, як довгострокові, так короткострокові;
- службовці;
- ділові партнери, тобто покупці та постачальники.

Члени кожної з цих чотирьох груп мають природну зацікавленість у фінансовій звітності:

Інвестори в акції: рішення про інвестиції вимагають інформації про прибутки та рух капіталу. Аналітики постійно готують та вдосконалюють прогнози функціонування. Річний звіт забезпечує можливість "точного налагодження" цих прогнозів. Існуючі власники акцій також вимагають інформацію про операції, санкціоновані дирекцією, з метою нагляду.

Кредитори: рішення про надання позики включають вимірювання ризику дефолта. Позичальник бажає знати, чи може бізнес виробити досить готівки для виплати боргу. Позичальник також буде бажати впевненості в тому, що бізнес має адекватну базу активів, щоб виконати свої зобов'язання у випадку неплатоспроможності. Для цього угода про позику часто містить обмежувальні зобов'язання, що базуються на облікових показниках.

Службовці: їм цікаво, чи буде підприємство здатним стабільно сплачувати зарплати і гарантувати зайнятість. (Проте, можливість використання облікової інформації тут обмежена.)

Ділові партнери: Ділові партнери зацікавлені у безперебійності продажів (покупці) та придбання матеріалів і послуг (постачальники). Їхні інтереси тому подібні до інтересів власників акцій. Вони можуть також використовувати облікову інформацію, намагаючись дізнатись про внутрішні питання ціноутворення та торговельну політику компанії.

Річний звіт великої компанії буде тому мати широке коло читачів. На додаток до "природних" користувачів, описаних вище, фінансова звітність також вивчається:

- урядовими установами (особливо податковою інспекцією);
- конкурентами;
- потенційними хижаками – компаніями-поглиначами.

Відносини між менеджментом компанії та різними користувачами, вказаними вище, можуть бути складними. В кращому разі, є вірогідним певний степінь недовіри. Наприклад, власники акцій можуть турбуватися тим, що директори діятимуть в їхніх власних інтересах, навіть коли це буде шкідливо для компанії.

У найгіршому разі, це буде відкрита ворожість. Наприклад, директори навряд чи нададуть добровільно інформацію про функціонування компанії, якщо вона може бути використана потенційними конкурентами. Менеджмент тому може спокушатися стримувати інформацію або ж викривляти дані, які вони публікують.

Джерела регулювання

Правдивість опублікованої фінансової звітності забезпечується накладанням правил з різноманітних джерел.

Грубо такі правила можна поділити на ті, що вимагають розкриття конкретних даних (це в основному закон про компанії (Companies Act) 1985 р. та правила лістингу фондової біржі) та тими, у яких ідеться про спосіб, в який відповідні дані мають бути підраховані (це в основному професійні стандарти обліку і концепції та традиції). Наприклад, закон про компанії вимагає, щоб компанії повідомляли суму, стягнену за зношення фіксованих активів, але правила щодо обчислення зношення можна знайти в стандартах, що публікуються професійною бухгалтерською організацією.

Фактично існує мережа правил, і регулятори можуть робити підготовку фінансової звітності доволі складною для виконання. На щастя, існує прийнятна кількість зв'язків між різними збірками правил.

Встановлені вимоги

Закон про компанії вимагає, щоб компанії надавали:

- балансовий звіт, що показує фінансовий стан на останній день фінансового року компанії;
- рахунок прибутків та збитків за фінансовий рік;
- детальні розкриття даних, які зазвичай надаються як серія приміток до рахунків;
- звіт директорів;
- звіт аудиторів.

Форма та зміст рахунку прибутків і збитків та балансового звіту обговорюються далі.

Облікові вимоги Закону про компанії складаються з багатьох сторінок деталізованих правил. Проте існує одна першорядна вимога. Це те, що фінансові звіти мають давати "правдивий та чесний погляд". Закон не визначає правдивість і чесність, тобто цю фразу треба інтерпретувати за звичайним сенсом слів: зазвичай, "правдивість" означає, що рахунки не дають хибної інформації, а "чесність" – що сукупність фактів у звітності не веде до викривлення інформації внаслідок, скажімо, пропусків. Однак, зростаюча маса випадків свідчить, що це є спеціальним терміном, який має технічне значення для обліковців.

Великою мірою правдивість і чесність звітності може бути визначеною тим, як вона виконує всі правила та норми, висвітлені вище. Однак, необхідно виходити за межі формальних вимог розкриття інформації або відхилитися від правил виконання обчислень, якщо потрібно діяти так, щоб компанія давала чесну і правдиву інформацію. І ця вимога дивитися у разі потреби за межі наявних правил надає незалежного існування концепції правдивості та чесності.

Типові складові річного звіту

Річний звіт компанії, що котирується на фондовій біржі, може займати 60–70 сторінок. Багато з цих "рекламних" матеріалів, що публікуються, мають добровільну основу. Ядро звіту, однак, підкоряється строгим правилам.

Типовий зміст річного звіту британської компанії наведено у табл. 2.1

Як бачимо, приблизно лише третина інформації стосується саме фінансової звітності, яку вимагають оприлюднувати, решту дано на добровільній основі. Не потрібно вивчати детально типовий річний звіт. Кращий шлях отримати деяке розуміння змісту фінансової звітності – це обрати та вивчити пару звітних наборів. Скажімо, можна використати послуги, що надає Financial Times. Це описано на сторінках розділу газети про компанії та ринки.

1	Зміст
2–3	Біографічна довідка про директорів
4	Сторінка ключових цифр з фінансової звітності, зокрема, прибутки, дивіденди, основні тенденції
5	Аналіз обігу і прибутку за галуззю та розташуванням виробництва
6–9	Звіт голови членам фірми, включаючи особисту думку про минулий рік та перспективи компанії
10–11	Карта операції компанії по світу
12–13	Статистика за 30 років
14–48	Огляд діяльності, що містить докладний аналіз кожного з головних бізнес-сегментів компанії
49–52	Матеріали про корпоративне управління, включаючи винагороди директорів
53–59	Звіт директорів
60–61	Звіт про облікову політику, яка використана у складанні рахунку прибутків і збитків та балансового звіту
62–66	Власне фінансова звітність: рахунок прибутків і збитків, балансовий звіт, звіт про рух грошей, звіт про зміни в капіталі, тощо
67	Заява про відповідальність директорів за фінансову звітність та звіт аудиторів
68–90	Примітки до рахунків
91–96	Список основних британських та закордонних дочірніх фірм

Табл. 2.1: Типовий зміст річного звіту британської компанії

Аудиторський звіт

Від кожної компанії Закон про компанії від 1985 р. вимагає призначити зовнішніх аудиторів для перевірки діяльності організації між двома загальними річними зборами. Аудитори повинні звітувати акціонерам про опубліковані рахунки: вони мають прокоментувати, чи є, за їхньою думкою, балансовий звіт і рахунок прибутків і збитків складеними належним чином і відповідно до Закону про компанії та прийнятих облікових стандартів, а також, чи дають, за їхньою думкою, рахунки компанії правдивий та чесний погляд.

Основною метою аудиторського звіту є збільшення довіри до фінансової звітності.

Нижче наведено типовий аудиторський звіт.

Звіт аудиторів членам "Імярек plc"

Ми провели аудит (перевірку) фінансової звітності від сторінки i до сторінки j.

Індивідуальні відповідальності директорів і аудиторів:

Як описано вище, директори компанії відповідальні за підготовку фінансової звітності. Нашою відповідальністю є формування незалежної думки, що базується на нашому аудиті, про цю звітність, та доведення нашої думки до вас.

Основа висновку

Ми уклали наш аудит у відповідності до аудиторських стандартів, випущених Бюро аудиторських практик. Аудит включає дослідження на базі тестів, суттєвих ознак, кількісних показників та розкриття даних у фінансовій звітності. Він також включає оцінку важливих висновків та розглядів, зроблених директорами у підготовці фінансової звітності та того, чи облікова політика відповідає обставинам компанії, належно застосовується та адекватно розкривається.

Ми плануємо та подаємо наш аудит так, щоб одержати всю інформацію та пояснення, які ми вважаємо необхідними для того, щоб забезпечити нас достатніми даними для точності висновків, що фінансова звітність вільна від невірних тверджень, причинами яких є підробка, помилка або інше. У формуванні нашої думки ми також оцінюємо всюди адекватність поданої інформації у фінансовій звітності.

Висновок

На наш погляд, фінансові звіти дають правдивий та чесний погляд на стан справ компанії на надцатого мартобря надцатого року та її прибутків за рік, що скінчився, і є підготовленими належним чином згідно до Закону про компанії від 1985 року.

Підпис аудитора Дата

Цей аудиторський звіт містить чимало роз'яснень. Однак, деякі місця в тексті документа вимагають уважного читання. Наприклад, декілька разів зустрічається слово "думка": щоб попередити, що підготовка висновків та збирання та оцінювання інформації – все включає суб'єктивні міркування. Існують більш тонкі моменти. Наприклад, той факт, що звіт адресований членам компанії, означає пересторогу для всіх інших читачів, що аудитор не бере на себе жодного обов'язку піклуватися за їхнє використання фінансової звітності, і що аудиторська робота планувалася для задоволення потреб акціонерів і відтак може бути неприйнятною для інших цілей.

Наведений звіт, що містить *безумовно позитивний висновок*, є стандартним. Кожного разу, якщо не має жодних сумнівів, що звітні документи дають чесний та правдивий погляд, аудитор має підготувати стандартний звіт і дати безумовно позитивний висновок. У протилежному разі він має підготувати "модифікований звіт". У залежності від ступеня непевності, дії аудитора можуть бути наступними.

Якщо у звітних документах є значна непевність, яка, однак, не залишає сумнівів по чесний і правдивий погляд, то аудитор має зробити безумовно позитивний висновок, додавши при цьому *пояснювальні параграфи*, які вказують на цю непевність.

Умовно позитивний висновок дається, якщо аудитор одержав недостатньо інформації, або не погоджується з певними методами, але все ж таки може зробити висновок.

Якщо інформації недостатньо для висловлення думки, то дається *відмова від висновку*.

Якщо аудитор вважає, що фінансові звіти не дають чесного та правдивого погляду, причому неповнота та викривлення настільки значні, що не дозволяють дати умовно позитивний висновок, він робить *негативний висновок*.

2.3.2 Облікові принципи

Принцип (історичної) вартості Фіксовані активи (у тому числы невідчутні), що виникають при купівлі, у балансовому звіті записуються за собівартістю, зменшеною на накопичену амортизацію. Цей принцип вартості ігнорує зміни в купівельній спроможності грошей і може давати різні вартості для ідентичних речей, але спрощує ведення бухгалтерських записів. Більшість типів інвестицій, які класифікують як активи, та цінні папери й деривативи записують за "справедливою" ціною (ринковою ціною в широкому розумінні), хоча цінні папери з фіксованим відсотком можуть бути оцінюватися за амортизованою вартістю в деяких обставинах.

Принцип грошового виміру Облікові документи обмежуються речами, які можливо виміряти об'єктивно в грошовому вимірі. Знов це значно спрощує облік. Це також означає, що балансовий звіт буде рідко давати навіть грубе наближення до вартості бізнесу, тому що він буде виключати такі речі, як вартість бази клієнтів (покупців) компанії, її продуктивність, її бренди.

Принцип продовжуваності Зазвичай припускають, що бізнес буде функціонувати невизначений час в його сучасній формі. Ця концепція виправдовує обмеження, які накладає принципом вартості: звітування історичних величин для вартості не завдає великої шкоди, тому що активи навряд чи будуть продані в найближчому майбутньому.

Принцип бізнесової одиниці Справи бізнесу ведуться окремо від тих справ, які належать власникам. Це цілком справедливо у випадку компанії з обмеженою відповідальністю, яка має окрему юридичну особу. Це, однак, також застосовується до одноосібних власників або партнерів.

Принцип реалізації Дохід визнається, якщо і коли він є "зароблений". Тому не є необхідним чекати, поки покупці оплатять рахунки. Це дозволяє уникати флуктуацій у звітному доході, які можуть виникати, якщо все обліковується на основі готівки. Це також може справити враження, що справи бізнесу гарні, коли у дійсності він знаходиться у небезпеці нестачі готівки. Бізнес, що розширюється, може звітувати про дохід задовго до відповідних грошових потоків.

Принцип накопичення Витрати визнаються, якщо і коли вони прийняті на себе, незважаючи, чи сплачені, чи ні суми. Знов, це дозволяє уникати випадкового розподілу витрат по періодах залежно від того, сплачені чи ні рахунки, що надійшли.

Принцип дуального аспекту Принцип дуального аспекту визначає, що кожна операція або поправка буде впливати на дві величини. Наприклад, закупівля витратних матеріалів через касу буде збільшувати актив складів та зменшувати готівковий актив. Ця концепція формує основу для системи подвійних бухгалтерських записів.

Принцип матеріальності Немає сенсу оприлюднювати інформацію, яка настільки детальна, що її важко розібрати. Документи стають зрозумілішими, якщо показувати підсумки, такі, як “адміністративні витрати”, замість перерахування кожного пункту. Також дуже мало сенсу у внесенні мікроскопічних поправок, що не впливають на загальну картину. Тому обліковці мають звітувати грубі наближення певних значень, радше ніж витрачати багато часу для підрахунку точних величин.

Принцип матеріальності допомагає визначити, наскільки детальним має бути розкриття інформації. Для цього потрібно відповісти на запитання: чи покращить додаткова інформація розуміння читачем справ компанії? Приміром, для звітування не потрібний точний підрахунок витрат офісу на олівці, але про штраф, накладений регулятором, потрібно звітувати, яким би малим не був розмір штрафу.

Принцип обачливості Для того, щоб підготувати фінансовий звіт, потрібно уникати надання невиправдано оптимістичного подання результатів. Так, для прибутку або будь-якого активу мають даватися найнижчі можливі цифри. Для витрат і пасивів мають використовуватися найвищі можливі цифри. Це означає, що існує дуже мала небезпека, що цифри введуть когось в оманливе відчуття надмірної безпеки через перебільшення потужностей компанії. Проте принцип обачливості має застосовуватися лише в тих ситуаціях, де є невизначеність.

Принцип узгодженості Цифри, що публікуються компанією, мають бути доступними до порівняння у різні роки. Тому облікова політика не повинна змінюватися наступного року, якщо немає дуже поважних причин зробити це. Будь-які зміни повинні бути підкреслені та має бути поясненим їхній вплив.

Зведення принципів разом

Окремо кожен з принципів дасть не набагато більше, ніж здоровий глузд. Багато з них створено, щоб спростити підготовку звітів (наприклад, принцип грошового виміру), в той час, як інші створені, щоб зробити звіти більш практичними (наприклад, принцип накопичення робить краще зрозумілою величини прибутку). Зведені разом принципи, однак, часто суперечать один одному, що робить їхнє застосування заплутаним однаково для бухгалтерів та читачів фінансових звітів.

Природно, що основна суперечка відбувається між принципом обачливості та принципом продовжуваності і принципом реалізації. Як можна зробити обачливий погляд, якщо припускається, що бізнес має майже необмежене корисне життя? Аналогічно, навряд чи є обачливим припускати, що операція принесе позитивний результат до того, як дохід справді отриманий.

Стандарти фінансового звітування вказують принципи, яких треба дотримуватися у виборі облікової політики. Вони закріплюють, що обрана облікова політика має бути такою, щоб "бути найбільш придатною для надання правдивого та чесного погляду (на фінансове становище та прибутки і збитки за період)". Більше того, вони визначають два принципи – принципи продовжуваності та накопичень – як ті, що грають основну роль у фінансових звітах. Точніше, вимоги є такими:

1. Фінансові звіти мають бути підготовлені на основі продовжуваності в усіх випадках, крім таких:

    i) компанія перебуває в процесі ліквідації або припинила діяльність;
    ii) у директорів немає реалістичної альтернативи ліквідації або припиненню діяльності.

2. Фінансові звіти, окрім звіту про рух грошей, мають готуватися на основі облікового принципу накопичення.

Стандарти звітування також вимагають, щоб цілі, з урахуванням яких має обиратися облікова політика, були такими:

1) істотність;
2) надійність;
3) порівнянність;
4) зрозумілість.

Надійність потребує точного балансу між вимогами нейтральності (неупередженості) та обачливості при невизначеності.

2.3.3 Балансовий звіт

Балансовий звіт є підсумком фінансового стану компанії. Він складається з двох частин:

1) списку всіх речей, якими володіє бізнес;
2) списку різних джерел фінансування, використаних, щоб забезпечувати ці володіння.

Всі цінності, якими володіє бізнес, називаються *активами*. Фінанси можуть бути забезпечені власниками бізнесу (*капітал*) або третіми сторонами (*пасиви*). Логічно, що уся власність бізнесу має бути якось оплачена. У той самий час, всі інвестовані або запозичені суми для бізнесу мають у чомусь відображатися. Тому існує простий зв'язок між активами, пасивами і капіталом.

$$\text{Активи} = \text{Капітал} + \text{Пасиви}.$$

Це називається *балансовою рівністю*.

Формат типового балансового звіту наведено у табл. 2.2.

АКТИВИ	
Фіксовані активи	
Власність, заводи і обладнання	x
Невідчутні активи	x
	x
Поточні активи	
Склади	x
Дебет	x
Інші поточні активи	x
Готівка	x
	x
Активи загалом*	**x**
КАПІТАЛ І ПАСИВИ	
Акціонерний капітал	x
Інші резерви	x
Утримані прибутки	x
Капітал загалом	x
Непоточні пасиви	
Довгострокові інвестиції	x
Довгострокові резерви	x
	x
Поточні пасиви	
Кредит	x
Короткостроковий борг	x
Поточна частина непоточних пасивів	x
Поточне податкове зобов'язання	x
Короткострокові резерви	x
	x
Пасиви загалом	x
Пасиви і капітал загалом*	**x**

Табл. 2.2: Типовий балансовий звіт.

Фіксовані активи

Різниця між фіксованими і поточними активами проявляється у цілях, з якими їх придбано, радше ніж у їхній природі (хоча фіксовані активи зазвичай мають фіксовану природу – це заводи, приміщення, обладнання, земля, тощо). Фіксовані активи мають довге життя і закуплені з метою їхнього використання в бізнесі.

Звичайно, є великий клопіт з інформацією про цифри для відчутних фіксованих активів.

Відчутні фіксовані активи загалом оцінюються за собівартістю мінус амортизація. Амортизація має мало спільного з відображенням "правдивої" вартості активів в балансовому звіті. Замість цього є намагання списувати вартість активів, враховуючи витрати протягом їхнього оціненого корисного життя.

Невідчутні фіксовані активи є фіксованими активами, до яких дослівно не можна доторкнутися. Найбільш загальним типом невідчутних фіксованих активів є гудвіл. Він виникає, коли компанія купує іншу компанію за більшою ціною, ніж залишкова балансова вартість. Різниця між сплаченою ціною та балансовою вартістю складає гудвіл. Можливі невідчутні активи включають: вартість розвиненості, концесії, патенти, торгові марки та трендові імена.

Фіксовані активи можуть включати володіння в інших компаніях у формі акцій, позикових цінних паперів, дебентури або прямих боргів. Вони зазвичай записуються за ринковою ціною.

Проблеми, пов'язані з оцінюванням активів за собівартістю з вирахуванням амортизації, можуть бути дещо послаблені регулярною переоцінкою фіксованих активів, особливо часто таких, як земля та будівлі.

Таким чином, підсумок балансу для фіксованих активів може складатися із суміші вартостей та оцінок, датованих на різні облікові періоди та зменшених на амортизацію, відраховану від дати придбання або оцінювання. Числа будуть тому мати арифметичну точність, але будуть звичайно абсолютно незначущими для цілей прийняття рішень.

Поточні активи

Поточними, або *обіговими* активами є гроші, грошові еквіваленти, та те, що можна конвертувати у гроші у нормальному ході бізнесу.

У рахунках термін *склади* (запаси) включає сировину, витратні матеріали, деталі, незавершені та завершені товари, що чекають на продаж. Вартість складів, показаних в балансовому звіті, менша за чисту вартість реалізації.

Дебіторська заборгованість (дебет) є сумою, яку клієнти компанії заборгували їй за товари або послуги. Пункт "дебет" може також включати плату за перевідним векселем, яким володіє компанія до отримання.

Поточні активи, що записані у пункті "інвестиції", можуть включати, наприклад, гроші, покладені на короткостроковий депозит.

Числа, що відображають склади і дебет, мають бути скориговані взяттям у розрахунок будь-яких передбачених втрат відповідно до старіння або псування (для запасів) або вірогідного дефолту (для дебету).

Пасиви (зобов'язання)

Пасиви аналізуються згідно до їхньої дати терміну закінчення, або погашення. Величини, які сплачуються протягом одного року, класифікують як *поточні* (обігові). Їх порівнюють з поточними активами, оскільки вони відображають витрати ліквідних ресурсів компанії.

Пасиви, які не сплачуються протягом одного року, класифікують як довгострокові. Резерви відрізняються від інших пасивів тим, що суми та термін цих платежів є невизначеними (наприклад, пенсійні схеми). Вони є, тим не менш, пасивами і мають бути показані як такі в балансовому звіті.

Капітал

Акціонерний капітал, або власний капітал може виникати різними шляхами. Частина є безпосередніми внесками при купівлі акцій. Більшість тих, що залишилися, будуть походити від звичайної діяльності. Це включає прибутки, які не були розподілені у вигляді дивідендів або не були використані для викупу акцій.

Резерви переоцінки складаються зі сум, доданих до вартості фіксованих активів. Це буде обговорено у наступному розділі.

2.3.4 Рахунок прибутків і збитків

Рахунок прибутків і збитків (або рахунок прибутків і витрат) дозволяє зазирнути у діяльність компанії. Він порівнює доходи, що породжуються звичайною діяльністю з витратами, пов'язаними із отриманням доходу, різниця буде прибутком або збитком за рік.

Схему типового спрощеного рахунку прибутків і збитків наведено в табл. 2.3.

	тис грн
Обіг	x
Витрати на обіг	(x)
Валовий прибуток	x
Інший операційний прибуток	x
Витрати на розповсюдження	x
Адміністративні витрати	(x)
Операційний прибуток	x
Фінансовий прибуток	x
Фінансові витрати	(x)
Прибуток до сплати податків	x
Податок	(x)
Чистий прибуток	x
Сплачені дивіденди	(x)
Прибуток, що відноситься до звичайних акціонерів	x
Прибуток на звичайну акцію	x

Табл. 2.3: Типовий рахунок прибутків і збитків.

Обіг

Синонімами *обігу* є продажі, виручка та виторг. У відповідності з принципом реалізації, виручка записується, коли вона зароблена, а не у момент сплати за товар.

Витрати на обіг

Витрати на обіг (обігові витрати, вартість продажів) включає сировину, матеріали, компоненти, заробітну плату, витрачені на виробництво проданих товарів. Сюди також включаються зміни у рівні складів та амортизаційні витрати. Таким чином, витрати на обіг дорівнюють закупівлі мінус зростання складів плюс заробітна плата робітників на виробництві плюс амортизація непоточних активів.

Витрати на розповсюдження та адміністративні витрати

Витрати на розповсюдження включають витрати, пов'язані з продажами, дистрибуцією, транспортуванням та рекламою. *Адміністративні витрати*, або *накладні витрати* включають відповідні заробітні плати разом з винагородами директорів.

Фінансовий прибуток і фінансові витрати

Фінансовий прибуток складається з прибутку від інвестицій (такий, як рента, відсоток за облігаціями, дивіденди від акцій) та реалізованих приростів капіталу від продажу активів (мінус втрати капіталу). Він також може включати нереалізовані прирости капіталу від переоцінки активів, але частіше це робиться через резерв переоцінки, про який ітиметься далі.

Фінансові витрати включають відсотки за позиками.

Податок

Податкові витрати включаються до рахунку прибутків і збитків, оскільки компанії сплачують корпоративний податок на їхні прибутки. Але точний розмір податку є предметом обговорень з податковою адміністрацією і, взагалі кажучи, він буде відомим лише після публікації фінансових звітів. Величина податку в рахунку прибутків і витрат є найкращим наближенням до остаточної величини. Вона рідко дорівнює в точності прибутку до сплати податку, помноженому на ставку корпоративного податку.

Категорії прибутку

Розмір прибутку зазвичай обчислюється у три кроки. *Валовий прибуток* є різницею між ціною проданих товарів і послуг та витратам на обіг. *Операційний прибуток* звичайно визначається як прибуток без усіх витрат (крім фінансових витрат – відсотків). *Прибуток до стягнення податку* є операційним прибутком з урахуванням фінансових витрат і прибутків.

Значення валового прибутку дає уяву про політику ціноутворення компанії. Різниця між витратами і ціною продажу зображує частину накладних витрат і прибутку. Незважаючи на те, що ця інформація може бути корисною, можливо приготувати фінансові звіти без розрізнення на обігові та накладні витрати.

Прибуток на акцію

Компанії зобов’язані підраховувати *прибуток на акцію* і публікувати їхній розмір в основній частині рахунку прибутків і збитків. Прибуток на акцію дорівнює прибутку, що відноситься до звичайних акціонерів, поділеному на кількість випущених звичайних акцій.

Звіт про рух грошей

Звіт про рух грошей призначений доповнювати рахунок прибутків і збитків та балансовий звіт. Рахунок прибутків і збитків та балансовий звіт є корисними документами самі по собі. Однак, вони не забезпечують достатньої уяви про грошовий баланс. Це є несприятливою обставиною, тому що навіть прибуткові компанії можуть збанкрутувати, якщо вони недостатньо ліквідні.

Банківський баланс, звичайно, вказується в рахунку прибутків і витрат. Легко побачити, як він змінився порівняно з кінцем минулого року. Однак, важко визначити головні причини таких змін. Акціонери та інші читачі вимагають докладнішого опису грошових потоків.

Звіт про рух грошей відповідає на три типи питань:

- Чому збільшився банківський овердрафт, незважаючи на прибутковий рік для компанії?
- Чи здатна компанія створювати гроші, а не прибуток своєю діяльністю?
- Що було зроблено з позиками, взятими протягом року?

Друге питання неявно стверджує, що прибуток і гроші – це дві різні речі. Справді, прибуток за рік навряд чи відображає зміну банківського рахунку. Деякі пункти рахунку прибутків і збитків, скажімо, амортизація, не включають руху грошей. Більше того, витрати та надходження визнають, коли виставлено рахунки, а не тоді, коли гроші передаються з рук у руки. Повторимося: дуже прибуткова компанія може все ж зіткнутися з проблемами ліквідності.

Звіт про рух грошей є менш суб’єктивним, ніж рахунок прибутків і збитків. По-перше, компанія може певні зміни відображати прямо у балансовому звіті, не вказуючи їх у рахунку прибутків і збитків. По-друге, при підрахунку прибутку часто потрібні суб’єктивні оцінки: який резерв створити для проблемних боргів, який метод амортизації використовувати, як оцінювати запаси. При складанні звіту про рух грошей немає такої свободи: або гроші витрачені, або ні.

Приклад звіту про рух грошей наведено в табл. 2.4.

Гроші від звичайної діяльності визначаються як операційний прибуток плюс амортизація плюс зростання складів мінус зростання дебіторської заборгованості плюс зростання кредиторської заборгованості. Зазначимо, що зміна складів та амортизація ведуть до змін у прибутку, але не впливають на грошовий

	тис грн
Грошовий потік від звичайної діяльності	
Гроші від звичайної діяльності	x
Сплачені відсотки	x
Сплата податку	x
Чистий грошовий потік від звичайної діяльності	x
Грошовий потік від інвестиційної діяльності	
Купівля відчутних фіксованих активів	(x)
Продаж відчутних фіксованих активів	x
Купівля невідчутних активів	(x)
Надання позик третім особам	(x)
Погашення позик третіми особами	x
Отримані відсотки	x
Чистий грошовий потік від інвестиційної діяльності	x
Грошовий потік від фінансової діяльності	x
Надходження від випусків звичайних акцій	x
Взяті позики	x
Повернуті позики	(x)
Виплата дивідендів акціонерам компанії	(x)
Чистий грошовий потік від фінансової діяльності	x
Чиста зміна у грошах, грошових еквівалентах та банківських овердрафтах	x
Гроші, грошові еквіваленти та банківські овердрафти на початку року	x
Те саме наприкінці року	x

Табл. 2.4: Типовий звіт про рух грошей.

потік. Зміни у дебіторській або кредиторській заборгованості можуть бути як відображеними у прибутку, але не створювати грошовий потік (збільшення дебету або кредиту) або створювати грошовий потік, але не відображатися у прибутку (зменшення дебету або кредиту).

Амортизація

Амортизаційні поправки потрібні тому, що у дійсності всі фіксовані активи мають скінченний час експлуатації.

Амортизація (також, зношення, знос) визначається як міра зношення, споживання або іншого послаблення фіксованого активу протягом його експлуатаційного терміну, які виникають внаслідок

- плину часу або
- старіння через технологічні або ринкові зміни.

Перший, найбільш важливий аспект цього означення є тим, що ціллю амортизаційних поправок не є відобразити вартість фіксованих активів у балансовому звіті. Скоріше, метою є систематичне накладення витрат на фіксований актив компанії в рахунку прибутків і збитків. Амортизація є тому застосуванням принципу відповідності, про який говорилося вище.

З означення амортизації також випливає, що спосіб, в який скорочується життя активу, залежить від природи активу.

- Фінансовий актив, наприклад, оренда певної власності має чітко визначений термін життя.
- Фізичні активи зношуються через використання і, ймовірно, зношуються швидше при інтенсивнішому використанні.
- Певні активи, такі, як комп'ютери, застарівають набагато раніше кінця свого експлуатаційного терміну через розвиток технологій.

В ідеалі ці відмінності повинні відображати застосування різних методів амортизації, які відображують природу активів.

На практиці ж при такому підрахуванні амортизації потрібне зберігання надто детальних записів, тому амортизаційні витрати підраховують, просто виходячи з терміну використання.

Найпростіший метод амортизації називається *лінійним*. При його використанні зміни у вартості відбуваються щороку однаковими частинами:

$$\frac{\text{собівартість} - \text{прогнозована кінцева вартість}}{\text{прогнозований експлуатаційний термін}}.$$

Прямолінійний базис може також виражатися через відсотки від собівартості.

Метод *залишкової вартості* (або метод балансової вартості) є другим поширеним методом підрахунку амортизаційних витрат. При ньому амортизується фіксована частка "балансової" вартості (тобто собівартості мінус амортизація на дату).

Ця частка визначається як

$$1 - \left(\frac{\text{прогнозована кінцева вартість}}{\text{собівартість}}\right)^{1/n}$$

де n – прогнозований експлуатаційний термін активу в роках.

Одна перевага методу залишкової вартості полягає у тому, що падіння вартості активу значніше, поки він новий. Це може давати більш слушне значення для амортизації, тому що більшість втрат вартість активу зазнає тоді, коли він новий. Лінійний метод не зважає на вік активу, що може бути недоліком з-за зростання цін через інфляцію.

На практиці компанії зазвичай припускають, що всі активи конкретного класу мають "стандартний" термін життя (наприклад, п'ять років для транспортних засобів пересування і десять років для виробничого заводу). Ці значення засновані на досвіді та відображують загальні тенденції, що спостерігаються компаніями. Помилки, що виникають через надто повільну амортизацію, типово нівелюється занадто швидкою амортизацією інших.

Ясно, що правління має істотну свободу відносно величин амортизаційних витрат щороку. Оцінки корисного життя та кінцевої вартості впливають як на рахунок прибутків і збитків, так і на балансовий звіт. Також вплив має вибір між лінійним методом та методом залишкової вартості. Тому від компаній вимагають надавати доволі докладної інформації щодо балансових вартостей фіксованих і необоротних активів.

2.3.5 Капітал та резерви

Балансовий звіт перелічує активи, що знаходяться у власності компанії, та пасиви, які компанія заборгувала третім сторонам. Те, що залишається, називається *капіталом*, *акціонерним капіталом* або *власним капіталом* та належить акціонерам. Власний капітал може виникати трьома шляхами:

- продажем акцій акціонерами;
- через деякі зміни, наприклад, переоцінку (ревальвацію) фіксованих активів;
- утриманням прибутків від розподілу між акціонерами.

Акціонерний капітал і акціонерна премія Для облікових цілей використовується номінальна вартість акцій. Це, однак, не відображує ринкову ціну компанії та здатність компанії знайти покупців, які бажатимуть сплачувати дещо більше. Різниця між номінальною вартістю акцій та ціною продажу заноситься до *рахунку акціонерних премій*. (Ця різниця завжди є додатною, оскільки компанії не можна продавати свої акції з дисконтом від номіналу.) Рахунок акціонерних премій фактично є частиною акціонерного капіталу, але у балансовому звіті відноситься до "інших резервів".

Резерв переоцінки Незважаючи на принцип вартості, загальною практикою є переоцінка (ревальвація) землі та будівель в балансовому звіті. Просте збільшення балансової вартості активів буде призводити до втрати балансу у балансовому звіті. Це виправляється збільшенням так званого *резерву переоцінки* (іноді вживають синоніми "фонд переоцінки" та "резерв ревальвації"). Таким чином, резерв переоцінки – рахунок у балансовому звіті, що складається з сум, які виникають через збільшення вартостей фіксованих активів. Резерв переоцінки також включається до "інших резервів" у балансовому звіті.

Утримані прибутки Балансове значення утриманих прибутків є сумою чистих прибутків, зароблених компанією за час її функціонування і не виплачених у вигляді дивідендів. Це зазвичай враховує всі придатні до розподілу резерви компанії. Закон про компанії обмежує дивіденди, щоб захистити інтереси кредиторів. Інакше директори могли б використати всі залишкові активи компанії, яка близька до банкрутства, щоб сплатити значні дивіденди своїм акціонерам.

2.3.6 Консолідовані фінансові звіти

Великі індустріальні організації часто влаштовані як групи взаємопов'язаних компаній. Існують чисельні причини для цього. Історично компанії в межах групи можуть набувати діяльності як структурні підрозділи. Менеджмент контролюючої компанії може відчути, що існували політичні або маркетингові розгляди, які зробили нерозумну передачу активів контрольованої компанії покупцям, і ліквідувати саму компанію.

Дочірні компанії

Компанія, яка володіє контрольним пакетом в інших компаніях, відома як *холдинг*, або *холдингова компанія*. Компанії, які контролюються холдингом, відомі як *дочірні компанії*, або *субсидіарії*. Разом холдинг та її дочірні компанії називають *групою*.

Контрольний пакет може виникати по-різному. Найбільш поширеною є ситуація, коли холдинг володіє більшістю прав голосу. Однак, можливо контролювати дочірні компанії іншими шляхами. Холдинг може володіти менше, ніж половиною акцій з правом голосу, але все ж мати право призначати або усувати директорів, володіючи більшістю виборчих прав на загальних зборах або він може мати інші права здійснювати домінуючий вплив на дочірні компанії.

Консолідовані балансові звіти

Юридично компанії в групі залишаються незалежними. Проте у багатьох випадках діяльність членів групи тісно пов'язана, наприклад, одна компанія може постачати іншим матеріали та деталі або продукція різних компаній групи може бути взаємодоповнюючою. Часто одні члени групи забезпечують інших фінансами.

Навіть для індустріальних конгломератів, де немає прямих зв'язків між діяльністю членів, всі компанії знаходяться під контролем того ж самого старшого менеджменту. Для більшості цілей є нелогічним розглядати групу інакше, ніж єдину економічну одиницю. Акціонери холдингової компанії будуть, звичайно, більш зацікавленими у діяльності всієї групи, ніж окремо холдингової компанії.

Від холдингу вимагається публікувати набір консолідованих фінансових звітів, які відображають економічну реальність існування групи. Холдинг зобов'язаний публікувати рахунок прибутків і збитків та балансовий звіт. Ці документи потрібно складати у форматі та з розкриттям облікових даних обліку відповідно до вимог, які застосовуються до окремих компаній.

В основному консолідація є процесом підсумовування різних пунктів рахунків прибутків і збитків та балансових звітів окремих членів групи. Проте, потрібно завжди зважати на те, що метою консолідації є подати рахунки так, наче група є єдиною економічною одиницею. Деякі балансові величини у рахунках окремих членів групи виникають із відносин у межах групи і тому їх потрібно "скоротити" до того, як цифри будуть об'єднані.

Наприклад, компанія "Х" купила 10 000 акцій (по 1грн) компанії "Д" 31 грудня 200Х р. Балансові звіти двох компаній на цей момент такі (у тис грн):

	"Х"	"Д"
Фіксовані активи	8	6
Інвестиції у "Д"	10	–
Поточні активи	12	10
Загальні активи	**30**	**16**
Акціонерний капітал	20	10
Поточні пасиви	10	6
Капітал і пасиви	**30**	**16**

Якщо група розглядається ззовні, то можна побачити, що директори “X” контролюють фіксовані активи з балансовою вартістю 14 000 (тобто 8 000 + 6 000) та поточні активи розміром 22 000 (тобто 12 000 + 10 000). Обчислення балансової вартості активів групи є тому простою справою додавання звітних даних. Перед тим, як зробити це, необхідно виключити внутрішні відносини, що виникли в межах групи. Наприклад, у звіті холдингу є актив у 10 000, що відповідає інвестиціям у “Д”. Це відповідає балансовому капіталу розміром 10 000, що з’являється в балансовому звіті дочірньої компанії. “Скоротивши” ці цифри, одержимо консолідований балансовий звіт у вигляді:

Консолідований балансовий звіт групи “X”

Фіксовані активи	14
Поточні активи	22
Загальні активи	**36**
Акціонерний капітал	20
Поточні пасиви	16
Капітал і пасиви	**36**

Гудвіл з консолідації

Будь-яка сума, сплачена понад номінальну вартість акцій і резервів, куплених холдингом, відома як *гудвіл*. Теоретично це є сумою, яку холдинг виплачує за невідчутні цінності дочірніх компаній: репутацію, клієнтуру та відданих працівників.

Міжнародні облікові стандарти вимагають, щоб при купівлі компаній записувалися всі невідчутні активи, які можна окремо розрізнити. Активи, які раніше трактували як частину гудвіла, тепер потрібно визначити і оцінити окремо. Оцінювання цих активів може бути складною вправою, і може знадобитися консультація спеціаліста.

Частки меншості

Для холдингової компанії не є необхідним володіти всім акціонерним капіталом дочірніх компаній, щоб контролювати їх. У більшості випадків холдинг контролюватиме дочірню компанію, якщо він володіє принаймні половиною акцій; він також може здобути контроль іншими шляхами. Оскільки директори холдингу контролюють всі активи дочірньої компанії, недоречно консолідувати тільки ту частку, на який холдинг може претендувати. Це залишає проблему підрахунку частини фінансів дочірніх компаній, яка забезпечена іншими акціонерами.

Вартість акціонерного капіталу і резервів, забезпечених меншістю акціонерів дочірньої компанії, називається *часткою меншості*. Частка меншості має бути вказаною в балансовому звіті окремо, після капіталу і резервів, які відносяться до звичайних акціонерів.

Асоційовані компанії

Крім холдингових і дочірніх компаній, існує третій тип члена групи. Асоційованою компанією є така, яка не є дочірньою, але зазнає значного впливу (проте не контролю) холдингу. Зазвичай під "значним впливом" розуміють, що холдинг володіє більше, ніж 20 % голосів у компанії.

Той факт, що холдингова компанія може лише впливати, означає, що неприйнятно включати вартість її активів в консолідовані фінансові звіти. Через ті ж самі ознаки буде неприйнятно трактувати асоційованість як просте інвестування. Замість того, компроміс досягається включенням частки результатів асоціанта, яка належить холдингу, в консолідований рахунок прибутків і збитків. Консолідований балансовий звіт включає частку активів і пасивів асоціанта, яка належить холдингу. Записи як у рахунку прибутків і збитків, так і у балансовому звіті, складаються з одного рядка, у якому зазначено загальну суму, що відноситься до асоційованих компаній.

Інтерпретація консолідованої фінансової звітності

Потрібно завжди пам'ятати про штучну природу структури групи. Строго кажучи, група не має юридичної особи. Група не може бути стороною в контракті. Будь-які відносини будуть тільки з одним або декількома членами групи.

Теоретично, член групи може розоритися без отримання підтримки від інших членів групи. На практиці велика група навряд чи дозволить дочірній компанії розоритися, не компенсувавши витрати кредиторам компанії, через несприятливу реакцію суспільства, яка виникне з-за такої дії. Також можливо наполягати на формальних гарантіях від холдингу як умови надання позик членам групи.

Будь-яка взаємна підтримка членів групи може бути обмежена тим фактом, що деякі дочірні компанії можуть бути розташовані за кордоном, і можуть існувати обмеження на обмін або інші місцеві закони, які забороняють передачу фондів головній організації. З іншого боку, міноритарні акціонери можуть бути здатними заблокувати транзакції, які завдадуть шкоди їхній конкретній компанії, навіть якщо вони потенційно вигідні для групи в цілому.

2.4 Інтерпретація рахунків

2.4.1 Вимірювання ризику, пов'язаного з позичковим капіталом

Акціонери розглядають позичковий капітал як палицю з двома кінцями. Це дешеве джерело фінансування для компанії, тому що воно зазвичай має відносно малий ризик для кредитора. Тому акціонери очікують вищі норми прибутку від їхніх інвестицій в акціонерний капітал, якщо компанія частково фінансується позиками. Альтернативно додаткові фінанси можна отримати продажем додаткових акцій, таким чином, розріджуючи прибутки, які мали б початкові акціонери.

Проте, у цього є зворотний бік. Безпека, яку відчувають кредитори, є джерелом ризику для акціонерів. Це відбувається частково тому, що відсотки мають бути сплачені, не дивлячись на те, чи має компанія прибутки, і частково тому, що чим більша частка активів компанії фінансується позиками, тим більшим є ризик, що у разі банкрутства компанії акціонерам нічого не залишиться.

Існує декілька коефіцієнтів, які можна використати, щоб виміряти ризик, на який наражаються акціонери через позикову політику компанії. Ці ризики не треба плутати з ризиками, які виникають через мінливість в самому бізнесі.

Покриття прибутком

Покриття прибутком випуску позичкового капіталу визначається як відношення прибутку від звичайної діяльності до сплати відсотків і податків до річних відсоткових виплат за цим випуском позичкового капіталу і за всіма позиками з тим самим і вищим рангом. Грубо кажучи, воно вказує, скільки разів компанія може сплатити свої відсотки з прибутків. Чим вище ця величина, тим менш можливо, що компанія зіткнеться з труднощами.

Відсотки, які сплачуються за конкретним випуском позики, можуть бути обчислені за допомогою номіналу та відсоткової ставки, показаних в балансовому звіті.

Типово, вважається ризиковим, якщо компанія не здатна покрити відсотки принаймні три – чотири рази. Це, однак, дуже грубе правило. Якщо, наприклад, компанія має стабільний і передбачуваний потік прибутків, тоді вона може дозволити собі оперувати з меншим покриттям відсотків.

Пріоритетні процентилі з прибутків *Пріоритетні процентилі з прибутків* показують “скибку” прибутків від звичайної діяльності до сплати відсотків і податків, яка покриває річні виплати відсотків за випуском позичкового капіталу. Для кожного випуску позичкового капіталу визначаються нижній та верхній пріоритетні процентилі з прибутків. Нижній процентиль обчислюється як величина, обернена до значення покриття за випусків з вищим рангом. Верхній процентиль обчислюється як величина, обернена до значення покриття для даного випуску позичкових цінних паперів.

Ці величини мають більше значення для кредиторів. Якщо компанія має, скажімо, позики з фіксованою заставою або іпотечні дебентури, то ці позики будуть виплачуватися до позики з плаваючою заставою, а незабезпечені позики – після. Це ранжування є суттєвим для кредиторів, які мають вирішити, чи інші кредити, взяті компанією, впливатимуть на ризик подальших інвестицій.

Покриття активами та пріоритетні процентилі з активів

Покриття активами випуску позичкового капіталу зазвичай визначається як відношення значення активів, зменшеного на значення поточних пасивів і невідчутних активів, до балансового значення цього позичкового капіталу і всього позичкового капіталу з тим самим і вищим рангом:

$$\frac{\text{Загальні активи} - \text{поточні пасиви} - \text{невідчутні активи}}{\text{Балансове значення позик з тим самим і вищим рангом}}.$$

Ця величина зазвичай дає консервативну оцінку кількості грошей, наявних для задоволення вимог власників цінних паперів у випадку ліквідації компанії: припускається, що відчутні активи буде конвертовано в гроші за їхньою балансовою вартістю, в той час як невідчутні активи вірогідно будуть нікчемними при ліквідації. Це, звичайно, залежить від природи бізнесу та його активів. Цінний бренд або патент можуть бути ціннішими за всі інші активи компанії. Також припускається, що поточні пасиви будуть виплаченими до задоволення вимог власників цінних паперів, навіть якщо вони мають нижчий ранг, ніж позичковий капітал.

Стандартною практикою є вважати високоризиковими позики, які покриті активами менше, ніж два – два с половиною рази.

Пріоритетні процентилі з активів показують частку активів, яка є в наявності для покриття номіналу кожного випуску позичкового капіталу, і визначаються так само, як приоритетні процентилі з прибутків.

Головний недолік покриття активами полягає у тому, що поточна вартість активів у балансовому звіті може не відображати їхню ринкову вартість при ліквідації компанії.

Важіль

У широкому розумінні, фінансовий *важіль* означає співвідношення довгострокового боргу і власного капіталу компанії. Чим більшим є важіль, тим вищий рівень позичкового фінансування має компанія.

Важіль активів

Важіль активів ще відомий як *капітальний важіль*. Існує два загальновживаних визначення важеля активів: або

$$\frac{\text{борг}}{\text{власний капітал}}, \quad \text{або} \quad \frac{\text{борг}}{\text{борг} + \text{власний капітал}}.$$

Під “боргом” тут зазвичай розуміють всі види довгострокового позичкового капіталу. Деякі компанії додають також будь-які овердрафти та та інші короткострокові пасиви, які є постійною компонентою капіталу компанії. Під “власним капіталом” розуміють балансову вартість звичайних акцій, тобто номінальну вартість акціонерного капіталу і всі резерви. Часто віднімають значення усіх невідчутних активів.

Підхід до привілейованих акцій є відмінним. Зазвичай їх включають як частину заборгованості, а не акціонерного капіталу компанії, тому що вони мають фіксовану ставку дивідендів і виплати їхнім власникам. Це означає, що вони більш подібні до пасивів. Така точка зору більш придатна для звичайних акціонерів. З точки зору кредиторів, привілейовані акції більш подібні до акціонерного капіталу. Це тому, що дефолт за будь-якими борговими виплатами може призвести до ліквідації компанії, у той час як невиплати за привілейованими акціями зазвичай просто збільшують кількість звичайних акціонерів компанії, надаючи привілейованим акціонерам право голосу. Підхід до привілейованих акцій при визначенні відповідних відношень, як от покриття прибутком, має бути узгодженим.

Компанія, чий важіль досягає 40 % за другою з указаних формул, зазвичай розглядається як високоризикова.

Причини, за якими важіль збільшує ризик, можна простежувати на наступному прикладі, що включає дві ідентичні компанії, одна з яких (Н) фінансується 4 млн звичайних акцій по 1 грн, а інша (В) – 2 млн акцій і 2 млн 12 %-них облігацій. (Всі дані у тис грн, крім кількості акцій та прибутку на акцію.)

Середній рік

	Н	В
Прибуток до сплати відсотків і податку	540	540
Відсотки	—	-240
Прибуток до сплати податку	540	300
Податки (30 %)	-162	-90
Чистий прибуток	378	210
Кількість акцій, млн	4	2
Прибуток на акцію, коп	9,45	10,5

Таким чином, власники акцій матимуть користь від важелю у середній рік, тому що відсоткові ставки порівняно низькі, і тому що компанія не сплачує податку на податкові виплати.

Гарний рік

	Н	В
Прибуток до сплати відсотків і податку	1080	1080
Відсотки	—	-240
Прибуток до сплати податку	1080	840
Податки (30 %)	-324	-252
Чистий прибуток	756	588
Прибуток на акцію, коп	18,9	29,4
Порівняно з середнім роком, %	200	280

У гарний рік прибуток до сплати відсотків і податку подвоюється. Це призводить до подвоєння прибутків акціонерів у компанії з низьким важелем. Прибутки компанії з високим важелем у той же час зростуть у 2,8 разу. Це відбуватиметься з-за впливу фіксованої сплати відсотків на половину довгострокових фінансів, які є позичковими.

Поганий рік

	Н	В
Прибуток до сплати відсотків і податку	270	270
Відсотки	—	-240
Прибуток до сплати податку	270	30
Податки (30 %)	-81	-9
Чистий прибуток	240	21
Прибуток на акцію, коп	4,725	1,05
Порівняно з середнім роком, %	50	10

Вплив важеля стає навіть більш відчутним у поганий рік. У цьому випадку прибутки перед сплатою відсотків і оподаткуванням зменшуються вдвоє, що зменшить удвоє прибутки акціонерів у компанії без важелю. У компанії з високим важелем дохід акціонерів спадає удесятеро порівняно зі звичайним роком.

Важіль як показник важливий тому, що збільшення частки боргу в довготермінових фінансах компанії посилює будь-яку мінливість у бізнесі, яким вона займається.

Важіль прибутку

Найбільш поширеним є таке означення важеля прибутку:

$$\frac{\text{відсотки за боргом}}{\text{прибуток до стягнення відсотків і податку}}.$$

Відсотки за боргом зазвичай включають усі види відсотків, що виплачуються за позиками. Підхід до привілейованих акцій теж відрізняється. Коли вони включаються як частина відсотків за боргом, їх потрібно "забруднити", тобто додати до інших відсотків їхнє валове значення, тобто

$$\frac{\text{привілейовані дивіденди}}{1 - \text{ставка корпоративного податку}}$$

2.4.2 Міри, які використовують інвестори в акції

Інвестори в звичайні акції мають право отримувати дивіденди, які можуть бути досить значними порівняно з ціною випуску акцій, якщо компанія успішна. У той же час, дивіденди можуть не сплачуватися взагалі, якщо компанія неуспішна. Інвестори бажатимуть знати про прибутковість компанії, ефективність, прибутки звичайних акціонерів і дивіденди.

Коефіцієнти, які розкривають акціонерну інформацію

Прибуток на акцію (EPS) Коефіцієнт *прибутку на акцію* є прибутком, що одержано на кожну звичайну акцію:

$$\text{прибуток на акцію} = \frac{\text{прибуток від звичайної діяльності}}{\text{кількість акцій}}.$$

Існують чималі розходження у тому, яку величину використовувати у знаменнику. Багато компаній використовують прибуток до стягнення податку і відсотків. Більш поширеним, однак, є взяття чистого прибутку після стягнення податків і всіх відсотків, включаючи дивіденди за привілейованими акціями.

Базовий прибуток на акцію Ця величина обчислюється діленням чистого прибутку або збитку, який відноситься до звичайних акціонерів, на середньозважену величину звичайних акцій в обігу протягом періоду. Чистий прибуток або збиток, який відноситься до звичайніх акціонерів, береться після стягнення відсотків, оподаткування, прибутків за часткою меншості, надзвичайних статей та привілейованих дивідендів.

Розріджений прибуток на акцію Базовий прибуток на акцію враховує лише ті звичайні акції, що були в обігу протягом періоду. Проте компанія може мати зобов'язання, які розрідять прибутки у майбутньому. У таких випадках потрібна поправка на ефекти від усього потенційного розрідження звичайних акцій. Обчислення мають бути зроблені за тим припущенням, що усі права на конвертацію й опціони були виконані повністю у перший день розрахункового періоду. (Якщо дата випуску цінних паперів, починаючи з якої можна виконати права або опціони, є пізнішою, потрібно провести середньозважене обчислення.)

Важко зрозуміти, чому коефіцієнт прибутку на акцію має привертати так багато уваги. В решті решт, кількість звичайних акцій є беззмістовною величиною. Компанія, що хоче залучити 1 млн грн, може випустити 1 млн акцій по 1 грн, 2 млн акцій по 50 коп або 10 млн акцій по 10 коп.

Величина цього коефіцієнту фактично використовується як основа для підрахунку відношення ціна/прибутки.

Відношення ціна/прибуток (P/E)

$$\text{ціна/прибуток} = \frac{\text{ринкова ціна звичайної акції}}{\text{прибуток на акцію}}$$

Величина прибутків на акцію в цій формулі може бути історичною або прогнозованою.

Ринкова ціна акції включає все, що ринок знає про компанію. Її зв'язок з прибутками дає уяву про думку ринку про компанію. Якщо відношення ціни до прибутку високе, то це говорить про те, що компанія як джерело доходів є досить привабливою. Це може свідчити про те, що ринок впевнений у тому, що ризик інвестицій у компанію є малим, або що прибутки швидко зростатимуть.

Якщо ціна/прибуток є високим порівняно з іншими схожими компаніями (з урахуванням вищевказаних факторів), то це може означати, що ціна акції є завищеною.

В теорії (і майже скрізь на практиці) відношення ціна/прибуток змінюється у результаті змін ціни акції. На жаль, багато директорів поводяться так, наче залежність є оберненою. Вони, здається, припускають, що це відношення є фіксованим (або принаймні "липким") і що ціну акції можна підвищити повідомленням вищих прибутків на акцію.

Дивідендний дохід

$$\text{(валовий) дивідендний дохід} = \frac{\text{валовий дивіденд на акцію}}{\text{ринкова ціна звичайної акції}}.$$

Зазначимо, що зазвичай означення включає валовий дивіденд, тобто дивіденд з урахуванням 10 %-ї податкової пільги.

Дивідендний дохід вимірює величину поточного доходу (дивідендів), який інвестор одержує на одиницю інвестування (ціну акції). Низький дивіденд може означати, що:

1) інвестори очікують, що дивіденди швидко зростатимуть; або

2) ціна акції завищена.

Помітимо, що дивідендний дохід не можна інтерпретувати як очікуваний прибуток за акцією, оскільки він показує тільки частку прибутку інвестора – він ігнорує будь-який потенційний приріст капіталу.

Покриття дивіденду та виплачувана частка

$$\text{покриття дивіденду} = \frac{\text{прибутки на акцію}}{\text{дивіденди на акцію}}.$$

Покриття дивіденду можна визначати як у “валовому”, так і у “чистому” сенсі.

Дивіденди виплачуються з прибутків. Компанія не буде в змозі утримувати дивіденди на існуючому рівні протягом довгого часу, якщо вони не покриваються доходами. З іншого боку, компанія з високим рівнем покриття дивідендів має більше можливостей для підвищення дивідендів у майбутньому.

Величину, обернену до покриття дивіденду, називають *виплачуваною* часткою. Вона вказує на те, яку частку прибутку, що відноситься до звичайних акціонерів, компанія розподіляє у вигляді дивідендів.

EBITDA Звіт про прибутки і збитки показує, як прибуток від звичайної діяльності (операційний прибуток) відображає продажі (виручку) мінус обігові витрати, витрати на розповсюдження і адміністративні виртати. Суму операційного і фінансового прибутку часто називають прибутком до сплати відсотків і податку. Проте, ця величина враховує витрати на амортизацію. Деякі аналітики вважають, що ці величини не надто слушно вимірюються у рахунку прибутків і збитків, оскільки суми, що стягуються, базуються на суб’єктивному аналізі, і є велика свобода у підрахунку цих сум. Тому вони переважно акцентують увагу на прибутку до сплати відсотків, податку та амортизації (Earnings before Interest, Taxation, Depreciation and Amortisation[1], EBITDA).

[1]В англомовному середовищі (й іноді в україномовному) амортизацію розділяють на “зношення” відчутних активів (англ. depreciation) та “амортиза-

Чисті активи на акцію

$$\frac{\text{капітал звичайних акціонерів} - \text{невідчутні активи}}{\text{кількість випущених звичайних акцій}}.$$

Капітал звичайних акціонерів означає залучений звичайний акціонерний капітал, рахунок акціонерних премій, резерв переоцінки й інші резерви.

Цей коефіцієнт є приблизно тією сумою, яку акціонери отримали б за кожну акцію, якби компанія негайно ліквідувалася (у припущенні, що можна покладатися на значення, наведені у балансовому звіті). Часто чиста вартість активів буде порівняною з ціною акції.

Головна проблема з цим коефіцієнтом є у тому, що значення у балансових звітах історичних розрахунків вартостей не обов'язково відображують справжню величину активів.

2.4.3 Облікові коефіцієнти

Є чотири основні групи коефіцієнтів:

- ті, що вимірюють рентабельність;
- ті, що вимірюють ліквідність;
- ті, що вимірюють ефективність бізнесу;
- ті, що відносяться до фінансової структури бізнесу (їх було обговорено вище).

Коефіцієнти рентабельності

Коефіцієнти рентабельності використовуються для перевірки того, що компанія створює прийнятний прибуток для її власників. Для порівняння можуть бути використані чисельні показники: цифри попередніх років, коефіцієнти, пораховані для подібного бізнесу, галузеві середні, тощо. Менеджмент має розглядати причини, за якими будь-які коефіцієнти гірші за очікувані, щоб побачити, чи можливо їх покращити.

цію" невідчутних (англ. amortisation). Ми не розділяємо їх, у відповідності до існуючих традицій.

Прибуток на задіяний капітал *Прибуток на задіяний капітал* є найбільш важливим коефіцієнтом рентабельності – часто його називають "основним коефіцієнтом" або "рентабельністю інвестицій". Він вимірює зв'язок між інвестованою в бізнес сумою і прибутком, створеним для інвесторів. Коефіцієнт може використовуватися для вимірювання ефективності використання менеджерами різних фірм фондів у їхньому розпорядженні. Тому він є корисним при порівнянні компаній для інвестування.

Обчислення прибутку на задіяний капітал ускладнюється тією обставиною, що задіяний капітал може вимірюватися у декілька різних способів. Життєво важливим є те, щоб величина "прибутку" рахувалася у спосіб, узгоджений із тим, що використовується для підрахування "задіяного капіталу".

Основними формулами для прибутку на задіяний капітал є

$$\frac{\text{прибуток до стягнення відсотків і податку}}{\text{акціонерний капітал} + \text{резерви} + \text{довгостроковий борг}},$$

$$\frac{\text{прибуток до стягнення податку}}{\text{акціонерний капітал} + \text{резерви}}.$$

Перша формула визначає задіяний капітал у термінах загальної суми, інвестованої у компанію, разом акціонерами і кредиторами. Щоб бути узгодженою, величина прибутку повинна показувати всю суму, створену в інтересах цих інвесторів, і тому в неї входять сплачені відсотки.

Прибуток на задіяний капітал можна розбити на наступні два "вторинні" коефіцієнти.

Коефіцієнт використання активів

$$\frac{\text{виручка}}{\text{акціонерний капітал} + \text{резерви} + \text{довгостроковий борг}}$$

відображає інтенсивність, з якою активи використовуються.

Маржа прибутку (або коефіцієнт рентабельності продажів)

$$\text{маржа прибутку} = \frac{\text{прибуток до стягнення відсотків і податку}}{\text{виручка}},$$

який відображає прибутки, одержані на одиницю продажів.

Низька маржа у порівнянні з іншими фірмами у галузі може вказувати на різноманітні речі, наприклад:

- більш відсталий асортимент товарів;
- маркетингова стратегія “менша маржа і більший об’єм”;
- намагання підвищити частку на ринку;
- поганий менеджмент/надмірні витрати.

Зміни маржі прибутку з року у рік теж будуть цікавими для аналізу. Такі зміни можуть свідчити про зміну в будь-якому пункті, вказаному вище. Ясно, що неможливо сказати, чи є добрим велике значення, чи поганим, без додаткової інформації, яка б забезпечила контекст. Більше значення можна одержати підняттям цін продажу. На жаль, це також бути вести до надмірних цін продуктів компанії порівняно з конкурентами.

Зазвичай відповідь множать на 100, щоб виразити її у відсотках.

Коефіцієнти ліквідності

Хоча бізнесу важливо бути прибутковим, сам по собі прибуток не є достатнім для виживання. Бізнес повинен мати достатню кількість доступних ліквідних активів, щоб гарантувати, що короткострокові зобов’язання можна виконати, інакше компанію можуть змусити ліквідуватися.

Коефіцієнт поточної ліквідності

$$\text{коефіцієнт поточної ліквідності} = \frac{\text{поточні активи}}{\text{поточні пасиви}}.$$

Цей коефіцієнт використовується для оцінки того, чи буде компанія здатною оплатити її рахунки протягом кількох наступних місяців. Він дає можливість порівняти суму грошей, що має бути одержана у короткий термін, з оцінкою суми, яку потрібно виплатити. Зазвичай низьке значення може вказувати на те, що у компанії можуть бути проблеми з виплатами її кредиторам. Надмірно високе значення може вказувати на те, що менеджмент має занадто багато грошей, зв'язаних у непродуктивних короткострокових активах (готівці, складах, тощо).

Важко точно визначити, чим є низьке або високе значення для конкретної компанії. Різні галузі можуть мати дуже різні "нормальні" рівні. Загалом, відношення 2:1 розглядається як оптимальне. Проте це може бути надмірним для бізнесу, який має швидкий обіг акцій і сталий притік грошей (класичним прикладом є супермаркет). З аналогічних міркувань, відношення 2:1 може бути неадекватним для бізнесу, що має нерегулярний притік грошей. З цієї причини багато аналітиків використовують цей коефіцієнт, щоб подивитися на тренд протягом кількох років. Раптова зміна буде причиною подальших досліджень.

Коефіцієнт термінової ліквідності

$$\text{коефіцієнт термінової ліквідності} = \frac{\text{поточні активи} - \text{склади}}{\text{поточні пасиви}}.$$

Це інший коефіцієнт, націлений на спостереження короткострокової ліквідності. Він фокусує увагу на грошах, які можна негайно виручити. Коефіцієнт термінової ліквідності вивчає, що може трапитися, якщо всі кредиторські та дебіторські рахунки будуть негайно поданими до сплати.

Коефіцієнт термінової ліквідності, суттєво менший за одиницю, є знаком того, що компанія може може мати проблеми, щоб сплатити своїм кредиторам. Однак, деякі компанії виживають з коефіцієнтом, суттєво меншим за одиницю. Знов, саме відхили від нормального рівня коефіцієнту, а не його абсолютний рівень, що цікавить аналітиків.

Коефіцієнт термінової ліквідності ще відомий як "лакмусовий папірець" або просто як "коефіцієнт ліквідності".

Коефіцієнти ефективності

Коефіцієнти ефективності пов'язані з коефіцієнтами ліквідності. Вони дають уявлення про ефективність управління компонентами поточного капіталу. Зазначимо, що ця оцінка буде досить грубою, оскільки у рахунках фігурують значення наприкінці року, проте сезонні коливання можуть бути значними.

Коефіцієнт оборотності складів Звичайно коефіцієнт оборотності складів визначається як

$$\text{коефіцієнт оборотності складів} = \frac{\text{склади}}{\text{обіг}} \times 365.$$

Його метою є оцінити, які склади має компанія порівняно з масштабом її діяльності. Він намагається показати, як довго у середньому тримаються склади. Коефіцієнт оборотності запасів, що є менш швидким, ніж у інших компаній галузі, може вказувати на володіння великими неефективними складами. Цей коефіцієнт буде сильно різнитися для різних видів діяльності. (Спробуйте порівняти м'ясну лавку на ринку та суднобудівну компанію!)

Склади включають готові товари, незавершену продукцію, витратні та сировинні матеріали. Одним із ускладнень для коефіцієнту є те, що величини складів можуть піддаватися сезонним змінам. Також величина, приписана складам, залежатиме від використаного методу обліку.

Дуже поширеним варіантом визначення є використання наступної формули (або оберненої до неї):

$$\text{коефіцієнт оборотності складів} = \frac{\text{склади}}{\text{витрати на обіг}} \times 365.$$

Коефіцієнти оборотності дебету та кредиту Це є мірою середньої тривалості часу, який потрібний для закриття дебіторських рахунків

$$\text{коефіцієнт оборотності дебету} = \frac{\text{дебет}}{\text{продажі у кредит}} \times 365.$$

Знов, бажано, щоб для цього відношення час був якомога коротшім. Найкращим для грошових потоків компанії є те, щоб позичальники розраховувалися настільки швидко, наскільки це можливо. Проте, може бути важким квапити їх, щоб виплати були скорішими, до того ж, роблячи це, можна зіпсувати взаємини з клієнтами.

Якщо компанія продає товари за готівку та в кредит, то важливо ділити цифру для дебету тільки на продажі в кредит.

Якщо продажі не можна розбити на групи, то коефіцієнт буде спотвореним.

Схожий коефіцієнт можна використовувати для оцінки кредиторів:

$$\text{коефіцієнт оборотності кредиту} = \frac{\text{торговий кредит}}{\text{закупівлі}} \times 365.$$

У рахунках компаній майже ніколи не фігурує цифра кредитних закупівель. Насправді, для компаній зазвичай всі закупівлі відбуваються у кредит. Можливо, що рахунок прибутків і збитків компанії не дає окремої цифри для величини закупівель – у цьому випадку потрібно використовувати величину витрат на обіг, щоправда, значення коефіцієнту буде дещо спотвореним.

2.5 Фінансове управління

2.5.1 Структура капіталу і дивідендна політика

Структура капіталу

Компоненти структури капіталу Основними компонентами капіталу компанії з обмеженою відповідальністю є:

- акціонерний (власний) капітал;
- короткостроковий та середньостроковий борг;
- довгостроковий борг.

Фінансові менеджери компанії намагаються максимізувати дохід для власників акцій у рамках параметрів, які встановлені останніми. Це включає:

- мінливість очікуваного доходу (з урахуванням природи бізнесу);
- ступінь ризику, на якій погоджуються власники;
- бажання власників отримувати негайні прибутки, а не мати високе зростання у віддаленій перспективі;

- готовність (або інше) власників вкласти додатковий капітал в бізнес;
- їхню готовність бачити зміни в частках бізнесу, що їм належать.

У більшості випадків потреба у зміні структури капіталу виникає з бажання розширити бізнес або увійти в нові додаткові капітальні проекти. Через витрати, відстрочки платежів, непопулярність залучень нових акціонерних фінансів (зокрема, порівняно малих сум), типово використовуються інші види фінансування – щонайменше на початку. Використання цих альтернативних форм фінансування обмежено через:

- природу бізнесу та його активів;
- величину фінансового важеля (відношенням власного і позичкового капіталу, gearing), що розглядається як прийнятний;
- ефекти оподаткування,

тобто через рейтинг кредитоздатності бізнесу.

Іншою причиною для зміни структури капіталу є ситуація, коли бізнес має зайві кошти, які він не може прибутково використати, і, таким чином, ці кошти повертаються акціонерам шляхом "викупу" акцій.

Ключовою концепцією корпоративних фінансів є, однак, виражений Модільяні і Міллером перший принцип недоречності: *ринкова вартість компанії не залежить від структури її капіталу.* Зауважимо, що цей принцип Модільяні і Міллер сформулювали за наступних припущень:

- податків немає;
- позичання є безризиковим;
- безризикова ставка позичання є однаковою для усіх компаній та індивідуумів;
- немає представницьких витрат;
- немає інформаційної асиметрії.

Структура активів і бізнесу Активи компанії можливо поділити на:

- *фіксовані* активи, такі, як земля, власність, підприємство, обладнання та нематеріальні (невідчутні) активи;
- *оборотні* (поточні) активи, такі, як цінні папери, незавершене виробництво, дебет, готівка та її еквіваленти.

Оборотні активи не обов'язково є короткостроковими – деякий їх рівень буде постійним для життєздатності бізнесу. Також у циклічному підприємництві активи змінюються разом з циклом виробництва. Таким чином, фіксовані та оборотні активи мають фінансуватися на довгостроковій основі.

Залишковий прибуток є найпростішим та найпридатнішим джерелом фінансів. Проте

- акціонери можуть вимагати негайної реалізації прибутку у вигляді дивідендів;
- накопичені фонди можуть виявитися недостатніми для проектів, коли вони знадобляться.

Деякі види бізнесу, наприклад, банки та майнові компанії, використовують велику частину позичкового фінансування через природу їхніх активів (кредити, орендоване майно). Інші, наприклад, розвідники мінералів або виробники інформаційних технологій, мають дуже обмежені матеріальні активи та потребують впевненості у акціонерному фінансуванні. Більшість бізнесу, однак, лежить між цими двома крайніми випадками, і обирає альтернативи, такі, як позичання, оренду активів, продаж і зворотну оренду, або використання комерційного кредиту для фінансування товарообігу. ("Продаж і зворотна оренда" – це коли власник активу продає його інституціональному інвестору, який потім дає його в оренду старому власнику. Таким чином власник звільняє капітал, вкладений в актив.)

Проте ці альтернативні рішення з фінансування мають свої недоліки. Орендовані активи можуть мати нижчу вартість, ніж очікувана перед закінченням оренди (через інновації або зміну стратегії бізнесу). Продаж і зворотна оренда є відмовою від гнучкості та можливого майбутнього зростання вартості власності.

Тому типово потрібне позичання для фінансування проектів. Забезпечуючи, щоб проект досягав очікуваного доходу і щоб при регулюванні ризику проекту дохід перевищував би середньозважену вартість капіталу компанії (СЗВК), акціонери досягатимуть кращого, ніж в попередніх випадках. (Вартість капіталу розглядатиметься у розділі 2.5.2.)

Ступінь припустимого фінансового важеля

Якщо бізнес збільшує свій фінансовий важіль – відношення позичкового капіталу до акціонерного – то вартість фінансової невдачі зростає. В решті решт, втрати можуть знищувати не тільки активи, що фінансуються позиками, але й активи, що фінансуються акціонерним капіталом, у цьому разі бізнес банкрутіє. Чим більше борг, тим менш вірогідно, що наявними активами (які, можливо, були продані в обставинах "нестатків") можна повністю задовольнити всіх кредиторів. До того ж, власники акцій стануть занепокоєними тим, що при потраплянні бізнесу в чорну смугу виплати відсотків нічого їм не залишатимуть.

Таким чином, кредитори бажатимуть розглянути існуючий борговий тягар перед тим, як забезпечити подальше фінансування. Агенції кредитних рейтингів відстежують фінансовий стан основних компаній (та інших, за запитом). Спадаючий рейтинг компанії може дати мати серйозний вплив на вартість її існуючих боргів та здатність подальшого позичання.

Це є основою *другого принципу недоречності Модільяні та Міллера*: очікувана норма доходності звичайної акції фірми з важелем зростає пропорційно до відношення борг/акціонерний капітал (тобто до важеля), вираженого в ринкових вартостях.

Структура ринку і капіталу

Фондовий ринок розглядатиме компанію у всіх аспектах при оцінці вартості, що виллється в ціну акцій. Якщо структура капіталу не узгоджується з іншими рисами, що оцінюються, то ціна зміниться, щоб урахувати це.

Наведемо декілька типових прикладів.

- *Компанія середнього розміру в промисловості з численними можливостями зростання, що вже має високий фінансовий важіль порівняно з її конкурентами*. Вартість акцій може зменшуватися через очікування ринку, що від акціонерів вимагатимуть вкладення додаткових фондів. У статичних або слабко зростаючих галузях буде навпаки, оскільки фірма з великим важелем дає більш ефективне використання фондів акціонерів.

- *Циклічна галузь*. Найбільш ефективна компанія матиме високе відношення боргу до акціонерного капіталу, коли активність перебуває на піку, але матиме таку структуру, що цей борг може буде значно зменшеним при наближенні ями. Тут це саме часова структура позичкового капіталу, що впливатиме на оцінювання акцій.

- *Галузь, що перебуває у занепаді*, де менеджмент має вдатися до диверсифікації або вийти з бізнесу. Якщо перевагу надано диверсифікації, то компанія вимагатиме капіталу і також потребуватиме адаптації своєї структури капіталу до тієї галузі, в яку вона бажає рухатися, у той самий час знижуючи (через ліквідацію, якщо необхідно) участь у занедбаному бізнесі. Якщо вибрано закриття компанії, то чим менший борг у структурі капіталу компанії, тим краще.

- *Бізнес "з людським фактором"*, де вміння і можливості деяких груп штату і менеджменту є дуже рідкісними та грають істотну роль у конкурентному успіху бізнесу. Тут може бути необхідним нагороджувати деяких осіб опціонами на цінні папери або іншими подібними схемами. Проте надмірне використання таких заходів може мати зворотний вплив на оцінювання акцій компанії.

- *Компанії у швидкозростаючих, але високоризикових галузях*, таких як біотехнології або розвідка глибоководної нафти. Позичковий капітал буде не придатним, але акціонери мають бути винагородженими за ризики, які вони несуть у відсутності грошового потоку для фінансування дивідендів.

Чим більше структура капіталу компанії пристосовується до ринкового прийняття перспектив компанії, тим вище оцінюються її акції. Не існує простих правил успіху – все полягає у знанні бізнесом ринку та у внеску його менеджменту.

