МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

В.В. ГОЛОМОЗИЙ
М.В. КАРТАШОВ
К.В. РАЛЬЧЕНКО

ЗБІРНИК ЗАДАЧ З ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

Навчальний посібник

КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ 2015

УДК 519.2 (075.8)
ББК 22.17я73
Г61

Рецензенти:
д-р фіз.-мат. наук, проф. О.І. Клесов,
д-р фіз.-мат. наук, проф. О.М. Кулик

Рекомендовано до друку
вченою радою механіко-математичного факультету
(протокол № 3 від 22 жовтня 2015 року)

Голомозий В.В.
Г61 Збірник задач з теорії ймовірностей та математичної статистики : навч. посібник / В.В. Голомозий, М.В. Карташов, К.В. Ральченко. – К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2015. – 366 с.
ISBN 978-966-439-853-1

Посібник містить задачі з курсів "Теорія ймовірностей", "Математична статистика" та "Додаткові розділи теорії ймовірностей" і призначений для студентів університетів, математичних та статистичних спеціальностей.
Наведено вказівки до розв'язання та відповіді.
Для студентів університетів
Бібліогр. 44 назв.

УДК 519.2 (075.8)
ББК 22.17я73

ISBN 978-966-439-853-1

Передмова

Посібник містить задачі до матеріалу семестрових курсів лекцій з теорії ймовірностей, математичної статистики, та курсу додаткових розділів теорії ймовірностей і випадкових процесів, які викладалися для студентів спеціальностей 'Математика', 'Статистика', 'Актуарна математика' третього курсу механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка протягом 1988–2014 рр. Обсяг матеріалу всіх курсів розрахований на 137 лекційних години та 43 години лабораторних занять у першому та другому семестрах.

Зміст та структура матеріалу відповідає програмі курсів та вимогам кредитно-модульної системи організації навчального процесу.

При створенні посібника використані підручники [4 – 10].

Укладачі посібника вдячні викладачам кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики О.І. Василик, В.П. Кноповій, А.Ю. Рижову, Г.М. Шевченку, Р.Є. Ямненку, які редагували список задач. Окрема подяка професору Ю.С. Мішурі, з чиєї ініціативи був створений збірник.

Особлива подяка рецензентам посібника – професорам О.І. Клесову та О.М. Кулику, за цінні зауваження й поради.

Розділ 1

Теорія ймовірностей

Вступ: теми розділу та їх призначення

1. Стохастичний експеримент, елементарні події. Простір елементарних подій, випадкові події. Операції над випадковими подіями. Засвоєння основних понять теорії ймовірностей. Вміння фіксувати результати стохастичного експерименту та будувати простір елементарних подій. Знаходити формальне зображення висловлювань щодо результату експерименту через випадкові події, та інтерпретувати логічні операції над висловлюваннями як теоретико-множинні операції над подіями.

2. Аксіоми теорії ймовірностей. Властивості ймовірностей. Оволодіння аксіомами теорії ймовірностей шляхом їх застосування до виводу ряду важливих властивостей ймовірності.

3,4. Класичне означення ймовірностей. На основі вміння формулювати простір елементарних подій застосувати методи комбінаторики для розв'язання задач зі скінченим простором елементарних подій, що є симетричними. Застереження: розв'язання без побудови простору елементарних подій вважаються некоректними.

5. Геометричне означення ймовірностей. На основі побудови простору елементарних подій застосувати вміння обчислення довжин, площ та об'ємів до розв'язання задач з евклідовим простором елементарних подій.

6. Умовна ймовірність. Незалежні випадкові події. Ілюстрація означення умовної ймовірності та його інтерпретації, використання незалежності для обчислення ймовірностей складних подій.

7. Формула повної ймовірності. Формула Байеса. Застосування даних формул для обчислення ймовірностей подій, що пов'язані з багатоетапними стохастичними експериментами.

8, 9. Дискретні випадкові величини: розподіл, числові характеристики, сумісний розподіл, незалежність, функції від дискретних величин. Вивчення властивостей дискретного розподілу, ознайомлення з основними класами дискретних розподілів, оволодіння методами обчислення математичних сподівань і дисперсій дискретних величин та функцій від них, та обчислення ймовірностей подій, що породжені такими величинами. Вміння оперувати сумісним дискретним розподілом, знати та застосовувати властивість незалежності дискретних величин.

10, 11. Абсолютно неперервні величини: щільність, функція розподілу, числові характеристики, функції від неперервних величин. Вивчення властивостей щільності, функції розподілу, ознайомлення з основними класами абсолютно неперервних розподілів, оволодіння методами обчислення математичних сподівань і дисперсій неперервних величин та функцій від них, та обчислення ймовірностей подій, що породжені такими величинами.

12. Властивості математичного сподівання та його обчислення. Закріплення теоретичних знань про основні властивості математичного сподівання шляхом їх застосування при доведенні тотожностей, що пов'язані з математичним сподіванням.

13, 14. Випадкові вектори: сумісна функція розподілу, сумісна щільність, числові характеристики, функції від випадкових векторів та їх перетворення. Вивчення властивостей сумісних функцій розподілу та сумісних щільностей, оволодіння методами обчислення числових характеристик та ймовірностей подій, що пов'язані з випадковими векторами. Вміння знаходити сумісні розподіли векторних перетворень випадкових векторів.

15. Незалежні випадкові величини та функції від них. Застосування властивості незалежності випадкових величин до обчислення числових характеристик та ймовірностей подій, що породжені цими величинами.

16. Нормальні випадкові величини та вектори. Оволодіння методами аналізу перетворень випадкових величин та векторів на прикладі нормальних величин і векторів.

17. Розподіли Пуассона, показниковий, Ерланга, гама. Оволодіння методами аналізу перетворень випадкових величин та векторів на прикладі величин з відповідними розподілами.

18. Збіжність за ймовірністю. Закон великих чисел. Закріплення знань щодо збіжності за ймовірністю встановленням певних її властивостей та щодо закону великих чисел шляхом отримання його наслідків.

19. Збіжність майже напевне. Лема Бореля-Кантеллі. Посилений закон великих чисел. Закріплення знань щодо збіжності майже напевне встановленням певних її властивостей та щодо леми Бореля-Кантеллі і посиленого закону великих чисел шляхом отримання їх наслідків.

20. Нерівності Чебишева та Колмогорова. Закріплення знань про ці нерівності шляхом їх застосувань.

21. Характеристичні функції. Закріплення знань властивостей характеристичних функцій через їх використання, знайомство з застосуваннями методу характеристичних функцій для доведення граничних теорем.

22. Центральна гранична теорема. Оволодіння методом доведення центральної граничної теореми, умовами її виконання, та способами застосування.

23. Збіжність в основному та слабка. Закріплення знань про означення та властивості вказаних видів збіжності випадкових величин.

24. Процеси Пуассона і Вінера. Розвиток вмінь застосування центральної граничної теореми та характеристичних функцій, знайомство з властивостями та застосуванням даних процесів.

1.1. Стохастичний експеримент, простір елементарних подій, події

Література: [1, с.8–12],[2,с.4-12]. Ауд: 1-8, сам: 9-16.

1. Монету підкидають тричі. Описати простір елементарних подій. Описати події: A – один раз з'явиться аверс, B – при другому підкиданні з'явиться аверс. Описати події: $A \cap B$, $A \cup \overline{B}$, $\overline{A}$.

2. Гральний кубик підкидають двічі. Описати простір елементарних подій. Описати події: A – сума очок, які з'явилися, дорівнює 8; B – хоча б раз випало 6 очок. Описати $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $\overline{B}$.

3. Монету підкидають доти, поки не з'явиться аверс. Описати простір елементарних подій. Описати події: A – аверс випаде не пізніше шостого підкидання, B – аверс випаде при парній кількості підкидань. Описати події: $\overline{B}$, $A \cup B$, $A \cap B$.

4. Випадковий експеримент полягає в тому, що вимірюються дві величини ξ_1 та ξ_2, які можуть набувати всіх значень з відрізку $[0, 1]$. Описати простір елементарних подій. Описати події: A – максимальне з ξ_1 та ξ_2 менше ніж a; B – вектор (ξ_1, ξ_2) має довжину, яка не перевищує b; C – величина, обернена до значення ξ_1, не перевищує c. Описати події: $A \cap B$, $A \cap C$, $C \cap B$, $A \cap B \cap C$.

5. Нехай A, B, C – випадкові події. Користуючись операціями додавання, множення, віднімання та заперечення, знайти вирази для подій, які полягають в тому, що з подій A, B, C: (а) відбулася тільки подія A; (б) відбулися тільки A і B; (в) відбулися всі три події; (г) відбулася хоча б одна з цих подій; (д) відбулася одна і тільки одна подія; (е) не відбулося жодної події; (є) відбулося дві і тільки дві події; (ж) відбулося не більше двох подій.

6. Об'єднання $A \cup B$ двох подій можна виразити як об'єднання двох несумісних подій $A \cup B = A \cup (B \setminus A \cap B)$. Виразити аналогічним чином об'єднання трьох подій.

7. Нехай $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Знайти всі елементи найменшої алгебри, яка містить події $A = \{1, 2\}, B = \{4, 5, 6\}$.

8. Для зліченного простору $\Omega = \{\omega_n, n \geq 1\}$ описати найменші алгебру та сигма-алгебру, які містять усі одноточкові множини.

9. Подія A полягає в тому, що число, взяте навмання з відрізка $[-10, 10]$ не більше 4, а подія B – модуль цього числа не перевищує 2. Що означають події: $A \cup B$, $A \cap B$, $B \setminus A$, $\overline{B}$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A}$?

10. Випадковий експеримент полягає в тому, що монету підкидають доти, поки вона не випаде двічі підряд однією і тією ж стороною. Описати простір елементарних подій. Описати події: A – експеримент закінчиться до восьмого підкидання; B – експеримент закінчиться при парній кількості підкидань; C – експеримент триватиме нескінченно довго.

11. Випадковий експеримент полягає у вимірюванні величин ξ_1 та ξ_2, кожна з яких може набувати довільного дійсного значення. Простір елементарних подій можна представити у вигляді множини точок на площині з координатами (ξ_1, ξ_2). Вказати множини точок на площині, які відповідають подіям: A – значення ξ_1 менше значення ξ_2; B – мінімальне з ξ_1 та ξ_2 менше b; C – відстань від точки (ξ_1, ξ_2) до фіксованої точки (x, y) не більша ніж c.

12. Робітник виготовив n деталей. Нехай подія A_k, $k = \overline{1, n}$, означає, що k-та деталь має дефект. Виразити через події A_k, $k = \overline{1, n}$, подію, яка полягає в тому, що: (а) жодна з деталей не має дефектів; (б) хоча б одна деталь має дефект; (в) тільки одна деталь має дефект; (г) не більше двох деталей мають дефекти; (д) хоча б дві деталі не мають дефектів; (е) тільки дві деталі мають дефекти.

13. Довести, що клас $\mathfrak{A}$ є алгеброю тоді й тільки тоді, коли (а) $\Omega \in \mathfrak{A}$, (б) з $A, B \in \mathfrak{A}$ випливає $A \setminus B \in \mathfrak{A}$.

14. Довести, що: (а) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$,
(б) $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, (в) $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$,
(г) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, (д) $\overline{A \Delta B} = \overline{A} \Delta \overline{B}$, (е) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$,
(є) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

15. Нехай $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – випадкові події, $\mathcal{A}$ – найменша алгебра, яка містить події $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Довести, що кожна випадкова подія B, яка належить $\mathcal{A}$, є сумою деякого числа, не більшого ніж

2^n, "основних" випадкових подій виду

$$A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k} \cap \overline{A}_{j_1} \cap \overline{A}_{j_2} \cap \ldots \cap \overline{A}_{j_{n-k}},$$

де $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ – деяка k-підмножина множини $\{1, 2, \ldots, n\}$, а $\{j_1, j_2, \ldots, j_{n-k}\}$ – ті числа множини $\{1, 2, \ldots, n\}$, які не входять в $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$. Скільки множин міститься в $\mathcal{A}$?

16. Обчислити $\underline{\lim} A_n$, $\overline{\lim} A_n$ у випадку, коли: (а) $\Omega = \mathbb{R}$, а події $A_n = (-\infty, a_n)$, (б) $A_{2n+1} = A$, $A_{2n} = B$, (в) $A_n \uparrow A$, (г) $A_n \downarrow A$.

17. Експеримент полягає в тому, що гральний кубик підкидають доти, поки не випаде 6 очок. Описати простір елементарних подій. Скільки елементарних подій входить в подію A – експеримент закінчиться до четвертого підкидання?

18. Експеримент полягає в тому, що монету підкидають доти, поки двічі підряд не випаде аверс. Описати простір елементарних подій. Скільки елементарних подій входить в подію A – експеримент закінчиться до сьомого підкидання?

19. Довести, що для довільної послідовності подій $(A_n, n \geq 1)$ має місце зображення $\cup_{n\geq 1} A_n = \cup_{n\geq 1} B_n$, де попарно несумісні події

$$B_1 = A_1, \quad B_n = A_n \setminus \cup_{k=1}^{n-1} A_k,\ n > 1.$$

20. Випадкові події $(H_n, n \geq 1)$ утворюють повну групу подій. Довести тотожність $\sigma[\{H_n, n \geq 1\}] = \{\cup_{i\subset I} H_i,\ I \subset \mathbb{N}\}$.

21. На множині E точок ω виділено n підмножин $A_i, i = \overline{1, n}$. Довести, що, використовуючи A_i, можна побудувати такі множини $B_k, k = \overline{1, 2^n}$, що для довільної скінченої функції

$$F(\omega) = f(\mathbb{1}_{A_1}(\omega), \mathbb{1}_{A_2}(\omega), \ldots, \mathbb{1}_{A_n}(\omega))$$

знайдуться такі сталі c_k, що $F(\omega) = \sum_{k=1}^{2^n} c_k \mathbb{1}_{B_k}(\omega)$. Тут $\mathbb{1}_C(\omega)$ – індикаторна функція множини C.

22. Довести, що перетин будь якого класу сигма-алгебр є σ-алгеброю.

23. Для множини $A \subset \Omega$ описати $\sigma[\{A\}]$.

24. Нехай $K \subset 2^\Omega$. Обчислимо: (а) клас K_1, що містить $\varnothing, \Omega$ та всі множини A з $A \in K$ або $\overline{A} \in K$, (б) клас K_2, що містить всі скінченні перетини множин з K_1, (в) клас K_3, що складається зі

скінчених об'єднань попарно неперетинних множин з K_2. Довести, що K_3 збігається з найменшою алгеброю $\alpha[K]$, яка містить K.

25. Довести, що $\sigma[K] = \sigma[\alpha[K]]$ для довільного класу $K \subset 2^\Omega$.

26. Довести для довільних подій (A_n), що

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} 1\!\!\mathrm{I}_{A_n} - \underline{\lim}_{n\to\infty} 1\!\!\mathrm{I}_{A_n} = 1\!\!\mathrm{I}_{\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n - \underline{\lim}_{n\to\infty} A_n}.$$

27. Послідовність випадкових подій (B_n) має границю B, якщо $B = \overline{\lim}_{n\to\infty} B_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} B_n = B$, Для довільної послідовності подій (A_n) визначимо $C_n = A_1 \Delta \ldots \Delta A_n$. Довести, що послідовність C_n має границю тоді і тільки тоді, коли $\lim_{n\to\infty} A_n = \varnothing$.

28. Для алгебр $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ описати алгебру $\alpha[\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2]$.

1.2. Аксіоми теорії ймовірностей. Властивості імовірностей

Література: [1, с.1–18], [2,с.1-17]. Сам: 1-8.

1. Довести для сигма-алгебри $\mathfrak{F}$, і множини $C \notin \mathfrak{F}$, що

$$\sigma[\mathfrak{F} \cup \{C\}] = \{(A_1 \cap C) \cup (A_2 \cap \overline{C}),\ A_k \in \mathfrak{F}\}.$$

2. Нехай $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$. Всім числам приписані ймовірності, пропорційні їх величинам. Знайти ці ймовірності. Яка ймовірність того, що в результаті експерименту з'явиться: (а) парне число; (б) непарне число; (в) число, кратне q?

3. Експеримент полягає в тому, що монету підкидають доти, поки вона не випаде двічі підряд однією й тією ж стороною. Побудувати ймовірнісний простір. Знайти ймовірність того,що: (а) експеримент закінчиться на парному кроці; (б) експеримент закінчиться на непарному кроці; (в) експеримент ніколи не закінчиться.

4. Нехай p_1, p_2, p_{12} – дійсні числа. Довести, що для того, щоб існували випадкові події A і B такі, що $\mathbf{P}(A) = p_1$, $\mathbf{P}(B) = p_2$, $\mathbf{P}(A \cap B) = p_{12}$, необхідно і достатньо, щоб виконувались нерівності: $1 - p_1 - p_2 + p_{12} \geq 0$, $p_1 - p_{12} \geq 0$, $p_2 - p_{12} \geq 0$, $p_{12} \geq 0$.

5. Довести (а) рівність $\mathbf{P}(A\Delta B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - 2\mathbf{P}(A \cap B)$; (б) нерівність трикутника $\mathbf{P}(A\Delta B) \le \mathbf{P}(A\Delta C) + \mathbf{P}(C\Delta B)$; (в) нерівність різниць $\mathbf{P}((\cup A_i)\Delta(\cup B_i)) \le \sum_i \mathbf{P}(A_i \Delta B_i)$.

6. Послідовність подій A_n збігається до границі A, якщо $A = \underline{\lim} A_n = \overline{\lim} A_n$. Довести, що тоді $\mathbf{P}(A) = \lim \mathbf{P}(A_n)$.

7. Нехай $A_k \in \mathfrak{F}$, $\mathbf{P}(A_k) = 1, k \ge 1$. Довести, що $\mathbf{P}(\cap_{k\ge 1} A_k) = 1$.

8. Розглядається експеримент з n рівноможливими, єдиним чином можливими і несумісними результатами. Події A сприяють m з цих результатів. Замість звичайного класичного означення ймовірності визначимо "ймовірність" як: (а) $\mathbf{P}(A) = m^2/n^2$; (б) $\mathbf{P}(A) = \sqrt{m/n}$. Отримати формули, які відповідають змісту теорем додавання (про ймовірність об'єднання несумісних подій) і множення ймовірностей (про ймовірність перерізу незалежних подій) в цих випадках. Знайти таке означення ймовірності, щоб змісту теореми додавання ймовірностей відповідали формули множення ймовірностей.

9. Довести, що клас підмножин $\mathbb{R}$ вигляду $F \cap G$, де F – відкрита, а G – замкнена множина, утворює алгебру, але не є сигма-алгеброю.

10. Довести (а) нерівність Буля: $\mathbf{P}(A \cap B) \ge 1 - \mathbf{P}(\overline{A}) - \mathbf{P}(\overline{B})$; (б) нерівність $\mathbf{P}(\bigcap_{k=1}^n A_k) \ge \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(A_k) + 1 - n$.

11. Для довільних подій A, B довести нерівність

$$\mathbf{P}(A \cup B)\mathbf{P}(A \cap B) \le \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B).$$

12. Подія C вдвічі більш ймовірна, ніж A, а подія B настільки ж ймовірна, як події A і C разом. Ці події несумісні, і їх об'єднання співпадає з усім простором елементарних подій. Знайти ймовірності подій A, B, C.

13. Відомі ймовірності подій A, B, $A \cap B$. Знайти ймовірності подій: $A \cup B$, $\overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A} \cup B$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A \cup B}$, $\overline{A \cap B}$.

14. Перевірити наступні тотожності, застосовуючи аксіому додавання ймовірностей для зліченої множини несумісних подій:

$$\sum\nolimits_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \quad 0 < q < 1;$$

$$1+\sum\nolimits_{k=1}^{\infty}\frac{m+k}{m}\frac{(N-m)^k}{(N+1)\ldots(N+k)}=\frac{N}{m}.$$

15. Нехай $\Omega=\{1,2,\ldots,2n\}$. Всім числам приписані ймовірності, пропорційні логарифмам цих чисел. Знайти ці ймовірності. Знайти ймовірність того, що в результаті експерименту з'явиться: (а) парне число; (б) непарне число.

16. Нехай $p_n, n=0,1,2,3,$ – ймовірність того, що відбулося рівно n подій з A,B,C. Знайти вираз для $p_n, n=0,1,2,3,$ через $\mathbf{P}(A)$, $\mathbf{P}(B)$, $\mathbf{P}(C)$, $\mathbf{P}(A\cap B)$, $\mathbf{P}(A\cap C)$, $\mathbf{P}(B\cap C)$, $\mathbf{P}(A\cap B\cap C)$.

17. Нехай $\mathbf{P}(A)\geq 0.8$, $\mathbf{P}(B)\geq 0.8$. Довести, що $\mathbf{P}(A\cap B)\geq 0.6$.

18. Довести, що

$$\mathbf{P}^2(A\cap B)+\mathbf{P}^2(\overline{A}\cap B)+\mathbf{P}^2(A\cap\overline{B})+\mathbf{P}^2(\overline{A}\cap\overline{B})\geq 1/4$$

для всіх випадкових подій A, B.

19. Довести для довільних випадкових подій $A,B\in\mathfrak{F}$ таку нерівність: $|\mathbf{P}(A\cap B)-\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)|\leq 1/4$.

20. Нехай $(A_k, k=\overline{1,n})$ – випадкові події. Визначимо $S_0=1$, та

$$S_k=\sum\nolimits_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n}\mathbf{P}(A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k}),\ k\geq 1.$$

(а) Нехай B_m – подія, що полягає у тому, що одночасно відбудеться точно m подій з сукупності (A_k). Довести, що

$$\mathbf{P}(B_m)=\sum\nolimits_{k=m}^{n}(-1)^{k-m}C_k^m S_k.$$

(б) Нехай C_m – подія, що полягає у тому, що одночасно відбудеться принаймні m подій з сукупності (A_k). Довести, що

$$\mathbf{P}(C_m)=\sum\nolimits_{k=m}^{n}(-1)^{k-m}C_{k-1}^{m-1}S_k.$$

(в) Довести для всіх $m\leq n/2$ нерівності Бонфероні:

$$\sum\nolimits_{k=1}^{2m}(-1)^{k-1}S_k\leq\mathbf{P}(\cup_{k=1}^{n}A_k)\leq\sum\nolimits_{k=1}^{2m-1}(-1)^{k-1}S_k.$$

(г) Довести тотожність Пуанкаре: $\mathbf{P}(\cup_{k=1}^{n}A_k)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}S_k$.

(д) Довести нерівності Фреше: $S_{k+1}/C_n^{k+1}\leq S_k/C_n^k$ при $k<n$.

(е) Довести нерівності Гумбела:

$$(C_n^{k+1}-S_{k+1})/C_{n-1}^{k}\leq(C_n^k-S_k)/C_{n-1}^{k-1}.$$

21. Монету підкидають до того моменту, коли вона двічі підряд не випаде однією стороною. Побудувати простір елементарних подій. Знайти імовірність парного числа підкидувань.

22. Три гравці А, Б, В проводять шаховий турнір. У першому турі грають А і Б, В – вільний. У другому грає переможець першого туру та В. У третьому – переможець другого туру та гравець, що відпочивав у другому турі, і так далі. Гра продовжується до двох підряд перемог одного з гравців, який оголошується переможцем. Нічийних партій немає. Побудувати простір елементарних подій. Знайти імовірність виграшу для кожного гравця.

23. Два електрони навмання розміщуються на орбітах двох різних атомів. Знайти ймовірність того, що один з атомів не отримав додаткових електронів.

24. Визначимо відстань між подіями A, B через

$$\rho(A, B) = P(A \Delta B)/P(A \cup B),$$

де $0/0 \equiv 0$. Довести відповідну нерівність трикутника.

25. Для довільних подій $(A_k, k = \overline{1, n})$ довести нерівність

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \geq \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(A_k)\right)^2 / \left(\sum_{1 \leq k, j \leq n} \mathbf{P}(A_k \cap A_j)\right).$$

26. Випадкова подія A на імовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{F}, \ \mathbf{P})$ називається атомом, якщо $\mathbf{P}(A) > 0$ та для довільної події $B \subset A$ має місце одна з рівностей $\mathbf{P}(B) = 0$ або $\mathbf{P}(A \setminus B) = 0$. Довести, що:
(а) множина всіх атомів не більш ніж зліченна,
(б) для кожного $\varepsilon > 0$ існує розбиття $\Omega = \cup_{n \geq 1} H_k$ з $H_k \in \mathfrak{F}$, де H_k – або атом з імовірністю не меншою за ε, або випадкова подія з імовірністю меншою за ε.

27. Довести, що множина $\{\mathbf{P}(A), A \in \mathfrak{F}\}$ є замкненою.

28. Довести, що для дискретного імовірнісного простору з $\mathbf{P}(\{\omega_n\}) = p_n$ та зі спадною послідовністю $p_n > 0$ такою, що $p_n \leq \sum_{k > n} p_k$, множина $\{\mathbf{P}(A), A \subset \Omega\} = [0, 1]$.

29. Клас усіх зліченних підмножин $\mathbb{N}$ та їх доповнень утворює сигма-алгебру. Функція $\mathbf{Q}$ на ній дорівнює 0 або 1 відповідно до

скінченності чи нескінченності множини. Довести, що $\mathbf{Q}$ є скінченно адитивною ймовірністю, однак не сигма-адитивною.

30. Довести, що

$$\cup A_j \setminus \cup B_j \subset \cup(A_j \setminus B_j) \ \cap \ (\cap A_j \setminus \cap B_j) \subset \cup(A_j \setminus B_j).$$

31. Події $(A_n, n \geq 1)$ попарно несумісні. Довести: $\mathbf{P}(A_n) \to 0$, $n \to \infty$.

1.3. Класичне означення ймовірностей

Література: [1, с.19–21], [2,с.17-19]. Ауд: 1-7, сам: 8-14.

1. На вершину гори ведуть сім доріг. Скількома способами можна піднятися на гору та потім спуститися з неї ? Розв'язати ту ж задачу за припущення, що підйом та спуск здійснюються різними шляхами.

2. Скількома способами можуть випасти три гральних кубики? В скількох випадках хоча б на одному кубику випаде шість очок? В скількох випадках хоча б на одному кубику з'явиться шість очок, а на іншому – три?

3. З колоди, яка налічує 52 карти, вибрали 10 карт. В скількох випадках серед цих карт є: (а) хоча б один туз ? (б) рівно один туз ? (в) не менше двох тузів ? (г) рівно два тузи?

4. Скількома способами можна впорядкувати множину $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ так, щоб кожне парне число мало парний номер?

5. Підкидають 12 (різних) гральних кубиків. Скількома способами можуть випасти: (а) всі грані кубика; (б) кожна грань двічі?

6. Знайти ймовірність того, що серед k цифр, кожна з яких вибрана навмання (вибірка з поверненням): (а) не входить 0; (б) не входить 1; (в) не входить ні 0, ні 1; (г) не входить або 0, або 1.

7. В лотереї n білетів, серед яких m виграють. Знайти ймовірність виграшу для того, хто придбав k білетів.

8. На залізничній станції є n світлофорів. Скільки різних сигналів можна подати за допомогою цих світлофорів, якщо кожен з них має три стани: горить зелене, або жовте, або червоне світло?

