1. Облігації

Облігація - це борговий цінний папір, який обертається на ринку і який можна перепродати. Вартість облігації може змінюватися. Наприклад:
Розглянемо просту облігацію вартість 100 гривен, яку викуповують через рік за 110 гривень. Це означає, що відсоткова ставка складає 10% річних. Уявімо, що через півроку ринок готовий давати нам в борг під 5%. Якою буде ціна облагації, за цих умов через 6 місяців? Це буде $110 * (1.05)^{-1/2} = 107,35$. Якою при цьому буде ефективна відсоткова ставка тримача облігації, який купив її на початку?

$$100 * (1+i)^{1/2} = 107,35, i = (107,35/100)^2 - 1 \approx 15,24\%$$

Існує дві причини купувати облігації:
1. Отримати фіксований грошовий потік.
2. Отримати додатковий прибуток при перепродажу облігації (спекулятивний прибуток).

Емітент облігації - це той, хто випустив облігацію, або боржник.
Власник, або утримувач облігації - це той, хто купив облігацію, або кредитор.

1.1. Ризики інвестування в облігації. .

1. Ризик дефолту.
2. Ризик інфляції.
3. Ризик недоотримання прибутку.

1.2. Параметри облігацій.

T - строк дії облігації, в роках.
N - номінал облігації
P - ціна облігації на одиницю номіналу
D - розмір купонної ставки
R - погашення облігації на одиницю номіналу
$g = D/R$ - купонна ставка на одиницю погашення
p - кількість виплат купонів на рік
i, або $i^{(p)}$ - ефективна (або номінальна) відсоткова ставка по облігації.

Розглянемо облігацію, номіналом 100 грн., що погашається у розмірі 110 гривень, по якій сплачується купон у розмірі 8% двічі на рік. Облігація випущена на п'ять років. Продається за 80 гривень.
$T = 5$, $N = 100$, $R = 1.1$, $D = 8\%$ - це означає, що на рік по облігації виплачується 8 грн. $p = 2$. **Важливо**: ставка D визначає річний купон у розмірі DN, який сплачується **рівними частинами** p разів на рік! Тобто у нашому прикладі, щопівроку сплачується 4 грн.
Купонна виплата по облігації - це аналог відсоткової частини при виплаті боргу, тобто прибуток власника облігації. Інший вид прибутку який може отримати утримувач, це прибуток при погашенні, або **капітальний прибуток**. У нашому прикладі капітальний прибуток становить 30 грн. $(R-P)N$. $g = 0.08/1.1 = 0.07272 \approx 7.28\%$.
Напишемо тепер рівняння вартостей для цієї облігації:

$$80 = 4 * 2a_{\overline{5}|}^{(2)} + 110 * \nu^5 = 8\frac{1-\nu^5}{i^{(2)}} + 110 * \nu^5 = 8\frac{1-(1+i)^{-5}}{2((1+i)^{1/2}-1)} + 110 * (1+i)^-5$$

$$x = (1+i)^{1/2},\ (80x^{10} - 110)(2x-2) - 8(x^{10}-1) = 0$$

$$160x^{11} - 160x^{10} - 220x + 220 - 8x^{10} + 8 = 0$$

$$160x^{11} - 168x^{10} - 220x + 228 = 0$$

$$x = 1.076,\ i = (1.076)^2 - 1 = 0.15776 \approx 15.77\%$$

Розглядається облігація номіналом 100 грн., з купонною ставкою 12%, виплатами раз на квартал, погашення відбувається за номіналом, через 5 років. Ефективна відсоткова ставка рівна 10%. Обчисліть ціну облігації.
$T = 5$, $g = D = 0.12$, $R = 1$, $N = 100$, $i = 0.1$, обчислити PN.

$$PN = (DN/p)pa_{\overline{T}|}^{(p)} + (RN)\nu^T = DNa_{\overline{T}|}^{(p)} + (RN)\nu^T$$

$$PN = 12 \cdot \frac{1 - 1.1^{-5}}{4(1.1^{1/4} - 1)} + 100 \cdot 1.1^{-5} = 109.25$$

УТОЧНЕННЯ Ми визначили P як ціну на одиницю номіналу, тоді ціна всієї облігації це не P а PN!