Оподаткування і структура капіталу

Основні риси оподаткування компанії означають, що:

- виплати відсотків звільняються від оподаткування;
- знижки на списання заводів і обладнання віднімаються з валового доходу;
- оренда заводів і обладнання отримують податкові знижки;
- сума орендної плати за власність звільняється від податку, а для індустріальних споруд є знижка на списання (хоча з набагато меншою ставкою, ніж для заводів).

Це означає, що вартість ризику, який несуть акціонери і який виникає через борги компанії, зменшується послабленням корпоративного податку, в той час як прибутки, що відносяться до фондів акціонерів, не отримують користі від такого послаблення. Як наслідок, платники податків субсидують використання заборгованості в структурі капіталу. До того ж, коли компанія належить особам-платникам податків, вони не можуть бути здатними отримувати податкові послаблення для їхньої власної заборгованості. Отже, такі компанії не можуть сподіватися на те, що їхні акціонери запозичать, щоб забезпечити компанію додатковим акціонерним капіталом (при інших рівних обставинах).

Отже, є потужний податковий стимул для компанії позичати (або брати в оренду, тощо), коли їй потрібен капітал для розширення. Але вартість деяких часткових невдач бізнесу може перевищувати податкове полегшення, що одержується відносно комерційного проекту та його фінансування. Чим більша заборгованість бізнесу, тим менш імовірно, що доступні активи (продані в обставинах "нестатків") будуть здатні оплатити повністю усім кредиторам, якщо бізнес збанкрутіє. Таким чином, при збільшенні бізнесом фінансового важеля вартості фінансових невдач зростають. Фінансові менеджери компанії можуть використовувати у якості критерію максимізацію (позитивного) розриву між податковим полегшенням та коштами на покриття нестач невдалих проектів.

Дивіденди – премія акціонерам

Основи дивідендної політики Дивіденди можна розглядати як рішення про фінансування – гроші, що виплачуватимуться як дивіденди, більше не доступні для фінансування бізнесу. Це частково справедливо для компаній, що не мають лістингу, оскільки:

1) компанія не має варіанту залучення подальших фондів на фондовому ринку;

2) позичкові можливості компаній, що не мають лістингу, зазвичай є більш обмеженими.

З іншого боку, акціонери компанії мають протилежну проблему – вони не можуть продати деякі акції на ринку, відмовляючись від прибутків за дивідендами.

Загалом, керівництво компанії (та її акціонери) вибирають між негайним отриманням доходів та перспективою високих доходів у деякий час у майбутньому. Останнє буде для компанії, що має лістинг, відображуватися в зростанні ринкової вартості акцій, бо ринок враховуватиме цю перспективу.

Фактори, що впливають на рішення з дивідендної політики, є такими.

- Фондові ринки демонструють дуже несприятливу реакцію на скорочення дивідендів. Тому менеджери прагнуть до консерватизму у вдалі роки, зокрема, у циклічних галузях виробництва та у невеликих компаніях (особливо тих, що нещодавно прийшли на ринок).

- Компанії з великими грошовими резервами, що побоюються пропозиції про поглинання, можуть охоче щедро розподіляти їх, щоб забезпечити лояльність акціонерів та обмежити розміри “грошових нагромаджень”.

- Компанії з великою часткою акціонерів, які не обкладаються податками, можуть відчувати необхідність до розподілу значної частки прибутків.
- Компанії в галузях виробництва зі значним зростанням можуть виявляти, що попит на капітальні інвестиції, необхідні для підтримання конкурентних переваг, перевищує їхню здатність позичати на належні терміни та можуть віддавати перевагу сплаті низьких дивідендів, а не частим випускам нових акцій.
- Оскільки компанії з політикою високих виплат намагаються привертати інвесторів, налаштованих на високі виплати (і аналогічно для політики низьких виплат і відповідних переваг), то будь-який рух з однієї категорії до іншої спричинятиме несприятливу реакцію ринку та перегляд інвесторами своїх портфелів.
- Зміна дивідендної політики може значно впливати на ринковий рейтинг компанії та її здатність залучати фінанси.

Альтернативні шляхи розподілу прибутків

На додачу до регулярних дивідендів, які зазвичай сплачуються щоквартально або щопівроку, іноді можуть бути сплачені одноразові додаткові або спеціальні дивіденди.

Альтернативи до грошових дивідендів включають:

- дивіденди акціями;
- викуп акцій.

Дивіденди акціями виплачуються у вигляді додаткових акцій, а не грошей. Такі дивіденди будуть зазначені в рахунках компанії як переведення залишкових прибутків у акціонерний капітал.

З точки зору компанії, дивіденди акціями зберігають фонди для інвестування або скорочення заборгованості й, отже, для збільшення прибутків. Базовий капітал буде зростати і покращить перспективи компанії. Акціонерна база може бути збільшена залученням інвесторів, які віддають перевагу дивідендам акціями.

З точки зору акціонерів існують декілька вигід. Податки нормально будуть виплачуватися, якщо гроші одержано, але це має покриватися з інших джерел. Дивіденди акціями вигідні тільки тим акціонерам, які бажають підсилити своє володіння, при тому, що вони уникатимуть брокерської комісії та інших витрат на придбання, а також досягати вигоди за гранично більш сприятливими цінами. З іншого боку, ця практика істотно ускладнює підрахунок та облік приростів капіталу.

Якщо компанія накопичила значну кількість небажаних грошей або якщо вона бажає змінити структуру капіталу, замінюючи капітал заборгованістю, вона буде вдаватися до *викупу акцій*. Це може бути здійснено через:

- купівлю акцій на відкритому ринку за послідовною програмою протягом певного періоду часу або пропонування до тендеру;
- “голландський” аукціон, або аукціон єдиної ціни;
- викуп через прямі переговори з мажоритарним акціонером.

Викуп акцій може приносити вигоду приватним акціонерам в межах того, що оподаткування приросту капіталу є більш вигідним, ніж дивідендів. Вплив на дохід компанії має бути позитивним, оскільки триманням готівки можна заробити лише ставку відсотка за депозитом – значно менше, ніж використанням продуктивних активів. Тому вартість акцій, що залишаються, має збільшуватися. Проте інвестиційні установи надають перевагу власним рішенням з купівлі/продажу і не отримують податкових вигод від викупу акцій, так що ця альтернатива частіше використовується компаніями з великою часткою індивідуальних акціонерів.

Іноді компанії можуть пропонувати негрошові дивіденди у вигляді зразків продукції або знижок на послуги.

Часто компанії пропонуватимуть *автоматичний план реінвестування дивідендів*. Це може включати емісію нових акцій з дисконтом до ринкової ціни (частково, щоб відобразити економію витрат на андеррайтинг).

Ринок і дивіденди

Ринкова ціна компанії є оцінкою майбутніх дивідендів ринком (крім випадків поглинання або ліквідації з розподілом активів, що залишаються). Якщо немає стороннього позичкового капіталу та компанія має кращі інвестиційні можливості, ніж її акціонери, то виплата дивідендів з-за зниження можливостей бізнесу отримувати переваги від ситуації буде шкідливою для ринкової вартості компанії. Однак поки позичковий капітал є корисним для компанії на прийнятні терміни, це обмеження не застосовується (і навіть після вичерпання цього завжди є можливість для випуску нових акцій).

Розглядаючи питання дивідендів з точки зору акціонерів, резонно припускати, що покупець акцій керується деяким очікуванням дивідендної політики. Якщо це очікування не виправдовується, то буде зміна в оцінці акцій інвесторами.

Належна дивідендна політика, таким чином, є важливою у створенні клієнтури інвесторів, і непередбачені зміни можуть мати шкідливий вплив на сприйняття вартості компанії. Отже, інвестори обиратимуть ті акції, де дивідендна політика узгоджується з їхньою податковою ситуацією.

Тому фінансовий менеджмент компанії повинен уважно аналізувати можливі ефекти від сприйняття інвесторами будь-яких повідомлень про дивіденди, особливо якщо це може тлумачитися як зміна в дивідендній політиці. Якщо зміна потрібна, то вкрай необхідно, щоб в належний час були пояснені її причини – акціонери сприйматимуть рішення, якщо ті зроблено ясно, вчасно і для їхньої вигоди у віддаленій перспективі. Ефективний ринок сприйматиме заяви та дії, призначені публіці, але не бажання та думки менеджерів компанії.

2.5.2 Вартість капіталу

Зараз загальноприйнятим є те, що техніка дисконтованих грошових потоків для оцінювання проектів значно переважає використання простого підходу повернень або підрахунку норм прибутку. Підхід доданої вартості для акціонерів дає подальше покращення цієї техніки. Проте використання цих технік потребує обчислення проектної вартості капіталу. За невідомої належної дисконтної ставки підходи, що використовують чисту сучасну вартість (ЧСВ) або внутрішню норму прибутку (ВНП), не мають сенсу.

Хоча існує багато методів фінансування компанії, вони у широкому розумінні розпадаються на дві групи, пов'язані з капіталом та боргом. Вартість капіталу, що обговорюється далі, матиме тенденцію бути більшою за вартість боргу, частково через більш сприятливий податковий режим боргу. Це призводить до істотних дискусій при визначенні коректної вартості капіталу, яка має застосовуватися, тому що середньозважена вартість капіталу (СЗВК) буде дуже чутливою до відношення боргу до власного капіталу в балансовому звіті. В традиційній школі робився наголос на визначенні розміру боргу компанії, який вона витримуватиме без ризику банкрутства в умовах різкого спаду. Наприкінці 1950-х років — початку 1960-х років традиційну школу критикували Модільяні і Міллер [16], які дотримувалися того, що важіль не має значення, що кожне збільшення боргу веде до компенсуючого збільшення вартості капіталу. Ці думки надалі були розвинені у *моделі оцінювання капітальних активів* (Capital Asset Pricing Model, CAPM), яка намагалася представити чіткий підхід до розуміння взаємодії ризику і прибутків.

Вартість акціонерного капіталу

Вартість акціонерного капіталу являє оцінку капіталу з погляду можливостей – розмір упущеної інвесторами вигоди при інвестуванні у цей проект, а не в альтернативні цінні папери.

Природно, що ринок має винагороджувати за додатковий ризик, який беруть на себе власники капіталу. (Існують інвестори, які отримують задоволення від азарту і виграшу на ставках, отже, немає гарантії, що всі віддаватимуть перевагу стабільному прибутку та цінами перед волатильними.) Безперечно, існує багато інвесторів, які відсторонюються від інвестування у акціонерний капітал, тому що вони не можуть дозволити собі багато на шляху потенційних втрат. Тому варто очікувати винагороду за за акції з точки зору попиту і пропозиції.

Згідно загальноприйнятого підходу до вартості акціонерного капіталу,

вартість акціонерного капіталу =

= безризикова ставка + премія за ризик акцій.

Обов'язковою відправною точкою повинен бути огляд історичних норм прибутку за цінними паперами. На практиці звичайним є використання ринкових індексів або наборів типових цінних паперів для цих цілей.

Вибір історичного періоду Історично підтверджується, що акції приносять більший прибуток, ніж інвестиції з фіксованим відсотком протягом достатньо довгого періоду часу. Це справедливо для багатьох світових фондових ринків. Проте існує істотна мінливість у рівнях цін, і з урахуванням інфляції були випадки, коли після купівлі на піку доводилося чекати 15 років для повернення портфеля на цей рівень.

Що стосується минулої прибутковості, більшість коментаторів погоджуються в тому, що дані для використання потрібно брати з якнайдовшого періоду, за умови, що вони достатньо однорідні. Зрозуміло, що якщо природа складових портфелю, який аналізується, істотно змінюється, то більше підходить певна підмножина даних.

Може існувати можливість покращувати корисність даних, застосовуючи результати, взяті більш часто, наприклад, щомісячні замість щорічних доходів. Проте важливо інтерпретувати такі дані з обережністю, щоб виключити безсумнівні відхилення (такі як сезонні компоненти) і статистичні фактори (такі, як міра волатильності).

Реальні і номінальні ставки Одне джерело неоднорідності може бути усунено, якщо аналізувати реальні, а не номінальні ставки. Таким чином, у той час як безризикові відсоткові ставки можна визначити на номінальній основі (у такому випадку можна використовувати умовну фіксовану відсоткову ставку на термін, подібний довжиною до проекту), альтернативою можуть слугувати реальні прибутки; в такому разі можуть бути використані прибуток та зв'язані з ним надходження.

Проте усунення дійсної інфляції не направлено на введення премії за інфляційний ризик, яка міститься в ставках, що спостерігаються. З цієї причини, напевно більш прийнятно розкладати історичні дані на два елементи – безризикову ставку (яка зазвичай береться як прибуток на казначейські векселі або інші короткострокові державні позики) та премію за ризик. Встановлюючи середню премію за ризик з історичних даних, ми можемо оцінити майбутню потрібну вартість як існуючу поточну (або очікувану) безризикову ставку плюс очікувану (середню) премію за ризик. Таким чином, багато практиків будуть влаштовувати, щоб премія за ризик відображала їхні погляди стосовно важливості минулого досвіду для майбутніх обставин.

Ясно, що вибір реальних, а не номінальних ставок має відображатися в природі грошових потоків, що проектуються для дисконтування. Реальні грошові потоки мають бути дисконтованими за реальною нормою прибутку, у той час як номінальні грошові потоки потребуватимуть номінальну норму прибутку для дисконтування. Тут ми припускатимемо, що ми зацікавлені у визначенні реальної дисконтної ставки, яка використовуватиметься разом з грошовими потоками, визначеними на основі теперішньої вартості грошей без урахування майбутньої інфляції цін. Проте для деяких цілей, особливо коли розглядається фінансування проекту, може бути більш прийнятним урахувати майбутню цінову інфляцію в грошових потоках і (коли це потрібно) у фінансових виплатах. У цьому випадку має використовуватися номінальна дисконтна ставка, складена з реальної ставки і очікуваного середнього рівня цінової інфляції. Це може давати різні результати, якщо деякі потоки грошей не зростатимуть з ціновою інфляцією.

Типові результати Одне з найбільш доступних досліджень у Великій Британії – це дослідження Barclays Capital Equity-Gilt. Зі спостережень за прибутками та дивідендами у цьому дослідженні підраховано реальний історичний прибуток на акції у розмірі 5 %. За припущення безризикової відсоткової реальної ставки у 1 % або 2 %, це дає величину премії за ризик за акціями у розмірі 3-4 %.

Точність, з якою підраховано ці числа, не є прийнятною, адже за допомогою інших методів можна одержати, що реальний прибуток за акціями складає 11-12 %. Підрахунок вказаної вище цифри у 5 % базується на періоді з 1918 року до теперішнього часу і фактично є зростанням індексу з урахуванням реінвестування дивідендів за цей період, з поправкою на інфляцію. Якщо просто обчислити середній прибуток за умови інвестування 1 щороку, то наявний прибуток з акцій буде значно більше 10 %. Безпосередньою причиною цього є вплив волатильності акцій, як в індексному фонді: якщо ціни падають удвічі, то тільки половину суми можна інвестувати в наступному році. Математично довгостроковий показник прибутковості акцій подібний до середнього геометричного, я середній річний прибуток подібний до середнього арифметичного. Кожен математик знає той факт, що середнє арифметичне завжди більше за середнє геометричне.

Наведені міркування призначені застерегти читача від будь-яких спроб досягти надмірної точності там, де присутні ризик і невизначеність. Більш важливо розуміти принципи, ніж формально слідувати математичним правилам. У решті решт, дисконтні ставки, які ми використовуємо, мають бути підраховані лише наближено, оскільки головною метою є порівняти проекти один з іншим, а не оцінити їх точно. В усій актуарній роботі найбільш важливими мають бути слушність підходу та застосування здорового глузду.

CAPM та специфічний ризик

Далі необхідно порівняти показники окремої компанії та ринкових індексів, з яких обчислюються історичні прибутки.

Ринковий портфель акцій потерпає від високого ступеня волатильності. Стандартне відхилення річних прибутків на британському фондовому ринку на реальній основі становить приблизно 20 %. Так само зрозуміло і з одноденних спостережень, що на фондовому ринку не всі акції рухаються одночасно в одному напрямку і з однаковою швидкістю.

Як добре відомо, диверсифікація знижує ризик. А саме: дисперсія (або стандартне відхилення) прибутків, що спостерігаються для окремого цінного паперу, відрізняється (і зазвичай більша) від загальноринкової. Це є наслідком того факту, що прибутки від окремих цінних паперів типово не є повністю корельованими. Таким чином, дисперсія, що дається виразом

$$\sum_i \sum_j x_i x_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j,$$

де x_i, x_j є частками цінних паперів i та j у власності, σ_i та σ_j є стандартними відхиленнями їхніх прибутків, а ρ_{ij} є коефіцієнтом кореляції між прибутками за цінними паперами i та j.

Це вирішує питання стосовно того, як волатильність прибутків за окремою акцією пов'язана зі середньою по ринку. Модель оцінювання капітальних активів (CAPM) забезпечує логічно послідовний теоретичний підхід до вивчення цього питання. У CAPM волатильність ціни цінного паперу поділяється на дві частини: специфічний ризик та систематичний ризик. Теоретично специфічний ризик можна усунути за допомогою диверсифікації у достатньо великому і різноманітному портфелі, залишаючи при цьому систематичний ризик, що є волатильністю ринку в цілому.

Ми можемо порівняти окремі цінні папери з усім ринком, оцінюючи бету (β) цінного паперу. Для компанії i:

$$\beta_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2},$$

де σ_m^2 є дисперсією фондового індексу, а σ_{im} є коваріацією між прибутком за окремим папером і прибутковістю ринку. Альтернативним виразом для бети є

$$\beta_i = \rho_{im} \frac{\sigma_i}{\sigma_m}.$$

Значення бети, більші за 1, вказують на те, що папір історично перебільшував показники ринку (позитивні або негативні). Бета, близьке до нуля, вказує на те, що цінний папір забезпечував більш стабільний прибуток, ніж ринок в цілому. Від'ємне значення бети означає, що поведінка паперу була антициклічною, протилежною до загальної поведінки ринку.

Таким чином, бета може розглядатися як міра систематичного ризику, пов'язаного з конкретним цінним папером, і ми можемо оцінити вартість основного капіталу для конкретної компанії як

$$r_f + \beta(r_m - r_f),$$

де r_f є безризиковою ставкою, а $(r_m - r_f)$ є ринковою премією за ризик.

Систематичний ризик Існують поважні причини, чому ми залишаємося з істотним ступенем систематичного ризику. В основі бізнесової активності лежить певний цикл, що впливає на весь бізнес одночасно.

Різні сектори бізнесу можуть зазнати впливу раніше або пізніше протягом бізнесового циклу, тому галузева диверсифікація є важливою. Диверсифікація за кордоном також може бути корисною, бо не всі економіки рухаються за тим же самим циклом. Навіть з диверсифікацією за кордоном існує значний ступінь систематичного ризику, тому що в цілому міжнародна економіка є дуже незалежною.

Відсоткові ставки є другим економічним чинником, що впливає на весь бізнес. Вони впливатимуть на різні бізнеси в різному ступені залежно від їхнього рівня заборгованості, створюючи специфічний ризик. Міжнародний бізнес знаходитиметься під різним впливом, оскільки відсоткові ставки можуть змінюватися від країни до країни через поточні невизначеності та стани місцевих економік.

Тісно пов'язаним з відсотковими ставками є темп інфляції. Інфляція може впливати на компанії по-різному, але в цілому зростання інфляції зменшуватиме короткострокові прибутки. Тим не менш, у довготривалому періоді зростання цін відновить маржу та прибутки, що утримують темпи разом з інфляцією. Жодна компанія не може сподіватися обминути вплив інфляції, отже, це відноситься до систематичного ризику.

Податки, особливо зміни в податках, можуть мати вплив на рівні цін та торкатися всіх компаній, що ведуть торгівлю в пов'язаних з ними країнах, у різному ступені. Міжнародні кризи, війни, ембарго можуть впливати на глобальну економіку.

Природні явища або події, викликані людиною, можуть спричиняти великі непередбачені системні ефекти. Ель Ніньо[2] має великий вплив на економіки деяких країн. Гіпотетичнй землетрус у Токіо, що коштуватиме 100 млрд доларів, значно впливатиме на світову економіку.

Цей список не є вичерпним, але він чітко показує, що є ризик, який є систематичним, а не специфічним для деяких компаній.

Регулювання важеля

Ключовим моментом *моделі оцінювання капітальних активів* (capital asset pricing model, CAPM) є те, що для окремої акції

$$\text{Вартість акціонерного капіталу} =$$
$$= \text{безризикова ставка } + \beta \cdot \text{ринкова премія за ризик}.$$

Однак, зауважимо, що оцінки бети для компанії, що зроблені за допомогою регресії рухів ціни акції відносно рухів ринку, змінюватимуться протягом періоду часу, в який ці оцінки робляться. До того ж, внутрішні оцінки для бети будуть дуже розкидані через велику стандартну похибку, пов'язану з регресією.

Одним можливим шляхом покращення оцінки є використання *індустріальної* бети, що базується на групі схожих компаній. Під схожістю ми більше розуміємо те, що вони займаються схожою діяльністю, оскільки природа їхньої діяльності впливатиме лише на *діловий*, або бізнесовий, ризик компанії або індустрії. Географічний оперативний простір також є важливим, але ми повинні впевнитися, що компанії стикаються зі схожим *фінансовим ризиком* – тобто що вони мають схожу структуру капіталу. Грубі значення бети, отримані з історичних спостережень, зазнають впливу фінансового важеля, тому потрібно врахувати це в обчисленнях.

У той час як в оригінальній статті Міллера та Модільяні обґрунтовано те, що вартість капіталу не повинна залежати від

[2]Ель Ніньо (ісп. *El Niño* – хлопчик) разом з Ла Нінья (ісп. *La Niña* – дівчинка) є природними феноменами, що являють собою довготривалі аномальні зміни (Ель Ніньо – потепління, Ла Нінья – похолодання) температури поверхневих вод у східній частині Тихого океану.

рівня важеля, прийнятого компанією, вони згодом уточнення для ситуації, коли податки сплачуються. Зокрема, вони одержали формулу, яка пов'язує бету "з важелем" із бетою без важеля:

$$\beta_d = \beta_0\big(1 + d(1 - t)\big),$$

де β_d – бета для компанії з рівним d відношенням борг/акціонерний капітал, β_0 – бета для компанії з нульовим важелем, t – ставка податку. Підкреслимо, що у даній формулі мають використовуватися *ринкові*, а не *балансові* значення боргу і акціонерного капіталу.

Вплив структури капіталу на вартість капіталу

Нам тепер потрібно розглянути вартість позичкового капіталу, який використовує компанія. Вартість позик буде різною для різних компаній залежно від їхньої кредитоспроможності, яка часто визначається як кредитний рейтинг. Вартість боргу має бути пов'язаною з кредитним рейтингом. Гранична вартість боргу має зростатиме, якщо заборгованість компанії підвищується, через несприятливий вплив на рейтинг компанії.

При прийнятті рішень стосовно належної вартості, потрібно оцінити, що має значення – гранична вартість чи середня вартість. Гранична вартість додає складнощів. Якщо для сприяння фінансуванню проекту залучається новий борг, то доцільно використовувати граничну вартість.

Кредитор дивитиметься на передбачене забезпечення і ключовими цифрами тут будуть коефіцієнт покриття, що дається як відношення чистих активів до позиченої суми, прибутки перед сплатою податків, та відношення отриманих відсотків і відсотків за позикою. Агенції кредитних рейтингів будуть оцінювати ризик дефолту, який залежатиме від рівня покриття відсотків і волатильності потоку прибутків. Тому бета може безпосередньо впливати на кредитний рейтинг, оскільки велике значення бети вказуватиме на більш волатильні прибутки. Бета зростатиме із зростанням рівня важеля. Виникне точка, за якою подальше позичання збільшуватиме середню вартість капіталу, через ці вторинні ефекти. При зниженні кредитного рейтингу компанії сплачуватимуть за борг більше.

Вплив податків

Позичковий капітал може звичайно компенсуватися прибутками і слугувати для зниження ефективної вартості боргу. Нова компанія може бути у стані неприбутковості і, таким чином, є в невигідному становищі. При оцінюванні вартості боргу необхідно зробити припущення щодо того, коли будуть надходити прибутки. Для відображення затримки може бути використана знижена ставка податкових стягнень.

Середньозважена вартість капіталу

Обчислюючи середньозважену вартість капіталу, враховують як борг, так і власний капітал, тому результат буде нижче вартості акціонерного капіталу. Відповідна формула має вигляд

$$\text{СЗВК} = (1-g)\cdot \text{вартість акціонерного капіталу} + \\ + g \cdot \text{чиста вартість боргу},$$

де g – частка боргу, що визначається як

$$g = \frac{\text{значення боргу}}{\text{значення акціонерного капіталу} + \text{значення боргу}}.$$

Як і вище, тут використовуються *ринкові*, а не *балансові* значення боргу і акціонерного капіталу.

2.5.3 Оцінка капітального проекту

Компоненти структури капіталу

Під капітальним проектом ми розуміємо будь-який проект, де є початкова витрата, а потім, при здійсненні проекту, потік прибутків, з яких віднято поточні витрати. Капітальний проект не має включати побудову фізичного активу.

Нові проекти, які розпочинає компанія, що потребують значних ресурсів в межах і поза межами звичайного бюджету, типово будуть предметом певної перевірки витрат для впевненості, що доходи перевищуватимуть витрати. Але коли витрати перевищують доходи довше досить короткого періоду, швидко виникає потреба у механізмі, що враховує часову вартість грошей, щоб розглядати вартість грошей будь-якого проекту та порівнювати з альтернативними проектами. Буде потрібен капітал для фінансування цих проектів і потрібні кошти для підтримки такого капіталу. Вартість капіталу є мірою цих коштів, вираженою як річна відсоткова ставка.

Головною ціллю початкової експертизи запропонованого капітального проекту є визначення, чи проект здатний задовольнити критерії, що встановлюються організацією-спонсором для проектів, які вона готується затвердити. Ці критерії будуть типово виражатися в термінах очікуваних фінансових результатів та (іноді) ризику, що цих результатів не буде можливо досягнути. Проте, на практиці може бути багато додаткових критеріїв, зокрема:

- досягнення синергізму (явища в діловій практиці, коли загальний результат переважає суму окремих ефектів) або сумісності з іншими проектами, до яких вдається спонсор;
- задоволення "політичних обмежень" організації-спонсора та інших;
- наявність достатньо високого потенціалу;
- найкраще використання фінансових і управлінських ресурсів за умов нестачі.

Протягом процесу експертизи потрібно дослідити ризики, з якими пов'язаний проект, та прийти до бачення найкращого шляху пом'якшення ризику, беручи до уваги включені в проект витрати. Залишкові ризики мають бути описані задля блага спонсорів, кредиторів та інвесторів, щоб вони могли врахувати ці ризики в процесі прийняття рішень. Оскільки детальний аналіз є коштовним процесом, необхідно, щоб аналіз був ітеративним, з використанням складніших оцінок тільки після того, як стає зрозумілим, що зусилля виправдані.

Першим кроком є уважне визначення проекту та його меж і оцінювання його ймовірної тривалості життя для цілей експертизи. Потім мають бути оціненими найбільш імовірні потоки грошей для капітальних витрат, поточних витрат, доходів та кінцевих витрат. Ці грошові потоки мають бути вираженими в термінах сучасної вартості грошей із виключенням фінансування таких витрат, як відсотки, амортизація, наслідки цінової інфляції, тощо. Однак, якщо очікується, що будь-які грошові потоки зростатимуть в реальному численні (наприклад, відповідно до зростання зарплат, а не цін), то це повинно бути враховано. У грошових потоках має бути враховано ефекти, що впливають на іншу діяльність або витрати спонсора. Точне визначення та оцінювання найбільш імовірних грошових потоків є ключовим для успіху подальшої роботи, позаяк воно утворює основу. Велику увагу потрібно приділити тому, щоб усі зроблені припущення були ретельно задокументовані.

Методи оцінювання проектів

Використовуючи ці потоки, наступним шагом буде зробити дуже грубу початкову оцінку ймовірного фінансового результату від здійснення проекту. Зазвичай використовується метод дисконтованих грошових потоків.

Чиста сучасна вартість (ЧСВ) Метод ЧСВ полягає у моделюванні всіх потоків грошей проекту до його закінчення та дисконтуванні їх на теперішній момент за допомогою вартості капіталу. Якщо результат позитивний, то проект підвищуватиме доходи акціонерів. Найкращим буде точне врахування ризику в моделі, так що компанія дивитиметься на середньозважену по сукупності сценаріїв ЧСВ.

Компанії потрібно приймати до уваги її терплячість до ризику при прийнятті рішення про фінансування проекту. Таким чином, дисконтна ставка, що використовується, може бути різною для різних типів проектів. Деякі компанії дотримуються менш строгого погляду на малі витрати і вимагають більших ставок для великих витрат.

Внутрішня норма прибутку (ВНП) Це суттєво той самий метод обчислення, що й ЧСВ, з тою відмінністю, що замість дисконтування вартістю капіталу, чиста сучасна вартість проекту прирівнюється до нуля, і рівняння розв'язується відносно відсоткової ставки. Цей метод корисний тим, що він висуває на передній план прибуток, якого досягає проект. Якщо це вище за вартість капіталу, тоді проект розглядається далі. Проте, є практичні проблеми, пов'язані з ВНП-підходом:

- можуть бути отримані абсурдні результати, якщо початковий капітал малий, розв'язки можуть бути дуже великі додатні (або від'ємні), або можуть бути два розв'язки, або може взагалі не існувати розв'язку;
- тоді як середня за сукупністю сценаріїв чиста сучасна вартість може бути знайдена простим підсумовуванням вартостей сценаріїв, помножених на їхні ймовірності, те саме невірно для внутрішньої норми прибутку.

Треба зауважити, що рівняння для ВНП може мати декілька розв'язків, особливо якщо є від'ємні грошові потоки в певні моменти протягом дії проекту або при його закінченні. Це робить ВНП менш популярною, ніж ЧСВ, мірою вартості проекту.

Незважаючи на ці проблеми, внутрішня норма прибутку може бути єдиним зручним методом.

Річна витрата капіталу Цей метод виражає капітальні затрати як річну витрату, відтак розписуючи капітал рівномірно по роках. Цю витрату потім можна відняти від прибутків і, якщо чистий результат додатний, проект або капітальні витрати розглядаються далі. Цей метод корисний тим, що він вказує вплив інвестицій на потік доходів компанії. Короткостроковий вплив на прибутки може бути дуже чутливим до обставин, що зовсім зрозуміло. Цей метод працює добре при розгляді капітальних витрат на машинне обладнання або заводи та вигідний з точку зору простоти та легкого розуміння. Його не треба відкидати тільки з тієї причини, що доступні більш складні методи.

Метод акціонерної вартості Акціонерна вартість являє собою сучасну вартість усіх очікуваних поточних та майбутніх грошових потоків, доступних акціонерам.

Метод акціонерної вартості базується на ЧСВ-підході, але розширює його. Істотна відмінність цього методу є в тому, що він дивиться на проект більше з точки зору інвестора і менше на внутрішні фактори, що керують привабливістю проекту. Тому він є системним методом, а не інкрементальним, який діє за наростаючою і зосереджений тільки на самому проекті.

Спосіб, в який працює метод, концептуально є дуже простим. Загальна вартість компанії вивчається на основі "до і після". Потрібно зрозуміти, якими засобами компанія оцінюється ринком у поточний час.

У залежності від галузі, відношення цін до прибутків або цін до чистих активів можуть підказувати те, яким є стан компанії порівняно з конкурентами. Співставлення ключових характеристик з тими, що мають конкуренти, допомагатиме визначити положення компанії на ринку. Різниця у рейтингу є оцінкою, яку ринок дає здатності менеджерів нарощувати прибутковість бізнесу. Якщо вони мають високу довіру, то капіталізація компанії буде високою відносно тих, що рівні з нею за статусом.

Потім до нового проекту або придбаної компанії застосовують підхід доданої вартості і розглядають всі вищевказані підходи до оцінювання, щоб побачити наявний вплив. Вплив на чисту вартість активу, майбутні прибутки і покриття боргу можна визначити відносно легко, після чого додати до моделі компанії сценарії грошових потоків, розроблені для методу ЧСВ. Тепер починає діяти важливий елемент процесу додавання вартості, оскільки потрібно оцінити вплив нового проекту на рейтинг компанії. Серед речей, які потрібно оцінити, мають бути:

- вплив на положення відносно конкурентів;
- можливі реакції конкурентів і зміна рівня конкуренції;
- вплив на сприйняття менеджменту;
- вплив на сприйняття аналітиків;
- вплив на кредитний рейтинг;
- приріст або зниження рентабельності;
- вплив на дивідендну політику;
- вплив на бету акції.

Долучення нового проекту до бізнесу може впливати на всю манеру сприйняття бізнесу і відтак фундаментально змінити рейтинг акцій. Підхід доданої вартості намагається холоднокровно дивитися на позиції компанії до і після, а результатом, що вимірюється, є зростання вартості акцій для наявних інвесторів. Підхід акціонерної доданої вартості дає вражаючі можливості для актуаріїв, оскільки він по суті є дуже складним і вдосконалюється від точного математичного моделювання всіх взаємозв'язків і циклів оберненого зв'язку, яке гарантує, що всі наслідки проекту продумані. Це дає далекоглядному менеджменту можливість прийняти нові вражаючі лінії поведінки, які добре сприймаються ринком і які могли бути упущеними, якщо б проект оцінювався на вузькій основі, тобто розглядали б тільки його.

Інші вживані методи

Окупність Для багатьох компаній вирішальним є грошовий потік, тому швидкість, з якою компанія може відшкодувати початкові інвестиції, є життєво важливою. Для малих швидкозростаючих компаній, яким важко дістати позику і в яких вже багато акціонерів, окупність стає ключовим фактором. Період окупності визначається як час, потрібний для того, щоб накопичений грошовий потік став нульовим.

Проекту з більш швидким періодом окупності буде надано перевагу. Альтернативно метод може бути використаним, щоб ідентифікувати проект, який породжує найбільше фондів за конкретний період, скажімо, за 3 роки. Метод має відносно мале значення там, де термін окупності набагато більший трьох років.

Номінальні доходи Це є варіантом окупності, коли просто порівнюють відношення утвореної готівки до спожитих грошей протягом певного періоду. Це дає приблизну уяву про відносну рентабельність проектів та є адекватним підходом, коли можна швидко побачити, що відношення велике. І тут термін, відносно якого робиться таке оцінювання, має бути коротким.

Стратегічна відповідність Стратегічна відповідність нормально утворюватиме частину будь-якого проекту, оскільки кожен проект потрібно поставити у логічну відповідність бізнесу, виходячи з його меж компетенції, ресурсів і споживчої бази. Іноді нове нове прибуття в діловий сектор не можна обґрунтувати з чисто фінансової точки зору, але але воно робиться через погляд на шлях, в якому рухається індустрія.

Існує паралель з методами, висвітленими вище, коли враховуються кілька сценаріїв. Різниця тут у тому, що вибирається конкретний сценарій майбутнього бізнесу і розробляється бізнес-відповідь на припущення, що ці прогнози виправдаються. Подібні інвестиції можуть пожинати великі плоди, якщо майбутнє розвивається так, як передбачалося, і також є можливості здобути фору, будучи попереду всіх. Якщо обставини не складаються, як очікується, проект має піддаватися ретельному спостереженню, щоб обмежити потенційні втрати. В галузі страхування ми бачимо протягом останніх десяти років значні зміни в методах розподілу, і багато інвестицій, що робляться, можуть бути виправданими тільки на стратегічному ґрунті.

Отже, якщо бізнес "робить правильні речі", то потрібний прибуток є побічним продуктом, а не вирішальним фактором. Сферою актуаріїв є розвиток більш витончені моделі, що будуються на основі в точності цих "важких для виміру" вигід. Справді, будь-який проект може разом з цим приносити невідчутні вигоди, які можливо оцінити, якщо докласти достатніх розумових зусиль.

Ціна можливості Є дуже простим зробити проект, що може задовольняти бізнесові критерії для прийняття, але який не є найкращим шляхом подальшої діяльності. Може існувати певна альтернативна можливість, яка навіть краще, але не розглядалася. Метод ціни можливості запитує: "Якими є альтернативні шляхи вкладення цих грошей і яких прибутків можна при цьому досягти?"

Крім користі, яку цей метод дає для допомоги визначення кращих альтернатив, він також у деяких випадках може виправдати витрати, коли є надлишок капіталу, який з певних причин неможливо інвестувати, щоб мати прибуток розміром ціни капіталу. В інтересах компанії може бути інвестувати в цей проект доти, доки він дає кращий прибуток, ніж альтернатива з подібним ризиком, навіть якщо цей прибуток менший за справжню ціну капіталу. Потрібно пам'ятати, що повернення капіталу акціонерам є можливим варіантом, але можуть бути фрикційні витрати, якщо компанія захоче залучити капітал у деякий майбутній момент.

Це не є в дійсності новим методом, оскільки всі його частини можна включити в основні методи; відмінність полягає саме у тому, що він фокусує увагу на альтернативах.

Порогова рентабельність Це знов не є новим методом, бо він може використовуватися як частина попередніх методів. Наголос є на тому, що компанія встановлює цільову норму дохідності, або порогову рентабельність. Типово вона може бути досить високою і помітно перевищувати справжню вартість капіталу. Наприклад, компанія може встановити цільовий прибуток за капіталом на рівні 20 %, щоб зосередитися тільки на найбільш прибуткових проектах. Тільки проекти з додатною дисконтованою 20-ма % ЧСВ або ж з ВНП, що перевищує 20 %, повинні проходити перший відсів.

У реальності, у проекті-переможці, скоріш за все, наголос буде зроблено на потенційних прибутках для демонстрації високого доходу, але ризик буде недооціненим. Дійсно отриманий прибуток в прийнятих проектах схильний тому бути значно нижчим, ніж у бізнес-плані. Підхід має перевагу в тому, що виділяються проекти зі справді високим потенціалом, які, якщо ними добре керують, будуть приносити великі прибутки. Зворотним боком монети є те, що багато чудових менш ризикових проектів, які приносили б хороші доходи вище вартості капіталу (але нижче порогової рентабельності), ніколи не розглядатимуться.

Були опитані компанії різних розмірів стосовно норм дохідності. Виявилося, що середнє порогове значення для ВНП становить 17,1 %, що дуже багато порівняно з довгостроковим прибутком, досягнутим за акціями.

Оцінювання ризикових проектів Там, де природа проекту є такою, що майбутні грошові потоки мають дуже високий ступінь невизначеності, нам потрібно розглянути альтернативні методи оцінки проектів.

Моделювання

Змоделювавши проект з метою його оцінити, ми можемо бажати застосувати *аналіз чутливості* (sensitivity analysis), щоб побачити, як вартість проекту змінюється за різних майбутніх обставин. Ми беремо кожне ключове припущення і оцінюємо його вплив на ЧСВ в умовах, коли з'являються найбільш оптимістичні і найбільш песимістичні результати. В такий спосіб ми можемо визначити ті змінні, які мають найбільший вплив на результати проекту, і тому визначити, де потрібно найбільше інформації (і коли прогнози неприйнятні, суперечливі або несумісні).

Проте аналіз чутливості не дозволяє нам розглядати взаємовідносини між вхідними змінними. Щоб зробити це, нам потрібне "тестування сценаріїв", де ми розглядаємо певну правдоподібну комбінацію вхідних даних і дивимося, який вплив вона матиме на проект. Але навіть у тестуванні сценаріїв використовується обмежена кількість правдоподібних комбінацій, які можуть включати найбільш оптимістичний та песимістичний сценарії, а можуть і ні. Щоб розглянути всі можливі комбінації, нам потрібно використати моделювання.

Тут ми оглянемо в цілому розподіл можливих результатів проекту. Для цього нам потрібні:

- *Модель проекту* (зазвичай комп'ютерна), що дає взаємозалежності та серіальні кореляції.
- *Визначення ймовірностей* для розподілів ключових змінних (можливо, досліджених за допомогою тестування чутливості).
- *Моделювання грошових потоків* багаторазово, з використанням значень, взятих випадково з розподілів можливих вхідних змінних.
- Запис і впорядковування вихідних даних для оцінки їхніх імовірнісних розподілів.

Проте зауважимо, що ці процеси критично залежать від:

- відповідної конструкції моделі;
- відповідних оцінок імовірнісних розподілів вхідних даних.

Зазначене вище є окремою проблемою, коли будівник моделі не знайомий з областю, що моделюється.

Імовірнісні дерева Часто проект складається з численних інвестиційних рішень, рознесених у часі, причому вибір, доступний у певний момент, залежить від рішень, зроблених на більш ранніх стадіях, так що початкові рішення будуть обмежувати майбутній вибір (але не остаточно зв'язувати нас у майбутніх діях). У той самий час, пізніші рішення можуть бути зроблені так, щоб отримати вигоду від попереднього досвіду та умов, що переважають зараз. Метод імовірнісних дерев дозволяє досліджувати проекти, що мають таку структуру, в якій часткові оцінки ймовірностей майбутніх подій можуть бути вдосконаленими у світлі початкового досвіду.

Ймовірнісне дерево будують так:

- відображають можливі вибори, починаючи з початкового рішення за проектом, та відгалужують від нього зображення всіх можливих майбутніх виборів;
- приписують оцінки майбутніх грошових потоків до кожного майбутнього вибору;
- оцінюють імовірності для кожного грошового потоку;
- використовують стандартні обчислення математичних сподівань, приєднуючи як часову вартість грошей, так і ймовірності, щоб оцінити оптимальні вибори в кожний майбутній часовий період;
- працюють з кінця, з останнього рішення, до сьогодення, щоб встановити найкращий (тобто такий, що дає найвищу ЧСВ) шлях.

Надійний еквівалент Якщо рівень ризику може змінюватися відповідно до природи конкретної речі, що оцінюється, ми повинні використовувати суттєво різні дисконтні ставки для кожного елементу. Щоб уникнути цього, окремі (ризикові) грошові потоки, що проектуються, замінюють їхніми *надійними еквівалентами* – тобто у проектованому елементі грошового потоку робиться поправка лише на ризик. Таким чином створюють серію "надійних" грошових потоків, які потім можуть дисконтуватися за єдиною нормою прибутку.

Результати оцінювання Зазвичай результат обчислення ЧСВ має сприйматися як задовільний, якщо він є додатним, а результат обчислення ВНП – якщо він перевищує заздалегідь встановлену спонсором "порогову рентабельність". Період окупності має сприйматися як задовільний, якщо він коротший за заздалегідь вказаний спонсором період.

Результати цих обчислень дають грубу первісну оцінку фінансової життєздатності проекту. Грубу уяву про чутливість результатів до змін у припущеннях можна отримати, припускаючи, що всі витрати стають (скажімо) на 10 % вищими, ніж найбільш вірогідні величини, а всі доходи стають (скажімо) на 10 % меншими за найбільш вірогідні величини. Отримані результати можуть показувати (якщо вони незадовільні), що подальший аналіз не потрібен без певних фундаментальних змін у проекті. Якщо ж, однак, результати задовільні, то не достатньо зупинятися на цьому, а потрібно провести належний аналіз ризику, як вказано нижче.

На початкових етапах аналізу зазвичай є доречним виключення від'ємних грошових потоків, пов'язаних з корпоративним податком, оскільки вони залежатимуть від прийнятого методу фінансування. На кінцевому етапі, коли підготовлюють представлення інвестицій, від'ємні грошові потоки, що виникають у зв'язку з корпоративним податком, можуть бути оцінені (враховуючи відповідні часові запізнення при зборі податків) та дисконтовані, щоб одержати належне зниження ЧСВ.

Аналіз і управління ризиками

Ми побачили, як дисконтна ставка має враховувати систематичний ризик. Імовірнісний ризик треба враховувати через аналіз специфічного ризику. На практиці іноді складно визначити, у яку з цих двох категорій має потрапляти специфічний ризик, але потрібно протистояти спокусі класифікувати багато ризиків як систематичні для зменшення аналітичної роботи.

Коли ми користуємося словом "ризик", ми розуміємо або подію, що призводить до зміни від найбільш вірогідного результату в будь-якому напрямі (наприклад, ризик руйнації конструкції), або ймовірність такої події. Багато ризиків є негативними, тому що вони погіршують наслідки проекту, коли трапляються, але аналіз має врахувати можливі сприятливі зміни таким самим чином.

Щоб діяти з ризиками, що притаманні даній діяльності, перш за все нам потрібно *ідентифікувати* їх. Потім нам потрібно *аналізувати* їх, оцінюючи частоти появи і наслідки при їхній появі. Ми повинні тому розглянути можливості *пом'якшення* ризиків втрат зменшенням частоти появи, або зменшенням несприятливих наслідків при їхній появі, або обома способами. Наступний крок – розглянути вартості можливих пом'якшувальних варіантів, щоб побачити, чи є вони фінансово життєздатними, чи ні, і тоді виділити найкращу комбінацію пом'якшувальних варіантів. Залишкові ризики є тими, які повинні прийняти спонсори й інвестори. В цій точці потрібне рішення, чи продовжувати з проектом, чи ні. Якщо це так, то нам потрібний контроль залишкових ризиків, через ряд заходів, який включає:

- регулярне стеження за ринками;
- плани дій при передбачених та непередбачених змінах;
- призначення ризикових наглядачів;
- регулярні огляди менеджменту.

Отримання розподілів ЧСВ

Існують два основні шляхи, якими можливо отримати ймовірнісний розподіл ЧСВ для проекту в цілому. Перший – це побудова серії сценаріїв майбутнього, кожен з яких представляє комбінацію можливих наслідків для головних ризикових подій і має свою ймовірність появи, яка одержується комбінацією ймовірностей різних незалежних компонент ризику.

Наслідки, відібрані для цілей сценарного аналізу, часто є середніми точками областей можливих значень; наприклад, якщо існує 80 %-вий шанс, що капітальні витрати лежатимуть між 40 та 42 млн фунтів, та 20 %-вий шанс, що вони лежатимуть між 42 та 50 млн фунтів, можна змоделювати два підсценарії, де у першому витрати становлять 41 млн фунтів з імовірністю 80 %, у другому – 42 млн фунтів з імовірністю 20 %. Якщо кожен з цих двох підсценаріїв для витрат капіталу був би скомбінований зі, скажімо, 4 сценаріями валового доходу та 3 сценаріями поточних витрат, ми б згенерували загалом $2 \times 4 \times 3 = 24$ сценарії.

Іноді можна здійснити простий аналіз сценаріїв узагалі без використання комп'ютера. Для кожного сценарію підраховується ймовірність його появи і ЧСВ при появі. За припущення, що сценарії охоплюють усі можливі наслідки, принаймні значущі, відповідний результат буде давати наближений імовірнісний розподіл ЧСВ проекту.

Другий основний метод – це побудова комп'ютерної стохастичної моделі, у якій моделюються різноманітні ризики, після чого виконується серія імітацій (комп'ютерних моделювань), щоб одержати ймовірнісний розподіл ЧСВ. Хоча іноді цей метод є кращим, практичний досвід показав, що чисельні припущення, які робляться при побудові моделі, є настільки грубими, що часто виникають сумніви, чи можна покладатися на результати зі ступенем довіри, достатнім для виправдання докладених зусиль і витрат. Серйознішою є небезпека втрати ключових факторів і припущень з поля зору при розгляді результатів такої моделі, тоді як зусилля у проведенні ручного сценарного аналізу спонукають аналітика зосередитися на важливих ризиках і припущеннях. Однак, незважаючи на це, порівняно проста стохастична модель може бути дуже корисною для моделювання однієї конкретної діяльності проекту, коли припущення, на яких ґрунтується модель, і її обмеження можна тримати в полі зору.

Після отримання ймовірнісного розподілу ЧСВ для проекту в цілому часто виявляється, що певні отримані ЧСВ є неприйнятно низькі або від'ємні. Деяким з цих несприятливих ЧСВ можуть бути приписані низькі ймовірності появи, і спонсор може бути підготовленим для прийняття цих ризиків. Проте в інших випадках ЧСВ можуть бути настільки несприятливими, що навіть при малих імовірностях появи вони неприйнятні.

Обчислення потрібної норми прибутку для проекту

Використання вартості капіталу для підрахунку чистої сучасної вартості при просіюванні проектів гарантує, що будуть запущені тільки ті проекти, які покращуватимуть дохід акціонерів, за умови, що в ньому є поправка, щоб відобразити ризик проекту.

Історичні дані про вартості існуючого капіталу компанії не є доречними. Що важливе, то це поточна вартість залучення додаткового капіталу для компанії з метою впровадження проекту. Один спосіб – подивитися на цю вартість як на норму прибутку, яка має бути отримана на капітал, щоб існуючі акціонери не отримали ні вигоди, ані невигоди. Можна розсудити (помилково), що потрібно подивитися на джерела, з яких надходитиме додатковий капітал для проекту. Таким чином, якби весь капітал був залученим з внутрішніх резервів або за допомогою випуску нових акцій, вартість капіталу була б рівною загальній нормі прибутку, яку очікувалося б одержувати акціонерами на їхні існуючі акції. Проте, якби весь капітал залучався би позикою з фіксованим відсотком, це була б чиста вартість капіталу після врахування податкових пільг і вірогідної майбутньої інфляції, що потрібно було б взяти за вартість капіталу. Якщо частину капіталу залучено через акції, а частину через позичання, нам потрібно подивитися на середньозважену вартість.

Проте, можна переконливо аргументувати те, що не є суттєвим, звідки у дійсності надходить фінансування конкретного проекту, що розглядається, та що насправді суттєвими є нормальна вартість залучення капіталу для компанії, яка береться як середньозважена з вагами, що базуються на оптимальному для компанії розподілу капіталу на акціонерний і борговий. (Якщо теперішня структура компанії не є оптимальною, то її можна зробити оптимальною окремим рішенням.)

Вартість позичкового капіталу має братися як вартість у реальних термінах нового запозичення для компанії, через взяття відповідної різниці з поточним очікуваним загальним прибутком за індексованими облігаціями, врахування кредитного рейтингу, та множення на $1 - t$, де t – очікувана ставка корпоративного податку. Вартість акціонерного капіталу має братися як загальний очікуваний реальний прибуток за індексованими облігаціями з доданням належної маржі, щоб урахувати додатковий прибуток, яким акціонерні інвестори намагаються компенсувати взяті на себе ризики.

До грошових потоків, виражених у сучасній вартості грошей, треба застосувати саме реальну дисконтну ставку.

Поправка на систематичний ризик

Міра бета пов'язана з *існуючою* діяльністю компанії (або галузі). Нам потрібно розглянути, чи узгоджується притаманний будь-якому проекту ризик із існуючим ризиковим профілем компанії.

Зауважимо, що під "притаманним будь-якому проекту ризиком" ми не розуміємо специфічний ризик (який можна диверсифікувати), що відноситься до наслідків проекту. Якщо ми не впевнені відносно нашої уяви про грошові потоки, нам потрібно уточнити їх та врахувати можливі несприятливі наслідки при підрахунку *очікуваних* грошових потоків, що будуть дисконтовані. Така невизначеність не може бути включеною в наш аналіз простим збільшенням значення бети (і результуючої вартості капіталу).

Однак, припустимо, що компанія розглядає проект зі ступенем систематичного ризику більшим, ніж звичайний для її проектів. "Систематичний" ризик – це та частина прибутку за проектом, яку не можна знищити ні багаторазовим інвестуванням у проекти того самого типу, ні диверсифікацією. Систематичний ризик може змінюватися від одного типу проектів до іншого. Систематичний потрібно врахувати зміною дисконтних ставок, що використовуються в моделі.

Отже, згідно до теорії, дисконтні ставки, що має використовувати компанія, мають бути вищими за ти, які вона зазвичай застосовує. Одна з порад – використовуючи вказану вище методологію, розглянути дисконтні ставки, які підходять для використання всіма компаніями, що зазвичай беруть участь у таких проектах. На практиці такі дані можливо буде важко отримати, і може не бути альтернативи, крім як додати щось довільне до дисконтної ставки.

Частина 3
Фінансова математика

3.1 Вступ

Цю частину підручника присвячено тому розділу фінансової теорії, який описує математичні закономірності випадкового перебігу подій на фінансовому ринку. Цей розділ ще називають фінансовою стохастикою та випадковими фінансами. Фінансовий ринок іноді ототожнюють з фондовим ринком, іноді їх розмежовують з тої точки зору, що на фінансовому ринку торгують лише цінними паперами, а на фондовому – ще й, наприклад, нерухомістю. Фондовий ринок ще називають фондовою біржею. Фондова біржа являє собою ринок різного роду капіталів, на якому відбувається торгівля цінними паперами - акціями, облігаціями, паями и т.п., а також торгівля платіжними документами. Що стосується випадковості, то справа полягає в тому, що на ціни акцій на фінансовому ринку, а точніше, на біржі, впливає багато зовнішніх чинників, які не можна передбачити заздалегідь, і якими не можна керувати. Це здебільшого економічні обставини – стан світової і локальної економіки, рівень виробництва у деякій галузі, баланс між попитом і пропозицією. Але це можуть бути і погодні і кліматичні чинники, що впливають, наприклад, на врожай певного виду сільськогосподарської продукції, або дії великих біржових спекулянтів. Тому ціни акцій в кожний момент часу є випадковими величинами, а з перебігом часу вони, відповідно, стають випадковими процесами. Звісно, така ситуація мала місце і в ті далекі часи, коли біржі існували, а теорія випадкових процесів ще не була створена. Нагадаємо, що Чиказька фондова біржа почала функціонувати 21 березня 1882 року.

Що стосується теорії випадкових процесів, то, як не дивно, її засновником був не математик, а ботанік Р. Броун, який в 1827 році виявив під мікроскопом хаотичний рух частинок квіткового пилку в воді. Природа цього явища довгий час була нез'ясованою. і тільки наприкінці XIX – на початку XX століття було усвідомлено, що це один з виявів теплового руху атомів і молекул, і що для вивчення цього явища потрібні методи теорії ймовірностей. Відповідний випадковий процес з часом назвали броунівським рухом, а потім ще вінерівським процесом, за ім'ям видатного математика Н. Вінера, який не тільки побудував інтеграл відносно цього процесу, але і написав сотні статей з теорії ймовірностей і математичної статистики, з рядів та інтегралів Фур'є, з теорії потенціалу и теорії чисел, з узагальненого гармонічного аналізу. Його називають також "батьком кібернетики" за книгу "Кібернетика, або управління і зв'язок у тварині і машині" (1948), він же розробляв систему протиповітряної оборони США.

А початкові засади аналізу випадковості у зміні цін акцій було закладено французьким економістом і математиком Л. Башельє, який в 1900 році в своїй докторській дисертації "Théorie de la spéculation" зробив спробу описати вартість акцій як випадкового процесу $S = S_t, t \geq 0$, у якого прирости $\Delta S_t = S_{t+\Delta t} - S_t$ мають у деякому ймовірнісному розумінні порядок $\sqrt{\Delta t}$. Це і є прообраз вінерівського процесу, але недоліком моделі Башельє було те, що в його моделі ціни акцій могли бути і від'ємними. Фактично, модель Башельє можна описати як $S_t = S_0 + \mu t + \sigma W_t$, де W – вінерівський процес. Тим не менше, відкриття Башельє "ефекту Δt" у флуктуаціях вартості акцій під дією великої кількості економічних чинників і внаслідок центральної граничної теореми виявилося згодом принциповим моментом при побудові загальної теорії випадкових процесів дифузії. І хоча на певний час роботи Башельє були забуті, потім про них справедливо згадали, і тепер основні великі конгреси з фінансової математики носять назву конгресів Башельє. Початок математичного вивчення броунівського руху був закладений в роботах фізиків А. Ейнштейна та М. Смолуховського, а вже потім його почали широко вивчати математики, зокрема, Н. Вінер.

Надзвичайно цікавою постаттю в економіці і, до певної міри, в фінансовій математиці є російський математик, спеціаліст з функціонального аналізу Л. Канторович. В 1938 році він консультував фанерний трест з проблеми ефективного використання деяких верстатів. Канторович зрозумів, що справа зводиться до задачі максимізації лінійної форми багатьох змінних за наявності великої кількості обмежень у формі лінійних рівностей і нерівностей. Він зрозумів також, що до таких задач можна звести колосальну кількість проблем економіки. В 1939 році Канторович опублікував роботу «Математичні методи організації і планування виробництва», в якій описав задачі економіки, що розв'язуються відкритим їм методом і тим самим заклав основи математичного програмування. Його внесок безпосередньо в фінансову математику полягає в тому, що він виявив такий цікавий збіг обставин: оптимальні ціни, в тому числі ціни фінансових активів, є одночасно цінами ринкової рівноваги. Потім це відкриття було істотно розвинено, але роботи Канторовича є піонерськими. Теоретичні надбання Канторовича дуже важко було застосувати до керованої радянської економіки, і вони не були широко відомі у світі. Потім його висновки були одержані незалежно американськими економістами, але праці Канторовича все ж були дуже високо оцінені і в 1975 році він одержав Нобелівську премію з економіки спільно з Т. Купмансом "за внесок у теорію оптимального розподілу ресурсів".

Нового поштовху фінансова математика отримала в 1965 році, коли з ініціативи математика і економіста Л. Севіджа, який "відкрив" роботу Башельє, американський економіст П. Самуельсон, теж лауреат Нобелівської премії з економіки, запропонував для опису еволюції вартості акцій так званий геометричний броунівський рух $S_t = S_0 e^{\mu t} e^{\sigma W_t - \sigma^2 t/2}$, який має ту перевагу, що ціни акцій залишаються невід'ємними (фактично додатними майже напевно). Модель геометричного броунівського руху було далі істотно узагальнено, зокрема, розглядають у показнику експоненти дифузійний процес зі стрибками або процес Леві – однорідний процес з незалежними приростами.

Нарешті, в 1968 році відбулась значна економічна і фінансові подія – були "відпущені" ціни на золото та інші дорогоцінні метали. Історія цього питання наступна: з 1933 по 1976 рік офіційна ціна золота знаходилась під керуванням казначейства США, зараз нею, в певному розумінні, керує Лондонська біржа. В 1944 році ціна золота була на рівні 35 доларів за трійську унцію (31,1034768 грамів) і з того часу то зростала, то спадала під впливом девальвації долара або світових криз чи війн. Ціна на золото зростала через підвищення попиту на золото як на сировину для виробництва електроніки і радіотехніки, ювелірної промисловості і медицини, а також інших цілей. А частіше ціна золота зростала в результаті спекулятивних угод на біржі і створення центральними банками різних країн високоліквідних резервів. В 1961 році країни Західної Європи створили “Золотий пул”, до якого увійшли центральні банки Великої Британії, ФРН, Франції, Італії, Бельгії, Нідерландів, Швейцарії та банк Нью-Йорка. Пул створювали для стабілізації світової ціни на золото, але в 1968 році після девальвації англійського фунта, Велика Британія витратила 3000 тон золота для міждержавного регулювання ціни, і золотий пул розпався. З того часу ціна золота визначається ринком, тобто попитом і пропозицією. Що стосується Радянського Союзу, ціна на золото в ньому довгий час була фіксованою, і на кожній банкноті було записано, що її номінал забезпечується, в тому числі, золотим запасом держави. Зараз на пострадянському просторі ціни на золото теж ринкові.

Вільні ціни на золото призвели до виникнення додаткової випадкової компоненти на фінансовому ринку, і фінансова стохастика практично одночасно почала бурхливо розвиватися і як теоретична наука, і як інструмент повсякденного керування банківською та біржовою діяльністю. Додатковим фактором, що сприяв її розвитку, було відкриття в 1973 році першої біржі по заключенню контрактів з опціонами. В цьому ж році були надруковані дві роботи , які привели до революції у фінансових розрахунках, пов’язаних з опціонами. Це стаття Ф.Блека і М.Шоулса [34] і стаття Р. Мертона [55]. В жовтні 1997 року професорам Р. Мертону (Гарвардський університет) та М. Шоулсу (Стенфордський університет) було присуджено Нобелівську премію з економіки. (Ф. Блек помер в 1995 році, а Нобелівський Фонд присуджує премії тільки живим ученим). Коротко, формула Блека-Шоулса оцінює “справедливу вартість” опціону. Математичні викладки наведені в розділі. Модель є дуже корисною при прийнятті інвестиційних рішень, але не гарантує прибутку на торгах. Концептуально модель Блека-Шоулса - це формула, яку можна пояснити наступним чином: ціна опціону купівлі дорівнює очікуваній майбутній ціні за акцію мінус очікувана вартість виконання опціону. Поняття справедливої ціни базується на понятті безарбітражності ринку, яке так само як і поняття повноти, пояснюється в розділі для ринків як з дискретним, так і з неперервним часом. Звернемо увагу читача на той момент, що реальний ринок можна змоделювати різними способами, і його властивості будуть різними, наприклад, один і той же ринок можна змоделювати і як повний, і як неповний, а от яка модель краща – показує практика і результати прогнозу. Як правило, будувати декілька моделей дуже дорого, і мистецтво фінансового аналітика полягає, зокрема, у вірному виборі моделі. Відзначимо також, що моделі, побудовані для потреб фінансової математики, не лежать осторонь всієї іншої науки та практики, вони використовуються в біології, прогнозуванні погоди, кліматології, вивченні змін в електротехнічних схемах мобільного зв'язку, тому що і там процеси змін відбуваються подібним чином.

Опис сучасних фінансових моделей базується на теорії випадкових процесів і стохастичному аналізі (теорії мартингалів, стохастичному інтегруванні, формулі Іто, формулі Гірсанова, теорії стохастичних диференціальних рівнянь, мартингальних зображеннях та елементах числення Маллявена). Необхідні засади стохастичного аналізу викладено у додатку А.

3.2 Фінансові ринки з дискретним часом

3.2.1 Первинні цінні папери. Облігації та акції. Зміна ціни з часом

Загальний опис математичної моделі фінансового ринку

Розглянемо інвестора, тобто фізичну особу або організацію, яка володіє деяким скінченним набором фінансових активів. Це можуть бути облігації, акції, валюта, інші цінності. Облігації, акції, валюта називаються *первинними активами*. Інвестор називається *невеликим (малим)*, якщо його дії з фінансовими активами (купівля або продаж) не впливають на загальну ситуацію на ринку, не ведуть до підвищення цін або дефолту.

Будемо вважати, що оцінювання фінансових активів (зокрема цінних паперів) відбувається у певні фіксовані дискретні моменти часу $t = 0, 1, \ldots, T$. Позначимо множину $\mathbb{T} := \{0, 1, \ldots, T\}$. Така модель називається багатоперіодною, причому вважаємо, що в момент $t = 0$ ціни фіксовано. Конкретніше, нехай інвестор має $d+1$ вид цінних паперів, і в момент $t = 0$ їхні ціни фіксовані і дорівнюють $(\pi_0, \ldots, \pi_d)$. Позначимо цей невід'ємний вектор цін

$$\overline{\pi} = (\pi_0, \ldots, \pi_d) \in \mathbb{R}_+^{d+1}.$$

Припускаємо, що між моментами 0 і 1, 1 і 2, ..., $T-1$ і T відбуваються операції з паперами, і в моменти 1, 2, ..., T ми одержуємо нові ціни фінансових активів. Важливим є те, що на ціноутворення впливають сторонні фактори, які неможливо врахувати заздалегідь, вони є випадковими, залежать від того, що не можна передбачити. Отже, уже в момент $t = 1$ сталий вектор цін перетворюється на набір випадкових величин, залежних від елемента $\omega \in \Omega$, де Ω – деяка множина, причому елемент ω називається сценарієм. Отже, в кожний момент t ми отримуємо вектор

$$\overline{S}_t(\omega) = (S_{t,0}(\omega), S_{t,1}(\omega), \ldots, S_{t,d}(\omega)).$$

Зауваження 3.2.1. Треба чітко засвоїти, що процесом ціноутворення, цінами фінансових активів не можна керувати! Вони складаються стихійно і не залежать від нашої волі.

Зауваження 3.2.2. Щоб надати математичного статусу цінам паперів в моменти $t = 1, \ldots, T$, розглянемо ймовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ з σ-алгеброю $\mathcal{F}$ та ймовірнісною мірою P, і будемо вважати, що $S_{t,i} = S_{t,i}(\omega)$ – випадкові величини на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Міру P називають *об'єктивною ймовірнісною мірою*. Назва пояснюється тим, що ми вважаємо, начебто саме ця міра відповідає реальному розподілу значень введених випадкових величин.

Зауваження 3.2.3. Ціни всіх паперів в моменти $t = 0, 1, \ldots, T$ вважають невід'ємними, тобто для кожного $\omega \in \Omega$ припускають, що вектор $\overline{S}_t(\omega) \in \mathbb{R}_+^{d+1}$.

Зауваження 3.2.4. Сукупність всіх фінансових активів, що розглядаються в деякій конкретній задачі, називається фінансовим ринком, і вважають, що інвестор оперує на цьому фінансовому ринку з деяким скінченим набором обраним ним активів. Іноді весь ринок зводять до того набору активів, яким оперує інвестор (інвестори). Треба при цьому розуміти, що ми розглядаємо не реальний фінансовий ринок, а його математичну модель, і властивості (безарбітражність, повнота тощо) є властивостями моделі, хоча в контексті це слово часто опускається. Насправді один і той же фінансовий ринок можна змоделювати по-різному, й успіх реального інвестора може залежати від того, наскільки адекватну модель обрано.

Еталонний актив (облігація, або numéraire)

Не обов'язково ціни всіх активів будуть змінюватись з часом випадковим чином. Інвестор може покласти частину грошей на депозитні рахунки різних банків або купити державні облігації, а виплати за цими цінними паперами детерміновані. Тому, як правило, в моделі фінансового ринку припускається, що є один актив, наприклад, з індексом "0", ціна якого детермінована. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що $\pi_0 = 1$, а $S_{t,0}(\omega) = (1+r)^t$, де $r > -1$ – відсоткова (процентна) ставка.

Як правило, в реальному житті $r > 0$, це відповідає відсоткам, які виплачуються за банківським депозитом, або за облігацією. Через це нульова позиція називається *облігацією*, або *банківським рахунком*, або *безризиковим активом*, або *еталонним активом* (в англомовній літературі – numéraire)). Якщо не зумовлено інше, то еталонний актив показує, як змінюється вартість грошей з часом. Пояснимо це ще раз, хоча це питання детально обговорено у першому розділі. Відомо, що через природні процеси – амортизацію всього, що створено людиною – нерухомості, обладнання, використання природних ресурсів тощо мають місце інфляційні процеси, тобто вартість грошей з часом падає. Цей ефект називають *часовою вартістю грошей*. Так от, можна вважати, що еталонний актив якраз і змінює свою ціну в часі відповідно до часової вартості грошей, тобто кількість $(1+r)^t$ гривень в момент часу $t \in \mathbb{T}$ в момент $t = 0$ має вартість 1. Тоді для того, щоб знайти вартість в момент часу $t = 0$ кількості грошей $S_{t,i}(\omega)$ (*сучасну вартість* вказаної суми), треба розділити $S_{t,i}(\omega)$ на $(1 + r)^t$:

$$\frac{S_{t,i}(\omega)}{(1 + r)^t}.$$

Вказана дія називається *дисконтуванням*. Звичайно, можлива ситуація, коли відсоткова ставка облігації відрізняється від реальної швидкості інфляції; тоді треба вказувати і розрізняти ці значення.

Зауваження 3.2.5. Поняття еталонного активу є, до деякої міри, відносним. Наприклад, активи можуть бути набором деяких валют, які доречно конвертувати у ту, яка на даний момент є найстабільнішою. Вона і буде еталонним активом. Але з часом стабільність може зменшитись, і еталонним активом стане інша валюта.

Біноміальна модель акції

Розглянемо випадок $d = 1$, тобто маємо лише одну акцію, ціна якої в момент $t \in \mathbb{T}$ дорівнює $S_t(\omega)$. Припустимо, що $S_0 > 0$ і що $S_{t+1}(\omega) = S_t(\omega)\,(1 + R_{t+1}(\omega))$, де $\{R_t,\ t = 1, \ldots, T - 1\}$ – набір випадкових величин (в принципі, не обов'язково незалежних та однаково розподілених, хоча саме незалежність вказаних величин у сукупності і однаковий розподіл забезпечує цікаві властивості такої моделі), що приймають лише два значення a і b, причому $-1 < a < b$. Якщо величини R_t однаково розподілені, то покладають

$$\mathrm{P}\{R_t = a\} = p > 0, \quad \mathrm{P}\{R_t = b\} = q = 1 - p > 0.$$

Іноді позначають $1 + a = d$ (від слова "down", тобто акція "пішла вниз"), $1 + b = u$ (від слова "up", тобто акція "пішла вгору"). Це відповідає реальній ситуації, якщо $-1 < a < 0 < b$.Часто припускають, що $u \cdot d = 1$, хоча це і не обов'язково. Така модель зміни ціни акції називається *біноміальною*, або *моделлю Кокса-Росса-Рубінштейна* (CRR-моделлю). Для того, щоб описати цю модель детальніше, введемо дискретний ймовірнісний простір, що складається з 2^T елементів, $\Omega = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_T)\}$, причому кожне ω_t приймає два значення, наприклад, $+1$ та -1. На цьому Ω введемо σ-алгебру $\mathcal{F} = 2^\Omega$ та довільну ймовірнісну міру P таку, що для кожного $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_T)$ $\mathrm{P}(\{\omega\}) > 0$. Тоді кожний елемент $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_T)$ відповідає "шляху", пройденому ціною акції, значення $\omega_t = +1$ відповідають події $R_t = b$, а значення $\omega_t = -1$ – події $R_t = a$. Очевидно, ціну акції в момент t можна переписати у вигляді

$$S_t(\omega) = S_0 \prod_{i=1}^{i=t} (1 + R_i(\omega)),$$

а після дисконтування вона дорівнює

$$X_t(\omega) = S_0 \prod_{i=1}^{i=t} \frac{1 + R_i(\omega)}{1 + r}.$$

3.2.2 Портфель інвестора. Арбітраж. Безарбітражні ринки.

Портфель інвестора

З цього моменту припускаємо, що на фінансовому ринку є $d+1$ вид фінансових активів, один з них є облігацією з $\pi_0 = 1$ і $S_{t,0} = (1+r)^t$, інші – акціями. Ці активи називають первинними, або базовими. Зрозуміло, що це не обов'язково саме облігація та акції, це можуть бути й інші активи, що мають аналогічні властивості.

Припустимо, що інвестор в момент часу $t = 0$ купив цінні папери i-го активу в кількості ξ_i. При цьому $\xi_i \in \mathbb{R}$ – довільне число (хоча важко уявити інвестора, який купив 3,14 акцій деякої компанії). Більше того, можлива ситуація, коли $\xi_i < 0$. Якщо $\xi_0 < 0$, це означає, що інвестор взяв у банку борг, рівний $|\xi_0|$, і якщо він повертає його в момент t, то сума повернення дорівнює $|\xi_0|(1+r)^t$. Якщо $\xi_i < 0$ при $i > 0$, то це означає, що інвестор продав цінні папери i-го активу в кількості $|\xi_i|$, фактично не володіючи ними. Така дія називається *коротким продажем* (short selling), або кажуть, що інвестор зайняв коротку позицію відносно i-го активу, (якщо ж він купує i-й актив, іноді кажуть, що він зайняв щодо нього довгу (long) позицію).

У результаті дії інвестора у нього утворився *портфель* $\overline{\xi} = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$. *Початковий капітал* цього портфеля

$$V_0 = \sum_{i=0}^{d} \xi_i \pi_i.$$

Для скорочення позначимо скалярний добуток векторів x і y через $x \cdot y$. Виділимо також окремо компоненти активів та портфеля, що відносяться до облігації та акцій:

$$\begin{gathered}\overline{\pi} = (1, \pi), \quad \text{де} \quad \pi = (\pi_1, \ldots, \pi_d),\\ \overline{S}_t(\omega) = ((1+r)^t, S_t(\omega)), \quad \text{де} \quad S_t(\omega) = (S_{t,i}(\omega), 1 \le i \le d),\\ \overline{\xi} = (\xi_0, \xi), \quad \text{де} \quad \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d).\end{gathered}$$

Тоді $V_0 = \overline{\xi} \cdot \overline{\pi} = \xi_0 + \xi \cdot \pi$.

Портфель інвестора ще називають *стратегією*.

Одноперіодні моделі фінансового ринку

Далі в цьому параграфі припускаємо, що $T = 1$, тобто модель має лише один період між $t = 0$ і $t = 1$. Тоді в момент $t = 1$ капітал інвестора, що створив портфель $\overline{\xi} = (\xi_0, \xi)$, дорівнює

$$V_1 = \sum_{i=0}^{d} \xi_i S_{1,i}(\omega) = \overline{\xi} \cdot \overline{S}_1(\omega) = \xi_0(1+r) + \xi \cdot S_1(\omega).$$

Індекс “1” біля цін акцій будемо опускати. Тоді

$$V_1 = \overline{\xi} \cdot \overline{S}(\omega) = \xi_0(1+r) + \xi \cdot S(\omega),$$

де вектор $\overline{S}(\omega) = ((1+r), S_1(\omega), \ldots, S_d(\omega))$, де $S_i(\omega)$ – ціна i-го активу в момент $t = 1$, $1 \le i \le d$.

