відбулась подія A.

Означ. Відношення

$$\nu_n(A) = \frac{K_n(A)}{n}$$

називається частотою події A у проведеній серії з n експериментів.

Частота має такі властивості: (самостійно).

1). $0 \le \nu_n(A) \le 1$;

2). $\nu_n(\Omega) = 1$.

3). $\forall A, B \in \Omega$, $A \cap B = \emptyset$: $\nu_n(A \cup B) = \nu_n(A) + \nu_n(B)$

Дійсно: $0 \le K_n(A) \le n$, $K_n(\Omega) = n$ і $K_n(A \cup B) = K_n(A) + K_n(B)$ для $A \cap B = \emptyset$.

Але частота події може змінюватися від серії до серії експериментів, а також при зміні кількості експериментів. Але при достатньо великих n, частота зберігає майже стале значення і це значення є ймовірністю події A. (Це статистичне означення ймовірності). Дамо формально-аксіоматичне означення ймовірності для дискретного простору елементарних подій.

Розглянемо дискретний простір $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\}$, нехай кожному $\omega_n \in \Omega$ поставлено у відповідність число $P(\omega_n) \ge 0$, і такі, що $\sum_{n=1}^{\infty} P(\omega_n) = 1$.

Означ. Для $\forall A \subset \Omega$, ймовірністю $P(A)$ події A називають $P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i)$.

Функцію $P : A \to P(A)$ задану на класі подій називають ймовірністю.

Властивості імовірності: (Самостійно)

1). $0 \le P(A) \le 1$, $\forall A \subset \Omega$;

2) $P(\Omega) = 1$;

3) $\forall A, B \subset \Omega$, $A \cap B = \emptyset$: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

4) $\forall A \subset \Omega$: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

5) $\forall \{A_n\}_{n \ge 1}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ $\forall i \ne j$: $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

Означ. Пару $\{\Omega, P\}$, де Ω – дискретний простір елементарних подій, P – імовірність на класі підмножин Ω, називається дискретним імовірнісним простором.

Приклад. Підкидають симетричну монету до появи „герба". Фіксують загальне число підкидань. Тоді $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots ; \omega_\infty\}$, де $\omega_n = \underbrace{P \dots P}_{n-1 \text{ раз}} Г$, ω_∞ – герб ніколи не з'явився. Поставимо у відповідність ω_n ймовірність $\frac{1}{2^n}$, а ω_∞ – ймовірність 0. Тоді $\sum_{n=1}^{\infty} P(\omega_n) = 1$.

Нехай подія $A = \{$відбулось не більше 4-х підкидань$\} = \{Г, PГ, PPГ, PPPГ\}$.

$$P(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{8 + 4 + 2 + 1}{16} = \frac{15}{16}.$$

Припустимо, що розглядається експеримент із скінченною кількістю однаково можливих результатів: $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$. Тоді природньо кожному результату (елементарній події) ω_i поставити у відповідність ймовірність $P(\omega_i) = \frac{1}{n}$. Нехай подія $A \subset \Omega$ містить m елементарних подій: $A = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_m}\}$. Говорять, що події A сприяють m елементарних подій. Тоді:

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i) = \frac{m}{n}.$$

<u>Класичне означення ймовірності</u>. Розглянемо стохастичний експеримент, який має n однаково можливих результатів. Нехай події A сприяють m із цих результатів. Тоді:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

<u>Приклад.</u> Підкидають 12 гральних кубиків. Яка ймовірність події A, ~~що~~ яке полягає в тому, що кожне число $1, \dots, 6$ випало двічі?

<u>Р-к</u>. $\Omega = \{(i_1, \dots, i_{12}) \mid i_j = \overline{1,6}\}$, $|\Omega| = 6^{12}$.

Подія A відбувається у тому випадку коли ми фіксуємо 2 місця для „1", 2 місця для „2", ..., 2 місця для „6". Це можна зробити кількістю способів:

$|A| = C_{12}(2, 2, \dots, 2) = \frac{12!}{(2!)^6}$. Отже $P(A) = \frac{12!}{2^6 6^{12}}$ $\blacksquare$

<u>Умовна ймовірність.</u>

<u>Означення</u>. Нехай (Ω, P) – дискрет. ймов. простір і $P(B) > 0$, $B \subset \Omega$. Умовною ймовірністю події A при умові, що відбулась подія B, називають

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Із означ. => властивості умовн. ймовірності:

1) $P(A/B) \geq 0$;
2) $P(\Omega/B) = 1$;
3) $P(B/B) = 1$;
4) Якщо маємо послідовність подій (попарно несум-

мішних) $\{A_n\}_{n\geq 1}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, тоді

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n / B\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n/B).$$

Дійсно: 2) $P(\Omega/B) = \dfrac{P(\Omega\cap B)}{P(B)} = 1$.

4) $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n/B\right) = \dfrac{P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cap B\right)}{P(B)} = \dfrac{P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cap B)\right)}{P(B)} =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{P(A_n\cap B)}{P(B)} = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n/B)$

Приклад. Підк. 3 кубики. Ймов. того, що випаде принаймні 1 „6", якщо випали всі різні грані. $P(A/B) = \frac{3\cdot 5\cdot 4}{6\cdot 5\cdot 4} = \frac{1}{2}$.

