1. Імунізація

Розберемо спочатку заадчу із самостійної з четвертого варіанту.

1. Розглядається облігація по якій купонні виплати здійснюються щокварталу, кожна виплата розміром 8 гривень, номінал облігаціїї 120 грн, облігація погашається за 100 гривень через п'ять років. Яку ціну повинен сплатити інвестор, щоб отримати прибутковість у 9%, якщо він сплачує податок на прибуток у розмірі 6%, та податок на приріст капіталу у розмірі 4%?

Розв'язання.
Параметри облігації: $T = 5$, $N = 120$, $R = 100/120 = 5/6$, $i = 0.09$, $t_1 = 0.06$, $t_2 = 0.04$, $p = 4$. Обчислимо D. Маємо щоквартальну виплату розміром 8, отже

$$8 = DN/p = D \cdot 120/4 = 30 \cdot D,$$

$$D = 32/120,$$

звідки

$$g = D/R = \frac{32/120}{100/120} = 0.32$$

Перевіримо умову на наявність приросту капіталу.

$$i^{(4)} \geq g(1 - t_1)$$

$i^{(4)} = 4((1+i)^{1/4} - 1) = 4(1.09^{1/4} - 1) = 0.08711272$, $g(1 - t_1) = 0.32 * 0.94 = 0.3008$. Виходить, що приросту капіталу немає. Тому скористаємось звичайною формулою Мейкема. Обчислимо $C = 100$, $K = 100\nu^5 = 100 * 1.09^{-5} = 64.99$. Скористаємось формулою Мейкема:

$$A = \frac{g(1 - t_1)}{i^{(p)}}(C - K) + K = \frac{0.3008}{0.08711272}(100 - 64.99) + 64.99 = 185.8794$$

1.1. Імунізація.

Для будь-якої компанії важливо утримвати баланс доходів та витрат не лише в абсолютних значеннях а ще і з точки зору сучасних вартостей. Тобто сучасна вартість доходів повинна дорівнювати сучасній вартості витрат.
Нехай прибутки розміром $A_1, \ldots, A_n$ надходять в моменти часу $t_1, \ldots, t_n$, та в ті ж самі моменти часу компанії здійснює витрати $L_1, \ldots, L_n$. Тут $A_k \geq 0$, та $L_k \geq 0$ причому важливо, що можлива рівність 0. Нехай відсоткова ставка рівна i. Тоді позначимо сучасну вартість доходів $V_A(i) = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k \nu^k$, та сучасну вартість витрат $V_L(i) = \sum\limits_{k=1}^{n} L_k \nu^k$. І запишемо умову:

$$V_A(i) = V_L(i). \tag{1}$$

Рівність (1) називається **першою умовою імунізації** (за Редінгтоном).

Імунізація - це стратегія управління активами компанії з метою захисту від коливань відсоткових ставок. Припустимо, що відсоткова змінилася з i на i'. Нам би хотілося, щоб при цьому виконувалась нерівність

$$V_A(i') \geq V_L(i').$$

Що це означає? Розглянемо функцію $f(i) = V_A(i) - V_L(i)$, і ми прагнемо, щоб при малих змінах i на i' $f(i') \geq 0$, при тому, що $f(i) = 0$. Це означає, що i - це точка локального мінімуму. З математичного аналізу відомо, що необхідною умовою мінімуму є $f'(i) = 0$.

$$f'(i) = -\sum_{k=1}^{n} t_k (A_k - L_k) \nu^{t_k + 1} = 0$$

що еквівалентно тому, що:

$$\sum_{k=1}^{n} t_k A_k \nu^{t_k+1} = \sum_{k=1}^{n} t_k L_k \nu^{t_k+1}$$

але оскільки $V_A(i) = V_L(i)$ то можемо розділити обидві частини останньої рівності на $V_A(i)$ та $V_L(i)$:

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} t_k A_k \nu^{t_k+1}}{\sum\limits_{k=1}^{n} A_k \nu^{t_k}} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} t_k L_k \nu^{t_k+1}}{\sum\limits_{k=1}^{n} L_k \nu^{t_k}},$$