Наступне поняття є одним з основних, що застосовується у стохастичній теорії фінансів.

Означення 3.2.6. Модель фінансового ринку *допускає арбітраж*, якщо для деякого портфеля $V_0 \leq 0$, а $V_1 \geq 0$ з імовірністю 1, і $V_1 > 0$ з додатною імовірністю. (Такий портфель називають *арбітражним*.)

Наявність арбітражу означає, що можна здобути додатний прибуток ($V_1 > V_0$ з додатною ймовірністю) без ризику втрат ($V_1 \geq V_0$ P-м.н.(майже напевно)). Наявність арбітражу ще називають free lunch (переклад очевидний), хоча останнє може бути і більш тонким поняттям в теорії арбітражу ринків з неперервним часом.

На певний невеликий час і в порівняно невеликому обсязі арбітраж на фінансовому ринку можливий, але при його з'явленні попит на відповідні цінні папери підвищиться, ціни на них теж зростуть, і арбітраж зникне. Відсутність арбітражу – *ключове* припущення при розгляді фінансових ринків. Ринок, на якому арбітраж відсутній, називають безарбітражним.

Зауваження 3.2.7. Якщо $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots\}$ – дискретний простір, і при цьому $p_i := \mathrm{P}(\{\omega_i\}) > 0$ для всіх $i \geq 1$, то існування арбітражу можна сформулювати без залучення поняття ймовірнісної міри: модель ринку допускає арбітраж, якщо $V_0 \leq 0$, $V_1 \geq 0$ на всіх ω_i, і існує хоча б одне ω_{i_0} таке, що

$$V_1(\omega_{i_0}) = \overline{\xi} \cdot \overline{S}(\omega_{i_0}) > 0.$$

Зауваження 3.2.8. Нагадаємо, що дві ймовірнісні міри P_1 і P_2 називаються еквівалентними ($\mathrm{P}_1 \sim \mathrm{P}_2$), якщо рівність $\mathrm{P}_1(A) = 0$, $A \in \mathcal{F}$ має місце тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{P}_2(A) = 0$, тобто P_1 і P_2 мають однакові нульові множини, а значить, і однакові множини, імовірність яких дорівнює 1. За теоремою Радона-Никодима для двох еквівалентних імовірнісних мір P_1 і P_2 існують похідні Радона-Никодима $d\mathrm{P}_1/d\mathrm{P}_2$ і $d\mathrm{P}_2/d\mathrm{P}_1$, вони додатні P_1-м.н.,

$$\frac{d\mathrm{P}_1}{d\mathrm{P}_2} \cdot \frac{d\mathrm{P}_2}{d\mathrm{P}_1} = 1, \quad \int_\Omega \frac{d\mathrm{P}_2}{d\mathrm{P}_1} d\mathrm{P}_1 = \int_\Omega d\mathrm{P}_2 = \int_\Omega d\mathrm{P}_1 = \int_\Omega \frac{d\mathrm{P}_1}{d\mathrm{P}_2} d\mathrm{P}_2 = 1.$$

Оскільки в означенні арбітражу фігурують лише множини імовірності $\mathrm{P} = 1$ та $\mathrm{P} = 0$, то наявність або відсутність арбітражу не зміниться якщо замінити об'єктивну міру P на будь-яку еквівалентну ймовірнісну міру $\widetilde{\mathrm{P}}$.

Доведемо допоміжну лему, яка математично характеризує наявність арбітражу.

Лема 3.2.9. *Наступні умови еквівалентні:*

а) модель ринку допускає арбітраж;

б) існує портфель $\xi \in \mathbb{R}^d$, такий, що $\xi \cdot S \geq (1+r)\pi \cdot \xi$ P-майже напевно і $\xi \cdot S > (1+r)\pi \cdot \xi$ з додатною ймовірністю.

Доведення. а) $\Rightarrow$ б): Нехай існує портфель $\overline{\xi} = (\xi_0, \xi)$, для якого $\xi_0 + \xi \cdot \pi \leq 0$, а

$$\xi_0(1+r) + \xi \cdot S \geq 0 \quad \text{P-м.н.}$$

і

$$\xi_0(1+r) + \xi \cdot S > 0 \quad \text{з додатною імовірністю.}$$

Тоді

$$\xi \cdot S \geq -\xi_0(1+r) \geq \xi \cdot \pi(1+r) \quad \text{P-м.н.}$$

і

$$\xi \cdot S > -\xi_0(1+r) \geq \xi \cdot \pi(1+r) \quad \text{з додатною імовірністю.}$$

б) $\Rightarrow$ а): Нехай виконано умову б). Покажемо, що портфель з $\xi_0 = -\xi \cdot \pi$ є арбітражним. Справді, для нього $V_0 = \xi_0 + \xi \cdot \pi = 0$, та

$$V_1 = \xi_0(1+r) + \xi \cdot S = \xi \cdot S - \xi \cdot \pi(1+r) \geq 0$$

з імовірністю 1, і $V_1 > 0$ з додатною імовірністю. □

Зауваження 3.2.10. Введемо вектор дисконтованих чистих прибутків $Y = Y(\omega) \in \mathbb{R}^d$, де $Y = (Y_1, \ldots, Y_d)$, $Y_i = S_i/(1+r) - \pi_i$. Тоді лему 3.2.9 можна переформулювати наступним чином: існування арбітражу еквівалентне тому, що існує портфель ξ, для якого $\xi \cdot Y \geq 0$ з імовірністю 1 і $\xi \cdot Y > 0$ з додатною імовірністю.

3.2.3 Міри, нейтральні до ризику. Фундаментальна теорема оцінювання фінансових активів в одноперіодній моделі

Міри, нейтральні до ризику

Означення 3.2.11. Ймовірнісну міру $\mathrm{P}^* \sim \mathrm{P}$ називають *нейтральною до ризику*, або *ризик-нейтральною*, якщо для всіх $1 \le i \le d$

$$\pi_i = \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*} \frac{S_i}{1+r}.$$

Назва міри пояснюється тим, що відносно цієї міри середнє значення дисконтованої ціни акції дорівнює її початковому значенню, тобто немає в середньому можливості одержати ні прибутків, ні збитків, немає ризику ні того, ні іншого. При цьому $\mathrm{E}_{\mathrm{P}^*} S_i/(1+r)$ коректно означене, оскільки $S_i \ge 0$, тобто взагалі можливий випадок, коли $\mathrm{E}_{\widetilde{\mathrm{P}}} S_i = +\infty$ для деякої міри $\widetilde{\mathrm{P}}$, але не може бути невизначеності ∞/∞. Те саме стосується і дисконтованих чистих прибутків $Y_i \ge -\pi_i$. В термінах вектора Y умову нейтральності до ризику можна записати так: міра P^* нейтральна до ризику тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{E}_{\mathrm{P}^*} Y = 0$, де вектор $\mathrm{E}_{\mathrm{P}^*} Y = (\mathrm{E}_{\mathrm{P}^*} Y_1, \ldots, \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*} Y_d)$.

Зауваження 3.2.12. Нехай $\pi_i = 0$, а ринок безарбітражний. Тоді

$$\pi_i = \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*} \frac{S_i}{1+r} = 0,$$

звідки $S_i = 0$ з імовірністю 1. Оскільки такі вироджені активи нас не цікавлять, то далі вважаємо, що $\pi_i > 0$, $0 \le i \le d$.

Основна теорема оцінювання фінансових активів

Позначимо множину $\mathcal{P} = \{\widetilde{\mathrm{P}} \sim \mathrm{P}, \widetilde{\mathrm{P}} \text{ нейтральна до ризику}\}$.

Теорема 3.2.13. *Ринок є безарбітражним тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{P} \ne \varnothing$. При цьому міру $\mathrm{P}^* \in \mathcal{P}$ можна вибрати так, щоб похідна Радона-Никодима $d\mathrm{P}^*/d\mathrm{P}$ була обмеженою.*

Доведення. Достатність. Нехай $\mathcal{P} \neq \varnothing$, $\mathrm{P}^* \in \mathcal{P}$. Нехай також $\overline{\xi} \cdot \overline{S} \geq 0$ з P-імовірністю 1, $\overline{\xi} \cdot \overline{S} > 0$ з додатною P-імовірністю. Тоді

$$\overline{\pi} \cdot \overline{\xi} = \sum_{i=0}^{d} \frac{\mathrm{E}\overline{\xi} \cdot \overline{S}}{(1+r)} > 0,$$

тобто арбітраж неможливий.

Необхідність. Нехай спочатку $\mathrm{E}\|S\|_1 < +\infty$, що еквівалентно нерівності $\mathrm{E}\|Y\|_1 < +\infty$, де під нормою $\|\cdot\|_m$ в $\mathbb{R}^d$ розуміємо

$$\|Y\| = \left(\sum_{i=1}^{d} |Y_i|^m\right)^{1/m}.$$

Розглянемо дві множини:

$$\mathcal{A} := \{\mathrm{Q} \sim \mathrm{P} : \text{існує стала } C = C(\mathrm{Q}) \text{ така, що } d\mathrm{Q}/d\mathrm{P} \leq C\},$$
$$\mathcal{B} := \{\mathrm{E_Q}Y : \mathrm{Q} \in \mathcal{A}\}.$$

Очевидно, що $\mathcal{A}$ є опуклою в множині всіх імовірнісних мір, тому що для будь-яких $\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2 \in \mathcal{A}$ та $\alpha \in [0,1]$

$$\frac{d(\alpha\mathrm{Q}_1 + (1-\alpha)\mathrm{Q}_2)}{d\mathrm{P}} \leq \alpha C(\mathrm{Q}_1) + (1-\alpha)C(\mathrm{Q}_2) =:$$
$$=: C(\alpha\mathrm{Q}_1 + (1-\alpha)\mathrm{Q}_2).$$

(Нагадаємо, що множина $\mathcal{M}$ називається опуклою, якщо для будь-яких двох елементів $x \in \mathcal{M},\ y \in \mathcal{M}$ і будь-якого $\alpha \in [0,1]$ опукла комбінація $\alpha x + (1-\alpha)y \in \mathcal{M}$.) Тому і множина $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^d$ є опуклою, оскільки

$$\mathrm{E}_{\alpha\mathrm{Q}_1+(1-\alpha)\mathrm{Q}_2} Y = \alpha\mathrm{E}_{\mathrm{Q}_1} Y + (1-\alpha)\mathrm{E}_{\mathrm{Q}_2} Y.$$

Нам треба довести, що $O \in \mathcal{B}$. Припустимо супротивне, нехай $O \overline{\in} \mathcal{B}$. Тоді за теоремою про відокремлення опуклих множин в $\mathbb{R}^d$ (різновид теореми Гана-Банаха), існує вектор $\xi \in \mathbb{R}^d$ такий, що для всіх $x \in \mathcal{B}$ скалярний добуток $x \cdot \xi \geq 0$ і для деякого $x_0 \in \mathcal{B}$ виконується нерівність $x_0 \cdot \xi > 0$.

Якщо підставити замість x та x_0 їхні значення, одержимо: для будь-якої міри $\mathrm{Q} \in \mathcal{A}$ виконується нерівність $\mathrm{E_Q}Y \cdot \xi \geq 0$ і існує міра $\mathrm{Q}_0 \in \mathcal{A}$ така, що $\mathrm{E}_{\mathrm{Q}_0} Y \cdot \xi > 0$. З другої нерівності випливає, що $\mathrm{Q}_0(\xi \cdot Y > 0) > 0$, отже,

$$\mathrm{P}(\xi \cdot Y > 0) > 0.$$

Покажемо, що з першої нерівності випливає рівність $\mathrm{P}(\xi \cdot Y \geq 0) = 1$. Справді, розглянемо подію $A = \{\xi \cdot Y < 0\}$ і покладемо

$$\varphi_n := \left(1 - \frac{1}{n}\right) \mathbb{1}_A + \frac{1}{n} \mathbb{1}_{\overline{A}},$$

де $\overline{A} = \Omega \setminus A$. Тоді $0 < \varphi_n \leq 1$, $0 < \mathrm{E}\varphi_n \leq 1$, і якщо покласти

$$\frac{d\mathrm{Q}_n}{d\mathrm{P}} := \frac{\varphi_n}{\mathrm{E}\varphi_n},$$

то $\mathrm{Q}_n \in \mathcal{A}$, значить,

$$\mathrm{E}_{\mathrm{Q}_n} \xi \cdot Y = \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right) \mathrm{E}\xi \cdot Y \mathbb{1}_A + \frac{1}{n} \mathrm{E}\xi \cdot Y \mathbb{1}_{\overline{A}}\right] (\mathrm{E}\varphi_n)^{-1} \geq 0.$$

Отже,

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) \mathrm{E}\xi \cdot Y \mathbb{1}_A + \frac{1}{n} \mathrm{E}\xi \cdot Y \mathbb{1}_{\overline{A}} \geq 0,$$

і при $n \to \infty$ одержимо

$$\mathrm{E}\xi \cdot Y \mathbb{1}_{\{\xi \cdot Y < 0\}} \geq 0.$$

Це означає, що $\mathrm{P}(\xi \cdot Y \geq 0) = 1$, і ми одержуємо суперечність з припущенням про відсутність арбітражу. Значить, у випадку $\mathrm{E}\|Y\|_1 < \infty$ необхідність доведено.

Якщо $\mathrm{E}\|Y\|_1 = \infty$, розглянемо міру $\widetilde{\mathrm{P}}$ таку, що

$$\frac{d\widetilde{\mathrm{P}}}{d\mathrm{P}} = \frac{C}{1 + \|Y\|_1}, \quad C = (\mathrm{E}(1 + \|Y\|_1)^{-1})^{-1}.$$

Тоді $\widetilde{\mathrm{P}} \sim \mathrm{P}$, і при цьому

$$\mathrm{E}_{\widetilde{\mathrm{P}}} \|Y\|_1 = C \mathrm{E} \frac{\|Y\|_1}{1 + \|Y\|_1} \leq C < \infty.$$

Очевидно, що заміна міри P на еквівалентну $\widetilde{\mathrm{P}}$ не впливає на наявність арбітражу на ринку. Тому попереднє доведення необхідності дає міру Q_0 таку, що $d\mathrm{Q}_0/d\widetilde{\mathrm{P}} \le C_1$, і при цьому Q_0 – міра, нейтральна до ризику. Остаточно,

$$\frac{d\mathrm{Q}_0}{d\mathrm{P}} = \frac{d\mathrm{Q}_0}{d\widetilde{\mathrm{P}}} \cdot \frac{d\widetilde{\mathrm{P}}}{d\mathrm{P}} \le C \cdot C_1,$$

і Q_0 – шукана міра. Теорему доведено. □

Геометрична інтерпретація відсутності арбітражу

Обмежимося найпростішою геометричною інтерпретацією відсутності арбітражу на ринку, яка потім буде використана в багатоперіодному випадку. Позначимо

$$\mathcal{K}(\omega) = \{\xi \cdot Y(\omega),\ \xi \in \mathbb{R}^{d+1}\}$$

випадкову множину можливих значень загального чистого дисконтованого прибутку інвестора.

Теорема 3.2.14. *Наступні умови еквівалентні:*

1) $\mathcal{K} \cap \mathbb{R}_+ = 0$ P-*м.н.;*
2) *ринок є безарбітражним;*
3) *існує ймовірнісна міра* $\mathrm{P}^* \sim \mathrm{P}$*, нейтральна до ризику, з обмеженою похідною Радона-Никодима* $d\mathrm{P}^*/d\mathrm{P}$.

Доведення. Імплікації 1) $\Leftrightarrow$ 2) та 3) $\Leftrightarrow$ 1) очевидні. Імплікацію 2) $\Leftrightarrow$ 3) доведено в теоремі 3.2.13. □

Тепер трохи ускладнимо ситуацію. Нехай на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ задано деяку під-σ-алгебру $\mathcal{F}_0$ σ-алгебри $\mathcal{F}$, і нехай в момент часу $t = 0$ ціни $d + 1$ актива – це $\mathcal{F}_0$-вимірні випадкові величини, що утворюють вектор

$$\overline{S}_0 = (S_0^0, \ldots, S_d^0).$$

Оскільки інформація, яку одержав інвестор в момент $t = 0$, залежить від вектора $\overline{S}_0$, то і його портфель буде залежати від випадку, точніше, буде $\mathcal{F}_0$-вимірним вектором $\overline{\xi} = (\xi_0, \ldots, \xi_{d+1})$. Вектор Y зараз матиме вигляд

$$Y = \left(S_i^1 / S_0^1 - S_i^0, \quad 1 \le i \le d\right).$$

Позначимо $\mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{G}, \mathrm{P}, \mathbb{R}^d)$ сукупність P-м.н. скінченних $\mathcal{G}$-вимірних випадкових векторів у $\mathbb{R}^d$, де $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ – деяка під-σ-алгебра,

$$\mathcal{K}(\omega) := \{\xi \cdot Y : \xi \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathrm{P}, \mathbb{R}^d)\},$$

$$\mathcal{L}_+^0(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathrm{P}, \mathbb{R}^d) = \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathrm{P}, \mathbb{R}^d) \cap \mathbb{R}_+.$$

У цьому випадку геометрична інтерпретація відсутності арбітражу формулюється так:

$$\mathcal{K}(\omega) \cap \mathcal{L}_+^0(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathrm{P}, \mathbb{R}^d) = \{0\}. \tag{3.2.1}$$

Основну умову безарбітражності ринку з випадковими початковими даними сформулюємо без доведення.

Теорема 3.2.15. *Наступні умови еквівалентні:*

1) $\mathcal{K}(\omega) \cap \mathcal{L}_+^0(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathrm{P}, \mathbb{R}^d) = \{0\}$;

2) $(\mathcal{K}(\omega) \setminus \mathcal{L}_+^0(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathrm{P}, \mathbb{R}^d) \cap \mathcal{L}_+^0(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathrm{P}, \mathbb{R}^d) = \{0\}$;

3) існує ймовірнісна міра $\mathrm{P}^* \sim \mathrm{P}$*, нейтральна до ризику, з обмеженою похідною Радона-Никодима* $d\mathrm{P}^*/d\mathrm{P}$.

Приклад 3.2.16. (*Ринок зі зліченною кількістю активів.*) Покажемо, що на ринку, де інвестор оперує нескінченною кількістю активів, основна теорема оцінювання фінансових активів, взагалі кажучи, не має місця. Нехай $\Omega = \{1, 2, \ldots\}$, маємо активи $S_i(\omega)$, $i \ge 0$, з початковими цінами $\pi_i \ge 0$, $i \ge 0$. Задля технічного спрощення припустимо, що $\pi_i = 1$, $i \ge 0$, $r = 0$. Тоді $S_0 = 1$. Позначимо

$$a_{ij} := S_j(\omega_i), \quad i, j \ge 1.$$

Припустимо, що для всіх ω_i $a_{ij} \le c_i < \infty$, тобто $\|a_{i\cdot}\|_{l_\infty} < \infty$. Портфель інвестора $\overline{\xi} = (\xi_0, \xi_1, \ldots)$ будемо вважати таким, що $\sum_{j=0}^{\infty} |\xi_j| < \infty$, тобто $\|\xi\|_{l_1} < \infty$. Тоді для всіх ω_i абсолютно збігається ряд $\sum_{j=0}^{\infty} \xi_j a_{ij}$, оскільки

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\xi_j||a_{ij}| \leq \|\xi\|_{l_1} \|a_{i\cdot}\|_{l_\infty} < \infty.$$

Припустимо, що портфель складено таким чином, що

$$\overline{\xi} \cdot \overline{\pi} = \sum_{j=0}^{\infty} \xi_j \leq 0.$$

Покладемо $a_{jj} = 0$, $a_{j+1j} = 2$, $a_{ij} = 1$, $i \neq j, j+1$, $g \geq 1$. Тоді на ω_1

$$\sum_{j=0}^{\infty} \xi_j a_{ij} = \xi_1 + \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j a_{1j} = \xi_1 + \sum_{j=2}^{\infty} \xi_j = \sum_{j=0}^{\infty} \xi_j - \xi_1 \leq -\xi_1.$$

Аналогічно, на ω_i при $i > 1$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \xi_j a_{ij} = \sum_{j=0}^{i-2} \xi_j + 2\xi_{i-1} + \sum_{j=i+1}^{\infty} \xi_j = \sum_{j=0}^{\infty} \xi_j + \xi_{i-1} - \xi_i \leq \xi_{i-1} - \xi_i.$$

Таким чином, $\ldots \xi_j \leq \xi_{j-1} \leq \ldots \leq \xi_1 \leq 0$. Остання нерівність завдяки абсолютній збіжності цього ряду означає, що всі $\xi_i = 0$, $i \geq 1$, $\xi_0 \leq 0$. Таким чином, арбітражних можливостей нема.

Покажемо, що й міри P^*, нейтральної до ризику, нема. Справді, якби така міра існувала, і дорівнювала б $p_i^* > 0$ на ω_i, то мали б місце рівності

$$1 = \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*} S_j = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} p_i^* = 2p_{j+1}^* + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j+1, j}}^{\infty} p_i^* = 1 + p_{j+1}^* - p_j^*,$$

звідки $p_j^* = p_{j+1}^*$ для всіх j, що неможливо на зліченному ймовірнісному просторі.

Тим не менше, якщо міра, нейтральна до ризику існує, то арбітражу нема. Справді, тоді за умови $\overline{\pi} \cdot \overline{\xi} \leq 0$ одержуємо

$$\mathrm{E}(\overline{\xi} \cdot \overline{S}) = (1+r) \sum_{j=0}^{\infty} \xi_j \mathrm{E} \frac{S_j}{1+r} = (1+r) \sum_{j=0}^{\infty} \xi_j \pi_j \leq 0,$$

тобто достатність в основній теоремі оцінювання активів має місце і в зліченному випадку.

3.2.4 Платіжні зобов'язання та похідні цінні папери. Справедливі ціни. Досяжні платіжні зобов'язання. Закон однієї ціни

Платіжні зобов'язання та похідні цінні папери

Означення 3.2.17. *Платіжним зобов'язанням* називають довільну невід'ємну випадкову величину $C \geq 0$ на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$.

Якщо платіжне зобов'язання можна подати у вигляді $C = f(S_0,\ S_1(\omega), \ldots, S_d(\omega))$, де $f : \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}_+$ – невипадкова вимірна функція, то таке платіжне зобов'язання називається *вторинним* (похідним) цінним папером або деривативом. Нагадаємо, що активи $S_0, S_1(\omega), \ldots, S_d(\omega)$ називають базовими, або первинними.

Зауваження 3.2.18. Англійський термін "contingent claim" означає відкладене зобов'язання, тобто такий контракт або цінний папір, який буде реалізовано в майбутньому, але договір на нього, як правило, укладається в початковий момент часу (або, можливо, в деякий проміжний момент часу, якщо розглядається багатоперіодна модель фінансового ринку).

Опціони купівлі та продажу

Означення 3.2.19. *Опціоном купівлі* називається вторинний, або похідний, цінний папір, який дає право, але не зобов'язує покупця опціону, в момент $T = 1$ купити ту акцію S, на яку було заключено опціон, за фіксованою ціною K, яка називається страйковою ціною, страйком, або ціною виконання.

Якщо ціна акції в момент $T = 1$ задовольняє нерівність $S > K$, то власник опціону подає його до виконання, купує акцію за ціною K, миттєво продає за ціною S і одержує прибуток $S - K$. Якщо $S < K$, то власник опціону не подає його до виконання. Таким чином, виплата за опціоном купівлі дорівнює $C = (S - K)^+$. Оскільки власник опціону нічим в момент $T = 1$ не ризикує, він повинен в момент $t = 0$ сплатити за придбання опціону купівлі деяку сумму, яка називається ціною опціону. Встановленню так званої “справедливої ціні” опціону купівлі в біноміальній моделі присвячено один з варіантів формули Блека-Шоулса, який буде розглянуто далі. Опціон купівлі часто позначають C^{call} (від слова “колл” – “call” – виклик, вимога).

Означення 3.2.20. Аналогічно, *опціоном продажу* називається цінний папір, який дає право, але не зобов'язує покупця опціону, продавати в момент $T = 1$ акцію S, на яку було заключено опціон, за фіксованою ціною E.

Виплата за опціоном продажу, очевидно, дорівнює $P = (S - K)^+$. При цьому

$$C - P = S - K.$$

Опціон продажу часто позначають C^{put} (від слова “пут” – “put” – покласти, оцінити).

Якщо ціну опціону купівлі фіксовано, і вона дорівнює $\pi(C^{call})$, то ціна опціону продажу визначається через $\pi(C^{call})$ за допомогою та званого співвідношення *пут-колл паритету*:

$$\pi(C^{call}) - \pi(C^{put}) = \pi - \frac{K}{1+r},$$

де π – початкова ціна акції.

Справедливі ціни платіжних зобов'язань

Нехай продавець бажає реалізувати деяке платіжне зобов'язання. Яку ціну він повинен призначити? Виходячи з того, що основною рисою “нормального” фінансового ринку є безарбітражність, ціна, призначена покупцем, не повинна порушувати цієї властивості. В зв'язку з цим дамо наступне

Означення 3.2.21. Число $\pi(C) \geq 0$ називається *справедливою ціною* платіжного зобов'язання C, якщо розширений фінансовий ринок, тобто ринок з початковими цінами $(\pi_0, \ldots, \pi_d, \pi(C))$ і цінами $(S_0(\omega), S_1(\omega), \ldots, S_d(\omega), C)$ в момент $T = 1$, є безарбітражним.

Лема 3.2.22. *Якщо ринок безарбітражний, то множина справедливих цін будь-якого платіжного зобов'язання непорожня.*

Доведення. Зафіксуємо деяку міру $\widetilde{\mathrm{P}} \sim \mathrm{P}$, для якої $\mathrm{E}_{\widetilde{\mathrm{P}}}(C) < \infty$. Наприклад, можна взяти

$$d\widetilde{\mathrm{P}} := c(1+C)^{-1} d\mathrm{P},$$

де c –нормуючий множник. Відносно цієї міри ринок є безарбітражним. Тоді з теореми 3.2.13 випливає існування міри $\mathrm{P}^* \in \mathcal{P}$ такої, що похідна Радона-Никодима $\frac{d\mathrm{P}^*}{d\mathrm{P}}$ обмежена. При цьому $\mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(C) < \infty$, і число

$$\pi(C) := \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}\left(\frac{C}{1+r}\right)$$

буде справедливою ціною зобов'язання C, що випливатиме з доведення першої частини наступної теореми. $\square$

Теорема 3.2.23. *Нехай ринок безарбітражний, тобто $\mathcal{P} \neq \varnothing$.*

1. Множина справедливих цін платіжного зобов'язання C дорівнює

$$\Pi(C) = \left\{ \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}\left(\frac{C}{1+r}\right) : \mathrm{P}^* \in \mathcal{P}, \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(C) < +\infty \right\}.$$

2. Нижня і верхня межі множини $\Pi(C)$ задаються формулами

$$\pi_{\text{н}}(C) = \inf_{\mathrm{P}^* \in \mathcal{P}} \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}\left(\frac{C}{1+r}\right),$$

$$\pi_{\text{в}}(C) = \sup_{\mathrm{P}^* \in \mathcal{P}} \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}\left(\frac{C}{1+r}\right).$$

Доведення. 1. Нехай число $\alpha \in \mathbb{R}$ є справедливою ціною. Тоді існує міра $\widetilde{\mathrm{P}} \sim \mathrm{P}$ така, що

$$\pi_i = \mathrm{E}_{\widetilde{\mathrm{P}}} \frac{S_i}{1+r} \quad \text{і} \quad \alpha = \mathrm{E}_{\widetilde{\mathrm{P}}} \frac{C}{1+r}.$$

Значить, $\widetilde{\mathrm{P}} \in \mathcal{P}$, звідси

$$\Pi(C) \subset \left\{ \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}\left(\frac{C}{1+r}\right) \,\middle|\, \mathrm{P}^* \in \mathcal{P}, \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(C) < +\infty \right\}.$$

Навпаки, нехай $\alpha = \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}C/(1+r) \in \mathbb{R}$, $\mathrm{P}^* \in \mathcal{P}$. Тоді $\pi_i = \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}S_i/(1+r)$, тому ринок з початковими цінами $(\pi_0, \dots, \pi_d, \alpha)$ і кінцевими цінами $(S_0, \dots, S_d, C)$ є безарбітражним, а тоді за означенням $\alpha \in \Pi(C)$.

2. Формула для $\pi_{\text{н}}(C)$ є очевидною. Для $\pi_{\text{в}}(C)$ міркуємо так: якщо $\mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(C) < +\infty$ для будь-якої міри $\mathrm{P}^* \in \mathcal{P}$, то формула для $\pi_{\text{в}}(C)$ очевидна. Нехай існує $\mathrm{P}^\infty \in \mathcal{P}$, для якої $\mathrm{E}_{\mathrm{P}^\infty}(C) = +\infty$. Покажемо, що $\pi_{\text{в}}(C) = +\infty$. Припустимо супротивне, нехай існує число $\pi \in \mathbb{R}$ таке, що будь-яка безарбітражна ціна платіжного зобов'язання C є меншою за π. Тобто початкова ціна π дає арбітраж; значить, існує портфель $\overline{\xi} \in \mathbb{R}^{d+2}$, для якого

$$\overline{\pi} \cdot \overline{\xi} + \xi_{d+2} \cdot \pi \leq 0, \tag{3.2.2}$$

$$\overline{S} \cdot \overline{\xi} + \xi_{d+2} \cdot C \geq 0 \tag{3.2.3}$$

з імовірністю 1 і

$$\overline{S} \cdot \overline{\xi} + \xi_{d+2} \cdot C > 0 \tag{3.2.4}$$

з додатною імовірністю. Якщо $\xi_{d+2} < 0$, то з (3.2.3) випливає, що

$$C \leq \frac{\overline{S} \cdot \overline{\xi}}{-\xi_{d+2}} =: D. \tag{3.2.5}$$

Але права частина є лінійною комбінацією P^∞-інтегровних цін акцій, а C, за припущенням, не інтегровне відносно міри P^∞, тобто нерівність (3.2.5) неможлива. Значить, $\xi_{d+2} \geq 0$, тобто $C \geq D$. Покладемо для $n > 1$ $C_n = C \wedge (D \vee 0 + n)$ і покажемо, що розширений ринок з C_n є арбітражним при початковій ціні $\pi(C_n) = \pi$. Справді, якщо $C \leq D \vee 0 + n$, то

$$\overline{S} \cdot \overline{\xi} + \xi_{d+2} C_n = \overline{S} \cdot \overline{\xi} + \xi_{d+2} C.$$

Якщо $C > D \vee 0 + n$, $D < 0$, то

$$\overline{S} \cdot \overline{\xi} + \xi_{d+2} C_n = \overline{S} \cdot \overline{\xi} + \xi_{d+2} n = -\xi_{d+2}(D - n) > n\xi_{d+2} \geq 0.$$

Якщо $C > D \vee 0 + n$, $D \geq 0$, то

$$\overline{S} \cdot \overline{\xi} + \xi_{d+2} C_n = \overline{S} \cdot \overline{\xi} + \xi_{d+2}(D + n) = n\xi_{d+2} \geq 0.$$

Крім того, враховуючи (3.2.4) одержуємо, що $\overline{S} \cdot \overline{\xi} + \xi_{d+2} C_n > 0$ з додатною імовірністю. Отже, з урахуванням (3.2.2) бачимо, що розширений ринок з платіжним зобов'язанням C_n справді арбітражний, тобто π не є справедливою ціною платіжного зобов'язання C_n. Але для великих n мають місце нерівності $\pi < \mathrm{E}_{\mathrm{P}^\infty}\left(\frac{C_n}{1+r}\right) < \infty$, оскільки, з одного боку, $C \le D \vee 0 + n$, а ця величина P^∞-інтегровна, з іншого, $C_n \uparrow C$ майже напевне, значить, $\mathrm{E}_{\mathrm{P}^\infty}(C_n) \to \mathrm{E}_{\mathrm{P}^\infty}(C) = \infty$. Проте існує міра $\mathrm{P}^* \in \mathcal{P}$, для якої

$$\mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}\left(\frac{C_n}{1+r}\right) \le \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}\left(\frac{C}{1+r}\right) < \pi.$$

Тоді візьмемо таке $\alpha \in (0,1)$, що

$$\alpha \mathrm{E}_{\mathrm{P}^\infty}\left(\frac{C_n}{1+r}\right) + (1-\alpha)\mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}\left(\frac{C_n}{1+r}\right) = \pi.$$

При цьому міра

$$\widehat{\mathrm{P}} := \alpha \mathrm{P}^\infty + (1-\alpha)\mathrm{P}^* \in \mathcal{P},$$

$\mathrm{E}_{\widehat{\mathrm{P}}} C_n.(1+r) = \pi$, звідки π – справедлива ціна для C_n. Одержана суперечність доводить останнє твердження теореми. □

Досяжні та недосяжні платіжні зобов'язання. Закон однієї ціни. Структура множини справедливих цін на прямій

Означення 3.2.24. (Недисконтоване) платіжне зобов'язання C називається *досяжним*, якщо існує такий портфель $\overline{\xi}$ інвестора, для якого $\overline{\xi} \cdot \overline{S} = C$ P-майже напевно.

При цьому кажуть, що такий портфель (або стратегія) (відтворює, реплікує, від слова replication – повторення, або хеджує, від слова hedge – паркан, у фінансовому контексті це захист платіжного зобов'язання за допомогою відповідної стратегії) платіжне зобов'язання C. Очевидно, в загальному випадку існує не один портфель, що породжує досяжне платіжне зобов'язання. Але для всіх таких портфелів початкова ціна однакова. Це доведено в наступній лемі.

Лема 3.2.25. (*Закон однієї ціни.*) *Нехай фінансовий ринок безарбітражний, C – досяжне платіжне зобов'язання. Тоді його справедлива ціна дорівнює $\overline{\pi}\cdot\overline{\xi}$, де $\overline{\xi}$ – будь-який портфель, що породжує C, і всі такі ціни однакові.*

Доведення. Нехай P^* – будь-яка міра, нейтральна до ризику, ξ та ζ – дві стратегії, що породжують C. Тоді $C = \overline{S}\cdot\overline{\xi} = \overline{S}\cdot\overline{\zeta}$, звідки

$$\pi(C) = E_{P^*}\left(\overline{S}\cdot\overline{\xi}\right) = E_{P^*}\left(\overline{S}\cdot\overline{\zeta}\right) = \overline{\pi}\cdot\overline{\xi} = \overline{\pi}\cdot\overline{\zeta},$$

а з останньої рівності випливає доведення. □

Теорема 3.2.26. *Нехай $\mathcal{P}\neq\varnothing$, C – платіжне зобов'язання.*

1. Якщо зобов'язання C є досяжним, то воно має єдину справедливу ціну, яка, в свою чергу, має вигляд $\overline{\xi}\cdot\overline{\pi}$, де $\overline{\xi}$ – будь-який портфель, що породжує C.

2. Якщо C не є досяжним, то множина справедливих цін – це інтервал $(\pi_{\text{н}}(C), \pi_{\text{в}}(C))$.

Доведення. 1. Фактично це твердження доведено в лемі 3.2.25. Зауважимо лише наступне: якщо ринок безарбітражний, а $C = \overline{\xi}\cdot\overline{S}$ для деякого портфеля $\overline{\xi}$, то $\pi(C) = E_{P^*}\overline{\xi}\cdot\overline{S}/(1+r)$ для будь-якої міри $P^*\in\mathcal{P}$, тобто $\pi(C) = \overline{\xi}\cdot\overline{\pi}$, що не залежить від міри P^*. Тобто $\pi(C)$ одна й та сама для всіх $P^*\in\mathcal{P}$, тоді за теоремою 3.3.1 $\pi(C)$ – взагалі одна, звідки $\overline{\xi}\cdot\overline{\pi}$ не залежить від вибору портфеля $\overline{\xi}$. Тут має місце певна "двоїстість": справедлива ціна досяжного платіжного зобов'язання на безарбітражному ринку не залежить ні від вибору міри, нейтральної до ризику, ні від портфеля, що породжує це зобов'язання.

2. Нехай зобов'язання C не є досяжним. За теоремою 3.3.1 множина $\Pi(C)$ є інтервалом, оскільки вона опукла. Треба тільки показати, що вона відкрита, тобто для будь-якої точки $\pi\in\Pi(C)$ знайдуться $\pi_1<\pi<\pi_2$, $\pi_1,\pi_2\in\Pi(C)$. Розглянемо ту міру P^*, для якої $\pi = E_{P^*}C/(1+r)$. Візьмемо банахів простір $\mathcal{L}_1(P^*)$, а в ньому скінченновимірний (значить, замкнений) підпростір досяжних платіжних зобов'язань $\mathcal{M} := \{\overline{\xi}\cdot\overline{S}, \overline{\xi}\in\mathbb{R}^{d+1}\}$. Оскільки $C\,\overline{\in}\,\mathcal{M}$, то за першим наслідком з теореми Гана-Банаха існує лінійний неперервний функціонал $f\in(\mathcal{L}_1(P^*))^*$ (тут перша зірочка відноситься до позначення міри, а друга – це знак простору, спряженого

до $\mathcal{L}_1(\mathrm{P}^*)$, тобто простору $\mathcal{L}_\infty(\mathrm{P}^*)$), такий, що

$$f|_{\mathcal{M}} = 0, \quad f(C) = \|C\|_{\mathcal{L}_1(\mathrm{P}^*)} \neq 0, \quad \|f\|_{\mathcal{L}_\infty(\mathrm{P}^*)} = 1.$$

При цьому $f(\zeta) = \int_\Omega \zeta\varphi d\mathrm{P}^*$ для будь-якої $\zeta \in \mathcal{L}_1(\mathrm{P}^*)$ і деякої $\varphi \in \mathcal{L}_\infty(\mathrm{P}^*)$. Можна вважати, що $\|\varphi\|_{\mathcal{L}_\infty(\mathrm{P}^*)} \leq \frac{1}{2}$, в протилежному випадку треба перенормувати відповідним чином функціонал f. Тоді

$$\frac{d\mathrm{P}_1}{d\mathrm{P}^*} := 1 - \varphi, \quad \frac{d\mathrm{P}_2}{d\mathrm{P}^*} := 1 + \varphi$$

визначають додатні обмежені похідні Радона-Никодима, значить, $\mathrm{P}_i \sim \mathrm{P}$, $i = 1, 2$. Тепер,

$$\mathrm{E}_{\mathrm{P}_2}(Z) = \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(Z) + \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(Z\varphi) = \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(Z) + f(Z), \quad Z \in \mathcal{L}_1(\mathrm{P}^*),$$

зокрема, $\mathrm{E}_{\mathrm{P}_2}(V) = \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(V)$ для будь-якої випадкової величини $V \in \mathcal{M}$. Оскільки $1 \in \mathcal{M}$, треба взяти портфель

$$\left(\frac{1}{1+r}, 0, \ldots, 0\right),$$

тоді одержимо $\mathrm{E}_{\mathrm{P}_2}(1) = \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(1) = 1$, звідки P_2 (аналогічно, і P_1) – ймовірнісні міри. При цьому

$$\mathrm{E}_{\mathrm{P}_1}(C) = \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(C) - f(C) < \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(C),$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{P}_2}(C) = \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(C) + f(C) > \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(C),$$

отже,

$$\pi_1 := \mathrm{E}_{\mathrm{P}_1}\left(\frac{C}{1+r}\right) < \pi, \quad \pi_2 := \mathrm{E}_{\mathrm{P}_2}\left(\frac{C}{1+r}\right) > \pi.$$

Нарешті, для досяжного зобов'язання $V = S_j$ (переконайтесь самостійно, що воно є досяжним і вкажіть портфель, що його породжує)

$$\mathrm{E}_{\mathrm{P}_i}\left(\frac{S_j}{1+r}\right) = \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}\left(\frac{S_j}{1+r}\right) = \pi_j, \quad j = 1, \ldots, d, \quad i = 1, 2,$$

звідки P_i при $i = 1, 2$ належать до $\mathcal{P}$. Отже, π_1 і π_2 – справедливі ціни. $\square$

3.2.5 Повнота фінансового ринку

Означення та попередні відомості

Як видно з попереднього розділу, досяжні платіжні зобов'язання є "зручними" для інвестора в тому розумінні, що вони мають єдину справедливу ціну. У зв'язку з цим дамо наступне

Означення 3.2.27. Фінансовий ринок називається *повним*, якщо на ньому кожне платіжне зобов'язання є досяжним.

Зауваження 3.2.28. Досяжність зобов'язання C означає, що $C = \overline{\xi} \cdot \overline{S}$ P-м.н. для деякого портфеля $\overline{\xi} \in \mathbb{R}^{d+1}$. Позначимо через $\mathcal{L}(\overline{S})$ лінійний $d+1$-вимірний простір, "натягнений" на сукупність $(S_0, S_1, \dots, S_d)$:

$$\mathcal{L}(\overline{S}) = \Big\{ \sum_{i=0}^{d} \xi_i S_i, \xi_i \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Тоді у випадку повного ринку $\mathcal{L}_0(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}) = \mathcal{L}(\overline{S})$. Більше того, можна вважати, що σ-алгебра $\mathcal{F} = \sigma\{S_0, \dots, S_d\}$.

У силу вищевказаних обмежень на структуру платіжних зобов'язань на повному ринку, повнота ринку є скоріше виключенням, ніж загальним правилом, на відміну від безарбітражності. Сформулюємо математичний критерій повноти ринку. Для цього спочатку введемо допоміжне поняття.

Означення 3.2.29. Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ – ймовірнісний простір. Множина $A \in \mathcal{F}$, $A \subset \Omega$ називається *атомом* цього простору, якщо $\mathrm{P}(A) > 0$ і при цьому для будь-якої підмножини $B \subset A$, $B \in \mathcal{F}$ або $\mathrm{P}(B) = 0$, або $\mathrm{P}(A \backslash B) = 0$.

Для $0 < p < \infty$ позначимо через $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}, \mathbb{R})$ простір усіх випадкових величин ζ на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ таких, що $E|\zeta|^p < \infty$; через $\mathcal{L}_\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}, \mathbb{R})$ – простір всіх істотно обмежених випадкових величин.

Лема 3.2.30. *Розмірності всіх просторів* $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}, \mathbb{R})$*,* $0 \le p \le \infty$ *однакові та дорівнюють*

$$\dim \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}, \mathbb{R}) = \sup\{n : \textit{існує розбиття} \quad (A_1, A_2, \dots, A_n) \\ \textit{простору} \quad (\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}), \quad \textit{таке що} \quad \mathrm{P}(A_i) > 0\} =: \widetilde{D}.$$

Доведення. Нехай існує розбиття простору $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ на n множин $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ з $\mathrm{P}(A_i > 0)$, $1 \leq i \leq n$. Позначимо

$$\eta_i := \mathbb{1}_{A_i}(\omega), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Очевидно, що всі випадкові величини η_i належать до будь-якого простору $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}, \mathbb{R})$, $0 \leq p \leq \infty$. Доведемо, що вони є лінійно незалежними. Справді, нехай для деяких сталих $(c_1, \ldots, c_n)$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \eta_i(\omega) = 0.$$

Але оскільки множини A_i попарно не перетинаються, то остання рівність правильна тоді і лише тоді, коли всі $c_i = 0$. Отже, $\dim \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}, \mathbb{R}) \geq \widetilde{D}$.

Тепер треба довести протилежну нерівність. Очевидно, що достатньо розглянути випадок $\widetilde{D} < \infty$. У цьому випадку розглянемо будь-яке розбиття $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ на $\widetilde{D}$ множин: $(A_1, A_2, \ldots, A_{\widetilde{D}})$. Очевидно, що ці множини є атомами, інакше можна було б продовжити розбиття. Нехай випадкова величина $\zeta \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}, \mathbb{R})$. Доведемо, що ζ є сталою на кожному атомі A_i. Справді, якщо $\zeta = c_1$ на $B_1 \subset A_i$ і $\zeta = c_2$ на $B_2 \subset A_i$, причому $\mathrm{P}(B_1) > 0$ і $\mathrm{P}(B_2) > 0$, то A_i можна розбити на підмножини ненульової імовірності, тобто A_i – не атом.

Значить,

$$\zeta = \sum_{i=1}^{\widetilde{D}} c_i \mathbb{1}_{A_i}(\omega).$$

Таким чином, сукупність випадкових величин $(\mathbb{1}_{A_i}, 1 \leq i \leq \widetilde{D})$ утворює базис в будь-якому просторі $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}, \mathbb{R})$, звідки

$$\dim \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}, \mathbb{R}) = \widetilde{D}.$$

Лему доведено. □

Наслідок 3.2.31. $n := \dim \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}, \mathbb{R}) < \infty$ *тоді і тільки тоді, коли існує розбиття* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ *на* n *атомів.*

Критерій повноти ринку. Приклад

Тепер сформулюємо основний результат, який іноді називають другою основною теоремою фінансової математики.

Теорема 3.2.32. *Безарбітражний ринок є повним тоді і лише тоді, коли множина $\mathcal{P}$ складається лише з однієї ризик-нейтра-льної міри* $\mathrm{P}^* \sim \mathrm{P}$.

Доведення. Необхідність. Нехай фінансовий ринок є повним. Тоді кожне платіжне зобов'язання є досяжним, значить має єдину справедливу ціну (лема 3.2.25 та теорема 3.3.3). Зокрема, є досяжним платіжне зобов'язання $\mathbb{1}_A$ для будь-якої події $A \in \mathcal{F}$. Але будь-яка справедлива ціна такого зобов'язання дорівнює

$$\frac{\mathrm{P}^*(A)}{1+r},$$

де $\mathrm{P}^* \in \mathcal{P}$. Але якщо така справедлива ціна єдина, то $\mathrm{P}^*(A)$ єдина для будь-якого фіксованого A, отже, і міра $\mathrm{P}^* \in \mathcal{P}$ єдина.

Достатність. Нехай $\mathrm{P}^* \in \mathcal{P}$ єдина. Тоді за теоремою 3.3.3 кожне обмежене платіжне зобов'язання C має єдину справедливу ціну. Тобто кожне обмежене платіжне зобов'язання є досяжним. Це означає, що $\mathcal{L}_\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}, \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}(\overline{S})$, а тоді

$$\dim \mathcal{L}_\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}, \mathbb{R}) \leq \mathcal{L}(\overline{S}) = d+1.$$

Але тоді за наслідком з леми 3.2.30 існує розбиття простору $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ на атоми, та кількість цих атомів не перевищує $d+1$. У цьому випадку взагалі кожне платіжне зобов'язання приймає не більше $d+1$ значень, тобто є обмеженим, а значить, досяжним. Теорему доведено. □

3.2.6 Відносний дохід платіжних зобов'язань

Нехай ринок є безарбітражним, $C \geq 0$ – досяжне платіжне зобов'язання, $\pi(C)$ – єдина справедлива ціна зобов'язання C.

Означення 3.2.33. *Відносним доходом досяжного зобов'язання* C називається випадкова величина

$$R(C) = \frac{C - \pi(C)}{\pi(C)},$$

за умови, що $\pi(C) \neq 0$. Зокрема, якщо $C = S_0$, то

$$R(S_0) = \frac{1 + r - 1}{1} = r,$$

а для $C = S_i$

$$R(S_i) = \frac{S_i - \pi_i}{\pi_i}.$$

Зважаючи на те, що

$$C = \overline{\xi} \cdot \overline{S} = \xi_0 + \sum_{i=1}^{d} \xi_i S_i,$$

одержимо формулу, що співвідносить $R(C)$ з $R(S_i)$, $0 \leq i \leq d$:

$$R(C) = \frac{\overline{\xi} \cdot \overline{S} - \overline{\xi} \cdot \overline{\pi}}{\overline{\xi} \cdot \overline{\pi}} = \sum_{i=0}^{d} \frac{\xi_i \pi_i}{\overline{\xi} \cdot \overline{\pi}} R(S_i).$$

Лема 3.2.34. *Нехай ринок є безарбітражним, C – досяжне платіжне зобов'язання з $\pi(C) \neq 0$.*

1. Для будь-якої міри $\mathrm{P}^* \in \mathcal{P}$ очікуваний відносний дохід від C дорівнює безризиковій ставці r:

$$\mathrm{E}_{\mathrm{P}^*} R(C) = r.$$

2. Для будь-якої міри $\mathrm{Q} \sim \mathrm{P}$ такої, що $\mathrm{E}_{\mathrm{Q}} \|\overline{S}\|_1 < \infty$, очікуваний відносний дохід дорівнює

$$\mathrm{E}_{\mathrm{Q}} R(C) = r - \mathrm{cov}_{\mathrm{Q}} \left(\frac{d\mathrm{P}^*}{d\mathrm{Q}}, R(C) \right),$$

де P^* – будь-яка міра з множини $\mathcal{P}$, $\mathrm{cov}_{\mathrm{Q}}$ – це коваріація відносно міри Q.

Доведення. 1. Очевидно, що

$$\mathrm{E}_{\mathrm{P}^*} R(C) = \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*} \frac{C - \pi(C)}{\pi(C)} = \frac{(1 + r)\pi(C) - \pi(C)}{\pi(C)} = r,$$

оскільки $\mathrm{E}_{\mathrm{P}^*} \frac{C}{1+r} = \pi(C)$.

2. Запишемо, використовуючи пункт 1:

$$\operatorname{cov}_{\mathrm{Q}}\left(\frac{d\mathrm{P}^*}{d\mathrm{Q}}, R(C)\right) = \mathrm{E}_{\mathrm{Q}}\frac{d\mathrm{P}^*}{d\mathrm{Q}}R(C) - \mathrm{E}_{\mathrm{Q}}\frac{d\mathrm{P}^*}{d\mathrm{Q}}\mathrm{E}_{\mathrm{Q}}R(C) =$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}R(C) - \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}1 \cdot \mathrm{E}_{\mathrm{Q}}R(C) = r - \mathrm{E}_{\mathrm{Q}}R(C). \qquad \square$$

Приклад 3.2.35. (*Найпростіша модель безарбітражного повного ринку*.) Нехай ринок складається з одного безризикового активу, ціна якого в момент $t = 0$ дорівнює $\pi_0 = 1$, а в момент $t = 1$ вона дорівнює $S_0 = 1 + r$, де $r > 0$ та однієї акції S_1, ціна якої в момент $t = 0$ дорівнює π_1, а в момент $t = 1$ вона може набути двох значень:

$$S_{1,1} = \pi_1(1 + a) \quad \text{та} \quad S_{1,2} = \pi_1(1 + b),$$

де $-1 < a < b$. Вважаємо, що ймовірнісний простір має вигляд

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}) = (\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}, 2^{\Omega}, \mathrm{P}),$$

де $\mathrm{P}(\{\omega_1\}) = p > 0$, $\mathrm{P}(\{\omega_2\}) = q = 1 - p > 0$. З‘ясуємо, якими повинні бути співвідношення між параметрами моделі для того, щоб ринок був безарбітражним. Для цього розглянемо рівність

$$\mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}\frac{S_1}{1 + r} = \pi_1,$$

де

$$\mathrm{P}^*(\{\omega_1\}) = p^* > 0, \quad \mathrm{P}^*(\{\omega_2\}) = 1 - p^* = q^* > 0.$$

Зведемо її до рівності

$$\frac{\pi_1(1 + a)}{1 + r}p^* + \frac{\pi_1(1 + b)}{1 + r}(1 - p^*) = \pi_1,$$

або

$$p^* = \frac{b - r}{b - a}.$$

Отже, міра P^*, нейтральна до ризику, існує тоді і тільки тоді, коли $a < r < b$. Очевидно, тоді ринок буде не тільки безарбітражним, але і повним, тому що міра, нейтральна до ризику, єдина.

Отже, кожне платіжне зобов'язання C буде досяжним. Знайдемо явний вигляд стратегії, що породжує C. Для цього складемо систему з двох рівнянь

$$C(\omega_1) = \xi_1(1 + r) + \xi_2\pi_1(1 + a),$$

$$C(\omega_2) = \xi_1(1 + r) + \xi_2\pi_1(1 + b),$$

звідки

$$\xi_2 = \frac{C(\omega_2) - C(\omega_1)}{\pi_1(b - a)}, \quad \xi_1 = \frac{C(\omega_1)(1 + b) - C(\omega_2)(1 + a)}{(b - a)(1 + r)}.$$

Тому єдиною справедливою ціна платіжного зобов'язання C є

$$\pi(C) = \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}\frac{C}{1 + r} = \frac{C(\omega_1)}{1 + r}p^* + \frac{C(\omega_2)(1 - p^*)}{1 + r} =$$
$$= \frac{C(\omega_1)(b - r) - C(\omega_2)(r - a)}{(b - a)(1 + r)}.$$

Зокрема, для опціону купівлі $C^{call} = (S_1 - K)^+$ зі страйковою ціною $K \in [\pi_1(1 + a), \pi_1(1 + b)]$

$$\pi(C^{call}) = \frac{(\pi_1(1 + b) - K)(r - a)}{(b - a)(1 + r)}.$$

Зазначимо, що значення об'єктивної міри P не фігурувало в розрахунках. Проілюструємо на прикладі опціону купівлі той факт, що придбання опціону може суттєво змінити відносний дохід, а отже, і ризик фінансової позиції. Нехай у момент $t = 0$ початкова ціна акції $\pi_1 = 100$, відсоткова ставка $r = 0$. У момент $t = 1$ маємо або ціну $\pi_1(1+a) = \pi_1(1-0{,}2) = 80$, або ціну $\pi_1(1+b) = \pi_1(1 + 0{,}1) = 110$.

Відносний дохід акції дорівнює

$$R(S_1) = \frac{S_1 - \pi(S_1)}{\pi(S_1)} = \begin{cases} \frac{80-(80\cdot 0{,}1+110\cdot 0{,}2)/0{,}3}{100} = -20\%, & \omega = \omega_1, \\ \frac{110-100}{100} = 10\%, & \omega = \omega_2. \end{cases}$$

Відносний дохід опціону купівлі зі страйковою ціною $K = 100$ дорівнює

$$R(C^{call}) = \frac{C^{call} - \pi(C^{call})}{\pi(C^{call})} =$$
$$= \begin{cases} \frac{0-(100\cdot 1{,}1-100)\cdot 0{,}2/0{,}3}{20/3} = -100\%, & \omega = \omega_1, \\ \frac{10-20/3}{20/3} = 50\%, & \omega = \omega_2. \end{cases}$$

Як бачимо, відносний дохід, а тому і ризик, збільшився за абсолютною величиною в 5 разів. Це одночасне збільшення ризику при всіх сценаріях називається *ефектом кратності опціону*. Цей ефект можна "погасити", склавши портфель таким чином, щоб він містив акцію і, наприклад, певну кількість опціонів продажу. Розглянемо портфель виду

$$C_1 = (K - S_1)^+ + S_1 = C^{put} + S_1.$$

Тоді в силу співвідношення пут-колл паритету

$$\pi(C^{put}) = \frac{20}{3} - 100 + 100 = \frac{20}{3},$$
$$R(C_1) = \frac{C^{put} + S_1 - 20/3 - 100}{20/3 + 100} = \begin{cases} -6{,}25\ \%, & \omega = \omega_1, \\ 3{,}125\ \%, & \omega = \omega_2. \end{cases}$$

Бачимо, що портфель C_1 суттєво зменшив як умовний дохід, так і ризик, навіть у порівнянні з акцією S_1.

3.2.7 Динамічна теорія портфеля

Стохастичний базис, узгоджені та передбачувані випадкові процеси

Розглянемо тепер багатоперіодну модель, яка стартує у момент $t = 0$ і закінчується у момент часу $t = T$ (зрозуміло, що це дещо відносне поняття: реальний ринок може існувати, і, скоріше за все, існує і до моменту $t = 0$, і після моменту $t = T$, просто нас цікавить, з певних причин, саме цей відрізок часу).

Отже, у момент $t = 0$ робиться перша інвестиція, між моментами $t = 0$ і $t = 1$, $t = 1$ і $t = 2$, …, $t = T - 1$ і $t = T$ відбуваються торги, а у момент $t = T$ залишається підрахувати прибутки або збитки, виконати платіжне зобов'язання або зробити якусь іншу завершальну трансакцію (трансакція від слова "transaction" – це певна фінансова операція). У моменти часу $t = 1, 2, \ldots, T - 1$ теж відбуваються інвестиції, які доречно назвати проміжними, причому з плином часу інвестор здобуває все більше інформації про ціни фінансових активів на ринку. Оскільки ціни активів, як правило, моделюються випадковими величинами, то надходження нової інформації математично інтерпретується як поява нових подій, тому з часом збільшується набір подій, відомих інвестору. Тому на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ треба ввести набір під-σ-алгебр алгебри $\mathcal{F}$, що розширюється. Позначимо $\mathbb{T} := \{0, 1, \ldots, T\}$.

Означення 3.2.36. *Стохастичним базисом*, або *ймовірнісним простором з фільтрацією* називають набір $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{T}}, \mathrm{P})$, де $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}$ – сукупність під-σ-алгебр σ-алгебри $\mathcal{F}$. Цю сукупність називаються *фільтрацією* або *потоком*.

Будемо вважати, що фільтрація $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ задовольняє припущення (A), якщо $\mathrm{P}\{A\} = 0$ або 1 для всіх множин $A \in \mathcal{F}_0$ (іноді просто вважають, що $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$).

Оскільки в реальній ситуації фільтрація породжується значеннями цінового процесу, то дамо ще наступне означення.

Означення 3.2.37. Дійсний випадковий процес $\{\xi_t, t \in \mathbb{T}\}$ називають *узгодженим з фільтрацією* $\{\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T}\}$, якщо для всіх $t \in \mathbb{T}$ випадкова величина ξ_t є $\mathcal{F}_t$-вимірною.

Очевидним чином попереднє означення поширюється на векторні процеси (узгоджені випадкові процеси ще називають адаптованими до фільтрації $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{T}}$).

Розглянемо векторний ціновий процес

$$\overline{S}_t := (S_{t,0}, S_{t,1}, \ldots, S_{t,d}).$$

Будемо, як і раніше, припускати, що $S_{t,0} = (1 + r)^t$, $r \geq 0$, а інші компоненти відповідають зміні в часі ризикових активів, ціни яких є випадковими величинами, узгодженими з деякою фільтрацією $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{T}}$. Іноді просто припускають, що фільтрація є "натуральною" відносно процесу $\overline{S}_t$, тобто $\mathcal{F}_t = \sigma\{\overline{S}_s, s \leq t\}$. Якщо записати

$$\overline{S}_t := ((1+r)^t, S_{t,1}, \ldots, S_{t,d}) = ((1+r)^t, S_t),$$

де $S_t = (S_{t,1}, \ldots, S_{t,d})$, то фактично $\mathcal{F}_t = \sigma\{S_s, s \leq t\}$.

Тепер дії інвестора в момент t можуть спиратися на інформацію, одержану до цього моменту, тому що у момент t він повинен миттєво приймати рішення. Через це, якщо позначити $\overline{\xi}_t := (\xi_{t,0}, \ldots, \xi_{t,d}) = (\xi_{t,0}, \xi_t)$ стратегію, або портфель інвестора в момент t, то випадковий вектор $\overline{\xi}_t$ повинен бути $\mathcal{F}_{t-1}$-вимірним. Тому дамо ще одне означення.

Означення 3.2.38. Дійсний випадковий процес $\{\zeta_t, t = 1, \ldots, T\}$ називається *передбачуваним* (відносно фільтрації $\{\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T}\}$), якщо випадкова величина ζ_t є $\mathcal{F}_{t-1}$-вимірною.

Так само, як і означення узгодженого процесу, означення передбачуваного процесу поширюється на векторний випадок.

Самофінансовані стратегії та дисконтований ціновий процес

Позначимо $\overline{\xi}_t = (\xi_{t,0}, \xi_t)$, де $\xi_t := (\xi_{t,1}, \ldots, \xi_{t,d})$, $t = 1, \ldots, T$, випадковий вектор, який відповідає стратегії інвестора в момент t. Фактично, цю стратегію він утворив в момент $t-1$, спираючись на відому до того часу інформацію, тобто процес $\overline{\xi}_t$ є передбачуваним. Якщо *ціновий процес* задається вектором $\overline{S}_t$, то *капітал* інвестора в момент $t = 0$ дорівнює $\overline{\xi}_1 \cdot \overline{S}_0$, у момент $t = 1$ $\overline{\xi}_1 \cdot \overline{S}_1$, у будь-який момент $t \geq 1$ він дорівнює $\overline{\xi}_t \cdot \overline{S}_t$. Тобто в момент t, поки інвестор ще не змінив стратегії, його капітал дорівнює $\overline{\xi}_t \cdot \overline{S}_t$. Але в цей момент він змінює стратегію, тобто щось купує, перепродає, і його повний портфель (нова стратегія) дорівнює $\overline{\xi}_{t+1}$. (Нагадуємо, що цей вектор є $\mathcal{F}_t$-вимірним). Основним припущенням є те, що всі ці трансакції (купівлю, перепродаж) він здійснює в рамках того капіталу, який утворився в нього на момент

t, тобто $\overline{\xi}_t \cdot \overline{S}_t = \overline{\xi}_{t+1} \cdot \overline{S}_t$. Це припущення ще називають відсутністю припливу або відтоку капіталу. Дамо відповідне означення стратегії.

Далі будемо вважати для всіх подій $A \in \mathcal{F}_0$ виконаною умову $\mathrm{P}(A) \in \{0, 1\}$. Тоді значення стратегії $\overline{\xi}_1$, так само, як і будь-яка $\mathcal{F}_0$-вимірна випадкова величина, є сталою (сталим вектором) з імовірністю 1.

Означення 3.2.39. Стратегію $\overline{\xi} = \{\overline{\xi}_t, 1 \le t \le T\}$ називають *самофінансованою*, якщо вона є передбачуваною, і

$$\overline{\xi}_t \cdot \overline{S}_t = \overline{\xi}_{t+1} \cdot \overline{S}_t \quad \text{для всіх } 1 \le t \le T-1.$$

Запишемо капітал, який відповідає самофінансованій стратегії, наступним чином. Позначимо його $\mathcal{K}_t$, тоді

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_t &= \mathcal{K}_0 + (\mathcal{K}_1 - \mathcal{K}_0) + \ldots + (\mathcal{K}_t - \mathcal{K}_{t-1}) = \\
&= \overline{\xi}_1 \cdot \overline{S}_0 + (\overline{\xi}_1 \cdot \overline{S}_1 - \overline{\xi}_1 \cdot \overline{S}_0) + \ldots + (\overline{\xi}_t \cdot \overline{S}_t - \overline{\xi}_t \cdot \overline{S}_{t-1}) = \\
&= \overline{\xi}_1 \cdot \overline{S}_0 + \sum_{k=1}^{t} \overline{\xi}_k \cdot (\overline{S}_k - \overline{S}_{k-1}).
\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

Тепер введемо поняття дисконтованого цінового процесу та дисконтованого капіталу, тоді рівність (3.2.6) набуде кращого вигляду.

Означення 3.2.40. 1) *Дисконтованим ціновим процесом* називають векторний процес

$$\overline{X}_t := \left(1, \frac{S_{t,1}}{S_{t,0}}, \ldots, \frac{S_{t,0}}{S_{t,0}}\right).$$

(За наших припущень $S_{t,0} > 0$ для всіх $t \in \mathbb{T}$);

2) *дисконтованим капіталом* називають випадковий процес $V_0 = \overline{\xi}_1 \cdot \overline{X}_0$, $V_t = \overline{\xi}_t \cdot \overline{X}_t$, $t = 1, \ldots, T$.

Операція дисконтування має очевидний зміст – це зведення цін на момент t до відповідних їм значень на момент $t = 0$

шляхом ділення на відповідну ціну безризикового активу на момент t (дисконтувальний множник). Детальніше операцію дисконтування розглянуто в [21]. Умова самофінансованості стратегії в термінах дисконтованого цінового процесу набуває вигляду

$$\overline{\xi}_1 \cdot \overline{X}_t = \overline{\xi}_{t+1} \cdot \overline{X}_t, \quad 1 \leq t \leq T-1.$$

Запишемо дисконтований капітал самофінансованої стратегії в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} V_t = V_0 + (V_1 - V_0) + \ldots + (V_t - V_{t-1}) = \\ = \overline{\xi}_1 \cdot \overline{X}_0 + (\overline{\xi}_1 \cdot \overline{X}_1 - \overline{\xi}_1 \cdot \overline{X}_0) + \ldots + (\overline{\xi}_t \cdot \overline{X}_t - \overline{\xi}_t \cdot \overline{X}_{t-1}) = \\ = \overline{\xi}_1 \cdot \overline{X}_0 + \sum_{k=1}^{t} \overline{\xi}_k \cdot (X_k - X_{k-1}), \quad t = 1, \ldots, T \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

(ми врахували той факт, що перша координата цінового процесу дорівнює 1 в будь-який момент часу). Доведемо, що формула (3.2.7) забезпечує самофінансованість стратегії відповідного капіталу.

Лема 3.2.41. *Наступні умови еквівалентні:*

1) *стратегія* $\overline{\xi} = \{\overline{\xi}_t, 1 \leq t \leq T\}$ *є самофінансованою;*
2) *дисконтований капітал* V_t*, який відповідає стратегії* $\overline{\xi}_t$*, допускає зображення* (3.2.7) *з* $V_0 = \overline{\xi}_1 \cdot \overline{X}_0$.

Доведення. Нам потрібно лише довести, що з 2) випливає 1). Справді, при наявності зображення (3.2.7) різниця значень дисконтованого капіталу між двома сусідніми моментами часу дорівнює

$$V_t - V_{t-1} = \xi_t \cdot (X_t - X_{t-1}) = \overline{\xi}_t \cdot (\overline{X}_t - \overline{X}_{t-1}) =$$
$$\overline{\xi}_t \cdot \overline{X}_t - \overline{\xi}_t \cdot \overline{X}_{t-1}.$$

З іншого боку, очевидно, що

$$V_t - V_{t-1} = \overline{\xi}_t \cdot \overline{X}_t - \overline{\xi}_{t-1} \cdot \overline{X}_{t-1},$$

звідки отримуємо рівність

$$\overline{\xi}_t \cdot \overline{X}_{t-1} = \overline{\xi}_{t-1} \cdot \overline{X}_{t-1}, \quad t = 2, \ldots, T,$$

що і свідчить про самофінансованість стратегії $\overline{\xi}_t$. □

Лема 3.2.42. *Нехай початковий капітал V_0 і частина портфеля, вкладена в ризикові активи, $\{\xi_t, 1 \le t \le T\}$ є відомими. Тоді можна єдиним чином визначити передбачуваний процес $\{\xi_{t,0}, 1 \le t \le T\}$ так, щоб одержати самофінансовану стратегію $\{\overline{\xi}_t, 1 \le t \le T\}$.*

Доведення. Процес $\{\xi_{t,0}, 1 \le t \le T\}$ визначається за індукцією наступним чином: спочатку запишемо

$$V_0 = \overline{\xi}_1 \cdot \overline{X}_0 = \xi_{1,0} + \sum_{i=1}^{d} \xi_{1,i} X_{0,i},$$

звідки

$$\xi_{1,0} = V_0 - \sum_{i=1}^{d} \xi_{1,i} X_{0,i}.$$

Потім використаємо означення самофінансованості:

$$\overline{\xi}_t \cdot \overline{X}_t = \overline{\xi}_{t+1} \cdot \overline{X}_t = \xi_{t+1,0} + \sum_{i=1}^{d} \xi_{t+1,i} X_{t,i}, \tag{3.2.8}$$

причому ліва частина (3.2.8) зараз вважається відомою, а в правій невідомий лише $\xi_{t+1,0}$, і його легко знаходимо:

$$\xi_{t+1,0} = \overline{\xi}_t \cdot \overline{X}_t - \xi_{t+1} \cdot X_t.$$

Лему доведено. □

Поняття арбітражу в багатоперіодній моделі

Нехай ринок еволюціонує між моментами $t = 0$ і $t = T$. Дамо спочатку означення “глобального” арбітражу, тобто арбітражу між цими двома “крайніми” моментами часу. Всі властивості фінансового ринку, як правило, будемо формулювати в термінах дисконтованого цінового процесу.

Означення 3.2.43. Багатоперіодний ринок *допускає арбітраж*, якщо існує така самофінансована стратегія $\overline{\xi} = \{\overline{\xi}_t, 1 \le t \le T\}$, для якої $V_0 = \overline{\xi}_1 \cdot \overline{X}_0 \le 0$, а $V_T \ge 0$ P-м.н., і $V_T > 0$ з додатною P-імовірністю. Така стратегія називається арбітражною.

Покажемо тепер, що наявність такого “глобального” арбітражу еквівалентна наявності “локального” арбітражу, тобто арбітражу між деякими двома сусідніми моментами часу.

Теорема 3.2.44. *Наступні умови еквівалентні:*

1) *багатоперіодний ринок допускає арбітраж у розумінні означення 3.2.43;*
2) *існує момент часу $t_0 \in \{1, \dots, T\}$ та існує $\mathcal{F}_{t_0-1}$-вимірний вектор $\widehat{\xi}_{t_0} = (\widehat{\xi}_{t_0,1}, \dots, \widehat{\xi}_{t_0,d})$ такий, що*
$$\widehat{\xi}_{t_0} \cdot (X_{t_0} - X_{t_0-1}) \geq 0 \quad \text{P-}\textit{м.н.}$$
і
$$\widehat{\xi}_{t_0} \cdot (X_{t_0} - X_{t_0-1}) > 0 \quad \textit{з додатною ймовірністю } \text{P};$$
3) *існує момент часу $t_0 \in \{1, \dots, T\}$ та існує $\mathcal{F}_{t_0-1}$-вимірний обмежений вектор $\widetilde{\xi}_{t_0} = (\widetilde{\xi}_{t_0,1}, \dots, \widetilde{\xi}_{t_0,d})$ такий, що*
$$\widetilde{\xi}_{t_0} \cdot (X_{t_0} - X_{t_0-1}) \geq 0 \quad \text{P-}\textit{м.н.}$$
і
$$\widetilde{\xi}_{t_0} \cdot (X_{t_0} - X_{t_0-1}) > 0 \quad \textit{з додатною ймовірністю } \text{P};$$
4) *багатоперіодний ринок допускає арбітраж у розумінні означення 3.2.43, причому початковий капітал $V_0 = 0$, а самофінансована стратегія $\overline{\xi} = \{\overline{\xi}_t, 1 \leq t \leq T\}$ є обмеженою.*

Доведення. Доведемо, що з 1) випливає 2). Справді, нехай ринок допускає арбітраж з деякою стратегією $\overline{\xi}$ у розумінні означення 3.2.43. Позначимо

$$t_0 = \inf\{t \in \mathbb{T} : V_t \geq 0 \quad \text{P-м.н.},$$
$$V_t > 0, \quad \text{з додатною} \quad \text{P-ймовірністю}\},$$

і зауважимо, що t_0 – невипадкова стала, та за умовою наявності арбітражу $t_0 \leq T$. (Тут капітал розглядається відносно цієї самої арбітражної стратегії). У момент часу $t_0 - 1$ існують дві можливості: а) або $V_{t_0-1} \equiv 0$; б) або $V_{t_0-1} < 0$ з додатною P-ймовірністю. У випадку а) маємо:

$$V_{t_0} - V_{t_0-1} \geq 0 \quad \text{P-м.н.},$$

$$V_{t_0} - V_{t_0-1} \quad \text{з додатною P-ймовірністю.}$$

Враховуючи формулу (3.2.7) для значення дисконтованого капіталу самофінансованої стратегії, одержимо, що існує $\mathcal{F}_{t_0-1}$-вимірний вектор ξ_{t_0}, для якого

$$\xi_{t_0} \cdot (X_{t_0} - X_{t_0-1}) \geq 0 \quad \text{P-м.н.}$$

і

$$\xi_{t_0} \cdot (X_{t_0} - X_{t_0-1}) > 0 \quad \text{з додатною} \quad \text{P-ймовірністю.}$$

Достатньо покласти $\widehat{\xi}_{t_0} := \xi_{t_0}$. У випадку б) розглянемо подію

$$A := \{V_{t_0-1} < 0\}, \quad \mathrm{P}(A) > 0,$$

і стратегію $\widehat{\xi}_{t_0} := \xi_{t_0} \mathbb{1}_A$. Оскільки подія $A \in \mathcal{F}_{t_0-1}$, то і вектор $\widehat{\xi}_{t_0}$ є $\mathcal{F}_{t_0-1}$-вимірним. Розглянемо скалярний добуток

$$\widehat{\xi}_{t_0} \cdot (X_{t_0} - X_{t_0-1}) = \mathbb{1}_A \xi_{t_0} \cdot (X_{t_0} - X_{t_0-1}).$$

Він невід'ємний з імовірністю 1 і додатний на події A, тобто з додатною ймовірністю P, тому що він дорівнює

$$(V_{t_0} - V_{t_0-1}) \mathbb{1}\{V_{t_0-1} < 0\}.$$

Отже, вектор $\widehat{\xi}_{t_0}$ – шуканий.

