Стохастичний експеримент. Випадкові події.

Лекція 1.

<u>Означ.</u> Стохастичний експеримент – це експеримент, результат якого ми не можемо передбачити заздалегідь, але який можна повторити у незалежний спосіб, при незмінних умовах нескінченну кількість разів.

<u>Приклади</u>: 1). Послідовно підкидають 2 монети і фіксують сторони, якими вони лягли. Результат експерименту: {ГГ, ГР, РГ, РР} не можливо передбачити.

2). Підкидають гральний кубик і реєструють число очок, що випали. Результати: $\{1, \dots, 6\}$ не можливо передбачити.

Це експерименти із скінченною множиною результатів.

3) Підкидають монету до першої появи герба. Реєструють число підкидань до появи герба.
Результати: $\{0, 1, 2, \dots\}$. Тут множина результатів зліченна.

З кожним стох. експериментом пов'язують множину Ω, елементи якої дають повну інформацію про усі можливі результати експерименту. Цю множину Ω називають <u>простором елементарних подій</u>, а його елементи $\omega \in \Omega$ називаються елементарними подіями.

У наведених прикладах: 1) $\Omega = \{ГГ, ГР, РГ, РР\}$; 2) $\Omega = \{1, \dots, 6\}$; 3) $\Omega = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Реалізацію стохастичного експерименту ми будемо розуміти, як випадковий вибір елемента ω із множини Ω. Простір елементарних подій Ω назив. <u>дискретним</u>, якщо множина Ω скінченна або зліченна.

Проводячи стохастичний експеримент ми можемо виділити деяку множину подій, про які ми можемо сказати відбулися вони, чи ні у даному експерименті. Такі події будемо називати подіями, що спостерігаються у даному експерименті. Наприклад у прикладі 1 подія $A = \{$з'явився принаймні один герб$\}$ – це подія, що спостерігається, але подія $B = \{$на гральному кубику випало 3$\}$ не спостерігається у експерименті з прикладу 1.

Оскільки елементарна подія $\omega \in \Omega$ несе повну інформацію про результат стох. експеримента, то знаючи ω ми можемо сказати відбулась чи ні подія A, що спостерігається. Таким чином множина Ω розбивається на підмножини A' і A'': $\Omega = A' \cup A''$, такі, що при $\omega \in A'$ подія A відбувається, а при $\omega \in A''$, подія A не відбувається. Елементарна подія $\omega \in A'$ називається елементарною подією, що сприяє події A. Природньо ототожнити подію A і множину $A' \subset \Omega$ і вважати, що подія A – це підмножина з Ω, яка складається із усіх елементарних подій $\omega \in \Omega$, що сприяють події A. Таким чином, якщо $\omega \in A \Rightarrow$ подія A відбулась, якщо $\omega \notin A$, то подія A не відбулась.

<u>Приклади</u> 1). $A = \{$з'явився принаймні 1 герб$\} = \{РГ, ГР, ГГ\}$. 2) $B = \{$на гральному кубику випало число кратне 3$\} = \{3, 6\}$. 3) $C = \{$до появи першого герба знадобилось парне число підкидань$\} = \{0, 2, 4, \dots, 2n, \dots\}$.

Оскільки події це підмножини Ω, то ми можемо проводити певні операції з множинами і ми повинні проаналізувати значення цих теоретико-множинних операцій.

1. Сам простір Ω будемо розуміти як подію, яка завжди відбувається у стохастичному експерименті і будемо називати її достовірною подією.

2. Подія $\emptyset$ - порожня ототожнюється з подією, яка ніколи не відбувається у стох. експерименті, і називається неможливою подією.

3. Якщо $A \subset B$, $A, B \subset \Omega$, тоді якщо $\omega \in A$ (подія A відбулась) $\Rightarrow \omega \in B$ (подія B відбулась), говоримо, що з події A випливає подія B.

Приклад: нехай двічі підкидають гральний кубик. Подія A = {перший раз випало парне число очок, другий раз - непарне число} $= \{(i,j) \mid i = 2,4,6;\ j = 1,3,5\}$,
B = {сума очок непарна} $= \{(i,j) \mid i+j = 2k+1,\ k = \overline{1,5}\}$.
Зрозуміло, що $A \subset B$, але $B \not\subset A$ бо можливі результати, де перший раз випало непарне число, а другий раз парне.

4. Подія $A \cup B$, $A, B \subset \Omega$ полягає в тому, що відбудеться принаймні одна із подій A або B, і називається об'єднанням подій A і B (або сумою подій). Приклад. Подія A що. A = {випало парне число} $= \{2,4,6\}$, B = {випало кратне 3} $= \{3,6\}$; $A \cup B = \{2,3,4,6\}$

5. Подія $A \cap B$, $A, B \subset \Omega$ полягає в тому, що відбуваються як подія A так і подія B, і називається перетином (або добутком) подій A і B. Приклад: $A = \{2,4,6\}$, $B = \{3,6\}$, $A \cap B = \{6\}$.

Означ. Події A і $B \subset \Omega$ назив...