або

$$v_A(i) = v_L(i), \tag{2}$$

де v - це волатильність. Умова (2) називається **другою умовою імунізації** (за Редінгтоном). Перша і друга умови імунізації називаються необхідними умовами імунізації. Є ще достатня умова імунізації, вона полягає в тому, що достатньою умовою локального мінімуму є умова $f''(i) > 0$

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} t_k(t_k+1) A_k \nu^{t_k+2}}{\sum\limits_{k=1}^{n} A_k \nu^{t_k}} > \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} t_k(t_k+1) L_k \nu^{t_k+2}}{\sum\limits_{k=1}^{n} L_k \nu^{t_k}},$$

або

$$c_A(i) > c_L(i), \tag{3}$$

де c - називається опуклістю. Умова (3) називається **третьою, або достатньою умовою імунізації** за Редінгтоном.

Якщо виконані умови (1)-(3) то кажуть, що компанія є імунізованою відносно малих змін у відсотковій ставці.

Умову (3) використовуючи умови (1) та (2) можна подати у вигляді:

$$\sum_{k=1}^{n} (t_k - \tau_A(i))^2 A_k \nu^{t_k} \geq \sum_{k=1} (t_k - \tau_L(i))^2 L_k \nu^{t_k}.$$

Умови (1)-(3) це умови локальної імунізації, в той же час існують умови повної імунізації.

Теорема 1.1. *Нехай виконано умови (1), (2) та існують такі два моменти часу t' та t'' що $L_k = 0$ при $t_k \notin [t', t'']$ а $A_k = 0$ при $t_k \in [t', t'']$. Тоді імунізація є повною (тобто компанія захищена від будь-яких коливань відсоткової ставки).*

Всі умови імунізації залишаються вірними, якщо присутня неперервна складова.

1.2. **Задача 12.12.** Маємо послідовність виплат, розміром 100 тис. наприкінці кожного з наступних 5 років. Отже послідовність витрат $L_k = 100$, $t_k = k$, $k = 1, 5$. Прибутки надійдуть дві двох облігацій, без купонів, через один та 5 років, позначимо A_1 та A_2, відповідно $t_1 = 1$, $t_2 = 5$, $i = 0.05$.

Обчислимо сучасну вартість пасивів.

$$V_L(i) = 100 a_{\overline{5|}} = 100 \frac{1-\nu^5}{i} = 100 * (1 - 1.05^{-5})/0.05 = 432.9477$$

Формула для тривалості:

$$\tau(i) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} t_k C_k \nu^{t_k}}{\sum\limits_{k=1}^{n} C_k \nu^{t_k}}$$

$$\tau_L(i) = 100 \sum_{k=1}^{n} k\nu^k / V_L(i) = 1256.639/432.9477 = 2.9$$

Обчислимо сучасну вартість A_1 та A_2 використавши першу та другу умови імунізації, на помітивши, що $v(i) = \nu\tau(i)$. Тобто маємо два рівняння:

$$V_A(i) = A_1\nu + A_2\nu^5 = V_L(i),$$

$$\frac{A_1\nu + 5A_2\nu^5}{V_A(i)} = \tau_L(i)$$

$$A_1 = (432.9477 - A_2 * 1.05^{-5}) * 1.05,$$
$$A_1 = ((2.9 * 432.947) - 5 * A_2 * 1.05^{-5}) * 1.05$$
$$1.9 * 432.947 = 4A_2 1.05^{-5}$$
$$A_2 = ((1.9 * 432.947) * 1.05^5)/4 = 262.46,$$
$$A_1 = 238.6628$$

Підрахуємо опуклість активів:

$$c_A(i) = \frac{2A_1\nu^3 + 30A_2\nu^7}{V_A(i)} =$$

$$(2 * 238.6628 * 1.05^{-3} + 30 * 262.46 * 1.05^{-7})/432.9477 = 13.87718$$

1.3. **Завдання додому.** Розглянемо ануїтет по якому виплачується сума 20 гривень щомісяця, протягом двох років починаючи з третього. Компанія хоче імунізуватися відносно коливань відсоткових ставок навколо $i = 0.08$ придбавши ануїтет, за яким щоквартально сплачується сума X протягом двох років, починаючи з першого, та одноразову виплату розміром Y через шість років. Обчислити X та Y, з'ясувати чи виконана достатня умова імунізації, та чи виконана умова повної імунізації.