Доведемо, що з 2) випливає 3). Справді, розглянемо ті самі t_0 і $\widehat{\xi}_{t_0}$, що і у попередньому пункті, але ще домножимо $\widehat{\xi}_{t_0}$ на множник

$$\mathbb{1}_c := \mathbb{1}\{\|\xi_{t_0}\|_1 \leq c\}$$

для будь-якого $c > 0$. Оскільки $\mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_c \uparrow \mathbb{1}_A$ з імовірністю 1, то для всіх достатньо великих c $\mathrm{P}\{\mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_c\} > 0$. Тому $\widetilde{\xi}_{t_0} := \widehat{\xi}_{t_0} \mathbb{1}_c$ – шуканий обмежений вектор.

Доведемо, що з 3) випливає 4). Справді, якщо ми знайшли вектор $\widetilde{\xi}_{t_0}$, причому $t_0 \neq 1$, то достатньо утворити стратегію $\xi_t = \widetilde{\xi}_{t_0} \mathbb{1}_{t=t_0}$. Для такої стратегії $V_0 = 0$, $V_T = \widetilde{\xi}_{t_0} \cdot (X_{t_0} - X_{t_0-1}) \geq 0$ з імовірністю 1 і $V_T > 0$ з додатною імовірністю.

Зауважимо, що і не може бути $t_0 = 1$, інакше в цьому випадку ми мали б, за означенням точки t_0, що $V_{t_0} \geq 0$ з імовірністю 1 і $V_{t_0} > 0$ з додатною імовірністю, чого насправді нема.

Те, що з 4) випливає 1), очевидно. Теорему доведено. □

Елементи теорії мартингалів з дискретним часом

Ми довели при розгляді одноперіодної моделі, що відсутність арбітражу еквівалентна наявності міри, нейтральної до ризику, тобто такої міри P^*, що $\mathrm{P}^* \sim \mathrm{P}$, $d\mathrm{P}^*/d\mathrm{P}$ – обмежена випадкова величина, і для всіх $1 \leq i \leq d$ $\mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}[S_i/(1+r)] = \pi_i$. Якщо початкові ціни є випадковими, тобто $\mathcal{F}_0$-вимірними (зараз ми не припускаємо, що $\mathrm{P}(A) \in \{0,1\}$ для всіх $A \in \mathcal{F}_0$), то, згідно з теоремою 3.2.15, відсутність арбітражу еквівалентна наявності такої міри $\mathrm{P}^* \sim \mathrm{P}$, що $d\mathrm{P}^*/d\mathrm{P}$ – обмежена випадкова величина, і

$$\mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}\left(\frac{S_{i,1}}{S_0} \,\middle|\, \mathcal{F}_0\right) = S_{0,i} \quad \text{для всіх} \quad 1 \leq i \leq d, \tag{3.2.9}$$

тобто з’явилося умовне сподівання відносно попереднього моменту часу. Рівність (3.2.9) є “прототипом” мартингальної властивості. Тому при поширенні теорії арбітражу на багатоперіодну модель природно чекати появи деяких мартингальних процесів. Дамо відповідні означення та сформулюємо деякі властивості мартингалів, які далі стануть у нагоді. У цьому параграфі всюди припускаємо, що $\mathrm{P}(A) \in \{0,1\}$ для всіх $A \in \mathcal{F}_0$.

Означення 3.2.45. Дійсний випадковий процес $M = \{M_t, t \in \mathbb{T}\}$ з дискретним часом називається *мартингалом* відносно стохастичного базису $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{T}})$ і міри Q на $(\Omega, \mathcal{F})$, якщо він задовольняє три властивості:

1) $\mathrm{E}_{\mathrm{Q}}|M_t| < \infty$ для всіх $t \in \mathbb{T}$;
2) M є узгодженим з фільтрацією $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{T}}$, тобто випадкова величина M_t є $\mathcal{F}_t$-вимірною;

3) для всіх $s, t \in \mathbb{T}$ таких, що $s \leq t$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{Q}}(M_t \mid \mathcal{F}_s) = M_s.$$

Зауваження 3.2.46. 1. Якщо для випадкового процесу X виконуються властивості 1) і 2), але 3) заміняється нерівністю

$$\mathrm{E}_{\mathrm{Q}}(M_t \mid M_s) \geq M_s \ (\leq M_s)$$

для всіх $s \leq t$, то відповідний процес називається *субмартингалом* (*супермартингалом*).

2. Векторний d-вимірний процес $\{M_t, \mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T}\}$ називається мартингалом, якщо кожна його компонента є мартингалом.

Лема 3.2.47. *Інтегровний адаптований процес* $\{M_t, \mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T}\}$ *є* Q*-мартингалом тоді і тільки тоді, коли для будь-якого* $t = 0, 1, \ldots, T-1$ *справедлива рівність* $\mathrm{E}_{\mathrm{Q}}(M_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) = M_t$*, або, що те саме, коли* $\mathrm{E}_{\mathrm{Q}}(M_{t+1} - M_t \mid \mathcal{F}_t) = 0$.

Доведення. Треба лише довести достатність. Справді, якщо має місце рівність $\mathrm{E}_{\mathrm{Q}}(M_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) = M_t$ для всіх $t = 0, 1, \ldots, T-1$, то в силу наступної властивості математичних сподівань:

$$\mathrm{E}_{\mathrm{Q}}(\mathrm{E}_{\mathrm{Q}}(\xi \mid G_1) \mid G_2) = \mathrm{E}_{\mathrm{Q}}(\xi \mid G_2),$$

якщо ξ – інтегровна випадкова величина, а σ-алгебри $G_2 \subset G_1$, маємо для всіх $s < t$, $s, t \in \mathbb{T}$:

$$\mathrm{E}_{\mathrm{Q}}(M_t \mid \mathcal{F}_s) = \mathrm{E}_{\mathrm{Q}}(\mathrm{E}_{\mathrm{Q}}(M_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) \mid \mathcal{F}_s) = \mathrm{E}_{\mathrm{Q}}(M_{t-1} \mid \mathcal{F}_s) = \ldots = M_s.$$

Лему доведено. □

Лема 3.2.48. *Нехай* $\{M_t, \mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T}\}$ *–* d*-вимірний інтегровний адаптований процес. Тоді наступні властивості еквівалентні:*

1) $\{M_t, \mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T}\}$ – Q*-мартингал;*

2) для будь-якого обмеженого передбачуваного d*-вимірного процесу* $\{\xi_t, \mathcal{F}_t, 1 \leq t \leq T\}$ *і будь-якого* $N_0 \in \mathbb{R}$ *мартингальне перетворення* $N_t = N_0 + \sum_{k=1}^{t} \xi_k \cdot (M_k - M_{k-1})$ – Q*-мартингал відносно тієї ж фільтрації;*

3) $\mathrm{E}_{\mathrm{Q}} N_T = N_0$*, де процес* N *визначено у пункті 2).*

Доведення. Доведемо, що з 1) випливає 2). Справді, згідно з лемою 3.2.47, достатньо довести, що $\mathrm{E_Q}(N_{t+1} - N_t \mid \mathcal{F}_t) = 0$. Але

$$\begin{aligned}\mathrm{E_Q}(N_{t+1} - N_t \mid \mathcal{F}_t) = \mathrm{E_Q}(\xi_t \cdot (M_t - M_{t-1}) \mid \mathcal{F}_{t-1}) = \\ = (\xi_t \cdot (\mathrm{E_Q}(M_t - M_{t-1} \mid \mathcal{F}_{t-1})) = 0.\end{aligned}$$

Очевидно, що з 2) випливає 3).

Тепер доведемо, що з 3) випливає 1). Для цього покладемо

$$\xi_{t_0} = \xi^c_{t_0} = \mathrm{E_Q}(M_t - M_{t-1} \mid \mathcal{F}_{t-1})\mathbb{1}\{\|\mathrm{E_Q}((M_t - M_{t-1}) \mid \mathcal{F}_{t-1})\|_2 \le c\}$$

для будь-якого $c > 0$, $\xi_t = 0$, $t \neq t_0$. Тоді $\{\xi_t, \mathcal{F}_t, t \in \{1, \dots, T\}\}$ – обмежений передбачуваний процес, і

$$\mathrm{E}\|\mathrm{E}((N_{t_0} - N_{t_0-1}) \mid \mathcal{F}_{t_0-1})\|_2^2 =$$

$$\mathrm{E}\|\mathrm{E_Q}((M_{t_0} - M_{t_0-1}) \mid \mathcal{F}_{t_0-1})\|_2^2 \cdot$$

$$\mathbb{1}\{\|\mathrm{E_Q}((M_{t_0} - M_{t_0-1}) \mid \mathcal{F}_{t_0-1})\|_2 \le c\} = 0.$$

Оскільки число $c > 0$ можна взяти будь-яким, ми одержимо при $c \uparrow \infty$, що

$$\mathrm{E}\|\mathrm{E_Q}((M_{t_0} - M_{t_0-1}) \mid \mathcal{F}_{t_0-1})\|_2^2 = 0.$$

Лему доведено. □

Мартингальні міри, безарбітражність та гіпотеза ефективності ринку

Далі з метою технічного спрощення вважаємо, що $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$.

Означення 3.2.49. Ймовірнісна міра Q на $(\Omega, \mathcal{F}_0)$ називається *мартингальною*, якщо відносно неї дисконтований ціновий процес $X = \{(X_{t,1}, \dots, X_{t,d}), t \in \mathbb{T}\}$ є мартингалом. Мартингальна міра P^* називається *еквівалентною мартингальною мірою*, якщо $\mathrm{P}^* \sim \mathrm{P}$. Множину всіх еквівалентних мартингальних мір позначимо $\mathcal{P}$.

Припустимо, що сама об'єктивна міра P є мартингальною, тобто відносно неї дисконтований ціновий процес є мартингалом. У цьому випадку, згідно з лемою 3.2.48 та рівністю (3.2.7), дисконтований капітал будь-якої самофінансованої стратегії також буде мартингалом відносно міри P, і $\mathrm{E_P} V_T = V_0$. Тобто самофінансовані стратегії є безарбітражними та не дають додатного очікуваного прибутку. Припущення про те, що $\mathrm{P} \in \mathcal{P}$, є сильною формою так званої *гіпотези ефективності ринку* (ГЕР).

У моделі ринку, що містить, зокрема, безризикову облігацію, інвестори, несхильні до ризику, але сприятливі до сильної форми ГЕР, не будуть вкладати гроші в ризикові активи. Але гіпотеза про те, що ринок безарбітражний, не означає, що обов'язково самі міра P є мартингальною; це набагато більш слабка та гнучка форма ГЕР. Обговоримо ці поняття детальніше.

3.2.8 Три форми гіпотези ефективних ринків

З 30-х років і до початку 60-х років XX століття поширювалися різні рецепти того, як заробляти гроші на фондових біржах. Домінуючою була теорія, що бере початок у XVIII столітті від Адама Сміта і стверджує, що ринки акцій є принципово непостійними, змінними, нестійкими, а ціни коливаються навколо деякого істинного або фундаментального значення. Стартуючи з початкової роботи Бенджаміна Грехема, традиційний аналіз інвестицій включає детальний розгляд рахунків компанії і визначення на основі цього, чи є дана інвестиція дешевою чи дорогою. Метою має бути купівля дешевих акцій і продаж дорогих. Будь-яка додаткова діяльність – це дії ірраціональних інвесторів, що купують або продають на емоційних підставах, без детального аналізу.

К 60-м рокам стало зрозумілим, що ці, на загальну думку, надійні методи інвестування не спрацьовують. Стратегії, що базуються на детальному аналізі, не працюють краще за звичайні стратегії типу купи-та-тримай. Спроби пояснити це явище призвели до *гіпотези ефективних ринків* (efficient market hypothesis, ГЕР), яка стверджує, що ринкові ціни вже містять відповідну інформацію. Механізм ринкових цін є таким, що торговельні відносини невеликої кількості інформованих аналітиків можуть мати великий вплив на ціни на ринку. Ліниві (або економні) інвестори тоді можуть діяти вільно, знаючи, що дослідження інших збережуть ефективність ринку.

Наукова література розрізняє різні форми гіпотези ефективних ринків, що базуються на все більш глибокому розумінні того, що складає *відповідну інформацію* (relevant information). Зокрема, звичайно розрізняють наступні три форми ГЕР:

Сильна форма ГЕР: ринкові ціни містять всю інформацію, як публічно відкриту, так і інсайдерську (тобто таку, що є відкритою лише для обмеженої кількості додатково інформованих осіб).

Наполовину сильна форма ГЕР: ринкові ціни містять всю публічно відкриту інформацію.

Слабка форма ГЕР: ринкова ціна інвестиції містить всю інформацію про цінову історію цієї інвестиції.

У всьому світі робота фондових бірж регулюється. Часто запроваджуються правила, які перешкоджають персонам, що мають доступ до непублічної, але важливої для ціноутворення інформації, використовувати її для власного прибутку. Тому вищому менеджменту, що причетний до перемов про злиття або продаж компаній, часто забороняється торгувати акціями своїх компаній. Такі обмеження є непотрібними, якщо має місце сильна форма гіпотези.

Наполовину сильна форма ефективності ринку стверджує, що в ціні відображається вся публічно відкрита інформація. Різні фондові біржі вимагають різний рівень відкритості. Таким чином, було б природним очікувати різних рівнів ефективності для різних ринків. Наприклад, Нью-Йоркська фондова біржа, яка вимагає значного рівня відкритості, мала б бути більш ефективною, ніж біржа з меншим рівнем. Навіть якщо інформація публічно відкрита, її швидке і точне отримання вимагає затрат. Перевага, яку отримують використанням даних, важливих для утворення цін, нівелюється затратами на отримання та обробку інформації.

Також не існує загальноприйнятого означення, що ж складає публічно відкриту інформацію. Доступ до звітів компанії є легким і дешевим. Однак, приватний інвестор не має можливості зустрітися з вищим керівництвом великих компаній. З іншого боку, менеджери інвестиційних фондів, що розпоряджаються значними сумами, проводять багато часу в бесідах з вищим керівництвом організацій, в які вони інвестували або планують інвестувати кошти. Очевидно, менеджери фондів отримують перевагу в тому відношенні, що вони можуть формувати власну думку про рівень компетентності керівництва і стратегію компанії. Тому не можна прямо визначити, коли наполовину сильна форма ефективності ринку порушується.

Остання форма ефективності, слабка, просто стверджує, що цінова історія акції не може бути використана для передбачення майбутніх змін на ринку. Ця форма, якщо має місце, означає, що аналіз цінових таблиць та наявної структури цін нічого не дають. При слабкій формі ефективності так званий технічний аналіз (або використання графіків) дає не більш ніж випадковий вибір акцій.

Пізніше поняття ефективності подрібнювалось на різні форми з тим, щоб поліпшити означення доходу. Найбільш істотним кроком в цьому напрямку був розгляд набору доходів різної вартості. При цьому можна передбачити деякі зміни на ринку, але треба врахувати вартість досліджень для отримання прогнозу (або плата менеджеру інвестиційного фонду за цей прогноз для вас) плюс плату за трансакції (роботу брокера, ринкову різницю за попит-пропозицію). Щоб це мало сенс, вигода повинна бути досить великою і перевищувати всі вказані затрати.

Питання про те, є ринок ефективним чи ні, має велике значення для управління інвестиціями. Активні менеджери фондів намагаються визначити і використати завищені чи занижені ціни. Пасивні – просто диверсифікують, тобто розповсюджують інвестиції по всьому ринку. Арифметика диктує, що, в цілому, активні менеджери повинні утримувати ринок, і тому, на жаль, результати роботи фондів з активними менеджерами не сильно відрізняються від фондів, де менеджери пасивні. Однак, якщо ринок не є ефективним, ми маємо очікувати, що фонди з талановитими активними менеджерами працюють краще за фонди з пасивними менеджерами.

Аргументи за і проти кожної форми гіпотези ефективних ринків

Тестування ГЕР пов’язане з багатьма труднощами. Існує значна кількість літератури, в якій доводиться наявність цінових коливань, що суперечать ГЕР. З іншого боку, також у великій кількості публікацій доводиться наявність різних форм ГЕР. Обидві наукові школи можуть наводити багато емпіричних аргументів та результатів статистичних тестів. З філософської точки зору, було б доречно спитати, як можуть існувати категоричні доведення двох взаємно протилежних тверджень. Одним з можливих пояснень є те, що багато опублікованих результатів тестів роблять неявні, але не обов’язково відповідні реальності припущення (наприклад, припускається нормальний розподіл доходу або стаціонарність часових рядів).

Частина цих неузгодженостей є лише неузгодженістю термінології. Наприклад, чи вважати аномальні ціни спростуванням ГЕР, якщо вартість трансакцій перешкоджає використанню аномальності?

Більш складна проблема пов’язана з поняттям дозволеного ризику. ГЕР не суперечить існуванню стратегій, що дають прибуток вищий, ніж ринковий портфель, але при цьому мають і більший ризик. Ринок нагороджує інвесторів за ризикованість, і, в середньому, ми очікуємо, що стратегії з більшим ризиком дають більший дохід. Що могло б суперечити ГЕР, так це існування інвестиційної стратегії, прибуток від якої вищий, ніж компенсація відповідного їй ризику. На жаль, не існує загальновизнаного означення ризику, а, значить, і абсолютно акуратного способу його виміряти.

Після цих роз’яснень розглянемо, які заходи можна вжити щодо різних форм ГЕР.

Тестування сильної форми ГЕР. Це є досить проблемним, тому що вимагає від дослідника мати доступ до інформації, що публічно не оголошується. Однак, вивчення роботи з акціями директорів компаній призводить до припущення, що навіть, маючи інсайдерську інформацію, важко отримати якісь виняткові результати.

Тестування слабкої форми ГЕР. Використання цінової історії для передбачення майбутніх цін, часто використовуючи графіки попередніх даних, називається технічним або графічним аналізом. Дослідження не виявили різниці у доходах від акцій, отриманим за допомогою технічного аналізу, і отриманим за допомогою чисто випадкового вибору акцій. До ГЕР в слабкій формі не існує обґрунтованих заперечень.

Найбільше досліджень зосереджено на наполовину сильний формі ГЕР, і там дебати є найбільш напруженими. Ми розглянемо тести ГЕР двох категорій: тести інформаційної ефективності та тести мінливості.

Інформаційна ефективність

ГЕР (в її різних формах) стверджує, що ціни акцій відображають інформацію. Однак, гіпотеза не повідомляє нам точно, як нова інформація впливає на ціни. Також важко емпірично точно встановити, коли саме надходить інформація – наприклад, чутки про події часто випереджають офіційні оголошення.

Багато досліджень показують, що на деякі події ринок реагує занадто сильно (надреакція, over-reaction), на деякі – занадто слабко (недореакція, under-reaction). Надреакція / недореакція коректуються протягом довгого періоду часу. Якщо це так, маклери отримують прибутки з повільної корекції, і ефективність не має місця.

Деякі виявлені дослідженнями ефекти можна класифікувати як надреакцію на події, наприклад:

1. Минулі результати – минулі переможці потім часто стають невдахами і навпаки – ринок схильний давати надреакцію на минулі результати.

2. Деякі показані прибутки можуть мати вплив на прогнозування, тобто високі прибутки компаній відображаються в цінах, минулі виплати – також в цінах, а чистий капітал цих компаній – в ринкових котируваннях, особливо для минулих невдах, і це впливає на збільшення прибутків. Знову ми маємо приклад надреакції ринку на минуле зростання.

Також зафіксовано приклади недореакції на події:

1. Ціни на акції протягом до одного року продовжують реагувати на оголошення їх прибутковості. Це приклад недореакції на інформацію, що повільно коректується.

2. Ненормально великий дохід, що отримують батьківська та дочірня компанії одразу після роз'єднання. Це ще один приклад того, що ринок занадто повільно розпізнає вигоди події.

3. Ненормально великі втрати одразу після об'єднання (узгоджене поглинання веде до менших наступних доходів). Ринок схильний переоцінювати вигоди об'єднання, ціни акцій повільно реагують, коли виявляється помилковість цієї оптимістичної точки зору.

Всі ці ефекти часто називають "аномаліями" в рамках ГЕР. Навіть якщо ринок є ефективним, майже неможливо уникнути деяких випадків невідповідних цін. Треба очікувати багатьох випадків як надреакції, так і недореакції. Це чітко встановлено в сучасній літературі. Навіть більш важливим є те, що відмічені ефекти не схильні продовжуватися протягом тривалого часу, і тому не дають можливості отримувати додаткові прибутки. Наприклад, ефект маленьких компаній привернув увагу на початку 1980-х років. Це було зумовлено високими результатами діяльності таких компаній в 1960-80 роках. Однак, при проведенні стратегії, збудованої на цьому явищі, інвестор отримав би ненормально малий дохід в 1980-і та на початку 1990-х років. В цей період не з'являлися статті, які стверджували б, що дохід малих компаній спростовує ГЕР.

Інші приклади аномалій, наприклад, здатність підрахованої норми прибутковості вказувати на майбутні високі результати, близькі до ризику. Якщо цей ризик брати до уваги, багато досліджень, що наводять аргументи про неефективність, насправді узгоджуються з ГЕР.

Тести мінливості

Деякі експерти відмічали, що ціни на акції “надмірно мінливі” (“excessively volatile”). Під цим вони розуміли, що зміни ринкової ціни акцій (спостережену мінливість) не можна пояснити надходженням нової інформації. Це було оголошено як факт надреакції ринку, що не узгоджується з ефективністю.

Твердження про “надмірну мінливість” у формі, придатній до тестування, вперше було сформульовано в 1981 році Шіллером. Він розглянув модель дисконтованого грошового потоку для акцій, починаючи з 1870 року. Використовуючи розмір виплачених дивідендів і деякі термінальні вартості акцій, він зміг обчислити досконалу передбачену ціну, ціну “правильної акції”, за умови, що учасники ринку були здатні правильно передбачити майбутні дивіденди. Різниця між досконалою передбаченою ціною і реальною ціною з’являлася з помилок передбачення майбутніх дивідендів. Якщо учасники ринку є розсудливими, ми не повинні очікувати систематичних помилок прогнозу. Також для ефективних ринків вільні зміни досконалої передбаченої ціни мають корелювати зі змінами реальної ціни, оскільки обидві реагують на одну й ту ж інформацію.

Шіллер знайшов вагомі аргументи того, що спостережений рівень мінливості суперечить ГЕР. Однак, наступні дослідження з використанням різних формулювань проблеми, з’ясували, що порушення ГЕР лише відповідають межі статистичної значимості. За цим слідувала значна кількість критики методології Шіллера, і ця критика стосувалася:

а) вибору термінальної вартості акцій;

б) використання постійного дисконтного множника;

в) відхилення в оцінках дисперсії, зумовленого автокореляцією;

г) можливої нестаціонарністі ряду, тобто ряд може мати випадковий тренд, який робить недійсними вимірювання, отримані для дисперсії ціни акції.

Хоча багато авторів в наступних дослідженнях намагалися подолати недоліки початкової роботи Шіллера, але задача створення моделі для дивідендів і умов розподілу залишається нерозв'язаною. Зараз існують деякі моделі рівноваги, які узгоджують і спостережену мінливість цін, і спостережену поведінку дивідендів. Однак, значна наявна література по перевірці мінливості найкраще може бути описана як непереконлива.

Література з тестування ГЕР є численною, і можна знайти статті на підтримку будь-якої точки зору. Можна відшукати дослідження, що наводять незаперечні аргументи і за, і проти ГЕР.

Багатоперіодний варіант фундаментальної теореми оцінювання активів

Сформулюємо теорему, яка в багатоперіодній моделі узгоджує відсутність арбітражу з наявністю мартингальних мір.

Теорема 3.2.50. *Модель ринку є безарбітражною тоді і тільки тоді, коли множина $\mathcal{P}$ мартингальних мір непорожня. При цьому існує міра $\mathrm{P}^* \in \mathcal{P}$ така, що похідна Радона-Никодима $d\mathrm{P}^*/d\mathrm{P}$є обмеженою.*

Доведення. Достатність. Нехай $\mathcal{P} \neq \varnothing$. Це означає, що існує міра P^*, відносно якої дисконтований ціновий процес, а значить, і дисконтований капітал, що відповідає обмеженій самофінансованій стратегії і ненульовому початковому капіталу, задовольняє, згідно з лемою 3.2.48 рівність $\mathrm{E}_{\mathrm{P}^*} V_T = V_0 = 0$, тобто в класі обмежених самофінансованих стратегій арбітражу нема, а тоді, згідно з теоремою 3.2.44, ринок є безарбітражним.

Необхідність. Визначимо для $t \in \{1, \ldots, T\}$ множину

$$\mathcal{K} := \{\eta \cdot (X_t - X_{t-1}) : \eta \in L_0(\Omega, \mathcal{F}_{t-1}, \mathrm{P}, \mathbb{R}^d)\}.$$

Згідно з теоремою 3.2.15, ринок є безарбітражним тоді і тільки тоді, коли для всіх $t \in \{1, \ldots, T\}$ має місце рівність

$$\mathcal{K} \cap \mathcal{L}^0_+(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathrm{P}, \mathbb{R}^d) = \{0\}. \qquad (3.2.10)$$

Відзначимо, що (3.2.10) залежить лише від нульових множин міри P. Тепер застосуємо "зворотну" індукцію. Умова (3.2.10) дозволяє застосувати теорему 3.2.15 до кожного періоду торгів.

Зокрема, при $t = T$ ми одержуємо ймовірнісну міру $\mathrm{P}_T \sim \mathrm{P}$ з обмеженою щільністю $d\mathrm{P}_T/d\mathrm{P}$, для якої $\mathrm{E}_{\mathrm{P}_T}(X_t - X_{t-1} \mid \mathcal{F}_{T-1}) = 0$. Припустимо, що ми вже знайшли міру $\mathrm{P}_{t+1} \sim \mathrm{P}$ з обмеженою щільністю $d\mathrm{P}_{t+1}/d\mathrm{P}$, для якої $\mathrm{E}_{\mathrm{P}_{t+1}}(X_{k+1} - X_k \mid \mathcal{F}_k) = 0$ для $k = t, \ldots, T-1$. Приймемо міру P_{t+1} за об'єктивну та розглянемо період між $t-1$ і t. У силу еквівалентності мір P_{t+1} і P співвідношення (3.2.10) є правильним. Якщо замінити P на P_{t+1}, одержимо міру $\mathrm{P}_t \sim \mathrm{P}_{t+1}$ таку, що $d\mathrm{P}_t/d\mathrm{P}_{t+1}$ обмежена, і $\mathrm{E}_{\mathrm{P}_t}(X_t - X_{t-1} \mid \mathcal{F}_{t-1}) = 0$. Доведемо, що одночасно і

$$\mathrm{E}_{\mathrm{P}_t}(X_{k+1} - X_k \mid \mathcal{F}_k) = 0$$

для $k = t, \ldots, T-1$. Справді, для будь-якої події $A \in \mathcal{F}_k$

$$\int_A \mathrm{E}_{\mathrm{P}_t}(X_{k+1} - X_k \mid \mathcal{F}_k) d\mathrm{P}_t = \int_A (X_{k+1} - X_k) d\mathrm{P}_t =$$

$$= \int_A (X_{k+1} - X_k) \frac{d\mathrm{P}_t}{d\mathrm{P}_{t+1}} d\mathrm{P}_{t+1} =$$

$$= \int_A \mathrm{E}_{\mathrm{P}_{t+1}}(X_{k+1} - X_k \mid \mathcal{F}_k) \frac{d\mathrm{P}_t}{d\mathrm{P}_{t+1}} d\mathrm{P}_{t+1} = 0.$$

Тут використано те, що похідна Радона-Никодима $d\mathrm{P}_t/d\mathrm{P}_{t+1}$ будується відносно σ-алгебри $\mathcal{F}_t$, тому є $\mathcal{F}_t$-вимірною, отже, $\mathcal{F}_k$-вимірною для всіх $t \leq k \leq T-1$. Зауважимо, що похідна Радона-Никодима $d\mathrm{P}_t/d\mathrm{P}$ є обмеженою, оскільки вона дорівнює

$$\frac{d\mathrm{P}_t}{d\mathrm{P}} = \frac{d\mathrm{P}_t}{d\mathrm{P}_{t+1}} \cdots \frac{d\mathrm{P}_T}{d\mathrm{P}}.$$

Нарешті, покладемо $\mathrm{P}^* = \mathrm{P}_1$, це і буде шукана мартингальна міра з обмеженою похідною Радона-Никодима $d\mathrm{P}^*/d\mathrm{P}$, бо для неї за індукцією $\mathrm{E}_{\mathrm{P}_1}(X_{k+1} - X_k \mid \mathcal{F}_k) = 0$ для всіх $0 \leq k \leq T-1$. $\square$

Європейські платіжні зобов'язання

Припустимо, що задано стохастичний базис $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}}, \mathrm{P})$, причому $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$, а $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$.

Означення 3.2.51. *Європейським* платіжним зобов'язанням називають будь-яку невід'ємну випадкову величину C на просторі

$\{\Omega, \mathcal{F}_T, \mathrm{P}\}$. Європейське платіжне зобов'язання C називають *похідним цінним папером* або *деривативом* акцій $\{S_t = (S_{t,1}, \ldots, S_{t,d}), t \in \mathbb{T}\}$, якщо C є вимірним відносно σ-алгебри $G_T := \sigma\{S_t, 1 \leq \leq t \leq T\} \subset \mathcal{F}_T$.

Зауваження 3.2.52. З фінансової точки зору, Європейське платіжне зобов'язання інтерпретується як таке, що подається до виконання в останній момент часу T, який називається *датою виконання*, або *датою погашення*, на відміну від *Американського платіжного зобов'язання*, яке можна подати до виконання у будь-який момент часу до фіксованої дати погашення. Назви "Європейське" та "Американське" ні в якому разі не означають, що такі цінні папери розповсюджені тільки в Європі чи тільки в Америці. Ці назви походять від різних угод, укладених на опціонних біржах по обидва боки океану. У наші дні географія вже ні при чому, а назви залишились. Хоча Європейське платіжне зобов'язання не можна виконати до моменту T, але його можна перепродати. Навіть для позабіржового Європейського опціону, як правило, можна домовитися з банком про закриття позиції за прийнятною ціною, або знайти інший банк, готовий укласти протилежну угоду.

Розглянемо детальніше приклади опціонів Європейського типу. Спочатку розглянемо зобов'язання, які залежать лише від ціни акції у момент виконання.

Приклад 3.2.53. Покупець Європейського опціону купівлі має право, але не зобов'язаний, купити акцію S в момент T за страйковою ціною K. Тобто це платіжне зобов'язання виду

$$C^{call} := (S_T - K)^+.$$

Відповідно, покупець Європейського опціону продажу має право, але не зобов'язаний продати акцію S у момент T за страйковою ціною K. Це відповідає платіжному зобов'язанню

$$C^{put} := (K - S_T)^+.$$

Тепер розглянемо Європейські опціони, які залежать від цін акції на всій множині $\mathbb{T}$. Зверніть увагу, що назви цих опціонів часто теж "географічні", причому зовсім не "європейські".

Приклад 3.2.54. Виплата за *Азійським опціоном* залежить від усередненої за часом ціни акції

$$S_{av} := \frac{1}{T+1}\sum_{k=0}^{T} S_k.$$

Наприклад, виплати за Азійським опціоном купівлі дорівнює $C_{av}^{call} := (S_{av} - K)^+$, а за Азійським опціоном продажу дорівнює $C_{av}^{put} = (K - S_{av})^+$.

Можна усереднити не ціну акції, а страйкову ціну. Відповідні опціони матимуть вигляд $(S_T - S_{av})^+$ та $(S_{av} - S_T)^+$.

Приклад 3.2.55. Виплата за бар'єрним опціоном залежить від того, чи досягне за час від 0 до T ціна акції деякого бар'єру (верхнього чи нижнього). Всього існує 8 типів основних бар'єрних опціонів: "вгору-і-назовні" (up-and-out), "вгору-і-всередину" (up-and-in), "вниз-і-назовні"(down-and-out), "вниз-і-всередину" (down-and-in), і при цьому це можуть бути опціони купівлі або продажу. Наприклад,

$$C_{u\&in}^{call} = \begin{cases} (S_T - K)^+, & \text{якщо} \quad \max_{t\in\mathbb{T}} S_t > B, \\ 0, & \text{у протилежному випадку;} \end{cases}$$

$$C_{d\&o}^{put} = \begin{cases} (K - S_T)^+, & \text{якщо} \quad \min_{t\in\mathbb{T}} S_t > B, \\ 0, & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Приклад 3.2.56. Виплата за *опціоном з післядією* здійснюється в усіх випадках, тому що в ньому страйкову ціну замінено на мінімальну (для опціонів купівлі) та максимальну (для опціонів продажу) ціну акції за весь час торгів, тобто

$$C_{lookback}^{call} = S_T - \min_{t\in\mathbb{T}} S_t, \quad C_{lookback}^{put} = \max_{t\in\mathbb{T}} S_t - S_T.$$

Приклад 3.2.57. Виплата за *цифровим опціоном* має наступний вигляд

$$C_{digital}^{call} = \mathbb{1}\{S_T \geq K\}, \quad C_{digital}^{put} = \mathbb{1}\{S_T \leq K\}.$$

Цей опціон ще називають *бінарним*, бо виплата за ним набуває лише двох значень.

Приклад 3.2.58. Виплата за *опціоном "веселка"* здійснюється за формулою

$$C^{call}_{rainbow} = \left(\max_{t\in\mathbb{T}} S_t - K\right)^+, \quad C^{put}_{rainbow} = \left(K - \min_{t\in\mathbb{T}} S_t\right)^+.$$

Виплата за *опціоном "типу кошику"* залежить від усередненої ціни деякої кількості різних активів, які і утворюють "кошик". Вона має вигляд

$$C^{call}_{basket} = \left(\sum_{i=1}^{d} S_{T,i} - K\right)^+, \quad C^{put}_{basket} = \left(K - \sum_{i=1}^{d} S_{T,i}\right)^+.$$

Дисконтовані платіжні зобов'язання. Досяжні платіжні зобов'язання та їхні властивості

Далі, якщо це не викличе непорозумінь, будемо називати Європейські платіжні зобов'язання просто платіжними зобов'язаннями.

Означення 3.2.59. *Дисконтоване платіжне зобов'язання*, що відповідає платіжному зобов'язанню C – це випадкова величина

$$H = \frac{C}{S_{T,0}}.$$

З чисто математичної точки зору зручніше мати справу з дисконтованими платіжними зобов'язаннями, але з економічної точки зору, по-перше, при цьому втрачаються деякі нюанси, а по-друге, треба ретельно підбирати той актив, який доцільно вважати безризиковим. Це не завжди очевидно, крім того, такий актив може змінюватися з часом.

З цього моменту припускаємо, що ринок є безарбітражним, тобто $\mathcal{P} \neq \varnothing$.

Означення 3.2.60. Платіжне зобов'язання C називається *досяжним* (таким, яке можна породити, реплікувати, хеджувати, відтворити), якщо існує така самофінансована стратегія $\overline{\xi}$, капітал якої в останній момент T збігається з C м.н., тобто $C = \overline{\xi}_T \cdot \overline{S}_T$ м.н. Ця стратегія називається такою, що породжує (відтворює) зобов'язання C.

Очевидно, платіжне зобов'язання C є досяжним одночасно з відповідним дисконтованим платіжним зобов'язанням

$$H = \overline{\xi}_T \cdot \overline{X}_T = V_0 + \sum_{k=1}^{T} \xi_k \cdot (X_k - X_{k-1}),$$

та їх породжує одна й та ж самофінансована стратегія. Доведемо цікавий факт: кожне дисконтоване платіжне зобов'язання є інтегровним відносно будь-якої мартингальної міри.

Теорема 3.2.61. *Нехай* $\mathrm{P}^* \in \mathcal{P}$, *а* $H \geq 0$ *– деяке дисконтоване досяжне платіжне зобов'язання на стохастичному базисі* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{T}}, \mathrm{P})$, $V = \{V_t, t \in \mathbb{T}\}$ *– капітал деякої самофінансованої стратегії, що породжує* H. *Тоді:*

1) $\mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(H) < \infty$;
2) $V_t = \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(H \mid \mathcal{F}_t)$ P*-м.н.*, $t \in \mathbb{T}$, *тобто, зокрема, капітал* V *є невід'ємним* P^**-мартингалом відносно фільтрації* $\mathcal{F}_t$.

Доведення. Спочатку покажемо, що дисконтований капітал V_t самофінансованої породжувальної стратегії невід'ємний: $V_t \geq 0$ P-м.н. Застосуємо "зворотну" індукцію. У момент T $V_T = H \geq 0$ P-м.н. Припустимо, що $V_t \geq 0$ P-м.н. для деякого $t \in \{1, \ldots, T\}$. Розглянемо різницю

$$V_t - V_{t-1} = \xi_t \cdot (X_t - X_{t-1}),$$

і виразимо V_{t-1}:

$$V_{t-1} = V_t - \xi_t \cdot (X_t - X_{t-1}) \geq -\xi_t \cdot (X_t - X_{t-1}) \quad \text{P-м.н.}$$

Нехай $c > 0$; покладемо

$$\xi_k^c := \xi_k \mathbb{1}\{\|\xi_1\|_1 \leq c, \ldots, \|\xi_k\|_1 \leq c\} =: \xi_k \mathbb{1}_c^k, \quad 1 \leq k \leq t,$$

і візьмемо будь-яку міру $\mathrm{P}^* \in \mathcal{P}$. Тоді $V_{t-1}\mathbb{1}_c^t$ є $\mathcal{F}_{t-1}$-вимірною випадковою величиною, інтегровною, оскільки вона є сумою скінченного числа добутків обмежених ($\xi_{t,i}^c$) та інтегровних ($X_{t,i}$) випадкових величин; тому

$$V_{t-1}\mathbb{1}_c^t = \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(V_{t-1} I_c^t \mid \mathcal{F}_{t-1}) \geq -\mathrm{E}(\xi_t^c \cdot (X_t - X_{t-1}) \mid \mathcal{F}_{t-1}) =$$
$$= -\xi_t^c \cdot (\mathrm{E}(X_t - X_{t-1}) \mid \mathcal{F}_{t-1}) = 0.$$

Спрямовуючи $c \uparrow \infty$, одержимо $V_t \geq 0$ P-м.н. Тепер, принаймні, можемо, хоча б формально, записати умовне математичне сподівання $\mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(V_t \mid \mathcal{F}_{t-1})$; воно гіпотетично може дорівнювати $+\infty$, але не є невизначеним. Тепер

$$(\mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(V_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) - V_{t-1})\mathbb{1}_c^t = (\mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(V_t - V_{t-1}) \mid \mathcal{F}_{t-1})\mathbb{1}_c^t =$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(\xi_t \cdot (X_t - X_{t-1})\mathbb{1}_c^t \mid \mathcal{F}_{t-1}) = \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(\xi_t^c \cdot (X_t - X_{t-1}) \mid \mathcal{F}_{t-1})\mathbb{1}_c^t =$$

$$\xi_t^c \cdot \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(X_t - X_{t-1}) \mid \mathcal{F}_{t-1})\mathbb{1}_c^t = 0.$$

Знову спрямовуючи $c \uparrow \infty$, одержимо рівність

$$\mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(V_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) = V_{t-1} \quad \mathrm{P} - \text{м.н.}$$

Тепер застосуємо "пряму" індукцію: при $t = 1$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(V_1 \mid \mathcal{F}_0) = \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*} V_1 = V_0,$$

а це деяке невід'ємне число, отже, $V_1 \in L_1(\mathrm{P}^*)$ (інтегровний відносно міри P^*). Якщо вже знаємо, що $\mathrm{E}_{\mathrm{P}^*} V_{t-1} < \infty$, то з рівності $\mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(V_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) = V_{t-1}$ одержимо $\mathrm{E}_{\mathrm{P}^*} V_t = \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*} V_{t-1} < \infty$. Остаточно, при $t = T$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{P}^*} V_t = \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*} H < \infty.$$

Теорему доведено. □

Зауваження 3.2.62. Рівність

$$V_t = \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(V_t \mid \mathcal{F}_t) = \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(H \mid \mathcal{F}_t) \tag{3.2.11}$$

є цікавою з тої точки зору, що V_t не залежить від міри P^*, а умовне математичне сподівання $\mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(H \mid \mathcal{F}_t)$ не залежить від породжувальної стратегії H. Отже, капітал V_t породжувальної стратегії не залежить від цієї стратегії, тобто є однаковим для всіх таких стратегій, а $\mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(H \mid \mathcal{F}_t)$ не залежить від P^*.

Зауваження 3.2.63. Якщо H – досяжне дисконтоване платіжне зобов'язання, $\mathrm{P}^* \in \mathcal{P}$, то значення $\mathrm{E}_{\mathrm{P}^*} H$, згідно з теоремою 3.2.61, не залежить від P^*. Це значення природно вважати єдиною справедливою ціною зобов'язання H. Дійсно, інша ціна для H

веде до арбітражу. Наприклад, нехай в момент $t = 0$ зобов'язання H можна продати за ціною $\pi_1 > \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*} H = V_0 = \overline{\xi}_1 \cdot \overline{X}_0$; тоді треба продати H і купити породжувальний портфель $\overline{\xi}_1$; у результаті одержимо прибуток $\pi_1 - \overline{\xi}_1 \cdot \overline{X}_0 > 0$ в момент 0, який можна покласти на депозит, а в останній момент грошей $\overline{\xi}_T \cdot \overline{X}_T$ вистачить на придбання H. Навпаки, якщо в момент $t = 0$ H можна придбати за ціною $\pi_2 < \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*} H$, то треба продати породжувальний портфель ("продати" або "купити" портфель – це відносне поняття; можливо, якісь активи при цьому справді купуються, інші підлягають короткому продажу) і за одержані гроші купити H; у нас буде сума $\overline{\xi}_1 \cdot \overline{X}_0 - \pi_2$; в останній момент ми маємо куплене зобов'язання H і можемо його реалізувати тому, хто купив породжувальний портфель. В обох ситуаціях маємо арбітраж.

Тепер уведемо загальне поняття справедливої ціни дисконтованого платіжного зобов'язання в багатоперіодній моделі ринку.

Справедливі ціни Європейських платіжних зобов'язань

Означення 3.2.64. Число $\pi \geq 0$ називається *справедливою ціною платіжного зобов'язання H*, якщо існує такий невід'ємний випадковий процес $\{X_{d+1,t}, \mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T}\}$, що $X_{d+1,0} = \pi$, $X_{d+1,T} = H$, і розширений ринок з ціновими процесами

$$\overline{X} = \{X_{1,t}, \ldots, X_{d+1,t}, \mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T}\}$$

є безарбітражним.

Множину справедливих цін дисконтованого платіжного зобов'язання H позначимо $\Pi(H)$. Нижню і верхню межі множини $\Pi(H)$ позначимо $\pi^{\downarrow}(H) = \inf \Pi(H)$ та $\pi^{\uparrow}(H) = \sup \Pi(H)$.

Теорема 3.2.65. *1. Множина справедливих цін платіжного зобов'язання непорожня і має вигляд*

$$\Pi(H) = \{\mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(H) : \mathrm{P}^* \in \mathcal{P} \;\; i \;\; \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(H) < \infty\}. \qquad (3.2.12)$$

2. Нижня і верхня межі цієї множини задаються як

$$\pi^{\downarrow}(H) = \inf_{\mathrm{P}^* \in \mathcal{P}} \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(H) \quad i \quad \pi^{\uparrow}(H) = \sup_{\mathrm{P}^* \in \mathcal{P}} \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(H).$$

Доведення. 1. Нехай число $\pi \in \Pi(H)$, тобто є справедливою ціною. Тоді, за означенням, розширений ринок з ціновим процесом $\overline{X}_t = (X_{1,t}, \ldots, X_{d+1,t})$ є безарбітражним. За теоремою 3.2.50 існує міра $\widehat{\mathrm{P}} \sim \mathrm{P}$ така, що ціновий процес $\overline{X}_t$ є $\widehat{\mathrm{P}}$-мартингалом. Зокрема, вона буде з класу $\mathcal{P}$, оскільки для неї ціновий процес $X_t = (X_{1,t}, \ldots, X_{d,t})$ є мартингалом. Окрема компонента X_{d+1} теж є мартингалом відносно $\widehat{\mathrm{P}}$, тобто

$$X_0 = \mathrm{E}_{\widehat{\mathrm{P}}}(H \mid \mathcal{F}_0) = \mathrm{E}_{\widehat{\mathrm{P}}} H = \pi.$$

Отже, π належить до множини у правій частині (3.2.12), тобто

$$\Pi(H) \subset \{\mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(H) : \mathrm{P}^* \in \mathcal{P} \quad \text{і} \quad \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(H) < \infty\}.$$

Тепер розглянемо будь-яке число $\mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(H)$. Утворимо невід'ємний мартингал $X_{d+1,t}$: $\mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(H \mid \mathcal{F}_t)$. Для нього $X_{d+1,0} = \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(H)$, а $X_{d+1,T} = H$. Оскільки міра $\mathrm{P}^* \in \mathcal{P}$, то розширений ціновий процес $\overline{X}_t = (X_{1,t}, \ldots, X_{d+1,t})$ буде мартингалом, а це означає, що розширений ринок безарбітражний, а тоді за означенням, $\mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(H)$ – справедлива ціна. Отже,

$$\{\mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(H) : \mathrm{P}^* \in \mathcal{P} \quad \text{і} \quad \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(H) < \infty\} \subset \Pi(H),$$

і ми довели рівність (3.2.12).

2. Щоб довести непорожність множини $\Pi(H)$, міркуємо так само, як і при доведенні леми 3.2.22, а саме, зафіксуємо деяку міру $\widetilde{\mathrm{P}} \sim \mathrm{P}$, для якої $\mathrm{E}_{\widetilde{\mathrm{P}}}(H) < \infty$. Наприклад, можна взяти $d\widetilde{\mathrm{P}} := c(1+H)^{-1} d\mathrm{P}$, де c –нормуючий множник. Відносно цієї міри ринок є безарбітражним. Тоді з теореми 3.2.50 випливає існування міри $\mathrm{P}^* \in \mathcal{P}$ такої, що похідна Радона-Никодима $d\mathrm{P}^*/d\mathrm{P}$ обмежена. При цьому $\mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(H) < \infty$, і число $\pi(H) := \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(H)$ буде справедливою ціною H, що випливає з доведення, наведеного вище. Рівність

$$\pi^{\downarrow}(H) = \inf_{\mathrm{P}^* \in \mathcal{P}} \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(H)$$

очевидна, бо ясно, що інфімум досягається на тих $\mathrm{P}^* \in \mathcal{P}$, для яких $\mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(H) < \infty$. Доведемо рівність

$$\pi^{\uparrow}(H) = \sup_{\mathrm{P}^* \in \mathcal{P}} \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(H).$$

Вона очевидна у тому випадку, коли для всіх $\mathrm{P}^* \in \mathcal{P}$ $\mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(H) < < \infty$. Нехай тепер існує міра $\mathrm{P}^\infty \in \mathcal{P}$, для якої $\mathrm{E}_{\mathrm{P}^\infty}(H) = \infty$. Треба довести, що

$$\sup_{\mathrm{P}^* \in \mathcal{P} \,:\, \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(H) < \infty} \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(H) = \infty,$$

тобто що для будь-якого числа $C > 0$ існує міра $\mathrm{P}^C \in \mathcal{P}$, для якої $\mathrm{E}_{\mathrm{P}^C}(H) > C$. Розглянемо платіжні зобов'язання $H \wedge n$, $n \geq 1$. Всі вони обмежені, тому $\mathrm{E}_{\mathrm{P}^\infty}(H \wedge n) < \infty$, але

$$\mathrm{E}_{\mathrm{P}^\infty}(H \wedge n) \uparrow \mathrm{E}_{\mathrm{P}^\infty}(H) = \infty,$$

тому знайдеться таке n, що $\infty > \mathrm{E}_{\mathrm{P}^\infty}(H \wedge n) > C$. Визначимо невід'ємний мартингал

$$X_{d+1,t} := \mathrm{E}_{\mathrm{P}^\infty}(H \wedge n \mid \mathcal{F}_t), \quad t \in \mathbb{T}.$$

Тоді P^∞ – еквівалентна мартингальна міра для розширеного ринку $\overline{X}_t = (X_{1,t}, \ldots, X_{d+1,t})$, який є, таким чином, безарбітражним. Тепер візьмемо деяку міру $\widetilde{\mathrm{P}} \in \mathcal{P}$, для якої $\mathrm{E}_{\widetilde{\mathrm{P}}}(H) < \infty$ (вона існує, оскільки $\Pi(H) \neq \varnothing$). Приймемо $\widetilde{\mathrm{P}}$ замість P за об'єктивну міру. Очевидно, $\mathrm{P}^\infty \sim \widetilde{\mathrm{P}}$. Фундаментальна теорема оцінювання активів (теорема 3.2.50) забезпечує існування міри $\mathrm{P}^* \sim \widetilde{\mathrm{P}}$, відносно якої розширений ринок $\overline{X}_t = (X_{1,t}, \ldots, X_{d+1,t})$ є мартингалом. Більше того, міру P^* можна вибрати так, щоб похідна Радона-Никодима була обмеженою, а тоді

$$\mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(H) = \mathrm{E}_{\widetilde{\mathrm{P}}}\left(H \frac{d\mathrm{P}^*}{d\mathrm{P}}\right) < \infty.$$

Оскільки P^* є мартингальною мірою для початкового ринку, то за доведенням пункту 1, $\mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(H)$ є справедливою ціною H. Але

$$\mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(H) \geq \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(H \wedge n) = \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(X_{d+1,T}) = X_{d+1,0} = \mathrm{E}_{\mathrm{P}^\infty}(H \wedge n) > C.$$

Отже, ми довели рівність

$$\pi^\uparrow(H) = \sup_{\mathrm{P}^* \in \mathcal{P}} \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(H). \qquad \square$$

Приклад 3.2.66. 1. Розглянемо Європейський опціон купівлі

$$C^{call} = (S_T - K)^+.$$

Нехай безризиковий актив $S_{0,t} = (1+r)^t$, $r > 0$, $t \in \mathbb{T}$. Припустимо, що ринок безарбітражний. Тоді за теоремою 3.2.65, будь-яка справедлива ціна дисконтованого опціону купівлі

$$H^{call} := \frac{C^{call}}{S_{0,T}} = \left(X_T - \frac{K}{(1+r)^T} \right)^+$$

має вигляд

$$\pi(H^{call}) = \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*} \left(X_T - \frac{K}{(1+r)^T} \right)^+.$$

Зауважимо, що функції $f(x) := x^+$ та $f_1(x) = (x - K_1)^+$, $K_1 > 0$ є

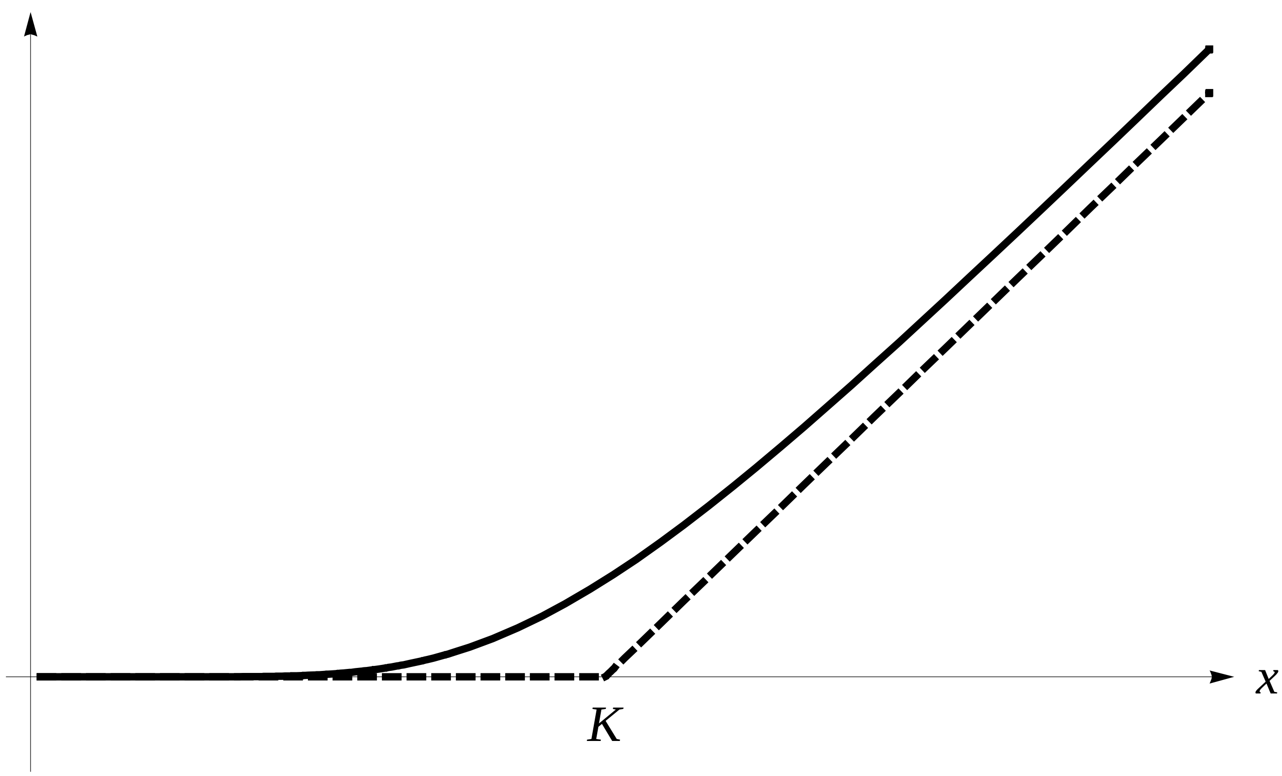

Рис. 3.1: Ціна (суцільна лінія) та функція виплат (пунктирна лінія) Європейського опціону купівлі.

опуклими вниз. Тому за нерівністю Йенсена

$$\pi(H^{call}) \geq \left(\mathrm{E}_{\mathrm{P}^*} X_T - \frac{K}{(1+r)^T} \right)^+ \geq (x - K)^+,$$

де $S_0/S_{0,0} = S_0$, бо $S_{0,0} = 1$. Значення $(x-K)^+$ називається "внутрішньою вартістю" опціону купівлі; це те значення, яке ми отримаємо, якщо виконаємо опціон миттєво, тобто в момент $t = 0$. Різницю між $\pi(H^{call})$ і $(x - K)^+$ називають "значенням у часі" Європейського опціону купівлі. Відповідний графік подано на рис. 3.1.

Приклад 3.2.67. Для Європейського опціону продажу ситуація складніша; тут

$$H^{put} = \left(\frac{K}{(1+r)^T} - X_T\right)^+,$$

і ми можемо за нерівністю Ієнсена оцінити

$$\pi(H^{put}) \geq \left(\frac{K}{(1+r)^T} - x\right)^+,$$

але оцінити знизу "внутрішньою вартістю" $(K-x)^+$ можна лише

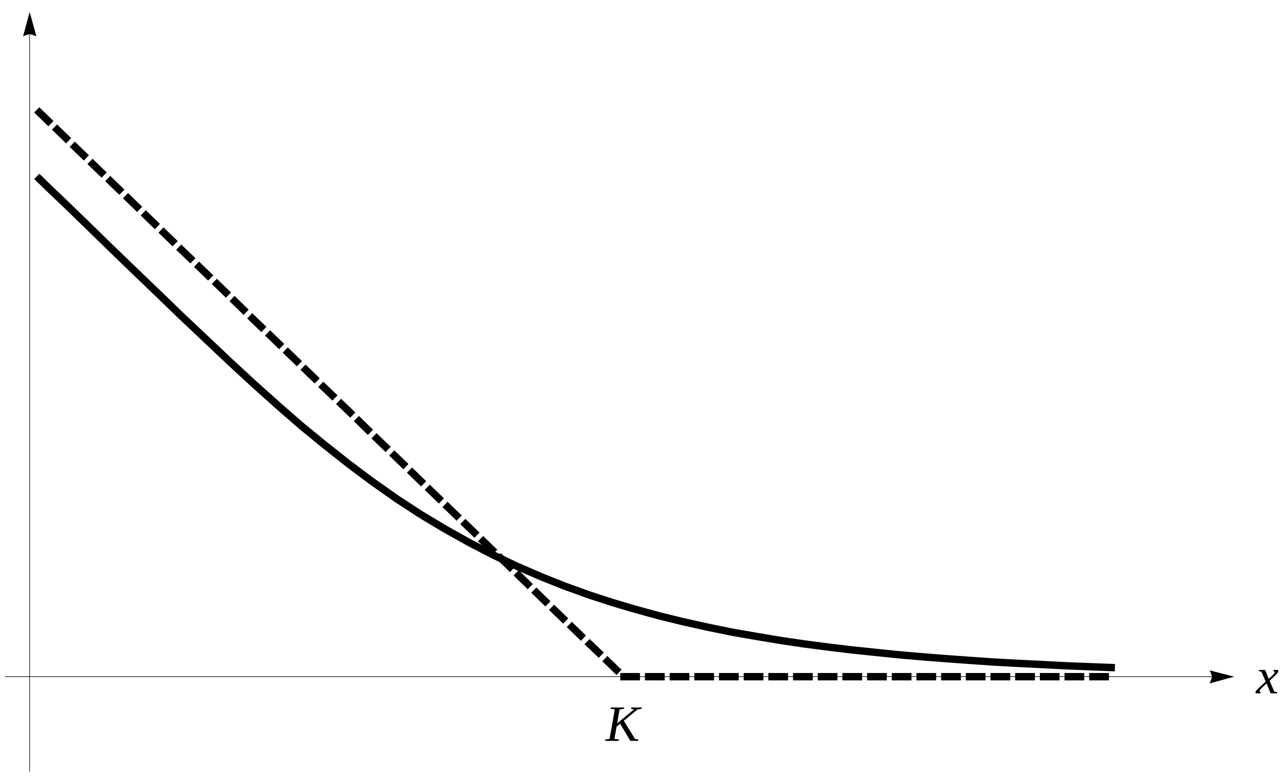

Рис. 3.2: Ціна (суцільна лінія) та функція виплат (пунктирна лінія) Європейського опціону продажу.

при $r \leq 0$. Внаслідок пут-колл паритету, “значення у часі” Європейського опціону продажу з великим “внутрішнім значенням” стає від'ємним; див. рис. 3.2.

Наступний результат щодо виду множини $\Pi(H)$ наведемо без доведення; аналогічний результат для одноперіодної моделі доведено в теоремі 3.3.3.

Теорема 3.2.68. *Нехай H є дисконтованим платіжним зобов'язанням.*

1. Якщо зобов'язання H є досяжним, то множина справедливих цін $\Pi(H)$ складається з одного елемента $\mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(H) = V_0$, де V_0 – початковий капітал будь-якої стратегії, що реплікує H.

2. Якщо зобов'язання H не є досяжним, то множина

$$\Pi(H) = (\pi^{\downarrow}(H), \pi^{\uparrow}(H)).$$

Багатоперіодні моделі повних ринків

Означення повноти ринку в багатоперіодній моделі в принципі таке ж, як і в одноперіодній моделі.

Означення 3.2.69. Модель безарбітражного багатоперіодного ринку називається *повною*, якщо кожне Європейське платіжне зобов'язання є досяжним.

Наступний результат, доводиться, в принципі, аналогічно до леми 3.2.30 та теореми 3.2.32.

Теорема 3.2.70. *1. Безарбітражний ринок є повним тоді і тільки тоді, коли існує лише одна еквівалентна мартингальна міра.*

2. Якщо ринок повний, то число атомів простору $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ не перевищує $(d+1)^T$.

Умови безарбітражності і повноти багатоперіодної біноміальної моделі

Повернемося до біноміальної моделі з п. 3.2.1. Визначимо, при яких значеннях параметрів a, b і r ця модель буде безарбітражною і повною.

Теорема 3.2.71. *Багатоперіодна біноміальна модель є безарбітражною тоді і тільки тоді, коли* $a < r < b$. *У цьому випадку модель є повною, і єдина еквівалентна мартингальна міра* P^* *характеризується тим, що відносно неї випадкові величини* $R_1, \ldots, R_T$ *незалежні, однаково розподілені, і*

$$\mathrm{P}^*(R_1 = a) = p^* := \frac{b-r}{b-a}.$$

Доведення. Як завжди, ринок є безарбітражним тоді і тільки тоді, коли існує міра P^*, відносно якої дисконтований ціновий процес X_t є мартингалом. Зараз

$$X_t = S_0 \prod_{k=1}^{t} \frac{S_k}{1+r} = S_0 \prod_{k=1}^{t} \frac{1+R_k}{1+r},$$

отже, для будь-якої ймовірнісної міри Q

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_Q(X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) = S_0 \prod_{k=1}^{t} \frac{1+R_k}{1+r} \mathrm{E}_Q \left(\frac{1+R_{t+1}}{1+r} \mid \mathcal{F}_t \right) = \\ = X_t \frac{1+\mathrm{E}_Q(R_{t+1} \mid \mathcal{F}_t)}{1+r}. \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

Права частина (3.2.13) дорівнює X_t тоді і тільки тоді, коли

$$\mathrm{E}_Q(R_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) = r.$$

Але R_{t+1} приймає лише два значення a і b, отже,

$$\mathrm{E}_Q(R_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) = aQ(R_{t+1} = a \mid \mathcal{F}_t) + b(1 - Q(R_{t+1} = a \mid \mathcal{F}_t)) = r,$$

звідки

$$Q(R_{t+1} = a \mid \mathcal{F}_t) = p^* = \frac{b-r}{b-a}$$

для майже всіх $\omega \in \Omega$. Але це може бути тоді і тільки тоді, коли R_{t+1} не залежить від σ-алгебри $\mathcal{F}_t$, породженої випадковими величинами $R_1, \ldots, R_t$, тобто випадкові величини $R_1, \ldots, R_T$ незалежні в сукупності, однаково розподілені, і

$$Q(R_1 = a) = \frac{b-r}{b-a}.$$

Отже, мартингальна міра єдина, якщо вона існує. Якщо ринок безарбітражний, еквівалентна мартингальна міра P^* існує, збігається з Q, і з еквівалентності $\mathrm{P}^* \sim \mathrm{P}$ випливає, що $0 < b - r < b - a$, тобто $a < r < b$. Навпаки, нехай $a < r < b$. Визначимо ймовірнісну міру на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F})$ з підрозділу 3.1.1 наступним чином:

$$\mathrm{P}^*(\{\omega\}) = (p^*)^k (1 - p^*)^{T-k} > 0,$$

де k – це число мінус одиниць в елементі ω. Відносно такої міри P^* випадкові величини $Y_1, \dots, Y_T$, де $Y_t(\omega) = \omega_t$ для $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_t, \dots, \omega_T)$, будуть незалежними в сукупності, а, оскільки

$$R_t = a\frac{1 - Y_t(\omega)}{2} + b\frac{1 + Y_t(\omega)}{2},$$

то і R_t будуть незалежними в сукупності. Крім того, розподілені вони будуть так:

$$\mathrm{P}^*(R_t = a) = \mathrm{P}^*(Y_t(\omega) = -1) = \mathrm{P}^*(\omega : \omega_t = -1) =$$

$$\sum_{k=0}^{T-1} C_{T-1}^k (p^*)^k (1 - p^*)^{T-1-k} \cdot p^* = p^*,$$

а це означає, що P^* – еквівалентна мартингальна міра. □

Обчислення хеджуючих стратегій та справедливих цін платіжних зобов'язань в біноміальній моделі

Розглянемо Європейські вторинні папери в біноміальній моделі, тобто платіжні зобов'язання вигляду $H = f(X_0, \dots, X_T)$, де $f : \mathbb{R}^{T+1} \to \mathbb{R}^+$ – вимірна функція.

Теорема 3.2.72. *Капітал V_t стратегії, що породжує зобов'язання H, має вигляд*

$$V_t(\omega) = \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(H \mid \mathcal{F}_t) = v_t(X_0, X_1(\omega), \dots, X_t(\omega)),$$

де функція $v_t(x_0, \dots, x_t)$ задається формулою

$$v_t(x_0, \dots, x_t) = \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*} f\left(x_0, \dots, x_t, x_t\frac{X_1}{X_0}, \dots, x_t\frac{X_T - t}{X_0}\right). \tag{3.2.14}$$

Доведення. Той факт, що $V_t(\omega) = \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(H \mid \mathcal{F}_t)$, доведено в теоремі 3.2.61. Тепер, обчислимо $\mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(H \mid \mathcal{F}_t)$ в біноміальній моделі, враховуючи, що $X_0, X_1, \ldots, X_t$ є $\mathcal{F}_t$-вимірними, а для $t < k \leq T$

$$X_k(\omega) = X_t(\omega) \prod_{i=t+1}^{k} \frac{1+R_i}{1+r},$$

і добуток $\prod_{i=t+1}^{k} \frac{1+R_i}{1+r}$ не залежить від $\mathcal{F}_t$ і розподілений так само, як $\prod_{i=1}^{k-t} \frac{1+R_i}{1+r}$. З теорії ймовірностей відома наступна формула: якщо G – деяка σ-алгебра, ξ – $\mathcal{F}$-вимірна випадкова величина, η – випадкова величина, що не залежить від G, $h(x,y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – вимірна функція, і $h(\xi,\eta)$, $h(x,\eta)$ – інтегровні випадкові величини, $x \in \mathbb{R}$, то

$$\mathrm{E}(h(\xi,\eta) \mid \mathcal{F}) = \mathrm{E}h(x,\eta)|_{x=\xi},$$

тобто ми обчислюємо математичне сподівання відносно η, як функцію x, а потім замість x підставляємо ξ. Ця формула залишається вірною і у багатовимірному випадку. Тому

$$\begin{gathered}\mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(f(X_0, X_1, \ldots, X_T) \mid \mathcal{F}_t) = \\ = \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*} f\left(x_0, x_1, \ldots, x_t, x_t\frac{X_t+1}{X_t}, \ldots, x_t\frac{X_T}{X_t}\right)\Bigg|_{x_0=X_0,\ldots,x_t=X_t} = \\ = \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*} f\left(x_0, x_1, \ldots, x_t, x_t\frac{X_1}{X_0}, \ldots, x_t\frac{X_{T-t}}{X_0}\right)\Bigg|_{x_0=X_0,\ldots,x_t=X_t},\end{gathered}$$

що рівносильне твердженню теореми. $\square$

Зауваження 3.2.73. Позначимо

$$\widetilde{a} := \frac{1+a}{1+r}, \quad \widetilde{b} = \frac{1+b}{1+r}.$$

Оскільки $V_T = H$, то $v_T(x_0, \ldots, x_T) = f(x_0, \ldots, x_T)$; далі,

$$\begin{gathered}v_t(X_0,\ X_1(\omega), \ldots, X_t(\omega)) = \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(V_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) = \\ = \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(v_{t+1}(X_0, \ldots, X_{t+1}) \mid \mathcal{F}_t) = \\ = v_{t+1}(X_0, \ldots, X_t, X_t\widetilde{b})(1-p^*) + v_{t+1}(X_0, \ldots, X_t, X_t\widetilde{a})p^*;\end{gathered}$$

таким чином, мають місце рекурентні формули

$$v_t\Big(x_0, \dots, x_t\Big) = v_{t+1}\Big(x_0, \dots, x_t, x_t\widetilde{b}\,\Big)(1-p^*) + v_{t+1}\Big(x_0, \dots, x_t, x_t\widetilde{a}\Big)p^*.$$

Тепер виведемо формули для хеджуючих стратегій платіжних зобов'язань в біноміальній моделі.

Теорема 3.2.74. *Хеджуюча стратегія для зобов'язання* $H = f(X_0, \dots, X_T)$ *має вигляд* $\xi_t(\omega) = \Delta_t(X_0, X_1(\omega), \dots, X_{t-1}(\omega))$*, де функція*

$$\Delta_t(x_0, \dots, x_{t-1}) := \frac{v_t\Big(x_0, \dots, x_{t-1}, x_{t-1}\widetilde{b}\,\Big) - v_t\Big(x_0, \dots, x_{t-1}, x_{t-1}\widetilde{a}\Big)}{x_{t-1}\Big(\widetilde{b} - \widetilde{a}\Big)},$$

а функції v_t *задаються формулою* (3.2.14).

Доведення. Запишемо різницю капіталів між моментами $t-1$ і t для самофінансованої стратегії:

$$V_t - V_{t-1} = \xi_t(X_t - X_{t-1}). \qquad (3.2.15)$$

У цьому рівнянні V_{t-1}, ξ_t і X_{t-1} залежать лише від перших $t-$ -1 компонент вектора $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{t-1}, \omega_t, \dots, \omega_T)$. Зафіксуємо $t \in \mathbb{T}$ і визначимо два елементи ймовірнісного простору

$$\omega^{\pm} = (\omega_1, \dots, \omega_{t-1}, \pm 1, \omega_{t+1}, \dots, \omega_T).$$

Підставимо $\omega^{\pm}$ в (3.2.15) і одержимо на ω^+ рівність

$$\xi_t(\omega)\left(X_{t-1}(\omega)\widetilde{b} - X_{t-1}(\omega)\right) = V_t(\omega^+) - V_{t-1}(\omega),$$

а на ω^-, відповідно,

$$\xi_t(\omega)(X_{t-1}(\omega)\widetilde{a} - X_{t-1}(\omega)) = V_t(\omega^-) - V_{t-1}(\omega).$$

Звідси

$$\xi_t(\omega) = \frac{V_t(\omega^+) - V_t(\omega^-)}{X_{t-1}(\omega)\Big(\widetilde{b} - \widetilde{a}\Big)}.$$

Але, згідно з теоремою 3.2.72,

$$V_t\big(\omega^+\big) = v_t\big(X_0, \ldots, X_{t-1}, X_{t-1}\widetilde{b}\,\big),$$
$$V_t\left(\omega^-\right) = v_t(X_0, \ldots, X_{t-1}, X_{t-1}\widetilde{a}\big)\,,$$

значить, справді

$$\xi_t(\omega) = \Delta_t(X_0, X_1(\omega), \ldots, X_{t-1}(\omega)). \qquad \square$$

Приклад 3.2.75. Нехай $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, і платіжне зобов'язання $H = f(X_T)$, тобто воно залежить лише від останнього (термінального) значення цінового процесу. Тоді, згідно з теоремою 3.2.72, капітал $V_t = v_t(X_t(\omega))$, а

$$v_t(x_t) = \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*} f\left(x_t \frac{X_{T-t}(\omega)}{X_0}\right) =$$
$$= \sum_{k=0}^{T-t} f\left(x_t \widetilde{a}^k \widetilde{b}^{T-t-k}\right) C_{T-t}^k (p^*)^k (1-p^*)^{T-t-k}.$$

Зокрема, при $t = 0$ одержимо єдину справедливу ціну такого платіжного зобов'язання

$$V_0 = \pi(H) = \sum_{k=0}^{T} f(x_0 \widetilde{a}^k \widetilde{b}^{T-k}) C_T^k (p^*)^k (1-p^*)^{T-k}.$$

Якщо $f(x) = (x - \widetilde{K})^+$, де $\widetilde{K} = K(1+r)^{-T}$, K – страйкова ціна, то

$$V_0 = \pi(C^{call}) = \sum_{k=0}^{T} \left(x_0 \widetilde{a}^k \widetilde{b}^{T-k} - \widetilde{K}\right)^+ C_T^k (p^*)^k (1-p^*)^{T-k}.$$

Насправді сума береться лише по тих k, для яких $x_0 \widetilde{a}^k \widetilde{b}^{T-k} \geq \widetilde{K}$, тобто

$$k \leq \frac{x_0 \widetilde{b}^T}{\widetilde{K}(\ln \widetilde{b} - \ln \widetilde{a})}.$$

3.2.9 Американські платіжні зобов'язання

Наведемо спочатку деякі додаткові відомості з теорії випадкових процесів.

Розклад Дуба для випадкових процесів

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{T}})$ – стохастичний базис, $X = \{X_t, \mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T}\}$ – деякий випадковий процес з дискретним часом. Як і раніше, з метою технічного спрощення припускаємо, що $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$, а $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$.