9. Скількома способами можна вибрати з колоди, що складається з 52 карт, шість карт так, щоб серед них були всі чотири масті?

10. Скількома способами можна впорядкувати множину $\{1, 2, \ldots, n\}$ так, щоб кожне число, кратне 2, и кожне число, кратне 3, мали номери, кратні 2 і 3 відповідно?

11. Скількома способами можна розділити $a + b + c$ різних предметів на три групи так, щоб в першій групі було a, в другій – b і в третій – c предметів?

12. Знайти ймовірність того, що серед трьох цифр, кожна з яких вибрана навмання, буде лише 1, 2, 3 різних.

13. Учасник лотереї “Спортлото” з 49 назв видів спорту повинен назвати шість. Повний виграш отримає той, хто правильно назве всі шість видів. Виграш отримає і той, хто правильно назве не менше трьох видів. Знайти ймовірність повного виграшу. Яка ймовірність виграшу в цій лотереї ?

14. З послідовності чисел $1, 2, \ldots, n$ вибирають навмання k різних чисел. Яка ймовірність того, що: (а) кожне з вибраних чисел кратне даному числу p; (б) кожне з вибраних чисел кратне хоча б одному з двох взаємно простих чисел p і q; (в) серед вибраних чисел є хоча б одне кратне p ?

15. Скільки різних костей доміно можна зробити, використовуючи числа $0, 1, \ldots, n$?

16. Скількома способами можна розділити між трьома людьми $3n$ предметів так, щоб кожен отримав n предметів?

17. Скількома способами можна розділити колоду з 52 карт навпіл так, щоб в кожній частині було по два тузи?

18. Міжнародна комісія складається з дев’яти чоловік. Матеріали комісії зберігаються в сейфі. Скільки замків повинно бути на сейфі, скільки ключів потрібно виготовити і як їх розподілити між членами комісії, щоб доступ до матеріалів був можливим тоді і тільки тоді, коли збереться не менше шести членів комісії? Розглянути цю задачу для випадку, коли комісія складається з n членів, а сейф можна відкрити тільки в присутності не менше m членів комісії.

19. Скількома способами можна розділити n однакових подарунків серед m дітей? Скільки серед них способів, коли кожна дитина отримує хоча б один подарунок?

20. Гральний кубик підкидають шість разів. Знайти ймовірність того, що: (а) випадуть всі шість граней; (б) випадуть хоча б дві однакові грані; (в) випадуть тільки три різні грані.

21. Скільки видів різних частинних похідних має ціла функція від n змінних?

22. Скількома способами можна впорядкувати множину $\{1, 2, \ldots, n\}$ так, щоб числа $1, 2, 3$ стояли поруч у даному порядку зростання?

23. Довести, що кількість способів, якими двоє людей можуть розділити порівну $2n$ однакових предметів першого сорту, $2n$ предметів другого сорту і $2n$ предметів третього сорту, по $3n$ предметів кожному, становить $3n^2 + 3n + 1$.

24. Скільки цілих невід'ємних розв'язків має рівняння

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = N?$$

Скільки цілих додатних розв'язків має це рівняння ?

25. Задача Банаха. Один математик носить з собою дві коробки сірників. Кожен раз, коли він хоче дістати сірник, він вибирає одну з коробок навмання. Знайти ймовірність того, що коли він вперше витягне порожню коробку, в іншій коробці виявиться k сірників ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$; n – початкова кількість сірників в кожній з цих коробок).

26. Написано n листів, але адреси на конвертах написані навмання. Яка ймовірність того, що : (а) хоча б один адресат отримає призначений для нього лист; (б) m адресатів отримають призначені їм листи.

27. Числа $1, 2, \ldots, n$ розташовані навмання. Яка ймовірність того, що хоча б одне з чисел буде дорівнювати номеру свого місця? Знайти границю цієї ймовірності при $n \to \infty$.

28. Яка ймовірність того, що навмання обраний чоловік, та його батько і дід народилися 1 травня ?

1.4. Класичне означення ймовірностей

Література: [1, с.19–21], [2,с.17-19]. Ауд: 1-6, сам: 7-13.

1. За умови, що ймовірності попадання дня народження на кожен з 12 місяців року однакові, знайти ймовірність того, що: (а) дні народження десяти чоловік припадуть на різні місяці року; (б) для 30 чоловік на шість місяців припадає по три дні народження, а на інші шість місяців – по два дні.

2. n чоловік, в тому числі A та B, розташовуються в ряд у випадковому порядку. Знайти ймовірність того, що між A та B буде стояти рівно k чоловік. Показати, що якщо n чоловік стають не в ряд, а в круг, то ця ймовірність не залежить від k і дорівнює $2/(n-1)$.

3. *Статистика Максвелла-Больцмана.* Кожна з n **різних** частинок потрапляє в один з N лічильників. Знайти ймовірність того, що: (а) в перший, другий, ..., N-й лічильник потрапить відповідно $n_1, n_2, \ldots, n_N$ частинок ($n_1+n_2+\ldots+n_N=n$); (б) даний лічильник зареєструє k частинок; (в) кожен лічильник зареєструє хоча б одну частинку.

4. *Статистика Бозе-Ейнштейна.* Кожна з n **однакових** частинок реєструється одним з N лічильників. Знайти ймовірність того, що перший, другий, ..., N-й лічильник зареєструє відповідно $n_1, n_2, \ldots, n_N$ частинок ($n_1+n_2+\ldots+n_N=n$), якщо рівноможливими вважаються розміщення, які відрізняються кількістю частинок, зареєстрованих лічильниками. Обчислити ймовірність того, що даний лічильник зареєструє k частинок:

$$p_k = C_{N+n-k-2}^{n-k} \; / \; C_{N+n-1}^{n}.$$

Довести, що при $N>2$ послідовність $p_k, k \geq 0$, – спадна. Знайти ймовірність того, що рівно m лічильників не зареєструють жодної частинки.

5. *Статистика Фермі-Дірака.* Кожна з n **однакових** частинок реєструється одним з N лічильників. Яка ймовірність того, що перший, другий, ..., N-й лічильник зареєструє відповідно $n_1, n_2, \ldots,$

n_N частинок (де $n_1 + n_2 + \ldots + n_N = n$), якщо рівноможливими вважаються розміщення, які задовольняють "умову Паулі" (кожен лічильник реєструє не більше однієї частинки).

6. В коморі знаходяться n пар черевиків. З них випадковим чином вибираються $2k$ черевиків. Яка ймовірність того, що серед вибраних черевиків: (а) відсутні парні; (б) є рівно одна комплектна пара; (в) є дві комплектні пари?

7. В класі 35 учнів: 20 дівчаток та 15 хлопчиків. Вирішено за допомогою жеребу розподілити серед учнів чотири квитки в театр. Яка ймовірність, що квитки отримають: (а) чотири дівчинки; (б) два хлопчики та дві дівчинки?

8. В урні міститься дві білих та чотири чорних кулі. З урни одну за одною виймають всі кулі. Знайти ймовірність того, що вийнята останньою куля буде білою.

9. З колоди, що складається з 52 карт, навмання вибирають шість карт. Знайти ймовірність того, що: (а) серед цих карт буде туз; (б) серед цих карт будуть представники всіх мастей; (в) серед них є хоча б дві карти з однаковою назвою.

10. 15 куль, серед яких десять білих і п'ять червоних, навмання розкладаються на групи по три кулі. Знайти ймовірність того, що в кожній групі буде по дві білих кулі.

11. В три вагони заходять дев'ять пасажирів, кожен з яких вибирає вагон навмання. Знайти ймовірність того, що: (а) в перший вагон зайде три пасажири; (б) в кожен вагон зайде по три пасажири; (в) В один вагон зайде чотири, в другий – три і в третій – два пасажири.

12. n однакових куль розміщають випадковим чином в N урнах. Знайти ймовірність того, що в кожній урні буде хоча б одна куля.

13. З усіх цілих невід'ємних розв'язків рівняння

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_N = n$$

вибирають один розв'язок. Знайти ймовірність того, що у цьому розв'язку $x_k > 0$ для всіх $1 \le k \le N$.

14. Вибирається навмання один член визначника n-го порядку.

Яка ймовірність того, що він не містить елементів головної діагоналі?

15. Колода з 52 гральних карт ретельно тасується, після чого одна за одною відкриваються верхні карти до появи першого туза. Яка ймовірність того, що: (а) першим тузом виявиться п’ята карта; (б) першим тузом виявиться k-а карта; (в) перший туз зустрінеться не пізніше k-ої карти?

16. Множина K складається з $n+1$ особи. Деяка особа A пише два листи випадково вибраним з множини K адресатам, які утворюють “перше покоління” K_1. Особа з K_1 робить те ж саме, в результаті чого утворюється “друге покоління” K_2, і т.д. Знайти ймовірність того, що особа A не входить в жодне з “поколінь” $K_1, \ldots, K_m$.

17. В гості прийшли n чоловік, причому всі були в калошах. Йдучи, гості вибирали калоші навмання. Яка ймовірність того, що кожен візьме праву і ліву калоші?

18. Кандидат A зібрав на виборах m голосів, а кандидат B – n голосів, де $m > n$. Виборці голосували послідовно. Яка ймовірність того, що протягом всього часу голосування кандидат A випереджав B за кількістю голосів?

19. В урні m білих і n чорних куль, $m < n$. Послідовно без повернення виймаються всі кулі. M_k – кількість чорних куль, а N_k – кількість білих куль, вийнятих за k кроків. Знайти ймовірність того, що для всіх $k = \overline{1, m+n}$ виконується нерівність $M_k < N_k$.

20. В місті з населенням кількістю $n+1$ чоловік дехто дізнається про новину. Він передає її першому зустрічному, той – ще одному і т.д. На кожному кроці людина, яка вперше дізналася про новину, може повідомити її будь-кому з n чоловік з однаковою ймовірністю. Знайти ймовірність того, що за k кроків: (а) новина не повернеться до людини, яка дізналася про неї першою; (б) новина не буде ніким повторена. Розв’язати цю ж задачу за припущення, що на кожному кроці про новину повідомляють групі з m випадково вибраних осіб.

21. У групі n студентів. Яка ймовірність того, що хоча б у двох з них однакові дні народження ? Для яких значень n ця ймовірність

не менша за 0.5 ?

22. Кожна з n різних частинок потрапляє в одну з m комірок. (а) Знайти ймовірність того, що для кожного $k = \overline{1, m}$ у k-ту комірку потрапить n_k частинок. (б) Знайти ймовірність потрапляння у фіксовану комірку k частинок. За якої умови існує границя цієї ймовірності при $n, m \to \infty$? Знайти цю границю. (в) Яка ймовірність того, що буде зайнято рівно l комірок ?

23. Кожна з n ідентичних (нерозрізнених) частинок потрапляє в одну з m комірок. Рівноможливими є всі розміщення, що відрізняються кількістю частинок у комірках. Знайти ймовірності у пунктах (а)–(в) попередньої вправи.

24. Кожна з n ідентичних частинок потрапляє в одну з m комірок. Рівноможливими є всі розміщення, що задовольняють забороні Паулі - у кожній комірці може бути не більше однієї частинки. Знайти ймовірності з пунктів (а)–(в) вправи 3.

25. Із дванадцяти білетів, пронумерованих від 1 до 12, один за одним вибираються два білети. Яка ймовірність того, що цих білетах: (а) обидва номери парні; (б) обидва номери непарні; (в) перший номер парний, а другий непарний; (г) один із номерів парний, а інший непарний ?

26. Задача де Мере. Скільки разів треба підкинути дві гральні кості, щоб імовірність хоча б одного випадіння шістки була більша за $1/2$?

27. Яка ймовірність того, що в чотиризначному номері випадково вибраного у великому місті автомобіля: (а) всі цифри різні; (б) дві пари однакових цифр; (в) тільки дві однакові цифри; (г) тільки три однакові цифри; (д) всі цифри однакові; (е) сума двох перших цифр рівна сумі двох останніх цифр?

28. Студент прийшов на залік, знаючи з 30 питань тільки 24. Якщо студент не знає відповіді на поставлене питання, викладач задає йому ще одне, додаткове. Залік ставиться, якщо студент правильно відповідає хоча б на одне питання. Яка ймовірність отримання заліку?

1.5. Геометричне означення ймовірностей

Література: [1, с.22–25], [2,с.21-24]. Ауд: 1-7, сам: 8-14.

1. Стрижень довжини l розламали в навмання обраній точці на дві частини. З якою ймовірністю довжина меншої частини не більша $l/3$?

2. Два судна повинні підійти до одного й того ж причалу. Їх поява – незалежні випадкові події, що рівноможливі протягом доби. Знайти ймовірність того, що одному з суден доведеться чекати звільнення причалу, якщо час стоянки першого судна – одна година, а другого – дві години.

3. На колі одиничного радіуса з центром в початку координат навмання вибирається точка. Знайти ймовірність того, що: (а) проекція точки на діаметр знаходиться від центра на відстані, яка не перевищує r; (б) відстань від вибраної точки до точки з координатами $(1,0)$ менша r.

4. В квадрат з вершинами $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ навмання кинули точку. Нехай (ξ,η) – її координати. Показати, що для всіх $0 \le x, y \le 1$: $\mathbf{P}(\xi < x, \eta < y) = xy = \mathbf{P}(\xi < x)\mathbf{P}(\eta < y)$. Знайти: (а) $\mathbf{P}(|\xi - \eta| < z)$; (б) $\mathbf{P}(\xi\eta < z)$; (в) $\mathbf{P}(\min(\xi,\eta) < z)$; (г) $\mathbf{P}(\max(\xi,\eta) < z)$; (д) $\mathbf{P}(\xi + \eta < 2z)$.

5. Монета радіуса r випадковим чином кидається на стіл, розграфлений на квадрати зі стороною l $(2r < l)$. Знайти ймовірність того, що: (а) монета не перетне жодної зі сторін квадратів; (б) монета перетне не більше однієї сторони квадратів.

6. На відрізку $[P,Q]$ довжини l навмання вибрано дві точки A і B. Знайти ймовірність того, що: (а) точка A виявиться ближчою до точки P, ніж точка B; (б) точка A виявиться ближчою до точки B, ніж до P.

7. Знайти ймовірність того, що з трьох навмання взятих відрізків довжиною не більше l можна побудувати трикутник.

8. Точку кинули навмання всередину кола радіуса R. Знайти ймовірність того, що: (а) точка знаходиться від центра на відстані,

меншій ніж r ($r < R$); (б) менший кут між заданим напрямком і прямою, яка з'єднує точку з центром, не перевищує α; (в) точка потрапила всередину вписаного правильного n-кутника.

9. На колі радіуса R навмання взято дві точки. Яка ймовірність того, що відстань між ними не перевищує r?

10. В квадрат з вершинами $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ навмання кинули точку. Нехай (ξ,η) – її координати. Знайти ймовірність того, що корені рівняння $x^2 + \xi x + \eta = 0$: (а) дійсні; (б) додатні.

11. Навмання взято два додатних числа x та y, кожне з яких не перевищує 2. Знайти ймовірність того, що добуток xy не перевищуватиме 1, а частка y/x не буде перевищувати 2.

12. Стрижень довжиною l навмання розламали на три частини. Яка ймовірність того, що з отриманих частин можна скласти трикутник?

13. У сфері радіусу R навмання обрано N точок. Знайти ймовірність того, що відстань до центру найближчої точки не перевищуватиме r. За яких умов границя цієї ймовірності при $N, R \to \infty$ є додатною ?

14. Якої товщини повинна бути монета, щоб ймовірність її падіння на ребро дорівнювала $1/3$?

15. Площина розграфлена паралельними прямими, які знаходяться одна від одної на відстані $2a$. (а) На площину навмання кидають голку довжиною $2l$ ($l < a$). Знайти ймовірність того, що голка перетне яку-небудь пряму. (б) На площину навмання кидають опуклий контур, діаметр якого менший ніж $2a$. Яка ймовірність того, що контур перетне одну з прямих? (Задача Бюффона.)

16. Навмання вибирається хорда в крузі. Чому дорівнює ймовірність того, що її довжина перевищує довжину сторони вписаного рівностороннього трикутника? (Парадокс Бертрана.)

17. Для кожного x знайти ймовірність того, що довжина перпендикуляра, опущеного з центра кола на випадкову хорду, менша за x. Остання визначається як пряма, що проходить через дві точки, незалежно вибрані на колі.

18. Нехай (ξ,η) – координати точки, вибраної навмання всере-

дині квадрата з координатами $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$. Нехай також $\rho = \sqrt{\xi^2+\eta^2}$, $\varphi = \arctan(\eta/\xi)$. Знайти сумісний розподіл ρ і φ, тобто для всіх $x \in \mathbb{R}$ та $y \in \mathbb{R}$ знайти ймовірність $\mathbf{P}(\rho < x, \varphi < y)$.

19. Знайти ймовірність перетину навмання підкинутої голки довжини $l < h$ системи вертикальних та горизонтальних прямих, при відстані h між ними.

20. На площині проведено паралельні прямі, які знаходяться одна від одної на відстані $2a$. На площину навмання кидають монету радіусу $l < a$. Знайти ймовірність того, що монета перетне одну з паралельних прямих.

21. У одиничному квадраті навмання обрано три точки. Яка ймовірність того, що вони утворюють (а) трикутник; (б) прямокутний трикутник; (в) правильний трикутник; (г) гострокутний трикутник.

1.6. Умовна ймовірність. Незалежні випадкові події

Література: [1, с.25–27,30-32], [2,с.24-31]. Ауд: 1-8, сам: 9-16.

1. Підкидають три гральних кубика. Знайти ймовірність того, що: (а) хоча б раз випала шістка, якщо на всіх трьох кубиках випали різні грані; (б) хоча б раз випала шістка, якщо на всіх кубиках випали однакові грані.

2. З урни, яка містить n білих та m чорних куль, послідовно виймають дві кулі (без повернення). Знайти ймовірність того, що: (а) друга куля біла, якщо відомо, що перша куля біла; (б) обидві кулі одного кольору; (в) кулі різного кольору.

3. В урні міститься п’ять чорних, шість білих і вісім червоних куль. Послідовно без повернення з урни виймають три кулі. Знайти ймовірність того, що: (а) перша куля – чорна, друга – біла, третя – червона; (б) перша куля – біла, а друга і третя – червоні.

4. Урна містить M куль, серед яких M_1 білих куль. Розглядається вибір об’єму n. Нехай B_j – подія, яка полягає в тому, що

вибрана на j-му кроці куля була білою, а A_k – подія, яка полягає в тому, що у вибірці об'єму n є рівно k білих куль. Показати, що як для вибору з поверненням, так і для вибору без повернення $\mathbf{P}(B_j/A_k) = k/n$.

5. Ймовірність влучення у десятку при одному пострілі дорівнює 0.2. Скільки треба зробити пострілів (з незалежними подіями влучення), щоб влучити в десятку хоча б один раз із ймовірністю не меншою 0.9 ?

6. Кожна з m радіолокаційних станцій за час T робить n обертів антени і за один оберт антени виявляє об'єкт із ймовірністю p незалежно від інших станцій. Знайти ймовірність того, що: (а) за час T об'єкт буде виявлено хоча б однією станцією; (б) за час T об'єкт буде виявлено кожною станцією.

7. Два гравці A та B по черзі стріляють у ціль. Виграє той, хто влучить першим. Ймовірності влучення для A і B рівні відповідно p_1, p_2. Першим стріляє A. Знайти ймовірність виграшу для кожного з гравців.

8. Підкидаються два гральних кубики. Розглянемо події: A_1 – на першому кубику випала парна кількість очок; A_2 – на другому кубику випала непарна кількість очок; A_1 – сума очок на кубиках непарна. Довести, що події A_1, A_2, A_3 попарно незалежні, але не є незалежними у сукупності.

9. Тричі підкидають монету. Подія A – двічі випав аверс, B – при другому підкиданні випав аверс. Обчислити $\mathbf{P}(A)$, $\mathbf{P}(B)$, $\mathbf{P}(A|B)$.

10. Відомо, що при підкиданні десяти гральних кубиків випало хоча б один раз шість очок. Яка ймовірність того, що шістка випала два і більше разів?

11. З дванадцяти білетів, пронумерованих від 1 до 12, один за одним вибираються два білети. Яка ймовірність того, що на цих білетах: (а) обидва номери є парними; (б) обидва номери – непарні; (в) перший номер парний, а другий – непарний; (г) один номер парний, а інший – непарний?

12. Нехай події A і B, визначені в одному й тому ж просто-

рі елементарних подій, не є тотожними, і нехай $0 < \mathbf{P}(A) < 1$, $0 < \mathbf{P}(B) < 1$. Впорядкувати, використовуючи знаки “$<$” або “$=$”, величини 0, $\mathbf{P}(A \cap B)$, $\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$, $\mathbf{P}(A|B)$, $\mathbf{P}(A \cup B)$, $\mathbf{P}(A)$ за припущення, що: (а) події A і B несумісні; (б) A і B незалежні.

13. Для підвищення надійності приладу він дублюється $n-1$ іншими такими ж приладами. Надійність кожного приладу дорівнює p. Знайти надійність цієї системи приладів. Скільки потрібно взяти приладів, щоб надійність системи була не меншою, ніж p_0? Знайти надійність системи, якщо пристрій, що вмикає дублюючий прилад, має надійність q.

14. Ймовірність того, що у результаті чотирьох незалежних випробувань подія A настане хоча б один раз, дорівнює 0.5. Визначити ймовірність появи події A при одному випробуванні, якщо ця ймовірність однакова для усіх випробувань.

15. Спрощена система контролю виробів складається з двох незалежних перевірок. У результаті k-ої перевірки ($k = 1, 2$) виріб, що відповідає стандарту, відбраковується із ймовірністю β_k, а бракований виріб приймається з ймовірністю α_k. Виріб приймається, якщо він пройшов обидві перевірки. Знайти ймовірності подій: (а) бракований виріб буде прийнято; (б) виріб, який відповідає стандарту, буде відбраковано.

16. Відомі ймовірності трьох незалежних подій $\mathbf{P}(A_i) = p_i$, $i = \overline{1, 3}$. Після проведення випробування виявилось, що якісь дві події з A_i відбулися, а третя – ні. Знайти ймовірність того, що за цих умов відбулася подія A_1.

17. Підкидають два гральних кубика. Знайти ймовірність того, що: (а) хоча б один раз випала шістка, якщо відомо, що сума очок, які випали, дорівнює 8; (б) сума очок більше ніж 9, якщо відомо, що хоча б один раз випало п’ять очок.

18. Показати, що якщо $\mathbf{P}(A|C) > \mathbf{P}(B|C)$ і $\mathbf{P}(A|\overline{C}) > \mathbf{P}(B|\overline{C})$, то $\mathbf{P}(A) > \mathbf{P}(B)$.

19. Показати. що $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A|BC)\mathbf{P}(C|B) + \mathbf{P}(A|B\overline{C})\mathbf{P}(\overline{C}|B)$.

20. Довести, що

$$\mathbf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1) \prod_{i=1}^{n-1} \mathbf{P}(A_{i+1}|A_1 \cap \ldots \cap A_i).$$

21. В урні містяться 2 білих і 3 чорних кулі. З урни послідовно виймають 2 кулі. Знайти ймовірність того, що обидві кулі білі, якщо вибірка проводиться: (а) без повернення; (б) з поверненням.

22. Випадкові події A і B незалежні. Чи є незалежними події: (а) A і $\overline{B}$; (б) $\overline{A}$ і $\overline{B}$?

23. *Проблема Джона Сміта.* Чи однакові шанси на успіх у трьох гравців, якщо першому потрібно отримати хоча б одну шістку при підкиданні гральної кості 6 разів, другому – не менше двох шісток при 12 підкиданнях, а третьому – не менше трьох шісток при 18 підкиданнях? (Задачу було розв'язано Ньютоном і Толлером.)

24. Радіолокаційна станція веде спостереження за n об'єктами. За час спостерігання k-ий об'єкт може бути втрачено із ймовірністю p_k, всі відповідні події незалежні. Знайти ймовірність того, що: (а) жоден з об'єктів не буде втрачено; (б) буде втрачено один об'єкт; (в) буде втрачено не більше одного об'єкта.

25. Із урни, що містить 20 білих і 2 чорних кулі, n разів виймають кулі з поверненням. Визначити найменше число виймань, при якому ймовірність вийняти хоча б один раз чорну кулю перевищуватиме 0.5.

26. Є три попарно незалежні події, які всі разом відбутися не можуть. Припускаючи, що всі вони мають одну й ту ж ймовірність p, знайти найбільше можливе значення p.

27. П'яничка стоїть на відстані одного кроку від краю прірви. Він робить крок випадковим чином або до краю прірви, або від нього. На кожному кроці ймовірність відійти від краю дорівнює $\frac{2}{3}$, а крок до краю скелі має ймовірність $\frac{1}{3}$. Які шанси п'янички не впасти?

28. Незалежні події мають ймовірності p_1, p_2, ..., p_n. Довести, що ймовірність P того, що відбудеться принаймні одна із цих подій, задовольняє нерівності

$$1 - \exp\{-p_1 - p_2 - \ldots - p_n\} \le P \le p_1 + p_2 + \ldots + p_n.$$

29. Для подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$ справедливі умови

$$\mathbf{P}(A_i) = p_i,\ \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) = p_1 \cdot \ldots \cdot\ p_k,\ k = \overline{1,n}.$$

Чи є події $\{A_1, \ldots, A_n\}$ незалежними у сукупності ?

30. Кидають три гральних кості. Яка ймовірність того, що випаде принаймні одна шістка, якщо відомо, що всі три очки, що випали, є різними ? Як ця умовна ймовірність відрізняється від безумовної ?

31. Обчислити ймовірність об'єднання незалежних у сукупності подій через імовірності окремих подій.

32. Кожна з m радіолокаційних станцій за час T робить n обертів антени і за один оберт антени виявляє об'єкт із ймовірністю p незалежно від інших станцій. Знайти ймовірність того, що: (а) за час T об'єкт буде виявлено хоча б однією станцією; (б) за час T об'єкт буде виявлено кожною станцією.

33. При підкиданні n гральних костей випала принаймні одна шістка. Яка ймовірність того, що їх не менше k ?

34. Довести, що подія A не залежить від себе самої тоді й тільки тоді, коли $\mathbf{P}(A) \in \{0, 1\}$.

35. Скільки існує пар незалежних випадкових подій у ймовірнісному просторі з простою кількістю елементарних подій при класичному означенні ймовірностей ?

36. Нехай ${}_tp_x$ означає імовірність того, що людина у віці x виживе протягом принаймні t подальших років. Розглянемо три незалежних життя у віці 40, 50 й 60 років такі, що ${}_{10}p_{40} = 0.95$, ${}_{10}p_{50} = 0.85$, ${}_{10}p_{60} = 0.70$. (а) Визначити імовірність того, що точно одна із цих трьох людин виживе наступних десять років. (б) Визначити імовірність того, що за умови з (а) виживе саме наймолодша людина.

37. Випадкові події $(A_k, k = \overline{1, n})$ незалежні в сукупності. (а) Довести, що події з породженої алгебри $\mathfrak{A}[(A_k, k = \overline{1, n-1})]$ не залежать від A_n. (б) Позначимо $A^\delta = A$ при $\delta = 1$, та $A^\delta = \overline{A}$ при $\delta = 0$. Довести, що для довільних $\delta_k \in \{0, 1\}$ випадкові події $(A_k^{\delta_k}, k = \overline{1, n})$ незалежні у сукупності.