Теор. 2.1 (Формула множення). Якщо $P(B)>0$, $P(A)>0$, тоді

$$P(A\cap B) = P(A/B)\,P(B) = P(B/A)\,P(A).$$

(з означення).

Нехай $A_1,\dots,A_n$ – випадк. події, такі, що $P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) > 0$.

Тоді: $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1\cap A_2)\dots P\left(A_n/\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$.

Дов. Маємо $\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i \subset \bigcap_{i=1}^{n-2} A_i \subset \dots \subset A_1$. Тому із умови, $P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) > 0 \Rightarrow 0 < P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \leq P\left(\bigcap_{i=1}^{n-2} A_i\right) \leq \dots \leq P(A_1)$.

Методом мат індукції. Для $n=2$ маємо ф-лу множення $P(A_1\cap A_2) = P(A_1)P(A_2/A_1)$.

Нехай для $n=k$ ф-ла справедлива. Тоді для $n=k+1$: $P\left(\bigcap_{i=1}^{k+1} A_i\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i \cap A_{k+1}\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) P\left(A_{k+1}/\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right)$

Означ. Набір випадк. подій утворює повну групу подій $H_1,\dots,H_n$, якщо:

1) $H_1 \cup \dots \cup H_n = \Omega$;

2) $H_i \cap H_j = \emptyset$, $i \neq j$.

(2019, 2к.)

Лекція №3

Теор. 2.2 (Ф-ла повної ймовірності). Якщо $H_1,\dots,H_n$ повна група подій і $P(H_i)>0$, $\forall i=\overline{1,n}$, тоді для $\forall A \subset \Omega$

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\,P(A/H_i).$$

Д-ня. Зауважимо, що $A=\Omega\cap A=\left(\bigcup_{i=1}^{n} H_i\right)\cap A=$

$=\bigcup_{i=1}^{n}(H_i\cap A)$ і $(H_i\cap A)\cap(H_j\cap A)=\emptyset$, $i\neq j$. Тому:

$$P(A)=P\left(\bigcup_{i=1}^{n}(H_i\cap A)\right)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i\cap A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)\,P(A/H_i).$$

$\blacksquare$

Лекція 3 (2020).

Приклад. N білетів, n – простих білетів. У кого більша ймовір. витягти простий білет у 1-го студента чи у другого.

Р-к. H_1 – перший витяг простий, H_2 – 1-й витяг поганий.
B – 2-й витяг простий.

$P(H_1)=\frac{n}{N}$

$P(H_2)=\frac{N-n}{N}$

$$P(B)=P(H_1)P(B/H_1)+P(H_2)P(B/H_2)=\frac{n}{N}\frac{n-1}{N-1}+$$
$$+\frac{N-n}{N}\frac{n}{N-1}=\frac{n(n-1+N-n)}{N(N-1)}=\frac{n}{N}$$ $\blacksquare$

Теор. 3.1 (Ф-ла Байєса). Нехай $H_i,\ i=\overline{1,n}$ – це повна група подій і $P(H_i)>0,\ \forall i=\overline{1,n}$. Тоді $\forall B\subset\Omega$, з $P(B)>0$, маємо

$$P(H_i/B)=\frac{P(H_i)P(B/H_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(H_j)P(B/H_j)}.$$

Д-ня. Із означ. умовн. ймовір., ф-ли множення і ф-ли повн. ймов.:

$$P(H_i/B)=\frac{P(H_i\cap B)}{P(B)}=$$

$$=\frac{P(H_i)P(B/H_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(H_j)P(B/H_j)}.$$ $\blacksquare$

Заув. ~~Умовні~~ Ймовір. $P(H_1), \dots, P(H_n)$ назив. апріорними ймовірностями, а умовні ймовір. $P(H_1/B), \dots, P(H_n/B)$ назив. апостеріорними ймовір.

Приклад. 1) В урні знаходиться n куль. Всі припущення про кількість білих куль рівноможливі. Із урни навмання витягли кулю, і вона виявилась білою. Знайти $P(H_i/B)$, $\forall i=\overline{0,n}$, де H_i – гіпотеза про те, що в урні i білих куль, B – витягли білу кулю.

Р-к. $P(H_i) = \frac{1}{n+1}$, $i=\overline{0,n}$. $P(B/H_i) = \frac{i}{n}$, $i=\overline{0,n}$, подія B – витягли білу кулю. За ф-ю Байєса:

$$P(H_i/A) = \frac{\frac{1}{n+1}\cdot\frac{i}{n}}{\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{n+1}\frac{j}{n}} = \frac{i}{\frac{(n+1)n}{2}} = \frac{2i}{n(n+1)}, i=\overline{0,n}.$$

найбільш ймовірною стала гіпотеза H_n. ∎

2) В урні знаход. 1 куля, про яку відомо, що вона або біла або чорна. В урну поклали білу кулю і після перемішування вийняли навмання одну кулю, яка виявилась білою. Яка ймовірність того, що після цього вийнуть із урни білу кулю.

Р-к. Гіпотези H_1 – була біла куля, H_2 – була чорна куля. $P(H_i) = \frac{1}{2}$, $i=1,2$. B – витягли білу кулю. Треба знайти

$$P(H_1/B) = \frac{\frac{1}{2}\cdot 1}{\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1/2}{3/4} = \frac{2}{3}$$ ∎