якщо $A \cap B = \varnothing$. Приклад: $A=\{2,4,6\}$, $C=\{1,3,5\} \Rightarrow A \cap C = \varnothing$.

6. Подія, яка полягає в тому, що подія A відбулась, а подія B не відбулась називається різницею подій A і B, і позначається $A \setminus B$. Приклад: $A=\{2,4,6\}$, $B=\{3,6\} \Rightarrow$
$A \setminus B = \{2,4\}$.

7. Подія, яка полягає в тому, що подія A не відбулась, називається протилежною до події A, і позначається
$\overline{A} = \Omega \setminus A$. Приклад: $A=\{2,4,6\} \Rightarrow \overline{A} = \{1,3,5\}$

8. $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ – симетрична різниця (відбулась тільки одна із подій A, B).

Означ. Клас подій, який 1) містить Ω; 2) з кожною подією A містить $\overline{A}$, 3) а з кожними подіями A і B містить $A \cup B$ називається алгеброю подій.

Означ. Клас подій $\mathcal{F}$ будемо називати σ-алгеброю подій, якщо:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$;
2. $\forall A \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{F}$;
3. $\forall A_1, \dots, A_n, \dots, A_i \in \mathcal{F}, \forall i \geq 1 \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

8. Нехай $\{A_n\}_{n \geq 1}$, $A_n \in \Omega$ $\forall n$ – нескінченна послідовність подій. Позначимо A^* – подія яка полягає в тому що відбудеться нескінченна кількість подій A_n. ~~множину~~ тих елементів з Ω, які належать нескінченній кількості подій A_n. Тоді

$$A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m.$$

Дійсно, якщо $\omega \in A^* \Rightarrow \omega \in \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m, \forall n$, бо якщо $\exists\, n_0 : \omega \notin \bigcup_{m=n_0}^{\infty} A_m \Rightarrow \omega \in \overline{\bigcup_{m=n_0}^{\infty} A_m} = \bigcap_{m=n_0}^{\infty} \overline{A_m} \Rightarrow \exists$ нескінченна послідовність $A_{n_0}, A_{n_0+1}, \dots$, для якої $\omega \notin A_m, \forall m \geq n_0$, і які не відбудуться $\Rightarrow$ відбудеться лише скінченна кількість подій $\Rightarrow$ ↯. Отже $\omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_n \Rightarrow$
$A^* \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$. Навпаки, якщо $\omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_n \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall n \geq 1,\ \omega \in \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m \Rightarrow \omega \in A^*$. Бо якщо $\omega \notin A^* \Rightarrow$ відб. лише скінч. к-ть $A_m \Rightarrow \exists n_0 : \omega \notin \bigcup_{m=n_0}^{\infty} A_m$.

Нехай A_* – це подія, яка полягає в тому, що відбудуться всі події A_n, за виключенням скінченного числа. Тоді:

$$A_* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m.$$

Дійсно: якщо $\omega \in A_* \Rightarrow \exists n_0 : \omega \in \bigcap_{m=n_0}^{\infty} A_m \Rightarrow \omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$.

Навпаки, нехай $\omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m \Rightarrow \exists n_0 : \omega \in \bigcap_{m=n_0}^{\infty} A_m \Rightarrow$

$\Rightarrow \omega \in A_*$.

Очевидно, що $A_* \subset A^*$. Подія A^* назив. <u>верхньою границею</u> послідовності подій $\{A_n\}_{n \geq 1}$ і позначається $A^* = \overline{\lim} A_n$. Подія A_* назив. нижньою границею послідовності подій $\{A_n\}_{n \geq 1}$ і позначається $A_* = \underline{\lim}_{n \to \infty} A_n$.

Якщо $\overline{\lim}_{n \to \infty} A_n = \underline{\lim}_{n \to \infty} A_n$, то говорять, що послідовність подій $\{A_n\}_{n \geq 1}$ має границю $\lim_{n \to \infty} A_n = \overline{\lim} A_n = \underline{\lim} A_n$.

Наприклад, нехай маємо послідовність подій:

$A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \ldots$ („монотонно спадну").

Тоді $A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m}_{=A_n} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, і $A_* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, бо

<u>Очевидно, що $\bigcap^{\infty} A_n \subset A_*$:</u>

Якщо $\omega \in \bigcap_{n=1} A_n \Rightarrow \omega \in A_n, \forall n \geq 1 \Rightarrow \omega \in \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m, \forall n \Rightarrow \omega \in A_*$.

Нехай тепер $\omega \in A_* \Rightarrow \exists n_0 : \omega \in \bigcap_{m=n_0}^{\infty} A_m$. $A_m \subset A_{n_0} \subset A_{n_0-1} \subset \ldots \subset A_1$

$\Rightarrow \omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow A_* \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

<u>Лекція №2 (2019, 2 курс)</u>

Розглянемо деякий стох. експеримент і подію A, що в ньому спостерігається. Повторимо експеримент n раз і зафіксуємо число експериментів $K_n(A)$, в яких