38. На виставці озеленення було проведено дослідження щодо залежності рішення про закупівлю товару та рішення про відвідання виставки наступного року. Було опитано 220 осіб. 101 з

них вирішили закупити товар, 69 із них мали намір повернутися в наступному році. З 119, хто не зробив закупівлю, 68 мали намір повернутися в наступному році. Припустимо, що кожен з 220 розглянутих людей відібрані випадково. Обчислити ймовірності того, що обрана особа: (а) має на увазі повернутися в наступному році, за умови, що вона зробила закупівлю; (б) має на увазі повернутися в наступному році, за умови, що вона не зробила закупівлю; (в) зробила закупівлю, за умови, що вона має на увазі повернутися в наступному році.

39. Імовірність того, що певний компонент у двигуні ракети відмовить у момент запуску двигуна, дорівнює 0.02. Щоб досягти більшої надійності, декілька подібних компонентів були паралельно підключені до двигуна так, що двигун відмовляє лише у випадку одночасної відмови всіх компонентів. Визначити мінімальну кількість компонентів, необхідних для гарантування надійності двигуна, що дорівнює 10^{-9}, за припущенням незалежності відмов різних компонентів.

40. Із урни, що містить 20 білих і 2 чорних кулі, n разів виймають кулі з поверненням. Визначити найменше число виймань, при якому ймовірність вийняти хоча б один раз чорну кулю перевищуватиме 0.5.

41. Припустимо, що A, B, C – випадкові події, для яких

$$\mathbf{P}(A) = 1/2,\ \mathbf{P}(B) = 1/2,\ \mathbf{P}(C) = 1/3,$$
$$\mathbf{P}(A \cup B) = 3/4, \mathbf{P}(A \cap C) = \mathbf{P}(B \cap C) = 1/6, \mathbf{P}(A \cap B \cap C) = 1/12.$$

(а) Визначити, чи є незалежними події A, B. (б) Знайти $\mathbf{P}(A \cup B \cup C)$.

42. Знайти ймовірність того, що у нескінченій послідовності випробувань Бернуллі k послідовних успіхів відбудуться раніше, чим n послідовних неуспіхів.

43. Для подій A, B довести нерівність

$$\mathbf{P}(A \cap B \mid A \cup B) \leq \mathbf{P}(A \cap B \mid A).$$

44. Довести, що несумісні події додатної імовірності – залежні.

1.7. Формули повної ймовірності та Байеса

Література: [1, с.27–30], [2,с.26-28]. Ауд: 1-7, сам: 8-15.

1. Є три зовні однакові урни. В першій урні містяться дві білих та одна чорна кулі, в другій – три білих і одна чорна, а в третій – дві білих і дві чорних кулі. Дехто навмання вибирає одну з урн і виймає з неї кулю. Знайти ймовірність того, що ця куля біла.

2. З урни, яка містить три білих і дві чорних кулі, переклали дві навмання вибрані кулі в урну, яка містить чотири білих і чотири чорних кулі. Знайти ймовірність того, що навмання вийнята з другої урни куля буде білою.

3. Деяка комаха з ймовірністю $\lambda^k e^{-\lambda}/k!$ відкладає k яєць, $k = 0, 1, 2, \ldots$, а ймовірність розвитку комахи з яйця дорівнює p. Припускаючи взаємну незалежність розвитку яєць, знайти ймовірність того, що у комахи буде рівно n нащадків.

4. В урні міститься 1 кулька, про яку відомо, що вона або білого, або чорного кольору. Після того, як в урну поклали білу кульку, після перемішування з неї навмання вибрали кульку, колір якої виявився білим. Яка ймовірність того, що і колір кульки, що залишилась, теж білий?

5. Ймовірністі влучення при кожному пострілі для трьох стрільців дорівнюють відповідно $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$. Відомо, що при одночасному пострілі усіх трьох стрільців було 2 влучення. Знайти ймовірність того, що не влучив третій стрілець.

6. Троє мисливців одночасно вистрілили у ведмедя і вбили його однією кулею. Визначити ймовірності того, що ведмідь був убитий першим, другим чи третім мисливцем, якщо ймовірності влучення для них дорівнюють відповідно 0.2, 0.4, 0.6.

7. Проведено три випробування, в кожному з яких подія A відбувається з ймовірністю 0.2. Ймовірність появи іншої події B залежить від того, скільки разів відбулася подія A: ця ймовірність дорівнює 0.1, якщо подія A сталася одного разу; 0.3, якщо A відбулася двічі; 0.7 – тричі; якщо A не сталася жодного разу, то подія B неможлива. Визначити найбільш ймовірне число появ події A, якщо

подія B відбулася.

8. В урну, яка містить n куль, поклали білу кулю. Яка ймовірність витягти білу кулю з цієї урни, якщо всі припущення про її початковий склад рівноможливі?

9. В двох урнах міститься відповідно m_1 і m_2 білих та n_1 і n_2 чорних куль. З кожної урни навмання виймається одна куля, а потім з цих двох куль навмання вибирається одна. Яка ймовірність того, що ця куля біла?

10. Нехай ймовірність p_n того, що в сім'ї n дітей, дорівнює $ap^n, n \geq 1$, і $p_0 = 1 - ap/(1-p)$. Припустимо, що ймовірності народження хлопчика і дівчинки однакові. Довести, що ймовірність того, що в сім'ї k хлопчиків при $k \geq 1$, дорівнює $2ap^k/(2-p)^{k+1}$. Яка ймовірність того, що в сім'ї два або більше хлопчиків, якщо відомо, що в сім'ї є щонайменше один хлопчик?

11. В одній з двох урн, в кожній з яких по 10 куль, одна куля мічена. Гравець має право послідовно витягти 20 куль з будь-якої урни, кожен раз повертаючи взяту кулю назад. Як слід вести гру, щоб імовірність витягти мічену кулю була найбільшою, якщо ймовірність того, що мічена куля міститься в першій урні, дорівнює $\frac{2}{3}$?

12. Є 10 однакових урн, з яких у 9-ти знаходяться по 2 чорних і 2 білих кульки, а в одній – 5 білих і 1 чорна кулька. Зі взятої навмання урни вийнято білу кульку. Яка ймовірність того, що цю кульку вийняли з урни, що містила 5 білих кульок?

13. Стрільці A і B по черзі стріляють у ціль. Ймовірність влучення першими пострілами для них становить відповідно 0.4 та 0.5, а ймовірність влучення при наступних пострілах для кожного гравця збільшується на 0.05. Яка ймовірність того, що першим почав стріляти стрілець A, якщо на п'ятому пострілі було (перше) влучення?

14. Урна містила m білих і n чорних куль, але одну кулю, колір якої невідомий, загублено. При випробуванні складу урни було одразу вийнято a білих і b чорних куль. Яка ймовірність того, що загублено білу кулю?

15. В урні міститься n куль, причому колір кожної з них із рівною ймовірністю може бути білим або чорним. Послідовно ви-

ймають k куль із поверненням. Яка ймовірність того, що в урні містяться тільки білі кулі, якщо чорні кулі не виймалися?

16. Випадкова точка може знаходитися тільки у вершинах ромба B_j $(j = 1, 2, 3, 4)$, переходячи за один крок з B_k в B_{k+1} з ймовірністю p_k $(k = 1, 2, 3)$, з B_k в B_{k+2} – з ймовірністю $q_k = 1 - p_k$ $(k = 1, 2)$, а з B_3 в B_2 – з ймовірністю $q_3 = 1 - p_3$. Знайти ймовірність переходу випадкової точки з вершини B_1 в B_4: (а) не більше, ніж за n кроків $(n = 3, 4)$; (б) коли-небудь.

17. Серед n осіб розігрується $m \leq n$ виграшів шляхом випадкового виймання з урни n білетів. Чи однакові шанси виграти для кожного з учасників? Коли вигідніше брати білет?

18. Є n урн, в кожній з яких по m білих і k чорних куль. З 1-ї урни навмання виймають одну кулю і перекладають в 2-у. Потім з 2-ї урни навмання виймають одну кулю і перекладають в 3-ю, і т.д. Знайти ймовірність того, що після такого перекладання з останньої урни витягнуть білу кулю.

19. В трьох урнах містяться білі та чорні кулі. В першій - дві білих та три чорних кулі, в другій – дві білих і дві чорних, в третій – три білих і одна чорна куля. З першої урни переклали кулю в другу. Потім кулю з другої урни переклали в третю. Нарешті, з третьої урни кулю переклали в першу. Який склад куль в першій урні найбільш ймовірний? Знайти ймовірність того, що склад куль в усіх урнах залишиться без змін.

20. Дві урни містять по m куль, серед яких білі та чорні в однаковій пропорції. З них виймають по $n < m$ куль з поверненням. Відомо, що ймовірність того, що всі n куль будуть білими, якщо їх виймають з першої урни, дорівнює ймовірності того, що не всі кулі чорні, якщо їх виймають з другої. Визначити склад обох урн.

21. В урні знаходяться 3 кульки, які можуть бути білими або чорними. Всі чотири припущення про початковий стан урни є рівноймовірними. Відбулося чотири досліди, які полягали в тому, що кожного разу із урни виймали одну кульку з поверненням. З'явилися такі кульки: чорна, біла, біла, біла. Знайти післядослідні ймовірності складу урни.

22. Урна містить n куль. Всі припущення про число білих куль в урні однаково ймовірні. Навмання вийнята з урни куля виявилася білою. Обчислити ймовірності всіх припущень про склад куль в урні. Яке припущення найбільш імовірне?

23. Із 18 стрільців п'ятеро влучають у мішень з імовірністю 0.8, семеро – з імовірністю 0.7, четверо – з імовірністю 0.6 і двоє – з імовірністю 0.5. Навмання обраний стрілець вистрілив, але у мішень не влучив. До якої групи він найімовірніше належить?

24. З урни, яка містить n кульок невідомого кольору (білого чи чорного), вибрали кульку, що виявилася білою. Після цього знову взяли кульку. Яка ймовірність того, що друга кулька теж біла?

25. При переливанні крові потрібно враховувати групи крові донора і хворого. Людині, яка має четверту групу крові, можна перелити кров будь-якої групи; людині з другою або третьою групою крові можна перелити кров або цієї ж групи, або першої; людині з першою групою крові можна перелити лише кров першої групи. Серед населення 33.7 відсотків мають першу, 37.5 відсотків – другу, 20.9 відсотків – третю і 7.9 відсотків – четверту групу крові. Відомо, що для випадково взятих донора і хворого можна зробити переливання крові. Знайти ймовірність того, що: (а) хворий має першу групу крові; (б) донор має другу групу крові.

26. В урні містяться білі та чорні кульки. Загальна кількість кульок N відома, але невідомі ні число білих, ні число чорних кульок. При $m+n$-кратному вийманні кульок із урни (без повернення) m разів з'явилася біла кулька і n разів – чорна. Який вміст урни найбільш імовірний?

27. Ймовірності настання чи не настання події B за умови подій з повної групи $(A_i, i = \overline{1,n})$ дорівнюють $(p_i, q_i, i = \overline{1,n})$. Відомо, що при n_1 незалежних випробуваннях подія B відбулася m_1 разів, та при наступній серії з n_2 випробувань подія B відбулася m_2 разів. Довести наступну властивість формули Байєса: апостеріорні ймовірності гіпотез, обчислені після другої серії випробувань з урахунком ймовірностей цих гіпотез після першої серії випробувань, завжди дорівнюють ймовірностям, обчисленим просто для серії $n_1 + n_2$

випробувань, у якій подія B відбулася $m_1 + m_2$ разів.

28. У кожній з m урн знаходяться k білих та $n - k$ чорних куль. З першої урни навмання обрали кулю та переклали у другу, потім випадково обрану кулю з другої урни переклали у третю і так далі. Знайти ймовірність витягнути білу кулю з останньої урни.

29. Урна містить n пронумерованих куль. З неї навмання з поверненням k разів обирають кулю та записують її номер. Яка ймовірність того, що серед записаних є точно m різних номерів ?

30. В урні знаходиться куля білого чи чорного кольору. В урну поклали білу кулю. Після цього навмання обрана з урни куля виявилася білою. Яка ймовірність того, що первісно в урні була біла куля ?

31. Урна містить $m > 3$ білих куль та n чорних. Випадково втрачено одну кулю. Для перевірки складу урни з неї навмання витягли без повернення дві кулі. Вони виявилися білими. Яка ймовірність того, що втрачена куля була білою ?

32. В урні знаходяться n білих та m чорних куль. З неї навмання обирається куля, після чого вона повертається до урни разом з k кулями такого ж кольору. Такий вибір повторено l разів. Яка ймовірність того, що навмання обрана після цього куля є білою ?

33. Особа A відповідає правильно на половину заданих питань, а B – на дві треті питань. З урни, що містить n куль, та лише 1 білу, навмання обрано кулю. Обидві особи визнали, що вона – біла. Знайти ймовірність того, що ця куля насправді біла.

1.8. Дискретні випадкові величини: розподіл, числові характеристики

Література: [1, с.33–38, 59–61], [2,с.31-37, 59-62].
Ауд: 1-6, сам: 7-12.

1. Тричі підкидають гральний кубик. Нехай $\xi(\omega)$ – число появ шісток. Знайти розподіл випадкової величини ξ, математичне сподівання $\mathbf{E}\xi$, дисперсію $\mathbf{D}\xi$.

2. Гральний кубик підкидають доти, поки не випаде шістка. Нехай $\xi(\omega)$ – число підкидань до першої появи шістки. Знайти розподіл ξ, $\mathbf{E}\xi$, $\mathbf{D}\xi$, $\mathbf{P}(\xi > 10)$, $\mathbf{P}(\xi < n)$.

3. k куль послідовно кидають навмання у n урн. Знайти математичне сподівання числа непорожніх урн.

4. Підкидають дві гральні кості. Нехай ξ – число очок на першій кості, η – максимальна із двох кількостей очок, які випали на першій і другій кості. Знайти сумісний розподіл ξ і η. Обчислити $\mathbf{E}\xi$, $\mathbf{E}\eta$, $\mathbf{D}\xi$, $\mathbf{D}\eta$ та коваріацію величин ξ і η.

5. Нехай випадкова величина ξ набуває значення $\pm 1, \pm 2$ із ймовірностями $\frac{1}{4}$, а $\eta = \xi^2$. Знайти сумісний розподіл ξ і η. Показати, що $\mathrm{cov}(\xi, \eta) = 0$. Довести, що ξ, η – залежні випадкові величини.

6. Довести, що найбільш імовірне значення k величини ξ з гіпергеометричним розподілом дорівнює $[(n+1)(m+1)/(N+2)] - 1$.

7. Двічі підкидають гральну кость. Нехай ξ – сума очок, які випали. Знайти розподіл випадкової величини ξ, $\mathbf{E}\xi$, $\mathbf{D}\xi$.

8. Монету підкидають доти, поки не випаде аверс. Нехай ξ – число підкидань до першого випадіння аверса. Обчислити розподіл випадкової величини ξ, $\mathbf{E}\xi$, $\mathbf{D}\xi$, $\mathbf{P}(\xi > 2)$, $\mathbf{P}(\xi \le n)$.

9. У мішень стріляють n разів. Попадання при різних пострілах є незалежними подіями. Ймовірність влучення при кожному пострілі дорівнює p. Нехай ξ – число попадань при n пострілах. Знайти розподіл випадкової величини ξ, $\mathbf{E}\xi$, $\mathbf{D}\xi$. Знайти n, p і найімовірніше число попадань у мішень, якщо $\mathbf{E}\xi = 12$, $\mathbf{D}\xi = 4$.

10. Підкидають дві гральні кості. Нехай ξ – число очок на першій кості, η – число очок на другій кості. Знайти сумісний розподіл ξ і η. Довести, що ξ, η – незалежні випадкові величини.

11. Нехай ξ і η – відповідно сума і різниця очок, що з'явилися у результаті підкидання двох гральний костей. Показати, що коефіцієнт кореляції випадкових величин ξ, η дорівнює нулю. Довести, що випадкові величини ξ та η залежні.

12. Довести, що математичне сподівання випадкової величини з гіпергеометричним розподілом та параметрами N, n, m дорівнює nm/N.

13. Які з наступних послідовностей є розподілами деяких дискретних випадкових величин?

(а) $p^k q^2,\ q = 1-p,\ 0<p<1,\ k = 1,2,3,\ldots$;

(б) $p^{k-n} q,\ q = 1-p,\ 0<p<1,\ k = n, n+1, \ldots$;

(в) $1/(k+1),\ k = 1,2,\ldots$;

(г) $2^k e^{-2}/k!,\ k = 0,1,\ldots$

14. У якому випадку найбільш імовірне значення біноміального розподілу досягається у двох точках ?

15. Гральну кость підкидають до k-ої появи шістки. Знайти математичне сподівання числа підкидань.

16. Знайти математичне сподівання числа листів, що дійдуть за правильною адресою, у задачі 3.26 про збіг із розділу про дискретний імовірнісний простір.

17. Підкидають два гральні кубики. Нехай ξ – число появ шісток при першому підкиданні, η – число появ шісток при другому підкиданні. Знайти сумісний розподіл випадкових величин ξ, η. Довести, що випадкові величини ξ, η незалежні.

18. Довести, що негативний біноміальний розподіл задовольняє рекурентну тотожність $\mathbf{P}(\xi = k) = \mathbf{P}(\xi = k-1) qk/(k-r+1)$.

19. Обчислити коефіцієнт кореляції між числом появи одиниці і числом появи шістки при n підкиданнях гральної кості.

20. Нехай A – випадкова подія. Довести, що $1\!\!\mathrm{I}_A(\omega)$, де $1\!\!\mathrm{I}_A(\omega)$ – індикатор множини A, є випадковою величиною. Знайти функцію розподілу цієї випадкової величини. Побудувати її графік.

21. Тричі підкидають монету. Нехай $\xi(\omega)$ – число появ аверса. Знайти функцію розподілу випадкової величини $\xi(\omega)$. Побудувати графік функції розподілу.

22. Довести, що: $1\!\!\mathrm{I}_{A\cap B} = 1\!\!\mathrm{I}_A\ 1\!\!\mathrm{I}_B$, $1\!\!\mathrm{I}_{A\cup B} = 1\!\!\mathrm{I}_A + 1\!\!\mathrm{I}_B - 1\!\!\mathrm{I}_{A\cap B}$, $1\!\!\mathrm{I}_{A\Delta B} = |1\!\!\mathrm{I}_A - 1\!\!\mathrm{I}_B|$, $1\!\!\mathrm{I}_{\cup A_n} = \sum 1\!\!\mathrm{I}_{A_n}$ для попарно несумісних A_n, $1\!\!\mathrm{I}_{\overline{A}} = 1 - 1\!\!\mathrm{I}_A$, $1\!\!\mathrm{I}_A = \lim 1\!\!\mathrm{I}_{A_n}$, якщо $A_n \uparrow A$ або $A_n \downarrow A$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \{\sum 1\!\!\mathrm{I}_{A_n} = \infty\}$.

23. Величина ξ набуває цілих невід'ємних значень. Довести, що

$$\mathbf{E}\xi = \sum\nolimits_{n\ge 0} \mathbf{P}(\xi > n).$$

24. Знайти найбільшу з імовірностей $\mathbf{P}(\xi = n)$ для величини з розподілом Пуассона $\xi \simeq \Pi(\lambda)$.

1.9. Дискретні випадкові величини: функції від них, незалежність

Література: [1, с.33–38], [2,с.31-37, 59-62]. Ауд: 1-6, сам: 7-12.

1. Випадкова величина ξ набуває значення $\pm 1, \pm 2$ із ймовірностями $1/4$. Знайти розподіли випадкових величин $\eta_1 = \xi^2$, $\eta_2 = e^{it\xi}$. Обчислити $\mathbf{E}\eta_1$, $\mathbf{E}\eta_2$, $\mathbf{D}\eta_1$, $\mathbf{D}\eta_2$.

2. В урні міститься N куль, серед яких n куль білих. З урни вибрали m куль. Нехай ξ – число білих куль у вибірці. Знайти розподіл величини ξ, та $\mathbf{E}\xi$, $\mathbf{D}\xi$.

3. Нехай ξ і η – дискретні незалежні випадкові величини, які набувають значення $x_1, x_2, \ldots$ з ймовірностями $\mathbf{P}(\xi = x_i) = p_i$, $\mathbf{P}(\eta = x_j) = q_j$. Обчислити $\mathbf{P}(\xi = \eta)$.

4. Нехай ξ і η – незалежні випадкові величини, що набувають значення з $\overline{1,n}$, причому $\mathbf{P}(\xi = k) = \mathbf{P}(\eta = k) = 1/n$. Знайти розподіл випадкової величини $\zeta = \xi + \eta$.

5. Незалежні випадкові величини ξ_1 і ξ_2 мають геометричний розподіл з однаковими параметрами. Нехай $\eta = \max(\xi_1, \xi_2)$. Знайти розподіл випадкової величини η та сумісний розподіл випадкових величин η і ξ_1.

6. Купони в коробках занумеровані цифрами від 1 до n. З кожної коробки виймається один купон. Для того, щоб виграти, потрібно набрати повний комплект купонів з різними номерами. Знайти математичне сподівання числа коробок, які необхідно випробувати, щоб виграти.

7. Тривалість міжнародної телефонної розмови вимірюється хвилинами і є випадковою величиною, яка має геометричний розподіл. Яка ймовірність того, що розмова буде тривати ще 3 хвилини, якщо до цього вона продовжувалась 10 хвилин?

8. Нехай ξ і η – незалежні невід'ємні випадкові величини, які набувають цілі значення, причому $\mathbf{E}\xi < \infty$. Довести, що

$$\mathbf{E}\min(\xi,\eta) = \sum\nolimits_{n\geq 1} \mathbf{P}(\xi \geq n)\mathbf{P}(\eta \geq n).$$

9. Випадкові величини ξ_1 і ξ_2 – незалежні і мають геометричний розподіл з однаковими параметрами, тобто $\mathbf{P}(\xi_i = k) = (1-p)^{k-1}p$, $k = 1, 2, \ldots$, $i = 1, 2$. Довести, що

$$\mathbf{P}(\xi_1 = k | \xi_1 + \xi_2 = n) = 1/(n-1).$$

10. Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – незалежні випадкові величини, що набувають значення $1, \ldots, m$ із ймовірностями $\mathbf{P}(\xi_j = k) = 1/m$, $k = \overline{1, m}$. Нехай $\eta = \max(\xi_j, j = \overline{1, n})$, $\zeta = \min(\xi_j, j = \overline{1, n})$. Знайти розподіли η та ζ.

11. Нехай ξ_1 і ξ_2 – незалежні випадкові величини, які мають розподіл Пуассона з параметрами λ_1 і λ_2 відповідно. Довести, що випадкова величина $\zeta = \xi_1 + \xi_2$ має розподіл Пуассона з параметром $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. Довести, що умовний розподіл ξ_1 за умови, що $\zeta = n$, є біноміальним розподілом з параметрами n і $p = \lambda_1/\lambda$, тобто

$$\mathbf{P}(\xi_1 = k | \xi_1 + \xi_2 = n) = C_n^k (\lambda_1/\lambda)^k (\lambda_2/\lambda)^{n-k}.$$

12. Нехай ξ – довжина серії успіхів у послідовності випробувань Бернуллі, яка почалася з першого випробування. Знайти розподіл ξ, $\mathbf{E}\xi$, $\mathbf{D}\xi$. Нехай η – довжина другої серії. Знайти розподіл η, $\mathbf{E}\eta$, $\mathbf{D}\eta$, а також сумісний розподіл величин ξ і η.

13. Нехай випадкова величина ξ набуває скінченне число невід'ємних значень x_1, x_2,. . . , x_k. Довести, що

$$\lim\nolimits_{n\to\infty} (\mathbf{E}\xi^{n+1})/(\mathbf{E}\xi^n) = \max\nolimits_{1\leq i\leq k} x_i = \lim\nolimits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mathbf{E}\xi^n}.$$

14. Нехай ξ та η – дискретні випадкові величини, що набувають скінченне число значень. Величина ξ набуває значення x_j, $j = \overline{1, m}$, величина η – значення y_i, $i = \overline{1, n}$. Припустимо, що величини ξ^l та η^k при $l = \overline{1, m-1}$, $k = \overline{1, n-1}$, – некорельовані, тобто $\mathbf{E}\xi^l\eta^k = \mathbf{E}\xi^l\mathbf{E}\eta^k$. Довести, що ξ і η – незалежні випадкові величини.

15. Урна містить m куль, позначених номерами від 1 до m. З урни послідовно беруть n куль з поверненням. Нехай ξ – найбіль-

ший із номерів, отриманих в даному експерименті. Знайти розподіл величини ξ і математичне сподівання $\mathbf{E}\xi$.

16. Нехай ξ – число випробувань у схемі випробувань Бернуллі з ймовірністю p, проведених до появи k-го успіху. Довести, що

$$\mathbf{P}(\xi = n) = C_n^{k-1} p^k (1-p)^{n-k+1},\ n = k-1, k, k+1, \dots$$

17. Груба модель для розподілу розміру страхової вимоги X представляє X як дискретну випадкову величину, котра набуває значень 5000, 10000, і 20000 з імовірностями 0.4, 0.5, і 0.1 відповідно. Обчислити ймовірність того, що з 5 випадково вибраних вимог, 3 дорівнюють 5000, а кожна з двох інших набуває більших значень.

18. Страхова компанія має портфель великих індустріальних ризиків страхування. Досліджуються три таких незалежних ризики, маркіровані як A, B, C. Застраховані суми, в мільйонах, є 2.5, 4.8, 7.2 для A, B, C відповідно. Досвідчений експерт оцінює імовірності вимоги у наступний календарний рік як 0.01, 0.02, 0.005 для A, B, C відповідно. Якщо вимога дійсно виникає, то повна застрахована сума буде виплачена, і ніякі подальші вимоги не можуть тоді виникнути для того ризику. Вищезгадані оцінки ймовірності повинні використатися всюди по цьому питанню. (а) Визначити, для цієї групи трьох ризиків, використовуючи підходящі індикаторні величини, або іншим шляхом, середнє і стандартне відхилення для повної суми вимог у наступний календарний рік. (б) Відомо, що виникла точно одна вимога. Обчислити середнє повної вимоги.

19. Сумісний розподіл випадкових величин ξ, η задано таблицею:

		η		
		2	4	6
	1	0.2	0.0	0.2
ξ	2	0.0	0.2	0.0
	3	0.2	0.0	0.2

(а) Показати, що ξ та η є некорельованими, але залежні. (б) Залишивши імовірності у перших і третіх рядках таблиці незмінними, змінити другий рядок так, щоб ξ та η були незалежні.

20. В умовах задачі 6 визначити математичне сподівання кількості коробок, що потрібно випробувати, щоб: (а) зібрати всі купони з номерами $1, \dots, m$, $m < n$; (б) зібрати k повних комплектів купонів; (в) отримати два однакові купони; (г) отримати k однакові купони.

21. Написано n листів, але адреси на конвертах написані у випадковому порядку. Нехай ξ_n – кількість листів, які будуть отримані тими адресатами, яким призначались. Обчислити $\mathbf{E}\xi_n$, $\mathbf{D}\xi_n$.

