Розділ 1

Інтеграли, що залежать від параметра

Лекція 1. 27.01.2021

1.1 Інтеграл Рімана, що залежить від параметра

Нехай $f : [a;b] \times M \to \mathbb{R}$,

$$\forall y \in M : \ f \in R([a;b]); \qquad \mathcal{I}(y) := \int\limits_a^b f(x,y)\,dx, \ y \in M.$$

Властивості функції $\mathcal{I}$?

Озн. Сім'я функцій $f : A \times M \to \mathbb{R}$ називається *рівномірно збіжною* до функції $g : A \to \mathbb{R}$ при $y \to y_0$, якщо

$$\sup_{x \in A} |f(x,y) - g(x)| \to 0, \ y \to y_0.$$

Типовими є випадки, коли y_0 – гранична точка деякої множини M у метричному просторі, або $M = \mathbb{N}$ і $y_0 = +\infty$. В останньому випадку маємо вже відоме означення рівномірно збіжної послідовності функцій.

Лема 1 *Нехай при кожному $y \in M$ функція $f(\cdot, y) \in R([a;b])$ і сім'я функцій $f : [a;b] \times M \to \mathbb{R}$ рівномірно відносно $x \in [a;b]$ збігається до функції $g : [a;b] \to \mathbb{R}$ при $y \to y_0$. Тоді*

1. $g \in R([a;b])$;

2. $\lim\limits_{y \to y_0} \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$.

⌈ Скористаємося означенням Гейне. Розглянемо довільну послідовність $\{y_n : n \geq 1\} \in M \setminus \{y_0\}$, $y_n \to y_0$. Тоді послідовність функцій

$$f_n(x) = f(y_n, x),\ x \in [a;b],\quad n \geq 1,$$

задовольняє умови теореми про граничний перехід під знаком інтеграла. З цієї теореми випливають обидва твердження. ⌋

Теорема 1 *Нехай функція $f \in C([a;b] \times [c;d])$. Тоді $\mathcal{I} \in C([c;d])$.*

⌈ Неперервна функція f на компакті $[a;b] \times [c;d]$ рівномірно неперервна, звідки випливає рівномірна збіжність

$$\sup_{x \in [a;b]} |f(x,y) - f(x,y_0)| \to 0,\ y \to y_0 \in [c;d].$$

Далі твердження теореми випливає з леми. ⌋

Теорема 2 *Нехай функція $f \in C([a;b] \times [c;d])$ задовольняє умови:*

1. $\forall y \in [c;d]:\ f(\cdot, y) \in C([a;b])$;
2. $\forall (x,y) \in [a;b] \times [c;d]$ *існує похідна* $f_2'(x,y)$*;*
3. $f_2' \in C([a;b] \times [c;d])$.

Тоді $\mathcal{I} \in C^{(1)}([c;d])$ *та правильна* формула Лейбніца

$$\mathcal{I}'(y) = \int_a^b f_2'(x,y)\,dx,\ y \in [c;d].$$

⌈ За теоремою про середнє для похідної за напрямком

$$\forall y \in [c;d]\, \forall \Delta y \neq 0\, \exists \theta \in (0;1):\ \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} = f_2'(x, y + \theta\,\Delta y).$$

Унаслідок рівномірної неперервності f_2' на компакті $[a;b] \times [c;d]$,

$$\sup_{x \in [a;b]} |f_2'(x, y+\theta\,\Delta y) - f_2'(x,y)| \to 0,\ \Delta y \to 0.$$

Тому за лемою

$$\mathcal{I}'(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\mathcal{I}(y+\Delta y) - \mathcal{I}(y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \int_a^b \frac{f(x,y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}\,dx = $$
$$= \int_a^b f_2'(x,y)\,dx.$$

Неперервність похідної випливає з Теореми 1. ⌋

Вправа. Довести наступне узагальнення **формули Лейбніца**. Нехай функції $f : [a;b] \times [c;d] \to \mathbb{R}$, $\alpha :\ [c;d] \to [a;b]$, $\beta :\ [c;d] \to [a;b]$ задовольняють умови:

1. $f \in C^{(1)}([a;b] \times [c;d])$;
2. $\alpha,\ \beta$ мають похідні на $[c;d]$.

Тоді

$$\frac{d}{dy}\left(\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx\right) = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f_2'(x,y)\,dx + f(\beta(y),y)\beta'(y) - f(\alpha(y),y)\alpha'(y),\ y \in [c;d].$$

Теорема 3 *Нехай функція* $f \in C([a;b] \times [c;d])$*. Тоді*

$$\int_c^d \mathfrak{I}(y)\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx.$$

⌈ Усі інтеграли існують як інтеграли від неперервних функцій. Функції

$$g(z) = \int_c^z \mathfrak{I}(y)\,dy, \quad h(z) = \int_a^b \left(\int_c^z f(x,y)\,dy\right) dx, \quad z \in [c;d],$$

є розв'язками тієї самої задачі Коші:

$$g'(z) = \mathfrak{I}(z) = \int_a^b f(x,z)\,dx, \quad z \in [c;d] = h'(z); \qquad g(c) = h(c) = 0.$$