2. Вплив податків

Відсоткові ставки які платить боржник та отримує позичальник НЕ СПІВПАДАЮТЬ! Держава стягує податки, змінюючи таким чином ефективну відсоткову ставку позичальника.
Якщо емітент сплачує купони розміром DN, а держава стягує певний податок із цих платежів, то позичальник отримує менше і відповідно його ефективна ставка знижується.

Нехай t_1 - це відсоткова ставка податку на прибуток, а t_2 -ставка податку на приріст капіталу.

$$PN = (DN/p)pa_{\overline{T}|}^{(p)} + (RN)\nu^T = DNa_{\overline{T}|}^{(p)} + (RN)\nu^T$$
$$P = Da_{\overline{T}|}^{(p)} + R\nu^T$$

Податок на прибуток сплачується із суми DN а податок на приріст капіталу із суми $(R-P)N$ якщо ця величина додатня. Подивимось як зміниться рівняння вартостей якщо врахувати податок на прибуток.

Позначимо $A = PN$ загальну ціну облігації, $C = RN$- загальну виплату при погашення, $K = C\nu^n$ - сучасну вартість виплати при погашенні.

$$A = DN(1-t_1)a_{\overline{T}|}^{(p)} + C\nu^T = DN(1-t_1)\frac{1-\nu^n}{i^{(p)}} + K =$$
$$(DRN(1-t_1)/R)\frac{1-\nu^n}{i^{(p)}} + K = \frac{g(1-t_1)}{i^{(p)}}(RN)(1-\nu^n) + K =$$
$$\frac{g(1-t_1)}{i^{(p)}}(C - C\nu^n) + K = \frac{g(1-t_1)}{i^{(p)}}(C-K) + K.$$

Таким чином формула Мейкема це:

$$A = \frac{g(1-t_1)}{i^{(p)}}(C-K) + K.$$

Формула Мейкема залишається вірною, якщо позика погашається серією з m платежів, так, що через n_l років погашається номінал N_l, $l = \overline{1,m}$. Щоб це довести, розіб'ємо позику на m частин, і тоді для l-тої частини виконана стандартна формула Мейкема:

$$A_l = \frac{g(1-t_1)}{i^{(p)}}(C_l - K_l) + K_l,$$

де $C_l = RN_l$, $K_l = C_l\nu^{n_l}$.

$$A = \sum_{l=1}^m A_l = \frac{g(1-t_1)}{i^{(p)}}(\sum_{l=1}^m C_l - \sum_{l=1}^m K_l) + \sum_{l=1}^m K_l = \frac{g(1-t_1)}{i^{(p)}}(C-K) + K,$$

де $C = \sum\limits_{l=1}^{m} C_l = RN$, $K = \sum\limits_{l=1}^{m} K_l = \sum\limits_{l=1}^{n} RN_l \nu^{n_l}$.

Формула Мейкема залишається справедливою лише тоді, коли виконані умови:
1. Погашення і купівля позики відбуваються в моменти купонних виплат, одразу після виплати
2. Податок нараховується негайно після сплати купону
3. Купонна ставка D та розмір податку t_1 сталі

Розглянемо ситуацію коли порушується умова 2, і податок нараховується раз на рік. Тоді рівняння вартостей буде мати вигляд:

$$A = DNa^{(p)}_{\overline{T}|} + C\nu^T - DNt_1 a_{\overline{T}|}$$

Розглянемо ситуацію, коли на додачу до t_1 також має місце податок на приріст капіталу t_2. Податок на приріст капіталу нараховується на суму $C - A$ якщо вона більша нуля.

$$A = \frac{g(1-t_1)}{i^{(p)}}(C-K) + K.$$

$$A - C = C\left(\frac{g(1-t_1)}{i^{(p)}} - 1\right) - K\left(\frac{g(1-t_1)}{i^{(p)}} - 1\right) = (C-K)\left(\frac{g(1-t_1)}{i^{(p)}} - 1\right)$$