22. Випадкові величини ξ, η набувають скінчені множини значень та $\mathbf{E}\xi^j\eta^k = \mathbf{E}\xi^j\ \mathbf{E}\eta^k$ для всіх $j, k \geq 1$. Довести, що величини ξ, η незалежні.

23. *Неоднорідні випробування Бернуллі*. Виконуються n випробувань Бернуллі, що незалежні у сукупності та мають імовірності p_k успіху у k-му випробуванні. Нехай ν_n – відповідна кількість успіхів. Обчислити $\mathbf{E}\nu_n$, $\mathbf{D}\nu_n$. Знайти максимум та мінімум $\mathbf{D}\nu_n$ за умови заданого середнього $a = 1/n \sum_{k=1}^{n} p_k$.

1.10. Абсолютно неперервні величини: числові характеристики

Література: [1, с.51–59, 70–73], [2,с.51-58,62-76].
Ауд: 1-7, сам: 8-16.

1. За яких значень параметра наступні функції є щільностями розподілу:

(а) $p(x) = a(x-b)(x-c)$ при $x \in [b, c]$, $p(x) = d$ при $x \notin [b, c]$;
(б) $p(x) = ax^{10}(1-x)^{10}$ при $x \in [0, 1]$, $p(x) = 0$ при $x \notin [0, 1]$;
(в) $p(x) = a \exp\{b|x|^c\}$?

2. Нехай Ω – квадрат з вершинами $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$; координати точок квадрата позначимо через (x, y). σ-алгебру $\mathfrak{F}$ визначимо як σ-алгебру, яка містить всі множини, утворені точками многокутників, що лежать у квадраті. Ймовірність множини, яка складається з точок фігури, що лежить у квадраті, дорівнює площі цієї фігури. Знайти функції розподілу та щільності випадкових

величин, заданих на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$: $\xi_1 = x + y$, $\xi_2 = x \cdot y$, $\xi_3 = \min(x, y)$.

3. Точка P рівномірно розподілена всередині круга радіусу R. Нехай ξ — відстань від точки P до центру круга. Знайти: (а) $\mathbf{P}(\xi > R/2)$; (б) щільність ξ; (в) $\mathbf{E}\xi$; (г) $\mathbf{D}\xi$.

4. Величина ξ має щільність Коші: $p(x) = 1/\pi(1+x^2)$. Обчислити ймовірності: (а) $\mathbf{P}(\xi < 1/\sqrt{2})$; (б) $\mathbf{P}(\xi^2 + \xi > 0)$; (в) $\mathbf{P}(\xi^2 - \xi > 2|\xi > 0)$.

5. Колесо вагону має тріщину на зовнішньому краю. Нехай $\xi(\omega)$ – висота тріщини над землею при випадковій зупинці вагону. Знайти функцію розподілу, щільність $\xi(\omega)$ та $\mathbf{E}\xi$, $\mathbf{D}\xi$.

6. На відрізку $[0, T]$ навмання беруть дві точки. Нехай ξ – відстань між ними. Знайти функцію розподілу і щільність ξ.

7. Рівнобедрений трикутник утворено одиничним вектором осі OX і одиничним вектором випадкового напрямку. Знайти щільність розподілу третьої сторони цього трикутника: (а) у випадку площини; (б) у випадку простору.

8. За яких значень параметрів наступні функції є щільностями розподілу: (а) $p(x) = a \sin x$ при $x \in [0, b]$, $p(x) = 0$ при $x \notin [0, b]$; (б) $p(x) = ax^b$ при $x \geq c$, $p(x) = 0$ при $x < c$ (розподіл Парето); (в) $p(x) = a/(e^x + e^{-x})$.

9. Розв'язати задачу 2 для: $\xi_4 = x^2 + y^2$, $\xi_5 = \max(x, y)$, $\xi_6 = |x - y|$.

10. Випадкова величина має щільність $p(x) = e^{-2|x|}$. Обчислити (а) $\mathbf{P}(\xi < 1)$; (б) $\mathbf{P}(\xi < 3|\xi \geq 2)$; (в) $\mathbf{E}\xi$, $\mathbf{D}\xi$.

11. Випадкова величина ξ має щільність $p(x)$. Знайти $\mathbf{E}\xi$, $\mathbf{D}\xi$ у випадку: (а) $p(x) = \{\exp(-(x-1)^2/2) + \exp(-(x+1)^2/2))\}/2\sqrt{2\pi}$; (б) $p(x) = 4\pi^{-1/2} x^2 \exp\{-x^2\}$ при $x > 0$, $p(x) = 0$ при $x < 0$.

12. На колі радіусу R навмання взято дві точки з рівномірним розподілом. Знайти функцію розподілу відстані між ними.

13. Нехай $O = (0, 0)$, $T = (0, 1)$, а випадкова точка P на осі Ox така, що кут OTP рівномірно розподілений на $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Знайти щільність розподілу і математичне сподівання абсциси точки P.

14. Одиничний вектор у просторі має випадковий напрямок (тобто він є рівномірно розподіленим на одиничній сфері $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$). Знайти щільність розподілу і математичне сподівання довжини проекції цього вектора: (а) на фіксовану пряму Ox; (б) на фіксовану площину xOy.

15. На відрізку $[0, 1]$ навмання вибрані n точок, які розбивають його на $n + 1$ частину. Доведіть, що кожен відрізок має одну і ту саму функцію розподілу. Знайти її.

16. Випадкова величина ξ має щільність $p(x) = Ax^{\alpha-1}e^{-x}$ при $x > 0$, $p(x) = 0$ при $x < 0$, де $\alpha > 1$. (а) Визначити сталу A; (б) довести, що $\mathbf{P}(\xi > x + y|\xi > y) < \mathbf{P}(\xi > x)$ для $x > 0, y > 0$.

17. Випадкова величина ξ має щільність $f_\xi(x)$, а функція $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ кусково монотонна і кусково неперервно диференційована. Довести, що щільність розподілу величини $\eta = g(\xi)$ визначається рівністю

$$f_\eta(y) = \sum\nolimits_{x:\ g(x)=y} f_\xi(x)/|g'(x)| \quad \text{м. с.}$$

18. Які з наведених нижче функцій є функціями розподілу ?

$$F_1(x) = 3/4 + (2\pi)^{-1} \arctan x, \quad F_2(x) = \exp(-\exp(-x)),$$

$$F_3(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ [x]/2, & 0 < x \le 2; \\ 1, & x > 2, \end{cases} \qquad F_4(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ x/(x+1), & x > 0. \end{cases}$$

19. Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ – ймовірнісний простір. Випадкову подію $A \in \mathcal{F}$, $\mathbf{P}(A) > 0$, називають атомом, якщо для кожного $B \in \mathcal{F}$, $B \subset A$, випливає, що $\mathbf{P}(B) = 0$ або $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A)$. Довести, що випадкова величина з ймовірністю одиниця є сталою на кожному атомі.

20. Якщо $\xi(\omega)$ – випадкова величина, то $\{w : \xi(w) = c\}$ – випадкова подія для кожного $c \in \mathbb{R}$. Чи справджується зворотне твердження?

21. Довести, що неперервна функція розподілу є рівномірно неперервною.

22. Нехай f – обмежена щільність розподілу, що дорівнює нулю

поза інтервалом $[0,1]$, функція $g = f\ /\sup f$, а (ξ,η) – випадкова точка всередині квадрату $[0,1]^2$. Довести, що умовний розподіл випадкової величини ξ за умови, що $\eta \le g(\xi)$, має щільність f.

23. Функція Кантора визначається на щільній множині D точок $x \in [0,1]$, які мають раціональний розклад у тернарній системі зчислення вигляду $x = 0,x_1...x_n2222...$, $x_k \in \{0,1,2\}$, формулою $F(x) = \sum_{k:\ x_k=2} 2^{-k}$, та продовжується за неперервністю на $[0,1]$. Довести неперервність F на D, однозначність продовження та сингулярність цієї функції.

24. Нехай алгебра $\mathfrak{A}$ підмножин $\mathbb{R}$ породжується півінтервалами $(a,b]$, а множина $D = \{1/n,\ n \ge 1\}$. Довести, що функція множин $m(A) \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$, $A \in \mathfrak{A}$, що дорівнює кількості елементів множини $A \cap D$, адитивна на $\mathfrak{A}$, має декілька різних продовжень на $\sigma[\mathfrak{A}] = \mathfrak{B}[\mathbb{R}]$, та не є сигма-адитивною на $\mathfrak{A}$.

25. Мірою Лебега L на системі $\mathfrak{F}$ підмножин $\mathbb{R}$ називається сигма-адитивна невід'ємна ненульова функція на $\mathfrak{F}$, що є інваріантною відносно зсувів: $L(A) = L(A+x) \equiv L(\{a+x, a \in A\})$ для всіх $x \in \mathbb{R}, A \in \mathfrak{F}$ таких, що $A+x \in \mathfrak{F}$. (а) Довести, що існує міра Лебега на $\mathfrak{B}[\mathbb{R}]$. (б) Цю міру не можна подовжити на сигма-алгебру всіх підмножин $\mathfrak{F} = 2^{\mathbb{R}}$ (для цього визначити фактор-множину $A \subset [0,1]$ таку, що $(A+p)\cap(A+q) = \varnothing$ при $p \ne q$, $p,q \in \mathbb{Q}$ та $\cup_{p\in\mathbb{Q}}\{A+p\} = \mathbb{R}$. Тоді інваріантність L суперечить сигма-адитивності та невиродженості L).

26. Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини із функцією розподілу Кантора на $[0,1]$.

27. Випадкові величини (ξ_j) квадратично інтегровні. Довести тотожність

$$\mathbf{D}\left(\sum_{j=1}^n \xi_j\right) = \sum_{j=1}^n \mathbf{D}(\xi_j) + 2\sum_{1\le j<k\le n} \operatorname{cov}(\xi_j, \xi_k).$$

28. Функція розподілу F має точки стрибків $(x_j, j \ge 1)$. Довести, що при $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{j: x_j\in(x,x+\varepsilon)} (F(x_j+0) - F(x_j)) \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

29. Нехай $\mathbb{Q} = \{y_1, \ldots, y_n, \ldots\}$ послідовність раціональних точок відрізку $[0,1]$. Випадкова величина ξ така, що $\mathbf{P}(\xi_n = y_n) =$

$2^{-n}, n \geq 1$. Довести, що функція розподілу $F_\xi(x)$ неперервна у кожній точці $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

1.11. Абсолютно неперервні величини: функції від величин

Література: [1, с.51–59, 70–73], [2,с.51-79]. Ауд: 1-5, сам: 6-10.

1. Тривалість безвідмовної роботи приладу вимірюється в роках і є випадковою величиною з щільністю $p(x) = 2/x^3$ при $x \geq 1$, $p(x) = 0$ при $x < 1$. Через чотири роки прилад міняють, навіть якщо він не вийшов з ладу. Обчислити математичне сподівання тривалості роботи приладу.

2. Випадкова величина ξ має щільність Коші: $p(x) = 1/\pi(1+x^2)$. Знайти: (а) $\mathbf{E}|\xi|/(1+\xi^2)$; (б) $\mathbf{E}(\operatorname{arctg}\xi)^2$.

3. Випадкова величина має показниковий розподіл з параметром λ. Знайти щільність розподілу і математичне сподівання випадкових величин: (а) $\eta_1 = \exp(-\xi)$; (б) $\eta_2 = \xi^2$; (в) $\eta_3 = \{\lambda\xi\}$.

4. Випадкова величина має нормальній розподіл $N(0,1)$. Знайти щільність розподілу величин $\eta_1 = a\xi + b$, $\eta_2 = \xi^{-2}$. Обчислити математичні сподівання тих величин, для яких воно визначене. Знайти розподіл величини $\eta = \operatorname{sign}\xi$.

5. Випадкова величина ξ має рівномірний на $[0,1]$ розподіл. Знайти щільність і математичне сподівання випадкових величин: (а) $\eta = 3\xi - 2$; (б) $\eta = |2\xi - 1|$; (в) $\eta = -\ln\xi$.

6. Випадкова величина має щільність $p(x) = \exp(-2|x|)$. Визначити: (а) $\mathbf{E}\max(\xi, 2)$; розподіл та математичне сподівання випадкових величин: (б) $\eta = \xi^2$; (в) $\eta = [\xi]$; (г) $\eta = \exp(-|\xi|)$.

7. Випадкова величина має нормальній розподіл $N(0,1)$. Знайти щільність розподілу величин $\eta_1 = \xi^2$, $\eta_2 = |\xi|$. Обчислити математичні сподівання тих величин, для яких воно визначене.

8. Випадкова величина ξ має щільність $p(x) = 1/\pi\sqrt{1-x^2}$ при $|x| < 1$, $p(x) = 0$ при $|x| > 1$ (розподіл арксинуса). Знайти щільність

і математичне сподівання випадкових величин: (а) $\eta = \arcsin \xi$; (б) $\eta = 1 + \xi^2$.

9. Випадкова величина ξ має показниковий розподіл з параметром λ. (а) Довести, що при $\alpha > 0$ величина $\xi^{1/\alpha}$ має розподіл Вейбула з параметрами $\lambda^{1/\alpha}, \alpha$. (б) Знайти розподіл випадкової величини $[\xi]$.

10. Випадкова величина ξ рівномірно розподілена на відрізку $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Знайти щільність розподілу і математичне сподівання випадкової величини $|\sin \xi|$.

11. Випадкова величина ξ має неперервну функцію розподілу $F(x)$. Довести, що випадкова величина $F(\xi)$ рівномірно розподілена на $[0, 1]$.

12. Випадкова величина ξ рівномірно розподілена на $[0, 1]$. Для функції розподілу F позначимо ліву обернену

$$F^{(-1)}(y) \equiv \sup(x : F(x) < y).$$

Довести, що випадкова величина $F^{(-1)}(\xi)$ має функцію розподілу F.

13. Нехай $F(x)$ – функція розподілу випадкової величини ξ. Знайти функції розподілу величин $\eta_1 = a\xi + b$, $\eta_2 = e^{\xi}$, $\eta_3 = F(\xi)$.

14. Нехай $\xi(\omega)$ – випадкова величина. Довести, що функції $\eta_1(\omega) = a\xi(\omega)$, $\eta_2(\omega) = |\xi(\omega)|$, $\eta_3(\omega) = \xi^2(\omega)$ теж випадкові величини.

15. Нехай $\eta(\omega) = \xi^2(\omega)$ – випадкова величина. Чи можна стверджувати, що: (а) $|\xi(\omega)|$ є випадковою величиною; (б) $\xi(\omega)$ є випадковою величиною?

16. Показати, що якщо ξ і η – $\mathfrak{F}$-вимірні, то

$$\{\omega : \xi(\omega) = \eta(\omega)\} \in \mathfrak{F}.$$

17. Випадкова величина ξ має розподіл Коші. Довести, що величини: (а) $1/\xi$, (б) $2\xi/(1 - \xi^2)$, (в) $(3\xi - \xi^3)/(1 - 3\xi^2)$ мають розподіл Коші.

18. Випадкова величина ξ називається симетричною, якщо функції розподілу ξ та $-\xi$ збігаються. Сформулювати умову симетричності через функцію розподілу і через щільність ξ.

19. Радіус R кола виміряно з рівномірно розподіленою на $[-\varepsilon, \varepsilon]$ похибкою, $\varepsilon < R$. Знайти математичне сподівання та розподіл оцінки для площі кола.

20. Випадкова величина ξ має нормальній розподіл $N(\mu, \sigma^2)$. Знайти щільність випадкової величини $\eta = \exp(\xi)$ (логнормальний розподіл).

21. Випадкова величина ξ має щільність $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x^2}} e^{-1/(2x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$. Знайти щільність величини $\eta = 1/\xi$.

22. На відрізку $[0, R]$ осі ординат навмання обрано точку. Через неї проведена хорда кола $\{(x, y) : x^2 + y^2 = R^2\}$, перпендикулярна до осі ординат. Знайти щільність розподілу довжини цієї хорди.

23. Випадкова величина ξ має щільність $f(x)$. Знайти щільність величини $\eta = a \sin(\xi + b)$ при $a > 0$.

24. Випадкова величина $\xi \simeq N(0, 1)$. Довести, що випадкова величина $\eta = \xi 1\!\!\mathrm{I}_{|\xi| \le a} - \xi 1\!\!\mathrm{I}_{|\xi| > a}$ також має стандартний нормальний розподіл.

25. Навести приклад абсолютно неперервної випадкової величини ξ та неперервної функції g таких, що $g(\xi)$ має невироджений дискретний розподіл.

26. Функція розподілу випадкової величини ξ неперервна в нулі. Знайти функцію розподілу величини $\eta = (\xi/ |\xi|) 1\!\!\mathrm{I}_{\xi \ne 0} + 1\!\!\mathrm{I}_{\xi = 0}$.

27. Випадкова величина ξ має щільність $f(x)$. Довести, що $|\xi|$ також має щільність та знайти її.

28. Описати потужність класу всіх функцій розподілу.

1.12. Властивості математичного сподівання та його обчислення

Література: [1, с.59–73], [2,с.59-79]. Сам: 1-7.

1. Нехай $\mathbf{P}(B) > 0$, а ξ – дискретна випадкова величина зі значеннями $\{x_n, n \ge 1\}$. Визначимо умовне математичне сподівання за умови B через $\mathbf{E}(\xi \mid B) \equiv \mathbf{E}(\xi 1\!\!\mathrm{I}_B)/\mathbf{P}(B)$. Довести, що:

(а) для такого математичного сподівання виконуються всі властивості математичного сподівання дискретної випадкової величини, (б) $\mathbf{E}(\xi \mid B) = \sum_{n\ge 1} x_n \mathbf{P}(\xi = x_n \mid B)$.

2. Випадкова величина ξ інтегровна тоді й тільки тоді, коли при деякому $h > 0$ абсолютно збігається ряд

$$I(\xi, h) \equiv \sum_{n\in\mathbb{Z}} nh\ \mathbf{P}(nh \le \xi < nh + h).$$

Ця збіжність не залежить від $h > 0$, причому $\mathbf{E}\xi = \lim_{h\to 0} I(\xi, h)$ (інтеграл Лебега дорівнює інтегралові Фреше).

3. Вивести формулу для математичного сподівання дискретної (не обов'язково простої) випадкової величини з загального означення математичного сподівання.

4. Нехай ξ – інтегровна випадкова величина. Довести абсолютну неперервність інтегралу Лебега: для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$ таке, що з $A \in \mathfrak{F}$, $\mathbf{P}(A) \le \delta$ випливає, що $|\mathbf{E}\xi \mathbb{1}_A| \le \varepsilon$.

5. Навести приклад послідовності $(\xi_n, n \ge 1)$ випадкових величин таких, що $\xi_n \to 0$, $n \to \infty$, але $\mathbf{E}\xi_n \ge 1$ через порушення умови мажорованості.

6. Нехай $\xi_n \to \xi$ і $\eta_n \to \eta, n \to \infty$, м.н., та $|\xi_n| \le \eta_n$, причому $\mathbf{E}\eta_n \to \mathbf{E}\eta$, $n \to \infty$. Довести, що $\mathbf{E}\xi_n \to \mathbf{E}\xi, n \to \infty$.

7. Довести, що для інтегровних випадкових величин ξ, η:

$$\mathbf{E}\xi = \int_0^\infty (F_\xi(-x) + 1 - F_\xi(x))dx,$$
$$\mathbf{E}\xi - \mathbf{E}\eta = \int_{-\infty}^\infty (\mathbf{P}(\eta < x \le \xi) - \mathbf{P}(\xi < x \le \eta))\,\mathrm{sign}(x)dx.$$

8. Довести, що для цілозначної невід'ємної величини

$$\mathbf{E}\xi = \sum_{n\ge 1} \mathbf{P}(\xi \ge n) = \sum_{n\ge 0} \mathbf{P}(\xi > n).$$

9. Випадкова величина ξ називається узагальнено інтегровною, якщо виконується умова $\min(\mathbf{E}\xi^+, \mathbf{E}\xi^-) < \infty$. В цьому разі $\mathbf{E}\xi \equiv \mathbf{E}\xi^+ - \mathbf{E}\xi^-$ визначено коректно. Вивести для таких величин твердження теореми про властивості математичного сподівання (у припущенні узагальненої інтегрованості всіх величин, що входять до відповідних тверджень).

10. Довести, що $\mathbf{P}(\underline{\lim} A_n) \le \underline{\lim}\ \mathbf{P}(A_n) \le \overline{\lim}\ \mathbf{P}(A_n) \le \mathbf{P}(\overline{\lim} A_n)$.

11. Довести σ-адитивність математичного сподівання: для інтегровної величини ξ та попарно несумісних $A_n \in \mathfrak{F}$:

$$\mathbf{E}\xi\mathbb{1}_{\cup_{n\geq 1}A_n} = \sum_{n\geq 1}\mathbf{E}\xi\mathbb{1}_{A_n}.$$

12. Довести, що суму абсолютно збіжного ряду можна подати у вигляді інтегралу Лебега за лічильною мірою $\lambda(B) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathbb{1}_{n\in B}$.

13. Довести, що клас борелєвих функцій, які є інтегровними за нормованою мірою Лебега-Стілтьєса, містить всі обмежені та деякі необмежені функції.

14. Довести, що невід'ємна випадкова величина ξ інтегровна тоді і тільки тоді, коли (а) $\int_0^\infty (1 - F_\xi(x))dx < \infty$, або (б) $\exists a > 0 :$ $\int_a^\infty (-\ln F_\xi(x))dx < \infty$.

15. Довести, що випадкова величина $|\xi|^\alpha$ з $\alpha > 0$, інтегровна тоді і тільки тоді, коли

$$\mathbf{E}\,|\xi|^\alpha = \int_0^\infty |x|^{\alpha-1}\,(F_\xi(-x) + 1 - F_\xi(x))dx < \infty.$$

16. Нехай $\mathbf{P}(|\xi| \geq x) = o(x^\alpha)$, $x \to \infty$, для деякого $\alpha > 0$. Довести, що (а) $\mathbf{E}\,|\xi|^\beta < \infty$ при кожному $0 < \beta < \alpha$; (б) попереднє твердження не завжди має місце при $\beta = \alpha$.

17. Випадкова величина ξ така, що

$$\mathbf{P}(|\xi| \geq \alpha n) = o(\mathbf{P}(|\xi| \geq n)), \quad n \to \infty,$$

для кожного $\alpha > 1$. Довести, що $\mathbf{E}\,|\xi|^\beta < \infty$ при всіх $\beta > 0$.

18. Нехай G – неспадна диференційовна функція на $[a, b]$ з похідною g, а f – інтегровна за мірою Лебега функція на $[G(a), G(b)]$. Довести формулу заміни змінної $x = G(y)$:

$$\int_{G(a)}^{G(b)} f(x)dx = \int_a^b f(G(y))g(y)dy.$$

19. Довести збіжність середніх $\mathbf{E}\,|\xi - \xi_n| \to 0, n \to \infty$, для інтегровної випадкової величини ξ та простих величин ξ_n таких, що $\xi_n \to \xi$, $n \to \infty$, та $|\xi_n| \leq |\xi|$.

20. Нехай F – неперервна функція розподілу. Обчислити при $j, k \in \mathbb{N}$

$$\int_{-\infty}^\infty F(x)dF(x) = 1/2, \quad \int_{-\infty}^\infty F^k(x)dF^j(x) = j/(j + k).$$

21. Довести, що для функції розподілу F та $a > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty}(F(x+a) - F(x))dx = a.$$

22. Знайти $\mathbf{E}\,|\xi|$ для $\xi \simeq N(\mu, \sigma^2)$.

23. Випадкова величина ξ набуває значень у відрізку $[a, b]$. Довести, що $a \le \mathbf{E}\xi \le b$, $\mathbf{D}\xi \le (b-a)^2/4$.

24. Довести, що $\mathbf{P}(|\xi| \ge \varepsilon) \le \mathbf{E}\,|\xi|^k/\varepsilon^k$ при $k \ge 1$.

25. Довести, що $\mathbf{P}(\xi \ge \varepsilon) \le \exp(-c\varepsilon)\mathbf{E}\exp(c\xi)$ для , $\varepsilon \ge 0$.

26. Нехай $\mathbf{E}\xi = 0$, $\mathbf{E}\xi^2 = \sigma^2 < \infty$. Довести при $\varepsilon > 0$ (а) нерівність $\mathbf{P}(|\xi| \ge \varepsilon) \le 2\sigma^2/(\sigma^2 + \varepsilon^2)$; (б) за припущення симетричності $\xi \simeq -\xi$ вивести $\mathbf{P}(\xi \ge \varepsilon) \le \sigma^2/(\sigma^2 + \varepsilon^2)$; (в) довести цю нерівність за слабшої умови $\mathbf{E}\xi = 0$.

27. Якщо $\xi \simeq N(\mu, \sigma^2)$, то при $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}(|\xi - \mu| \ge \varepsilon\sigma) \le \sqrt{2/\pi}\varepsilon^{-1}\exp(-\varepsilon^2/2).$$

28. Нехай $\mathbf{E}\xi = 0$. Визначимо відхилення

$$\tau(\xi) = \sup_{y>0}\sqrt{(2y^2)^{-1}\ln\mathbf{E}\exp(2y\xi)}.$$

Довести, що (а) $\tau(\lambda\xi) = \lambda\tau(\xi)$ при $\lambda > 0$; (б) для $x \ge 0$

$$\mathbf{P}(\xi > x) \le \exp(-x^2/2\tau^2(\xi)).$$

29. Борелєва функція $g : \mathbb{R} \to [0, a]$, а $b \in (0, a)$. Довести для довільної величини ξ нерівність $\mathbf{P}(g(\xi) \ge b) \ge (\mathbf{E}g(\xi) - b)/(a - b)$.

30. Випадкова величина $\nu_n(p)$ має біноміальний розподіл з параметрами n, p. Довести при $\lambda, \varepsilon > 0$ нерівність

$$\mathbf{P}(\nu_n(p) - np > n\varepsilon) \le \mathbf{E}\exp(\lambda\nu_n(p) - \lambda n(p + \varepsilon)).$$

31. Випадкова величина ξ така, що $\mathbf{E}\,|\xi|^n \le cb^n$ для всіх $n \ge 1$ та деяких сталих b, c. Довести, що $\mathbf{P}(|\xi| \le b) = 1$.

32. Випадкова величина ξ набуває значень з інтервалу $[a, b]$, причому $\mathbf{D}\xi = (b-a)^2/4$. Знайти розподіл ξ.

33. Довести нерівність Кантеллі при $\varepsilon > 0$:

$$\mathbf{P}(|\xi - \mathbf{E}\xi| \ge \varepsilon) \le 2\mathbf{D}\xi/(\varepsilon^2 + \mathbf{D}\xi).$$

1.13. Випадкові вектори: сумісні розподіл, щільність, характеристики

Література: [1, с.79–87], [2,с.79-91]. Ауд: 1-5, сам: 6-12.

1. Випадковий вектор (ξ,η) має сумісну щільність $p(x,y)$. Обчислити ймовірності: (а) $\mathbf{P}(|\xi|<1,\eta>0)$; (б) $\mathbf{P}(\xi<\eta)$; (в) $\mathbf{P}(\xi<x)$; (г) $\mathbf{P}([\xi]=[\eta])$.