Теорема 3.2.76. *Нехай* Q *– деяка ймовірнісна міра на* $(\Omega, \mathcal{F})$*, а процес* X *є інтегровним відносно міри* Q*. Тоді існує єдиний відносно міри* Q *розклад вигляду* $X_t = M_t + A_t$*, де* $\{M_t, \mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T}\}$ *– мартингал відносно міри* Q*,* $\{A_t, \mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T}\}$ *– передбачуваний процес з нульовим початковим значенням,* $A_0 = 0$*.*

Доведення. Побудуємо спочатку процес A_t. Покладемо

$$A_0 := 0, \quad A_t - A_{t-1} := \mathrm{E}_Q(X_t - X_{t-1} \mid \mathcal{F}_{t-1}), \quad t = 1, \ldots, T.$$

Ясно, що процес A буде передбачуваним. Тепер покладемо $M_t := X_t - A_t$. Тоді

$$\mathrm{E}_Q(M_t - M_{t-1} \mid \mathcal{F}_{t-1}) = \mathrm{E}_Q(X_t - X_{t-1} \mid \mathcal{F}_{t-1}) - (A_t - A_{t-1}) = 0,$$

тобто процес M є Q-мартингалом. Тепер покажемо, що такий розклад єдиний. Справді, нехай ще

$$X_t = M'_t + A'_t, \quad A'_0 = 0,$$

A' – передбачуваний процес, M' – Q-мартингал. Тоді

$$M'_t - M_t = A_t - A'_t,$$

тобто $M'_t - M_t$ – передбачуваний Q-мартингал. Тоді

$$0 = \mathrm{E}_Q(M'_t - M_t - (M'_{t-1} - M_{t-1}) \mid \mathcal{F}_{t-1}) = M'_t - M_t - (M'_{t-1} - M_{t-1}).$$

Отже, процес $M_t - M'_t$ – сталий відносно міри Q, і при цьому

$$M'_0 - M_0 = A_0 - A'_0 = 0.$$

Це означає, що $M_t = M'_t$ Q-м.н., а тоді і $A_t = A'_t$ Q-м.н. $\square$

Наслідок 3.2.77. *Q-інтегровний процес $\{X_t, \mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T}\}$ є Q-супермартингалом тоді і тільки тоді, коли в розкладі Дуба передбачуваний процес A є монотонно незростаючим. Це безпосередньо випливає з рівності*

$$A_t - A_{t-1} = \mathrm{E}_Q(X_t - X_{t-1} \mid \mathcal{F}_{t-1}).$$

Означення і приклади Американських платіжних зобов'язань. Моменти зупинки і пов'язані з ними σ-алгебри

Нехай на ринку діють покупець і продавець платіжного зобов'язання. Якщо це Американське платіжне зобов'язання, то покупець купує його в момент $t = 0$ і може подати до виконання один раз, в будь-який момент часу τ між 0 і датою погашення T. Якщо покупець не подав до моменту T Американське платіжне зобов'язання до виконання, воно автоматично виконується в момент T. Якщо покупець подав зобов'язання до виконання в момент τ, продавець мусить заплатити йому суму C_τ, що залежить від моменту виконання τ.

Означення 3.2.78. *Американським платіжним зобов'язанням* називається невід'ємний узгоджений випадковий процес $C = \{C_t, \mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T}\}$ на стохастичному базисі $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}})$.

Насправді покупець може подати Американське платіжне зобов'язання до виконання не тільки в детермінований момент часу $t \in \mathbb{T}$, а і в деякий випадковий момент часу $\tau = \tau(\omega) \in \mathbb{T}$, і тоді він одержить виплату $C_{\tau(\omega)}(\omega)$. Опишемо клас можливих випадкових моментів подачі зобов'язання до виконання. Справа в тому, що рішення про те, чи подавати зобов'язання до виконання чи ні, може базуватися лише на інформації, одержаній до моменту, в який приймається рішення, тобто $\tau(\omega)$ має в деякий спосіб узгоджуватись з фільтрацією $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}}$.

Означення 3.2.79. Випадкова величина $\tau = \tau(\omega)$, що приймає значення з множини $\mathbb{T}$, називається *моментом зупинки*, якщо для будь-якого $t \in \mathbb{T}$ множина $\{\omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

Зауваження 3.2.80. Достатньо вимагати, щоб для всіх $t \in \mathbb{T}$ множина $\{\omega : \tau(\omega) = t\} \in \mathcal{F}_t$.

Отже, покупець може подати Американське платіжне зобов'язання до виконання в будь-який момент зупинки τ.

Означення 3.2.81. Нехай τ – момент зупинки. *Пов'язаною з ним σ-алгеброю* $\mathcal{F}_\tau$ називається σ-алгебра виду $\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F}_T : A \cap \{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t$ для всіх $t \in \mathbb{T}\}$.

Приклад 3.2.82. *Американськими опціонами купівлі та продажу на актив* S_t називаються платіжні зобов'язання виду

$$C_t^{call} := (S_t - K)^+ \quad \text{та} \quad C_t^{put} := (K - S_t)^+.$$

Ясно, що Американський опціон купівлі має ненульову виплату ("виконується в грошах") тоді і тільки тоді, коли відповідний опціон продажу має нульову виплату ("залишається поза грішми"). Тому власники опціонів купівлі та продажу подадуть їх до виконання в різні моменти часу. Тому пут-колл паритету між Американськими опціонами не існує.

Приклад 3.2.83. (Європейське платіжне зобов'язання як частковий випадок Американського.) Нехай C_E – Європейське платіжне зобов'язання. Покладемо

$$C_A(t) := \begin{cases} 0, & t < T, \\ C_E, & t = T. \end{cases}$$

Це буде Американське платіжне зобов'язання, яке виконується фактично лише в момент T. Таким чином, поняття Американського платіжного зобов'язання узагальнює поняття Європейського платіжного зобов'язання.

Приклад 3.2.84. (*Бермудський опціон.*) Нехай $\mathbb{T}_1 \subset \mathbb{T}$ – деяка підмножина. Припустимо, що покупець може подати опціон до виконання лише в моменти часу $t \in \mathbb{T}_1$. Такий опціон займає проміжну позицію між Європейським та Американським опціонами, так само як Бермудські острови лежать між Європою і Америкою. Бермудський опціон можна розглядати як частковий випадок Американського опціону C_t, причому $C_t = 0$, $t \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{T}_1$.

Приклад 3.2.85. (*Російський опціон.*) Це платіжне зобов'язання вигляду

$$C_t(\omega) = e^{-\lambda t} \max\left(\max_{u \le t} S_u, S_0\psi_0\right),$$

де $\{S_t, t \ge 0\}$ – ціна акції, на яку укладено опціон, $\lambda > 0$, $\psi_0 \ge 1$ – деякі сталі. Розрахунок справедливої ціни Російського опціону зроблено в статті [26].

Хеджування продавцем Американських платіжних зобов'язань

Означення 3.2.86. *Дисконтованим Американським платіжним зобов'язанням* називається випадковий процес

$$H_t = \frac{C_t}{S_{t,0}}, \quad t \in \mathbb{T}.$$

У цьому розділі ми розглядаємо повну модель фінансового ринку, тобто множина еквівалентних мартингальних мір складається з одної міри, яку позначимо P^*. Нагадаємо також, що $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$. Нашою метою є побудова такої стратегії продавця дисконтованого Американського платіжного зобов'язання H_τ, яка дозволить йому прийняти до виконання це платіжне зобов'язання, якщо покупець з'явиться з ним у момент τ. Позначимо U_t, $t \in \mathbb{T}$ найменше можливе значення капіталу такої стратегії. Очевидно, $U_t \ge H_t$. Крім того, величина U_t повинна бути достатньою для того, щоб можна було здійснити купівлю портфеля, який хеджуватиме можливі виплати H_u для $u > t$. Оскільки в момент T майбутніх виплат вже нема, то найменше можливе значення U_T дорівнює H_T, $U_T = H_T$. У момент $T-1$ по-перше, повинна виконуватись нерівність

$$U_{T-1} \ge H_{T-1}.$$

По-друге, продавець повинен бути здатним хеджувати кількістю капіталу U_{T-1} майбутню виплату H_T. В силу теореми 3.2.61

і припущення про повноту ринку, потрібний для цього капітал дорівнює

$$\mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(H_T \mid \mathcal{F}_{T-1}) = \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(U_T \mid \mathcal{F}_{T-1}).$$

Таким чином,

$$U_{T-1} = H_{T-1} \vee \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(U_T \mid \mathcal{F}_{T-1}).$$

Застосовуючи аналогічні міркування до попередніх моментів часу, одержимо таку рекурентну формулу: $U_T = H_T$,

$$U_t = H_t \vee \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(U_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) \quad \text{для} \quad t = 0, 1, \ldots, T-1. \tag{3.2.16}$$

Означення 3.2.87. Процес $U_t = U_t^{\mathrm{P}^*}$, що визначається рівностями (3.2.16), називають *огинаючою Снелла* процесу H відносно міри P^*.

Очевидно, огинаючу Снелла можна побудувати для будь-якого адаптованого інтегровного процесу H та будь-якої ймовірнісної міри Q на $(\Omega, \mathcal{F}_T)$. Тому наступний результат сформулюємо для довільної міри Q.

Теорема 3.2.88. *Нехай $\{H_t, \mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T}\}$ – інтегровний процес. Тоді огинаюча Снелла U_t^{Q} процесу H відносно міри Q є найменшим Q-супермартингалом, який мажорує H. Точніше, якщо Z_t – супермартингал, і $Z_t \geq H_t$ Q-м.н. для всіх t, то $Z_t \geq U_t^{\mathrm{Q}}$ Q-м.н. для всіх t.*

Доведення. Спочатку доведемо, що U_t^{Q} – супермартингал. Справді,

$$U_{t-1}^{\mathrm{Q}} = H_t \vee \mathrm{E}_{\mathrm{Q}}(U_t^{\mathrm{Q}} \mid \mathcal{F}_{t-1}) \geq \mathrm{E}_{\mathrm{Q}}(U_t^{\mathrm{Q}} \mid \mathcal{F}_{t-1}),$$

це і є супермартингальна властивість U^{Q}. Далі, нехай Z_t – супермартингал, $Z_t \geq H_t$ Q-м.н. для всіх $t \in \mathbb{T}$. Тоді в момент T

$$Z_T \geq H_T = U_T^{\mathrm{Q}} \quad \mathrm{Q}\text{-м.н.}$$

Якщо вже доведено, що $Z_t \geq U_t^{\mathrm{Q}}$, то

$$Z_{t-1} \geq \mathrm{E}_{\mathrm{Q}}(Z_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) \geq \mathrm{E}_{\mathrm{Q}}(U_t^{\mathrm{Q}} \mid \mathcal{F}_{t-1}) \text{і} \quad Z_{t-1} \geq H_{t-1},$$

отже,

$$Z_{t-1} \geq H_{t-1} \vee \mathrm{E}_{\mathrm{Q}}(U_t^{\mathrm{Q}} \mid \mathcal{F}_{t-1}) = U_{t-1}^{\mathrm{Q}} \quad \mathrm{Q} - \text{м.н.}$$

Теорему доведено. □

Позначимо для повного ринку P^* єдину мартингальну міру.

Теорема 3.2.89. *Модель фінансового ринку є повною тоді і тільки тоді, коли кожний P^*-мартингал M можна подати у вигляді дискретного "стохастичного інтегралу" з обмеженим d-вимірним передбачуваним процесом ξ:*

$$M_t = M_0 + \sum_{k=1}^{t} \xi_k \cdot (X_k - X_{k-1}), t \in \mathbb{T}. \tag{3.2.17}$$

Доведення. Необхідність. Нехай ринок є повним (тобто його змодельовано як повний). Розкладемо випадкову величину M_T на різницю додатної та від'ємної частин: $M_T = M_T^+ - M_T^-$, де M_T^+ і $-M_T^-$ можна розглядати як два дисконтовані платіжні зобов'язання, які, за припущенням про повноту ринку, є досяжними. Значить, для них обох можна побудувати портфелі (позначимо їх ξ^+ і ξ^-), такі, що

$$M_T^{\pm} = V_0^{\pm} + \sum_{k=1}^{T} \xi_k^{\pm} \cdot (X_k - X_{k-1}) \quad \mathrm{P}^*\text{-м.н.}$$

Зазначимо, що в силу повноти ринку і теореми 3.2.70 всі випадкові величини є обмеженими. Тому процеси

$$M_t^{\pm} = V_0^{\pm} + \sum_{k=1}^{t} \xi_k^{\pm} \cdot (X_k - X_{k-1})$$

є P^*-мартингалами, значить,

$$M_t = \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(M_T^+ - M_T^- \mid \mathcal{F}_t) = V_t^+ - V_t^- = V_0 + \sum_{k=1}^{T} \xi_k \cdot (X_k - X_{k-1}),$$

де $V_0 = V_0^+ - V_0^-$, $\xi_k = \xi_k^+ - \xi_k^-$.

Достатність. Нехай H є обмеженим дисконтованим платіжним зобов'язанням. Застосуємо розклад виду (3.2.17) до мартингалу $M_t := \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(H \mid \mathcal{F}_t)$, і одержимо стратегію, яка реплікує H. Тоді за теоремою 3.2.70 ринок є повним. □

Тепер побудуємо стратегію продавця, яка буде (супер-)хеджувати Американське платіжне зобов'язання H (термін “суперхедж” означає, що капітал такої стратегії перевищує або дорівнює H_t для всіх $t \in \mathbb{T}$ P^*-м.н.).

1. Побудуємо огинаючу Снелла U^{P^*} процесу $\{H_t, t \in \mathbb{T}\}$. За теоремою 3.2.88 це супермартингал.

2. Розкладемо U^{P^*} за Дубом (теорема 3.2.76): $U_t^{\mathrm{P}^*} = M_t + A_t$. Згідно з наслідком до цієї теореми, A – незростаючий процес, причому $A_0 = 0$, тобто $A_t \leq 0$ P^*-м.н. для всіх $t \in \mathbb{T}$, тобто $M_t \geq U_t^{\mathrm{P}^*}$ P^*-м.н. для всіх $t \in \mathbb{T}$.

3. Побудуємо зображення мартингалу M у вигляді дискретного “стохастичного інтегралу”

$$M_t = U_0^{\mathrm{P}^*} + \sum_{k=1}^{t} \xi_k \cdot (X_k - X_{k-1}),\ t \in \mathbb{T},$$

згідно з теоремою 3.2.90. При цьому вже побудовано стратегію $\{\xi_t, t \in \mathbb{T}\}$ і залишається знайти ξ_t^0, згідно з лемою 3.2.42.

Таким чином, ми отримали самофінансовану стратегію $\overline{\xi}_t = (\xi_t^0, \xi_t)$, капітал V_t якої задовольняє нерівність

$$V_t = M_t \geq U_t^{\mathrm{P}^*} \geq H_t,\ t \in \mathbb{T}. \tag{3.2.18}$$

Покажемо, що $U_t^{\mathrm{P}^*}$ є найменшим стартовим капіталом в момент t, який дозволяє, починаючи з цього моменту, (супер-)хеджувати H_u, $u \geq t$, тобто щоб виконувалось (3.2.18).

Теорема 3.2.90. *Нехай* P^* *– єдина еквівалентна мартингальна міра на повному фінансовому ринку, і нехай* $\{H_t, t \in \mathbb{T}\}$ *– дисконтоване Американське платіжне зобов'язання з огинаючою Снелла* $\{U_t^{\mathrm{P}^*}, t \in \mathbb{T}\}$.

1. Існує передбачуваний процес $\{\xi_t, t = 1, \ldots, T\}$ *такий, що*

$$U_t^{\mathrm{P}^*} + \sum_{k=t+1}^{u} \xi_k \cdot (X_k - X_{k-1}) \geq H_u \quad \text{для всіх} \quad u \geq t, \tag{3.2.19}$$

$\left(\sum_{k=t+1}^{t} = 0\right)$.

2. Якщо для деякої $\mathcal{F}_t$-вимірної випадкової величини $\widehat{U}_t$ існує передбачуваний процес $\{\widehat{\xi}_u, u \ge t\}$, для якого виконується умова (3.2.19), *у яку замість $U_t^{\mathrm{P}^*}$ підставлено $\widehat{U}_t$, то $\widehat{U}_t \ge U_t^{\mathrm{P}^*}$ м.н.*

Таким чином, $U_t^{\mathrm{P}^*}$ є найменшим розміром капіталу, якого достатньо для хеджування H від моменту t до моменту погашення T.

Доведення. 1. Очевидно, що

$$U_t^{\mathrm{P}^*} + \sum_{k=t+1}^{u} \xi_k \cdot (X_k - X_{k-1}) = M_t + A_t + (M_u - M_t) =$$

$$= A_t + M_u = U_u^{\mathrm{P}^*} + A_t - A_u \ge U_u^{\mathrm{P}^*} \ge M_u$$

для всіх $u \ge t$.

2. Нехай тепер

$$V_u := \widehat{U}_t + \sum_{k=t+1}^{u} \widehat{\xi}_k \cdot (X_k - X_{k-1}) \ge H_u$$

для всіх $u \ge t$. Покажемо із застосуванням зворотної індукції, що $V_u \ge U_u^{\mathrm{P}^*}$ для всіх $u \ge t$ (з цього, зокрема, буде випливати, що $V_t = \widehat{U}_t \ge U_t^{\mathrm{P}^*}$). Справді, $V_T = \widehat{U}_T \ge H_T$, а $U_T^{\mathrm{P}^*} = H_T$, звідки $\widehat{U}_T \ge U_T^{\mathrm{P}^*}$. Припустимо, що $V_{u+1} \ge U_{u+1}^{\mathrm{P}^*}$. Оскільки ринок повний, то простір $(\Omega, \mathcal{F})$, згідно з теоремою 3.2.70, містить скінченне число атомів, отже, кожна випадкова величина є обмеженою, зокрема, всі $\widehat{\xi}_t$ є обмеженими, а тоді

$$V_u = \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(V_{u+1} \mid \mathcal{F}_u) \ge \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(U_{u+1}^{\mathrm{P}^*} \mid \mathcal{F}_u).$$

Крім того, $V_u \ge H_u$ за припущенням теореми. Значить,

$$V_u \ge H_u \vee \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(U_{u+1}^{\mathrm{P}^*} \mid \mathcal{F}_u) = U_u^{\mathrm{P}^*}.$$

Теорему доведено. □

Оптимальні стратегії покупця Американського опціону

Розглянемо можливості покупця оптимізувати момент подачі до виплати Американського платіжного зобов'язання.

Означення 3.2.91. Момент зупинки τ_0 називається *оптимальним*, якщо $\mathrm{E}H_{\tau_0} = \max\limits_{\text{м.з. } \tau \in \mathbb{T}} \mathrm{E}H_\tau$.

Перед тим, як шукати оптимальний момент зупинки, розглянемо деякі властивості мартингалів, зупинених у випадковий час. Нехай $\tau \in \mathbb{T}$ – момент зупинки, $\{Y_t, \mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T}\}$ – випадковий процес.

Означення 3.2.92. *Зупиненим випадковим процесом* називається процес виду $Y_t^\tau := Y_{t\wedge\tau}, t \in \mathbb{T}$.

Траєкторію зупиненого процесу при фіксованому $\omega \in \Omega$ можна зобразити наступним чином:

Наступний результат є частковим випадком теореми Дуба про вільний вибір (про випадкову зупинку).

Теорема 3.2.93. *Нехай $\{M_t, \mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T}\}$ – адаптований процес, інтегровний відносно міри Q. Наступні умови є еквівалентними:*

1) процес M є Q-мартингалом;

2) для будь-якого моменту зупинки τ зупинений процес M^τ є Q-мартингалом;

3) для будь-якого моменту зупинки τ $\mathrm{E_Q} M_{\tau\wedge T} = \mathrm{E_Q} M_0$.

Доведення. Доведемо, що з 1) випливає 2). Для цього запишемо приріст

$$M_{t+1}^\tau - M_t^\tau = (M_{t+1} - M_t) I\{\tau > t\}.$$

Оскільки подія $\{\tau > t\} = \Omega \setminus \{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t$, то

$$\mathrm{E_Q}(M_{t+1}^\tau - M_t^\tau \mid \mathcal{F}_t) = \mathrm{E_Q}(M_{t+1} - M_t \mid \mathcal{F}_t) \mathbb{1}\{\tau > t\} = 0.$$

Те, що з 2) випливає 3) є наслідком незмінності математичного сподівання будь-якого мартингала:

$$\mathrm{E_Q} M_{\tau\wedge t} = \mathrm{E_Q} M_T^\tau = \mathrm{E_Q} M_0^\tau = M_0.$$

Доведемо, що з 3) випливає 1). Справді, нехай подія $A \in \mathcal{F}_t$, і покладемо

$$\tau_A(\omega) = \begin{cases} t, & \omega \in A, \\ T, & \omega \notin A. \end{cases}$$

Тоді подія

$$\{\tau_A(\omega) \le s\} = \begin{cases} \varnothing, & s < t, \\ A, & t \le s < T, \\ \Omega, & t = T, \end{cases}$$

тому ця подія належить до $\mathcal{F}_s$, $s \in \mathbb{T}$. Отже, τ_A – момент зупинки. Тоді $\mathrm{E}_{\mathrm{Q}} M_{\tau_A \wedge T} = \mathrm{E}_{\mathrm{Q}} M_T$, а цю рівність можна переписати наступним чином

$$\mathrm{E}_{\mathrm{Q}} M_t \mathbb{1}_A + \mathrm{E}_{\mathrm{Q}} M_T \mathbb{1}_{\Omega \setminus A} = \mathrm{E}_{\mathrm{Q}} M_T \mathbb{1}_A + \mathrm{E}_{\mathrm{Q}} M_T \mathbb{1}_{\Omega \setminus A},$$

звідки

$$\mathrm{E}_{\mathrm{Q}} M_t \mathbb{1}_A = \mathrm{E}_{\mathrm{Q}} M_T \mathbb{1}_A, \quad A \in \mathcal{F}_t.$$

Остання рівність еквівалентна тому, що $\mathrm{E}_{\mathrm{Q}}(M_T \mid \mathcal{F}_t) = M_t$. Теорему доведено. □

Наслідок 3.2.94. *Нехай $\{Y_t, \mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T}\}$ – узгоджений Q-інтегровний процес. Тоді наступні умови еквівалентні:*

1) Y є Q-супермартингалом;

2) для будь-якого моменту зупинки τ зупинений процес Y^τ є супермартингалом.

Доведення. З 1) випливає 2): справді, якщо Y – супермартингал, то він допускає розклад Дуба $Y_t = M_t + A_t$, де A – передбачуваний процес, $A_0 = 0$ і A монотонно не зростає. Тоді

$$Y_t^\tau = M_t^\tau + A_t^\tau,$$

причому за теоремою 3.2.93 M^τ – мартингал, $A_0^\tau = 0$ і A^τ монотонно не зростає. Перевіримо лише, що процес A^τ – передбачуваний. Справді,

$$A_{t \wedge \tau} = A_t \mathbb{1}\{t \le \tau\} + A_\tau \mathbb{1}\{\tau < t\}.$$

Події $\{t \le \tau\}$ і $\{\tau < t\}$ належать до σ-алгебри $\mathcal{F}_{t-1}$, A_t є $\mathcal{F}_{t-1}$-вимірною випадковою величиною. Отже, ми одержали розклад Дуба для Y^τ з незростаючим процесом A^τ, тобто Y^τ – супермартингал. Обернене твердження очевидне; достатньо покласти $\sigma \equiv T$. □

Припустимо тепер, що дисконтоване Американське платіжне зобов'язання $\{H_t, \mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T}\}$ є інтегровним відносно об'єктивної міри P. Побудуємо огинаючу Снелла

$$U_t := U_t^{\mathrm{P}} := H_t \vee \mathrm{E}(U_{t+1} \mid \mathcal{F}_t), \quad t = 0, 1, \ldots, T-1, \quad U_T := H_T,$$

і за її допомогою знайдемо такий момент зупинки τ_0, що

$$\mathrm{E}H_{\tau_0} = \max_{\text{м.з. } \tau \in \mathbb{T}} \mathrm{E}H_\tau$$

(нагадаємо, що це оптимальний момент зупинки з точки зору покупця). Зараз, як і раніше, $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$, $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$. Покладемо

$$\tau_{\min} := \min\{t \ge 0 : U_t = H_t\}.$$

Очевидно, $\tau_{\min}$ – момент зупинки, причому $\tau_{\min} \le T$, оскільки $H_T = U_T$. Крім того, розглянемо ще момент зупинки

$$\tau_{(t)} := \min\{s \ge t : U_s = H_s\}.$$

(Очевидно, $\tau_{(0)} = \tau_{\min}$). Позначимо $\mathcal{T}_t$ множину всіх моментів зупинки $\tau \in \mathbb{T}$, таких, що $\tau \ge t$, і нехай $\mathcal{T} = \mathcal{T}_0$. Нагадаємо ще означення істотного супремуму сім'ї випадкових величин.

Означення 3.2.95. Нехай $\mathcal{A}$ – сім'я випадкових величин на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. Випадкову величину ξ_0 називають *істотним супремумом* сім'ї $\mathcal{A}$ і позначається $\xi_0 = \operatorname{ess\,sup} \mathcal{A} = \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathcal{A}} \xi$, якщо виконано дві умови:

1) $\xi_0 \ge \xi$ P-м.н. для всіх $\xi \in \mathcal{A}$;

2) якщо для деякої іншої випадкової величини ζ теж виконується нерівність $\zeta \ge \xi$ P-м.н. для всіх $\xi \in \mathcal{A}$, то $\zeta \ge \xi_0$ P-м.н.

Відомо (див., наприклад, [21], теорема А.32), що істотний супремум існує для будь-якої сім'ї випадкових величин.

Теорема 3.2.96. *Огинаюча Снелла U зобов'язання H задовольняє наступні рівності*

$$U_t = \mathrm{E}(H_{\tau_{(t)}} \mid \mathcal{F}_t) = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}_t} \mathrm{E}(H_\tau \mid \mathcal{F}_t).$$

Зокрема, $U_0 = \mathrm{E}H_{\tau_{\min}} = \mathrm{E}H_{\tau_{(0)}} = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \mathrm{E}H_\tau$.

(*Останнє твердження означає, що один з оптимальних моментів зупинки – це* $\tau_{\min} = \tau_{(0)}$.)

Доведення. Згідно з теоремою 3.2.88, огинаюча Снелла U є супермартингалом відносно міри P. Тоді в силу наслідку 3.2.94, зупинений процес $\{U_s^\tau, s \geq t\}$ теж є супермартингалом для всіх моментів зупинки $\tau \in \mathcal{T}_t$, звідки

$$U_t \geq \mathrm{E}(U_T^\tau \mid \mathcal{F}_t) = \mathrm{E}(U_\tau \mid \mathcal{F}_t) \geq \mathrm{E}(H_\tau \mid \mathcal{F}_t),$$

звідки

$$U_t \geq \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}_t} \mathrm{E}(H_\tau \mid \mathcal{F}_t).$$

Щоб довести обернену нерівність, достатньо показати, що $U_t = \mathrm{E}(H_{\tau_{(t)}} \mid \mathcal{F}_t)$, а ця рівність, в свою чергу, еквівалентна такій: $U_t = \mathrm{E}(U_{\tau_{(t)}} \mid \mathcal{F}_t)$. Ця остання рівність випливатиме з теореми Дуба, якщо ми доведемо, що зупинений процес $U^{\tau_{(t)}}$ є мартингалом (справді, тоді $\mathrm{E}(U_T^{\tau_{(t)}} \mid \mathcal{F}_t) = U_t^{\tau_{(t)}}$, або, що те саме, $\mathrm{E}(U_{\tau_{(t)}} \mid \mathcal{F}_t) = U_t$).

Зафіксуємо довільне s між t і T. Тоді

$$U_s \mathbb{1}\{\tau_{(t)} > s\} > H_s \mathbb{1}\{\tau_{(t)} > s\}.$$

Значить,

$$\begin{aligned} U_s \mathbb{1}\{\tau_{(t)} > s\} &= U_s^{\tau_{(t)}} \mathbb{1}\{\tau_{(t)} > s\} = H_s \vee \mathrm{E}(U_{s+1} \mid \mathcal{F}_s) \mathbb{1}\{\tau_{(t)} > s\} = \\ &= \mathrm{E}(U_{s+1} \mid \mathcal{F}_s) \mathbb{1}\{\tau_{(t)} > s\} = \mathrm{E}(U_{s+1} \mathbb{1}\{\tau_{(t)} > s\} \mid \mathcal{F}_s) = \\ &= \mathrm{E}(U_{s+1}^{\tau_{(t)}} \mid \mathcal{F}_s) \mathbb{1}\{\tau_{(t)} > s\}. \end{aligned} \tag{3.2.20}$$

Тепер розглянемо

$$\begin{aligned} U_s^{\tau_{(t)}} \mathbb{1}\{\tau_{(t)} \leq s\} &= U_{\tau_{(t)}} \mathbb{1}\{\tau_{(t)} \leq s\} = U_{\tau_{(t)} \wedge s+1} \mathbb{1}\{\tau_{(t)} \leq s\} = \\ &= U_{s+1}^{\tau_{(t)}} \mathbb{1}\{\tau_{(t)} \leq s\} = \mathrm{E}(U_{s+1}^{\tau_{(t)}} \mid \mathcal{F}_s) \mathbb{1}\{\tau_{(t)} \leq s\}. \end{aligned} \tag{3.2.21}$$

Сукупність рівностей (3.2.20) і (3.2.21) означає, що

$$U_s^{\tau(t)} = \mathrm{E}\left(U_{s+1}^{\tau(t)} \mid \mathcal{F}_s\right),$$

а це і означає, в свою чергу, що зупинений процес $\{U_s^{\tau(t)}, s \geq t\}$ є мартингалом. Покладемо $s = t$: $U_t^{\tau(t)} = \mathrm{E}\left(U_T^{\tau(t)} \mid \mathcal{F}_t\right)$, або

$$U_t = \mathrm{E}\left(U_{\tau(t)} \mid \mathcal{F}_t\right) = \mathrm{E}\left(H_{\tau(t)} \mid \mathcal{F}_t\right).$$

Теорему доведено. □

Таким чином, один з оптимальних моментів зупинки з точки зору покупця – це той момент, коли огинаюча Снелла вперше "зустрічається" з тим платіжним зобов'язанням, яке вона огинає. Охарактеризуємо тепер всі оптимальні моменти зупинки.

Теорема 3.2.97. *Момент зупинки* $\sigma \in \mathcal{T}$ *буде оптимальним, тобто* $\mathrm{E}H_\sigma = \max_{\tau\in\mathcal{T}} \mathrm{E}H_\tau$ *тоді і тільки тоді, коли виконуються дві умови:*

1) $H_\sigma = U_\sigma$ P-*м.н.;*

2) зупинений процес $\{U_t^\sigma, \mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T}\}$ *є* P-*мартингалом.*

Доведення. Необхідність. Нехай σ – оптимальний момент зупинки. Тоді, з використанням теореми 3.2.96, одержимо рівності

$$U_0 = \sup_{\tau\in\mathcal{T}} \mathrm{E}H_\tau = \mathrm{E}H_\sigma.$$

Але, в силу супермартингальної властивості U і наслідку 3.2.94, $U_0 \geq \mathrm{E}U_\sigma \geq \mathrm{E}H_\sigma$, а тоді всі ці нерівності є рівностями. Значить, по-перше,

$$\mathrm{E}U_\sigma = \mathrm{E}H_\sigma,$$

а, оскільки $U_\sigma \geq H_\sigma$ P-м.н., то $U_\sigma = H_\sigma$ P-м.н. По-друге,

$$U_0 = \mathrm{E}U_\sigma = \mathrm{E}U_T^\sigma = U_0^\sigma.$$

Значить, U_t^σ – це супермартингал зі сталим математичним сподіванням. Позначимо його $\widetilde{U}_t$ і покажемо, що $\widetilde{U}_t$ – мартингал. Для цього введемо момент зупинки

$$\nu := \inf\{t \in \mathbb{T} : \mathrm{E}(\widetilde{U}_T \mid \mathcal{F}_t) < \widetilde{U}_t\} \wedge T.$$

Тоді $\nu \neq 0$ і

$$\mathrm{E}\widetilde{U}_T = \mathrm{E}\widetilde{U}_T \mathbb{1}\{\nu = T\} + \sum_{k=1}^{T-1} \mathrm{E}\widetilde{U}_k \mathbb{1}\{\nu = k\} >$$

$$> \mathrm{E}\widetilde{U}_T \mathbb{1}\{\nu = T\} + \sum_{k=1}^{T-1} \mathrm{E}\mathrm{E}(\widetilde{U}_T \mid \mathcal{F}_k) \mathbb{1}\{\nu = k\} = \mathrm{E}\widetilde{U}_T,$$

що неможливо, якщо $\mathrm{P}\{\nu < T\} > 0$. Отже, $\widetilde{U}$ – справді мартингал.

Достатність. Нехай $U_\sigma = H_\sigma$ P-м.н. і U^σ – мартингал. Тоді $U_0 = \mathrm{E}U_\sigma = \mathrm{E}H_\sigma$, але, знову в силу теореми 3.2.96,

$$U_0 = \max_{\tau \in \mathcal{T}} \mathrm{E}H_\tau,$$

отже, $\mathrm{E}H_\sigma = \max\limits_{\tau \in \mathcal{T}} \mathrm{E}H_\tau$, тобто σ – оптимальний момент зупинки.

□

Наслідок 3.2.98. *Момент зупинки*

$$\tau_{\min} = \tau_{(0)} = \inf\{t \in \mathbb{T} : U_t = H_t\}$$

є “мінімальним” оптимальним моментом зупинки, тобто для будь-якого іншого оптимального моменту зупинки τ_1 *виконується нерівність* $\tau_1 \geq \tau_{\min}$ P-*м.н. Це є очевидним наслідком того, що* $U_{\tau_1} = H_{\tau_1}$.

Тепер охарактеризуємо “максимальний” оптимальний момент зупинки. Для цього введемо такий момент зупинки:

$$\tau_{\max} := \inf\{t \in \mathbb{T} : A_{t+1} < 0\},$$

де $U_t = M_t + A_t$ – розклад Дуба процесу U.

Теорема 3.2.99. *Момент зупинки* $\tau_{\max}$ *є оптимальним, і це максимальний оптимальний момент зупинки у такому розумінні: якщо* τ_1 *– інший оптимальний момент зупинки, то* $\tau_{\max} \geq \tau_1$.

Доведення. Спочатку доведемо, що $\tau_{\max}$ є оптимальним моментом зупинки. Для цього, згідно з теоремою 3.2.97, треба довести, що $U_{\tau_{\max}} = H_{\tau_{\max}}$ і що $\widetilde{U} := U^{\tau_{\max}}$ є мартингалом. Спочатку доведемо друге. Справді

$$\widetilde{U}_t = U_{\tau_{\max}\wedge t} = M_{\tau_{\max}\wedge t} + A_{\tau_{\max}\wedge t} = M_{\tau_{\max}\wedge t} = M_t^{\tau_{\max}}, \quad t \in \mathbb{T},$$

тобто $\widetilde{U}$ дорівнює мартингалу M, зупиненому в момент $\tau_{\max}$, і значить, $\widetilde{U}$ – мартингал. Тепер,

$$U_{\tau_{\max}} = U_T = H_T = H_{\tau_{\max}}$$

на множині $\{\tau_{\max} = T\}$. На множині $\{\tau_{\max} = t\}$, де $0 \le t < T$, маємо:

$$U_{\tau_{\max}} = U_t = H_t \vee \mathrm{E}(U_{t+1} \mid \mathcal{F}_t),$$

але

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(U_{t+1} \mid \mathcal{F}_t)\mathbb{1}\{\tau_{\max} = t\} &= \mathrm{E}((M_{t+1} + A_{t+1})\mathbb{1}\{\tau_{\max} = t\} \mid \mathcal{F}_t) < \\ &< \mathrm{E}(M_{t+1} \mid \mathcal{F}_t)\mathbb{1}\{\tau_{\max} = t\} = M_t\mathbb{1}\{\tau_{\max} = t\} = H_t\mathbb{1}\{\tau_{\max} = t\},\end{aligned}$$

оскільки на множині $\{\tau_{\max} = t\}$ $A_t = 0$, а $A_{t+1} < 0$. Отже, $U_{\tau_{\max}} = H_{\tau_{\max}}$, і $\tau_{\max}$ – оптимальний момент зупинки. Нехай тепер τ_1 – інший оптимальний момент зупинки. Тоді зупинений процес U^{τ_1} є мартингалом, отже, у його розкладі Дуба

$$U_t^{\tau_1} = M_t^{\tau_1} - A_t^{\tau_1}$$

процес $A_t^{\tau_1}$ нульовий. Це і означає, що $\tau_1 \le \tau_{\max}$. □

Наслідок 3.2.100. *Оскільки зупинений процес U^τ буде мартингалом тоді і тільки тоді, коли $\tau \le \tau_{\max}$, то момент зупинки τ буде оптимальним тоді і тільки тоді, коли $\tau \le \tau_{\max}$ і $H_\tau = U_\tau$ P-м.н. При цьому $A_\tau = 0$.*

Оптимальні моменти зупинки у потраєкторному розумінні

Нехай τ_0 – оптимальний момент зупинки з точки зору покупця і у розумінні середнього, тобто $U_0 = \mathrm{E}H_{\tau_0} = \max_{\tau\in\mathcal{T}} \mathrm{E}H_\tau$.

Покажемо, що у випадку, коли об'єктивна міра є єдиною мартингальною, на повному ринку оптимізація відбувається і у потраєкторному розумінні. Пояснимо це детальніше. Розглянемо вказану міру P^* і огинаючу Снелла U^{P^*}. Її можна розкласти за Дубом: $U^{\mathrm{P}^*} = M + A$, а потім M подати у вигляді дискретного стохастичного інтеграла:

$$M_t = U_0^{\mathrm{P}^*} + \sum_{k=1}^{t} \xi_k \cdot (X_k - X_{k-1}).$$

При цьому M буде капіталом самофінансованої стратегії, ризикова компонента якої ξ, а початковий капітал $U_0^{\mathrm{P}^*}$, і при цьому M мажорує H. Тобто ми одержали суперхедж з точки зору продавця: якщо покупець прийде в момент τ, то продавець одержить прибуток $M_\tau - H_\tau \geq 0$. Нехай тепер покупець прийшов в момент τ_0. В цей момент

$$H_{\tau_0} = U_{\tau_0}^{\mathrm{P}^*} = M_{\tau_0} - A_{\tau_0},$$

але, згідно з наслідком 3.2.100 $A_{\tau_0} = 0$, значить, $H_{\tau_0} = M_{\tau_0}$, тобто вимога покупця "зустрічається" з капіталом продавця. Це можливо лише у випадку, коли ринок повний, і огинаюча Снелла будується відносно P^*. Величину $U_0^{\mathrm{P}^*}$ можна вважати єдиною справедливою ціною зобов'язання H.

Лема 3.2.101. *Мають місце співвідношення*

$$H_\tau \leq M_\tau = U_0^{\mathrm{P}^*} + \sum_{k=1}^{\tau} \xi_k \cdot (X_k - X_{k-1}) \quad \mathrm{P}^* - \textit{м.н.}$$

для всіх $\tau \in \mathcal{T}$, причому рівність має місце тоді і лише тоді, коли τ – оптимальний момент зупинки.

Доведення. Треба довести тільки твердження "лише тоді". Справді, нехай маємо рівність $H_\tau = M_\tau$, тоді

$$U_\tau^{\mathrm{P}^*} \geq H_\tau = M_\tau;$$

але, з іншого боку, $M_\tau = U_\tau - A_\tau \geq U_\tau$. Отже,

$$U_\tau^{\mathrm{P}^*} = H_\tau = M_\tau,$$

звідки $A_\tau = 0$, тобто

$$U^{\mathrm{P}^*}_{t\wedge\tau} = M_{t\wedge\tau}$$

є мартингалом. Згідно з теоремою 3.2.97, τ – оптимальний момент зупинки. $\square$

Порівняння дисконтованих Американських і Європейських платіжних зобов'язань

Порівняємо дисконтоване Американське платіжне зобов'язання $\{H_t, \mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T}\}$ з відповідним дисконтованим Європейським платіжним зобов'язанням H_T. Позначимо $V_t := \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(H_T \mid \mathcal{F}_t)$ капітал, необхідний, згідно з теоремою 3.2.61, для хеджування H_T. Оскільки, за припущенням, ринок повний, V_t є єдиною справедливою ціною зобов'язання H_T в момент t. З точки зору продавця, згідно з теоремою 3.2.90, для Американського платіжного зобов'язання такою ціною є $U^{\mathrm{P}^*}_t$. Оскільки Американське платіжне зобов'язання менше обмежує покупця, його ціна має бути вищою, тобто повинна виконуватись нерівність $U^{\mathrm{P}^*}_t \geq V_t$.

Лема 3.2.102. *Для всіх $t \in \mathbb{T}$ P^*-м.н. має місце нерівність $U^{\mathrm{P}^*}_t \geq$ $\geq V_t$. При цьому, якщо додатково $V_t \geq H_t$ для всіх $t \in \mathbb{T}$ P^*-м.н., то $U^{\mathrm{P}^*}_t = V_t$.*

Доведення. За означенням огинаючої Снелла

$$U^{\mathrm{P}^*}_t \geq \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(U^{\mathrm{P}^*}_{t+1} \mid \mathcal{F}_t),$$

тобто U^{P^*} – супермартингал (див. також теорему 3.2.88). Але тоді

$$U^{\mathrm{P}^*}_t \geq \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(U^{\mathrm{P}^*}_T \mid \mathcal{F}_t) = \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(H_T \mid \mathcal{F}_t) = V_t.$$

Якщо $V_t \geq H_t$, то ми маємо мартингал V_t (який, як і усякий мартингал, є частковим випадком супермартингала), який мажорує H_t. Тоді за теоремою 3.2.88, має місце нерівність $V_t \geq U^{\mathrm{P}^*}_t$, і разом з уже доведеною протилежною нерівністю отримуємо рівність. $\square$

Лема 3.2.103. *Якщо процес $\{H_t, \mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T}\}$ є P^*-субмартингалом, то $V_t \geq H_t$ для всіх $t \in \mathbb{T}$ P^*-м.н., тобто $U^{\mathrm{P}^*}_t = V_t$.*

Доведення. Нехай $\{H_t, \mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T}\}$ є P^*-субмартингалом. Тоді $V_t = \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(H_T \mid \mathcal{F}_t) \geq H_t$ за означенням субмартингала. $\square$

Лема 3.2.104. *Нехай функція* $f : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty)$ *і є опуклою вниз,* $X_t = (X_t^1, \ldots, X_t^d)$ *– ціновий дисконтований процес,* $H_t = f(X_t)$*. Тоді* $\{H_t, \mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T}\}$ *є* P^**-субмартингалом.*

Доведення. З нерівності Ієнсена для умовних математичних сподівань випливають наступні нерівності

$$\mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(H_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) = \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(f(X_{t+1}) \mid \mathcal{F}_t) \geq$$
$$\geq f(\mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t)) = f(X_t) = H_t. \qquad (\square)$$

Приклад 3.2.105. Розглянемо дисконтований Американський опціон купівлі

$$H_t^{call} = \frac{(S_t - K)^+}{S_{t,0}} = \left(\frac{S_t}{S_{t,0}} - \frac{K}{S_{t,0}}\right)^+ = \left(X_t - \frac{K}{S_{t,0}}\right)^+.$$

Дисконтувальний множник $S_{t,0}$ можна, наприклад, вважати рівним $(1+r)^t$, де $r > 0$ – відсоткова ставка, тобто він росте з часом. Тоді, оскільки функція $f(x) := (x - a)^+$ є опуклою вниз для всіх $a \in \mathbb{R}$, то за нерівністю Йєнсена

$$\mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(H_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) = \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}\left(\left(X_{t+1} - \frac{K}{S_{t+1,0}}\right)^+ \Bigg| \mathcal{F}_t\right) \geq$$
$$\geq \left(\mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}\left(X_{t+1} - \frac{K}{S_{t+1,0}} \Bigg| \mathcal{F}_t\right)\right)^+ = \left(X_t - \frac{K}{S_{t+1,0}}\right)^+ \geq$$
$$\geq \left(X_t - \frac{K}{S_{t,0}}\right)^+ = H_t,$$

тобто виконано умови леми 3.2.104, тому і лем 3.2.103, 3.2.102, і

$$U_t^{\mathrm{P}^*} = V_t = \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}\left(\left(X_T - \frac{K}{(1+r)^T}\right)^+ \Bigg| \mathcal{F}_t\right).$$

Зокрема,

$$U_0^{\mathrm{P}^*} = V_0 = \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}\left(X_T - \frac{K}{(1+r)^T}\right)^+,$$

а ця рівність, в свою чергу, означає, в силу теореми 3.2.96, що $\tau_0 = T$ є оптимальним моментом зупинки. Значить, Американський опціон купівлі покупець повинен пред'явити в момент T.

Приклад 3.2.106. Для Американського опціону продажу, за умови, що $S_{t,0} = (1+r)^t$ і $r > 0$, V_t може не бути субмартингалом. Як правило,

$$\mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(V_T \mid \mathcal{F}_t) - V_t =$$
$$= \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}\left(\left(\frac{K}{(1+r)^T} - X_T\right)^+ \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right) - \left(\frac{K}{(1+r)^t} - X_t\right)^+$$

є від'ємною випадковою величиною. Це означає, що у випадку пред'явлення опціону в момент $t < T$ продавець одержить суму розміром в

$$\left(\frac{K}{(1+r)^t} - X_t\right)^+ - \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}\left(\left(\frac{K}{(1+r)^T} - X_T\right)^+ \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right)$$

(вона називається *премією за раннє пред'явлення*). Розглянемо на прикладі біноміальної моделі співвідношення між ціною та внутрішньою вартістю $(K-x)^+$ Американського опціону продажу. Нехай $S_0 = x > 0$ – початкова ціна ризикового активу,

$$S_t = x\prod_{k=1}^{t}(1+R_k) =: x\Lambda_t$$

ціна цього активу в момент t,

$$\Lambda_0 = 1, \quad \mathrm{P}^*(R_k = a) = p^*, \quad \mathrm{P}^*(R_k = b) = 1 - p^*, \quad -1 < a < r < b,$$
$$p^* = \frac{b-r}{b-a}, \quad R_k, \quad 1 \le k \le T$$

незалежні в сукупності. Позначимо через

$$\pi(x) := \sup_{\tau\in\mathcal{T}} \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}\left(\frac{K}{(1+r)^\tau} - x\frac{\Lambda_\tau}{(1+r)^\tau}\right)^+$$

ціну Американського опціону продажу як функцію від x. Його внутрішнім значенням, тобто значенням в момент $t = T$, є $(K - x)^+$. Функція $\pi(x)$ є опуклою вниз і незростаючою за x, те саме є вірним і для $(K-x)^+$. Розглянемо наступні випадки, припускаючи, що $a < 0 < r < b$.

1. Нехай $x \geq K/(1+a)^T$. Тоді

$$x\Lambda_t \geq \frac{K\Lambda_t}{(1+a)^T} \geq K,$$

оскільки $\Lambda_t \geq (1+a)^T$. Значить, $\pi(x) = 0$. В цьому випадку опціон не виконується в "грошах".

2. Нехай $x \leq K/(1+b)^T$. Тоді $x\Lambda_t \leq K\Lambda_t/(1+b)^T \leq K$, і

$$\pi(x) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}} \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}\left(\frac{K}{(1+r)^\tau} - x\frac{\Lambda_\tau}{(1+r)^\tau}\right) =$$
$$= \sup_{\tau\in\mathcal{T}}\left(\mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}\frac{K}{(1+r)^\tau} - x\right) = K - x = (K-x)^+;$$

ми скористалися тим фактом, що $\Lambda_t(1+r)^{-t}$ – P^*-мартингал, і

$$\mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}\frac{\Lambda_\tau}{(1+r)^\tau} = \frac{\Lambda_0}{(1+r)^0} = 1.$$

Отже, ціна $\pi(x)$ дорівнює внутрішньому значенню $(K-x)^+$, опціон треба подати в момент $t=0$, а такий опціон взагалі непотрібний.

3. Нехай $K \leq x < K/(1+a)^T$. Тоді

$$\mathrm{P}\{K - x\Lambda_t > 0\} = \mathrm{P}\left\{\Lambda_t < \frac{K}{x}\right\} = \mathrm{P}\{\Lambda_t < y\},$$

де число $y \in ((1+a)^T, 1]$. Можна вибрати такі $0 < n < t$, що $(1+b)^n(1+a)^{t-n} < y$, тобто

$$\left(\frac{1+b}{1+a}\right)^n < \frac{y}{(1+a)^t},$$

або

$$\frac{1+b}{1+a} < \frac{y^{1/n}}{(1+a)^{t/n}}.$$

Справді, можна покласти, наприклад, $n = t/2p$ і вибрати настільки великі t і p, щоб, з одного боку, $2p/t \sim 0$, а з іншого, $y^{2p/t} >$ $> (1+b)(1+a)^{2p-1}$. З цього випливатиме, що $\mathrm{P}\{\Lambda_t < y\} > 0$, тобто ймовірність виконати опціон "в грошах" додатна, а його внутрішнє значення $(K-x)^+ = 0$. Отже, в цьому випадку $\pi(x) > (K-x)^+$, тобто для покупця не має сенсу виконувати опціон миттєво.

4. Нехай $K/(1+b)^T \le x \le K$. Тоді в точці $x = K/(1+b)^T$ $\pi(x) = (K-x)^+$, в точці $x = K$ $\pi(x) > (K-x)^+$. Оскільки обидві функції $\pi(x)$ і $(K-x)^+$ монотонно не зростають і неперервні по x, то існує деяка початкова ціна x_0, така, що $\pi(x) = (K-x)^+$ для $K/(1+b)^T \le x \le x_0$, і $\pi(x) > (K-x)^+$ для $x_0 < x \le K$.

Остаточно,

$$\begin{array}{lll} \pi(x) = (K-x)^+ & \text{для} & x \le x_0, \\ \pi(x) > (K-x)^+ & \text{для} & x_0 < x < K/(1+a)^T, \\ \pi(x) = 0 & \text{для} & K/(1+a)^T \le x, \end{array}$$

причому $x_0 \in (K/(1+b)^T, K]$. Див. рис. 3.3.

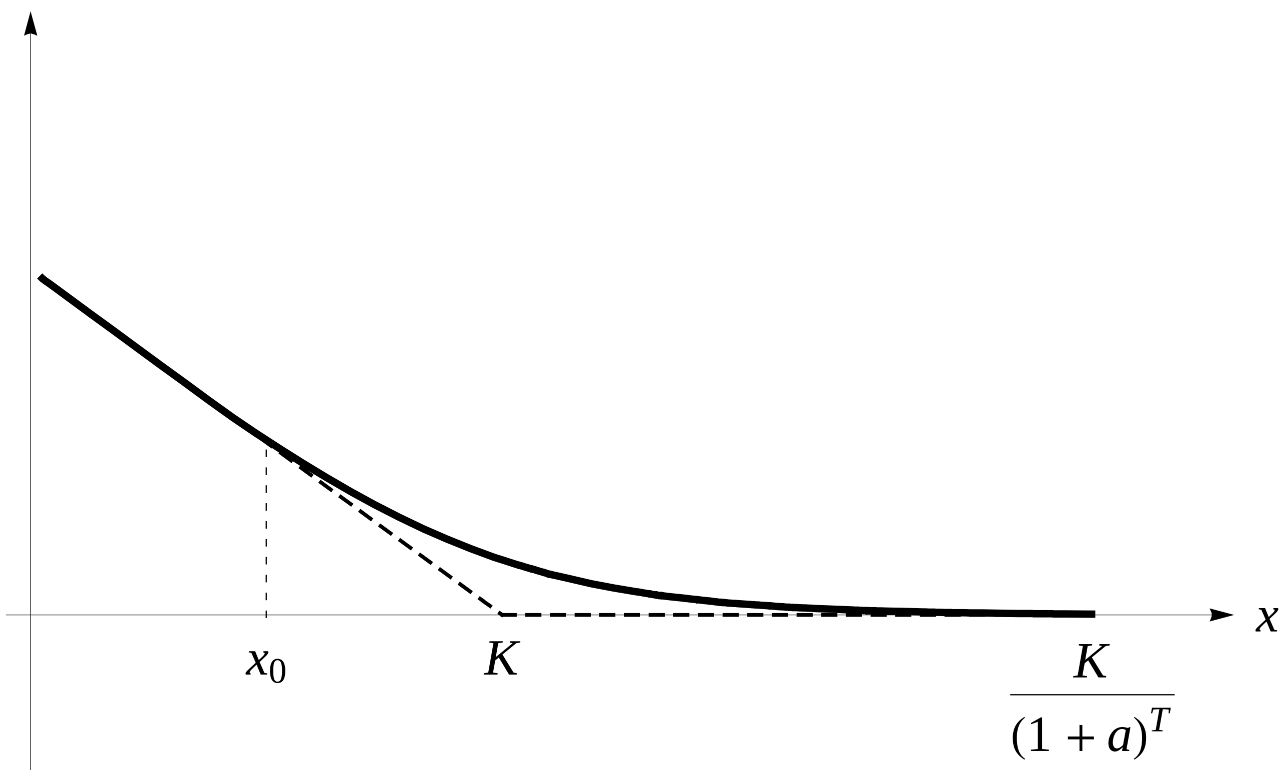

Рис. 3.3: Ціна (суцільна лінія) та функція виплат (пунктирна лінія) Американського опціону продажу.

3.2.10 Квадратична теорія хеджування на неповному ринку

Припустимо, що фінансовий ринок функціонує на множині періодів $\mathbb{T} = \{0, 1, \ldots, T\}$, існує платіжне зобов'язання H, яке продавець повинен бути в змозі "зустріти" в момент T, але він будує фінансову стратегію (не обов'язково самофінансовану) без ризику не бути в змозі хеджувати H, і не тому, що ринок повний, ринок як раз вважається неповним, а тому, що в кожний момент часу, зокрема в момент T, він може додати до того капіталу, що має, будь-яку потрібну суму. Зокрема, якщо в момент T він має капітал $V_T < H$, він "позичить" $H - V_T$ і "зустріне" покупця платіжного зобов'язання H. Але ці позики треба віддавати, тому його задачею є зведення помилки хеджування до мінімуму. Будемо розв'язувати цю задачу мінімізації помилки хеджування в термінах квадратично інтегровних платіжних зобов'язань і капіталів, тоді вона зведеться до послідовної регресії.

Поняття локального квадратичного ризику. Основна теорема щодо стратегій, що мінімізують локальний ризик

Розглянемо поняття, пов'язані з узагальненими (не обов'язково самофінансованими) стратегіями.

Означення 3.2.107. *Узагальнена стратегія* – це пара з двох випадкових процесів $\overline{\xi} = (\xi^0, \xi)$, з яких одновимірна компонента $\xi^0 = (\xi_t^0, \mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T})$ є узгодженою, а d-вимірна компонента $\xi = (\xi_t = (\xi_t^1, \ldots, \xi_t^d), \mathcal{F}_t, t = 1, \ldots, T)$ є передбачуваною.

Нехай, як завжди $X_t = (X_t^1, \ldots, X_t^d)$ – дисконтований ціновий процес. Дисконтований капітал V узагальненої стратегії (ξ^0, ξ) визначається наступним чином:

$$V_0 = \xi_0^0, \quad V_t = \xi_t^0 + \xi_t \cdot X_t, \quad t = 1, \ldots, T.$$

Означення 3.2.108. *Процес прибутків і втрат* узагальненої стратегії $\overline{\xi}$, накопичених до моменту t – це сума

$$G_0 = 0, \quad G_t = \sum_{k=1}^{t} \xi_k \cdot (X_k - X_{k-1}), \quad t = 1, \ldots, T.$$

В силу означення 3.2.39 самофінансованої стратегії, рівності (3.2.7) і леми 3.2.41, капітал V_t дорівнюватиме

$$V_0 = \xi_1^0 + \xi_1 \cdot X_0, \quad V_t = V_0 + \sum_{k=1}^{t} \xi_k \cdot (X_k - X_{k-1})$$

тоді і тільки тоді, коли стратегія є самофінансованою, з початковим внеском $V_0 = \xi_0^0 = \xi_1^0 + \xi_1 \cdot X_0$. В загальному випадку різниця $V_t - G_t$ є нетривіальною, і її можна інтерпретувати як втрати, або додаткові позики, накопичені до моменту t.

Означення 3.2.109. *Процесом коштів C* стратегії $\overline{\xi}$ називається різниця між капіталом V і процесом прибутків і втрат G, тобто $C_t = V_t - G_t$, $t \in \mathbb{T}$.

Далі припускаємо, що $\mathcal{F}_0 = \{0, \varnothing\}$, $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$, $V_T = H$, тобто ми розглядаємо лише ті стратегії, які реплікують (відтворюють, хеджують, породжують) платіжне зобов'язання H. Ми не виключаємо зараз наявності арбітражних можливостей, хоча найбільш цікавим є випадок, коли мартингальні міри існують. Зробимо ще потрібні припущення щодо квадратичної інтегровності.

Припущення 3.2.110. Припустимо, що і дисконтоване платіжне зобов'язання H і дисконтований ціновий процес X є квадратично інтегровними: $\mathrm{E}H^2 < \infty$ і $\mathrm{E}X_t^2 < \infty$, $t \in \mathbb{T}$.

Означення 3.2.111. Узагальнену стратегію $\overline{\xi}$, капітал і процес прибутків і втрат якої задовольняють вимоги $V_T = H$ P-м.н., $\mathrm{E}V_t^2 < \infty$, $\mathrm{E}G_t^2 < \infty$, $t \in \mathbb{T}$, назвемо *L^2-допустимою стратегією.*

Тепер введемо квадратичний критерій для помилки хеджування L^2-допустимої стратегії.

Означення 3.2.112. 1. *Процес локального квадратичного ризику* L^2-допустимої стратегії $\overline{\xi}$ – це процес вигляду

$$R_t^{\mathrm{loc}}(\xi_0, \xi) := \mathrm{E}((C_{t+1} - C_t)^2 \mid \mathcal{F}_t), \quad t = 0, \ldots, T-1.$$

2. L^2-допустиму стратегію $\widehat{\widehat{\xi}} = (\widehat{\xi}^0, \widehat{\xi})$ називають такою, що мінімізує локальний (квадратичний) ризик, якщо

$$R_t^{\text{loc}}(\widehat{\xi}^0, \widehat{\xi}) \le R_t^{\text{loc}}(\xi^0, \xi) \quad \text{P-м.н.}, \quad t = 0, \dots, T-1$$

для всіх L^2-допустимих стратегій (ξ_0, ξ).

Далі слово "квадратичний" будемо опускати.

Означення 3.2.113. L^2-допустима стратегія називається *самофінансованою в середньому*, якщо її процес коштів C є P-мартингалом, тобто

$$\mathrm{E}(C_{t+1} - C_t \mid \mathcal{F}_t) = 0 \quad \text{P-м.н.}, \quad t = 0, \dots, T-1.$$

Означення 3.2.114. 1. *Умовною коваріацією* відносно міри P та σ-алгебри $\mathcal{G}$ двох випадкових величин Y та Z з $\mathrm{E}Y^2 < \infty$, $\mathrm{E}Z^2 < \infty$ називається випадкова величина

$$\operatorname{cov}(Y, Z \mid \mathcal{G}) = \mathrm{E}(YZ \mid \mathcal{G}) - \mathrm{E}(Y \mid \mathcal{G})\mathrm{E}(Z \mid \mathcal{G}).$$

2. *Умовною дисперсією* випадкової величини Y відносно міри P та σ-алгебри $\mathcal{G}$ називається випадкова величина $\operatorname{var}(Y \mid \mathcal{G}) := \operatorname{cov}(Y, Y \mid \mathcal{G}) = \mathrm{E}(Y^2 \mid \mathcal{G}) - (\mathrm{E}(Y \mid \mathcal{G}))^2$.

Означення 3.2.115. Два узгоджені процеси $A = A_t$ і $B = B_t$ називаються *сильно ортогональними* відносно міри P і фільтрації $\{\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T}\}$, якщо умовні коваріації їхніх приростів нульові, тобто

$$\operatorname{cov}(A_{t+1} - A_t, B_{t+1} - B_t \mid \mathcal{F}_t) = 0 \quad \text{P} - \text{м.н.}, \quad t = 0, \dots, T-1.$$

Далі, якщо ми розглядаємо два сильно ортогональні процеси, то, як правило, один з них, наприклад, B_t, є $\mathcal{F}_t$-мартингалом. У цьому випадку умовна коваріація набуває вигляду

$$\operatorname{cov}(A_{t+1} - A_t, B_{t+1} - B_t \mid \mathcal{F}_t) = \mathrm{E}((A_{t+1} - A_t)(B_{t+1} - B_t) \mid \mathcal{F}_t).$$

Нам буде потрібний такий допоміжний результат.

Лема 3.2.116. *Умовна коваріація* $\operatorname{cov}(Y, Z \mid \mathcal{G})$ *не зміниться, якщо до однієї або обох випадкових величин додати G-вимірну квадратично інтегровну випадкову величину. Зокрема, умовна дисперсія* $\operatorname{var}(Y \mid \mathcal{G}) = \operatorname{var}(Y + Y_1 \mid \mathcal{G})$*, якщо* Y_1 *– G-вимірна,* $\mathrm{E}Y_1^2 < \infty$.

Доведення. Нехай $\mathrm{E}Y_1^2 < \infty$, $\mathrm{E}Z_1^2 < \infty$, Y_1, Z_1 G-вимірні. Тоді

$$\begin{gathered}\operatorname{cov}(Y + Y_1, Z + Z_1 \mid \mathcal{G}) = \\ = \mathrm{E}((Y + Y_1)(Z + Z_1) \mid \mathcal{G}) - \mathrm{E}(Y + Y_1 \mid \mathcal{G})\mathrm{E}(Z + Z_1 \mid \mathcal{G}) = \\ = \mathrm{E}(YZ \mid \mathcal{G}) + Y_1\mathrm{E}(Z \mid \mathcal{G}) + Z_1\mathrm{E}(Y_1 \mid \mathcal{G}) + Y_1Z_1 - \mathrm{E}(Y \mid \mathcal{G})\mathrm{E}(Z \mid \mathcal{G}) - \\ - Y_1\mathrm{E}(Z \mid \mathcal{G}) - Z_1\mathrm{E}(Y \mid \mathcal{G}) - Y_1Z_1 = \\ = \mathrm{E}(YZ \mid \mathcal{G}) - \mathrm{E}(Y \mid \mathcal{G})\mathrm{E}(Z \mid \mathcal{G}) = \operatorname{cov}(Y, Z \mid \mathcal{G}).\end{gathered}$$ □

Тепер дамо характеризацію стратегій, що мінімізують локальний ризик.

Теорема 3.2.117. *L^2-допустима стратегія мінімізує локальний ризик тоді і тільки тоді, коли вона самофінансована в середньому, і її процес коштів є сильно ортогональним до цінового процесу X.*

Доведення. Процес локального ризику будь-якої L^2-допустимої стратегії можна записати у вигляді суми двох невід'ємних доданків

$$\begin{gathered}\mathrm{E}((C_{t+1} - C_t)^2 \mid \mathcal{F}_t) = \\ = \operatorname{var}(C_{t+1} - C_t \mid \mathcal{F}_t) + (\mathrm{E}(C_{t+1} - C_t \mid \mathcal{F}_t))^2.\end{gathered} \tag{3.2.22}$$

Зауважимо, що

$$C_{t+1} - C_t = V_{t+1} - V_t - \xi_{t+1} \cdot (X_{t+1} - X_t),$$

і в силу леми 3.2.116

$$\operatorname{var}(C_{t+1} - C_t \mid \mathcal{F}_t) = \operatorname{var}(V_{t+1} - \xi_{t+1} \cdot (X_{t+1} - X_t) \mid \mathcal{F}_t).$$

Другий доданок в правій частині (3.2.22) можна переписати у вигляді

$$(\mathrm{E}(V_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) - V_t - \mathrm{E}(\xi_{t+1} \cdot (X_{t+1} - X_t) \mid \mathcal{F}_t))^2.$$

Тепер застосуємо метод зворотної індукції. Справа в тому, що $V_T = H$ нам відоме. Нехай $t = T - 1$, і ми хочемо одночасно мінімізувати обидва доданки в (3.2.22) по таких стратегіях (ξ^0, ξ), що $V_T = H$. Для цього треба одночасно мінімізувати

$$\operatorname{var}\left(H - \xi_T \cdot (X_T - X_{T-1}) \mid \mathcal{F}_{T-1}\right)$$

за ξ_T і

$$\Big(\mathrm{E}(H \mid \mathcal{F}_{T-1}) - V_{T-1} - \mathrm{E}(\xi_T \cdot (X_T - X_{T-1}) \mid \mathcal{F}_{T-1})\Big)^2$$

за ξ і V_{T-1}. Перший вираз є квадратичною формою відносно ξ_T, і її мінімум досягається при тому значенні ξ_T, яке є розв'язком лінійного рівняння (можливо, не єдиним)

$$\operatorname{cov}\left(V_T - \xi_T \cdot (X_T - X_{T-1}), \quad X_T - X_{T-1} \mid \mathcal{F}_{T-1}\right) = 0.$$

Мінімум другого доданку досягається тоді і тільки тоді, коли він обертається в нуль, тобто при

$$V_{T-1} = \mathrm{E}(H \mid \mathcal{F}_{T-1}) - \xi_{T-1} \cdot \mathrm{E}(X_T - X_{T-1} \mid \mathcal{F}_{T-1}).$$

Тепер, аналогічним чином, вважатимемо, що V_{t+1} вже відоме. Тоді мінімум обох доданків в правій частині (3.2.22) досягається тоді і тільки тоді, коли

$$\operatorname{cov}(V_{t+1} - \xi_{t+1} \cdot (X_{t+1} - X_t), X_{t+1} - X_t \mid \mathcal{F}_t) = 0, \tag{3.2.23}$$

$$V_t = \mathrm{E}(V_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) - \xi_{t+1} \cdot \mathrm{E}(X_{t+1} - X_t \mid \mathcal{F}_t). \tag{3.2.24}$$

Рівність (3.2.24) означає, що $\mathrm{E}(C_{t+1} - C_t \mid \mathcal{F}_t) = 0$, тобто стратегія (ξ^0, ξ) самофінансована в середньому. Якщо додати до першого доданку в (3.2.23) V_t, а результат від цього не зміниться, то ми одержимо, що в (3.2.23) мінімум досягається тоді і лише тоді, коли $\operatorname{cov}(C_{t+1} - C_t, X_{t+1} - X_t \mid \mathcal{F}_t) = 0$ P-м.н. Це і означає сильну ортогональність процесу коштів і цінового процесу, а тоді з урахуванням того, що мінімум в (3.2.24) досягається тоді і лише тоді, коли стратегія самофінансована в середньому, ми одержуємо доведення. □

Явні формули для стратегій, що мінімізують локальний ризик, в одновимірному випадку

В загальному випадку рівняння (3.2.23) – це рівняння деякої випадкової гіперплощини в $\mathbb{R}^d$. Розглянемо випадок $d = 1$, коли розв'язок (3.2.23) єдиний для кожного t, але при цьому ще треба простежити, щоб одержана стратегія була L^2-допустимою.

Почнемо з моменту $t = T$ і будемо рухатися в напрямку зменшення t. Зауважимо, що рівняння (3.2.23) – (3.2.24) фактично є рівняннями лінійної регресії. Отже, в момент $t = T$

$$\mathrm{cov}(V_T - \xi_T \cdot (X_T - X_{T-1}), X_T - X_{T-1} \mid \mathcal{F}_{T-1}) = 0,$$

або

$$\begin{gathered}\mathrm{E}((V_T - \xi_T \cdot (X_T - X_{T-1}))(X_T - X_{T-1}) \mid \mathcal{F}_{T-1}) - (\mathrm{E}(V_T \mid \mathcal{F}_{T-1}) - \\ -\xi_T \cdot \mathrm{E}(X_T - X_{T-1} \mid \mathcal{F}_{T-1}))\mathrm{E}(X_T - X_{T-1} \mid \mathcal{F}_{T-1}) = 0.\end{gathered} \tag{3.2.25}$$

Позначимо $\Delta X_t := X_t - X_{t-1}$, $\sigma_t^2 := \mathrm{var}(\Delta X_t \mid \mathcal{F}_{t-1})$ і припустимо, що $\sigma_t^2 \neq 0$ P-м.н. для всіх $t \in \mathbb{T}$. Тоді з (3.2.25)

$$\xi_T = \frac{1}{\sigma_T^2}\mathrm{cov}(V_T, \Delta X_T) = \frac{1}{\sigma_T^2}\mathrm{cov}(H, \Delta X_T),$$

$$V_{T-1} = \mathrm{E}(H \mid \mathcal{F}_{T-1}) - \frac{1}{\sigma_T^2}\mathrm{cov}(H, \Delta X_T)\mathrm{E}(\Delta X_T \mid \mathcal{F}_{T-1}).$$

Цілком аналогічно можна одержати формули для ξ_t і V_{t-1} в будь-який момент часу

$$\xi_t = \frac{1}{\sigma_t^2}\mathrm{cov}(V_t, \Delta X_t \mid \mathcal{F}_{t-1}), \tag{3.2.26}$$

$$V_{t-1} = \mathrm{E}(V_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) - \frac{1}{\sigma_t^2}\mathrm{cov}(V_t, \Delta X_t \mid \mathcal{F}_{t-1})\mathrm{E}(\Delta X_t \mid \mathcal{F}_{t-1}). \tag{3.2.27}$$

Зауваження 3.2.118. Неважко перевірити, що $\mathrm{var}(\Delta X_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) \geq 0$, так само, як і варіація будь-якої квадратично інтегровної випадкової величини. Якщо $\xi \equiv \mathrm{const}$, то $\mathrm{var}(\xi \mid \mathcal{F}) = 0$ для будь-якої σ-алгебри $\mathcal{F}$. Навпаки, якщо X – P-мартингал і $\Delta X_t \neq 0$ P-м.н., то $\sigma_t^2 = \mathrm{E}((\Delta X_t)^2 \mid \mathcal{F}_{t-1}) > 0$ P-м.н.

Тепер сформулюємо умови, за яких формули (3.2.26)–(3.2.27) дають L^2-допустиму стратегію.

Теорема 3.2.119. *Нехай виконується умова*

$$\begin{gathered}\text{існує } 0 < \delta < 1 \text{ таке, що для всіх } t = 1, \ldots, T \ \ \mathrm{P}\text{-м.н.} \\ (\mathrm{E}(\Delta X_t \mid \mathcal{F}_{t-1}))^2 \leq \delta \cdot \mathrm{E}((\Delta X_t)^2 \mid \mathcal{F}_{t-1})\end{gathered} \tag{3.2.28}$$

Тоді стратегія $\overline{\xi}_t = (\xi_t^0, \xi_t)$*, де* ξ_t *задається рівнянням* (3.2.26)*,* ξ_t^0 *визначається з рівності* $\xi_t^0 + \xi_t X_t = V_t$*, а* V_t *задовольняє* (3.2.27)*, є* L^2*-допустимою.*

Доведення. Треба перевірити, що $\mathrm{E}V_t^2 < \infty$ і $\mathrm{E}G_t^2 < \infty$ для всіх $t \in \mathbb{T}$. Почнемо з $\mathrm{E}V_t^2$:

$$\mathrm{E}V_{t-1}^2 = \mathrm{E}\left(\mathrm{E}(V_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) - \frac{1}{\sigma_t^2}\mathrm{cov}(V_t, \Delta X_t \mid \mathcal{F}_{t-1})\mathrm{E}(\Delta X_t \mid \mathcal{F}_{t-1})\right)^2.$$

Оскільки $\mathrm{E}H^2 < \infty$, і ми можемо застосовувати зворотну індукцію, то можна вважати, що $\mathrm{E}(\mathrm{E}(V_t \mid \mathcal{F}_{t-1}))^2 < \infty$. Тому залишається довести, що

$$\mathcal{E} := \mathrm{E}\left(\frac{1}{\sigma_t^2}\mathrm{cov}(V_t, \Delta X_t \mid \mathcal{F}_{t-1})\mathrm{E}(\Delta X_t \mid \mathcal{F}_{t-1})\right)^2 < \infty.$$

Але, із застосуванням нерівності Коші-Буняковського

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &\leq \mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{cov}(V_t, \Delta X_t \mid \mathcal{F}_{t-1})}{\mathrm{E}((\Delta X_t)^2 \mid \mathcal{F}_{t-1}) - (\mathrm{E}(\Delta X_t \mid \mathcal{F}_{t-1}))^2}\mathrm{E}(\Delta X_t \mid \mathcal{F}_{t-1})\right)^2 \leq \\ &\leq \frac{\delta^2}{1-\delta}\mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{E}(V_t\Delta X_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) - \mathrm{E}(\Delta X_t \mid \mathcal{F}_{t-1})\mathrm{E}(V_t \mid \mathcal{F}_{t-1})}{(\mathrm{E}((\Delta X_t)^2 \mid \mathcal{F}_{t-1}))^{1/2}}\right)^2 \leq \\ &\leq \frac{\delta^2}{1-\delta}\mathrm{E}\Big(\frac{(\mathrm{E}(V_t^2 \mid \mathcal{F}_{t-1}))^{1/2}(\mathrm{E}((\Delta X_t)^2 \mid \mathcal{F}_{t-1}))^2}{(\mathrm{E}((\Delta X_t)^2 \mid \mathcal{F}_{t-1}))^{1/2}} + \\ &\quad + \frac{\mathrm{E}(V_t \mid \mathcal{F}_{t-1})(\mathrm{E}((\Delta X_t)^2 \mid \mathcal{F}_{t-1}))^{1/2}}{(\mathrm{E}((\Delta X_t)^2 \mid \mathcal{F}_{t-1}))^{1/2}}\Big)^2 \leq \\ &\leq \frac{\delta^2}{1-\delta} \cdot 2(\mathrm{E}V_t^2 + \mathrm{E}(V_t \mid \mathcal{F}_{t-1})^2) < \infty.\end{aligned}$$

Тепер, щоб довести нерівність $\mathrm{E}G_t^2 < \infty$, достатньо довести, що $\mathrm{E}(\xi_t \Delta X_t)^2 < \infty$ для кожного $t = 1, 2, \dots, T$. Врахуємо, що ξ_t є $\mathcal{F}_{t-1}$-вимірною випадковою величиною:

$$\mathrm{E}(\xi_t \Delta X_t)^2 = \mathrm{E}(\xi_t \mathrm{E}(\Delta X_t \mid \mathcal{F}_{t-1}))^2 =$$
$$= \mathrm{E}\left(\frac{1}{\sigma_t^2}\mathrm{cov}(V_t, \Delta X_t \mid \mathcal{F}_{t-1})\mathrm{E}(\Delta X_t \mid \mathcal{F}_{t-1})\right)^2,$$

а скінченність цього виразу нами вже встановлено. Теорему доведено. □

Зауваження 3.2.120. Якщо виконується умова (3.2.28), то існує $C > 0$ таке, що

$$(\mathrm{E}(\Delta X_t \mid \mathcal{F}_{t-1}))^2 \le C\sigma_t^2. \tag{3.2.29}$$

Справді, достатньо покласти $C = \delta/(1-\delta)$. (Див. доведення теореми 3.2.140). Очевидно, умови (3.2.28) і (3.2.29) еквівалентні.