Тому $g(z) = h(z),\ z \in [c;d]$. ⌋

Приклад. Для чисел $0 < a < b$ обчислимо

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx.$$

Довизначимо підінтегральну функцію f за неперервністю

$$f(0) = 0, \quad f(1) = b - a.$$

Тоді за теоремою 3

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx = \int_0^1 \left(\int_a^b x^y\,dy\right) dx = \int_a^b \left(\int_0^1 x^y\,dx\right) dy = \ln\frac{1+b}{1+a}.$$

Лекція 2. 29.01.2021

1.2 Рівномірна збіжність невласних інтегралів, що залежать від параметра

1.2.1 Означення. Приклади

Нехай для деякого числа $a \in \mathbb{R}$ і множини M при кожному $y \in M$ збігається невласний інтеграл
$$\mathcal{I}(y) := \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx.$$

Озн. Невласний інтеграл $\mathcal{I}$ називається *рівномірно збіжним* на множині M, якщо
$$\sup_{y \in M} \left| \mathcal{I}(y) - \int_a^A f(x,y)\,dx \right| \to 0,\ A \to +\infty.$$

Приклад. Невласний інтеграл
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^y}$$
збігається рівномірно на кожному проміжку вигляду $[\gamma; +\infty)$, $\gamma > 1$, і не збігається рівномірно на $(1; +\infty)$.

Аналогічно дається означення рівномірно збіжного інтеграла від необмеженої функції.

Приклад. Невласний інтеграл
$$\int_0^1 \frac{dx}{x^y}$$
збігається рівномірно на кожному проміжку вигляду $(-\infty; \gamma]$, $\gamma < 1$, і не збігається рівномірно на $(-\infty; 1)$.

Приклад. Невласний інтеграл Діріхле
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{x}\,dx$$
збігається рівномірно на кожній множині вигляду $\mathbb{R} \backslash (-\gamma; \gamma)$, $\gamma > 0$, і не збігається рівномірно на $\mathbb{R}$.

1.2.2 Умови рівномірної збіжності невласних інтегралів

Теорема 4 ***(критерій Коші)*** *Невласний інтеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ *збігається рівномірно на множині* M $\iff$
$$\forall \varepsilon > 0\, \exists A_0 > a\, \forall A_1 > A_0\, \forall A_2 > A_0\, \forall y \in M : \left| \int\limits_{A_1}^{A_2} f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Теорема 5 ***(Ознака Вейєрштрасса)*** *Нехай функції $f : [a;+\infty) \times M \to \mathbb{R}$, $g : [a;+\infty) \to \mathbb{R}$ задовольняють умови:*

1. $\forall\, (x, y) \in [a;+\infty) \times M : \ |f(x, y)| \le g(x)$;
2. $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ *збігається.*

Тоді невласний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\, dx$ *збігається абсолютно при кожному* $y \in M$ *і рівномірно на* M.

Теорема 6 ***(Ознака Діріхле)*** *Нехай функції $f : [a;+\infty) \times M \to \mathbb{R}$, $g : [a;+\infty) \times M \to \mathbb{R}$ задовольняють умови:*

1. $\exists c \ge 0\ \forall\, A \ge a\ \forall\, y \in M : \ \left|\int\limits_a^A f(x, y)\, dx\right| \le c$;
2. $\forall\, y \in M$ *функція* $g(\cdot, y)$ *монотонна на проміжку* $[a;+\infty)$;
3. $\sup\limits_{y\in M} |g(x, y)| \to 0,\ x \to +\infty$.

Тоді невласний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x, y)g(x, y)\, dx$ *збігається рівномірно на* M.

⌈ Доведення проведемо при спрощуючих додаткових припущеннях, які забезпечують існування первісної $F(\cdot, y)$ функції $f(\cdot, y)$ та можливість використання формули інтегрування частинами. Теорема правильна і без цих спрощень.

Нехай $f(\cdot, y) \in C([a;+\infty))$, $F(x, y) = \int\limits_a^x f(t, y)\, dt$ – її первісна на проміжку $[a;+\infty)$, а функція g має інтегровну по будь-якому відрізку похідну $g_1'(\cdot, y)$ при кожному $y \in M$. Оцінимо залишок інтеграла

$$\sup_{y\in M}\left|\int_A^{+\infty} f(x, y)g(x, y)\, dx\right| = \sup_{y\in M}\left|\int_A^{+\infty} F_1'(x, y)g(x, y)\, dx\right| =$$
$$= \sup_{y\in M}\left|F(x, y)g(x, y)\Big|_{x=A}^{+\infty} - \int_A^{+\infty} F(x, y)g_1'(x, y)\, dx\right| \le$$
$$\le c\sup_{y\in M}|g(A, y)| + c\sup_{y\in M}\int_A^{+\infty} |g_1'(x, y)|\, dx \le 2c\sup_{y\in M}|g(A, y)|.$$

⌋

Теорема 7 ***(Ознака Абеля)*** *Нехай функції $f : [a;+\infty)\times M \to \mathbb{R}$, $g : [a;+\infty)\times M \to \mathbb{R}$ задовольняють умови:*

1. *невласний інтеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\, dx$ *збігається рівномірно на* M;

2. *$\forall\, y \in M$ функція $g(\cdot, y)$ монотонна на проміжку $[a; +\infty)$;*

3. $\sup\limits_{x \geq a} \sup\limits_{y \in M} |g(x,y)| < +\infty$.

Тоді невласний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y) g(x,y)\, dx$ *збігається рівномірно на* M.