2. Сумісна щільність випадкового вектора (ξ,η) дорівнює $p(x,y) = x\exp(-x-xy)$ при $x \geq 0$, $y \geq 0$, $p(x,y) = 0$ у решті випадків. Знайти: (а) щільності випадкових величин ξ та η; (б) $\mathbf{P}(\xi<2\eta+4)$; (в) $\mathbf{P}(\xi<\eta-1)$; (г) $\mathbf{E}\xi$, $\mathbf{E}\eta$, $\mathbf{E}\xi\eta$. Довести, що ξ та η залежні.

3. Випадкова величина ξ рівномірно розподілена на $[-1,1]$. При яких дійсних a величини ξ та $|\xi-a|$ некорельовані? Знайти коваріації випадкових величин: (а) ξ і ξ^2; (б) ξ і ξ^3; (в) $\sin\pi\xi$ і $\cos\pi\xi$.

4. Знайти математичне сподівання і коваріацію координат випадкового вектора, рівномірно розподіленого: (а) всередині трикутника з вершинами $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$; (б) всередині круга $\{(x,y) : x^2-2x+y^2 \leq 0\}$.

5. Нехай F, G – функції розподілу. Довести, що функції
(а) $F(x)G(y)(1+\alpha(1-F(x))(1-G(y)))$ при $\alpha\in(-1,1)$;
(б) $\alpha^{-1}\ln(1+(\exp(\alpha F(x))-1)\ (\exp(\alpha G(y))-1)/(\exp(\alpha)-1))$ при $\alpha>0$ є сумісними функціями розподілу, причому координати відповідного випадкового вектора мають функції розподілу F та G. Узагальнити ці твердження для n функцій розподілу.

6. Нехай $f(x)$ — щільність розподілу, яка зосереджена на $(0,\infty)$. Довести, що функція $p(x,y) = f(x+y)/(x+y)$ при $x>0, y>0$, $p(x,y) = 0$ у решті випадків, є щільністю розподілу випадкового вектора. Знайти щільності розподілу координат цього вектора і їхню коваріацію.

7. Довести тотожність $\mathbf{D}(\xi+\eta) = \mathbf{D}(\xi) + 2\mathrm{cov}(\xi,\eta) + \mathbf{D}(\eta)$.

8. Розв'язати задачу 3 (крім пункту в) для показникового розподілу з параметром 1.

9. Розв'язати задачу 4 для області $\{(x, y) : 0 \leq x^2 - y \leq -y^2\}$.

10. Нехай F, G – функції розподілу. (а) Довести, що функція $U(x, y) = \min(F(x), G(y))$ є сумісною функцією розподілу, причому (б) функції розподілу координат відповідного випадкового вектора збігаються з F та G. (в) Якщо сумісна функція розподілу $V(x, y)$ задовольняє умову твердження (б), то $V(x, y) \leq U(x, y)$ для всіх x, y.

11. Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – випадкові величини. Довести, що $\max_{1 \leq k \leq n} \xi_k$ і $\min_{1 \leq k \leq n} \xi_k$ – також випадкові величини.

12. Нехай I – деяка зліченна множина і при кожному $i \in I$ $\xi_i(\omega)$ – випадкова величина. Довести, що $\sup_{i \in I} \xi_i(\omega)$, $\inf_{i \in I} \xi_i(\omega)$ є випадковими величинами. Чи є це твердження істинним, якщо множина I незліченна?

13. Нехай $G_1, \ldots, G_n$ – функції розподілу. Тоді $F(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^n G_k(x_k)$ є сумісною функцією розподілу.

14. Функції (а) $F(x_1, x_2) = 1/2 + \pi^{-1} \arctan \max(x_1, x_2)$, (б) $F(x_1, x_2) = \min(x_1 + x_2, 1) \mathbb{1}_{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0}$ задовольняють перші три умови у означенні сумісної функції розподілу, однак не є сумісними функціями розподілу.

15. Нехай сумісна функція розподілу F має сумісну щільність f. Довести, що приріст на паралелепіпеді $[a, b)$ дорівнює інтегралу

$$\Delta_{[a,b)} F = \int_{a_1}^{b_1} \ldots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n.$$

16. Якщо випадковий вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ має сумісну щільність f, то його координати мають маргінальні щільності $f_{\xi_k}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_{k-1} dx_{k+1} \ldots dx_n$.

17. Довести, що $\mathrm{cov}(\xi, \eta)$ є білінійною функцією від ξ, η.

18. Довести, що клас всіх випадкових величин, що є некорельованими з заданою системою випадкових величин, є лінійним простором.

19. Нехай F_k – функції розподілу зі щільностями f_k, $k = 1, 2$, і $|a| < 1$. Довести, що: (а) функція

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y)(1 + a(2F_1(x) - 1)(2F_2(y) - 1))$$

є сумісною щільністю деякого випадкового вектора (ξ_1, ξ_2); (б) величини ξ_k мають щільності f_k та є залежними при $a \neq 0$.

20. Нехай $\mathbf{E}\xi_k = 0$, $\mathbf{D}\xi_k = 1$, $k = 1, 2$, та $\rho(\xi_1, \xi_2) = \rho$. Довести нерівність $\mathbf{E}\max(\xi_1^2, \xi_2^2) \le 1 + \sqrt{1-\rho^2}$.

21. Вивести із нерівності Коші, що рівність $\rho(\xi, \eta) = \pm 1$ має місце тоді й тільки тоді, коли $\eta = a \pm b\xi$ м.н. для деяких сталих $a, b > 0$.

22. Випадкові величини $\xi_k, k = \overline{1,3}$, обмежені: $|\xi_k| \le 1$. Довести нерівність Белла: $|\mathbf{E}\xi_1\xi_2 - \mathbf{E}\xi_1\xi_3| \le 1 - \mathbf{E}\xi_2\xi_3$.

23. Випадкові величини $\xi_k, k = 1, 2$, центровані і нормовані $\mathbf{E}\xi_k = 0$, $\mathbf{D}\xi_k = 1$, та мають кореляцію $\rho = \mathbf{E}\xi_1\xi_2$. Довести аналог нерівності Чебишева:

$$\mathbf{P}(\{|\xi_1| \ge \varepsilon\} \cup \{|\xi_2| \ge \varepsilon\}) \le \left(1 + \sqrt{1-\rho^2}\right)/\varepsilon^2.$$

24. Довести, що $\sqrt{\mathbf{D}(\xi+\eta)} \le \sqrt{\mathbf{D}\xi} + \sqrt{\mathbf{D}\eta}$.

25. Величини $(\xi_k, \eta_k, k \ge 1)$ квадратично інтегровні. Довести, що

$$\operatorname{cov}\left(\textstyle\sum_{k=1}^n \xi_k, \sum_{k=1}^n \eta_k\right) = \textstyle\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \operatorname{cov}(\xi_k, \eta_j).$$

1.14. Випадкові вектори: функції від векторів та їх перетворення

Література: [1, с.79–85], [2,с.79-91]. Ауд: 1-5, сам: 6-10.

1. Сумісна щільність випадкового вектора (ξ, η) дорівнює $p(x, y) = 3y^2/\pi(1 + x^2)$ при $y \in [0, 1]$, $p(x, y) = 0$ при $y \notin [0, 1]$. Знайти щільності ξ та η. Довести, що випадкові величини ξ та η незалежні, знайти (а) $\mathbf{P}(\xi\eta < 1)$; (б) $\mathbf{E}(\operatorname{arctg}\xi - \eta^2)$.

2. Випадковий вектор (ξ, η) має щільність розподілу $p(x, y) = x + y$ при $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 1]$, $p(x, y) = 0$ при всіх інших x, y. Знайти щільність розподілу випадкової величини $\zeta = \xi + \eta$.

3. Нехай (ρ, φ) — полярні координати вектора (ξ, η) зі щільністю розподілу $p(x, y)$, де $\eta \in [0, 2\pi)$. Знайти щільність випадкового

вектора (ρ, φ) і щільності його координат. Довести, що, якщо розподіл (ξ, η) є радіально симетричним (тобто $p(x,y) = g(x^2 + y^2)$ м.с.), то: (а) φ є рівномірно розподіленим; (б) ρ і φ незалежні.

4. Випадкові величини ξ і η незалежні, ξ має показниковий розподіл з параметром λ, η рівномірно розподілена на відрізку $[0, \pi/2]$. Нехай $\zeta_1 = \sqrt{\xi}\cos\eta$, $\zeta_2 = \sqrt{\xi}\sin\eta$. Довести, що випадкові величини ζ_1 та ζ_2 незалежні та мають однаковий розподіл.

5. Випадкові вектор (ξ, η) має щільність розподілу $f(x,y)$. Довести, що випадкові величини $\zeta_1 = \xi\eta$ та $\zeta_2 = \xi/\eta$ мають щільності розподілу, причому: (а) $f_{\zeta_1}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z/x)dx/|x|$; (б) $f_{\zeta_2}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(zy, y)|y|dy$.

6. Щільність розподілу вектора (ξ, η) дорівнює $p(x,y) = \lambda^2 e^{-\lambda x}$ при $0 < y < x$, $p(x,y) = 0$ при всіх інших x, y. Знайти щільність розподілу випадкової величини $\zeta = \xi + \eta$.

7. Випадкові величини ξ та η незалежні та мають показниковий розподіл з параметром λ. Довести, що величини $\zeta_1 = \xi + \eta$ та $\zeta_2 = \xi/\eta$ також незалежні.

8. Випадковий вектор (ξ, η) має щільність $(2\pi)^{-1}(1+x^2+y^2)^{-3/2}$. Знайти: (а) щільність ξ; (б) сумісну щільність полярних координат (ρ, φ).

9. Випадковий вектор (ξ, η, ζ) має щільність $p(x,y,z)$. Знайти щільність розподілу вектора (ρ, φ, ψ) сферичних координат (ξ, η, ζ). Окремо розглянути випадок радіально симетричного розподілу, тобто випадок $p(x,y,z) = g(x^2 + y^2 + z^2)$.

10. Випадковий вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ має сумісну щільність f_ξ, а функція $g : U \to V$ неперервно диференційовна та взаємно однозначно відображає відкриту множину $U \subset \mathbb{R}^n$ на відкриту множину $V \subset \mathbb{R}^n$, причому якобіан $J_g(x) \equiv \det(\partial g/\partial x)(x) \neq 0$ для всіх $x \in U$. Довести, що випадковий вектор $\eta \equiv g(\xi)$ має сумісну щільність $f_\eta(y) = f_\xi(g^{-1}(y)) \left| J_g(g^{-1}(y)) \right| \mathbb{1}_{y \in V}$. Розглянути приклади: (а) лінійного перетворення, (б) переходу до полярних координат для $n = 2$.

11. Сумісна щільність випадкового вектора (ξ, η) дорівнює

$p(x, y) = x \exp(-x - xy)$ при $x \geq 0$, $y \geq 0$, $p(x, y) = 0$ у решті випадків. Знайти щільність випадкової величини $\xi\eta$.

12. Нехай ξ_1, ξ_2, ξ_3 — незалежні рівномірно розподілені на $[0, 1]$ випадкові величини. Довести, що величина $(\xi_1\xi_2)^{\xi_3}$ рівномірно розподілена на $[0, 1]$.

13. Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — незалежні рівномірно розподілені на $[0, 1]$ випадкові величини. Упорядкуємо їх за величиною: $\xi_{(1)} \leq \xi_{(2)} \leq \cdots \leq \xi_{(n)}$. Довести, що вектор $(\xi_{(1)}, \ldots, \xi_{(n)})$: (а) рівномірно розподілений у симплексі $\{(x_1, \ldots, x_n) : 0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq 1\}$; (б) розподілений так само, як $(S_1/S_{n+1}, \ldots, S_n/S_{n+1})$, де $S_k = \zeta_1 + \cdots + \zeta_k$, $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ — незалежні випадкові величини, що мають показниковий розподіл з параметром 1.

14. Нехай (ξ, η) — вектор з радіально симетричним розподілом, координати якого незалежні. Довести, що координати цього вектора мають нормальний розподіл.

15. Взаємною коваріаційною матрицею квадратично інтегровних випадкових векторів ξ, η довільних розмірностей називається така матриця: $\mathrm{Cov}(\xi, \eta) \equiv \mathbf{E}(\xi - \mathbf{E}\xi) \cdot (\eta - \mathbf{E}\eta)'$, де добуток утворений попарними добутками відповідних координат. Довести, що коваріаційна матриця складеного вектора (ξ, η) дорівнює $\begin{pmatrix} \mathrm{Cov}(\xi) & \mathrm{Cov}(\xi,\eta) \\ \mathrm{Cov}(\xi,\eta)' & \mathrm{Cov}(\eta) \end{pmatrix}$.

16. Нехай ζ_1, ζ_2 незалежні стандартні нормальні випадкові величини. Довести, що величина $\xi = (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^{1/2}$ має щільність Релея: $x \exp(-x^2/2)$ при $x \geq 0$.

17. Випадкові величини ξ, η незалежні та мають щільності

$$f_\xi(x) = \pi^{-1}(1 - x^2)^{-1/2} 1\!\!\mathrm{I}_{|x|<1}, \quad f_\eta(x) = x \exp(-x^2/2) 1\!\!\mathrm{I}_{x>0}.$$

Довести, що $\xi\eta$ має нормальний розподіл.

18. Сумісна щільність випадкового вектора (ξ, η) дорівнює

$$f(x, y) = \lambda^2 \exp(-2\lambda x) 1\!\!\mathrm{I}_{0<y<x}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Знайти щільність випадкової величини $\xi + \eta$.

19. Випадковий вектор (ξ, η) має сумісну щільність

$$f(x, y) = c x^{p-1} y^{q-1} (1 - x - y) 1\!\!\mathrm{I}_{x,y>0,\ x+y<1}.$$

Знайти сталу c та щільність випадкової величини $\xi + \eta$.

20. Сумісна щільність випадкового вектора (ξ, η) дорівнює

$$f(x,y) = 8xy\left(1 - x^2\right) 1\!\!1_{0<x,y<1}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Знайти щільність випадкової величини $\xi\eta$.

21. Випадковий вектор (ξ, η) має сумісну щільність

$$f(x,y) = 2\pi^{-1}\left(1 - x^2 - y^2\right) 1\!\!1_{x^2+y^2<1}.$$

Знайти сумісну щільність полярних координат (R, Φ) точки (ξ, η).

22. Випадковий вектор (ξ, η) має сумісну щільність

$$f(x,y) = g(x^2 + y^2)$$

для деякої борелівської функції g. Знайти сумісну щільність полярних координат (R, Φ) точки (ξ, η).

1.15. Незалежні випадкові величини та функції від них

Література: [1, с.87–99], [2,с.88-99]. Ауд: 1-6, сам: 7-12.

1. Нехай ξ і η — дискретні випадкові величини. Величина ξ набуває значень x_j, $j = \overline{1,m}$, величина η — значень y_i, $i = \overline{1,n}$. Припустимо, що величини ξ^k та η^l некорельовані при усіх $k = \overline{1, m-1}$, $l = \overline{1, n-1}$. Довести, що випадкові величини ξ та η незалежні.

2. Нехай ξ і η — незалежні рівномірно розподілені на $[-1, 1]$ випадкові величини. Знайти щільність величини $\zeta = \xi + \eta$.

3. Нехай ξ та η є незалежними випадковими величинами, що мають показниковий розподіл з параметром λ. Знайти щільність і математичне сподівання випадкової величини: (а) $\zeta = \xi/\eta$;
(б) $\zeta = |\xi - \eta|$.

4. Три особи A, B і C одночасно підходять до двох таксофонів. Особи A і B починають розмову одразу, а особа C — після того, як закінчить розмову або A, або B. Тривалості розмов є незалежно розподіленими випадковими величинами з однаковим показниковим

розподілом. (а) Яка ймовірність того, що C закінчить розмову пізніше A та B? (б) Знайти щільність розподілу і математичне сподівання часу, яке проведе C з моменту прибуття до закінчення розмови.

5. Система складається з n блоків, час безвідмовної роботи k-го блоку дорівнює ξ_k. Випадкові величини ξ_k незалежні і мають рівномірний на $[0, T]$ розподіл. Знайти: (а) щільність розподілу часу τ_1 до першої відмови у системі; (б) сумісну щільність і коваріацію τ_1 і проміжку τ_2 між першою та останньою відмовами у системі.

6. Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — незалежні однаково розподілені випадкові величини з неперервною функцією розподілу $F(x)$. Упорядкуємо їх за величиною: $\xi_{(1)} \le \xi_{(2)} \le \cdots \le \xi_{(n)}$. Знайти функцію розподілу випадкових величин: (а) $\xi_{(1)} = \min(\xi_i, i = \overline{1,n})$; (б) $\xi_{(n)} = \max(\xi_i, i = \overline{1,n})$; (в) $\xi_{(m)}$.

7. Випадкові величини ξ та η незалежні та мають одну й ту саму щільність розподілу $p(x) = e^{-|x|}/2$. Знайти щільність розподілу величини $\zeta = \xi + \eta$.

8. Бігуни A і B стартували одночасно і фінішують в моменти часу, які є незалежними однаково розподіленими випадковими величинами, що мають показниковий розподіл з параметром λ. Знайти ймовірність того, що час того спортсмена, який виграв, перевищує той запас часу, завдяки якому він виграв.

9. Випадкові величини ξ та η незалежні та мають показниковий розподіл з параметром 1. Довести, що величини $\xi + \eta$ та $\xi/(\xi + \eta)$ незалежні. Знайти розподіл цих величин.

10. Система складається з n блоків. Нехай ξ_i — час безвідмовної роботи i-го блоку. Випадкові величини $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ незалежні і мають рівномірний розподіл на $[0, T]$. Знайти функцію розподілу часу роботи системи и його математичне сподівання, якщо: (а) система працює до того часу, поки працює принаймні один блок; (б) система працює до того часу, поки працюють принаймні k блоків, $k \le n$.

11. Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — незалежні абсолютно неперервні випадкові величини з функцією розподілу $F(x)$. (а) Обчислити: $\mathbf{E} F^m(\max(\xi_1, \ldots, \xi_n)) = n/(n + m)$; (б) знайти при $\alpha > 0$ розпо-

діл випадкових величин $F^{\alpha n}(\max(\xi_1, \ldots, \xi_n))$ та довести, що він не залежить від n.

12. В умовах задачі 6 для абсолютно неперервного розподілу довести, що $\mathbf{P}(\xi_{(n)} = \xi_k) = 1/n$.

13. Випадкові величини ξ та η незалежні і мають щільності розподілу $p_\xi(x) = 1/\pi\sqrt{1-x^2}$ при $|x| < 1$, $p_\xi(x) = 0$, $|x| \geq 1$; $p_\eta(x) = x\exp(-x^2/2)$ при $x \geq 0$, $p_\eta(x) = 0$ при $x < 0$. Довести, що величина $\zeta = \xi\eta$ має нормальний розподіл.

14. Нехай в умовах задачі 6 розподіл ξ_k — показниковий розподіл з параметром 1. Довести, що $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ також незалежні і мають показниковий розподіл з параметром 1, де

$$\zeta_k = (n-k+1)\left(\xi_{(k)} - \xi_{(k-1)}\right), \ 1 \leq k \leq n, \ \text{ та } \ \xi_0 := 0.$$

15. Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta$ — незалежні випадкові величини, причому кожна з величин ξ_k, $k = \overline{1,n}$, набуває значень 0 і 1 з імовірністю $1/2$, а η має рівномірний розподіл на $[0,1]$. Довести, що величини (а) $\sum_{k=1}^{n} \xi_k 2^{-k} + \eta 2^{-n}$; (б) $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k 2^{-k}$ також рівномірно розподілені на $[0,1]$.

16. Випадкова величина ξ рівномірно розподілена на $[-1,1]$. Тоді величини ξ та ξ^2 некорельовані, але залежні.

17. Нехай ξ та η є незалежними випадковими величинами, що мають показниковий розподіл з параметром λ. Знайти щільність і математичне сподівання випадкової величини: (а) $\zeta = \xi/\eta$;
(б) $\zeta = \xi/(\xi + \eta)$.

18. Випадкові величини ξ і η незалежні і рівномірно розподілені на відрізку $[0,1]$. Знайти щільності розподілу випадкових величин: (а) $\zeta = \xi\eta$; (б) $\zeta = \xi - \eta$; (в) $\zeta = |\xi - \eta|$.

19. Незалежні випадкові величини ξ_1 і ξ_2 мають розподіл Коші. Довести, що: (а) величина $(\xi_1 + \xi_2)/(1 - \xi_1\xi_2)$ має розподіл Коші; (б) для будь-якого $p \in (0,1)$ величина $p\xi_1 + (1-p)\xi_2$ має розподіл Коші.

20. Випадкові величини $\xi_1, ..., \xi_n$ незалежні та рівномірно розподілені на відрізку $[0,1]$. Знайти щільність величини $\prod_{k=1}^{n} \xi_k$.

21. Довести, що дискретні випадкові величини $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ не-

залежні в сукупності тоді й тільки тоді, коли

$$\mathbf{P}(\xi_1 = x_1, \ldots, \xi_n = x_n) = \prod_{k=1}^n \mathbf{P}(\xi_k = x_k)$$

для всіх x_k з відповідних множин значень.

22. Довести, що випадкові величини $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ незалежні в сукупності тоді й тільки тоді, коли

$$\mathbf{E}g_1(\xi_1)\ldots g_n(\xi_n) = \prod_{k=1}^n \mathbf{E}g_k(\xi_k) \text{ для всіх } g_k \in C_b(\mathbb{R}).$$

23. Довести, що величини ξ_1 та ξ_2 незалежні тоді й тільки тоді, коли величини $g_1(\xi_1)$ і $g_2(\xi_2)$ некорельовані для всіх борелєвих функцій g_k таких, що ці величини квадратично інтегровні.

24. Для незалежних величин ξ, η довести:

$$\mathbf{P}(\xi < \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} F_\xi(x)dF_\eta(x).$$

25. Довести для функцій розподілу F_1, F_2 тотожність

$$F_1(a)F_2(a) = \int_{(-\infty,a)} F_1(x)dF_2(x) + \int_{(-\infty,a)} F_2(x+0)dF_1(x).$$

26. Випадкові величини ξ, η незалежні, борелєва функція g невід'ємна. Довести тотожність $\mathbf{E}g(\xi,\eta) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(g(x,\eta)\mid_{x=\xi})$.

27. Для незалежних ξ, η обчислити дисперсію добутку $\mathbf{D}(\xi\eta)$.

28. Довести, що обмежені випадкові величини ξ, η незалежні тоді й тільки тоді, коли $\mathbf{E}\xi^m\eta^n = \mathbf{E}\xi^m\mathbf{E}\eta^n$ для всіх $m, n \geq 1$.

29. Випадкові величини $\xi_1, \ldots, \xi_n$ незалежні та однаково розподілені, причому $\mathbf{E}\xi_1 = \mathbf{E}\xi_1^3 = 0$. Довести, що випадкові величини $\mu = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \xi_k$ та $\sum_{k=1}^n (\xi_k - \mu)^2$ некорельовані.

30. Розглянемо узагальнення випробувань Бернуллі, у якому ймовірність успіху в k-му випробуванні дорівнює p_k. Нехай ξ_n – кількість успіхів у n випробуваннях. (а) Знайти $\mathbf{E}\xi_n, \mathbf{D}\xi_n$. (б) Найбільше значення $\mathbf{D}\xi_n$ за умови $n^{-1}\sum_{k=1}^n p_k = p$ досягається при $p_k \equiv p$.

31. Для незалежних дискретних випадкових величин ξ, η довести тотожність

$$\mathbf{P}(\xi + \eta = a) = \sum_y \mathbf{P}(\xi = a - y)\mathbf{P}(\eta = y),$$

де сума поширюється на множину значень величини η.

32. Прості випадкові величини ξ_1, ξ_2 незалежні, однаково розподілені, а їх розподіл не є рівномірним. Довести, що

$$\max(\mathbf{P}(\xi_1 + \xi_2 = a),\ a \in \mathbb{R}) < \max(\mathbf{P}(\xi_1 = a),\ a \in \mathbb{R}).$$

33. Довести, що для кожного натурального $n > 1$, що не є простим, знайдеться пара незалежних цілозначних величин ξ_1, ξ_2 таких, що всі ймовірності з розподілу $\mathbf{P}(\xi_1 + \xi_2 = k)$, $0 \le k < n$, однакові і додатні.

34. Випадкові величини ξ_k незалежні та мають рівномірний на $[0, 1]$ розподіл. Нехай $U_n(x) = \mathbf{P}(\xi_1 + \ldots + \xi_n < x)$. Довести, що:
(а) $U'_{n+1}(x) = U_n(x) - U_n(x-1)$,
(б) $U_n(x) = (n!)^{-1} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (x-k)^n \mathbb{1}_{k<x}$,
(в) щільність суми $\xi_1 + \ldots + \xi_n$ дорівнює

$$((n-1)!)^{-1} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (x-k)^{n-1} \mathbb{1}_{k<x}.$$

35. Випадкова ламана на площині виходить з початку координат, утворена n відрізками одиничної довжини, причому кути між сусідніми відрізками незалежні та дорівнюють $\pm\alpha$ з ймовірністю $1/2$. Обчислити математичне сподівання квадрата відстані міх початковою та останньою вершиною даної ламаної.

36. Нехай ξ, η – незалежні величини такі, що величини $\xi + \eta$ та ξ мають однакові функції розподілу. Довести, що $\eta = 0$ м.н.

37. Щільність $f(x)$ інтегровна у квадраті на $\mathbb{R}$. Довести, що згортка $f * f(x)$ обмежена.

38. Випадкові величини ξ, η незалежні та набувають значень ± 1 з імовірністю $1/2$. Довести, що три величини $(\xi, \eta, \xi\eta)$ попарно незалежні, однак залежні у сукупності.

39. Випадкові величини ξ, η незалежні, а сума $\xi + \eta$ інтегровна. Довести, що ξ, η – інтегровні.

40. Послідовності $(\xi_n, n \ge 1)$ та $(\eta_n, n \ge 1)$ незалежні, та містять незалежні однаково розподілені величини, причому $\xi_1 \simeq N(0, 1)$ та $\eta_1 \simeq \mathrm{Exp}(1)$. Знайти границю

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\max_{k\le n} \eta_k \ge \max_{k\le n} \xi_k).$$

41. Випадкові величини (ξ_k) незалежні та мають симетричні

розподіли: $\xi_k \simeq -\xi_k$. Довести, що сума $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ також має симетричний розподіл.

42. Множини значень величин ξ, η мають по два елементи. Довести, що незалежність ξ, η еквівалентна некорельованості: $\mathbf{E}\xi\eta = \mathbf{E}\xi\mathbf{E}\eta$.

43. Випадкові величини (ξ_k) незалежні та однаково рівномірно розподілені на множині $\{1, \ldots, N\}$. Нехай ν_n – кількість різних значень у векторі $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$. Знайти розподіл та математичне сподівання ν_n.

44. Випадкові величини ξ, η незалежні та рівномірно розподілені на $(0, \pi)$. Довести, що величини $\zeta_1 = \tan(\xi)$, $\zeta_2 = \tan(\eta)$ та $\zeta_3 = \tan(\xi + \eta)$ попарно незалежні, та залежні у сукупності внаслідок тотожності $\zeta_1 + \zeta_2 - \zeta_3 = -\zeta_1\zeta_2\zeta_3$.