Означення 3.2.121. За виконання умови $\sigma_t^2 \ne 0$, $t = 1, \dots, T$ P-м.н., передбачуваний процес

$$Z_t := \sum_{k=1}^{t} \frac{1}{\sigma_k^2}(\mathrm{E}(\Delta X_k \mid \mathcal{F}_{k-1}))^2,\ t = 1, \dots, T$$

називається процесом *середньо-дисперсного відношення процесу X*, а умова (3.2.28) (або (3.2.29)) – це *умова обмеженості середньо-дисперсного відношення*.

Приклад 3.2.122. Розглянемо модель ринку, що складається з безризикової облігації $B_t = (1+r)^t$, $r > 0$, і ризикового активу S_t з початковою вартістю $S_0 = 1$ і дисконтованим ціновим процесом вигляду

$$X_t = \prod_{k=1}^{t} \frac{1+R_k}{1+r},$$

де $\{R_k, 1 \le k \le T\}$ – незалежні в сукупності однаково розподілені величини доходів, $\mathrm{E}R_k^2 < \infty$, $\mathrm{E}R_k = m$, $\mathrm{D}R_k = \sigma^2$. У цьому прикладі

$$\mathrm{E}(\Delta X_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) = X_{k-1}\mathrm{E}\frac{R_k - r}{1+r} = X_{k-1}\frac{m-r}{1+r},$$

$$
\sigma_k^2 = \mathrm{E}((\Delta X_k)^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}) - X_{k-1}^2 \Big(\frac{m-r}{1+r}\Big)^2 =
$$

$$
X_{k-1}^2 \mathrm{E}\Big(\frac{R_k - r}{1+r}\Big)^2 - X_{k-1}^2 \Big(\frac{m-r}{1+r}\Big)^2 = X_{k-1}^2 \frac{\sigma^2}{(1+r)^2}.
$$

Звідси

$$
\frac{1}{\sigma_k^2} (\mathrm{E}(\Delta X_k \mid \mathcal{F}_{k-1}))^2 = \frac{(m-r)^2}{\sigma^2},
$$

тобто виконано умови (3.2.28) і (3.2.29), середньо-дисперсне відношення обмежене, і стратегія, що мінімізує локальний ризик, існує.

Умова існування стратегії, що мінімізує локальний ризик, в термінах розкладу платіжного зобов'язання H

Повернемося до загальної моделі ринку зі скінченним числом дисконтованих ризикових активів $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^d)$, $t \in \mathbb{T}$.

Теорема 3.2.123. *1. Стратегія, що мінімізує локальний ризик, існує тоді і тільки тоді, коли платіжне зобов'язання H допускає розклад виду*

$$
H = c + \sum_{k=1}^{T} \widetilde{\xi}_k \cdot \Delta X_k + L_T \ \ \mathrm{P}\text{-м.н.}, \tag{3.2.30}
$$

де $\Delta X_k = X_k - X_{k-1}$, $\widetilde{\xi} = \{\widetilde{\xi}_t, t \in \mathbb{T}\}$ – такий d-вимірний передбачуваний процес, що $\mathrm{E}|\widetilde{\xi}_k \cdot \Delta X_k|^2 < \infty$ для всіх k, а L_T – фінальне значення деякого квадратично інтегровного P-мартингала $\{L_t, t \in \mathbb{T}\}$, сильно ортогонального до X, з нульовим середнім.

2. Якщо вказані умови виконано, то стратегія $(\widehat{\xi}^0, \widehat{\xi})$, що мінімізує локальний ризик, задається формулами

$$
\begin{gathered}
\widehat{\xi} = \widetilde{\xi}, \qquad \widehat{\xi}_0^0 = c, \\
\widehat{\xi}_t^0 = c + \sum_{k=1}^{t} \widetilde{\xi}_k \cdot \Delta X_k + L_t - \widetilde{\xi}_t \cdot X_t, \ t = 1, \dots, T.
\end{gathered} \tag{3.2.31}
$$

3. Розклад (3.2.30) *єдиний в тому розумінні, що мартингал L і стала c визначаються єдиним чином.*

Доведення. 1), 2) Якщо стратегія $(\widehat{\xi}^0, \widehat{\xi})$, що мінімізує локальний ризик, існує, то за теоремою 3.2.117 вона самофінансована в середньому, тобто процес коштів C_t є квадратично інтегровним P-мартингалом, і він строго ортогональний до X. Тобто $V_t - V_0 - \sum_{k=1}^{t} \widehat{\xi}_k \cdot \Delta X_k =: L_t$ – квадратично інтегровний мартингал, сильно ортогональний до X, $L_0 = 0$. В момент $t = T$ одержимо

$$V_T = H = V_0 + \sum_{k=1}^{T} \widehat{\xi}_k \cdot \Delta X_k + L_T,$$

і залишається покласти $\widetilde{\xi}_k := \widehat{\xi}_k$. Очевидно, $\mathrm{E}|\widetilde{\xi}_k \cdot \Delta X_k|^2 < \infty$ оскільки, за умовою існування стратегії, що мінімізує локальний ризик, вона є L^2-допустимою, тобто $\mathrm{E}V_t^2 < \infty$, $\mathrm{E}L_t^2 < \infty$, і те саме вірне для приростів ΔV_t і ΔL_t. Навпаки, нехай H допускає розклад виду (3.2.30). Тоді покладемо

$$V_t := c + \sum_{k=1}^{t} \widetilde{\xi}_k \cdot \Delta X_k + L_t,$$

а стратегію $(\widehat{\xi}_0, \widehat{\xi})$ задано формулами (3.2.31). Для такої стратегії процес коштів $C_t = L_t + c$, тобто він є квадратично інтегровним мартингалом, сильно ортогональним до X. Значить, стратегія $(\widehat{\xi}_0, \widehat{\xi})$ мінімізує локальний ризик.

3) Для доведення єдиності, припустимо, що існує інший розклад

$$H = c + \sum_{k=1}^{T} \widetilde{\xi}_k^{(1)} \cdot \Delta X_k + L_T^{(1)}.$$

Тоді, по-перше, обидві стратегії, за пунктом 1), мінімізують локальний ризик, а значить, в момент $T-1$, за формулою (3.2.24),

$$V_{T-1} = \mathrm{E}(H \mid \mathcal{F}_{T-1}) - \mathrm{E}(\widetilde{\xi}_T \cdot \Delta X_T \mid \mathcal{F}_{T-1}) = c + L_{T-1} + \sum_{k=1}^{T-1} \widetilde{\xi}_k \cdot \Delta X_k,$$

$$V_{T-1} = c + L_{T-1}^{(1)} + \sum_{k=1}^{T-1} \widetilde{\xi}_k^{(1)} \cdot \Delta X_k,$$

звідки

$$L_{T-1} - L_{T-1}^{(1)} = \sum_{k=1}^{T-1} (\widetilde{\xi}_k - \widetilde{\xi}_k^{(1)}) \cdot \Delta X_k.$$

Застосовуючи зворотну індукцію разом із (3.2.24) на кожному її кроці, одержимо, що

$$N_t := L_t - L_t^{(1)} = \sum_{k=1}^{t} (\widetilde{\xi}_k - \widetilde{\xi}_k^{(1)}) \cdot \Delta X_k.$$

Таким чином, N_t є квадратично інтегровним мартингалом, сильно ортогональним до X, тобто

$$\mathrm{E}((\widetilde{\xi}_t - \widetilde{\xi}_t^{(1)}) \cdot \Delta X_t)\Delta X_t^i \mid \mathcal{F}_{t-1}) = 0$$

для всіх $1 \leq i \leq d$. Домножимо кожну з цих рівностей на $\widetilde{\xi}_{t,i} - \widetilde{\xi}_{t,i}^{(1)}$ і додамо:

$$\mathrm{E}(((\widetilde{\xi}_t - \widetilde{\xi}_t^{(1)}) \cdot \Delta X_t)^2 \mid \mathcal{F}_{t-1}) = 0.$$

Тому $N_t - N_{t-1} = 0$ P-м.н., а оскільки $\widetilde{L}_0 = L_0 = 0$, то $L = \widetilde{L}$ і $c = \widetilde{c}$. □

Розклад Куніта-Ватанабе для квадратично інтегровних мартингалів з дискретним часом

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – ймовірнісний простір з фільтрацією $\{\mathcal{F}_t,\ t \in \mathbb{T} = \{0, 1, \ldots, T\}\}$, $X = \{X_t, \mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T}\}$ – квадратично інтегровний P-мартингал. Доведемо, що будь-який інший квадратично інтегрований P-мартингал можна розкласти на дві складові, одна з яких буде дискретною версією стохастичного інтеграла відносно процесу X, а друга – ортогональною до X. Спочатку доведемо два допоміжні результати.

Лема 3.2.124. *Нехай $M = \{M_t, \mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T}\}$ та $N = \{N_t, \mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T}\}$ – два квадратично інтегровні мартингали. Тоді наступні твердження еквівалентні:*

1) *процеси M та N сильно ортогональні;*
2) *добуток MN є мартингалом відносно цієї ж фільтрації.*

Доведення. 1) $\Rightarrow$ 2): Умова сильної ортогональності набуває вигляду

$$\mathrm{E}((M_t - M_{t-1})(N_t - N_{t-1}) \mid \mathcal{F}_{t-1}) = 0,$$

але

$$\mathrm{E}((M_t - M_{t-1})(N_t - N_{t-1}) \mid \mathcal{F}_{t-1}) = \mathrm{E}(M_t N_t - M_{t-1}N_{t-1} \mid \mathcal{F}_{t-1}),$$

звідки і випливає, що MN є мартингалом. 2) $\Rightarrow$ 1): Тепер маємо рівність $\mathrm{E}(M_t N_t - M_{t-1}N_{t-1} \mid \mathcal{F}_{t-1}) = 0$, але тоді і

$$\mathrm{E}((M_t - M_{t-1})(N_t - N_{t-1}) \mid \mathcal{F}_{t-1}) = 0,$$

звідки, а також з того, що наприклад, M є мартингалом, отримуємо сильну ортогональність M і N. $\square$

Позначимо $\mathcal{H}_2(\mathrm{P})$ простір всіх квадратично інтегровних P-мартингалів. Тоді, по-перше, кожний мартингал $M \in \mathcal{H}_2(P)$ можна записати у вигляді $M_t = \mathrm{E}(M_T/F_t)$, тобто можна встановити бієкцію $\mathcal{H}_2(P) \ni M \leftrightarrow M_T \in \mathcal{L}_2(\mathrm{P})$. По-друге, якщо ототожнити випадкові величини, рівні Р-м.н., то $\mathcal{H}_2(\mathrm{P})$ перетвориться на гільбертів простір, ізоморфний до $\mathcal{L}_2(\mathrm{P})$, в якому скалярний добуток задається формулою

$$(M, N)_{\mathcal{H}_2(\mathrm{P})} = \mathrm{E} M_T N_T.$$

Означення 3.2.125. Підпростір $\mathcal{H}'$ простору $\mathcal{H}_2(\mathrm{P})$ називається стійким, якщо $M^\tau \in \mathcal{H}'$ для будь-якого $M \in \mathcal{H}'$ і будь-якого моменту зупинки τ.

Лема 3.2.126. *Якщо $\mathcal{H}'$ – стійкий підпростір в $\mathcal{H}_2(\mathrm{P})$, $N \in \mathcal{H}_2(\mathrm{P})$, $N_0 = 0$, то наступні умови еквівалентні:*

1) *мартингал N є ортогональним до $\mathcal{H}'$, тобто $(N, M)_{\mathcal{H}_2(\mathrm{P})} = 0$ для всіх $M \in \mathcal{H}'$;*
2) *мартингал N є сильно ортогональним до $\mathcal{H}'$, тобто для будь-якого $M \in \mathcal{H}'$ має місце рівність*

$$\mathrm{E}((M_t - M_{t-1})(N_t - N_{t-1}) \mid \mathcal{F}_{t-1}) = 0.$$

Доведення. 1)$\Rightarrow$ 2): В силу леми 3.2.124 достатньо довести, що MN є мартингалом для всіх $M \in \mathcal{H}'$. Нехай $\mathrm{E}M_T N_T = 0$. Тоді, одночасно з M, до $\mathcal{H}'$ належить M^τ для будь-якого моменту зупинки τ, а для нього $M_T^\tau = M_\tau$, тобто $\mathrm{E}M_\tau N_T = 0$, а оскільки

$$\mathrm{E}M_\tau(N_T - N_\tau) = \mathrm{E}M_\tau\, \mathrm{E}(N_T - N_\tau \mid \mathcal{F}_\tau) = 0,$$

то і $\mathrm{E}M_\tau N_\tau = 0$, а тоді в силу леми 3.2.124 MN є мартингалом. 2)$\Rightarrow$ 1): навпаки, нехай MN – мартингал. Тоді, оскільки $M_0 N_0 = 0$, то $\mathrm{E}M_\tau N_\tau = \mathrm{E}M_T^\tau N_T = 0$, звідки $\mathrm{E}M_T N_T = 0$. $\square$

Теорема 3.2.127. (*Куніта-Ватанабе*) *Нехай* $X = \{X_t, \mathcal{F}_t, T \in \mathbb{T}\}$ *– квадратично інтегровний* P*-мартингал. Тоді будь-який мартингал* $M \in \mathcal{H}_2(\mathrm{P})$ *допускає розклад виду*

$$M_t = M_0 + \sum_{k=1}^{t} \xi_k \cdot (X_k - X_{k-1}) + L_t,$$

де ξ *– такий* d*-вимірний передбачуваний процес, що*

$$\xi_k \cdot (X_k - X_{k-1}) \in \mathcal{L}_2(\mathrm{P}), \quad 1 \le k \le T,$$

L *– квадратично інтегровний* P*-мартингал,* $L_0 = 0$, L *є сильно ортогональним до* X*. Більше того, мартингал* L *можна вибрати єдиним чином.*

Доведення. Позначимо G сукупність всіх d-вимірних передбачуваних процесів ξ, для яких $\xi_k \cdot (X_k - X_{k-1}) \in \mathcal{L}_2(\mathrm{P})$ для всіх $1 \le k \le T$. Ця сукупність непорожня; наприклад, вона містить будь-яку невипадкову послідовність. Позначимо

$$\widetilde{G}_t := \sum_{k=1}^{t} \xi_k \cdot (X_k - X_{k-1}), \quad t \in \mathbb{T}, \quad \xi \in G.$$

Очевидно, $\widetilde{G}$ є P- мартингалом, тому сукупність всіх таких $\widetilde{G}$ утворює лінійну множину, позначимо її $\mathcal{H}'$, в $\mathcal{H}_2(\mathrm{P})$. Покажемо, що $\mathcal{H}'$ – підпростір в $\mathcal{H}_2(\mathrm{P})$. Справді,

$$(\widetilde{G}, \widetilde{G})_{\mathcal{H}^2(\mathrm{P})} = \mathrm{E}\sum_{k=1}^{T} (\xi_k \cdot (X_k - X_{k-1}))^2;$$

тому, якщо $\widetilde{G}^{(n)}$ – фундаментальна послідовність в $\mathcal{H}_2(\mathrm{P})$, то для кожного t і відповідного $\xi_t^{(n)}$ послідовність випадкових величин $\xi_t^{(n)} \cdot (X_t - X_{t-1})$ фундаментальна в $\mathcal{L}_2(\mathrm{P})$.

Оскільки X є мартингалом відносно міри P, то можна довести (див, наприклад, лему 1.68 [21]), що $\xi_t^n \cdot (X_t - X_{t-1})$ збігається в $\mathcal{L}_2(\mathrm{P})$ до випадкової величини вигляду $\xi_t \cdot (X_t - X_{t-1})$, де $\xi_t \in \mathcal{L}_0(\Omega, \mathcal{F}_{t-1}, \mathrm{P}, R^d)$. Отже, $\mathcal{H}'$ є замкненою підмножиною в $\mathcal{H}_2(\mathrm{P})$, тобто $\mathcal{H}'$ – справді підпростір в $\mathcal{H}_2(\mathrm{P})$. Стійкість $\mathcal{H}'$ перевіряється безпосередньо. Якщо мартингал

$$G_t = \sum_{k=1}^{t} \xi_k \cdot (X_k - X_{k-1})$$

належить до $\mathcal{H}'$, то для будь-якого моменту зупинки τ зупинений мартингал має вигляд

$$G_{t\wedge\tau} = \sum_{k=1}^{t} \xi_k \mathbb{1}\{\tau \geq k\} \cdot (X_k - X_{k-1}),$$

причому

$$\mathrm{E}(\xi_k I\{\tau \geq k\} \cdot (X_k - X_{k-1}))^2 \leq \mathrm{E}(\xi_k \cdot (X_k - X_{k-1}))^2 < \infty,$$

а індикатор $\mathbb{1}\{\tau \geq k\} = 1 - \mathbb{1}\{\tau \leq k-1\} \in \mathcal{F}_{k-1}$. Отже, $G_{t\wedge\tau} \in \mathcal{H}'$, і $\mathcal{H}'$ – стійкий підпростір. Визначимо єдиним чином проекцію N процесу $M - M_0$ на підпростір $\mathcal{H}'$. За теоремою про існування, єдиність та властивості проекції, процес N належить до $\mathcal{H}'$, отже, він має вигляд

$$N_t = \sum_{k=1}^{t} \xi_k \cdot (X_k - X_{k-1}),$$

а різниця $L := M - M_0$ ортогональна до $\mathcal{H}'$; за лемою 3.2.126 ця різниця L є сильно ортогональною до $\mathcal{H}'$, а значить, і до N. Отже, $M = M_0 + N + L$ – шуканий розклад. Його єдиність доводиться так само, як відповідне твердження теореми 3.2.123. $\square$

3.2.11 Означення та деякі властивості мінімальних мартингальних мір

Якщо дисконтований ціновий процес X є мартингалом відносно міри P, то з теорем 3.2.123 і 3.2.127 відразу випливає існування та спосіб побудови стратегії, що мінімізує локальний ризик.

Теорема 3.2.128. *Якщо* P *– мартингальна міра, то стратегія, що мінімізує локальний ризик, існує. Процес коштів будь-якої такої стратегії визначається формулою*

$$V_t = \mathrm{E}(H \mid \mathcal{F}_t), \quad t \in \mathbb{T}, \tag{3.2.32}$$

а процес витрат задається формулою

$$C_t = V_0 + L_t, \quad t \in \mathbb{T}, \tag{3.2.33}$$

де L *– сильно ортогональний до* X P*-мартингал з розкладу Куніта–Ватанабе процесу* V.

Доведення. Застосуємо теореми 3.2.123 та 3.2.127. Згідно з теоремою 3.2.127, існує розклад

$$H = V_0 + \sum_{k=1}^{t} \xi_k \cdot (X_k - X_{k-1}) + L_T,$$

а тоді з теореми 3.2.123 стратегія, що мінімізує локальний ризик, існує. При цьому її капітал V_t задається формулою

$$V_t = V_0 + \sum_{k=1}^{t} \xi_k \cdot (X_k - X_{k-1}) + L_t = \mathrm{E}(H \mid \mathcal{F}_t)$$

для будь-якої стратегії ξ, що мінімізує локальний ризик, а процес витрат дорівнює

$$C_t = V_t - G_t = V_t - \sum_{k=1}^{t} \xi_k \cdot (X_k - X_{k-1}) = V_0 + L_t,$$

тобто задається єдиним чином. □

Рівність (3.2.32) є аналогічною до (3.2.11) і в цьому розумінні вона задає справедливу ціну платіжного зобов'язання H в момент t. Якщо дисконтований ціновий процес X не є мартингалом відносно міри P, можна намагатися шукати капітал V стратегії, що мінімізує локальний ризик, у вигляді $V_t = \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(H \mid \mathcal{F}_t)$, де $\mathrm{P}^* \sim \mathrm{P}$, P^* – мартингальна міра. Покажемо, що це можна зробити, якщо P^* є *мінімальною мартингальною мірою*.

Означення 3.2.129. Міра $\mathrm{P}^* \in \mathcal{P}$ називається мінімальною мартингальною мірою, якщо $\mathrm{E}\,(d\mathrm{P}^*/d\mathrm{P})^2 < \infty$ і при цьому будь-який мартингал $M \in \mathcal{L}_2(\mathrm{P})$, сильно ортогональний до X, також є і P^*-мартингалом.

Теорема 3.2.130. *Якщо на ймовірнісному просторі* $(\Omega, \mathcal{F})$ *існує мінімільна мартингальна міра для дисконтованого цінового процесу* X*, то для капіталу* V *стратегії, що мінімізує локальний ризик, має місце зображення* $V_t = \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(H \mid \mathcal{F}_t)$*,* $t \in \mathbb{T}$.

Доведення. В силу теореми 3.2.123 платіжне зобов'язання H допускає розклад

$$H = C + \sum_{k=1}^{T} \xi_k \cdot (X_k - X_{k-1}) + L_T,$$

а капітал V_t має вигляд

$$V_t = C + \sum_{k=1}^{t} \xi_k \cdot (X_k - X_{k-1}) + L_t.$$

Оскільки процес X є P^*-мартингалом, і при цьому

$$\mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}|\xi_k \cdot (X_k - X_{k-1})| \le \left(\mathrm{E}|\xi_k \cdot (X_k - X_{k-1})|^2 \mathrm{E}\left(\frac{d\mathrm{P}^*}{d\mathrm{P}}\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

то процес

$$G_t = \sum_{k=1}^{t} \xi_k \cdot (X_k - X_{k-1})$$

є P^*-мартингалом, а L є квадратично-інтегровним P-мартингалом, сильно ортогональним до X, отже, він є, за означенням мінімальної мартингальної міри, P^*-мартингалом. Тому V також є P^*-мартингалом зі значенням H в момент T, звідки одержуємо $V_t = \mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(H \mid \mathcal{F}_t)$. □

Тепер з'ясуємо, які умови на ціновий процес X забезпечують існування мінімальної мартингальної міри. Для цього нам потрібно зв'язати перетворення мартингалу з переходом до еквівалентної ймовірносної міри.

3.2.12 Експонента Долеан та теорема Гірсанова для дискретного часу

Почнемо з "мультиплікативного" перетворення мартингала при перетворенні ймовірнісної міри.

Лема 3.2.131. *Нехай* $\widetilde{\mathrm{P}}$ *– ймовірнісна міра, еквівалентна до міри* P. *Узгоджений з деякою фільтрацією* $\{\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T}\}$ *процес* $\widetilde{M}$ *буде* $\widetilde{\mathrm{P}}$*-мартингалом тоді і тільки тоді, коли випадковий процес*

$$M_t := \widetilde{M}_t \mathrm{E}\left[\frac{d\widetilde{\mathrm{P}}}{d\mathrm{P}} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right], \quad t \in \mathbb{T}$$

буде P*-мартингалом.*

Доведення. Позначимо додатний мартингал

$$Z_t = \mathrm{E}\left[\frac{d\widetilde{\mathrm{P}}}{d\mathrm{P}} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right]$$

(додатність випливає з еквівалентності мір $\widetilde{\mathrm{P}}$ і P). Очевидно, $\widetilde{M}_t \in \mathcal{L}_1(\widetilde{\mathrm{P}})$ тоді і тільки тоді, коли $\widetilde{M}_t Z_t \in \mathcal{L}_1(\mathrm{P})$. Тепер, якщо $A \in \mathcal{F}_t$

$$\int_A \widetilde{M}_{t+1} d\widetilde{\mathrm{P}} = \int_A \widetilde{M}_t d\widetilde{\mathrm{P}},$$

то

$$\int_A \widetilde{M}_{t+1} \mathrm{E}\left[\frac{d\widetilde{\mathrm{P}}}{d\mathrm{P}} \,\middle|\, \mathcal{F}_{t+1}\right] d\mathrm{P} = \int_A \widetilde{M}_t \mathrm{E}\left[\frac{d\widetilde{\mathrm{P}}}{d\mathrm{P}} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] d\mathrm{P},$$

$$\int_A \widetilde{M}_{t+1} Z_{t+1} d\mathrm{P} = \int_A \widetilde{M}_t Z_t d\mathrm{P}$$

і обернене твердження теж, очевидно, є вірним. □

Теорема 3.2.132. *1. Якщо* $\widetilde{\mathrm{P}} \sim \mathrm{P}$ *– ймовірнісна міра, то існує такий* P*-мартингал* L*, що* $L_0 = 1$*,* $L_{t+1} - L_t > -1$ P*-м.н.,* $t = 0, 1, \ldots T-1$ *і мартингал* $Z_t = \mathrm{E}\left[d\widetilde{\mathrm{P}}/d\mathrm{P} \mid \mathcal{F}_{t+1}\right]$ *можна подати у вигляді*

$$Z_t = \prod_{k=1}^{t} (1 + L_k - L_{k-1}), \quad t = 1, \ldots T. \tag{3.2.34}$$

2. Навпаки, якщо P*-мартингал* L *є таким, що*

$$L_0 = 1 \quad L_{t+1} - L_t > -1 \quad \mathrm{P}\text{-м.н.}, \quad t = 0, 1, \ldots T-1$$

і при цьому процес

$$Z_t = \prod_{k=1}^{t} (1 + L_k - L_{k-1}), \quad t = 1, \ldots T, \quad Z_0 = 1$$

є P*-мартингалом, то формула* $d\widetilde{\mathrm{P}}/d\mathrm{P} = Z_T$ *визначає ймовірнісну міру* $\widetilde{\mathrm{P}} \sim \mathrm{P}$.

Доведення. 1. Визначимо

$$L_0 = 1, \quad L_{t+1} = \frac{Z_t}{Z_{t-1}} - 1 + L_t.$$

Треба лише довести, що L – P-мартингал. Перевіримо інтегровність:

$$\mathrm{E}\left(\frac{Z_t}{Z_{t-1}} \,\middle|\, \mathcal{F}_{t-1}\right) = \frac{1}{Z_{t-1}} \mathrm{E}(Z_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) = 1, \tag{3.2.35}$$

причому всі випадкові величини додатні, отже, $\mathrm{E}\,(Z_t/Z_{t-1}) = 1$ і $L_{t+1} \in \mathcal{L}_1(\mathrm{P})$, якщо $L_t \in \mathcal{L}_1(\mathrm{P})$. За індукцією отримуємо, що $L_{t+1} \in \mathcal{L}_1(\mathrm{P})$ для всіх t. Далі з (3.2.35) випливає, що

$$\mathrm{E}(L_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) = \mathrm{E}\left(\frac{Z_{t+1}}{Z_t}\,\middle|\,\mathcal{F}_t\right) - 1 + L_t = L_t.$$

2. Треба лише довести, що $\mathrm{E}Z_T = 1$. Але, оскільки Z – мартингал, то $\mathrm{E}Z_T = Z_0 = 1$. □

Зауваження 3.2.133. Додатний мартингал з неперервним часом ще називають стохастичною експонентою Долеан; він допускає інтегральне зображення відносно мартингальної складової свого логарифму. За аналогією, (3.2.34) називають мультиплікативним зображенням стохастичної експоненти Долеан з дискретним часом.

Теорема 3.2.134. (*Дискретний варіант формули Гірсанова – адитивного перетворення мартингала при заміні міри.*)

Нехай $\widetilde{\mathrm{P}} \sim \mathrm{P}$, L – мартингал із зображення (3.2.34). Нехай також $\widetilde{M}$ – такий $\widetilde{\mathrm{P}}$-мартингал, що $\widetilde{M} \in \mathcal{L}_1(\mathrm{P})$ для всіх $t \in \mathbb{T}$. Тоді випадковий процес

$$M_t = \widetilde{M}_t + \sum_{k=1}^{t} \mathrm{E}[(L_k - L_{k-1})(\widetilde{M}_k - \widetilde{M}_{k-1}) \mid \mathcal{F}_{k-1}] \qquad (3.2.36)$$

є P*-мартингалом.*

Зауваження 3.2.135. Рівність (3.2.36) можна розглядати як розклад Дуба процеса M на $\widetilde{\mathrm{P}}$-мартингал і передбачуваний процес. Вона показує, як перетворюється мартингал при заміні ймовірнісної міри. Щодо неперервного часу, відповідні твердження містяться в п. А.2.4.

Доведення. Оскільки

$$L_k - L_{k-1} = \frac{Z_k}{Z_{k-1}} - 1,$$

то спочатку доведемо, що

$$\frac{Z_k}{Z_{k-1}}(\widetilde{M}_k - \widetilde{M}_{k-1}) \in \mathcal{L}_1(\mathrm{P}).$$

Але

$$\mathrm{E}Z_k|\widetilde{M}_k| = \mathrm{E}_{\widetilde{\mathrm{P}}}|\widetilde{M}_k| < \infty$$

і

$$\mathrm{E}Z_k\widetilde{M}_{k-1} = \mathrm{E}Z_{k-1}\widetilde{M}_{k-1} = \mathrm{E}_{\widetilde{\mathrm{P}}}\widetilde{M}_{k-1} < \infty.$$

Тепер, покладемо для будь-якого $n \geq 1$

$$\tau_n = \inf\left\{t \in \mathbb{T} : Z_t \leq \frac{1}{n}\right\} \wedge T.$$

Тоді

$$\mathbb{1}\{\tau_n \geq k\}\frac{Z_k}{Z_{k-1}}|\widetilde{M}_k - \widetilde{M}_{k-1}| \leq nZ_k|\widetilde{M}_k - \widetilde{M}_{k-1}| \in \mathcal{L}_1(\mathrm{P}).$$

Тому на множині $\{\tau_n \geq k\}$

$$\begin{gathered}
\mathrm{E}[(L_k - L_{k-1})(\widetilde{M}_k - \widetilde{M}_{k-1}) \mid \mathcal{F}_{k-1}] = \\
= \frac{1}{Z_{k-1}}\mathrm{E}[Z_k(\widetilde{M}_k - \widetilde{M}_{k-1}) \mid \mathcal{F}_{k-1}] - \mathrm{E}(\widetilde{M}_k - \widetilde{M}_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1}) = \\
= \frac{1}{Z_{k-1}}\mathrm{E}_{\widetilde{\mathrm{P}}}(\widetilde{M}_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) - \mathrm{E}[\mathrm{E}(Z_k \mid \mathcal{F}_{k-1})]\widetilde{M}_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1}\} = \\
= \frac{1}{Z_{k-1}}\mathrm{E}_{\widetilde{\mathrm{P}}}(\widetilde{M}_k - \widetilde{M}_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1}) - \mathrm{E}(\widetilde{M}_k - \widetilde{M}_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1}) = \\
= -\mathrm{E}(\widetilde{M}_k - \widetilde{M}_{k-1}) \mid \mathcal{F}_{k-1}).
\end{gathered}$$

З останньої рівності одержуємо, що

$$\mathbb{1}\{\tau_n \geq k\}\mathrm{E}(\widetilde{M}_k - \widetilde{M}_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1}) = 0.$$

Тепер треба спрямувати $n \to \infty$, очевидно, $\mathbb{1}\{\tau_n \geq k\} \uparrow 1$ і ми одержуємо $\mathrm{E}(\widetilde{M}_k - \widetilde{M}_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1}) = 0$, що і треба було довести. □

3.2.13 Характеризація еквівалентних мартингальних мір

Теорема Гірсанова дозволяє описати ті еквівалентні міри, які є мартингальними.

Розкладемо дисконтований ціновий процес X, який не є мартингалом відносно міри P, за Дубом:

$$X = M + A,$$

де M – P-мартингал, A – передбачуваний процес, обидва зі значеннями у $\mathbb{R}^d$.

Теорема 3.2.136. *Нехай* $\mathrm{P}^* \sim \mathrm{P}$, $\mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}|X_t| < \infty$ *для всіх* $t \in \mathbb{T}$. *Процес* X *є* P^**-мартингалом тоді і тільки тоді, коли для всіх процесів* M *і* A *з розкладу* $X = M + A$ *виконується рівність*

$$A_t = -\sum_{k=1}^{t} \mathrm{E}[(L_k - L_{k-1})(M_k - M_{k-1}) \mid \mathcal{F}_{k-1}] =$$

$$= -\sum_{k=1}^{t} \mathrm{E}[(L_k - L_{k-1})(X_k - X_{k-1}) \mid \mathcal{F}_{k-1}] \ \mathrm{P}\text{-м.н.}$$

для всіх $t = 1, 2, \dots, T$.

Доведення. Друга рівність очевидна, тому доведемо лише першу. *Необхідність.* Якщо X – P^*-мартингал,то за теоремою 3.2.134

$$X_t + \sum_{k=1}^{t} \mathrm{E}[(L_k - L_{k-1})(X_k - X_{k-1}) \mid \mathcal{F}_{k-1}] =$$

$$= X_t + \sum_{k=1}^{t} \mathrm{E}[(L_k - L_{k-1})(M_k - M_{k-1}) \mid \mathcal{F}_{k-1}]$$

є P-мартингалом, звідки, в силу єдиності розкладу Дуба,

$$A_t = -\sum_{k=1}^{t} \mathrm{E}[(L_k - L_{k-1})(M_k - M_{k-1}) \mid \mathcal{F}_{k-1}]. \qquad \textbf{(3.2.37)}$$

Достатність. Нехай має місце рівність (3.37). Тоді

$$A_t - A_{t-1} = -\mathrm{E}[(L_t - L_{t-1})(M_t - M_{t-1}) \mid \mathcal{F}_{t-1}].$$

Але за побудовою, $A_t - A_{t-1} = \mathrm{E}(X_t - X_{t-1} \mid \mathcal{F}_{t-1})$. Отже,

$$\mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}(X_t - X_{t-1} \mid \mathcal{F}_{t-1}) = \mathrm{E}[Z_t(X_t - X_{t-1}) \mid \mathcal{F}_{t-1}] =$$
$$= \mathrm{E}[(Z_t - Z_{t-1})(X_t - X_{t-1}) \mid \mathcal{F}_{t-1}] -$$
$$- Z_{t-1}\mathrm{E}[(L_t - L_{t-1})(M_t - M_{t-1}) \mid \mathcal{F}_{t-1}] =$$
$$= Z_{t-1}\mathrm{E}[(L_t - L_{t-1})(X_t - X_{t-1}) \mid \mathcal{F}_{t-1}] -$$
$$= Z_{t-1}\mathrm{E}[(L_t - L_{t-1})(M_t - M_{t-1}) \mid \mathcal{F}_{t-1}] =$$
$$= Z_{t-1}\mathrm{E}[(L_t - L_{t-1})(A_t - A_{t-1}) \mid \mathcal{F}_{t-1}] = 0;$$

тут ми використали рівність $Z_t - Z_{t-1} = Z_{t-1}(L_t - L_{t-1})$, яка випливає з теореми 3.2.132, а також той факт, що

$$\mathrm{E}[(L_t - L_{t-1})(A_t - A_{t-1}) \mid \mathcal{F}_{t-1}] =$$
$$= (A_t - A_{t-1})\mathrm{E}(L_t - L_{t-1} \mid \mathcal{F}_{t-1}) = 0). \qquad \square$$

3.2.14 Характеризація мінімальної мартингальної міри

Використаємо тепер розклад Дуба процеса X за мірою P: $X + M + A$ для характеризації мінімальної мартингальної міри. Нагадаємо, що процес X квадратично інтегровний.

Лема 3.2.137. *Якщо X – квадратично інтегровний процес, то і* P*-мартингал M із розкладу Дуба теж є квадратично інтегровним.*

Доведення. За побудовою, $A_t - A_{t-1} = \mathrm{E}(X_t - X_{t-1} \mid \mathcal{F}_{t-1})$ і права частина квадратично інтегровна. Тому за індукцією легко довести, що процес A, а значить і M – квадратично інтегровні. $\square$

Теорема 3.2.138. *Нехай* $\mathrm{P}^* \in \mathrm{P}$, *і* $\mathrm{E}\,(d\mathrm{P}^*/d\mathrm{P})^2 < \infty$. *Міра* P^* *буде мінімальною мартингальною мірою тоді і тільки тоді, коли* P*-мартингал* L *із зображення (3.2.34), побудованого для*

$$Z_t = \mathrm{E}\left(\frac{d\mathrm{P}^*}{d\mathrm{P}} \,\Big|\, \mathcal{F}_t\right),$$

в свою чергу, допускає зображення у вигляді дискретного стохастичного інтегралу відносно P*-мартингала* M *з розкладу* $X = M + A$*:*

$$L_t = 1 + \sum_{k=1}^{t} \eta_k (M_k - M_{k-1}), \quad t \in \mathbb{T}, \tag{3.2.38}$$

де η *– деякий передбачуваний* d*-вимірний процес.*

Доведення. Достатність. За означенням 3.2.129, треба довести, що будь-який квадратично інтегровний P-мартингал N, строго ортогональний до X, буде P^*-мартингалом. Нехай

$$\mathrm{E}(N_t - N_{t-1} \mid \mathcal{F}_{t-1}) = 0, \quad \mathrm{E}[(N_t - N_{t-1})(X_t - X_{t-1}) \mid \mathcal{F}_{t-1}] = 0.$$

Позначимо

$$Z_t = \mathrm{E}\left[\frac{d\mathrm{P}^*}{d\mathrm{P}} \mid \mathcal{F}_t\right].$$

Згідно з лемою 3.2.131, треба довести, що $N_t Z_t$ – P-мартингал. Цей процес є узгодженим і він інтегровний, оскільки N і Z, за умовою, квадратично інтегровні. Запишемо рівність

$$N_t Z_t - N_{t-1} Z_{t-1} = Z_{t-1}(N_t - N_{t-1}) + N_{t-1}(Z_t - Z_{t-1}) + \\ + (N_t - N_{t-1})(Z_t - Z_{t-1}).$$

Оскільки N і Z P-мартингали, то достатньо довести, що

$$\mathrm{E}[(N_t - N_{t-1})(Z_t - Z_{t-1}) \mid \mathcal{F}_{t-1}] = 0.$$

Запишемо тепер рівності

$$Z_t - Z_{t-1} = Z_{t-1}(L_t - L_{t-1}) = Z_{t-1}\eta_{t-1}(M_t - M_{t-1}) = \\ = Z_{t-1}\eta_{t-1}(X_t - X_{t-1}) - Z_{t-1}\eta_{t-1}(A_t - A_{t-1}).$$

З них випливає, що для будь-якого $c > 0$ на множині $\{\omega : \|\eta_{t-1}\| \le c\} \in \mathcal{F}_{t-1}$

$$\mathrm{E}[(N_t - N_{t-1})(Z_t - Z_{t-1}) \mid \mathcal{F}_{t-1}] =$$

$$= Z_{t-1}\eta_{t-1}\mathrm{E}[(N_t - N_{t-1})(X_t - X_{t-1}) \mid \mathcal{F}_{t-1}] -$$

$$-Z_{t-1}\eta_{t-1}(A_t - A_{t-1})\mathrm{E}(N_t - N_{t-1} \mid \mathcal{F}_{t-1}) = 0.$$

Спрямовуючи $c \to \infty$, одержимо, що

$$\mathrm{E}[(N_t - N_{t-1})(Z_t - Z_{t-1}) \mid \mathcal{F}_{t-1}] \quad \mathrm{P}\text{-м.н.}$$

Необхідність. Запишемо розклад за теоремою Куніта-Ватанабе відносно квадратично інтегровного мартингала M (див. лему 3.2.137) та міри P:

$$Z_t = 1 + \sum_{k=1}^{t} \zeta_k (M_k - M_{k-1}) + \Lambda_t, \qquad (3.2.39)$$

де Λ_t – квадратично інтегровний P-мартингал, строго ортогональний до M. Одночасно він буде строго ортогональним до X, позаяк

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[(\Lambda_t - \Lambda_{t-1})(X_t - X_{t-1}) \mid \mathcal{F}_{t-1}] =\\ = \mathrm{E}[(\Lambda_t - \Lambda_{t-1})(M_t - M_{t-1}) \mid \mathcal{F}_{t-1}) +\\ +(A_t - A_{t-1})\mathrm{E}(\Lambda_t - \Lambda_{t-1} \mid \mathcal{F}_{t-1}) = 0.\end{aligned}$$

Тому, за означенням мінімальної інтегральної міри, Λ – P^*-мартингал. Тоді за лемою 3.2.131, $\Lambda_t Z_t$ P-мартингал. Але

$$\Lambda_t Z_t = \Lambda_t + \Lambda_t \sum_{k=1}^{t} \zeta_k (M_k - M_{k-1}) + \Lambda_t^2, \qquad (3.2.40)$$

при цьому Λ P-мартингал, і в силу строгої ортогональності Λ до M, другий доданок в правій частині (3.2.40) теж є P-мартингалом (інтегровність його випливає з того, що $\zeta_k(M_k - M_{k-1}) \in \mathcal{L}_2(\mathrm{P})$).

Отже, Λ_t^2 – мартингал, а тоді його математичне сподівання стале, тобто $E\Lambda_t^2 = \Lambda_0^2 = 0$, звідки $\Lambda_t = 0$ P-м.н. для всіх $t \in \mathbb{T}$. Це означає, що розклад (3.2.39) насправді має вигляд

$$Z_t = 1 + \sum_{k=1}^{t} \zeta_k (M_k - M_{k-1}) + \Lambda_t,$$

а тоді

$$L_{t+1} - L_t = Z_t^{-1}(Z_t - Z_{t-1}) = \zeta_t Z_t^{-1}(M_k - M_{k-1}),$$

і можна покласти в (3.2.38) $\eta_k := \zeta_k Z_t^{-1}$. □

Наслідок 3.2.139. *Мінімальна мартингальна міра, якщо існує, то лише одна.*

Доведення. Нехай P^* і P^{**} – дві мінімальні мартингальні міри,

$$Z_t = E\left[\frac{dP^*}{dP} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right], \quad Z_t^{'} = E\left[\frac{dP^{**}}{dP} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right],$$

L_t і $L_t^{'}$ – відповідні P-мартингали з розкладу (3.2.34), записаного для L_t і $L_t^{'}$, відповідно. Тоді, з одного боку, з (3.2.38) випливає, що

$$L_t - L_t^{'} = \sum_{k=0}^{t} \eta_k (M_k - M_{k-1})$$

для деякого передбачуваного d-вимірного процесу η, з іншого боку, згідно з теоремою 3.2.136, процес A з розкладу $X = M + A$, одночасно дорівнює

$$A_t = -\sum_{k=1}^{t} E[(L_k - L_{k-1})(M_k - M_{k-1}) \mid \mathcal{F}_{k-1}] =$$

$$= -\sum_{k=1}^{t} E[(L_k^{'} - L_{k-1}^{'})(M_k - M_{k-1}) \mid \mathcal{F}_{k-1}],$$

звідки

$$E[((L_k - L_k^{'}) - (L_{k-1} - L_{k-1}^{'}))(M_k - M_{k-1}) \mid \mathcal{F}_{k-1}] = 0,$$

тобто $L_t - L_t'$ строго ортогональний до M. Тоді на множині $\{\|\eta_k\| \leq \leq c\}$ для довільного $c > 0$ отримуємо:

$$\eta_k \cdot \mathrm{E}[\{\|M_k - M_{k-1}\|^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}\}] = 0,$$

отже, $L_t = L_t'$ P-м.н. для всіх $t \in \mathbb{T}$. □

3.2.15 Існування та єдиність мінімальної мартингальної міри в одновимірному випадку

Нехай $d = 1$. Тоді за виконання умови теореми 3.2.119 та деякої додаткової умови мінімальна мартингальна міра існує і єдина.

Теорема 3.2.140. *Нехай на фінансовому ринку існує єдиний дисконтований ризиковий актив* $\{X_t, \mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T}\}$*, що задовольняє дві умови: нерівність (3.2.29) з деяким* $\delta > 0$*, умову*

$$(X_t - X_{t-1})\mathrm{E}(X_t - X_{t-1} \mid \mathcal{F}_{t-1}) < \mathrm{E}[(X_t - X_{t-1})^2 \mid \mathcal{F}_{t-1}] \tag{3.2.41}$$

та умову $\mathrm{P}\{\omega \in \Omega : \sigma_t^2 = \mathrm{var}(X_t - X_{t-1} \mid \mathcal{F}_{t-1}) \neq 0\} = 1$.

Тоді існує єдина мінімальна мартингальна міра P^**, щільність якої задається формулою*

$$\frac{d\mathrm{P}^*}{d\mathrm{P}} = \prod_{k=1}^{T}(1 + L_k - L_{k-1}), \quad L_t = 1 + \sum_{k=1}^{t}\eta_k(M_k - M_{k-1}),$$

де $X = M + A$ *– розклад Дуба процесу* X*, а*

$$\eta_t = -\frac{1}{\sigma_t^2}\mathrm{E}(X_t - X_{t-1} \mid \mathcal{F}_{t-1}). \tag{3.2.42}$$

Доведення. Якщо $X = M + A$ – розклад Дуба процесу X відносно міри P, то, за побудовою, $A_k - A_{k-1} = \mathrm{E}(X_k - X_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1})$. Отже,

$$\mathrm{E}[(M_k - M_{k-1})^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}] = \mathrm{E}[(X_k - X_{k-1})^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}] - \\ -[\mathrm{E}(X_k - X_{k-1} \mid F_{k-1})]^2 = \mathrm{var}(X_k - X_{k-1}) = \sigma_k^2.$$

Тому для процесу $\eta_k = -\mathrm{E}(X_k - X_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1})/\sigma_k^2$ з (3.2.42) виконуються рівності

$$\mathrm{E}[(\eta_k \cdot (M_k - M_{k-1}))^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}] = \eta_k^2 \cdot \sigma_k^2 = \frac{1}{\sigma_k^2}[\mathrm{E}(X_k - X_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1})]^2.$$

Але, за умов теореми,

$$[\mathrm{E}(X_k - X_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1})]^2 \leq \delta \mathrm{E}[(X_k - X_{k-1})^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}],$$

звідки

$$[\mathrm{E}(X_k - X_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1})]^2 \leq \delta\sigma_k^2 + \delta[\mathrm{E}(X_k - X_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1})]^2,$$

значить, $[\mathrm{E}(X_k - X_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1})]^2 \leq \frac{\delta}{1-\delta}\sigma_k^2$, і, якщо позначити $C = \frac{\delta}{1-\delta}$, то, нарешті, $\mathrm{E}[(\eta_k \cdot (M_k - M_{k-1}))^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}] \leq C$ P-м.н. Тому випадковий процес $L_t = 1 + \sum_{k=1}^{t} \eta_k \cdot (M_k - M_{k-1})$ є квадратично інтегровним P-мартингалом. При цьому, за умови (3.2.41),

$$\begin{aligned}
L_t - L_{t-1} = \eta_t \cdot (M_t - M_{t-1}) = \\
= \eta_t \cdot (X_t - X_{t-1}) - \eta_t \cdot \mathrm{E}(X_t - X_{t-1} \mid \mathcal{F}_{t-1}) = \\
= -\frac{1}{\sigma_t^2}\mathrm{E}(X_t - X_{t-1} \mid \mathcal{F}_{t-1}) \, [(X_t - X_{t-1}) - \mathrm{E}(X_t - X_{t-1} \mid \mathcal{F}_{t-1})] > \\
> -\frac{1}{\sigma_t^2}\mathrm{E}[(X_t - X_{t-1})^2 \mid \mathcal{F}_{t-1}] + [\mathrm{E}(X_t - X_{t-1} \mid \mathcal{F}_{t-1})]^2.
\end{aligned}$$

Тому випадковий процес

$$Z_t = \prod_{k=1}^{t}(1 + L_k - L_{k-1}) = \prod_{k=1}^{t}(1 + \eta_k \cdot (M_k - M_{k-1}))$$

є P-м.н. додатним. Ясно з доведеного вище, що це квадратично інтегровний мартингал. Тому за теоремою 3.2.138 $Z_t = \mathrm{E}[d\mathrm{P}^*/d\mathrm{P}|\mathcal{F}_t]$, де міра $\mathrm{P}^* \sim P$, причому щільність $d\mathrm{P}^*/d\mathrm{P}$ є квадратично інтегровною. Далі, $\mathrm{E}_{\mathrm{P}^*}|X_t| \leq \left(\mathrm{E}X_t^2 \mathrm{E}\,[d\mathrm{P}^*/d\mathrm{P}]^2\right)^{1/2} < \infty$. Тепер,

$$\begin{aligned}
A_t - A_{t-1} = \mathrm{E}(X_t - X_{t-1} \mid \mathcal{F}_{t-1}) = \\
= -\eta_t \cdot \sigma_t^2 = -\eta_t \mathrm{E}[(M_t - M_{t-1})^2 \mid \mathcal{F}_{t-1}] = \\
= \mathrm{E}[-\eta_t \cdot (M_t - M_{t-1}) \cdot (M_t - M_{t-1}) \mid \mathcal{F}_{t-1}] = \\
= -\mathrm{E}[(L_t - L_{t-1})(M_t - M_{t-1}) \mid \mathcal{F}_{t-1}],
\end{aligned}$$

що, згідно з теоремою 3.2.136 означає, що P^* – еквівалентна мартингальна міра. Оскільки мартингал L допускає зображення $L_t = 1 + \sum_{k=1}^{t} \eta_k \cdot (M_k - M_{k-1})$, то, згідно з теоремою 3.2.138, P^* – мінімальна мартингальна міра, а її єдиність доведено в наслідку 3.2.139. □

Приклад 3.2.141. (Продовження прикладу 3.2.122.) Нехай, в позначеннях прикладу 3.2.122, $ER_k = m$ і $DR_k = \sigma^2$. Перетворимо умову (3.2.28) або еквівалентну умову (3.2.29):

$$E((X_k - X_{k-1}) \mid \mathcal{F}_{k-1}) = X_{k-1}\frac{m-r}{1+r}, \quad E\left[(X_k - X_{k-1})^2/\mathcal{F}_{k-1}\right] =$$

$$= X_{k-1}^2 E\Big(\frac{R_k - r}{1+r}\Big)^2 = \frac{X_{k-1}^2}{(1+r)^2}\left[\sigma^2 + m^2 - 2rm + r^2\right].$$

Тому умова (3.2.28) еквівалентна нерівності

$$(X_k - X_{k-1})X_{k-1}\frac{m-r}{1+r} < \frac{X_{k-1}^2}{(1+r)^2}[\sigma^2 + (m-r)^2].$$

Оскільки $X_k - X_{k-1} = X_{k-1} \cdot \frac{R_k - r}{1+r}$, то умова (3.2.28), нарешті, еквівалентна нерівності $(R_k - r)(m-r) < \sigma^2 + (m-r)^2$, або

$$R_k(m-r) < \sigma^2 + m(m-r) \quad \text{P-м.н.} \tag{3.2.43}$$

Нерівність (3.2.43) еквівалентна існуванню мінімальної мартингальної міри. Якщо $m > r$, то умова (3.2.43) перетворюється на $R_k < \frac{\sigma^2 + m(m-r)}{m-r}$, або $R_k < m + \frac{\sigma^2}{m-r}$, а якщо $m < r$, то одержуємо $R_k > \frac{\sigma^2 + m(m-r)}{m-r}$, або $R_k > m - \frac{\sigma^2}{m-r}$. Якщо $m = r$, сама міра P є мартингальною, і умова (3.2.43) непотрібна.

3.3 Фінансові ринки з неперервним часом

3.3.1 Перехід від моделі з дискретним часом до неперервного часу

Розглянемо спочатку модель фінансового ринку з дискретним часом. Нехай початковий момент – це $t = 0$, а момент виконання деякого Європейського платіжного зобов'язання – це T. Між цими двома моментами часу насправді може відбутися дуже багато періодів торгів, а тоді обчислення навіть у найпростішій біноміальній моделі стають дуже складними. З іншого боку, з імовірнісної теорії наближень розподілів відомо, що біноміальний розподіл при збільшенні числа випробувань добре наближається нормальним. Тобто можна сподіватися, що при збільшенні числа періодів ми одержимо простішу формулу ціни Європейського платіжного зобов'язання, якщо перейдемо у біноміальній моделі до границі при необмеженому збільшенні числа періодів. Опишемо математично відповідну модель, яка дає можливість граничного переходу.

Математичні умови на модель з дискретним часом, які дають можливість граничного переходу

Нехай зараз T означає дату подання платіжного зобов'язання до виконання, а відрізок $[0, T]$ розбито на N операційних періодів довжиною $\delta = T/N$, тобто операції здійснюються у моменти $0, \delta, 2\delta, \ldots, (N-1)\delta, T$.

Вважатимемо, що ринок складається з одного безризикового й одного ризикового активу, ціни яких позначимо $B^{(N)}$ і $S^{(N)}$, причому

$$B_k^{(N)} := B_{k\delta}^{(N)} = (1 + r_N)^k,$$

де $r_N > 0$ – відсоткова ставка. Припустимо, що ціни $B_k^{(N)}$ та $S_k^{(N)} := S_{k\delta}^{(N)}$ задовольняють наступні умови:

1. $\lim\limits_{N\to\infty} (1 + r_N)^k = e^{rT}$, де $r_N > 0$ – фіксоване число. (3.3.1)

Ця умова еквівалентна такій:

$$\lim_{N\to\infty} N r_N = rT.$$

2. Початкові ціни $S_0^{(N)} = S_0$ не залежать від N, $S_0 > 0$ – фіксоване число.

3. Ціни $S_k^{(N)}$ є випадковими величинами на ймовірнісному просторі $\left(\Omega_N, \mathcal{F}^{(N)}, \mathrm{P}_N^*\right)$, де P_N^* – міра, нейтральна до ризику для відповідної наближеної моделі, тобто дисконтований ціновий процес

$$X_k^{(N)} := \frac{S_k^{(N)}}{(1+r_N)^k}, \quad 0 \le k \le N,$$

є P_N^*-мартингалом відносно фільтрації $\mathcal{F}^{(N)}$, де

$$\mathcal{F}_k^{(N)} := \sigma\{S_1^{(N)}, \dots, S_k^{(N)}\}.$$

4. Доходи

$$R_k^{(N)} := \frac{S_k^{(N)} - S_{k-1}^{(N)}}{S_{k-1}^{(N)}}, \quad 1 \le k \le N$$

незалежні в сукупності відносно міри P_N^* і обмежені у наступному сенсі: існують числові послідовності $-1 \le \alpha_N \le \beta_N$, $N \ge 1$ такі що $\alpha_N \le R_k^{(N)} \le \beta_N, \quad 1 \le k \le N$, і при цьому

$$\lim_{N\to\infty} \alpha_N = \lim_{N\to\infty} \beta_N = 0.$$

5. Дисперсії $\mathrm{D}_{\mathrm{P}_N^*}(R_k^{(N)})$ задовольняють умову

$$\sigma_N^2 := \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{N} \mathrm{D}_{\mathrm{P}_N^*}\left(R_k^{(N)}\right) \to \sigma^2 \in (0,\infty).$$

За виконання умов 1–5 доведемо слабку збіжність, тобто, в даному випадку, збіжність за розподілом, ціни ризикового активу $S_N^{(N)}$ в момент T. Для цього використаємо наступний варіант центральної граничної теореми.

Теорема 3.3.1. *Нехай* $\{\xi_k^{(N)}, 1 \le k \le N, N \ge 1\}$ *– незалежні в сукупності випадкові величини, що задовольняють умови:*

а) існує числова послідовність $\{a_N, N \ge 1\}$ *така, що*

$$\max_{1\le k\le N} |\xi_k^{(N)}| \le a_N$$

з імовірністю 1 *і* $a_N \to 0$, $N \to \infty$;

б) існує послідовність мір $\{\mathrm{P}_N, N \ge 1\}$, *еквівалентних до міри* P *і таких, що математичне сподівання*

$$\mathrm{E}_{\mathrm{P}_N}\left(\sum_{k=1}^{N} \xi_k^{(N)}\right) \to a,$$

де $a \in \mathbb{R}$ *– деяке число;*

в) дисперсія

$$\mathrm{D}_{\mathrm{P}_N}\left(\sum_{k=1}^{N} \xi_k^{(N)}\right) \to b^2 \in (0, \infty).$$

Тоді розподіл суми $\sum_{k=1}^{N} \xi_k^{(N)}$ *за мірою* P_N *слабко збігається до нормального розподілу* $N(a, b^2)$.

Зауваження 3.3.2. Твердження типу теореми 3.3.1 називаються теоремами в схемі серій, оскільки кожний набір $\{\xi_k^{(N)}, 1 \le k \le N, N \ge 1\}$ – це певна серія випадкових величин.

Тепер сформулюємо основний результат.

Теорема 3.3.3. *Нехай* $\{B_k^{(N)}, S_k^{(N)}, 1 \le k \le N, N \ge 1\}$ *задовольняють умови* 1) – 5). *Тоді розподіл* $S_N^{(N)}$ *за мірою* P_N^* *слабко збігається до логнормального розподілу з параметрами* $\ln S_0 + rT - \sigma^2 T/2$ *і* $\sigma\sqrt{T}$, *тобто до розподілу випадкової величини*

$$S_T := S_0 \exp\left\{\sigma\sqrt{T}\xi + \left(r - \sigma^2/2\right) T\right\},$$

де $\xi \sim N(0, 1)$.

Доведення. З метою технічного спрощення припустимо, що $S_0 = 1$. Запишемо розклад за формулою Тейлора

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \lambda(x) \cdot x^2,$$

де $|\lambda(x)| \leq \lambda(\alpha, \beta)$ при $-1 < \alpha \leq x \leq \beta$, і $\lambda(\alpha, \beta) \to 0$ при $\alpha, \beta \to 0$. Тепер запишемо $S_N^{(N)}$ у вигляді добутку

$$S_N^{(N)} = \prod_{k=1}^{N} (1 + R_k^{(N)}),$$

причому всі множники в ньому додатні, і застосуємо вищезгадану формулу Тейлора до цього добутку:

$$\ln S_N^{(N)} = \sum_{k=1}^{N} \ln\left(1 + R_k^{(N)}\right) = \sum_{k=1}^{N} (R_k^{(N)} - \frac{1}{2}\left(R_k^{(N)}\right)^2) + \Lambda_N,$$

де залишковий член Λ_N задовольняє нерівність

$$\Lambda_N \leq \lambda\left(\alpha_N, \beta_N\right) \sum_{k=1}^{N} (R_k^{(N)})^2.$$

При цьому $\alpha_N \vee \beta_N \to 0$ при $N \to \infty$, значить, $\lambda(\alpha_N, \beta_N) \to 0$, а

$$\mathrm{E}_{\mathrm{P}_N^*} \sum_{k=1}^{N} (R_k^{(N)})^2 = \mathrm{D}_{\mathrm{P}_N^*} \sum_{k=1}^{N} (R_k^{(N)})^2 + \sum_{k=1}^{N} \left(\mathrm{E}_{\mathrm{P}_N^*} R_k^{(N)}\right)^2,$$

і права частина є обмеженою, оскільки P_N^* – мартингальна міра, тобто $\mathrm{E}_{\mathrm{P}_N^*} R_k^{(N)} = r_N$, і

$$\sum_{k=1}^{N} \left(\mathrm{E}_{\mathrm{P}_N^*} R_k^{(N)}\right)^2 = N r_N^2 = (N r_N) r_N \to 0, N \to \infty,$$

а $\mathrm{D}_{\mathrm{P}_N^*} \sum_{k=1}^{N} \left(R_k^{(N)}\right)^2$ обмежена за умовою 5.

Таким чином, $\Lambda_N \to 0$ в середньому, а значить, і за ймовірністю, отже, достатньо довести, що

$$\sum_{k=1}^{N} \left(R_k^{(N)} - \frac{1}{2} \left(R_k^{(N)} \right)^2 \right)$$

відносно міри P_N^* слабко збігається до логнормального розподілу з параметрами, вказаними в умові теореми.

Позначимо

$$\xi_k^{(N)} := R_k^{(N)} - \frac{1}{2} \left(R_k^{(N)} \right)^2$$

і перевіримо, що для цих випадкових величин виконуються умови теореми 3.3.1. Умова а):

$$|\xi_k^{(N)}| \le \alpha_N \vee \beta_N + \frac{1}{2}(\alpha_N \vee \beta_N)^2 \to 0, \quad N \to \infty$$

в силу умови 4). Умова б):

$$\mathrm{E}_{\mathrm{P}_N^*} \sum_{k=1}^{N} \xi_k^{(N)} = N r_N - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \mathrm{D}_{\mathrm{P}_N^*} R_k^{(N)} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \left(\mathrm{E} R_k^{(N)} \right)^2 .$$

При цьому

$$N r_N \to r T, \quad -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \mathrm{D}_{\mathrm{P}_N^*} R_k^{(N)} \to -\frac{1}{2} \sigma^2 T$$

в силу умов 1 і 5, а $\sum_{k=1}^{N} \left(\mathrm{E} R_k^{(N)} \right)^2 \to 0$, як уже було доведено раніше. Отже,

$$\mathrm{E}_{\mathrm{P}_N^*} \sum_{k=1}^{N} \xi_k^{(N)} \to \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Умова в): треба перевірити граничну поведінку

$$\mathrm{D}_{\mathrm{P}_N^*} \sum_{k=1}^{N} \xi_k^{(N)} = \mathrm{D}_{\mathrm{P}_N^*} \sum_{k=1}^{N} \left(R_k^{(N)} - \frac{1}{2} \left(R_k^{(N)} \right)^2 \right) .$$

В силу незалежності випадкових величин $R_k^{(N)} - \frac{1}{2}\left(R_k^{(N)}\right)^2$ дисперсія їхньої суми дорівнює

$$\sum_{k=1}^{N} \mathrm{D}_{\mathrm{P}_N^*}\left(R_k^{(N)} - \frac{1}{2}(R_k^{(N)})^2\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{N} \mathrm{D}_{\mathrm{P}_N^*}\left(R_k^{(N)}\right) + \sum_{k=1}^{N} \mathrm{D}_{\mathrm{P}_N^*}\left(\frac{1}{2}(R_k^{(N)})^2\right) - \tag{3.3.2}$$
$$-2\sum_{k=1}^{N} \mathrm{E}_{\mathrm{P}_N^*}\left(\frac{1}{2}(R_k^{(N)})^3\right) + 2\sum_{k=1}^{N} \mathrm{E}_{\mathrm{P}_N^*} R_k^{(N)} \mathrm{E}_{\mathrm{P}_N^*}\left(\frac{1}{2}(R_k^{(N)})^2\right).$$

Перший доданок в правій частині (3.3.2) прямує до $\sigma^2 T$ в силу умови 5. Покажемо, що інші доданки прямують до нуля. Розглянемо один з них, наприклад, оцінимо $\sum_{k=1}^{N} \mathrm{E}_{\mathrm{P}_N^*}\left(R_k^{(N)}\right)^3$, всі інші оцінюються аналогічно. Очевидно,

$$\sum_{k=1}^{N} \left|\mathrm{E}_{\mathrm{P}_N^*}\left(R_k^{(N)}\right)^3\right| \le (\alpha_N \vee \beta_N) \sum_{k=1}^{N} \mathrm{E}_{\mathrm{P}_N^*}\left(R_k^{(N)}\right)^2 =$$
$$= (\alpha_N \vee \beta_N)\left[\sum_{k=1}^{N} \mathrm{D}_{\mathrm{P}_N^*}\left(R_k^{(N)}\right) + N r_N^2\right] \to 0, N \to \infty,$$

оскільки $\alpha_N \vee \beta_N \to 0$, а вираз у дужці обмежений. Остаточно,

$$\mathrm{D}_{\mathrm{P}_N^*} \sum_{k=1}^{N} \xi_k^{(N)} \to \sigma^2 T, \quad N \to \infty, \qquad \square$$

При побудові дискретної моделі ми ніде не припускали, що модель є біноміальною. Подивимося тепер, як спростяться умови 1–5 для біноміальної моделі.

Приклад 3.3.4. Припустимо, що на кожному кроці $R_k^{(N)}$ приймають лише два значення, $-1 < a_N < b_N$, причому ці значення мають вигляд

$$a_N = e^{-\sigma\sqrt{\delta}} - 1, \quad b_N = e^{\sigma\sqrt{\delta}} - 1,$$

$\sigma > 0$ задане, $r_N = r\delta$, $\delta = T/N$.

Це стандартне (хоча і не зовсім реальне) припущення про те, що ціна акції йде або "вгору" або "вниз",

$$\frac{S_k^{(N)}}{S_{k-1}^{(N)}} = 1 + a_N \quad \text{або} \quad 1 + b_N,$$

і при цьому $(1 + a_N)(1 + b_N) = 1$. Порівняємо a_N, r_N і b_N:

$$a_N \sim -\sigma\sqrt{\delta}, \quad b_N \sim \sigma\sqrt{\delta} \quad \text{при} \quad N \to \infty,$$

а це означає, що $-1 < a_N < r_N < b_N$ для достатньо великих N. Будемо розглядати лише такі N, при цьому модель буде безарбітражною і повною, значить, існує єдина еквівалентна мартингальна міра P_N^*. Обчислимо її:

$$\mathrm{P}_N^* := \mathrm{P}_N^* \left(R_k^{(N)} = a_N \right) = \frac{b_N - r_N}{b_N - a_N} =$$
$$= \frac{e^{\sigma\sqrt{\delta}} - 1 - r\delta}{e^{\sigma\sqrt{\delta}} - e^{-\sigma\sqrt{\delta}}} \sim \frac{\sigma\sqrt{\delta}}{2\sigma\sqrt{\delta}} \to \frac{1}{2}$$

при $N \to \infty$. За цією мірою $\mathrm{E}_N^* R_k^{(N)} = r_N$, умови 1–4, очевидно, виконуються, а щодо умови 5, то

$$\sum_{k=1}^{N} \mathrm{D}_{\mathrm{P}_N^*} R_k^{(N)} = N \left(a_N^2 \frac{b_N - r_N}{b_N - a_N} + b_N^2 \frac{r_N - a_N}{b_N - a_N} \right) - N r_N^2 \sim$$
$$\sim \frac{N}{2}(a_N^2 + b_N^2) =$$
$$= \frac{\sigma^2 T}{2} \left(\left(\frac{e^{\sigma\sqrt{\delta}} - 1}{\sigma\sqrt{\delta}} \right)^2 + \left(\frac{1 - e^{-\sigma\sqrt{\delta}}}{\sigma\sqrt{\delta}} \right)^2 \right).$$

Оскільки обидва вирази,

$$\frac{e^{\sigma\sqrt{\delta}} - 1}{\sigma\sqrt{\delta}} \quad \text{і} \quad \frac{1 - e^{-\sigma\sqrt{\delta}}}{\sigma\sqrt{\delta}},$$

прямують до 1, то

$$\sum_{k=1}^{N} \mathrm{D}_{\mathrm{P}_N^*} R_k^{(N)} \to \sigma^2 T,$$

тобто умову 5 теж виконано, і для такої біноміальної моделі має місце теорема 3.3.3.

3.3.2 Формула Блека-Шоулса справедливої ціни Європейського деривативу в моделі з неперервним часом

Нехай розглядається модель фінансового ринку з дискретним часом, що задовольняє умови 1) – 5), нехай також $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ – обмежена вимірна функція, $C = f(S_N^{(N)})$ – платіжне зобов'язання, значення якого залежить лише від ціни акції в останній момент часу T. Оскільки для послідовності випадкових величин $S_N^{(N)}$ має місце теорема 3.3.3, а в силу теореми Лебега про мажоровану збіжність, яка має місце і за умови слабкої збіжності послідовності випадкових величин, має місце збіжність справедливих цін:

$$\mathrm{E}f(S_T) = \lim_{N\to\infty} \mathrm{E}_{\mathrm{P}_N^*} f(S_N^{(N)}), \tag{3.3.3}$$

де математичне сподівання в лівій частині береться відносно граничної міри, тобто такої міри, відносно якої випадкова величина S_T має логнормальний розподіл з параметрами $\ln S_0 + (r - \sigma^2/2)T$ та $\sigma^2 T$.

Зокрема, рівність (3.3.3) є вірною для Європейського опціону продажу, оскільки в цьому випадку $f(x) = (K - x)^+, x \geq 0$, тобто $0 \leq f(x) \leq K$.

Позначимо через x початкову ціну S_0 акції, і нехай $\pi^{put}(x)$ – це справедлива ціна Європейського опціону продажу на акцію з початковою ціною x. Тоді з (3.3.3)

$$\pi^{put}(x) = \lim_{N\to\infty} \mathrm{E}_{\mathrm{P}_N^*} (K - S_N^{(N)})^+ e^{-rT}.$$

Тепер скористаємось пут-колл паритетом для неперервного часу, згідно з яким

$$\pi^{call}(x) - \pi^{put}(x) = x - Ke^{-rT}$$

(множник e^{-rT} відповідає дисконтуванню з відсотковою ставкою r за період часу T). Отже,

$$\begin{aligned}\pi^{call}(x) &= x - Ke^{-rT} + e^{-rT} \lim_{N\to\infty} \mathrm{E}_{\mathrm{P}_N^*} (K - S_N^{(N)})^+ = \\ &= e^{-rT} \lim_{N\to\infty} \mathrm{E}_{\mathrm{P}_N^*} (S_N^{(N)} - K)^+.\end{aligned} \tag{3.3.4}$$

Обчислимо $\pi^{call}(x)$ в лівій частині (3.3.4) з урахуванням теореми 3.3.3.

Теорема 3.3.5. (*Формула Блека-Шоулса справедливої ціни Європейського опціону купівлі.*) *Нехай ціна акції S_T в момент T має вигляд $S_T = x \exp\left\{\sigma\sqrt{T}\xi + (r - \sigma^2/2)T\right\}$, де $\xi \sim N(0,1)$.*

Тоді справедлива ціна Європейського опціону купівлі на цю акцію дорівнює

$$\pi^{call}(x) = x\Phi(d_+(x,T)) - e^{-rT}K\Phi(d_-(x,T)), \tag{3.3.5}$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}dy$ – стандартна нормальна функція розподілу,

$$d_+(x,T) = \frac{\ln(x/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \tag{3.3.6}$$

$$d_-(x,T) = d_+(x,T) - \sigma\sqrt{T} = \frac{\ln(x/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}. \tag{3.3.7}$$

Доведення. Очевидно,

$$\pi^{call}(x) = e^{-rT}\int_{\mathbb{R}}\left(xe^{\sigma\sqrt{T}y + rT - \sigma^2T/2} - K\right)^+ e^{-y^2/2}dy =$$
$$= e^{-rT}\int_{-d_-(x,T)}^{\infty}\left(xe^{\sigma\sqrt{T}y - rT - \sigma^2T/2} - K\right)e^{-y^2/2}dy =$$
$$= \frac{x}{\sqrt{2\pi}}\int_{-d_-(x,T)}^{\infty} e^{-(y-\sigma\sqrt{T})^2/2}dy - e^{-rT}K(1 - \Phi(-d_-(x,T))) =$$
$$= x\Phi(d_+(x,T)) - e^{-rT}K\Phi(d_-(x,T)). \qquad \square$$

3.3.3 Залежність ціни Блека-Шоулса від параметрів моделі. Грецькі символи

Як видно з формули Блека-Шоулса (3.3.5) та рівностей (3.3.6) і (3.3.7), справедлива ціна Європейського опціону купівлі в логнормальній моделі насправді залежить від значень параметрів x, T, K, r, σ. Проаналізуємо деякі з цих залежностей.