виникає питання коли цей вираз буде ≤ 0. Осклыки K - сучасна вартість виплат при погашенні, то при $i > 0$ $K < C$. Отжже для того, щоб $A - C \leq 0$ необхідно і достатньо, щоб $\frac{g(1-t_1)}{i^{(p)}} - 1 \leq 0$, або

$$i^{(p)} \geq g(1-t_1).$$

Тобто умова $A \leq C$ еквівалентнта $i^{(p)} \geq g(1-t_1)$. Якщо ця умова не виконана то приросту капіталу немає і податок платити не потрібно!

Вважаємо, що приріст капіталу є, розглянемо як зміниться формула Мейкема. Зауважимо, що для частини позики яка погашається в момент n_l приріст капіталу дорівнює $(R-P')N$, де $P' = A'/N$, а A' - це шукана ціна з урахуванням податку. Тоді розмір податку на приріст капіталу для виплати в момент n_l рівний $t_2(R-P')N_l$, а сучасна вартість всіх податкових виплат (на приріст капіталу рівна):

$$t_2(R-P')\sum_{l=1}^{m} N_l\nu^{n_l} = t_2(1-P'/R)\sum_{l=1}^{m} RN_l\nu^{n_l} =$$

$$t_2(1-P'/R)K = t_2(1-(P'N)/(RN))K = t_2(1-A'/C)K.$$

Тепер ми можемо написати рівняння вартостей:

$$A' = \frac{g(1-t_1)}{i^{(p)}}(C-K) + K - t_2(1-A'/C)K$$

$$A' = \frac{(1-t_2)K + \frac{(1-t_1)(C-K)}{i^{(p)}}}{1-t_2K/C} = \frac{(1-t_2)K + (1-t_1)I}{1-t_2K/C},$$

де $I = g(C-K)/i^{(p)}$.

Розглянемо приклад. Нехай маємо облігацію яка купується за ціною 80 грн, номіналом у 100 гривень, погашається за номіналом (зауважимо, що якщо не сказано іншого, то облігація завжди поагашається за номіналом), термін 5 років, розмір річного купону 8%, кількість купонних платежів 2 на рік, покупець платить податок на прибуток у розмірі 20%. Обчислити норму прибутку покупця.
Розв'язання. Параметри облігації: $D = 8\%$, $T = 5$, $p = 2$, $P = 0.8$, $N = 100$, $R = 1$, $t_1 = 0.2$, $t_2 = 0$, $A = 80$, $g = D/R = D$

$$A = \frac{g(1-t_1)}{i^{(p)}}(C-K) + K.$$

$$80 = \frac{0.08 * (1-0.2)}{i^{(2)}}(100 - 100\nu^5) + 100\nu^5$$
$$80 = \frac{0.08 * (1-0.2)}{2((1+i)^{1/2}-1)}(100 - 100\nu^5) + 100\nu^5$$
$$80(1+i)^5 = \frac{0.032(100(1+i)^5 - 100)}{(1+i)^{1/2}-1} + 100,$$
$$x = (1+i)^{1/2}$$
$$80x^{10} = \frac{0.032(100x^{10} - 100)}{x-1} + 100,$$
$$x = 1.059,\ i = x^2 - 1 = 12.15\%$$

З'ясуємо чи є приріст капіталу? Ну звичайно, що є :) Домашнє завдання - обчислити i якщо $t_2 = 12\%$.

Інша задача. Нехай розглядається облігація з номіналом у 100 грн, що погашається за 95 гривень, через 5 років, купонна ставка рівна 10%, купонні виплати здійснюються щомісяця, $t_1 = 20\%$, $t_2 = 15\%$. Обчислити окремо ціну облігації для покупця що сплачує лише податок на прибуток і для покупця що сплачує обидва податки, щоб отримати річну ефективну норму прибутку у 6%.