1.16. Нормальні випадкові величини і вектори

Література: [1, с.99–106], [2,с.99-106]. Ауд: 1-6, сам: 7-12.

1. Випадковий вектор (ξ, η) має нормальний $N(0, 0, 1, 1, \rho)$ розподіл. Довести, що вектор $(\xi, \eta - a\xi)$ має нормальний розподіл. За якого значення a його координати: (а) некорельовані; (б) незалежні?

2. Для виконання завдання необхідно $X \simeq N(28, 2^2)$ хвилин. Інше завдання, незалежне від першого, потребує $Y \simeq N(25, 1^2)$ хвилин, і починається через 5 хвилин після того, як почнеться виконання першого завдання. Обчислити ймовірність того, що друге завдання буде виконане першим.

3. Нехай (α_1, α_2) – незалежні рівномірно розподілені на $(0, 1)$ величини. Довести, що випадкові величини $\xi_1 = \sqrt{-2\ln\alpha_1}\sin(2\pi\alpha_2)$, $\xi_2 = \sqrt{-2\ln\alpha_1}\cos(2\pi\alpha_2)$ – незалежні стандартні нормальні.

4. Випадкові величини ζ_1, ζ_2 незалежні та мають стандартний нормальний розподіл. Довести, що відношення ζ_1/ζ_2 має розподіл Коші.

5. Довести, що сумісну щільність нормального вектора на площині $\xi = (\xi_1, \xi_2) \simeq N_2(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ можна зобразити у вигляді добутку $f_\xi(x_1, x_2) = f_{\xi_{12}}(x_1 \mid x_2) f_{\xi_2}(x_2)$, де $\xi_2 \simeq N(\mu_2, \sigma_2^2)$, а $f_{\xi_{12}}(x_1 \mid x_2)$ є щільністю відносно x_1 нормальної величини
$$\xi_{12} \simeq N\left(\mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_2 - \mu_2), \sigma_1^2\left(1 - \rho^2\right)\right).$$
Остання щільність називається умовною щільністю ξ_1 за умови $\xi_2 = x_2$.

6. Нехай φ – стандартна нормальна щільність, а непарна функція ψ така, що $|\psi(x)| \le (2\pi e)^{-1/2}1\!\!\mathrm{I}_{|x|\le 1}, \forall x$. Довести, що функція $\varphi(x)\varphi(y) + \psi(x)\psi(y)$ є щільністю розподілу двовимірного випадкового вектора, що не є нормальним, та обидві його координати мають стандартний нормальний розподіл.

7. Якщо ζ_1, ζ_2 – незалежні стандартні нормальні величини, то їх лінійні перетворення $\zeta_1 + \zeta_2$ та $\zeta_1 - \zeta_2$ – також незалежні нормальні величини.

8. Якщо $\zeta_k, k = 1, 2,$ – незалежні стандартні нормальні величини, то (а) полярні координати вектора (ζ_1, ζ_2) незалежні, квадрат полярного радіусу має хі-квадрат розподіл, полярний кут рівномірно розподілений; (б) величини $\zeta_1^2 + \zeta_2^2$ і ζ_1/ζ_2 також незалежні.

9. Випадковий вектор (ξ_1, ξ_2) рівномірно розподілений в одиничному крузі $O = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$, а $\xi = \xi_1^2 + \xi_2^2$. Довести, що величини $\zeta_k = \xi_k\sqrt{-2\xi^{-1}\ln\xi}$ є незалежними стандартними нормальними.

10. Якщо $\zeta_k, k = 1, 2,$ – незалежні стандартні нормальні величини, а кут θ не залежить від них та рівномірно розподілений на $[0, 2\pi]$, то величина $\zeta_1\cos\theta + \zeta_2\sin\theta$ також стандартна нормальна.

11. Для стандартного нормального вектора (ζ_1, ζ_2) (а) знайти щільність розподілу величини $\max(|\zeta_1|, |\zeta_2|)$; (б) знайти сумісну щільність полярних координат (R, φ) цього вектора; (в) довести, що випадкова величина $\zeta_1\zeta_2/\sqrt{\zeta_1^2 + \zeta_2^2}$ має нормальний розподіл та знайти його параметри.

12. Нехай $f_k(x_1, x_2)$ щільності двовимірних нормальних розподілів з нульовими середніми, одиничними дисперсіями та різними

кореляціями ρ_k. Довести, що випадковий вектор зі сумісною щільністю $(f_1(x_1,x_2)+f_2(x_1,x_2))/2$ не є нормальним вектором, однак його координати нормально розподілені.

13. Нехай $Z = XY$, де $X \simeq N(0,1)$ не залежить від Y і $\mathbf{P}\{Y=1\} = \mathbf{P}\{Y=-1\} = \frac{1}{2}$. Знайти розподіл пар (X,Z) та (Y,Z), а також розподіл $X+Z$. Показати, що $Z \simeq N(0,1)$ і що X та Z некорельовані, але залежні.

14. Нехай $(\xi_1,\xi_2) \simeq N_2(0,0,1,1,\rho)$. Довести, що:
(а) $\mathbf{P}(\xi_1 \cdot \xi_2 < 0) = (\arccos\rho)/\pi$;
(б) $\mathbf{E}\max(\xi_1,\xi_2) = \sqrt{(1-\rho)/\pi}$;
(в) щільність відношення ξ_1/ξ_2 дорівнює $\sqrt{1-\rho^2}/\ \pi(1-2\rho x+x^2)$.

15. Для стандартного нормального вектора $(\zeta_{11},\zeta_{12},\zeta_{21},\zeta_{22}) \simeq N_4$ знайти розподіл визначника $\det(\zeta_{ij}, i,j=1,2)$.

16. Нехай $(\xi_1,\xi_2) \simeq N_2(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$. (а) Для лінійних функцій f_1, f_2 довести нерівність: $|\rho(f_1(\xi_1), f_2(\xi_2))| \le |\rho|$ за квадратичної інтегровності величин під знаком коефіцієнта кореляції. (б) Як можна розширити клас функцій f_i ?

17. Довести, що $\mathbf{E}\exp(t\,\|\xi\|^2) < \infty$ для $\xi \simeq N_d(m,V)$ та достатньо малих $t \ge 0$.

18. Нехай $\xi \simeq N_d(0, A'A)$. Довести, що для довільної $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} 2n^{-2}\ln\mathbf{P}(\xi/n \in B) \le -\inf_{x\in B}\left\|A^{-1}x\right\|^2 .$$

19. Навести приклад нормальних випадкових величин ξ,η, сума яких не має нормального розподілу.

20. Навести приклад, що вказує на суттєвість умови незалежності нормальних координат ξ_k для нормальності розподілу вектора ξ у теоремі про лінійні перетворення нормальних векторів.

21. Якщо ζ_k – незалежні стандартні нормальні випадкові величини, то $(\zeta_1+\zeta_2\zeta_3)/\sqrt{1+\zeta_3^2} \simeq N(0,1)$.

22. Величини ξ та η утворюють вектор з нормальним $N(0,0,1,1,\rho)$ розподілом. Знайти щільність випадкової величини $\zeta = (\xi+\eta)/(\xi^2+\eta^2)$.

23. Випадкові величини ξ_1 і ξ_2 незалежні та мають нормальні розподіли $N(a_1,\sigma_1^2)$ і $N(a_2,\sigma_2^2)$ відповідно. Знайти:

(а) $\mathbf{E}(\mathrm{sign}(\xi_1 - a_1)+\mathrm{sign}(\xi_2 - a_2))^2$; (б) коваріацію випадкових величин $\zeta_1 = \alpha\xi_1 - \beta\xi_2$ та $\zeta_2 = \alpha\xi_1 + \beta\xi_2$; (в) сумісну щільність ζ_1 та ζ_2. Коли величини ζ_1 та ζ_2 незалежні?

24. Нехай $\xi, \xi_1, \ldots, \xi_n$ – незалежні стандартні нормальні випадкові величини. Довести, що щільність розподілу величини $\eta = \xi/\sqrt{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2}$ дорівнює

$$f_\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}}, \quad x > 0.$$

25. Випадковий вектор (ξ, η) має розподіл $N(0, 0, 1, 1, \rho)$. Знайти щільність випадкової величини: (а) $\zeta = \xi\eta$; (б) $\zeta = \xi\eta/\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$.

26. Нехай випадкові величини $\xi_1, \ldots, \xi_n$ незалежні стандартні нормальні. Довести, що щільність випадкової величини $\chi^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2$ дорівнює:

$$f_{\chi^2}(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \quad x > 0.$$

27. Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n$ – незалежні стандартні нормальні випадкові величини. Знайти щільність розподілу випадкової величини $(\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2)/(\eta_1^2 + \ldots + \eta_n^2)$.

28. Нехай $\zeta_k, k = \overline{1, n}$, – незалежні стандартні нормальні величини, а $\sigma_k \in \mathbb{R}$. Вивести з теореми про лінійні перетворення нормальних векторів однакову розподіленість випадкових величин: $\sum_{k=1}^n (\zeta_k + \sigma_k)^2 \simeq (\zeta_1 + \sigma)^2 + \sum_{k=2}^n \zeta_k^2$, де $\sigma = \left(\sum_{k=1}^n \sigma_k^2\right)^{1/2}$.

29. Нехай випадкові величини ξ_1, ξ_2 незалежні, а їх сумісна щільність не змінюється при поворотах вектора (ξ_1, ξ_2). Довести, що цей випадковий вектор є нормальним.

30. Нехай ζ – n-вимірний стандартний нормальний вектор, а $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^n$ – такі лінійні підпростори, що $E_1 \cap E_2 = \{0\}$. Довести, що проекції $\Pi_{E_1}\zeta, \Pi_{E_2}\zeta$ є незалежними нормальними векторами.

31. Узагальнений нормальний вектор визначається як лінійне перетворення $\xi = m + A\zeta$ стандартного нормального вектора з довільною матрицею $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. (а) Довести, що вектор ξ є узагальненим нормальним тоді і тільки тоді, коли для кожного лінійного неперервного функціоналу $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ величина $l(\xi)$ має

нормальний розподіл або є сталою м.н. (б) Довести, що розподіл ξ однозначно визначається вектором m та матрицею $V = AA'$. Довести для класу узагальнених нормальних векторів: (в) теорему про інтерпретацію параметрів, (г) теорему про лінійні перетворення нормальних векторів, (д) теорему про нормальність суми незалежних нормальних векторів. Вказівка: нехай T' – нульове продовження на $\mathbb{R}^n$ матриці ортонормованого базису простору власних векторів матриці A. Тоді $AT' = 0$, ідемпотентна матриця $J = TT'$ містить $n - \mathrm{rang}(A) = n - \mathrm{rang}(V)$ перших одиниць на діагоналі, причому для кожного $\varepsilon \neq 0$ матриця $A + \varepsilon T$ невироджена. Отже, вектор $\xi_\varepsilon = m + (A + \varepsilon T)\zeta = \xi + \varepsilon T\zeta$ є n-вимірним нормальним, $\xi_\varepsilon \to \xi$, $\varepsilon \to 0$, і оскільки $\mathbf{E}\xi_\varepsilon = m$, $\mathrm{Cov}(\xi_\varepsilon) = (A + \varepsilon T)(A + \varepsilon T)' = V + \varepsilon^2 J$, то розподіл $\xi_\varepsilon \simeq N_n(m, V + \varepsilon^2 J)$ повністю визначається параметрами ε та m, V. Тому границя $\mathbf{P}(\xi \in \Pi_x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathbf{P}(\xi_\varepsilon \in \Pi_x)$ залежить лише від m, V та x.

32. Для стандартного нормального вектора $(\zeta_1, \zeta_2.\zeta_3, \zeta_4)$ обчислити функцію розподілу визначника

$$\Delta = \det \begin{vmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 \\ \zeta_3 & \zeta_4 \end{vmatrix}.$$

33. Величина ξ має нормальний розподіл $N(0, \sigma^2)$. При якому σ^2 імовірність $\mathbf{P}(a < \xi < b)$ є найбільшою ?

34. Величина ξ має нормальний розподіл $N(0, \sigma^2)$. Знайти $\mathbf{E}\,|\xi|$.

35. Випадкові величини (ξ_1, ξ_2) позитивно корельовані: $\mathrm{cov}(\xi_1, \xi_2) > 0$, так само як і (ξ_1, ξ_3). Чи є такими величини (ξ_2, ξ_3)?

36. Нормальний випадковий вектор $(\xi_1, \xi_2) \simeq N_2(0, 0, 1, 1, \rho)$, а величини η_1, η_2 незалежні стандартні нормальні. Довести, що

$$\mathbf{P}(\xi_1 > 0, \xi_2 > 0) = \mathbf{P}(\eta_1 > 0, \eta_2 > \rho\eta_1).$$

Вивести звідси, що $\mathbf{P}(\xi_1\xi_2 < 0) = \pi^{-1} \arccos(\rho)$.

37. Нехай φ – стандартна нормальна щільність, а функція

$$f_n(x_1, \ldots, x_n) = \left(\prod_{j=1}^n \varphi(x_j)\right) \left(1 + \prod_{k=1}^n x_k \varphi(x_k)\right).$$

Довести, що f_n є сумісною щільністю деякого випадкового вектора

$(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ та при кожному $1 \le k < n$ підвектор $(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ є стандартним нормальним, і це не так при $k = n$.

1.17. Розподіли Пуассона, показниковий, Ерланга, гама

Література: [1, с.35–40, 95–99], [2,с.55-57, 94-99]. Сам: 1-6.

1. Довести, що розподіл Пуассона $\Pi(\lambda)$ задовольняє рекурентну тотожність $\mathbf{P}(\xi = k) = \mathbf{P}(\xi = k-1)\lambda/k$.

2. Знайти найбільш імовірне значення для розподілу Пуассона.

3. Величини ξ_1, ξ_2 незалежні та мають показниковий розподіл $\mathrm{Exp}(\lambda)$. Тоді (а) різниця $\zeta = \xi_1 - \xi_2$ має розподіл Лапласа зі щільністю $f_\zeta(x) = \frac{1}{2}\lambda \exp(-\lambda\,|x|)$; (б) випадкові величини $\xi_1 + \xi_2$ та ξ_1/ξ_2 також незалежні.

4. Випадкові величини $\xi_1, \ldots, \xi_n$ незалежні у сукупності та мають показникові розподіли з попарно різними параметрами λ_k, $k = \overline{1,n}$. Довести, що щільність суми $\xi_1 + \ldots + \xi_n$ має вигляд

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n c_{nk}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \exp(-\lambda_k x), x \ge 0.$$

Знайти рекурентні за n рівняння для коефіцієнтів c_{nk} та вказати метод обчислення цих коефіцієнтів.

5. Обчислити функцію розподілу Ерланга порядку n з параметром λ: $F_n(x) = 1-(1+\lambda x/1!+...+(\lambda x)^{n-1}/(n-1)!) \exp(-\lambda x),\ x \ge 0$.

6. Вивести з теореми про інваріантність гама-розподілів відносно згортки, що математичне сподівання $\mu(\lambda, \alpha) = \mathbf{E}\Gamma(\lambda, \alpha)$ та дисперсія $\sigma^2(\lambda, \alpha) = \mathbf{D}\Gamma(\lambda, \alpha)$ є адитивними додатними функціями параметра α і є лінійними функціями. Обчислити $\mathbf{E}\Gamma(\lambda, \alpha) = \alpha/\lambda$, $\mathbf{D}\Gamma(\lambda, \alpha) = \alpha/\lambda^2$.

7. Якщо ξ, η – незалежні величини з розподілами Пуассона з параметрами λ, μ відповідно, то (а) сума $\xi+\eta$ має розподіл Пуассона з параметром $\lambda + \mu$, (б) $\mathbf{P}(\xi = k \mid \xi + \eta = n) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, де $p = \lambda/(\lambda + \mu)$.

8. Випадкові величини $\xi_1, \xi_2 \simeq$Exp(1) незалежні та мають однаковий показниковий розподіл із параметром 1. Довести що величини (а) $\min(\xi_1, \xi_2)$ та $|\xi_1 - \xi_2|$ незалежні однаково розподілені, (б) $\xi_1/(\xi_1 + \xi_2)$ та $\xi_1 + \xi_2$ незалежні. (в) Знайти відповідні сумісні розподіли. (г) Узагальнити ці твердження на випадок n незалежних однаково розподілених показникових величин.

9. Випадкові величини ξ_k незалежні та мають показникові розподіли з параметрами $\lambda_k, k = 1, 2$. Знайти функцію розподілу випадкових величин (а) $\xi_1/(\xi_1+\xi_2)$, (б) $\xi_1+\xi_2$, (в) ξ_1/ξ_2, (г) $(\xi_1+\xi_2)/\xi_1$ при $\lambda_k = \lambda$.

10. Випадкові величина $\zeta \simeq \Gamma(\lambda, \alpha)$. Обчислити $\mathbf{E}\zeta^r$.

11. Випадкові величини $\zeta_k \simeq \Gamma(\lambda, \alpha_k), k = 1, 2$, незалежні. Довести, що величини $\zeta_1 + \zeta_2$ і $\zeta_1/\ (\zeta_1 + \zeta_2)$ незалежні, та знайти їх розподіли.

12. Випадкові величини $(\zeta_n, n \ge 1)$ незалежні однаково розподілені зі спільним показниковим розподілом Exp(λ). (а) Знайти розподіл випадкової величини $\nu = \inf(n \ge 1 : \zeta_1 + \ldots + \zeta_n \ge 1)$. (б) Довести, що для кожного $k > 0$ величини ζ_ν та $\zeta_{\nu+k}$ незалежні. (в) Знайти розподіл $\zeta_{\nu+k}$.

13. Випадкова величина η набуває цілих невід'ємних значень. Маємо η куль, кожну з яких з імовірністю p кладуть у урну A, а інакше – у урну B, незалежно від значення η та інших виборів. Нехай η_A, η_B – кількості куль у урнах A, B відповідно. Довести, що випадкові величини η_A, η_B незалежні (при довільному $p \in (0, 1)$) тоді і тільки тоді, коли η має розподіл Пуассона.

14. Випадкова величина ξ має показниковий розподіл. Знайти розподіл та математичне сподівання цілої частини $[a\xi]$.

15. Випадкові величини $\xi_1, \xi_2 \simeq$ Exp(λ) незалежні та мають однаковий показниковий розподіл із параметром λ. Знайти щільності величин $\xi_1 - \xi_2$ та $|\xi_1 - \xi_2|$.

16. Випадкові величини $(\xi_k), (\eta_j)$ є незалежними у сукупності стандартними нормальними. Знайти щільність випадкової величини

$$(\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2)n^{-1}/(\eta_1^2 + \ldots + \eta_m^2)m^{-1}.$$

17. Випадкові величини ξ, η незалежні, ξ має показниковий розподіл із параметром λ, а η має рівномірний розподіл на $[0, 2\pi]$. Довести, що величини $(\sqrt{\xi}\cos\eta, \sqrt{\xi}\sin\eta)$ незалежні однаково розподілені. Знайти їх щільність.

18. Випадкові величини (ξ_k) незалежні у сукупності та експоненційно розподілені з параметром 1, а $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Визначимо випадкові величини $\zeta_k = \xi_k / S_n, k < n$, $\zeta_n = S_n$. (а) Знайти сумісну щільність вектора $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$, (б) довести, що сумісна щільність вектора $(\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1})$ така сама, що у вектора довжин інтервалів при випадковому розбитті інтервалу набором з $n-1$ рівномірно розподілених точок.

19. Випадкові величини $(\xi_j, 1 \le j \le n)$ незалежні та мають рівномірний розподіл на $[0,1]$. Довести, що величина $-\ln(\xi_1\xi_2 \ldots \xi_n)$ має хі-квадрат розподіл. Знайти його параметри.

20. Про давній манускрипт відомо, що 20 відсотків його сторінок не має помилок запису, причому кількість помилок має розподіл Пуассона. Знайти відсоток сторінок, що мають точно одну помилку.

21. Випадковий вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ має нормальний розподіл $\xi \simeq N_n(m, V)$. Довести, що величина $\eta = (\xi - m)' V^{-1} (\xi - m)$ має хі-квадрат розподіл з n ступенями свободи.

22. Випадкова величина η має експоненційний розподіл $\mathrm{Exp}(1)$, а величина ξ має розподіл Пуассона з параметром η. Довести, що безумовний розподіл ξ є геометричним з параметром $1/2$.

1.18. Збіжність за ймовірністю. Закон великих чисел

Література: [1, с.106–116], [2,с.106-109]. Ауд: 1-5, сам: 6-10.

1. Довести: збіжності $\xi_n \to^{\mathbf{P}} \xi$ та $\mathbf{E}(1 - \exp(-|\xi_n - \xi|)) \to 0$, $n \to \infty$, еквівалентні, а останнє математичне сподівання задає метрику.

2. Послідовність випадкових величин $(\xi_n,\ n \ge 1)$ обмежена за ймовірністю, тобто $\sup_{n\ge1} \mathbf{P}(|\xi_n| > c) \to 0$, при $c \to \infty$, послідов-

ність випадкових величин $\eta_n \to^{\mathbf{P}} 0, n \to \infty$, а g – дійсна неперервна функція. Довести збіжність $g(\xi_n + \eta_n) - g(\xi_n) \to^{\mathbf{P}} 0$ при $n \to \infty$.

3. Нехай $(\xi_n,\ n \geq 1)$ незалежні додатні випадкові величини. Знайти умови збіжності за ймовірністю величин $\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \xi_k}$.

4. Позначимо $I_n = \int_0^1 \ldots \int_0^1 g((x_1 + \ldots + x_n)/n) dx_1 \ldots dx_n$ для функції $g \in C[0,1]$. (а) Довести, що $\lim_{n\to\infty} I_n = I \equiv g(1/2)$. (б) У припущенні $g \in C_2[0,1]$ обчислити $\lim_{n\to\infty} n(I_n - I\ )$.

5. Нехай $f \in C_1([0,1])$. Довести збіжність $dB_n(f,x)/dx \to f'(x)$, $n \to \infty$, рівномірно за x, де B_n – поліноми Бернштейна.

6. Нехай $\xi_n \to^{\mathbf{P}} \xi$, $\eta_n \to^{\mathbf{P}} \eta$, а $f \in C(\mathbb{R}^2)$. Довести, що має місце збіжність: $f(\xi_n, \eta_n) \to^{\mathbf{P}} f(\xi, \eta), n \to \infty$.

7. Довести, що з $(\xi_n - \xi)^2 \to^{\mathbf{P}} 0$, випливає $\xi_n^2 \to^{\mathbf{P}} \xi^2, n \to \infty$.

8. Величини $(\xi_n,\ n \geq 1)$ незалежні та $\mathbf{P}(\xi_n = \pm n^{\alpha}) = 1/2$. Для яких α має місце закон великих чисел ?

9. Довести, що для $f \in C_b(\mathbb{R}_+)$ має місце збіжність

$$\exp(-nx) \sum_{k=0}^{\infty} f\,(k/n)\,(nx)^k/\ k! \to f(x),\ n \to \infty,$$

рівномірна на обмежених інтервалах.

10. Нехай f – поліном. Довести, що степінь поліному Бернштейна $B_n(f,x)$ не більший за степінь f.

11. Нехай $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ – ймовірнісний простір. (а) Довести, що функція $\rho(A,B) \equiv \mathbf{P}(A\Delta B), A, B \in \mathfrak{F}$, задовольняє нерівність трикутника. (б) Дві події $A, B \in \mathfrak{F}$ назвемо $\mathbf{P}$-еквівалентними, якщо $\rho(A,B) = 0$. Довести, що це відношення є відношенням еквівалентності, сукупність $\mathfrak{F}_{\mathbf{P}}$ всіх класів еквівалентності є сигма-алгеброю, а пара $(\mathfrak{F}_{\mathbf{P}}, \rho)$ є повним метричним простором.

12. Якщо $\xi_n \to^{L_2} \xi$, та $\eta_n \to^{L_2} \eta$, то $\mathbf{E}\xi_n\eta_n \to \mathbf{E}\xi\eta, n \to \infty$.

13. Довести теорему Лебега про мажоровану збіжність для збіжності за ймовірністю.

14. Довести, що з умов $\xi_n \leq \zeta_n \leq \eta_n$ м.н. та $\xi_n \to^{\mathbf{P}} \zeta$, $\eta_n \to^{\mathbf{P}} \zeta$, $n \to \infty$, випливає $\zeta_n \to^{\mathbf{P}} \zeta$.

15. Нехай $\xi_{1n} \leq \xi_{2n} \leq \xi_{3n}$ м.н., $\xi_{in} \to^{\mathbf{P}} \xi_i,\ n \to \infty, i = \overline{1,3}$, та $\mathbf{E}\xi_{1n} \to \mathbf{E}\xi_1$, $\mathbf{E}\xi_{3n} \to \mathbf{E}\xi_3$. Довести, що $\mathbf{E}\xi_{2n} \to \mathbf{E}\xi_2, n \to \infty$.

16. Нехай випадкові величини $(\xi_n, n \geq 1)$ такі, що $\sup \mathbf{D}\xi_n < \infty$ та коефіцієнти кореляції задовольняють умову

$$\lim_{|n|\to\infty} \sup_{k\geq 1} \rho(\xi_{n+k}, \xi_k) = 0.$$

Тоді (ξ_n) задовольняють закон великих чисел.

17. Нехай $(\xi_n,\ n \geq 1)$ попарно незалежні однаково розподілені випадкові величини, що є інтегровними з $\mathbf{E}\xi_1 = \mu$. Довести, що

$$(\xi_1 + \ldots + \xi_n)/n \to^{\mathbf{P}} \mu, \quad n \to \infty.$$

18. На прикладі переконатися, що в теоремі Чебишева про закон великих чисел умову на дисперсії не можна замінити на умову обмеженості: $\sup_{n\geq 1} \mathbf{E}\,|\xi_n| < \infty$, навіть для незалежних величин.

19. Випадкові величини $(\varepsilon_n,\ n \geq -m)$ незалежні однаково розподілені та квадратично інтегровні. Довести, що для величин $\xi_n = \sum_{k=0}^{m} c_k \varepsilon_{n-k}$ виконується закон великих чисел, де c_k – довільні сталі.

20. Нехай $(\xi_n, n \geq 1)$ незалежні однаково розподілені величини. Для того, щоб

$$(\xi_1 + \ldots + \xi_n - m_n)/n \to^{\mathbf{P}} 0, \quad n \to \infty,$$

з деякою числовою послідовністю m_n, необхідно і достатньо, щоб $\mathbf{P}(|\xi_1| > x) = o(1/x)$, $x \to \infty$.

21. Довести, що для $f \in C_b(\mathbb{R}_+)$ мають місце збіжності

$$\sum\nolimits_{k\geq 0} f(x + k/n)(cn)^k \exp(-cn)/k! \to f(x + c),\ n \to \infty,\ \forall x \geq 0,$$

$$\sum\nolimits_{k\geq 0} f(k/(n+1)) C_{n+k}^k x^k (1 + x)^{-n-k-1} \to f(x),\ n \to \infty,\ \forall x \geq 0.$$

22. Для $g \in C[0, 1]$ обчислити границю

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \ldots \int_0^1 g\left(\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}\right) dx_1 \ldots dx_n.$$

23. Перетворенням Лапласа неперервної обмеженої функції $f \in C_b(\mathbb{R}_+)$ називається функція $\varphi(u) \equiv \int_0^\infty \exp(-ut) f(t) dt$ від $u \in \mathbb{R}_+$. Довести формулу обернення Уідлера:

$$f(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \left(\frac{n}{s}\right)^n \varphi^{(n-1)}\left(\frac{n}{s}\right),$$

де $\varphi^{(k)}(u)$ – k-та похідна φ. Вказівка: звести величину під знаком границі до вигляду $\mathbf{E}f((\xi_1+\ldots+\xi_n)s/n)$, де величини ξ_k незалежні, $\xi_n \simeq \mathrm{Exp}(1)$.