1. Залежність від x. Початкову ціну $S_0 = x$ ще називають спотовою, тобто миттєвою, ціною (детально спотові ціни і ставки вивчено в розділі 1). Візьмемо першу похідну по x від $\pi(t,x)$:

$$\Delta(t,x) := \frac{\partial}{\partial x}\pi(t,x) = \Phi(d_+(t,x)). \tag{3.3.8}$$

Вправа 3.3.6. Довести рівність (3.3.8).

Ця перша похідна називається Дельтою опціону. Очевидно, вона додатна для всіх x і не перевищує 1. Отже, $\pi(t,x)$ зростає по x.

Візьмемо другу похідну по x від $\pi(t,x)$, або першу похідну від $\Delta(t,x)$. Ця похідна називається Гаммою опціону:

$$\Gamma(t,x) := \frac{\partial}{\partial x}\Delta(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\pi(t,x) = \varphi(d_+(t,x))\frac{1}{x\sigma\sqrt{t}},$$

де φ – щільність стандартного нормального розподілу. Гамма, як і Дельта, додатна для всіх x, звідки $\pi(t,x)$ є опуклою вниз за x. Зауважимо, що з нерівності $0 < \Delta(t,x) < 1$ випливає, що $|\pi(t,x) - \pi(t,y)| < |x-y|$, тобто зміна справедливої ціни опціону менша за зміну спотової ціни акції. З іншого боку, зі строгої опуклості вниз справедливої ціни випливає, що її функція нахилу строго зростає, тобто для $0 < y < z$ і $t > 0$

$$\frac{\pi(t,z) - \pi(t,y)}{z-y} > \frac{\pi(t,y) - \pi(t,0)}{y-0} = \frac{\pi(t,y)}{y},$$

звідки

$$\frac{\pi(t,z) - \pi(t,y)}{\pi(t,y)} > \frac{z-y}{y}.$$

Аналогічно, для $0 < x < y$ і $t > 0$

$$\frac{\pi(t,y) - \pi(t,x)}{\pi(t,y)} > \frac{y-x}{y}.$$

Це означає, що відносна зміна справедливих цін опціонів більша за відносну зміну цих акцій. Цей факт називають ефектом кратності опціону (ефект кратності в іншому контексті обговорювався в прикладі 3.2.35).

2. Залежність від T. Замінимо T на t, щоб підкреслити можливу зміну дати виконання опціону. Похідна справедливої ціни по t називається Тетою опціону:

$$\Theta(t,x) := \frac{\partial}{\partial t}\pi(t,x) = \frac{x\sigma}{2\sqrt{t}}\varphi(d_+(t,x)) + Kre^{-rt}\Phi(d_-(t,x)). \quad (3.3.9)$$

Вправа 3.3.7. Довести формулу (3.3.9).

Очевидно, $\Theta(t,x) > 0$, що підтверджує факт зростання справедливої ціни опціону при збільшенні дати його виконання.

3. Рівняння Блека-Шоулса. Якщо $t > 0$, то величини Δ, Γ і Θ задовольняють таке співвідношення

$$\Theta(t,x) = rx\Delta(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2x^2\Gamma(t,x) - r\pi(t,x),$$

або

$$\frac{\partial\pi}{\partial t} = rx\frac{\partial\pi}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2x^2\frac{\partial^2\pi}{\partial x^2} - r\pi. \quad (3.3.10)$$

Це рівняння називають рівнянням Блека-Шоулса.

Вправа 3.3.8. Одержати рівняння (3.3.10).

При $t \downarrow 0$ $d_+(t,x) \to \infty$ і $d_-(t,x) \to \infty$, якщо $x > K$, $d_+(t,x)$ і $d_-(t,x)$ прямують до $-\infty$, якщо $x < K$, і вони прямують до 0, якщо $x = K$. Отже, $\pi(t,x) \to (x-K)^+$; значить, $\pi(t,x)$ є розв'язком задачі Коші (3.3.10) з граничною умовою $\pi(0,x) = (x-K)^+$.

4. Залежність від відсоткової ставки r. Похідна справедливої ціни по r називається Ро опціону:

$$\rho(t,x) := \frac{\partial}{\partial r}\pi(t,x) = Kte^{-rt}\Phi(d_-(t,x)). \quad (3.3.11)$$

Вправа 3.3.9. Довести рівність (3.3.11).

З формули (3.3.11) видно, що похідна справедливої ціни по r додатня, тобто ціна зростає по r.

5. Залежність від волатильності σ. Похідна справедливої ціни по σ називається Вегою опціону. Вона дорівнює

$$\mathcal{V}(t,x) := \frac{\partial}{\partial\sigma}\pi(t,x) = x\sqrt{t}\varphi(d_+(t,x)). \quad (3.3.12)$$

Вправа 3.3.10. Довести рівність (3.3.12).

Вега опціону теж є додатною величиною, тобто за σ ціна опціону також зростає.

Символи $\Delta, \Gamma, \Theta, \rho$ і $\mathcal{V}$ називають грецькими символами, або просто Греками (Greeks), хоча $\mathcal{V}$ не є літерою грецького алфавиту.

3.3.4 Рівняння Блека-Шоулса як результат аналізу зміни портфеля інвестора

Розглянемо більш загальну ситуацію, коли фінансовий інвестор тримає портфель, загальна вартість якого дорівнює V, і який може складатися з довільного числа фінансових деривативів на одну і ту ж акцію, ціна якої в момент t дорівнює S_t. Таким чином, $V = V(t, S_t)$, де $V = V(t, x)$ є функцією часу $t \geq 0$ і $x \geq 0$. Припустимо, що $V \in C^1(\mathbb{R}^+) \times C^2(\mathbb{R}^+)$. Вважаємо, що ціна акції $S_t = x \exp\{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t\}$, тобто моделюється геометричним броунівським рухом. Запишемо формулу Іто (A.2.7) для $V(t, S_t)$ у наступній формі

$$V(t, S_t) = V(0, x) + \int_0^t \frac{\partial V}{\partial t} dt + \int_0^t \frac{\partial V}{\partial x} S_t \Big(\Big(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \Big) dt + \sigma dW_t \Big) + \\ + \frac{1}{2} \sigma^2 \int_0^t \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} S_t^2 dt,$$

або, в диференціальній формі,

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial x} S_t \Big(\Big(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \Big) dt + \sigma dW_t \Big) + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} S_t^2 dt = \\ = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial x} dS_t + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} S_t^2 dt.$$

Тепер припустимо для простоти, що V є ціною одного опціону, а портфель інвестора складається з цього опціону і деякого числа z акцій, поки що невизначеного. Значення капіталу такого портфелю дорівнює

$$\Pi = V + zS = V(t, S_t) + zS_t.$$

Зміна у значенні цього портфеля за малий проміжок часу дорівнює $d\Pi = dV + zdS$, якщо опустити аргумент t. Підставимо значення dV і одержимо:

$$d\Pi = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial x}dS + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}S^2 dt + zdS.$$

Якщо в одержаному рівнянні покласти $z = -\frac{\partial V}{\partial x}$, тобто z дорівнює значенню похідної в початковий момент перед зміною часу dt, то ми одержимо

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)dt.$$

Тепер відзначимо, що це зміна лише частини капіталу, вкладеного у ринкові активи. За умови безарбітражності вона дорівнює зміні того ж капіталу, вкладеного у безризиковий актив з відсотковою ставкою $r > 0$, тобто величині $d\Pi = r\Pi dt$. Отже, ми одержуємо рівняння

$$r\Pi dt = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)dt,$$

або $r\Pi = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$. Якщо тепер замість Π підставити його вираз $\Pi = V + zS = V - \frac{\partial V}{\partial x}S$, одержимо

$$(V - \frac{\partial V}{\partial x}S) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2},$$

або

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + rS\frac{\partial V}{\partial x} - rV = 0.$$

Тепер врахуємо той факт, що в останньому рівнянні S і x можна позначити одним і тим самим символом, наприклад, S. Це можна зробити тому, що можна записати $V = V(t, S)$, де S – одночасно і друга змінна, і ціна акції. Тоді рівняння набуде вигляду

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \qquad (3.3.13)$$

Це те ж саме рівняння, що і (3.3.10), але воно відрізняється знаком похідної по t. Справа в тому, що рівняння (3.3.10) складено для ціни на момент 0, і в ньому t – це час до виконання опціону, а рівняння (3.3.13) задає ціну опціону V як функцію часу t, в який його придбано, і ціни S акції, на яку його укладено. Якщо, як і раніше, позначити T дату виконання опціону, то сума вищезгаданих "часів" дорівнює T, тобто коли один зростає, другий спадає, що і зумовлює протилежні знаки похідних. Рівняння (3.3.13) (так само, як і (3.3.10)) – це параболічне рівняння другого порядку в частинних похідних. Щоб знайти його єдиний розв'язок, як правило, додатково записують дві умови на S, враховуючи наявність другої похідної по S, та одну умову на t. Наприклад, $V(t,a) = V_a(t)$, $V(t,b) = V_b(t)$, де V_a і V_b – задані функції від t, $V(S,T) = V_T(S)$, V_T – задана функція.

Для опціону купівлі граничні умови матимуть вигляд

$$V(t,0) = 0, \frac{C(t,S)}{S} \to 1,\ S \to \infty,\ V(T,S) = (S-K)^+.$$

Щодо явного вигляду розв'язку рівняння Блека-Шоулса в загальному випадку див. [74] і [3].

3.3.5 Теорія арбітражу для ринків з неперервним часом

Модель Блека-Шоулса

Нехай час t змінюється неперервно на $[0,\infty)$, фінансовий ринок складається з двох активів: безризикового $B_t,\ t \geq 0$, який можна трактувати як облігацію зі сталою відсотковою ставкою $r > 0$, і який змінюється за формулою $dB_t = rB_t dt$, або $B_t = B_0 e^{rt}$, і ризикового $S_t,\ t \geq 0$, який можна трактувати як акцію. Поки що не будемо зупинятися на одній фіксованій моделі ціни акції, але зазначимо, що найчастіше розглядають, в деякому сенсі, найпростішу, модель геометричного броунівського руху, а саме $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$, або

$$S_t = S_0 \exp\{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t\}.$$

В сукупності цю модель називають (B,S) – моделлю (B – bond, S – stock), або моделлю Блека-Шоулса. Чому саме геометричний броунівський рух обрали "базовою" моделлю зміни ціни ризикового активу? Одним аргументом є те, що ця модель з'являється як гранична для біноміальної моделі (і навіть для набагато ширшого класу дискретних моделей, див. п. 3.3.1, зокрема теорему 3.3.3.) Інший аргумент той, що відносні прирости $(S_t - S_s)/S_s$ в цій моделі стаціонарні, а також процес $\{\ln S_t,\ t \geq 0\}$ має стаціонарні прирости. Ще один аргумент – безарбітражність (B,S)-ринку, яку ми доведемо далі.

Поняття самофінансованої стратегії

Нехай, як і раніше, ринок складається з двох активів – ризикового і безризикового.

Задамо ймовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathrm{P})$ з фільтрацією, і будемо вважати, що випадковий процес $\{S_t, t \geq 0\}$ узгоджений з фільтрацією $\{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}$.

Означення 3.3.11. Стратегією називають пару узгоджених процесів $(\varphi, \psi) = \{\varphi_t, \psi_t,\ t \geq 0\}$, що описують, відповідно, кількість одиниць ризикового і безризикового активу, які має інвестор в момент t.

Ці процеси можуть бути як додатними, так і від'ємними (дозволений короткий продаж будь-якої кількості кожного з активів). Очевидно, капітал V_t інвестора в момент t дорівнює $V_t = \varphi_t S_t + \psi_t B_t$. Тепер додатково припустимо, що процес S_t допускає стохастичний диференціал виду $dS_t = \alpha_t dW_t + \beta_t dt$ (див. означення А.2.4), причому

$$\mathrm{E}\Big(\int_0^t \alpha_s^2 ds + \int_0^t |\beta_s| ds\Big) < \infty \tag{3.3.14}$$

для всіх $t > 0$, і процеси α і β узгоджені з фільтрацією $\{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}$. При цьому процес $M_t := \int_0^t \alpha_s dW_s$ є квадратично інтегровним мартингалом, $A_t = \int_0^t \beta_s ds$ є інтегровним процесом обмеженої варіації. Щодо процесу $\{\varphi_t,\ t \geq 0\}$ припускають, що він є передбачуваним відносно фільтрації $\{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}$. Передбачуваність складової φ стратегії відповідає тому, що φ_t залежить від інформації, що надійшла до моменту t, але не в момент t. Точне означення передбачуваного процесу міститься, наприклад, в [27]. Крім того, припускаємо, що

$$\mathrm{E}\int_0^t \varphi_s^2\alpha_s^2 ds < \infty, \ \mathrm{E}\int_0^t |\varphi_s\beta_s| ds < \infty. \qquad (3.3.15)$$

Тоді, згідно з п. А.2, існують стохастичний інтеграл $\int_0^t \varphi_s dM_s$, що є квадратично інтегровним мартингалом та інтеграл Лебега-Стілтьєса $\int_0^t \varphi_s dA_s$, що є процесом інтегровної варіації, а отже, і $\int_0^t \varphi_s dS_s$.

Зауваження 3.3.12. Можна вимагати виконання слабших умов, а саме: $\mathrm{P}\{\int_0^t \varphi_s^2\alpha_s^2 ds < \infty, \ \int_0^t |\varphi_s\beta_s| ds < \infty\} = 1$. При цьому стохастичний інтеграл $\int_0^t \varphi_s dM_s$ буде існувати, але не буде мартингалом, а процес $\int_0^t \varphi_s\beta_s ds$ буде процесом м.н. обмеженої варіації.

Означення 3.3.13. Стратегію (φ_t, ψ_t) називають самофінансованим, якщо $V_t = V_0 + \int_0^t \varphi_s dS_s + \int_0^t \psi_s dB_s$, або, в диференціальній формі, $dV_t = \varphi_t dS_t + \psi_t dB_t$.

Зміст властивості самофінансованості полягає в тому, що зміна величини капіталу відбувається лише за рахунок зміни ціни ризикового і безризикового активу, без надходжень капіталу ззовні і його відтоку назовні. (Порівняйте з означенням 3.2.39 самофінансованої стратегії для ринку з дискретним часом.)

Вправа 3.3.14. Нехай $S_t = W_t, B_t = 1$.

1. Покажіть, що стратегії $(\varphi_t = 1, \psi_t = 1)$ та $(\varphi_t = 2W_t, \psi_t = -t - W_t^2)$ є самофінансованими.
2. Опишіть клас самофінансованих стратегій.

Арбітраж та мартингальні міри

Поняття арбітражу для ринку з неперервним часом можна сформулювати так само, як і для ринку з дискретним часом. Щоправда, існує багато різновидів цього поняття; детальне обговорення цього питання міститься в [27], [41].

Означення 3.3.15. (B, S) – ринок називається безарбітражним, якщо не існує такої самофінансованої стратегії (φ, ψ), для якої початковий капітал $V_0 = \varphi_0 S_0 + \psi_0 B_0 \leq 0$, а $V_T = \varphi_T S_T + \psi_T B_T \geq 0$ з ймовірністю 1, і $V_T > 0$ з додатною ймовірністю.

Теорема 3.3.16. (B, S) *– ринок безарбітражний тоді й тільки тоді, коли існує така міра $P^* \sim P$, для якої дисконтований ціновий процес $X_t = S_t/B_t$ буде мартингалом.*

Вправа 3.3.17. Довести, що (B, S) – модель: $dB_t = rB_t dt$, $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$ є безарбітражною. Використайте для цього теорему Гірсанова (теорема А.2.10); виберіть P^* так, що

$$\frac{dP^*}{dP} = \exp\left\{-\frac{\mu - r}{\sigma} W_T - \frac{1}{2}\frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2} T\right\}.$$

Породжувальні стратегії

Розглянемо Європейське платіжне зобов'язання $C \geq 0$ з датою виконання $T > 0$, і припустимо, що ринок функціонує в неперервному часі $t \in [0, T]$.

Означення 3.3.18. Стратегія (φ, ψ) називається породжувальною для Європейського зобов'язання C, якщо вона є самофінансованою і її капітал $V_T = \varphi_T S_T + \psi_T B_T = C$.

Щодо породжувальних стратегій кажуть, що вони реплікують (відтворюють, породжують, хеджують C).

Лема 3.3.19. *Якщо (φ_t, ψ_t) – породжувальна стратегія, а ринок безарбітражний, то справедлива ціна зобов'язання C в момент t дорівнює $V_t := \varphi_t S_t + \psi_t B_t$.*

Доведення. Якщо ціна зобов'язань в момент t менша за V_t і дорівнює V_t', то, можна в цей момент купити зобов'язання C за V_t' продати φ_t одиниць активу S і ψ_t одиниць активу B, і далі дотримуватися стратегії (φ, ψ). Тоді в момент T $\varphi_T S_T + \psi_T B_T = C$, тобто зобов'язання, яке буде на руках у інвестора, буде тої ж ціни, що і проданий портфель, тобто вони "взаємно знищаться", і ніякі додаткові кошти між моментами t і T непотрібні. Отже інвестор має додатний прибуток $V_t - V_t' = \varphi_t S_t + \psi_t B_t - V_t'$, і не має ризику. Аналогічно, якщо ціна зобов'язання C в момент t вища за V_t і дорівнює V_t'', то треба продати C і купити портфель V_t; прибуток в момент T буде $V_t'' - V_t$; ризику не буде. $\square$

Повні ринки

Як і в дискретному випадку, ринок з неперервним часом називається повним, якщо на ньому кожне платіжне зобов'язання є досяжним. Критерієм повноти безарбітражного ринку є єдиність мартингальної міри.

Вправа 3.3.20. Використовуючи вправу 3.3.17, довести, що (B, S) – ринок, де $dB_t = rB_t dt$, а $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$, є повним.

3.3.6 Американські платіжні зобов'язання у неперервній моделі

Нагадаємо, що Американське платіжне зобов'язання, на відміну від Європейського, можна виконати у будь-який момент протягом терміну дії, а не лише у останній. Цей додатковий ступінь свободи значно ускладнює розв'язання задачі оцінювання Американського опціону.

Ми вже розглянули Американські платіжні зобов'язання у дискретній моделі ринку (див. розділ 3.2.9). У неперервній моделі, як і у дискретній, вартість Американського платіжного зобов'язання є огинаючою Снелла – найменшим супермартингалом, який мажорує виплати за платіжним зобов'язанням. Але очевидно, що на відміну від дискретної моделі, у неперервній огинаючу Снелла не можна визначити рекурентно, починаючи від останнього моменту: у ній немає моменту, що безпосередньо передує даному. Тим не менш, можна деякі ідеї, що використовувалися у дискретній моделі, використати і для неперервного випадку.

Від загальних міркувань перейдемо тепер до детального розгляду. Нехай ми маємо модель Блека–Шоулса фінансового ринку. Задля спрощення, ми одразу перейдемо до еквівалентної мартингальної міри. Відносно неї цінові процеси для безризикового та ризикового активу виглядають так:

$$\begin{cases} B_t = B_0 e^{rt}, \\ S_t = S_0 e^{(r-\sigma^2/2)t+\sigma W_t}. \end{cases}$$

Розглянемо тепер Американський опціон з невід'ємною функцією виплат g, тобто таке платіжне зобов'язання, за яким виплачується $g(S_t)$, якщо воно подається до виконання у момент t.

Покупець Американського опціону, природно, намагається пред'явити його до сплати (або виконати його) так, щоб максимізувати виплату. Зважаючи на часову вартість грошей, маємо наступну задачу оптимізації:

$$\mathrm{E}[e^{-r\tau} g(S_\tau)] \to \max .$$

Стратегія виконання τ залежить від поведінки ціни базового активу, тому, звичайно, може бути випадковою. Проте гіпотеза ефективності ринку стверджує, що інвестор не володіє інформацією про майбутній розвиток цін (або володіє, але не має права нею користуватися згідно закону про заборону інсайдерської торгівлі). Це означає, що допустима стратегія виконання τ не може залежати від майбутнього, тобто вона має бути марківським моментом. Таким чином, найбільша можлива очікувана майбутня виплату за умови, що у момент t ціна дорівнює s – так звана *функція винагород* – визначається формулою

$$V(t,s) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_t} \mathrm{E}[e^{r(t-\tau)} g(S_\tau)/S_t = s], \tag{3.3.16}$$

де $\mathcal{T}_t$ – множина моментів зупинки з проміжку $[t, T]$.

Наведені міркування доволі евристичні, але неважко показати, що функція $V(t,s)$ є єдиною безарбітражною ціною Американського платіжного зобов'язання у момент t за умови, що $S_t = s$. Для доведення цього використаємо декілька допоміжних фактів і тверджень.

Спершу зауважимо, що процес

$$Y_t = V(t, S_t) e^{-rt}$$

є супермартингалом. Дійсно, якщо $t < u$, то для моменту зупинки $\tau \in \mathcal{T}_u$, завдяки марківській властивості, виконуються співвідношення

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[\mathrm{E}[e^{-r\tau}g(S_\tau)/S_u]/F_t] &= \mathrm{E}[\mathrm{E}[e^{-r\tau}g(S_\tau)/F_u]/F_t] \\ &= \mathrm{E}[e^{-r\tau}g(S_\tau)/F_t] = \mathrm{E}[e^{-r\tau}g(S_\tau)/S_t] \le Y_t.\end{aligned}$$

Остання нерівність очевидна, оскільки $\tau \in \mathcal{T}_t$. Взявши тепер таку послідовність моментів зупинки $\tau_n \in \mathcal{T}_u$, що $\mathrm{E}[e^{-r\tau_n}g(S_{\tau_n})/S_u] \to Y_u$, одержимо за лемою Фату бажане твердження. Більше того, Y_t є *огинаючою Снелла* дисконтованої виплати

$$H_t = e^{-rt}g(S_t),$$

тобто найменшим супермартингалом, що мажорує H. Дійсно, якщо $Y' \ge H$ – супермартингал, то для моменту зупинки $\tau \in \mathcal{T}_t$ за теоремою Дуба про вільний вибір

$$Y'_t \ge \mathrm{E}[Y_\tau \mid \mathcal{F}_t] \ge \mathrm{E}[e^{-r\tau}g(S_\tau) \mid \mathcal{F}_t] = \mathrm{E}[e^{-r\tau}g(S_\tau) \mid \mathcal{F}_t].$$

Перейшовши до супремуму за $\tau \in \mathcal{T}_t$, одержимо $Y'_t \ge e^{-rt}V(t, S_t) = Y_t$, що й потрібно було довести.

Визначимо тепер *область зупинки*, що складається з тих точок, де миттєва зупинка не гірша за найкращу очікувану виплату:

$$\mathcal{D} = \{(t,s) \in [0,T] \times (0,\infty) \mid g(s) \ge V(t,s)\}$$

та її доповнення – *область продовження*:

$$\mathcal{C} = \{(t,s) \in [0,T] \times (0,\infty) \mid g(s) > V(t,s)\}.$$

Визначимо момент зупинки $\tau_{(t)} = \inf\{u \in [t,T] : (u, S_u) \in \mathcal{D}\}$ – це перший момент, коли процес цін потрапляє у область зупинки. Природно очікувати, що момент зупинки τ^*_t є оптимальним, і це підтверджується наступною теоремою.

Теорема 3.3.21. *Справедлива рівність*

$$\mathrm{E}[e^{r(t-\tau_{(t)})}g(S_{\tau_{(t)}})/S_t] = V(t, S_t).$$

Іншими словами, момент $\tau_{(t)}$ є оптимальним моментом виконання платіжного зобов'язання, починаючи з моменту t.

Більше того, зупинений процес $Z_u = Y_{\tau_{(t)} \wedge u}$, $u \in [t,T]$, є мартингалом.

Доведення цього факту значно складніше, ніж у дискретному випадку, оскільки ми не можемо скористатися індукцією. Його можна знайти, зокрема, у [61].

Отже, покупець опціону в момент t справді в середньому може розраховувати на отримання суми $V(t, S_t)$ за допомогою вдало вибраної стратегії виконання. Звідси випливає, що опціон у момент t не може коштувати менше $V(t, S_t)$. Більш строге міркування таке: виплата за Американським опціоном (якщо покупець діє оптимально) не гірша за виплату $g(S_\tau)$ у момент τ (хоча б тому, що цей опціон можна виконати у момент τ). Тому ціна опціону не менша за ціну цієї виплати, яка, як ми знаємо, є математичним сподіванням відносно еквівалентної мартингальної міри дисконтованої виплати: $\mathrm{E}[e^{r(t-\tau)}g(S_\tau)/S_t = s]$ (нагадаємо, що ми для зручності припустили, що вихідна ймовірнісна міра є мартингальною). Взявши супремум, одержимо бажане.

Але чому справедлива ціна у момент t не може перевищувати $V(t, S_t)$? Це випливає з відсутності арбітражу. Дійсно, можна записати розклад Дуба, починаючи з моменту t: $Y = M + A$, де M – мартингал, а A – незростаючий процес, що стартує в момент t з нуля (зокрема, він недодатний). Використовуючи теорему про мартингальне зображення (теорема А.3.1), маємо

$$M_u = M_t + \int_t^u \xi_s dW_s = M_t + \frac{1}{\sigma}\int_t^u \xi_s/X_s dX_s,$$

де $X_t = e^{-rt}S_t$ – дисконтований процес цін, який, очевидно, задовольняє рівняння $dX_t = \sigma X_t dW_t$.

Це означає, що процес M_u є дисконтованим капіталом самофінасованої стратегії. Для будь-якого моменту τ цей капітал $M_\tau = Y_\tau - A_\tau \geq Y_\tau \geq e^{-r\tau}g(S_\tau)$. Це означає, що, використовуючи стратегію ξ/X, можна хеджувати будь-які виплати за Американським опціоном (більше того, як бачимо, момент τ не обов'язково має бути марківським, тобто можна хеджувати виплати навіть у тому випадку, коли покупець використовує інсайдерську інформацію). Тому з міркувань безарбітражності опціон має коштувати не більше вартості цього хеджу, яка в момент t становить $e^{rt}M_t = e^{rt}Y_t = V(t, S_t)$.

Задача з вільною межею

Згідно з теоремою 3.3.21, вартість у момент t Американського платіжного зобов'язання на первинний актив з ціною s можна визначити як

$$V(t,s) = e^{rt}U(t,s) = e^{rt}\mathrm{E}[e^{-r\tau_{(t)}}g(S_{\tau_{(t)}})/S_t = s],$$

де $\tau_{(t)}$ – момент виходу процесу $C_t = (t, S_t)$ з області продовження $\mathcal{C}$. З теорії дифузійних процесів відомо, що тоді для $t, s \in \mathcal{C}$

$$\mathcal{L}U = 0,$$

де

$$\mathcal{L}f(t,s) = \frac{\partial}{\partial t}f(t,s) + \frac{\sigma^2}{2}s^2\frac{\partial^2}{\partial s^2}f(t,s) + r\frac{\partial}{\partial s}f(t,s)$$

є генератором процесу C. Враховуючи, що $\mathcal{L}V = rV + e^{rt}\mathcal{L}U$, маємо наступне рівняння:

$$\mathcal{L}V - rV = 0 \quad \text{у } \mathcal{C}. \tag{3.3.17}$$

Також ми знаємо, що

$$V(t,s) = g(s) \quad \text{у } \mathcal{D}.$$

Якщо функція g неперервна і диференційовна, то можна довести (див., наприклад, [28]), що функція $V(t,s)$ неперервно диференційована. Це, зокрема, означає, що значення і похідні на межі ∂C області продовження з обох боків мають співпадати, тобто

$$V(t,s) = g(s),\ \ \frac{\partial}{\partial s}V(t,s) = g'(s),\ \ \frac{\partial}{\partial t}V(t,s) = 0 \quad \text{на } \partial C. \tag{3.3.18}$$

Таким чином, маємо рівняння у частинних похідних (3.3.17) з граничними умовами (3.3.18). Саме рівняння (3.3.17) є доволі стандартним рівнянням параболічного типу, яке логарифмічною заміною можна звести до рівняння теплопровідності. Але граничні умови (3.3.18) є нестандартними, оскільки апріорі не зрозуміло, де вони задані. Відомо єдине – що функція V має гладенько (у сенсі рівності перших похідних) склеюватися з функцією g, але де проходить ця "склейка", невідомо. Тому такі задачі називають *задачами з вільною межею*.

Часто множина зупинки має так звану "порогову структуру", тобто складається з усіх точок площини, що лежать над (чи під) графіком функції $s = \gamma(t)$. У такому випадку можна виписати розв'язок рівняння (3.3.17) неявно, через невідому функцію γ. В свою чергу, якщо підставити точки з межі області продовження (тобто точки вигляду $(t, \gamma(t))$) в отриманий вираз, то одержимо рівняння на функцію γ. Частіше за все це рівняння є надзвичайно складним і його не можна розв'язати точно, навіть не можна довести існування хоча б одного розв'язку.

Проте іноді не є оптимальним зупинятися раніше, ніж в останній можливий момент. Це справедливо тоді, коли функція винагород співпадає з функцією виплат, або, що те саме, дисконтований процес виплат співпадає зі своєю огинаючою Снелла. Це можливо в одному випадку – коли дисконтований процес виплат є супермартингалом, тобто коли для $t \le u \le T$

$$\mathrm{E}[e^{-ru}g(S_u) \mid \mathcal{F}_t] \le e^{-rt}g(S_t).$$

Достатньою умовою для цього є опуклість та зростання функції g. Наприклад, для Американського опціону купівлі функція виплат $g(s) = (s - K)^+$ має такі властивості, тому такий опціон не варто виконувати раніше останнього моменту і його ціна дорівнює ціні аналогічного Європейського опціону.

3.3.7 Екзотичні деривативи у неперервній моделі

Похідні цінні папери є зручним інструментом для фінансового менеджера. Найважливішою їхньою функцією є те, що вони дозволяють керувати як інвестиційними, так і бізнесовими ризиками, причому не тільки зменшувати ці ризики, а й збільшувати їх задля більшої прибутковості.

Поки що ми детально розглянули Європейські та Американські платіжні зобов'язання. Вони вже дають великий набір знаряддя для керування ризиками. В основному, Європейські платіжні зобов'язання дають можливість зменшити ризики, пов'язані з майбутнім одноразовим придбанням або продажем активів, Американські платіжні зобов'язання дозволяють зменшувати ризик знецінення активів чи бізнесу у володінні або ризик високої ціни, якщо необхідність придбати актив може виникнути раптово у невідомий майбутній момент.

Проте, існує багато інших ризиків, для керування якими Американських та Європейських опціонів замало. Тому все більше поширення на фондових біржах світу мають *екзотичні* деривативи. Такі похідні цінні папери зазвичай мають наступні риси:

- дата виконання фіксована;
- виплата при виконанні не тільки від фінального значення базового первинного активу, але й від всієї поведінки ціни активу до моменту виконання.

Найпоширенішими екзотичними похідними цінними паперами є Азійські опціони та деривативи з післядією. Нехай ціна базового первинного активу у момент t дорівнює S_t, означення формулюються так.

Означення 3.3.22. Опціоном чи деривативом *Азійського* типу, або просто Азійським опціоном, з датою виконання T називається похідний цінний папір, функція виплат якого залежить від середнього значення $S_T^{\mathrm{av}} = \frac{1}{T}\int_0^T S_t\,dt$ та, можливо, фінального значення S_T ціни базового первинного активу.

Означення 3.3.23. Деривативом *з післядією* з датою виконання T називається похідний цінний папір, функція виплат якого залежить від максимального $S_T^{\max} = \max_{t\in[0,T]} S_t$ та/або мінімального значення $S_T^{\min} = \min_{t\in[0,T]} S_t$ та, можливо, фінального значення S_T ціни базового первинного активу.

Азійські опціони: приклади і застосування

Двома найпоширенішими типами Азійських опціонів є опціони з усередненим страйком та опціони з усередненою ціною.

Опціони з усередненим страйком є опціони купівлі або продажу за середньою ціною. Таким чином, опціони купівлі і продажу з усередненим страйком і датою виконання T мають функції

виплат
$$(S_T - S_T^{\mathrm{av}})^+ \quad \text{та} \quad (S_T^{\mathrm{av}} - S_T)^+$$
відповідно. Опціони купівлі та продажу з усередненою ціною, датою виконання T та страйковою ціною K мають функції виплат
$$(S_T^{\mathrm{av}} - K)^+ \quad \text{та} \quad (K - S_T^{\mathrm{av}})^+$$
відповідно.

Азійські опціони можуть зменшувати ризики, коли певний актив регулярно купується або продається протягом певного терміну. Зазвичай така задача виникає у промисловості, для компаній, які регулярно купують або виробляють сировину. Це пояснює популярність таких цінних паперів на біржах Азії, де бурхливо розвивається промисловість (особливо у Китаї).

Деривативи з післядією: приклади і застосування

Найпоширенішими деривативами з післядією є опціони з післядією з плаваючим та фіксованим страйком, а також бар'єрні опціони.

Опціони з післядією та плаваючим страйком дозволяють купити або продати актив за ціною, яка була максимальною або мінімальною протягом терміну дії опціону. Функції виплат для таких опціонів купівлі та продажу з датою виконання T відповідно дорівнюють
$$(S_T - S_T^{\min})^+ = S_T - S_T^{\min} \quad \text{та} \quad (S_T^{\max} - S_T)^+ = S_T^{\max} - S_T$$
відповідно. Бачимо, що такі опціони з очевидних причин не бувають "поза грошима", тобто їх у будь-якому разі варто виконувати.

Опціони з післядією, датою виконання T та фіксованим страйком K мають функції виплат
$$(S_T^{\max} - K)^+ \quad \text{та} \quad (K - S_T^{\min})^+$$
для опціонів купівлі та продажу відповідно.

Бар'єрні опціони є звичайними Європейськими опціонами купівлі та продажу. Відмінність полягає у тому, що ці опціони втрачає (або, навпаки, набуває) силу в разі, якщо ціна перетне певний бар'єр протягом дії опціону.

Якщо опціон втрачає силу при перетині ціною бар'єру, він називається опціоном виходу, у протилежному випадку – опціоном входу. Якщо бар'єр встановлюється вище страйкової ціни, опціон називається верхнім, якщо нижче – нижнім. Таким чином, існує вісім типів бар'єрних опціонів. Наприклад, функція виплат верхнього кол-опціону входу зі страйковою ціною K, датою виконання T та бар'єром $H > K$ дорівнює

$$(S_T - K)^+ \mathbb{1}_{S_T^{\max} < H} = \begin{cases} (S_T - K)^+, & \max_{t\in[0,T]} S_t < H, \\ 0 & \text{у протилежному випадку,} \end{cases}$$

а функція виплат нижнього пут-опціону виходу зі страйковою ціною K, датою виконання T та бар'єром $H < K$

$$(K - S_T)^+ \mathbb{1}_{S_T^{\min} < H} = \begin{cases} (K - S_T)^+, & \min_{t\in[0,T]} S_t < H, \\ 0 & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Опціони з післядією нерідко використовуються при злиттях та поглинаннях. Уявімо компанію A, що планує придбати велику кількість акцій компанії B на біржі. Зрозуміло, що у процесі купівлі акцій ціна буде зростати з-за зростання попиту, але після покупки ціна скоріш за все падатиме, оскільки зростання попиту було штучним. Компанія A може придбати опціон продажу акцій компанії B з плаваючим страйком, щоб дещо компенсувати надмірні витрати.

Оцінювання деривативів з післядією у моделі Блека-Шоулса

Для того, щоб оцінити дериватив з післядією у певній моделі ринку, потрібно знати сумісний розподіл фінального значення S_T ціни первинного активу й мінімуму $S_T^{\min}$ та/або максимуму $S_T^{\max}$ ціни активу на відрізку $[0, T]$. На жаль, сумісний розподіл цих трьох величин має відносно простий вигляд лише у моделі Башельє: якщо W – вінерівський процес, $W_T^{\min}$ та $W_T^{\max}$ – його мінімум та максимум на відрізку $[0, T]$, то сумісний розподіл при $x \in [a, b]$ задається формулою

$$\mathrm{P}\left[a \le W_T^{\min} \le W_T^{\max} \le b,\ W_T \in dx\right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\exp\left\{-\frac{y_k^2(x)}{2t}\right\} - \exp\left\{-\frac{(y_k(x)-2b)^2}{2t}\right\}\right] dx,$$

де $y_k(x) = x + 2k(b-a)$. Для моделі Блека Шоулса, тобто для геометричного броунівського руху, такої явної формули немає. Проте є доволі проста формула для сумісного розподілу фінального значення та максимуму (та для фінального значення та мінімуму), якої достатньо як для опціонів з післядією, так і для бар'єрних опціонів.

Нехай $X_t = W_t + \mu t + x$ є вінерівським процесом з переносом μ та початковим значенням x, $X_T^{\max} = \max_{t\in[0,T]} X_t$ є його максимумом на відрізку $[0, T]$, а $t_{\max}$ – точкою, де досягається цей максимум. Тоді для $z \le y, y \ge x$ сумісний розподіл задається формулою

$$\mathrm{P}(X_T \in dz, X_T^{\max} \in dy, t_{\max} \in dt) = \frac{(y-x)(y-z)}{\pi\sqrt{t^3(T-t)^3}} \times$$
$$\times \exp\Big(-\frac{(y-x)^2}{2t} - \frac{(y-z)^2}{2(T-t)} - \mu(x-z) - \frac{\mu^2 T}{2}\Big) dz\, dy\, dt$$
$$=: p_{T,x,\mu}(z, y, t) dz\, dy\, dt.$$

Отже, сумісною щільністю X_T та $X_T^{\max}$ є $\int_0^T p_{T,x,\mu}(z, y, t)dt$. Сумісний розподіл X_T та $X_t^{\min}$ легко визначити з цієї формули, якщо розглянути процес $-X_t$, який також є вінерівським процесом зі сталим переносом.

Розглянемо модель Блека-Шоулса фінансового ринку. Нагадаємо, що відносно нейтральною до ризику міри ця модель має вигляд

$$\begin{cases} B_t = B_0 e^{rt}, \\ S_t = S_0 e^{(r-\sigma^2/2)t + \sigma W_t}. \end{cases}$$

Нехай дериватив з післядією має функцію виплат $C = g(S_T, S_T^{\max})$. Врахувавши, що $\ln S_t$ є вінерівським процесом з коефіцієнтом переносу $\mu = r - \sigma^2/2$ та початковим значенням $x = \ln S_0$, можемо визначити його ціну за формулою

$$\pi(C) = \mathrm{E}\big[e^{-rT}C\big] = e^{-rT}\int_x^\infty \int_{\mathbb{R}} g(e^z, e^y)\int_0^T p_{T,x,\mu}(z,y,t)dt\,dz\,dy =$$
$$= e^{-rT}\int_{S_0}^\infty \int_0^\infty \frac{g(z,y)}{zy}\int_0^T p_{T,x,\mu}(\ln z, \ln y, t)dt\,dz\,dy.$$

Для конкретних опціонів цю формулу можна перетворити і одержати доволі прості вирази. Зокрема, ціна кол-опціону з післядією та плаваючим страйком дорівнює

$$S_0\Phi(a_1(S_0,S_0)) - S_0e^{-rT}\Phi(a_2(S_0,S_0)) -$$
$$-\frac{S_0\sigma^2}{2r}\big(\Phi(-a_1(S_0,S_0)) - e^{-rT}\Phi(-a_3(S_0,S_0))\big),$$

де для $S, H > 0$

$$a_1(S,H) = \frac{\ln(S/H) + (r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}},$$
$$a_2(S,H) = \frac{\ln(S/H) + \ln(r-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = a_1(S,H) - \sigma\sqrt{T},$$
$$a_3(S,H) = \frac{\ln(S/H) - \ln(r-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = a_1(S,H) - \frac{2r\sqrt{T}}{\sigma},$$

а Φ є стандартною нормальною функцією розподілу. Ціна кол-опціону з післядією та фіксованим страйком дорівнює

$$S\Phi(a_1(S_0,K)) - Ke^{-rT}\Phi(a_2(S_0,K)) +$$
$$+\frac{S_0\sigma^2}{2r}(\Phi(a_1(S_0,K)) - e^{-rT}(K/S)^{2r/\sigma^2}\Phi(a_3(S_0,K)))$$

при $S_0 \le K$ та

$$(S_0-K)e^{-r\tau} + S_0\Phi(a_1(S_0,S_0)) - S_0e^{-r\tau}\Phi(a_2(S_0,S_0)) +$$
$$+\frac{S_0\sigma^2}{2r}\big(\Phi(a_1(S_0,S_0)) - e^{-rT}\Phi(a_3(S_0,S_0))\big)$$

при $S_0 > K$. Залежність формули від співвідношення між K та S_0 легко пояснити: при $S_0 > K$ опціон є завжди в грошах.

Інші формули для опціонів з післядією, включаючи формулу для ціни у будь-який момент часу, можна знайти у [56]. Простих явних формул для бар'єрних опціонів немає.

Додаток А
Елементи стохастичного аналізу

У цьому додатку викладено елементи одновимірного стохастичного аналізу. Докладніше про цей предмет можна прочитати у книгах [18, 27, 50, 52, 69, 71].

А.1 Вінерівський процес

Означення А.1.1. Стандартним *вінерівським процесом* називають гауссівський випадковий процес $W = \{W_t, t \geq 0\}$, для якого $\mathrm{E}[W_t] = 0$, $\mathrm{E}[W_t W_s] = \min(t, s)$, $t, s \geq 0$.

Вінерівський процес – це єдиний з точністю до сталої неперервний процес з незалежними однорідними приростами, який стартує в момент 0 з нуля. Ми доведемо тільки частину цього твердження:

Твердження А.1.2. *Вінерівський процес W має незалежні однорідні прирости. Існує неперервна модифікація процесу W, тобто такий неперервний процес $\widetilde{W}$, що $\forall t \geq 0$ $\mathrm{P}(W_t = \widetilde{W}_t) = 1$.*

Доведення. Оскільки процес є гауссівським, то, щоби довести незалежність приростів, достатньо показати, що вони є попарно некорельованими. Для $0 \leq s \leq t \leq u$ маємо

$$\operatorname{cov}(W_s, W_t - W_u) = \mathrm{E}[W_s(W_t - W_u)] = \min(s, t) - \min(s, u) = 0.$$

Звідси випливає попарна некорельованість приростів, а отже, й незалежність. Прирости є однорідними, оскільки для $s \leq t$

$$\mathrm{E}(W_t - W_s)^2 = \mathrm{E}(W_t^2 - 2W_t W_s + W_s^2) = t - 2\min(t, s) + s = t - s.$$

Тому, за відомою властивістю нормального розподілу,

$$\mathrm{E}(W_t - W_s)^4 = 3(t - s)^2.$$

З цієї рівності завдяки теоремі Колмогорова випливає існування неперервної модифікації. $\square$

Часто розглядають вінерівський процес на ймовірнісному просторі з фільтрацією $\mathfrak{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$. **Вінерівським процесом** на такому просторі, або $\mathfrak{F}$**-вінерівським процесом**, називають вінерівський процес, який є $\mathfrak{F}$-узгодженим та прирости якого $W_t - W_u$ при $s \leq t \leq u$ не залежать від $\mathcal{F}_s$. Очевидно, що кожен вінерівський процес є $\mathfrak{W}$-вінерівським, де $\mathfrak{W}$ – фільтрація, породжена самим процесом W.

Важливою характеристикою вінерівського процесу є його квадратична варіація. Означення квадратичної варіації таке:

$$[W]_t = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{k=1}^{n} (W_{t_k} - W_{t_{k-1}})^2, \tag{A.1.1}$$

де границя (за ймовірністю) береться при подрібненні до нуля розбиття Δ відрізку $[0, t]$.

Лема A.1.3. $[W]_t = t$.

Доведення. Ми доведемо збіжність у середньому квадратичному, з якої, як відомо, випливає збіжність за ймовірністю. Помітимо, що математичне сподівання суми у (A.1.1) дорівнює t, тому достатньо довести збіжність дисперсії до нуля. Маємо

$$\mathrm{D}\Big[\sum_{k=1}^{n} (W_{t_k} - W_{t_{k-1}})^2\Big] = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{D}[(W_{t_k} - W_{t_{k-1}})^2] =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1})^2 \leq 2\,|\Delta| \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) = 2t\,|\Delta| \to 0,\ \ |\Delta| \to 0,$$

що й потрібно було довести. $\square$

A.2 Інтеграл Іто

Хоча вінерівський процес є неперервним, він майже напевно є ніде не диференційованим. Ми не будемо доводити цього факту, але зазначимо, що це зрозуміло з того факту, що для диференційованої функції квадратична варіація дорівнює нулю. Це означає, що неможливо визначити $\int dW_t$ у звичайний спосіб, як інтеграл Лебега-Стілтьєса.

Цієї проблеми дозволяє позбутися конструкція стохастичного інтегралу, запропонована К. Іто.

Тут і далі ми будемо працювати на ймовірнісному просторі з фільтрацією $\mathfrak{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, на якому задано $\mathfrak{F}$-вінерівський процес W. Спершу стохастичний інтеграл можна визначити для простих процесів вигляду

$$\varphi_t = \sum_{n=1}^{N} \xi_n \mathbb{1}_{[t_{n-1}, t_n)}(t), \tag{A.2.1}$$

де $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$ – розбиття відрізка $[0, T]$, ξ_n – $\mathcal{F}_{t_{n-1}}$-вимірні випадкові величини. Позначимо клас таких процесів $\mathcal{S}$. Для процесу X, заданого формулою (A.2.1), стохастичний інтеграл, або інтеграл Іто, за вінерівським процесом природно визначається як

$$I(\varphi) = \int_0^\infty \varphi_t dW_t = \sum_{n=1}^{N} \xi_n (W_{t_n} - W_{t_{n-1}}).$$

Очевидно, що таким чином визначений інтеграл, по-перше, не залежить від розбиття відрізку, на якому задано функцію, по-друге, є лінійним за функцією. Подальші властивості сформулюємо у вигляді леми.

Лема A.2.1. *Для процесу* $\varphi \in \mathcal{S}$ *виконується*

$$\mathrm{E}[I(\varphi)] = 0; \tag{A.2.2}$$

$$\mathrm{E}[I^2(\varphi)] = \int_0^\infty \mathrm{E}[\varphi_t^2] dt \tag{A.2.3}$$

Доведення. Для процесу φ вигляду (A.2.1)

$$\mathrm{E}[I(\varphi)] = \sum_{n=1}^{N} \mathrm{E}[\mathrm{E}[\xi_n (W_{t_n} - W_{t_{n-1}}) | \mathcal{F}_{t_{n-1}}]] =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \mathrm{E}[\xi_n \mathrm{E}[(W_{t_n} - W_{t_{n-1}}) | \mathcal{F}_{t_{n-1}}]] = 0,$$

$$\mathrm{E}[I^2(\varphi)] = \sum_{n=1}^{N} \mathrm{E}[\xi_n^2(W_{t_n} - W_{t_{n-1}})^2 =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \mathrm{E}[\xi_n^2 \mathrm{E}[(W_{t_n} - W_{t_{n-1}})^2 | \mathcal{F}_{t_{n-1}}]] +$$

$$+2 \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{n-1} \mathrm{E}[\mathrm{E}[\xi_n \xi_m (W_{t_n} - W_{t_{n-1}})(W_{t_m} - W_{t_{m-1}}) | \mathcal{F}_{n-1}]] =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \mathrm{E}[\xi_n^2](t_n - t_{n-1}) +$$

$$+2 \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{n-1} \mathrm{E}[\xi_n \xi_m (W_{t_m} - W_{t_{m-1}}) \mathrm{E}[(W_{t_n} - W_{t_{n-1}}) | \mathcal{F}_{n-1}]] =$$

$$= \int_0^\infty \varphi_t^2 dt.$$

Тут ми використали, що при $k \geq n$ приріст $W_{t_{k+1}} - W_{t_k}$ є незалежним від $\mathcal{F}_{t_n}$, а при $k < n$ – $\mathcal{F}_{t_n}$-вимірним. □

Рівність (A.2.3) називається "ізометричною тотожністю". Дійсно, простір $\mathcal{S}$ простих процесів вигляду (A.2.1) є підпростором простору $L^2([0,\infty) \times \Omega)$ квадратично інтегровних процесів, і ця рівність говорить про те, що відображення $I : \mathcal{S} \to L^2(\Omega)$ є ізометрією. Отже, можливо продовжити відображення I на весь простір $L^2([0,\infty) \times \Omega)$ так, щоб воно залишалося ізометрією. На жаль, це можливо зробити не єдиним чином. Тим не менш, продовження єдине на замикання простору $\mathcal{S}$, яке є нічим іншим як простором квадратично інтегровних процессів, узгоджених з фільтрацією $\mathfrak{F}$ (ми позначатимемо цей клас через L_a^2 від "adapted" – "узгоджений").

Отже, для будь-якого $\mathfrak{F}$-узгодженого процесу $\varphi \in L_a^2$ можна визначити

$$I(\varphi) = \int_0^\infty \varphi_t dW_t$$

як границю $I(\varphi^{(n)})$ в $L^2(\Omega)$, де $\varphi^{(n)} \to f$, $n \to \infty$ в $L^2([0,\infty) \times \Omega)$, причому це означення коректне: воно не залежить від вибору апроксимуючої послідовності. З властивостей інтегралу Іто для простих функцій граничним переходом легко отримати аналогічні властивості для процесів з класу L_a^2.

Теорема А.2.2. *Для будь-яких процесів* $\varphi, \psi \in L_a^2$

- $\forall a, b \in \mathbb{R}\ I(a\varphi + b\psi) = aI(\varphi) + bI(\psi)$*;*
- $\mathrm{E}[I(\varphi)] = 0$*;*
- $\mathrm{E}[I(\varphi)I(\psi)] = \int_0^\infty \mathrm{E}[\varphi_t\psi_t]\,dt$*.*

Остання рівність відображає той факт, що I є не лише ізометрією, а й гомоморфізмом гільбертових просторів. Зауважимо, що завдяки цій властивості інтеграл є неперервною (у просторі $L^2([0,\infty) \times \Omega)$) функцією процесу.

Вивчимо тепер властивості стохастичного інтегралу як функції “верхньої межі”. Для цього спочатку визначимо

$$I_t(\varphi) = \int_0^t \varphi_s ds = I(\varphi \mathbb{1}_{[0,t]}).$$

Твердження А.2.3. *Нехай* $\varphi \in L_a^2$*. Тоді процес* $\{I_t(\varphi), t \geq 0\}$ *є* $\mathfrak{F}$*-мартингалом, зокрема, він є* $\mathfrak{F}$*-узгодженим процесом, який (завдяки квадратичній інтегровності) має ортогональні прирости. Існує неперервна модифікація процесу* $\{I_t(\varphi), t \geq 0\}$.

Доведення. Зауважимо, що зі збіжності у середньому квадратичному випадкових величин випливає збіжність у середньому квадратичному умовних математичних сподівань, оскільки умовне математичне сподівання для квадратично інтегровних випадкових величин є просто ортогональною проекцією. Тому достатньо довести мартингальну властивість лише для простих процесів, а завдяки лінійності стохастичного інтегралу і умовних математичних сподівань – лише для процесів вигляду $\varphi_t = \mathbb{1}_{[c,d]}(t)$. Для такого процесу

$$I_t(\varphi) = \begin{cases} 0, & t \in [0,c], \\ W_{t\wedge d} - W_c, & t > c. \end{cases}$$

Розглянемо $\mathrm{E}_{t,s} = \mathrm{E}[I_t(\varphi)|\mathcal{F}_s]$, $t \geq s$. Якщо $s \leq c$, то $\mathrm{E}_{t,s}$, очевидно, дорівнює нулю, тобто X_s, при $t \leq c$, а при $t > c$ завдяки незалежності приростів $W_t - W_c$, $W_d - W_c$ від $\mathcal{F}_s$ маємо $\mathrm{E}_{t,s} = 0$. Якщо

$s \in (c, d]$, то $\mathrm{E}_{t,s}$ можна подати у вигляді $(W_s - W_c) + (W_{t\wedge d} - W_s)$. Перший приріст є $\mathcal{F}_s$-вимірним, другий незалежним від $\mathcal{F}_s$, тому $\mathrm{E}_{t,s} = W_s - W_c = I_s(\varphi)$. Нарешті, якщо $s > d$, то $\varphi_t = \varphi_s = W_d - W_c$ є $\mathcal{F}_s$ вимірним, тому $\mathrm{E}_{t,s} = I_s(\varphi)$. Ортогональність приростів випливає з мартингальної властивості так: для $0 \le s \le t \le u$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[I_s(\varphi)[I_t(\varphi) - I_u(\varphi)]] &= \mathrm{E}[I_s(X)\mathrm{E}[I_t(\varphi) - I_u(\varphi)|\mathcal{F}_s]] \\ &= \mathrm{E}[I_s(\varphi)[I_s(\varphi) - I_s(\varphi)]] = 0. \end{aligned}$$

Доведення існування неперервної модифікації аналогічне до доведення теореми Колмогорова і його можна знайти у [18]. □

Надалі ми будемо завжди припускати, що обрано неперервну версію інтегралу $I_t(\varphi)$.

Зазначимо, що інтеграл Іто можна визначити не лише для процесів з класу L_a^2, а й для узгоджених процесів, що задовольняють слабше припущення, а саме: $\int_0^\infty \varphi_t^2\,dt < \infty$ майже напевно. Для такого процесу можна побудувати таку послідовність $\{\varphi^{(n)}\}$ простих процесів вигляду (A.2.1), що

$$\int_0^\infty (\varphi_t^{(n)} - \varphi_t)^2 dt \to 0, \quad n \to \infty \tag{A.2.4}$$

за ймовірністю, і визначити інтеграл як границю за ймовірністю $I(\varphi^{(n)})$. Існування границі та її незалежність від вибору наближуючої послідовності можна знайти, наприклад, у [18]. Також там можна знайти доведення існування неперервної модифікації у цьому випадку та збіжність $I(\varphi^{(n)}) \to I(\varphi)$ за ймовірністю при виконанні умови (A.2.4). Але зауважимо, що при виконанні лише послабленої умови процес $I_t(\varphi)$ не є, взагалі кажучи, мартингалом.

A.2.1 Формула Іто

Поняття стохастичного інтегралу природно доповнюється поняттям стохастичного диференціалу.

Означення A.2.4. Якщо майже напевно для будь-якого $t \in [a, b]$

$$X_t = \int_a^t \alpha_s\,ds + \int_a^t \beta_s\,dW_s, \tag{A.2.5}$$

де α, β – такі узгоджені процеси, для яких

$$\int_a^b (|\alpha_t| + \beta_t^2)dt < \infty$$

м.н., то кажуть, що процес X на відрізку $[a, b]$ має *стохастичний диференціал*

$$dX_t = \alpha_t\,dt + \beta_t\,dW_t.$$

Визначений на певному відрізку процес, який має стохастичний диференціал на цьому відрізку, ще називають *процесом Іто*.

Зауважимо, що в означенні стохастичного диференціалу можна замінити фразу "майже напевно для будь-якого $t \in [a, b]$" (подія повної ймовірності, на якій виконується (A.2.5), однакова для всіх t) на фразу "для будь-якого $t \in [a, b]$ майже напевно" (подія, на якій виконується (A.2.5), залежить від t), якщо додати умову неперервності траєкторій процесу X. Справді, з першого означення, очевидно, випливає друге. Якщо виконується друге означення, то майже напевно (A.2.5) має місце для всіх $t \in [a, b] \cap \mathbb{Q}$, отже, завдяки неперервності процесу X, а також стохастичного і звичайного інтегралу в (A.2.5), для всіх $t \in [a, b]$.

Таким чином визначений диференціал має, очевидно, властивість лінійності:

$$d(pX_t + qY_t) = p\,dX_t + q\,dY_t,\ \ p, q \in \mathbb{R}.$$

Однак, на цьому аналогія зі звичайним диференціалом закінчується. Вже для добутку формула буде складнішою.

Твердження A.2.5. *Нехай процеси $X_t^{(i)}$, $i = 1, 2$ мають на відрізку $[a, b]$ стохастичні диференціали $dX_t^{(i)} = \alpha_t^{(i)}\,dt + \beta_t^{(i)}\,dW_t$. Тоді процес $Y_t = X_t^{(1)} X_t^{(2)}$ має на відрізку $[a, b]$ стохастичний диференціал*

$$dY_t = \left[X_t^{(1)}\alpha_t^{(2)} + X_t^{(2)}\alpha_t^{(1)} + \beta_t^{(1)}\beta_t^{(2)}\right]dt + \\ + \left[X_t^{(1)}\beta_t^{(2)} + X_t^{(2)}\beta_t^{(1)}\right]dW_t. \tag{A.2.6}$$

Доведення. Завдяки неперервності стохастичного інтегралу достатньо довести твердження для ступінчастих процесів $\alpha^{(i)}$, $\beta^{(i)}$, а завдяки лінійності – лише для процесів вигляду $\mathbb{1}_{[c,d]}$, причому c, d можна взяти однаковими для усіх процесів $\alpha^{(i)}$, $\beta^{(i)}$, $i = 1, 2$. Більше того, завдяки лінійності стохастичного диференціалу достатньо розглянути випадки

1. $\beta^{(1)} = \beta^{(2)} \equiv 0$,

2. $\beta^{(1)} = \alpha^{(2)} \equiv 0$,

3. $\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} \equiv 0$.

Для $t \notin [c, d]$ формула (A.2.6) є очевидною, оскільки обідві частини дорівнюють нулю, тому припустимо, що $t \in [c, d]$.

У першому випадку процеси не мають стохастичної компоненти, тому твердження є очевидним наслідком звичайної формули інтегрування частинами.

У другому випадку $X_t^{(1)} = X_c^{(1)} + W_t - W_c$, $X_t^{(2)} = X_c^{(2)} + t - c$. З неперервності стохастичного інтегралу маємо

$$\int_c^t (s-c)\,dW_s = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{k=1}^{n} t_k\big(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\big) =$$

$$= (t-c)W_t - \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} W_{t_k}(t_{k+1} - t_k) = (t-c)W_t - \int_c^t W_s\,dt,$$

де границя береться у середньоквадратичному сенсі при подрібненні розбиття $\Delta = \{c = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t\}$ відрізку $[c, t]$. Остання рівність (завдяки неперервності вінерівського процесу) виконується у сенсі збіжності майже напевно, а тому (завдяки рівномірній інтегровності) – в середньоквадратичному сенсі. Тоді інтеграл від правої частини рівності (A.2.6) можна перетворити так:

$$\int_c^t \Big\{ \big[X_c^{(1)} + W_s - W_c\big]ds + \big[X_c^{(2)} + (s-c)\big]dW_s \Big\} =$$
$$= (t-c)W_t + X_c^{(1)}(t-c) - W_c(t-c) + X_c^{(2)}(W_t - W_c) =$$
$$= X_t^{(1)}X_t^{(2)} - X_c^{(1)}X_c^{(2)}.$$

Це як раз те, що потрібно було довести.

У третьому випадку $X_t^{(i)} = X_c^i + W_t - W_c$, $i = 1, 2$. Запишемо

$$\int_c^t W_s dW_s = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{k=1}^n W_{t_{k-1}}\big(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\big) =$$
$$= W_t^2 - W_c^2 - \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{k=1}^n W_{t_k}(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}),$$

де границя береться у середньоквадратичному сенсі при подрібненні розбиття Δ відрізку $[c, t]$. З цих двох рівностей одержимо

$$\int_c^t W_s dW_s = \frac{1}{2}\left[W_t^2 - W_c^2 - \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{k=1}^n (W_{t_k} - W_{t_{k-1}})^2\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\big[W_t^2 - W_c^2 - ([W]_t - [W]_c)\big] = \frac{1}{2}\big[W_t^2 - W_c^2 - (t-c)\big].$$

Тоді, проінтегрувавши праву частину (А.2.6), одержимо

$$\int_c^t \Big\{ds + \big[X_c^{(1)} + X_c^{(2)} + 2(W_s - W_c)\big]dW_s\Big\} =$$
$$= (t-c) + (X_c^{(1)} + X_c^{(2)})(W_t - W_c) +$$
$$+ W_t^2 - W_c^2 - (t-c) - 2W_c(W_t - W_c) =$$
$$= X_t^{(1)} X_t^{(2)} - X_c^{(1)} X_c^{(2)},$$

що й потрібно було довести. □

Формула стохастичного диференціалу добутку дозволяє одержати формулу диференціювання складної функції. Ця формула називається *формулою Іто*.

Теорема А.2.6. *Нехай процес X на відрізку $[a, b]$ має стохастичний диференціал $dX_t = \alpha_t\, dt + \beta_t\, dW_t$, а функція $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є двічі неперервно диференційованою. Тоді процес $Y_t = u(X_t)$ має стохастичний диференціал*

$$dY_t = \Big(u'(X_t)\alpha_t + \frac{1}{2}u''(X_t)\beta_t^2\Big)dt + u'(X_t)\beta_t\, dW_t. \qquad \text{(А.2.7)}$$

Доведення. Ми доведемо твердження теореми лише за припущення $\int_a^b \mathrm{E}[\beta_t^2]\,dt < \infty$, у загальному випадку доведення див. у [18]. Використавши твердження А.2.5, за індукцією легко одержати твердження теореми для функцій вигляду $u(x) = x^n$, а тому – для многочленів.

Нехай тепер маємо довільну функцію $u \in C^2(\mathbb{R})$. Позначимо

$$\alpha_t(u) = u'(X_t)\alpha_t + \frac{1}{2}u''(X_t)\beta_t^2,$$
$$\beta_t(u) = u'(X_t)\beta_t.$$

Для довільного $C > 0$ можна побудувати послідовність многочленів u_n, таку, що $u_n \rightrightarrows u$, $u_n' \rightrightarrows u'$, $u_n'' \rightrightarrows u''$ на $[-C, C]$. Позначимо $A_C = \{\sup_{[a,b]} |X_t| \le C\}$. Запишемо формулу Іто для u_n, домножимо на $\mathbb{1}_{A_C}$ та перейдемо до границі при $n \to \infty$ і одержимо

$$u(X_t)\mathbb{1}_{A_C} = u(X_a)\mathbb{1}_{A_C} + \int_a^t \big(\alpha_s(u)\,ds + \beta_s(u)\,dW_s\big)\mathbb{1}_{A_C}$$

майже напевно. Тоді

$$\mathrm{P}\left[u(X_t) \ne u(X_a) + \int_a^t \big(\alpha_s(u)\,dt + \beta_s(u)\,dW_s\big)\right] \le \mathrm{P}(\Omega \setminus A_C).$$

Можна записати $\mathrm{P}(\Omega \setminus A_C) \le \mathrm{P}(B_{1,C}) + \mathrm{P}(B_{2,C})$, де

$$B_{1,C} = \left\{\sup_{t\in[a,b]} \left(|X_a| + \int_a^t |\alpha_s|\,ds\right) > \frac{C}{2}\right\} = \left\{|X_a| + \int_a^b |\alpha_s|\,ds > \frac{C}{2}\right\},$$
$$B_{2,C} = \left\{\sup_{t\in[a,b]} \left|\int_a^t \beta_s dW_s\right| > \frac{C}{2}\right\}.$$

Оскільки випадкові величини X_a та $\int_a^b |\alpha_2|$ є м.н. скінченними, то $\mathrm{P}(B_{1,C}) \to 0$, $C \to \infty$. З іншого боку, за нерівністю Дуба $\mathrm{P}(B_{2,C}) \to 0$, $C \to \infty$, тому для кожного $t \in [a, b]$ майже напевно виконується

$$u(X_t) = u(X_a) + \int_a^t \big(\alpha_s(u)\,dt + \beta_s(u)\,dW_s,$$

що й потрібно було довести. $\square$

A.2.2 Стохастичні диференціальні рівняння

Звичайним одновимірним *стохастичним диференціальним рівнянням* (СДР) називається рівняння вигляду

$$dX_t = a(t, X_t)\, dt + b(t, X_t)\, dW_t, \;\; t \geq 0, \tag{A.2.8}$$

з невипадковою початковою умовою X_0. Тут a, b є певними вимірними функціями.

Означення A.2.7. (Сильним) розв'язком СДР (A.2.8) на $[0, T]$ називають такий $\mathfrak{F}$-узгоджений процес X, що $\int_0^T |a(s, X_s)|\, ds < \infty$ м.н., $\int_0^T \mathrm{E}[b^2(s, X_s)]\, ds < \infty$ та майже напевно для всіх $t \in [0, T]$ виконується

$$X_t = X_0 + \int_0^t \big(a(s, X_s)\, ds + b(s, X_s)\, dW_s\big). \tag{A.2.9}$$

Рівняння (A.2.9) часто також називають стохастичним диференціальним рівнянням, або СДР в інтегральній формі.

Найпростіші умови існування і єдиності розв'язку наведено у наступній теоремі. У ній і далі символом C буде позначатися стала, значення якої може змінюватися від рядку до рядку і може залежати лише від коефіцієнтів a, b та початкової умови X_0.

Теорема A.2.8. *Нехай коефіцієнти рівняння* (A.2.8) *для всіх* $t \in [0, T]$, $x, y \in \mathbb{R}$ *задовольняють умови*

$$|a(t,x)| + |b(t,x)| \leq C(1 + |x|),$$
$$|a(t,x) - a(t,y)| + |b(t,x) - b(t,y)| \leq C\, |x - y|\, .$$

Тоді це рівняння має єдиний розв'язок.

Доведення. Доведення проводиться аналогічно тому, як це робиться для звичайних диференціальних рівнянь. Для додатного K визначимо наступну норму на $L^2_T := L^2([0, T] \times \Omega)$:

$$\|X\|_K^2 = \int_0^T e^{-Kt}\mathrm{E}[(X_t)^2]\, dt.$$

Зрозуміло, що ця норма еквівалентна до природної норми, тобто норми $\|\cdot\|_0$, на цьому просторі. Розглянемо оператор $F : L_T^2 \to L_T^2$ який процесу X ставить у відповідність процес

$$X_0 + \int_0^t a(s, X_s)\, ds + \int_0^t b(s, X_s)\, dW_s.$$

Маємо

$$\begin{aligned}
\|F(X) - F(Y)\|_K^2 = \int_0^T e^{-Kt}\mathrm{E}\Bigg[\Bigg(\int_0^t \big(a(s, X_s) - a(s, Y_s)\big)\, ds + \\
+ \int_0^t \big(b(s, X_s) - b(s, Y_s)\big)\, dW_s\Bigg)^2\Bigg] dt \le \\
\le 2\int_0^T e^{-Kt}\Bigg(t\int_0^t \mathrm{E}\big[|a(s, X_s) - a(s, Y_s)|^2\big]\, ds + \\
+ \mathrm{E}\Bigg[\Bigg(\int_0^t \big(b(s, X_s) - b(u, Y_s)\big) dW_s\Bigg)^2\Bigg]\Bigg) dt \le \\
\le C\int_0^T e^{-Kt}\Bigg(\int_0^t \{T\mathrm{E}\big[|X_s - Y_s|^2\big] + \mathrm{E}\big[|b(s, X_s) - b(s, Y_s)|^2\big]\} ds\Bigg) dt \le \\
\le C(T+1)\int_0^T e^{-Kt}\int_0^t \mathrm{E}\big[|X_s - Y_s|^2\big]\, ds\, dt = \\
= \frac{C(T+1)}{K}\int_0^T \big(e^{-Kt} - e^{-KT}\big)\mathrm{E}\big[|X_s - Y_s|^2\big] ds \le \\
\le \frac{C(T+1)}{K}\,\|X - Y\|_K^2 .
\end{aligned}$$

Тоді оператор F є стискуючим у просторі L_T^2 з нормою $\|\cdot\|_K$ при $K > C(T+1)$, тому існує єдиний елемент цього простору, для якого $F(X) = X$, що й потрібно було довести. □

Часто процес, який є розв'язком рівняння (A.2.8), називають *дифузійним процесом* зі коефіцієнтами переносу a та дифузії b. Зауважимо, що цей процес має марківську властивість, а якщо коефіцієнти a, b не залежать від t, то він є однорідним процесом Маркова.

A.2.3 Зв'язок з рівняннями математичної фізики

Формула Фейнмана–Каца пов'язує розв'язок стохастичного диференціального рівняння з розв'язком певного рівняння у частинних похідних. Для виведення цього рівняння нам знадобляться допоміжні позначення. Припустимо, що коефіцієнти рівняння (A.2.8) задовольняють умови теореми A.2.8 і не залежать від t. Через P_x позначимо розподіл розв'язку цього рівняння з початковою умовою $X_0 = x$, через E_x – відповідне математичне сподівання.

Для функції $f \in C^2(\mathbb{R})$, яка обмежена разом з похідними, ми можемо розписати $f(X_t) - f(X_0)$ за формулою Іто і взяти математичне сподівання від обох частин, при цьому стохастичний інтеграл зникне:

$$\mathrm{E}_x[f(X_t)] = f(x) + \int_0^t \mathrm{E}_x[Af(X_s)]\,ds, \tag{A.2.10}$$

де оператор A, *генератор* дифузійного процесу X, визначається як

$$Af(x) = a(x)\frac{\partial}{\partial x}f(x) + \frac{1}{2}b^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x).$$

(Формула (A.2.10) є частковим випадком відомої формули Динкіна.) Покладаючи

$$u(t,x) = \mathrm{E}_x[f(X_t)],$$

маємо з рівняння (A.2.10)

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \mathrm{E}_x[Af(X_s)].$$

Виявляється, що в останній рівності можна "винести" оператор A за знак математичного сподівання. Справді, якщо для фіксованого t покласти $g(x) = u(t,x)$, то, як відомо з теорії дифузійних процесів (див. [18]),

$$Ag(x) = \lim_{s\to 0+}\frac{1}{s}\big(\mathrm{E}_x[g(X_s)] - g(x)\big). \tag{A.2.11}$$

Але

$$\mathrm{E}_x[g(X_s)] = \mathrm{E}_x[\mathrm{E}_y[f(X_t)]|_{y=X_s}] =$$
$$= \mathrm{E}_x[\mathrm{E}[f(X_{t+s})|\mathcal{F}_s]] = \mathrm{E}_x[f(X_{t+s}] = u(t+s,x)$$

за марківською властивістю та однорідністю. Підставивши це у (A.2.11), маємо

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = Au(t,x). \tag{A.2.12}$$

Рівняння (A.2.12) є рівнянням у частинних похідних параболічного типу. Разом з початковою умовою $u(0,x) = f(x)$ воно називається *зворотним рівнянням Колмогорова*. Незначно змінивши міркування, можна одержати певне узагальнення цього твердження. А саме, для обмеженої функції $q \in C(\mathbb{R})$ визначимо

$$v(t,x) = \mathrm{E}_x\left[\exp\left\{-\int_0^t q(X_s)\,ds\right\} f(X_t)\right]. \tag{A.2.13}$$

Позначимо $Q_t = \exp\left\{-\int_0^t q(X_s)\,ds\right\}$ і знов скористаємося формулою для генератора дифузійного процеса:

$$Av(t,x) = \lim_{s\to 0+}\frac{1}{s}\Big(\mathrm{E}_x[v(t,X_s)] - v(t,x)\Big).$$

Як і вище, перетворимо

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_x[v(t,X_s)] &= \mathrm{E}_x[\mathrm{E}_y[Q_t f(X_t)]|_{y=X_s}] =\\ &= \mathrm{E}_x\left[\mathrm{E}\left[\exp\left\{-\int_s^{t+s} q(X_u)\,du\right\} f(X_{t+s})\middle|\mathcal{F}_s\right]\right] =\\ &= \mathrm{E}_x\left[\exp\left\{\int_0^s q(X_u)\,du\right\} Q_{t+s} f(X_{t+s})\right]\Bigg] =\\ &= v(t+s,x) + \mathrm{E}_x\left[\left(\exp\left\{\int_0^s q(X_u)\,du\right\} - 1\right)Q_{t+s}f(X_{t+s})\right]\end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}Av(t,x) &= \frac{\partial}{\partial t}v(t,x) +\\ &+ \lim_{s\to 0+}\mathrm{E}_x\left[\frac{1}{s}\left(\exp\left\{\int_0^s q(X_u)\,du\right\} - 1\right)Q_{t+s}f(X_{t+s})\right].\end{aligned}$$

Оскільки функції f та q обмежені, то в останній рівності можна перейти до границі під знаком математичного сподівання і одержати

$$\frac{\partial}{\partial t}v(t,x) = Av(t,x) - q(x)v(t,x). \tag{A.2.14}$$

Як і вище, маємо рівняння параболічного типу. Це рівняння з початковою умовою $v(0,x) = f(x)$ має єдиний розв'язок в класі обмежених на кожній множині вигляду $[0,T] \times \mathbb{R}$ функцій, і цей розв'язок задається рівністю (A.2.13), яка називається *формулою Фейнмана-Каца* для розв'язку рівняння теплопровідності (A.2.14).