24. Нехай випадкова величина ν_n має біноміальний розподіл з параметрами n, p, а функція
$$H(\theta,p) = -(1-\theta)\ln\tfrac{1-\theta}{1-p} - \theta\ln\tfrac{\theta}{p}.$$
Довести для всіх $\theta \in (p,1)$ нерівність $\ln \mathbf{P}(\nu_n \geq n\theta) \leq nH(\theta,p)$. Вивести звідси при $p = 1/2$ нерівність $\mathbf{P}(\nu_n - n/2 \geq n\varepsilon/2) \leq \exp(-n\varepsilon^2/2)$.

25. Послідовність невід'ємних випадкових величин (ξ_n) така, що $\xi_{n+1} \leq \xi_n$ м. н. та $\xi_n \to^{\mathbf{P}} 0$, $n \to \infty$. Довести, що $\xi_n \to^{\mathbf{P}1} 0$, $n \to \infty$.

26. Випадкові величини $(\xi_n,\ n \geq 1)$ незалежні рівномірно розподілені на $[0,1]$, а g - неперервна 1-періодична функція. Довести, що для всіх $x \in \mathbb{R}$
$$n^{-1}\sum\nolimits_{k=1}^{n} g(x+\xi_k) \to^{\mathbf{P}} \int_0^1 g(y)dy,\ n \to \infty.$$

27. Функції $f, g \in C([0,1])$ такі, що $0 \leq f(x) \leq cg(x), x \in [0,1]$, для сталої c. Довести співвідношення
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \ldots \int_0^1 \left(\sum\nolimits_{k=1}^{n} f(x_k)\right) / \left(\sum\nolimits_{k=1}^{n} g(x_k)\right) dx_1 \ldots dx_n = \int_0^1 f(x)dx / \int_0^1 g(x)dx.$$

28. Випадкові величини $(\xi_n, n \geq 0)$ задовольняють рекурентне рівняння $\xi_n - \alpha\xi_{n-1} = \varepsilon_n, n \geq 1$, де α – стала з $|\alpha| < 1$, а (ε_n) – незалежні однаково розподілені інтегровні величини. (а) Довести, що (ξ_n) задовольняють закон великих чисел. (б) Нехай додатково $\mathbf{E}\varepsilon_1 = 0, \mathbf{E}\varepsilon_1^2 < \infty$. Довести, що $\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k\xi_{k-1}\right) / \left(\sum_{k=1}^{n} \xi_{k-1}^2\right) \to^{\mathbf{P}} \alpha$, $n \to \infty$.

29. Медіаною m_ξ випадкової величини ξ називається кожне з чисел m таких, що $\mathbf{P}(\xi \leq m) \geq 1/2$, $\mathbf{P}(\xi \geq m) \geq 1/2$. Довести, що множина медіан не порожня та може містити більше одного елемента. Нехай $\xi_n \to^{\mathbf{P}} \xi, n \to \infty$. Довести, що $m_{\xi_n} \to m_\xi, n \to \infty$, якщо m_ξ визначено однозначно.

30. Невід'ємні випадкові величини ξ_n такі, $\mathbf{E}\xi_n^\alpha \to 1$ та $\mathbf{E}\xi_n^\beta \to 1$ при $n \to \infty$ і деяких $\beta > \alpha > 0$. Довести, що $\xi_n \to^{\mathbf{P}} 1, n \to \infty$.

31. Випадкові величини $(\xi_n,\ n \geq 1)$ незалежні нормально розподілені $\xi_n \simeq N(0,1)$, $\eta_n = \min_{k\leq n} \xi_k$. Довести, що

$$(\ln n)^{-1} \sum_{k=1}^n \eta_k \to^{\mathbf{P}} 1, n \to \infty.$$

32. Довести, що зі збіжності $\xi_n \to^{\mathbf{P}} 0$ не випливає збіжність середніх $n^{-1} \sum_{k=1}^n \xi_k \to^{\mathbf{P}} 0, n \to \infty$.

33. Для неперервної функції $f(x,y)$ на трикутнику

$$D = \{(x,y) : 0 \leq x, y, x+y \leq 1\}$$

довести, що поліноми Бернштейна

$$B_n(x,y) = \sum\nolimits_{0\leq k,j,k+j\leq n} f(\tfrac{k}{n}, \tfrac{j}{n}) \frac{n!}{k!j!(n-k-j)!} x^k y^j (1-x-y)^{n-k-j}$$

апроксимують $f(x,y)$ при $n \to \infty$ рівномірно за x, y.

34. Довести, що $\exp(-n) \sum_{k=0}^n n^k/k! \to 1/2, n \to \infty$.

35. Випадкові величини $(\xi_k, k \geq 1)$ незалежні рівномірно розподілені: $\xi_k \simeq U(0,1)$, $\xi_{(1:n)} = \min_{1\leq k\leq n} \xi_k$, $\xi_{(n:n)} = \max \xi_k$. Довести, що: $\xi_{(1:n)} \to^{\mathbf{P}} 0$, $\xi_{(n:n)} \to^{\mathbf{P}} 1$, $n\xi_{(1:n)} \to^{\mathbf{P}} \zeta$, $n(1-\xi_{(n:n)}) \to^{\mathbf{P}} \zeta$, де $\zeta \simeq \mathrm{Exp}(1)$.

1.19. Збіжність майже напевне. Посилений закон великих чисел

Література: [1, с.117–125], [2,с.109-112,117-124].
Ауд: 1-5, сам: 6-10.

1. Довести, що з $\xi_n \to^{\mathbf{P}} \xi$ випливає збіжність $\xi_{n_k} \to^{\mathbf{P}1} \xi$ для деякої підпослідовності $n_k \to \infty$.

2. Довести таке твердження. Якщо ряд $\sum_{n\geq 1} \mathbf{P}(A_n \cap A)$ (а) збігається для події A, то $\mathbf{P}(\overline{\lim} A_n) \leq 1 - \mathbf{P}(A)$; (б) розбігається для всіх подій A з $\mathbf{P}(A) > 0$, то $\mathbf{P}(\overline{\lim} A_n) = 1$.

3. Випадкові величини $(\xi_n\ , n \geq 1)$ незалежні однаково розподілені і $\mathbf{E}\xi_1^+ = \mathbf{E}\xi_1^- \leq \infty$. Довести, що $\mathbf{P}(\xi_n = o(n),\ n \to \infty) = 1$ тоді й тільки тоді, коли $\mathbf{E}\,|\xi_1| < \infty$.

4. Для величин (ξ_n) ряд $\sum_{n\ge1}\xi_n/n$ збігається м.н. і $\mathbf{E}\xi_n = 0$. Довести, що ці величини задовольняють посилений закон великих чисел.

5. Знайти достатню умову посиленого закону великих чисел для послідовності незалежних випадкових величин (ξ_n) таких, що (а) $\xi_n \simeq \Pi(\lambda_n)$; (б) $\xi_n \simeq \mathrm{Exp}(\lambda_n)$.

6. Збіжність м.н. $\xi_n \to^{\mathbf{P}} \xi$ має місце тоді й тільки тоді, коли кожна підпослідовність $(\xi_{n_k},\ k\ge1)$ містить підпідпослідовність, що збігається до ξ м.н.

7. У дискретному ймовірнісному просторі збіжність майже напевне еквівалентна збіжності за ймовірністю.

8. Випадкові події (A_n) незалежні у сукупності та невироджені: $\mathbf{P}(A_n) = p_n \in (0,1)$. (а) Довести, що $\mathbf{P}(\overline{\lim}_{n\to\infty}A_n) = 1$ тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{P}(\cup_{n\ge1}A_n) = 1$. (б) Остання умова еквівалентна $\sum_{n\ge1}p_n = \infty$. (в) З цим припущенням знайти розподіл випадкової величини $\nu(\omega) = \inf(n : \omega \in A_n) < \infty$.

9. Величини $(\xi_n\ ,n \ge 1)$ незалежні однаково розподілені, і $\mathbf{E}\xi_1 = 0$. (а) Якщо $\mathbf{E}\,|\xi_1|^\alpha < \infty$, то $\mathbf{P}(|\xi_n| = o(n^{1/\alpha}),\ n\to\infty) = 1$. (б) Якщо $\mathbf{E}\exp(\alpha\xi_1) < \infty$, то $\mathbf{P}(\xi_n = o(\ln n),\ n\to\infty) = 1$.

10. Знайти необхідну та достатню умову посиленого закону великих чисел для послідовності незалежних випадкових величин (ξ_n) таких, що (в) $\xi_n \simeq N(0,\sigma_n^2)$; (г) $\xi_n \simeq B(n,p_n)$.

11. Побудувати приклад послідовності випадкових величин (ξ_n), ξ таких, що $\overline{\lim}_{n\to\infty}\xi_n = \infty$ і $\underline{\lim}_{n\to\infty}\xi_n = -\infty$ м.н., та одночасно $\xi_n \to^{\mathbf{P}} \xi$.

12. Якщо $\xi_n \to^{\mathbf{P}} \xi,\ n\to\infty$, то для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться подія A_ε така, що $\mathbf{P}(A_\varepsilon) \ge 1-\varepsilon$ та $\xi_n(\omega) \to \xi(\omega),\ n\to\infty$, рівномірно за $\omega \in A_\varepsilon$.

13. Випадкові величини $(\xi_n,\ n\ge1)$ невід'ємні та $\xi_n \to^{\mathbf{P}} \xi$, $n\to\infty$, і $\mathbf{E}\xi_n \to \mathbf{E}\xi$. Довести, що $\mathbf{E}\,|\xi_n-\xi| \to 0, n\to\infty$. Узагальнити це твердження на випадок збіжності у $L_p, p>1$.

14. Випадкові величини $(\xi_n,\ n\ge1)$ незалежні однаково розподілені, причому $\mathbf{P}(|\xi_1| > c) > 0$ для всіх c. Довести, що існує така послідовність сталих c_n, що $c_n\xi_n \to^{\mathbf{P}} 0, n\to\infty$, та $c_n\xi_n \not\to^{\mathbf{P}1} 0$.

15. Випадкові величини $(\xi_n,\ n \geq 1)$ незалежні, центровані: $\mathbf{E}\xi_n = 0$ та квадратично інтегровні: $\mathbf{E}\xi_n^2 < \infty$. Визначимо послідовність $\eta(n) = n^{-1}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$. (а) Довести, що $\eta(n) \to^{\mathbf{P}1} 0, n \to \infty$, тоді і тільки тоді, коли $\eta(2^n) \to^{\mathbf{P}1} 0, n \to \infty$. (б) У (а) збіжність м.н. можна замінити на середньоквадратичну збіжність.

16. Побудувати приклад залежних подій A_n таких, що $\sum_{n\geq 1}\mathbf{P}(A_n) = \infty$ та $\mathbf{P}(\overline{\lim} A_n) = 0$.

17. Довести (а) нерівність

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{k\leq n} A_k\right) \geq \left(\sum_{k\leq n}\mathbf{P}(A_k)\right)^2 \Bigg/ \left(2\sum_{i<j\leq n}\mathbf{P}(A_i\cap A_j) + \sum_{i\leq n}\mathbf{P}(A_i)\right).$$

(б) Вивести звідси, що твердження пункту (б) леми Бореля-Кантеллі виконується вже за припущення попарної незалежності випадкових подій A_k.

18. Довести, що простір класів м.н. еквівалентних випадкових величин зі збіжністю м.н. не може бути метризований.

19. Випадкові величини $(\xi_n\ , n \geq 1)$ незалежні та $\xi_n \to^{\mathbf{P}} \xi$, $n \to \infty$. Довести, що $\xi = c$ м.н. для деякої сталої c.

20. Випадкові величини $(\xi_n,\ n \geq 0)$ незалежні однаково експоненційно розподілені з параметром $\lambda = 1$. Довести, що:
(а) $\overline{\lim}_{n\to\infty}\xi_n/\ln n = 1$ м.н., і (б) $\underline{\lim}_{n\to\infty}\ln\xi_n/\ln n = -1$ м.н.

21. Випадкові величини $(\xi_n\ , n \geq 1)$ незалежні та рівномірно розподілені на $[0,1]$. Довести, що послідовність ξ_n м.н. всюди щільна на відрізку $[0,1]$.

22. Випадкові величини $(\xi_n, n \geq 2)$ незалежні, $\mathbf{P}(\xi_n = \pm n) = 1/n\ln n$, $\mathbf{P}(\xi_n = 0) = 1 - 2/n\ln n$, $\xi_1 = 0$, $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Довести збіжність $S_n/n \to^{\mathbf{P}} 0, n \to \infty$, та обчислити $\mathbf{P}(S_n/n \to 0) = 0$.

23. Випадкові величини (ξ_n) не зростають та $\xi_n \to 0, n \to \infty$, м.н. Довести, що існує борелєва додатна функція g така, що ряд $\sum_{n>1} g(\xi_{n-1}, \xi_n)$ збігається м.н.

24. Випадкові величини (ξ_n) незалежні, задовольняють умови теореми Колмогорова про посилений закон великих чисел, $\mathbf{E}\xi_n = 0$. Довести, що знайдеться послідовність незалежних величин (η_n) та-

ка, що: (а) $\mathbf{P}(\eta_n = \xi_n$ починаючи з деякого $n) = 1$, (б) задовольняє посилений закон великих чисел, (в) $\sum_{n\geq 1} \mathbf{D}\eta_n/n^2 = \infty$. Отже, умова теореми Колмогорова про посилений закон великих чисел не є необхідною.

25. Випадкові події (A_n) незалежні у сукупності, $S_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k}$. Довести існування м.н. границі $\lim_{n\to\infty} S_n/\mathbf{E}S_n$. За припущення $\mathbf{E}S_n \to \infty$ довести, що ця границя дорівнює 1.

26. Випадкова величина ν_n збігається з кількістю успіхів у n випробуваннях Бернуллі з ймовірністю успіху p. Довести при $\varepsilon \in (0,1)$ таку нерівність

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln \mathbf{P}(|\nu_n - np| \geq n\varepsilon) \leq H(p+\varepsilon, p) + H(p-\varepsilon, p),$$

де $H(\theta, p) \equiv -\theta \ln(\theta/p) - (1-\theta)\ln((1-\theta)/(1-p))$.

27. Випадкові величини $(\xi_n, n \geq 1)$ незалежні однаково розподілені та прості, $\mathbf{E}\xi_1 < 0, \mathbf{P}(\xi_1 < 0) < 1$. Позначимо $\rho = \inf\limits_{t\in\mathbb{R}} \exp(t\xi_1)$. Довести, що $\rho \in (0,1)$ та $\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln \mathbf{P}(\xi_1 + \ldots + \xi_n \geq 0) = \ln \rho$. Вказівка: числова послідовність під знаком логарифму напівмультиплікативна.

28. Нехай $(\xi_n,\ n \geq 1)$ послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, $\mathbf{E}\xi_1 = \mu,\ \mathbf{E}\xi_1^2 < \infty,\ S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Тоді $S_n - n\mu = o(n^{1/2+\delta}), n \to \infty$, майже напевне, для кожного $\delta > 0$.

29. Випадкові величини $(\xi_n,\ n \geq 1)$ незалежні однаково розподілені та не є інтегрованими, $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ Довести, що закон великих чисел: $S_n/n \to^{\mathbf{P}} 0, n \to \infty$, виконується тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{P}(|\xi_1| > n) = o(1/n)$ та $\mathbf{E}\xi_1 \mathbb{1}_{\{|\xi_1| \leq n\}} = o(1), n \to \infty$.

30. Нехай $(\xi_n,\ n \geq 1)$ незалежні однаково розподілені величини, які не є інтегрованими, $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Довести, що:
(а) $S_n/n \to \infty,\ n \to \infty$, м.н.; (б) $\overline{\lim}_{n\to\infty} |S_n/n - c_n| = \infty$ м.н. для довільної послідовності $c_n \in \mathbb{R}$.

31. Випадкові величини $(\xi_n,\ n \geq 1)$ незалежні однаково розподілені, $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, а $\alpha \in (0,2)$. Довести, що послідовність $n^{-1/\alpha} S_n$ збігається м.н. тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{E}\,|\xi_1|^\alpha < \infty$ та у випадку, коли $\alpha \geq 1$, $\mathbf{E}\xi_1 = 0$. При $\alpha = 1$ границя дорівнює $\mathbf{E}\xi_1$ та 0 у інших випадках.

32. Випадкові величини $(\xi_n,\ n \ge 1)$ незалежні, однаково розподілені та інтегровні, а $S_n = \xi_1 + \ldots + \ \xi_n$. Довести збіжність: $\mathbf{E}\,|S_n/n - \mathbf{E}\xi_1| \to 0, n \to \infty$.

33. Випадкові події $(A_n, n \ge 1)$ такі, що $\sum_{n\ge1}\mathbf{P}(A_n) = \infty$ та

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\left(\sum_{k,j\le n}\mathbf{P}(A_k\cap A_j)\right)/\left(\sum_{k\le n}\mathbf{P}(A_k)\right)^2 = 1.$$

Довести:
(а) $\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(\left|\sum_{k\le n}1\!\!\mathrm{I}_{A_k} - \sum_{k\le n}\mathbf{P}(A_k)\right| \ge \frac{1}{2}\sum_{k\le n}\mathbf{P}(A_k)\right) = 0.$
(б) Використати це для доведення теореми Ердеша-Реньї:

$$\mathbf{P}(\overline{\lim}_{n\to\infty}A_n) = 1.$$

34. Випадкові величини $(\xi_n,\ n \ge 1)$ незалежні однаково розподілені, $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, а числова послідовність $(a_n, n \ge 1)$ додатна, строго зростає та $a_{n+m} \le a_n + a_m$ при $n, m \ge 1$, причому $\sum_{n\ge1}\mathbf{P}(|\xi_1| > a_n) = \infty$. Довести, що $\mathbf{P}(\overline{\lim}_{n\to\infty}\{|S_n| > a_n\}) = 1$.

35. Випадкові величини $(\xi_n,\ n \ge 1)$ незалежні, $\mathbf{P}(\xi_n = \pm n) = 1/n$, $\mathbf{P}(\xi_n = 0) = 1 - 2/n$. Довести, що $\sum_{n\ge1}\mathbf{D}\xi_n/n^2 = \infty$ та посилений закон великих чисел не виконується.

36. Послідовність (ξ_n) центрована і задовольняє умову теореми Колмогорова про посилений закон великих чисел. Довести, що знайдеться послідовність незалежних величин (η_n) така, що $\mathbf{P}(\overline{\lim}\{\xi_n \ne \eta_n\}) = 0$, задовольняє твердження теореми:

$$(\eta_1 + \ldots + \eta_n)/n \to^{\mathbf{P}1} 0, \quad n \to \infty,$$

однак $\sum_{n\ge1}\mathbf{D}\eta_n/n^2 = \infty$.

37. Позначимо через $\nu_n(x,i)$ кількість входжень цифри $i \in \{0,\ldots,9\}$ серед перших n цифр після коми десяткового розкладу числа x. Довести, що майже для всіх $x \in [0,1]$ за мірою Лебега $\nu_n(x,i)/n \to 1/10, n \to \infty$, для кожної i.

38. Величини $\xi_n \to^{\mathbf{P}1} \xi, n \to \infty$, де границя ξ - скінченна. Довести, що послідовність (ξ_n) стохастично обмежена, тобто для довільного $\varepsilon > 0$ існує стала m_ε така, що $\mathbf{P}(|\xi_n| < m_\varepsilon) \ge 1 - \varepsilon$.

39. Для довільної послідовності випадкових величин (ξ_n) знайдуться сталі a_n такі, що $\xi_n/a_n \to^{\mathbf{P}1} 0, n \to \infty$.

40. Випадкові величини $(\xi_n,\ n \geq 1)$ незалежні однаково розподілені. Довести, що $\mathbf{P}(\exists \lim \xi_n) = 0$.

41. Довести, що множина чисел з $[0, 1)$, що не містять цифру 1 у тернарному розкладі, має нульову міру Лебега.

42. Випадкові величини $(\xi_n,\ n \geq 1)$ незалежні, $\mathbf{E}\xi_n = 0$, $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Довести, що збіжність $S_n/n \to^{\mathbf{P}1} 0, n \to \infty$ має місце тоді і тільки тоді, коли $S_n/n \to^{\mathbf{P}} 0$ та $S_{2^n}/2^n \to^{\mathbf{P}1} 0, n \to \infty$.

43. Випадкові величини $(\xi_n,\ n \geq 1)$ незалежні, набувають значень з $\{1, \ldots, k\}$, $\mathbf{P}(\xi_n = i) = p(i), i = \overline{1, k}$. Визначимо вірогідність $\pi_n = \prod_{j=1}^{n} p(\xi_j)$. Довести, що $n^{-1} \ln \pi_n \to^{\mathbf{P}1} \sum_{i=1}^{k} p(i) \ln p(i)$.

44. Випадкові події $(A_n, n \geq 1)$ незалежні у сукупності та $\mathbf{P}(A_n) < 1$. Довести, що рівність $\mathbf{P}(\overline{\lim}_{n \to \infty} A_n) = 1$ виконується тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{P}(\cup_{n \geq 1} A_n) = 1$.

1.20. Нерівності Чебишева та Колмогорова

Література: [1, с.76–77, 119–121], [2,с.76-77,119-120]. Сам: 1-6.

1. У припущенні скінченності правої частини довести нерівність $\mathbf{P}(\xi \geq x) \leq \exp(-ax)\mathbf{E}\exp(a\xi)$.

2. Для якої випадкової величини ξ нерівність Чебишева може перетворюватися на рівність ?

3. Випадкова величина $\xi \geq 0$ і $\mathbf{E}\xi^2 < \infty$. Довести при $\varepsilon \in (0, 1)$ нерівність $\mathbf{P}(\xi > \varepsilon \mathbf{E}\xi) \geq (1 - \varepsilon)^2 (\mathbf{E}\xi)^2 / (\mathbf{E}\xi^2)$.

4. Нехай $(p_k, k = \overline{1, n})$ – дискретний розподіл ймовірностей, а $x_k > 0$. Довести нерівність

$$\prod_{k=1}^{n} x_k^{p_k} \leq \sum_{k=1}^{n} x_k p_k.$$

5. Нехай g – неперервна неспадна опукла донизу функція, а послідовність (ξ_k) задовольняє умови теореми про нерівність Колмогорова. Тоді ліва частина цієї нерівності не перевищує $\mathbf{E}g(|S_n|)/g(\varepsilon)$.

6. Випадкові величини $(\xi_k, k = \overline{1, n})$ незалежні, $\mathbf{P}(\xi_k = \pm 1) = 1/2$, $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Довести такі нерівності:

(а) $\mathbf{E}\exp(tS_k) \le \exp(kt^2/2)$ при $t \in \mathbb{R}$,
(б) $\mathbf{P}(\max_{1\le k\le n}|S_k| \ge nt) \le 2\exp(-nt^2/2)$ для $t > 0$.

7. Довести при $x > 0$ для стандартної нормальної функції розподілу Φ та її щільності φ такі включення:
(а) $\Phi(-x)/\varphi(x) \in [x^{-1} - x^{-3}, x^{-1}]$,
(б) $\Phi(-x)/\varphi(x) \in [2/(\sqrt{x^2+4}+x),\ 2/(\sqrt{x^2+2}+x)]$.

8. Для заданих сталих $a > 0$, m, s^2 знайти верхню межу ймовірностей $\mathbf{P}(\xi - m \ge a)$ за умови фіксованих $\mathbf{E}\xi = m$, $\mathbf{D}\xi = s^2$.

9. У припущенні обмеженості: $|\xi| \le c$, довести, що

$$\mathbf{P}(|\xi| \ge \varepsilon) \ge (\mathbf{E}\xi^2 - \varepsilon^2)/c^2.$$

10. Довести, що $\mathbf{P}(\xi - \mathbf{E}\xi > x\sigma_\xi) \le 1/(1+x^2)$ при $x > 0$.

11. Для інтегровної величини ξ довести, що:
(а) $t\mathbf{P}(|\xi| \ge t) \le \mathbf{E}\,|\xi|\,\mathbb{1}_{|\xi|\ge t}$, (б) $\mathbf{P}(|\xi| > t) = o(1/t), t \to \infty$.

12. Нехай $p, q, r > 0$ такі, що $r^{-1} = p^{-1} + q^{-1}$, а $\xi, \eta \ge 0$. Довести нерівність $(\mathbf{E}(\xi\eta)^r)^{1/r} \le (\mathbf{E}\xi^p)^{1/p}(\mathbf{E}\eta^q)^{1/q}$.

13. Величини $(\xi_k, k = \overline{1,n})$ незалежні, $\mathbf{E}\xi_k = 0$, $\mathbf{E}\xi_k^2 < \infty$, а $S_k = \xi_1 + \ldots + \xi_k$. Для довільних сталих $0 < a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$ довести нерівність

$$\mathbf{P}(|S_k| \le a_k, \forall k = \overline{1,n}) \ge 1 - \textstyle\sum_{k=1}^n \mathbf{E}\xi_k^2/a_k^2.$$

14. Випадкові вектори (ξ_1, ξ_2), (η_1, η_2) нормально розподілені, мають нульові середні та одиничні дисперсії координат, причому $\mathbf{E}\xi_1\xi_2 \le \mathbf{E}\eta_1\eta_2$. Довести, що для всіх a

$$\mathbf{P}(\max(\xi_1, \xi_2) > a) \ge \mathbf{P}(\max(\eta_1, \eta_2) > a).$$

15. Нехай $r \ge 1$, та $\mathbf{E}|\xi|^r < \infty$. Довести, що

$$\mathbf{P}(|\xi - \mathbf{E}\xi| \ge \varepsilon) \le \varepsilon^{-r}\mathbf{E}\,|\xi - \mathbf{E}\xi|^r\,.$$

16. Випадкові величини (ξ_n) незалежні, $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, причому $|\xi_k| \le c$, $\mathbf{P}(\max_{m\le l\le n}|S_l - S_m| \ge a) \le \alpha$ для всіх $m < n$. Довести, що

$$\mathbf{P}(\max_{m\le l\le n}|S_l - S_m| \ge 2a + c) \le \alpha^2.$$

17. Випадкові величини (ξ_n) незалежні, $\mathbf{E}\xi_k^2 < \infty$, $S_k = \xi_1 + \ldots + \xi_k$, $\mathbf{E}S_k = m_k$. Для довільного $a > m \equiv \max_{1\le k\le n}|m_k|$

довести нерівність

$$\mathbf{P}(\max_{1\le k\le n}|S_k|\ge a)\le (a-m)^{-2}\sum_{k=1}^n \mathbf{D}\xi_k.$$

18. Випадкові величини (ξ_n) незалежні та симетричні: $\xi_k \simeq -\xi_k$, $S_k=\xi_1+\ldots+\xi_k$. Довести при $\varepsilon>0$ нерівність

$$\mathbf{P}(\max_{1\le k\le n} S_k\ge \varepsilon)\le 2\mathbf{P}(S_n\ge\varepsilon).$$

19. Випадкові величини (ξ_n) незалежні, $\mathbf{E}\xi_k=0, \mathbf{E}\xi_k^2<\infty$, $S_k=\xi_1+\ldots+\xi_k$. Довести нерівність

$$\mathbf{E}\max_{1\le k\le n}|S_k|\le 2(\mathbf{E}S_n^2)^{1/2}.$$

20. Величини ξ,η невід'ємні, $\alpha>0$. Довести нерівність

$$\mathbf{E}(\xi+\eta)^\alpha\le 2^{(\alpha-1)^+}(\mathbf{E}\xi^\alpha+\mathbf{E}\eta^\alpha).$$

21. **(Нерівність Скорохода)** Випадкові величини (ξ_n) незалежні, а $S_n=\xi_1+\ldots+\xi_n$. Довести при $x>0$ та достатньо великих $y>0$ (для додатності знаменника) нерівність

$$\mathbf{P}(\max_{k\le n}|S_k|>x+y)\le \mathbf{P}(|S_n|>x)\left(1-\max_{k\le n}\mathbf{P}(|S_n-S_k|>y)\right)^{-1}.$$

22. Функцією концентрації випадкової величини ξ називається функція $Q_\xi(h)=\sup_x\mathbf{P}(x\le\xi\le x+h), h\ge 0$. Довести, що $Q_{a+b\xi}(h)=Q_\xi(h/b)$ при $b>0$, та $Q_{\xi+\eta}(h)\le\min(Q_\xi(h),Q_\eta(h))$ для незалежних ξ,η. Для незалежних однаково розподілених величин (ξ_n) вивести, що $Q_{S_n}(h)\le A/\sqrt{n}$ для деякої сталої A.