A.2.4 Теорема Гірсанова

Теорема (або формула) Гірсанова є фундаментальною фактом стохастичного аналізу: вона дозволяє визначити похідну Радона–Нікодима при простих перетвореннях випадкових процесів. Нам знадобиться наступна *характеризація Леві* вінерівського процесу, доведення якої зацікавлений читач може знайти у [18].

Теорема A.2.9. *Неперервний випадковий процес W є $\mathfrak{F}$-вінерівським процесом тоді і лише тоді, коли обидва процеси W_t та $W_t^2 - t$ є $\mathfrak{F}$-мартингалами.*

Нехай $\theta_t, t \geq 0$ – такий $\mathfrak{F}$-узгоджений процес, що $\int_0^T \theta_s^2\, ds < \infty$ майже напевно. Визначимо вінерівський процес із зсувом θ як

$$\widetilde{W}_t = W_t - \int_0^t \theta_s\, dW_s \tag{A.2.15}$$

Визначимо *стохастичну експоненту*, або *експоненту Долеан*, процесу a рівністю

$$\mathcal{E}_t(\theta) = \exp\left\{-\int_0^t \theta_s\, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2\, ds\right\}.$$

З формули Іто випливає, що

$$d\mathcal{E}_t(\theta) = -\theta_t \mathcal{E}_t(\theta) dW_t.$$

Тому, якщо, наприклад, процес θ є обмеженим, то його стохастична експонента $\mathcal{E}_t(\theta)$ є мартингалом (слабші умови наведено далі). Тому для таких процесів виконується

$$\mathrm{E}\left[\exp\left\{-\int_s^t \theta_u\, dW_u - \frac{1}{2}\int_s^t \theta_u^2\, du\right\}\right] = 1.$$

Якщо процес θ_u не є обмеженим, ми можемо наблизити його обмеженими так, щоб виконувалося (A.2.4), тоді з леми Фату одержимо

$$\mathrm{E}\left[\exp\left\{-\int_s^t \theta_u\, dW_u - \frac{1}{2}\int_s^t \theta_u^2\, du\right\}\right] \le 1.$$

Звідси, зокрема, випливає, що стохастична експонента $\mathcal{E}_t(\theta)$ завжди є супермартингалом. Тому для того, щоб стохастична експонента була мартингалом на $[0, T]$, необхідно і достатньо виконання умови

$$\mathrm{E}[\mathcal{E}_T(\theta)] = 1. \tag{A.2.16}$$

Достатніми умовами для цього є умова Новікова

$$\mathrm{E}\left[\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2\, ds\right\}\right] < \infty \tag{A.2.17}$$

та слабша за неї умова Казамакі: для всіх $t \in [0, T]$

$$\mathrm{E}\left[\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^t \theta_s\, dW_s\right\}\right] < \infty. \tag{A.2.18}$$

Теорема A.2.10. *Нехай стохастична експонента процесу a задовольняє умову Тоді процес $\widetilde{W}$, визначений формулою* (A.2.15)*, є вінерівським на $[0, T]$ відносно міри P_θ з похідною Радона–Нікодима*

$$\frac{dP_\theta}{dP} = \mathcal{E}_T(a).$$

Доведення. Ми доведемо це твердження за припущення, що умову Новікова (A.2.17) виконано, загальне доведення можна знайти у [18]. Скористаємося характеризацією Леві: доведемо, що

$\widetilde{W}$ та $\widetilde{W}_t^2 - t$ є P_θ-мартингалами. Позначимо $Y_t = \widetilde{W}_t \mathcal{E}_t(\theta)$ і за формулою для диференціалу добутку одержимо

$$dY_t = \big(\theta_t \mathcal{E}_t(\theta) - \theta_t \mathcal{E}_t(\theta)\big)\, dt + \big(\mathcal{E}_t(\theta) - \widetilde{W}_t \theta_t \mathcal{E}_t(\theta)\big)\, dW_t = \\ = (1 - \widetilde{W}_t \theta_t)\mathcal{E}_t(\theta) dW_t.$$

Тому, завдяки квадратичній інтегровності процесу $(1 - Y_t\theta_t)\mathcal{E}_t(\theta)$, Y_t є мартингалом. За формулою для умовного математичного сподівання для $t > s$

$$\mathrm{E}_\theta[\widetilde{W}_t | \mathcal{F}_s] = \frac{\mathrm{E}[P_\theta W_t | \mathcal{F}_s]}{\mathrm{E}[P_\theta | \mathcal{F}_s]} = \frac{\mathrm{E}[\mathrm{E}[\mathcal{E}_T(\theta) | \mathcal{F}_t] W_t | \mathcal{F}_s]}{\mathrm{E}[\mathcal{E}_T(\theta) | \mathcal{F}_s]} = \\ = \frac{\mathrm{E}[Y_t | \mathcal{F}_s]}{\mathcal{E}_s(\theta)} = \frac{Y_s}{\mathcal{E}_s(\theta)} = \widetilde{W}_s.$$

Доведення того, що $W_t^2 - t$ є мартингалом відносно P_θ, повністю аналогічне. $\square$

A.3 Мартингальне зображення

Однією з найважливіших властивостей стохастичного інтегралу, яка знаходить багато застосувань, є мартингальна властивість. Теорема про мартингальне зображення у певному сенсі є оберненим твердженням.

Конкретніше, нехай фільтрація $\mathfrak{F}$ породжена процесом W. Теорема про мартингальне зображення стверджує, що для будь-якого квадратичного інтегровного $\mathfrak{F}$-мартингалу X на $[0, T]$ існує квадратично інтегровний $\mathfrak{F}$-узгоджений процес ξ (множину таких процесів позначатимемо $L_a^2([0, T])$, такий, що для всіх $t \in [0, T]$

$$X_t = X_0 + \int_0^t \xi_s \, dW_s. \tag{A.3.1}$$

Два мартингали співпадають тоді й лише тоді, коли співпадають їхні фінальні значення. Тому для доведення (A.3.1) достатньо лише показати, що

$$X_T = \mathrm{E}[X_T] + \int_0^T \xi_s \, dW_s.$$

Якщо забути про те, що X_T є фінальним значенням мартингалу, можно сформулювати таке твердження, яке називається *теоремою про зображення Іто*.

Теорема А.3.1. *Нехай $F \in L^2(\mathcal{F}_T)$. Тоді існує єдиний (з точністю до еквівалентності) процес $\xi \in L_a^2([0,T])$, такий, що має місце зображення Іто*

$$F = \mathrm{E}[F] + \int_0^T \xi_s \, dW_s \tag{A.3.2}$$

майже напевно.

Доведення. Почнемо з єдиності. Якщо для однієї випадкової величини F існують два процеси $\xi^{(i)} \in L_a^2([0,T])$, $i = 1, 2$, для яких виконується (А.3.2). Віднімемо ці рівності, піднесемо до квадрату, візьмемо математичне сподівання й одержимо

$$\int_0^T \mathrm{E}[|\xi_t^{(1)} - \xi_t^{(2)}|^2] \, dt = 0,$$

звідки маємо, що процеси $\xi^{(i)}$, $i = 1, 2$, еквівалентні.

Тепер доведемо існування. Розглянемо множину E випадкових величин вигляду

$$\mathrm{E}_h = \exp\left\{ \int_0^T h(t) \, dW_t - \frac{1}{2} \int_0^T h^2(t) \, dt \right\},$$

де невипадкова функція $h \in L^2([0,T])$. Кожна з таких величин має зображення Іто:

$$\mathrm{E}_h = 1 + \int_0^T h(t) \, dW_t.$$

Зрозуміло, що тоді й будь-яка лінійна комбінація таких величин має зображення Іто. Ми хочемо довести, що лінійна оболонка множини E є скрізь щільною в $L^2(\mathcal{F}_T)$.

Спочатку помітимо, що множина випадкових величин вигляду $f(W_{t_1}, W_{t_2}, \ldots, W_{t_k})$, де f – обмежена вимірна функція, а $t_1 < t_2 < \cdots < t_k$ – розбиття відрізку $[0,T]$, є скрізь щільною у $L^2([0,T])$. Дійсно, розглянемо зростаючу послідовність $\{\Pi^{(n)}\}$ розбиттів відрізку $[0,T]$, діаметр яких прямує до нуля, і позначимо $\mathcal{F}^{(n)}$ σ-алгебру, породжену приростами вінерівського процесу на $\Pi^{(n)}$.

Оскільки вінерівський процес є неперервним, то найменша σ-алгебра, що містить всі $\mathcal{F}^{(n)}$, співпадає з $\mathcal{F}_T$. Тоді за теоремою про збіжність мартингалу (див. [18]) для $F \in L^\infty(\mathcal{F}_T)$ маємо $\mathrm{E}[F|\mathcal{F}^{(n)}] \to \mathrm{E}[F|\mathcal{F}_T] = F$, $n \to \infty$ майже напевно, а тому і в $L^2(\mathcal{F}_T)$ завдяки обмеженості. Але, як відомо, $\mathrm{E}[F|\mathcal{F}^{(n)}]$ є вимірною функцією від W_t, $t \in \Pi^{(n)}$, причому цю функцію можна взяти обмеженою, тому що $\mathrm{E}[\mathcal{F}|\mathcal{F}^{(n)}]$ є обмеженою. Залишилося помітити, що множина обмежених випадкових величин $L^\infty(\mathcal{F}_T)$ скрізь щільна в $L^2(\mathcal{F}_T)$.

Далі, кожну випадкову величину вигляду $f(W_{t_1}, \ldots, W_{t_k})$, де f – обмежена вимірна функція, можна наблизити у середньому квадратичному лінійними комбінаціями величин вигляду

$$\exp\left\{a_1 W_{t_1} + \cdots + a_k W_{t_k}\right\}. \tag{A.3.3}$$

Справді, це те саме, що наблизити функцію f експоненційними поліномами у $L^2(\mathbb{R}^k, N_k)$, де N_k – певна гаусова міра, а це є стандартним твердженням з функціонального аналізу. Залишилося зауважити, що величина вигляду (A.3.3) – це, з точністю до сталої, E_h для певної кусково сталої h.

Отже, для будь-якої $F \in L^2(\mathcal{F}_T)$ існує послідовність $F^{(n)}$ величин з лінійної оболонки E, така, що $\mathrm{E}[|F^{(n)} - F|^2] \to 0$, $n \to \infty$. Маємо $\mathrm{E}[F^{(n)}] \to \mathrm{E}[f]$, $n \to \infty$, тому й $F^{(n)} - \mathrm{E}[F^{(n)}] + \mathrm{E}[F] \to F$, $n \to \infty$, у середньому квадратичному. Тому ми будемо без обмеження загальності вважати, що $\mathrm{E}[F^{(n)}] = \mathrm{E}[F]$. Ми знаємо, що кожна $F^{(n)}$ має зображення Іто:

$$F^{(n)} = \mathrm{E}[F] + \int_0^T \xi_t^{(n)}\, dW_t.$$

Оскільки

$$\mathrm{E}[|F^{(m)} - F^{(n)}|^2] = \int_0^T \mathrm{E}[|\xi_t^{(m)} - \xi_t^{(n)}|^2]dt,$$

то послідовність $\xi^{(n)}$ є фундаменальною у $L_a^2([0,T])$, а отже, й збіжною до деякого ξ. Тоді з неперевності стохастичного інтегралу у L_a^2 випливає (A.3.2). □

Як наслідок з теореми про зображення Іто, одержуємо теорему про мартингальне зображення.

Теорема A.3.2. *Нехай M_t є квадратично інтегровним $\mathfrak{F}$-мартингалом на* $[0, T]$. *Тоді існує єдиний, з точністю до еквівалентності, процес $\xi \in L^2_a([0, T]$, такий, що для всіх $t \in [0, T]$*

$$M_t = M_0 + \int_0^t \xi_s \, dW_s \tag{A.3.4}$$

майже напевно.

Доведення. Записавши зображення Іто для M_T і взявши математичне сподівання за умовою $\mathcal{F}_t$, маємо бажане твердження. □

A.3.1 Стохастична похідна

Теорема про зображення Іто стверджує лише існування процесу ξ, але не відповідає на головне запитання – як шукати такий процес. Тут у нагоді стає поняття стохастичної похідної. Ми дамо лише визначення, доведення усіх фактів зацікавлений читач може знайти у [59].

Гладенькими назвемо $\mathcal{F}_T$-вимірні величини вигляду $F = f(W_{t_1}, \ldots, W_{t_k})$, де $t_i \in [0, T]$, $1 \le i \le k$, $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$ (нескінченно неперервно диференційована з обмеженим носієм). *Стохастичною похідною* величини F назвемо випадковий процес вигляду

$$D_t F = \sum_{i=1}^{k} f_i'(W_{t_1}, \ldots, W_{t_k}) \mathbb{1}_{[0,t_i]}(t).$$

Визначимо норму Соболєва

$$\|F\|_{\mathbb{D}}^2 = \mathrm{E}[F^2] + \int_0^T \mathrm{E}[(D_t F)^2] \, dt.$$

Простір $\mathbb{D}$ випадкових величин визначимо як поповнення простору гладеньких величин за нормою $\|\cdot\|_{\mathbb{D}}$. Оператор D допускає замикання, тому він коректно продовжується на простір $\mathbb{D}$.

Стохастична похідна має такі самі властивості, як і звичайна:

- лінійність: $D_t(\alpha F + \beta G) = \alpha \, D_t F + \beta \, D_t G$;
- похідна добутку: $D_t(FG) = F \, D_t G + G \, D_t F$;

- диференціювання складної функції:

$$D_t f(F_1, \ldots, F_k) = \sum_{i=1}^{k} f_i'(F_1, \ldots, F_k) D_t F_k.$$

Однією з найважливіших властивостей стохастичної похідної є наступна теорема Кларка-Окона-Хаусмана, яка дає формулу для процесу ξ у зображенні Іто в термінах стохастичної похідної.

Теорема А.3.3. *Нехай $F \in \mathbb{D}$. Тоді*

$$F = \mathrm{E}[F] + \int_0^T \mathrm{E}[D_t F | \mathcal{F}_t] \, dW_t \tag{А.3.5}$$

майже напевно.

Доведення. Формулу (А.3.5) легко одержати з означення для випадкових величин вигляду

$$\exp\{a_1 W_{t_1} + \ldots a_n W_{t_n}\}.$$

Після цього, як в теоремі про зображення Іто, лінійними комбінаціями таких величин наближуємо величину F в середньому квадратичному: $F^{(n)} \to F$, при цьому $D_t F^{(n)}$ збігаються у середньому квадратичному до ξ, процесу у зображенні F. Зі замкненості стохастичної похідної і неперервності умовних математичних сподівань у середньому квадратичному одержимо формулу (А.3.5). □

З теореми Кларка-Окона-Хаусмана та властивостей інтегралу Іто можна легко одержати наступну формулу, так звану стохастичну формулу інтегрування частинами.

Теорема А.3.4. *Нехай $X \in L_a^2([0,T])$, $F \in \mathbb{D}$. Тоді*

$$\mathrm{E}\left[F \int_0^T X_t \, dW_t\right] = \int_0^T \mathrm{E}[(D_t F) X_t] \, dt. \tag{А.3.6}$$

Формула (А.3.6) дозволяє узагальнити поняття стохастичного інтегралу, визначивши його для процесів, які не є узгодженими. Таке узагальнення називається *інтегралом Скорохода*. Детальніше про нього можна прочитати у [59].

Додаток В
Таблиці

В.1 Ануїтетні таблиці

У таблицях В.1–В.3 наведено значення степенів ν^n дисконтного множника. Оскільки ці значення додатні й менші за 1, наведено тільки цифри після коми. Значення ν^n для даної відсоткової ставки i знаходиться на перетині рядку, який починається значенням i (у відсотках) та стовпчику, вгорі якого значення n. Наприклад, з таблиці В.2 знаходимо, що $\nu^{20} = 0{,}41199$ для $i = 3$ %. У таблиці В.3 для зручності наведено значення, що відповідають цілому числу місяців.

Якщо для даного значення степеня в таблиці немає інформації, можна скористатися властивістю показникової функції: $\nu^{m+n} = \nu^m \nu^n$.

Таблиці В.4, В.5 дають значення сталого ануїтету із заборгованістю. Використовувати їх слід так само, як і таблиці В.1–В.3. Якщо для даного терміну в таблиці немає інформації, можна скористатися ануїтетним рівнянням: $a_{\overline{m+n}|} = a_{\overline{m}|} + \nu^m a_{\overline{n}|}$ або формулою $a_{\overline{n}|} = (1 - \nu^n)/i$.

Таблиця В.6 для даного значення річної ефективної ставки i дає значення дисконтного множника, найбільш уживаних номінальних та дисконтних ставок та інтенсивності відсотка. Таблиця В.7, навпаки, дозволяє за даним значенням номінальної або дисконтної ставки чи інтенсивності відсотка визначити річну ефективну відсоткову ставку. Шукане значення річної ефективної відсоткової ставки знаходиться у рядку, що відповідає даному значенню номінальної (дисконтної) ставки або інтенсивності відсотка, і стовпчика, що відповідає даній ставці.

	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	,96098	,95147	,94205	,93272	,92348	,91434	,90529	,89632	,88745
1,5	,98579	,92826	,91454	,90103	,88771	,87459	,86167	,84893	,83639
2	,98067	,90573	,88797	,87056	,85349	,83676	,82035	,80426	,78849
2,5	,97608	,88385	,86230	,84127	,82075	,80073	,78120	,76214	,74356
3	,97156	,86261	,83748	,81309	,78941	,76642	,74409	,72242	,70138
3,5	,96713	,84197	,81350	,78599	,75941	,73373	,70892	,68495	,66178
4	,96278	,82193	,79031	,75992	,73069	,70259	,67556	,64958	,62460
4,25	,96072	,81212	,77901	,74725	,71679	,68757	,65954	,63265	,60686
4,5	,95859	,80245	,76790	,73483	,70319	,67290	,64393	,61620	,58966
4,75	,95649	,79292	,75697	,72264	,68987	,65859	,62872	,60021	,57300
5	,95440	,78353	,74622	,71068	,67684	,64461	,61391	,58468	,55684
5,25	,95234	,77426	,73564	,69895	,66408	,63096	,59949	,56958	,54117
5,5	,95029	,76513	,72525	,68744	,65160	,61763	,58543	,55491	,52598
5,75	,94826	,75613	,71502	,67614	,63938	,60461	,57174	,54065	,51125
6	,94624	,74726	,70496	,66506	,62741	,59190	,55839	,52679	,49697
6,25	,94425	,73851	,69507	,65418	,61570	,57948	,54539	,51331	,48312
6,5	,94227	,72988	,68533	,64351	,60423	,56735	,53273	,50021	,46968
6,75	,94031	,72137	,67576	,63303	,59300	,55551	,52038	,48748	,45665
7	,93836	,71299	,66634	,62275	,58201	,54393	,50835	,47509	,44401
7,25	,93643	,70471	,65708	,61266	,57124	,53263	,49662	,46305	,43175
7,5	,93452	,69656	,64796	,60275	,56070	,52158	,48519	,45134	,41985
7,75	,93262	,68852	,63899	,59303	,55038	,51079	,47405	,43996	,40831
8	,93074	,68058	,63017	,58349	,54027	,50025	,46319	,42888	,39711
8,25	,92887	,67276	,62149	,57412	,53037	,48995	,45261	,41811	,38625
8,5	,92702	,66505	,61295	,56493	,52067	,47988	,44229	,40764	,37570
8,75	,92519	,65744	,60454	,55590	,51117	,47004	,43222	,39745	,36547
9	,92337	,64993	,59627	,54703	,50187	,46043	,42241	,38753	,35553
9,5	,91962	,63523	,58012	,52979	,48382	,44185	,40351	,36851	,33654
10	,91608	,62092	,56447	,51316	,46651	,42410	,38554	,35049	,31863
10,5	,91259	,60700	,54932	,49712	,44989	,40714	,36845	,33344	,30175
11	,90916	,59345	,53464	,48166	,43393	,39092	,35218	,31728	,28584
11,5	,90577	,58026	,52042	,46674	,41860	,37543	,33671	,30198	,27083
12	,90244	,56743	,50663	,45235	,40388	,36061	,32197	,28748	,25668
12,5	,89916	,55493	,49327	,43846	,38974	,34644	,30795	,27373	,24332
13	,89593	,54276	,48032	,42506	,37616	,33288	,29459	,26070	,23071
14	,88924	,51937	,45559	,39964	,35056	,30751	,26974	,23662	,20756
15	,88313	,49718	,43233	,37594	,32690	,28426	,24718	,21494	,18691
16	,87715	,47611	,41044	,35383	,30503	,26295	,22668	,19542	,16846
18	,86487	,43711	,37043	,31393	,26604	,22546	,19106	,16192	,13722
20	,85412	,40188	,33490	,27908	,23257	,19381	,16151	,13459	,11216

Табл. В.1: Таблиця значень ν^n для $n = 4, 5, \ldots, 12$.

	13	14	15	17	20	25	30	35	40
1	,87866	,86996	,86135	,84438	,81954	,77977	,74192	,70591	,67165
1,5	,82403	,81185	,79985	,77639	,74247	,68921	,63976	,59387	,55126
2	,77303	,75788	,74301	,71416	,67297	,60953	,55207	,50003	,45289
2,5	,72542	,70773	,69047	,65720	,61027	,53939	,47674	,42137	,37243
3	,68095	,66112	,64186	,60502	,55368	,47761	,41199	,35538	,30656
3,5	,63940	,61778	,59689	,55720	,50257	,42315	,35628	,29998	,25257
4	,60057	,57748	,55526	,51337	,45639	,37512	,30832	,25342	,20829
4,25	,58212	,55839	,53562	,49284	,43499	,35326	,28689	,23299	,18922
4,5	,56427	,53997	,51672	,47318	,41464	,33273	,26700	,21425	,17193
4,75	,54701	,52221	,49853	,45434	,39529	,31344	,24853	,19706	,15626
5	,53032	,50507	,48102	,43630	,37689	,29530	,23138	,18129	,14205
5,25	,51418	,48853	,46416	,41901	,35938	,27826	,21545	,16681	,12916
5,5	,49856	,47257	,44793	,40245	,34273	,26223	,20064	,15352	,11746
5,75	,48345	,45717	,43231	,38657	,32688	,24717	,18689	,14131	,10685
6	,46884	,44230	,41727	,37136	,31180	,23300	,17411	,13011	,09722
6,25	,45470	,42795	,40278	,35679	,29745	,21967	,16223	,11981	,08848
6,5	,44102	,41410	,38883	,34281	,28380	,20714	,15119	,11035	,08054
6,75	,42778	,40073	,37539	,32942	,27080	,19535	,14092	,10165	,07333
7	,41496	,38782	,36245	,31657	,25842	,18425	,13137	,09366	,06678
7,25	,40256	,37535	,34998	,30426	,24663	,17381	,12248	,08632	,06083
7,5	,39056	,36331	,33797	,29245	,23541	,16398	,11422	,07956	,05542
7,75	,37894	,35169	,32639	,28113	,22473	,15473	,10653	,07335	,05050
8	,36770	,34046	,31524	,27027	,21455	,14602	,09938	,06763	,04603
8,25	,35681	,32962	,30450	,25985	,20485	,13782	,09272	,06238	,04196
8,5	,34627	,31914	,29414	,24986	,19562	,13009	,08652	,05754	,03827
8,75	,33606	,30902	,28416	,24027	,18682	,12282	,08075	,05309	,03490
9	,32618	,29925	,27454	,23107	,17843	,11597	,07537	,04899	,03184
9,5	,30734	,28067	,25632	,21378	,16282	,10343	,06570	,04174	,02651
10	,28966	,26333	,23939	,19784	,14864	,09230	,05731	,03558	,02209
10,5	,27308	,24713	,22365	,18316	,13575	,08240	,05002	,03036	,01843
11	,25751	,23199	,20900	,16963	,12403	,07361	,04368	,02592	,01538
11,5	,24290	,21785	,19538	,15715	,11337	,06579	,03817	,02215	,01285
12	,22917	,20462	,18270	,14564	,10367	,05882	,03338	,01894	,01075
12,5	,21628	,19225	,17089	,13502	,09483	,05262	,02920	,01621	,00899
13	,20416	,18068	,15989	,12522	,08678	,04710	,02557	,01388	,00753
14	,18207	,15971	,14010	,10780	,07276	,03779	,01963	,01019	,00529
15	,16253	,14133	,12289	,09293	,06110	,03038	,01510	,00751	,00373
16	,14523	,12520	,10793	,08021	,05139	,02447	,01165	,00555	,00264
18	,11629	,09855	,08352	,05998	,03651	,01596	,00697	,00305	,00133
20	,09346	,07789	,06491	,04507	,02608	,01048	,00421	,00169	,00068

Табл. В.2: Таблиця значень ν^n для $n = 13, 14, \ldots, 40$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	,9992	,9983	,9975	,9967	,9959	,9950	,9942	,9934	,9926	,9917	,9909
1,5	,9988	,9975	,9963	,9950	,9938	,9926	,9914	,9901	,9889	,9877	,9864
2	,9984	,9967	,9951	,9934	,9918	,9901	,9885	,9869	,9853	,9836	,9820
2,5	,9979	,9959	,9938	,9918	,9898	,9877	,9857	,9837	,9817	,9796	,9776
3	,9975	,9951	,9926	,9902	,9878	,9853	,9829	,9805	,9781	,9757	,9733
3,5	,9971	,9943	,9914	,9886	,9858	,9829	,9801	,9773	,9745	,9717	,9690
4	,9967	,9935	,9902	,9870	,9838	,9806	,9774	,9742	,9710	,9678	,9647
4,25	,9965	,9931	,9896	,9862	,9828	,9794	,9760	,9726	,9693	,9659	,9626
4,5	,9963	,9927	,9891	,9854	,9818	,9782	,9747	,9711	,9675	,9640	,9605
4,75	,9961	,9923	,9885	,9847	,9808	,9771	,9733	,9695	,9658	,9621	,9584
5	,9959	,9919	,9879	,9839	,9799	,9759	,9719	,9680	,9641	,9602	,9563
5,25	,9957	,9915	,9873	,9831	,9789	,9747	,9706	,9665	,9624	,9583	,9542
5,5	,9955	,9911	,9867	,9823	,9779	,9736	,9693	,9649	,9606	,9564	,9521
5,75	,9954	,9907	,9861	,9815	,9770	,9724	,9679	,9634	,9589	,9545	,9500
6	,9952	,9903	,9855	,9808	,9760	,9713	,9666	,9619	,9572	,9526	,9480
6,25	,9950	,9899	,9850	,9800	,9751	,9701	,9653	,9604	,9555	,9507	,9459
6,5	,9948	,9896	,9844	,9792	,9741	,9690	,9639	,9589	,9539	,9489	,9439
6,75	,9946	,9892	,9838	,9785	,9732	,9679	,9626	,9574	,9522	,9470	,9419
7	,9944	,9888	,9832	,9777	,9722	,9667	,9613	,9559	,9505	,9452	,9399
7,25	,9942	,9884	,9827	,9769	,9713	,9656	,9600	,9544	,9489	,9433	,9379
7,5	,9940	,9880	,9821	,9762	,9703	,9645	,9587	,9529	,9472	,9415	,9359
7,75	,9938	,9876	,9815	,9754	,9694	,9634	,9574	,9515	,9456	,9397	,9339
8	,9936	,9873	,9809	,9747	,9684	,9623	,9561	,9500	,9439	,9379	,9319
8,25	,9934	,9869	,9804	,9739	,9675	,9611	,9548	,9485	,9423	,9361	,9299
8,5	,9932	,9865	,9798	,9732	,9666	,9600	,9535	,9471	,9406	,9343	,9279
8,75	,9930	,9861	,9792	,9724	,9657	,9589	,9522	,9456	,9390	,9325	,9260
9	,9928	,9857	,9787	,9717	,9647	,9578	,9510	,9442	,9374	,9307	,9240
9,5	,9925	,9850	,9776	,9702	,9629	,9556	,9484	,9413	,9342	,9272	,9202
10	,9921	,9842	,9765	,9687	,9611	,9535	,9459	,9384	,9310	,9236	,9163
10,5	,9917	,9835	,9753	,9673	,9593	,9513	,9434	,9356	,9279	,9202	,9125
11	,9913	,9828	,9742	,9658	,9574	,9492	,9409	,9328	,9247	,9167	,9088
11,5	,9910	,9820	,9732	,9644	,9557	,9470	,9385	,9300	,9216	,9133	,9050
12	,9906	,9813	,9721	,9629	,9539	,9449	,9360	,9272	,9185	,9099	,9013
12,5	,9902	,9806	,9710	,9615	,9521	,9428	,9336	,9245	,9155	,9065	,8977
13	,9899	,9798	,9699	,9601	,9504	,9407	,9312	,9218	,9124	,9032	,8940
14	,9891	,9784	,9678	,9573	,9469	,9366	,9264	,9164	,9064	,8966	,8868
15	,9884	,9770	,9657	,9545	,9434	,9325	,9217	,9110	,9005	,8901	,8798
16	,9877	,9756	,9636	,9517	,9400	,9285	,9171	,9058	,8947	,8837	,8728
18	,9863	,9728	,9595	,9463	,9334	,9206	,9080	,8955	,8833	,8712	,8592
20	,9849	,9701	,9554	,9410	,9268	,9129	,8991	,8855	,8722	,8590	,8461

Табл. B.3: Таблиця значень $\nu^{k/12}$ для $k = 1, 2, \ldots, 11$.

	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	3,9020	4,8534	5,7955	6,7282	7,6517	8,5660	9,4713	10,368	11,255
1,5	3,8544	4,7826	5,6972	6,5982	7,4859	8,3605	9,2222	10,071	10,908
2	3,8077	4,7135	5,6014	6,4720	7,3255	8,1622	8,9826	9,7868	10,575
2,5	3,7620	4,6458	5,5081	6,3494	7,1701	7,9709	8,7521	9,5142	10,258
3	3,7171	4,5797	5,4172	6,2303	7,0197	7,7861	8,5302	9,2526	9,9540
3,5	3,6731	4,5151	5,3286	6,1145	6,8740	7,6077	8,3166	9,0016	9,6633
4	3,6299	4,4518	5,2421	6,0021	6,7327	7,4353	8,1109	8,7605	9,3851
4,25	3,6086	4,4207	5,1997	5,9470	6,6638	7,3513	8,0109	8,6435	9,2504
4,5	3,5875	4,3900	5,1579	5,8927	6,5959	7,2688	7,9127	8,5289	9,1186
4,75	3,5666	4,3596	5,1165	5,8392	6,5290	7,1876	7,8163	8,4166	8,9896
5	3,5460	4,3295	5,0757	5,7864	6,4632	7,1078	7,7217	8,3064	8,8633
5,25	3,5255	4,2997	5,0354	5,7343	6,3984	7,0294	7,6288	8,1984	8,7396
5,5	3,5052	4,2703	4,9955	5,6830	6,3346	6,9522	7,5376	8,0925	8,6185
5,75	3,4850	4,2412	4,9562	5,6323	6,2717	6,8763	7,4481	7,9887	8,5000
6	3,4651	4,2124	4,9173	5,5824	6,2098	6,8017	7,3601	7,8869	8,3838
6,25	3,4454	4,1839	4,8789	5,5331	6,1488	6,7283	7,2737	7,7870	8,2701
6,5	3,4258	4,1557	4,8410	5,4845	6,0888	6,6561	7,1888	7,6890	8,1587
6,75	3,4064	4,1278	4,8036	5,4366	6,0296	6,5851	7,1055	7,5929	8,0496
7	3,3872	4,1002	4,7665	5,3893	5,9713	6,5152	7,0236	7,4987	7,9427
7,25	3,3682	4,0729	4,7300	5,3426	5,9139	6,4465	6,9431	7,4062	7,8379
7,5	3,3493	4,0459	4,6938	5,2966	5,8573	6,3789	6,8641	7,3154	7,7353
7,75	3,3306	4,0192	4,6582	5,2512	5,8016	6,3124	6,7864	7,2264	7,6347
8	3,3121	3,9927	4,6229	5,2064	5,7466	6,2469	6,7101	7,1390	7,5361
8,25	3,2938	3,9665	4,5880	5,1621	5,6925	6,1825	6,6351	7,0532	7,4394
8,5	3,2756	3,9406	4,5536	5,1185	5,6392	6,1191	6,5613	6,9690	7,3447
8,75	3,2576	3,9150	4,5196	5,0755	5,5866	6,0567	6,4889	6,8863	7,2518
9	3,2397	3,8897	4,4859	5,0330	5,5348	5,9952	6,4177	6,8052	7,1607
9,5	3,2045	3,8397	4,4198	4,9496	5,4334	5,8753	6,2788	6,6473	6,9838
10	3,1699	3,7908	4,3553	4,8684	5,3349	5,7590	6,1446	6,4951	6,8137
10,5	3,1359	3,7429	4,2922	4,7893	5,2392	5,6463	6,0148	6,3482	6,6500
11	3,1024	3,6959	4,2305	4,7122	5,1461	5,5370	5,8892	6,2065	6,4924
11,5	3,0696	3,6499	4,1703	4,6370	5,0556	5,4311	5,7678	6,0697	6,3406
12	3,0373	3,6048	4,1114	4,5638	4,9676	5,3282	5,6502	5,9377	6,1944
12,5	3,0056	3,5606	4,0538	4,4923	4,8820	5,2285	5,5364	5,8102	6,0535
13	2,9745	3,5172	3,9975	4,4226	4,7988	5,1317	5,4262	5,6869	5,9176
14	2,9137	3,4331	3,8887	4,2883	4,6389	4,9464	5,2161	5,4527	5,6603
15	2,8550	3,3522	3,7845	4,1604	4,4873	4,7716	5,0188	5,2337	5,4206
16	2,7982	3,2743	3,6847	4,0386	4,3436	4,6065	4,8332	5,0286	5,1971
18	2,6901	3,1272	3,4976	3,8115	4,0776	4,3030	4,4941	4,6560	4,7932
20	2,5887	2,9906	3,3255	3,6046	3,8372	4,0310	4,1925	4,3271	4,4392

Табл. В.4: Таблиця значень $a_{\overline{n}|}$ для $n = 4, 5, \ldots, 12$.

	13	14	15	17	20	25	30	35	40
1	12,134	13,004	13,865	15,562	18,046	22,023	25,808	29,409	32,835
1,5	11,732	12,543	13,343	14,908	17,169	20,720	24,016	27,076	29,916
2	11,348	12,106	12,849	14,292	16,351	19,524	22,397	24,999	27,356
2,5	10,983	11,691	12,381	13,712	15,589	18,424	20,930	23,145	25,103
3	10,635	11,296	11,938	13,166	14,878	17,413	19,600	21,487	23,115
3,5	10,303	10,921	11,517	12,651	14,212	16,482	18,392	20,001	21,355
4	9,9856	10,563	11,118	12,166	13,590	15,622	17,292	18,665	19,793
4,25	9,8325	10,391	10,927	11,933	13,294	15,217	16,779	18,047	19,077
4,5	9,6829	10,223	10,740	11,707	13,008	14,828	16,289	17,461	18,402
4,75	9,5366	10,059	10,557	11,488	12,731	14,454	15,820	16,904	17,763
5	9,3936	9,8986	10,380	11,274	12,462	14,094	15,373	16,374	17,159
5,25	9,2538	9,7423	10,207	11,067	12,202	13,748	14,944	15,870	16,588
5,5	9,1171	9,5896	10,038	10,865	11,950	13,414	14,534	15,391	16,046
5,75	8,9834	9,4406	9,8729	10,668	11,706	13,093	14,141	14,934	15,533
6	8,8527	9,2950	9,7122	10,477	11,470	12,783	13,765	14,498	15,046
6,25	8,7248	9,1528	9,5555	10,291	11,241	12,485	13,404	14,083	14,584
6,5	8,5997	9,0138	9,4027	10,111	11,019	12,198	13,059	13,687	14,146
6,75	8,4774	8,8781	9,2535	9,9346	10,803	11,921	12,727	13,309	13,728
7	8,3577	8,7455	9,1079	9,7632	10,594	11,654	12,409	12,948	13,332
7,25	8,2405	8,6158	8,9658	9,5964	10,391	11,396	12,104	12,603	12,954
7,5	8,1258	8,4892	8,8271	9,4340	10,195	11,147	11,810	12,273	12,594
7,75	8,0136	8,3653	8,6917	9,2757	10,004	10,907	11,529	11,957	12,252
8	7,9038	8,2442	8,5595	9,1216	9,8181	10,675	11,258	11,655	11,925
8,25	7,7962	8,1259	8,4304	8,9715	9,6381	10,451	10,997	11,365	11,613
8,5	7,6910	8,0101	8,3042	8,8252	9,4633	10,234	10,747	11,088	11,315
8,75	7,5879	7,8969	8,1810	8,6826	9,2935	10,025	10,506	10,822	11,030
9	7,4869	7,7862	8,0607	8,5436	9,1285	9,8226	10,274	10,567	10,757
9,5	7,2912	7,5719	7,8282	8,2760	8,8124	9,4376	9,8347	10,087	10,247
10	7,1034	7,3667	7,6061	8,0216	8,5136	9,0770	9,4269	9,6442	9,7791
10,5	6,9230	7,1702	7,3938	7,7794	8,2309	8,7390	9,0474	9,2347	9,3483
11	6,7499	6,9819	7,1909	7,5488	7,9633	8,4217	8,6938	8,8552	8,9511
11,5	6,5835	6,8013	6,9967	7,3291	7,7098	8,1236	8,3637	8,5030	8,5839
12	6,4235	6,6282	6,8109	7,1196	7,4694	7,8431	8,0552	8,1755	8,2438
12,5	6,2698	6,4620	6,6329	6,9198	7,2414	7,5790	7,7664	7,8704	7,9281
13	6,1218	6,3025	6,4624	6,7291	7,0248	7,3300	7,4957	7,5856	7,6344
14	5,8424	6,0021	6,1422	6,3729	6,6231	6,8729	7,0027	7,0700	7,1050
15	5,5831	5,7245	5,8474	6,0472	6,2593	6,4641	6,5660	6,6166	6,6418
16	5,3423	5,4675	5,5755	5,7487	5,9288	6,0971	6,1772	6,2153	6,2335
18	4,9095	5,0081	5,0916	5,2223	5,3527	5,4669	5,5168	5,5386	5,5482
20	4,5327	4,6106	4,6755	4,7746	4,8696	4,9476	4,9789	4,9915	4,9966

Табл. В.5: Таблиця значень $a_{\overline{n}|}$ для $n = 13, 14, \ldots, 40$.

i, %	v	d, %	$i^{(2)}$, %	$i^{(4)}$, %	$i^{(12)}$, %	$d^{(2)}$, %	$d^{(4)}$, %	$d^{(12)}$, %	δ, %
1	0,9901	0,990	0,998	0,996	0,995	0,993	0,994	0,995	0,995
1,5	0,9852	1,478	1,494	1,492	1,490	1,483	1,486	1,488	1,489
2	0,9804	1,961	1,990	1,985	1,982	1,970	1,975	1,979	1,980
2,5	0,9756	2,439	2,485	2,477	2,472	2,454	2,462	2,467	2,469
3	0,9709	2,913	2,978	2,967	2,960	2,934	2,945	2,952	2,956
3,5	0,9662	3,382	3,470	3,455	3,445	3,411	3,425	3,435	3,440
4	0,9615	3,846	3,961	3,941	3,928	3,884	3,903	3,916	3,922
4,25	0,9592	4,077	4,206	4,184	4,169	4,119	4,141	4,155	4,162
4,5	0,9569	4,306	4,450	4,426	4,410	4,354	4,378	4,394	4,402
4,75	0,9547	4,535	4,695	4,668	4,650	4,587	4,614	4,632	4,641
5	0,9524	4,762	4,939	4,909	4,889	4,820	4,849	4,869	4,879
5,25	0,9501	4,988	5,183	5,150	5,128	5,052	5,084	5,106	5,117
5,5	0,9479	5,213	5,426	5,390	5,366	5,283	5,318	5,342	5,354
5,75	0,9456	5,437	5,670	5,630	5,604	5,513	5,552	5,578	5,591
6	0,9434	5,660	5,913	5,870	5,841	5,743	5,785	5,813	5,827
6,25	0,9412	5,882	6,155	6,109	6,078	5,971	6,017	6,047	6,062
6,5	0,9390	6,103	6,398	6,347	6,314	6,199	6,248	6,281	6,297
6,75	0,9368	6,323	6,640	6,586	6,550	6,426	6,479	6,514	6,532
7	0,9346	6,542	6,882	6,823	6,785	6,653	6,709	6,747	6,766
7,25	0,9324	6,760	7,123	7,061	7,020	6,878	6,938	6,979	6,999
7,5	0,9302	6,977	7,364	7,298	7,254	7,103	7,167	7,210	7,232
7,75	0,9281	7,193	7,605	7,534	7,488	7,327	7,395	7,441	7,464
8	0,9259	7,407	7,846	7,771	7,721	7,550	7,623	7,671	7,696
8,25	0,9238	7,621	8,087	8,006	7,954	7,772	7,849	7,901	7,927
8,5	0,9217	7,834	8,327	8,242	8,186	7,994	8,075	8,130	8,158
8,75	0,9195	8,046	8,567	8,477	8,418	8,215	8,301	8,359	8,388
9	0,9174	8,257	8,806	8,711	8,649	8,435	8,526	8,587	8,618
9,5	0,9132	8,676	9,284	9,179	9,110	8,873	8,973	9,041	9,075
10	0,9091	9,091	9,762	9,645	9,569	9,307	9,418	9,493	9,531
10,5	0,9050	9,502	10,238	10,110	10,026	9,739	9,861	9,943	9,985
11	0,9009	9,910	10,713	10,573	10,482	10,168	10,301	10,391	10,436
11,5	0,8969	10,314	11,187	11,035	10,935	10,595	10,739	10,836	10,885
12	0,8929	10,714	11,660	11,495	11,387	11,018	11,174	11,280	11,333
12,5	0,8889	11,111	12,132	11,953	11,836	11,438	11,607	11,721	11,778
13	0,8850	11,504	12,603	12,410	12,284	11,856	12,037	12,160	12,222
14	0,8772	12,281	13,542	13,320	13,175	12,683	12,891	13,032	13,103
15	0,8696	13,043	14,476	14,223	14,058	13,499	13,735	13,895	13,976
16	0,8621	13,793	15,407	15,121	14,934	14,305	14,570	14,751	14,842
18	0,8475	15,254	17,256	16,899	16,666	15,885	16,214	16,438	16,551
20	0,8333	16,667	19,089	18,654	18,371	17,426	17,823	18,094	18,232

Табл. B.6: Різні типи ставок.

i, %	d, %	$i^{(2)}$, %	$i^{(4)}$, %	$i^{(12)}$, %	$d^{(2)}$, %	$d^{(4)}$, %	$d^{(12)}$, %	δ, %
1	1,010	1,002	1,004	1,005	1,008	1,006	1,005	1,005
1,5	1,523	1,506	1,508	1,510	1,517	1,514	1,512	1,511
2	2,041	2,010	2,015	2,018	2,030	2,025	2,022	2,020
2,5	2,564	2,516	2,524	2,529	2,548	2,540	2,534	2,532
3	3,093	3,022	3,034	3,042	3,069	3,057	3,049	3,045
3,5	3,627	3,531	3,546	3,557	3,594	3,578	3,567	3,562
4	4,167	4,040	4,060	4,074	4,123	4,102	4,088	4,081
4,25	4,439	4,295	4,318	4,334	4,389	4,365	4,349	4,342
4,5	4,712	4,551	4,577	4,594	4,657	4,629	4,612	4,603
4,75	4,987	4,806	4,835	4,855	4,925	4,894	4,875	4,865
5	5,263	5,062	5,095	5,116	5,194	5,160	5,138	5,127
5,25	5,541	5,319	5,354	5,378	5,464	5,427	5,402	5,390
5,5	5,820	5,576	5,614	5,641	5,735	5,694	5,667	5,654
5,75	6,101	5,833	5,875	5,904	6,008	5,963	5,933	5,919
6	6,383	6,090	6,136	6,168	6,281	6,232	6,200	6,184
6,25	6,667	6,348	6,398	6,432	6,556	6,502	6,467	6,449
6,5	6,952	6,606	6,660	6,697	6,831	6,773	6,735	6,716
6,75	7,239	6,864	6,923	6,963	7,108	7,045	7,003	6,983
7	7,527	7,122	7,186	7,229	7,385	7,317	7,273	7,251
7,25	7,817	7,381	7,450	7,496	7,664	7,591	7,543	7,519
7,5	8,108	7,641	7,714	7,763	7,944	7,865	7,814	7,788
7,75	8,401	7,900	7,978	8,031	8,225	8,140	8,085	8,058
8	8,696	8,160	8,243	8,300	8,507	8,417	8,358	8,329
8,25	8,992	8,420	8,509	8,569	8,790	8,694	8,631	8,600
8,5	9,290	8,681	8,775	8,839	9,074	8,971	8,905	8,872
8,75	9,589	8,941	9,041	9,110	9,360	9,250	9,179	9,144
9	9,890	9,202	9,308	9,381	9,646	9,530	9,455	9,417
9,5	10,497	9,726	9,844	9,925	10,222	10,092	10,007	9,966
10	11,111	10,250	10,381	10,471	10,803	10,658	10,563	10,517
10,5	11,732	10,776	10,921	11,020	11,389	11,227	11,122	11,071
11	12,360	11,303	11,462	11,572	11,979	11,800	11,684	11,628
11,5	12,994	11,831	12,006	12,126	12,574	12,377	12,250	12,187
12	13,636	12,360	12,551	12,683	13,173	12,957	12,818	12,750
12,5	14,286	12,891	13,098	13,242	13,778	13,541	13,389	13,315
13	14,943	13,423	13,648	13,803	14,387	14,129	13,964	13,883
14	16,279	14,490	14,752	14,934	15,620	15,316	15,122	15,027
15	17,647	15,563	15,865	16,075	16,874	16,519	16,293	16,183
16	19,048	16,640	16,986	17,227	18,147	17,738	17,477	17,351
18	21,951	18,810	19,252	19,562	20,758	20,223	19,885	19,722
20	25,000	21,000	21,551	21,939	23,457	22,774	22,346	22,140

Табл. В.7: Значення ефективної відсоткової ставки для даної номінальної або дисконтної ставки чи інтенсивності відсотка.

B.2 Стандартна нормальна функція розподілу

У таблиці B.8 наведено значення стандартної нормальної функції розподілу Φ. Оскільки значення ймовірності додатні та менші за одиницю, то наведено лише цифри після десяткової коми.

Користуватися таблицею потрібно так: для значення t з двома цифрами після коми треба вибрати рядок, що містить цифру до коми та одну цифру після коми та стовпчик, що містить другу цифру після коми. Наприклад, для значення $t = 2{,}72$ на перетині рядку, що починається числом $2{,}7$ та стовпчику, що починається цифрою 2 знаходимо $\Phi(2{,}72) \approx 0{,}99674$. Якщо t від'ємне, можна скористатися симетрією стандартного нормального розподілу: $\Phi(t) = 1 - \Phi(-t)$.

Якщо число t дано з більшою точністю, можна визначити наближене значення, вважаючи функцію між двома сусідніми значеннями лінійною. Наприклад, для $t = 0{,}916$ знаходимо значення $\Phi(0{,}91) \approx 0{,}81859$, $\Phi(0{,}91) \approx 0{,}82121$, звідки за допомогою лінійної інтерполяції $\Phi(0{,}916) \approx 0{,}4 \cdot 0{,}81859 + 0{,}6 \cdot 0{,}82121 \approx$ $\approx 0{,}82016$.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	,50000	,50399	,50798	,51197	,51595	,51994	,52392	,52790	,53188	,53586
0,1	,53983	,54380	,54776	,55172	,55567	,55962	,56356	,56749	,57142	,57535
0,2	,57926	,58317	,58706	,59095	,59483	,59871	,60257	,60642	,61026	,61409
0,3	,61791	,62172	,62552	,62930	,63307	,63683	,64058	,64431	,64803	,65173
0,4	,65542	,65910	,66276	,66640	,67003	,67364	,67724	,68082	,68439	,68793
0,5	,69146	,69497	,69847	,70194	,70540	,70884	,71226	,71566	,71904	,72240
0,6	,72575	,72907	,73237	,73565	,73891	,74215	,74537	,74857	,75175	,75490
0,7	,75804	,76115	,76424	,76730	,77035	,77337	,77637	,77935	,78230	,78524
0,8	,78814	,79103	,79389	,79673	,79955	,80234	,80511	,80785	,81057	,81327
0,9	,81594	,81859	,82121	,82381	,82639	,82894	,83147	,83398	,83646	,83891
1,0	,84134	,84375	,84614	,84849	,85083	,85314	,85543	,85769	,85993	,86214
1,1	,86433	,86650	,86864	,87076	,87286	,87493	,87698	,87900	,88100	,88298
1,2	,88493	,88686	,88877	,89065	,89251	,89435	,89617	,89796	,89973	,90147
1,3	,90320	,90490	,90658	,90824	,90988	,91149	,91309	,91466	,91621	,91774
1,4	,91924	,92073	,92220	,92364	,92507	,92647	,92785	,92922	,93056	,93189
1,5	,93319	,93448	,93574	,93699	,93822	,93943	,94062	,94179	,94295	,94408
1,6	,94520	,94630	,94738	,94845	,94950	,95053	,95154	,95254	,95352	,95449
1,7	,95543	,95637	,95728	,95818	,95907	,95994	,96080	,96164	,96246	,96327
1,8	,96407	,96485	,96562	,96638	,96712	,96784	,96856	,96926	,96995	,97062
1,9	,97128	,97193	,97257	,97320	,97381	,97441	,97500	,97558	,97615	,97670
2,0	,97725	,97778	,97831	,97882	,97932	,97982	,98030	,98077	,98124	,98169
2,1	,98214	,98257	,98300	,98341	,98382	,98422	,98461	,98500	,98537	,98574
2,2	,98610	,98645	,98679	,98713	,98745	,98778	,98809	,98840	,98870	,98899
2,3	,98928	,98956	,98983	,99010	,99036	,99061	,99086	,99111	,99134	,99158
2,4	,99180	,99202	,99224	,99245	,99266	,99286	,99305	,99324	,99343	,99361
2,5	,99379	,99396	,99413	,99430	,99446	,99461	,99477	,99492	,99506	,99520
2,6	,99534	,99547	,99560	,99573	,99585	,99598	,99609	,99621	,99632	,99643
2,7	,99653	,99664	,99674	,99683	,99693	,99702	,99711	,99720	,99728	,99736
2,8	,99744	,99752	,99760	,99767	,99774	,99781	,99788	,99795	,99801	,99807
2,9	,99813	,99819	,99825	,99831	,99836	,99841	,99846	,99851	,99856	,99861
3,0	,99865	,99869	,99874	,99878	,99882	,99886	,99889	,99893	,99896	,99900
3,1	,99903	,99906	,99910	,99913	,99916	,99918	,99921	,99924	,99926	,99929
3,2	,99931	,99934	,99936	,99938	,99940	,99942	,99944	,99946	,99948	,99950
3,3	,99952	,99953	,99955	,99957	,99958	,99960	,99961	,99962	,99964	,99965
3,4	,99966	,99968	,99969	,99970	,99971	,99972	,99973	,99974	,99975	,99976
3,5	,99977	,99978	,99978	,99979	,99980	,99981	,99981	,99982	,99983	,99983
3,6	,99984	,99985	,99985	,99986	,99986	,99987	,99987	,99988	,99988	,99989
3,7	,99989	,99990	,99990	,99990	,99991	,99991	,99992	,99992	,99992	,99992
3,8	,99993	,99993	,99993	,99994	,99994	,99994	,99994	,99995	,99995	,99995
3,9	,99995	,99995	,99996	,99996	,99996	,99996	,99996	,99996	,99997	,99997
4,0	,99997	,99997	,99997	,99997	,99997	,99997	,99998	,99998	,99998	,99998
4,1	,99998	,99998	,99998	,99998	,99998	,99998	,99998	,99998	,99999	,99999

Табл. В.8: Значення стандартної нормальної функції розподілу Φ.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

[1] *Боди З., Мертон Р.* Финансы. – М.: Вильямс, 2003.

[2] *Бойков А. В.* Страхование и актуарные расчеты. – М.: РОХОС, 2004.

[3] *Борисенко О. Д., Мішура Ю.С., Радченко В.М., Шевченко Г.М.* Збірник задач з фінансової математики. – К.: Техніка, 2008.

[4] *Брейли Р., Майерс С.* Принципы корпоративных финансов. – М.: Олимп-Бизнес, 1997.

[5] *Буренин А. Н.* Фьючерсные, форвардные и опционные рынки. – М.: Тривола, 1995.

[6] *Ван Хорн Дж. К.* Основы управления финансами. – М.: Финансы и статистика, 2000.

[7] *Галиц Л.* Финансовая инженерия. Инструменты и способы управления финансовым рынком. – М.: ТВП, Научное издательство, 1998.

[8] *Голубин А. Ю.* Математические модели в теории страхования: Построение и оптимизация. – М.: АНКИЛ, 2003.

[9] *Жуленев С. В.* Финансовая математика: введение в классическую теорию. – М.: Изд-во МГУ, 2001.

[10] *Коттл С., Мюррей Р. Ф., Блок Ф. Е.* “Анализ ценных бумаг” Грэма и Додда. – М.: Олимп-Бизнес, 2000.

[11] *Леоненко М. М., Мишура Ю. С., Пархоменко В. М., Ядренко М. Й.* Теоретико–ймовірнісні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці.— К.: Інформтехніка, 1995.

[12] *Летчиков А. В.* Лекции по финансовой математике. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.

[13] *Люу Ю.-Д.* Методы и алгоритмы финансовой математики. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2007.

[14] *Мельников А. В.* Финансовые рынки, Стохастический анализ и расчет производных ценных бумаг. – М.: ТВП, Научное издательство, 1997.

[15] *Мельников А. В., Волков С. Н., Нечаев М. Л.* Математика финансовых обязательств. – М.: ГУ ВШЭ, 2001.

[16] *Модильяни Ф., Миллер М.* Сколько стоит фирма? – М.: Дело, 1999.

[17] *Нікбахт Е., Гроппеллі А.* Фінанси. – К.: Основи, 1993.

[18] *Оксендал Б.* Стохастические дифференциальные уравнения. – М: МЦНМО, 2002.

[19] *Росс С., Вестерфилд Р., Джордан Б.* Основы корпоративных финансов. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2001.

[20] *Фалин Г. И., Фалин А. И.* Теория риска для актуариев в задачах. – М.: Мир, 2004.

[21] *Фельмер Г., Шид А.* Введение в стохастические финансы. Дискретное время. Перевод с английского. – М.: МЦНМО, 2008.

[22] *Черваньов Д. М., Комашко О. В.* Економетрика. Курс лекцій. – К.: РВЦ КІЕМБСС, 1998.

[23] *Четыркин Е.М.* Финансовая математика. – М.: Дело, 2005.

[24] *Шапкин А.* Экономические и финансовые риски. – М.: Дашков и К$^\circ$, 2003.

[25] *Шарп У. Ф., Александер Г. Дж., Бэйли Дж. В.* Инвестиции. – М.: Инфра-М, 2001.

[26] *Шепп Л., Ширяев А. Н.* Новый взгляд на расчеты “Русского опциона” // Теория вероятностей и её применения.— 1994. – Т. 39. – № 1. – С. 130–149.

[27] *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики. – М.: Фазис, 1998. – Т. 1, 2.

[28] *Ширяев А. Н., Кабанов Ю. М., Крамков Д. О., Мельников А. В.* К теории расчетов опционов Европейского и Американского типов. Часть I. Дискретное время, Часть II. Непрерывное время // Теория вероятностей и её применения.— 1994. – Т. 39. – № 1. – С. 21–79, 80–129.

[29] *Anthony M., Biggs N.* Mathematics for Economics and Finance. Methods and Modelling. – Cambridge: Press Syndicate of the University of Cambridge, 1996.

[30] *Back K.* A Course in Derivative Securities: Introductin to Theory and Computation. – Berlin: Springer-Verlag, 2005.

[31] *Barucci E.* Financial Market theory. Equilibrium, Efficiency and Information. – Berlin: Springer-Verlag, 2003.

[32] *Baxter M., Rennie A.* Financial Calculus: An Introduction to Derivative Pricing. – Cambridge: Cambridge University Press, 1996.

[33] *Bingham N. H., Kiesel R.* Risk-Neutral Valuation: Pricing and Hedging of Financial derivatives. 2nd Edition. – Berlin: Springer-Verlag, 2004.

[34] *Black F., Scholes M.* The pricing of options and corporate liabilities.// – Journal of Political Economy.— 1973. – № 3. – P. 637–659.

[35] *Brealey R., Myers S., Marcus A.* Fundamentals of Corporate Finance. – Boston: McGraw-Hill, 2001.

[36] *Brigo D., Mercurio F.* Interest Rate Models – Theory and Practice. – Berlin: Springer-Verlag, 2006.

[37] *Campbell J. Y. Lo, A. W., MacKinlay A. C.* The Econometrics of Financial Markets. – Princeton: Princetion University Press, 1993.

[38] *Chen L.* Interest Rate Dynamics (Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 435). – New York: Springer, 1996.

[39] *Daykin C. D.* Practical Risk Theory for Actuaries. – London: Chapman & Hall, 1996.

[40] *Dana R. A., Jeanblanc M.* Financial Markets in Continuous Time. – Berlin: Springer-Verlag, 2002.

[41] *Delbaen F., Schachermayer W.* The Mathematics of Arbitrage. – Berlin: Springer-Verlag, 2006.

[42] *Dokuchaev N.* Dynamic Portfolio Strategies. Quantitative Methods and Empirical Rules for Incomplete Information. – Boston: Kluwer Academic Publishers, 2002.

[43] *Duffie D.* Dynamic Asset Pricing Theory. – Princeton: Princeton University Press, 1996.

[44] *Dupacova J., Hurt J., Stepan J.* Stochastic Modeling in Economics and Finance. – Boston: Kluwer Academic Publishers, 2002.

[45] *Elliott R., Kopp P. E.* Mathematics of Financial Markets. – New York: Springer Finance, 1998.

[46] *Etheridge A.* Financial Calculus – Cambridge: Cambridge University Press, 2006.

[47] *Gerber H. U.* Life Insurance Mathematics. – Berlin: Springer-Verlag, 1997.

[48] *Karatzas I., Shreve S. E.* Methods of Mathematical Finance. – Berlin: Springer-Verlag, 1998.

[49] *Kellerhals B.P.* Asset Pricing. – Berlin: Springer-Verlag, 2004.

[50] *Kijima M.* Stochastic Processes with Application to Finance. 2nd Edition – London: Chapman and Hall/CRC, 2003.

[51] *Kwok Y. K.* Mathematical Models of Financial Derivatives. – New York: Springer-Verlag, 1998.

[52] *Lamberton D., Lapeyre B.* Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance. – London: Chapman & Hall, 1995.

[53] *McCutcheon J., Scott W. F.* Introduction to the Mathematics of Finance. 2nd Edition. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 1989.

[54] *Mak D. K.* The Science of Financial Market Trading. – New Jesey: World Scientific, 1997.

[55] *Merton R.C.* Theory of rational option pricing.// – Bell Journal of Economics and Management Science.— 1973. – № 4(Spring). – P. 141–183.

[56] *Musiela M., Rutkowski M.* Martingale Methods in Financial Modelling. – Berlin: Springer-Verlag, 2002.

[57] *Neftci Salih N.* An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives. – San Diego, CA: Academic Press, 1996.

[58] *Nielsen L. T.* Pricing and Hedging of Derivative Securities. – Oxford: Oxford University Press, 1999.

[59] *Nualart D.* The Malliavin Calculus and Related Topics. – Berlin: Springer, 2006.

[60] *Pelsser A.* Efficient Methods for Valuing Interest Rate Derivatives. – Berlin: Springer-Verlag, 2000.

[61] *Peskir G., Shiryaev A.* Optimal Stopping and Free-boundary Problems. – Basel: Birkhäuser, 2006.

[62] *Ottaviani G.* Financial Risk in Insurance. – Berlin: Springer-Verlag, 2000.

[63] *Pliska S.* Introduction to Mathematical Finance: Discrete Time Models. – Oxford, Basel: Blackwell, 1997.

[64] *Prigent J.-L.* Weak Convergence of Financial Markets. – Berlin: Springer-Verlag, 2003.

[65] *Roberts A. J.* Elementary Calculus of Financial Mathematics. – Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2009.

[66] *Rolski T., Schmidli H., Schmidt V., Teugels J.* Stochastic Processes for Insurance and Finance. – Chichester: John Wiley and Sons, 1998.

[67] *Ross S. M.* An Introduction to Mathematical Finance: Options and Other Topics. – Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

[68] *Singleton K. J.* Empirical Dynamic Asset Pricing: Model Specification and Econometric Assesment. – Princeton and Oxford: Princeton University Press, 2006.

[69] *Shreve S.* Stochastic Calculus for Finance. – New York: Springer, 2004. – V. I, II.

[70] *Sondermann D.* Introduction to Stochastic Calculus for Finance. A New Didactic Approach. – Berlin: Springer, 2006.

[71] *Steele J. M.* Stochastic Calculus and Financial Applications – New-York: Springer-Verlag, 2001.

[72] *Varian H. R.* (ed.) Computational Economics and Finance. Modeling and Analysis with Mathematica. – New York: Springer, 1996.

[73] *Vollert A.* A Stochastic Control Framework for Real Options in Strategic Valuation. – Boston: Birknäuser, 2003.

[74] *Wilmott P., Howison S., Dewynne I.* The Mathematics of Financial Derivatives, a Student Introduction. – Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

ПОКАЖЧИК ПОЗНАЧЕНЬ

$A(t_1, t_2)$, 14, 15
$\ddot{a}_{\overline{n}|}$, 20
$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|}$, 23
$\overline{a}_{\overline{n}|}$, 24
$a_{\overline{n}|}$, 20
$a^{(p)}_{\overline{n}|}$, 23

C^{call}, 184
C^{put}, 184
$\mathrm{cov}(\cdot, \cdot \mid \mathcal{G})$, 255

Δ, 290
$\delta(t)$, 15

$\operatorname{ess\,sup}$, 242

Γ, 290

$i^{(p)}$, 14
$(I\overline{a})_{\overline{n}|}$, 24
$(Ia)_{\overline{n}|}$, 22
$(\overline{I}\overline{a})_{\overline{n}|}$, 24
$(I\overline{s})_{\overline{n}|}$, 24
$(Is)_{\overline{n}|}$, 22
$(\overline{I}\overline{s})_{\overline{n}|}$, 24

$\mathcal{K}(\omega)$, 180

ν, 11
$\nu(t)$, 16
$\nu(t_1, t_2)$, 16

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$, 170

P^*, 177
$\mathcal{P}$, 177
$\Pi(C)$, 185

ρ, 291

$\ddot{s}_{\overline{n}|}$, 21
$\overline{s}_{\overline{n}|}$, 24
$s_{\overline{n}|}$, 21

$\mathbb{T}$, 170
Θ, 291

$\mathrm{var}(\cdot \mid \mathcal{G})$, 255
$\mathcal{V}$, 291

ПОКАЖЧИК ТЕРМІНІВ

А
актив
    безризиковий, 172
    первинний, 170
активи, 102
    поточні, 104
    фіксовані, 98, 102
    чисті на акцію, 126
акціонерний капітал, 62, 132
    вартість, 143
акція
    боргова, 71
    випуск, 83
    звичайна, 62
    привілейована, 74
        конвертована, 75
Американський опціон, 80
    оптимальна стратегія, 239
    у неперервній моделі, 296
амортизація, 98, 102, 109
андеррайтинг, 77, 84, 86
    випуску нових акцій, 89
ануїтет, 18
    безстроковий, 19
    відстрочений, 19
    зростаючий, 20
    сталий, 18
    що виплачується p разів на рік, 21
арбітраж, 202
    в одноперіодній моделі, 176
    відсутність, 178
    у неперервній моделі, 295
аудит, 95

Б
баланс, 48, 102
    консолідований, 114
банківський кредит, 63
борг
    графік виплати, 23
    субординований, 77

В
важіль, 120, 135
    активів, 121
    прибутку, 123
    регулювання, 148
варант, 76
вартість
    капіталу, 142
        акціонерного, 143
        середньозважена, 150
    номінальна, 36
    продажів, 106
    сучасна, 9
    чиста сучасна, 152
випадковий процес
    передбачуваний, 198
    розклад Дуба, 231, 270
    узгоджений, 198
випуск нових акцій, 87
витрати
    на обіг, 106
    на розповсюдження, 107
    адміністративні, 107
    фінансові, 107

відсотки, 6
простi, 7
складнi, 7
відсоткова компенсація, 28
відсоткова складова, 23
відсоткова ставка, 7
дисконтна, 8
ефективна, 11
незмінна, 26
номінальна, 11
що конвертується p разів на рік, 11
вінерівський процес, 165, 307
характеризація Леві, 321
внутрішня норма прибутку, 34
волатильність
грошового потоку, 47

Г

гіпотеза ефективності ринку, 207
тестування, 211
графік виплати боргу, 23
грошовий потік, 10
неперервний, 14
сучасна вартість, 10
гудвіл, 104, 116

Д

дебентура, 71
дебет, 104
дериватив, 183
Азійський, 302
екзотичний, 301
з післядією, 303
дивіденд, 62, 138
акціями, 139
дивідендний дохід, 125
дисконтна ставка, 8
дисконтний множник, 9
дисконтований середній час, 46
дисконтувальний множник, 14
дисконтування, 9, 173

Е

EBITDA, 126
експонента Долеан, 322
дискретна, 270
емісія, 83
бонусна, 90
нових акцій, 87

Є

Єврооблігація, 36, 72
Європейський опціон, 80
справедлива ціна, 224, 287

З

загальна плата за кредит, 26
закупівля у відстрочку, 63
залишкова вимога, 54, 62
запаси, 104
застава, 71
звичайна акція, 62
звіт
аудиторський, 95
балансовий, 102
консолідований, 113
про рух грошей, 108
річний, 95
зображення
Іто, 324
мартингальне, 326

І

імовірнісна міра
еквівалентна, 176
мартингальна, 207
нейтральна до ризику, 177
об'єктивна, 171
імунізація, 48
повна, 50

індивідуальний підприємець, 58
інтеграл Іто, 309
інтенсивність відсотка, 13
істотний супремум, 242

К

капітал, 102, 105, 112
    акціонерний, 62, 105, 112
    вартість, 142
    власний, 105
    основний, 7
    позичковий, 35, 61, 71
    стратегії, 199
        дисконтований, 200
    узагальненої стратегії, 252
капітальна складова, 23
коефіцієнт
    використання активів, 128
    ефективності, 130
    ліквідності, 129
    обліковий, 127
    оборотності
    рентабельності, 127
комерційний кредит, 64
комерційний папір, 65
компанія
    асоційована, 117
    дочірня, 114
    з обмеженою відповідальністю, 58
котирування, 82
крива прибутку, 44
купонна ставка, 36
    на одиницю погашення, 38

М

маржа, 78
    прибутку, 128
мартингал, 205
    розклад Куніта-Ватанабе, 262
мартингальна міра, 207
    еквівалентна, 207
    існування та єдиність, 276
    мінімальна, 266
        характеризація, 273
    у неперервній моделі, 294
метод лінійної інтерполяції, 17
міра
    еквівалентна, 176
    мартингальна, 207
        мінімальна, 266
    нейтральна до ризику, 177, 207
модель
    біноміальна, 173
        багатоперіодна, 226
    Блека-Шоулса, 292
    Кокса-Росса-Рубінштейна, 173
    оцінювання капітальних активів, 142, 146
модель ринку
    повна, 190
момент зупинки
    оптимальний, 239, 298
        максимальний, 245
        мінімальний, 241, 244
        потраєкторний, 246

Н

накопичення, 9
    грошового потоку, 10
накопичувальний множник, 12
неперервний ануїтет
    зростаючий, 22
    сталий, 22
неперервний грошовий потік, 14
номінал, 36
норма прибутку, 16
    внутрішня, 34

О
обіг, 106
облігація, 172
державна, 35
Євро-, 36, 72
іпотечна, 71
корпоративна, 36
незабезпечена, 72
конвертована, 75
обліковий принцип, 98
овердрафт, 64
огинаюча Снелла, 235
опціон, 76, 80
Азійський, 217, 302
Американський, 80
бар'єрний, 304
Бермудський, 234
Вега, 290
Гамма, 288
Греки, 288
Дельта, 288
ефект кратності, 196
Європейський, 80, 216
з післядією, 217, 303
справедлива ціна, 306
з усередненим страйком, 303
з усередненою ціною, 303
купівлі, 80, 184
продажу, 80, 184
пут-колл паритет, 185, 196
Ро, 289
Російський, 234
Тета, 289
управлінський, 78
оренда, 63

П
партнерство, 58
з обмеженою відповідальністю, 59
пасиви, 102, 105
перевідний вексель, 65
платіжне зобов'язання, 183
Американське, 232
дисконтоване, 234
оптимальна стратегія, 239
відносний дохід, 193
дисконтоване, 218
досяжне, 188
справедлива ціна, 188
Європейське, 216
справедлива ціна, 185, 221
податок
корпоративний, 69, 107
на приріст капіталу, 41, 67
прибутковий, 37, 66
позичковий капітал, 35, 61, 132
покриття
активами, 119
дивіденду, 125
прибутком, 118
портфель, 175
арбітражний, 176
породжувальний, 188
потік платежів, 10
правило 78, 30
модифіковане, 31
прибуток
валовий, 107
власний, 112
до стягнення податку, 108
звільнений, 69
на акцію, 108, 123
розріджений, 124
на задіяний капітал, 127
операційний, 108
при погашенні, 44
утриманий, 113
фінансовий, 107

принцип
історичної вартості, 98
накопичення, 99
обліковий, 98
продовжуваності, 99
реалізації, 99
пріоритетні процентилі
з активів, 120
з прибутків, 119
продаж у кредит, 63
пропонування для підписки, 85
пропонування для продажу, 83
через тендер, 85
просте нарахування відсотка, 7
процес локального квадратичного ризику, 254
пут-колл паритет, 185, 196

Р

рахунок прибутків і збитків, 105
резерв переоцінки, 113
рентабельність, 33
ринок
безарбітражний, 176, 295
критерій повноти, 192
повний, 190
рівняння
ануїтетне, 19
Блека-Шоулса, 289
вартостей, 16
Колмогорова зворотне, 320
стохастичне диференціальне, 317
річна фактична вартість, 26
розклад Дуба, 231, 270
розклад Куніта-Ватанабе, 262

С

своп, 81
використання, 82
склади, 104
справедлива ціна, 185
в біноміальній моделі, 228
досяжного зобов'язання, 188
Європейського опціону, 224, 287
опціону з післядією, 306
сталий ануїтет, 18
авансовий, 18
із заборгованістю, 18
неперервний, 22
стохастична експонента, 322
дискретна, 270
стохастична похідна, 326
стохастичне диференціальне рівняння, 317
стохастичний базис, 197
стохастичний диференціал, 313
стохастичний інтеграл, 309
дискретний, 236
страйкова ціна, 77
стратегія, 175, 198
L^2-допустима, 253
арбітражна, 202
породжувальна, 188, 295
самофінансована, 199, 294
капітал, 199
у неперервній моделі, 293
узагальнена, 252
що мінімізує локальний ризик, 254
одновимірна, 258
умова існування, 260
субмартингал, 205
супермартингал, 205
найменший мажоруючий, 235
сучасна вартість, 9
грошового потоку, 10
чиста, 32, 152

Т
термін окупності, 33
дисконтований, 33
тривалість
грошового потоку, 46

У
узагальнена стратегія, 252
умови імунізації за Редінгтоном, 49
умовна дисперсія, 254
умовна коваріація, 254

Ф
факторинг, 64
фільтрація, 197
натуральна, 198
формула
Блека-Шоулса, 286
Гірсанова, 323
дискретна, 270
Кларка-Окона-Хауссманна, 327
Мейкема, 39
Студлі, 15
Фейнмана-Каца, 319
формула Іто, 315
функція винагород, 297
ф’ючерс, 78

Х
холдинг, 114

Ц
ціна
без прав, 89
дисконтована, 173
первинного активу, 171
погашення, 37
справедлива, 185
страйкова, 77
цінний папір
випуск, 82
впровадження, 86
пропонування для підписки, 85
пропонування для продажу, 83
розміщення, 85
вторинний, 183
з фіксованим відсотком, 35
конвертований, 75
похідний, 183
ціновий процес, 199
дисконтований, 199

Ч
часова вартість грошей, 6, 172
частка меншості, 116
чиста сучасна вартість, 32, 152