1.21. Характеристичні функції

Література: [1, с.134–149], [2,с.133-148]. Сам: 1-5.

1. Довести для цілозначної випадкової величини ξ, що її характеристична функція $\varphi(t)$ має період 2π і

$$\mathbf{P}(\xi=n)=(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}\exp(-itn)\varphi(t)dt.$$

2. Довести, що рівність $|\varphi_\xi(t)|=1$ для деякого $t\ne 0$ виконується тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{P}(\xi\in a+b\mathbb{Z})=1$ для деяких $a,b\in\mathbb{R}$.

3. Довести, що кількість успіхів у випадковому числі випробувань Бернуллі, яке не залежить від результатів окремих випробувань та має розподіл Пуассона, має пуассонівський розподіл. Знайти його параметр.

4. Довести, що для незалежності випадкових величин ξ, η необхідно і достатньо, щоб $\mathbf{E}\exp(it\xi + is\eta) = \mathbf{E}\exp(it\xi)\mathbf{E}\exp(is\eta)$ при всіх $s, t \in \mathbb{R}$.

5. Випадкові величини $(\xi_n,\ n \geq 1)$ та ξ такі, що $|\xi_n| \leq c, |\xi| \leq c$ для сталої c, та $\mathbf{E}\xi_n^k \to \mathbf{E}\xi^k, n \to \infty$, при всіх $k \geq 1$. Довести, що $\xi_n \to^W \xi$.

6. За означенням випадкова величина ξ симетрична, якщо ξ та $-\xi$ мають однакові функції розподілу. Довести, що симетричність еквівалентна дійснозначності характеристичної функції.

7. Випадкова величина ξ не дорівнює м.н. сталій. Довести, що $|\varphi_\xi(t)| < 1$ у деякому виколотому околі нуля.

8. Нехай $\varphi(t)$ – характеристична функція стандартного нормального розподілу. (а) Інтегруванням за частинами вивести диференціальне рівняння $\varphi'(t) = -t\varphi(t)$; (б) отримати звідси формулу для $\varphi(t)$.

9. Випадкова величина η набуває цілих невід'ємних значень, а величини $(\delta_k, k \geq 0)$ не залежать від η, і

$$\mathbf{P}(\delta_k = 0) = 1 - \mathbf{P}(\delta_k = 1) \in (0, 1).$$

Розглянемо суми $\eta_1 = \sum_{k=0}^{\eta} \delta_k$, $\eta_0 = \sum_{k=0}^{\eta}(1 - \delta_k)$. Довести, що (а) величини η_0 та η_1 незалежні тоді і тільки тоді, коли η має розподіл Пуассона, (б) η_i мають розподіл Пуассона.

10. Випадкові величини $(\xi_n, n \geq 1)$ та ν – незалежні в сукупності, а величина $\zeta = \sum_{k=1}^{\nu} \xi_k$. Довести рівняння Вальда

$$\mathbf{E}\zeta = \mathbf{E}\nu\mathbf{E}\xi_1 \quad \text{та} \quad \mathbf{D}\zeta = \mathbf{E}\nu\mathbf{D}\xi_1 + (\mathbf{E}\xi_1^2)\mathbf{D}\nu.$$

11. Нехай випадкова величина ξ інтегровна в будь-якій степені і $\mathbf{E}\xi^n = (n+k-1)!/(k-1)!$ для деякого $k \geq 1$ та всіх $n \geq 0$. Довести, що розподіл ξ визначається однозначно та збігається з розподілом Ерланга.

12. Довести, що розподіл інтегровної випадкової величини ξ однозначно визначається функцією $\mathbf{E}\,|\xi - t|\,, t \in \mathbb{R}$.

13. Довести, що з невід'ємної визначеності характеристичної функції випливає ермітовість.

14. Знайти характеристичну функцію для випадкової величини з щільністю: (а) $(T - |x|)^+/T^2$, (б) $(1 - \cos(Tx))/\pi T x^2$.

15. Нехай $\varphi(t)$ – характеристична функція така, що $\varphi(t) = 0$ при $|t| > a$. Вивести з теореми Бохнера-Хінчина, що періодичне продовження з періодом $2a$ функції $\varphi(t)$ є характеристичною функцією.

16. Довести, що функція з періодом $2T$, яка дорівнює $(T - |x|)^+/T$ при $|x| \le T$, є характеристичною.

17. Величина ξ має щільність та $\mathbf{E}\xi = 0$, $\mathbf{E}\xi^2 < \infty$. Довести, що знайдеться $\delta > 0$ таке, що $\sup_{|t|\ge u} |\varphi_\xi(t)| \le \exp(-\delta u^2)$ для всіх $u \in (0, 1)$.

18. Випадкова величина ξ має щільність. Довести, що $|\varphi_\xi(t)| < 1$ для всіх $t \ne 0$.

19. З використанням попередніх задач довести, що існують незалежні величини ξ_1, ξ_2, ξ_3 такі, що ξ_2 та ξ_3 мають різні розподіли, однак $\xi_1 + \xi_2$ і $\xi_1 + \xi_3$ – однаково розподілені.

20. Довести, що для довільних розподілу $(p_k, k = \overline{1,n})$ та додатних $(a_k, k = \overline{1,n})$ опуклий полігон $\sum_{k=1}^n p_k (1 - |t|\, a_k^{-1})^+$ є характеристичною функцією.

21. Нехай φ – дійсна неперервна парна функція на $\mathbb{R}$, $\varphi(0) = 1$, $\varphi(\infty) = 0$, причому графік φ на $\mathbb{R}_+$ є опуклим донизу. Довести, що φ є характеристичною функцією.

22. Перевірити, що величина ξ з розподілом $\mathbf{P}(\xi = \pm 2n) = C/(n^2 \ln n)$, $n \ge 2$, не є інтегровною, однак її характеристична функція диференційовна в нулі.

23. Довести, що якщо характеристична функція $\varphi_\xi(t)$ випадкової величини ξ має похідну в нулі парного порядку $2n$, то випадкова величина ξ^{2n} інтегровна.

24. Довести, що за умови $\mathbf{E}\,|\xi|^\alpha < \infty$ при $0 < \alpha < 1$, характеристична функція $\varphi_\xi(t)$ задовольняє умову Гельдера порядку α.

25. Довести, що (а) характеристична функція випадкової величини зі щільністю Коші $(\pi(1+x^2))^{-1}$ дорівнює $\exp(-|t|)$; (б) для незалежних однаково розподілених випадкових величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ зі щільністю Коші нормована сума $(\xi_1 + \ldots + \xi_n)/n$ має таку ж саму щільність; (в) для вказаної послідовності не справджується закон великих чисел.

26. Довести, що характеристична функція рівномірного розподілу на симетричному відрізку $[-a, a]$ дорівнює $(\sin at)/at$.

27. Довести, що для випадкової величини ξ з гама-розподілом $\Gamma(\lambda, \alpha)$ $\varphi_\xi(t) = (1 - it/\lambda)^{-\alpha}$.

28. Довести, що функція $\exp(-t^4)$ не є характеристичною.

29. Навести приклад залежних величин ξ, η таких, що

$$\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_\xi(t)\ \varphi_\eta(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

30. Випадкові величини $(\xi_k, k = \overline{1, n})$ незалежні у сукупності тоді і тільки тоді, коли величини $\xi_1 + \ldots + \xi_k$ та ξ_{k+1} незалежні для всіх $k = \overline{1, n-1}$.

31. Для характеристичної функції $\varphi(t)$ довести нерівність

$$1 - \operatorname{Re}\varphi(2t) \le 4 - 4\operatorname{Re}\varphi(t).$$

32. Якщо випадкова величина ξ обмежена, то функція $t^{-2}\ln|\varphi_\xi(t)|$ обмежена у деякому околі нуля, а якщо також абсолютно неперервна, то і відділена від нуля в такому околі.

33. Якщо $\varphi(t)$ – характеристична функція, то (а) $\varphi^n(t)$; (б) $|\varphi(t)|^2$; (в) $t^{-1}\int_0^t \varphi(s)ds$ – також характеристичні функції.

34. Довести, що існують різні характеристичні функції $\varphi_k(t)$, $k = 1, 2$, такі, що $\varphi_1^2(t) = \varphi_2^2(t)$ для всіх $t \in \mathbb{R}$.

35. Нехай величини ξ, η незалежні, однаково розподілені і квадратично інтегровні, причому $\xi + \eta$ та $\xi - \eta$ також незалежні. Довести, що ξ, η – нормальні випадкові величини.

36. Випадкові величини ξ, η незалежні, однаково розподілені і з нульовим середнім та одиничною дисперсією, та розподіл випадкової величини $(\xi + \eta)/\sqrt{2}$ збігається з розподілом ξ. Довести, що $\xi \simeq N(0, 1)$.

37. Довести методом генератрис, що (а) сума незалежних величин із розподілами Пуассона, (б) слабка границя величин із розподілами Пуассона знову має розподіл Пуассона.

38. Довести для невід'ємної величини $\xi \le \infty$ такі тотожності:

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{E}\exp(-t\xi) = \mathbf{P}(\xi = 0), \quad \lim_{t\downarrow 0} \mathbf{E}\exp(-t\xi) = \mathbf{P}(\xi < \infty).$$

39. Нехай величини ξ_n, ξ мають характеристичні функції φ_n, φ, причому $\int_a^b \varphi_n(t)dt \to \int_a^b \varphi(t)dt$, $n \to \infty$, для всіх $a < b$. Довести, що $\xi_n \to^W \xi, n \to \infty$.

40. Довести, що твердження теореми Леві виконується, якщо характеристичні функції замінити на перетворення Лапласа та припустити, що відповідні величини невід'ємні.

41. Перевірити суттєвість умови неперервності в нулі в теореми Леві – побудувати функції розподілу F_n, що не збігаються слабко та для їх характеристичних функцій φ_n границя $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t)$ існує для всіх $t \in \mathbb{R}$.

42. Випадкові величини ξ_n мають характеристичні функції φ_n. Довести, що $\xi_n \to^W 0$ тоді і тільки тоді, коли $\varphi_n(t) \to 1$ для t з деякого околу нуля.

43. Функції розподілу F_n мають характеристичні функції φ_n, і для кожного $t \in \mathbb{R}$ існує границя $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$. Довести, що існує узагальнена функція розподілу $F \in \mathfrak{M}_{01}$ така, що $F_n \to^O F$, $n \to \infty$. Далі, довести еквівалентність таких тверджень: (а) існує функція розподілу F така, що $F_n \to^W F, n \to \infty$; (б) послідовність (F_n) слабко компактна; (в) φ – характеристична функція; (г) φ – неперервна; (д) φ – неперервна в нулі.

44. Довести, що сім'я функцій розподілу (F_α) слабко компактна тоді і тільки тоді, коли

$$\sup_\alpha \sup_{|t|\le\varepsilon} |1 - \varphi_{F_a}(t)| \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

45. Величини $(\xi_n,\ n \ge 1)$ незалежні, однаково розподілені з характеристичною функцією φ. Довести, що збіжність

$$(\xi_1 + \ldots + \xi_n)/n \to^{\mathbf{P}1} a$$

до деякої сталої a виконується тоді і тільки тоді, коли існує похідна $\varphi'(0)$.

46. Випадкові величини $(\xi_n,\ n \geq 1)$ незалежні, однаково розподілені та інтегровні. Довести, що $(\xi_1 + \ldots + \xi_n)/n \to^{\mathbf{P}} \mathbf{E}\xi_1$.

47. Випадкові величини $(\xi_n,\ n \geq 1)$ незалежні, $\mathbf{P}(\xi_n = 0) = 1/2 = \mathbf{P}(\xi_n = 1)$. Довести, що (а) сума ряду $\sum_{n\geq 1} 2^{-n}\xi_n$ рівномірно розподілена на $[0,1]$, (б) величина $\xi = 2\sum_{n\geq 1} 3^{-n}\xi_n$ має (сингулярний) розподіл Кантора. Обчислити відповідну характеристичну функцію.

48. Сформулювати теоретико-ймовірнісну інтерпретацію такої тотожності: $(\sin t)/t = \prod_{n\geq 1}\cos(2^{-n}t)$.

49. Нехай $\varphi(t)$ – характеристична функція для функції розподілу $F(x)$. (а) Тоді функція

$$\varphi_\alpha(t) \equiv (2\varphi(t) - \varphi(t+\alpha) - \varphi(t-\alpha))/(2 - \varphi(\alpha) - \varphi(-\alpha))$$

також є характеристичною при $\alpha \in \mathbb{R}$. (б) За умови абсолютної неперервності F довести, що $\varphi_\alpha(t) \to \varphi(t), \alpha \to \infty$, але відповідні щільності не збігаються.

50. Нехай $\xi_n \to^W \xi$, та $a_n \to a$, $n \to \infty$. Довести, що

$$a_n + \xi_n \to^W a + \xi, \quad n \to \infty.$$

51. Довести, що в попередній вправі послідовність сталих $a_n \to a$ можна замінити на послідовність випадкових величин $\eta_n \to^{\mathbf{P}} a$.

52. Нехай $\xi_n \to^W \xi \in \mathbb{R}^d$, а функція $g \in C(\mathbb{R}^d)$. Довести, що має місце збіжність $g(\xi_n) \to^W g(\xi), n \to \infty$.

53. Довести, що (а) сумісна характеристична функція n-вимірного нормального випадкового вектора $\xi \simeq N_n(m, V)$ дорівнює $\varphi_\xi(t) = \exp(it'm - t'Vt/2)$; (б) ξ є узагальненим нормальним вектором тоді і тільки тоді, коли остання рівність має місце для деяких $m \in \mathbb{R}^n$ і симетричної невід'ємно визначеної матриці V.

54. Довести, що вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ є нормальним випадковим вектором тоді і тільки тоді, коли для кожного $t \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ величина $t'\xi$ має нормальний розподіл.

55. Нехай послідовності випадкових величин $(\xi_n), (\eta_n)$ такі, що ξ_n, η_n незалежні при кожному n, $\xi_n \to^W \xi, \eta_n \to^W \eta$, причому ξ та η незалежні. Довести слабку збіжність векторів $(\xi_n, \eta_n) \to^W (\xi, \eta)$.

56. Нехай φ, ψ, γ – характеристичні функції. Довести, що функція $\varphi(t_1)\psi(t_2)\gamma(t_1+t_2)$ є сумісною характеристичною функцію двовимірного вектора. Побудувати цей вектор.

57. Довести, що координати випадкового вектора $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ незалежні у сукупності тоді і тільки тоді, коли їх сумісна характеристична функція дорівнює добуткові: $\varphi_\xi(t) = \prod_{k=1}^n \varphi_{\xi_k}(t), \forall t \in \mathbb{R}$.

58. Довести рівність $\mathbf{E}\xi\eta = \mathbf{E}\xi\mathbf{E}\eta$ для комплекснозначних незалежних інтегровних величин ξ, η.

1.22. Збіжність в основному та слабка

Література: [1, с.125–134], [2,с.124-133]. Сам: 1-7.

1. Навести приклад послідовності функцій розподілу, які збігаються в основному і не збігаються поточково.

2. Довести, що зі збіжності функцій розподілу в основному $F_n \to^O F$ до неперервної функції розподілу F випливає рівномірна за x збіжність. Перевірити, що умова неперервності F тут є суттєвою для рівномірності.

3. Випадкові величини ξ_n, ξ – цілозначні. Довести, що $\xi_n \to^W \xi$ тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{P}(\xi_n = k) \to \mathbf{P}(\xi = k), n \to \infty$, для всіх $k \in \mathbb{Z}$.

4. Довести, що кожне з тверджень теореми про властивості слабкої збіжності еквівалентне збіжності $F_n \to^W F, n \to \infty$.

5. Довести, що зі збіжностей $\xi_n \to^W \xi$, $\eta_n \to^W c \in \mathbb{R}$, випливає $\xi_n + \eta_n \to^W \xi + c$ та $\xi_n\eta_n \to^W c\xi, n \to \infty$.

6. Довести, що для сталої c збіжність $\xi_n \to^W c$ має місце тоді і тільки тоді, коли $\xi_n \to^{\mathbf{P}} c$, $n \to \infty$.

7. Довести, що послідовність нормальних розподілів $N(\mu_n, \sigma_n^2)$, $n \in \mathbb{N}$, є слабко компактною тоді і тільки тоді, коли

$$\sup_{n\geq 1}(|\mu_n| + \sigma_n^2) < \infty.$$

8. Довести, що границя в основному не визначена однозначно, однак границею збіжної в основному послідовності з класу $\mathfrak{M}_{01}$ завжди є елемент $\mathfrak{M}_{01}$.

9. Довести, що на просторі функцій розподілу F, G функція $L(F,G) = \inf(\varepsilon > 0 : F(x-\varepsilon) - \varepsilon \le G(x) \le F(x+\varepsilon) + \varepsilon,\ \forall x \ge 0)$ є метрикою, а збіжність $L(F_n, F) \to 0$ для функцій розподілу F_n, F еквівалентна збіжності в основному $F_n \to^O F$.

10. Довести, що з $\xi_n \le \zeta_n \le \eta_n$ м. н. та $\xi_n \to^O \zeta$, $\eta_n \to^O \zeta$, $n \to \infty$, випливає $\zeta_n \to^O \zeta$.

11. Нехай F_n, F – функції розподілу і $F_n \to^O F$. Довести, що існує ймовірнісний простір $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ та випадкові величини ξ_n, ξ на ньому з функціями розподілу F_n, F відповідно такі, що $\xi_n \to^{\mathbf{P}1} \xi$, $n \to \infty$.

12. Нехай F_n – функція розподілу дискретної випадкової величини, рівномірно розподіленої на множині $\{0, 1/n, 2/n, ..., (n-1)/n\}$. Знайти слабку границю F_n.

13. Навести приклад послідовності $F_n \to^W F$ такої, що $F_n(B) \to F(B)$ не для всіх $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, тобто умова $F(\partial B) = 0$ є суттєвою.

14. Нехай $F_n \to^W F, n \to \infty$, функція g обмежена, неперервна майже скрізь за мірою, що породжена F. Довести, що $\int g dF_n \to \int g dF, n \to \infty$.

15. Нехай $\xi_n \to^W \xi, n \to \infty$. Довести, що $\mathbf{E}\,|\xi| \le \underline{\lim}_{n\to\infty} \mathbf{E}\,|\xi_n|$.

16. Довести, що слабка збіжність $\xi_n \to^W \xi, n \to \infty$, (а) має місце тоді і тільки тоді, коли $\overline{\lim}_{n\to\infty} \mathbf{E} g(\xi_n) \le \mathbf{E} g(\xi)$ для всіх $g \in C_b(\mathbb{R})$, (б) клас $C_b(\mathbb{R})$ у цьому твердженні можна замінити на $\mathrm{Lip}_b(\mathbb{R}) \equiv \{g : \sup_{x \ne y} |g(x) - g(y)| \,/\, |x-y| < \infty\} \cap C_b(\mathbb{R})$.

17. Нехай $\xi_n \to^W \xi, n \to \infty$, і

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{n \ge 1} \int_N^\infty \mathbf{P}(|\xi_n| \ge x) dx = 0.$$

Довести, що $\mathbf{E}\xi_n \to \mathbf{E}\xi$. Перевірити, що попередня умова виконується, якщо $\sup_{n\ge1} \mathbf{E}\,|\xi_n|^{1+\delta} < \infty$ для деякого $\delta > 0$.

18. Нехай $\xi_n \to^W \xi_0, n \to \infty$, а $\mu_n \equiv \mathrm{med}\ \xi_n$ – медіана величини ξ_n, що є розв'язком рівняння $\mathbf{P}(\xi_n < \mu_n) = 1/2$. За умови однозначної визначеності медіан довести, що $\mu_n \to \mu_0, n \to \infty$.

19. Нехай $\xi_n \to^W \xi, n \to \infty$, а послідовність випадкових величин $\tau_n \in \mathbb{N}$ така, що $\tau_n / n \to^{\mathbf{P}} \alpha \in (0,1)$. Довести, що $\xi_{\tau_n} \to^W \xi$, $n \to \infty$.

20. Довести, що клас $\mathcal{F}$ функцій розподілу є слабко компактним тоді і тільки тоді, коли знайдеться невід'ємна борелєва функція V така, що $V(x) \to \infty$ при $|x| \to \infty$ і $\sup_{F\in\mathcal{F}} \int_{\mathbb{R}} V(x)dF(x) < \infty$.

21. Випадкові величини $(\xi_n, n \geq 0)$ такі, що $|\xi_n| \leq c$ для сталої c, та $\mathbf{E}\xi_n^k \to \mathbf{E}\xi_0^k$, $n \to \infty$, при кожному $k \geq 1$. Довести, що $\xi_n \to^W \xi_0$, $n \to \infty$.

22. Випадкові $\mathbb{N}$-значні величини $(\xi_n, n \geq 1)$ такі, що $\mathbf{P}(\xi_n = k) = c_n k^{-2-1/n}$ з відповідною сталою c_n. Знайти слабку границю $\lim \xi_n$. Довести, що остання не інтегровна, на відміну від дограничних величин.

23. Випадкові величини $(\xi_n, n \geq 0)$ незалежні від величин $(\nu_n, n \geq 1) \subset \mathbb{N}$, причому $\xi_n \to^W \xi_0$, $\nu_n \to^{\mathbf{P}} \infty$, $n \to \infty$. Довести, що $\xi_{\nu_n} \to^W \xi_0$, $n \to \infty$.

24. Випадкова величина ξ_n має щільність $1+\cos(2\pi nx), x\in[0,1]$, а $\xi \simeq U(0,1)$. Довести, що $\xi_n \to^W \xi, n \to \infty$, однак збіжність за ймовірністю не має місця.

25. Випадковий вектор $\xi_n = (\xi_n^1, ..., \xi_n^n)$ рівномірно розподілений на поверхні кола у $\mathbb{R}^n$ радіусу $\sqrt{n}$. Довести, що $\xi_n^1 \to^W \zeta \simeq N(0,1), n \to \infty$.

26. Випадкові величини $\xi_n \simeq N(\mu_n, \sigma_n^2)$, $n \geq 0$, такі, що $\mu_n \to \mu_0$, $\sigma_n^2 \to \sigma_0^2 \in (0,\infty)$, $n \to \infty$. Довести, що $\xi_n \to^W \xi_0, n \to \infty$.

27. Навести приклад абсолютно неперервних випадкових величин, що слабко збігаються до дискретної. Знайти протилежний приклад.

28. Величини $(\xi_n, n \geq 0)$ незалежні однаково розподілені, причому $\sup(y : \mathbf{P}(\xi_1 < y) < 1) = x < \infty$. Довести, що $\max_{k\leq n} \xi_k \to^{\mathbf{P}1} x$, $n \to \infty$.

29. Для довільних випадкових величин $(\xi_n, n \geq 1)$ знайдуться сталі (a_n) такі, що $\xi_n/a_n \to^{\mathbf{P}1} 0, n \to \infty$.

30. Випадкові величини $(\xi_n), \xi, \eta$ такі, що для всіх неперервних обмежених f та всіх борелевих обмежених g має місце збіжність $\mathbf{E}f(\xi_n)g(\eta) \to \mathbf{E}f(\xi)g(\eta), n \to \infty$. Довести, що $(\xi_n, \eta) \to^W (\xi, \eta), n \to \infty$. У припущенні, що $\xi = h(\eta)$ для борелевої функції h, вивести звідси збіжність $\xi_n \to^{\mathbf{P}} \xi, n \to \infty$.

31. Довести, що гіпергеометричний розподіл, з необмежено зростаючою кількістю випробувань $N \to \infty$, фіксованим об'ємом k вибіркової партії, та відносною кількістю успіхів $n/N \to p, N \to \infty$, слабко збігається до біноміального розподілу.

32. Випадкові величини $(\xi_n, n \geq 0)$ мають функції розподілу (F_n). Припустимо, що $\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F_n(x) - F_0(x)|^{\alpha} dx = 0$ для деякого $\alpha > 0$. Довести, що $\xi_n \to^W \xi_0, n \to \infty$.

33. Для випадкових величин $(\xi_n, n \geq 0)$ довести, що збіжність $\xi_n \to^W \xi_0, n \to \infty$, має місце тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{E}g(\xi_n) \to \mathbf{E}g(\xi_0), n \to \infty$, для всіх $g \in C_b^{\infty}(\mathbb{R})$.

34. Довести, що слабка збіжність $\xi_n \to^W \xi, n \to \infty$, має місце тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{E}g(\xi_n) \to \mathbf{E}g(\xi), n \to \infty$, для всіх нескінченно диференційованих фінітних функцій g.

35. Довести, що послідовність розподілів величин (ξ_n) слабко компактна тоді і тільки тоді, коли $c_n\xi_n \to^{\mathbf{P}} 0, n \to \infty$, для кожної числової послідовності $c_n \to 0, n \to \infty$.

36. Відомо, що $\xi_n \to^W \xi, n \to \infty$. Чи можна стверджувати, що $\xi_n - \xi \to^W 0, n \to \infty$.

37. Функції розподілу $F_n(x) = 1\!\!1_{a_n < x}$, $n \geq 0$. Довести, що $F_n \to^W F_0$, $n \to \infty$, тоді і тільки тоді, коли $a_n \to a_0$, $n \to \infty$.

38. Функції розподілу (F_n) мають щільності (f_n), причому $f_n(x) \to f_0(x)$, $n \to \infty$, рівномірно на кожному обмеженому інтервалі. Довести, що $F_n \to^W F_0, n \to \infty$.

1.23. Центральна гранична теорема

Література: [1, с.38-40,149–162], [2,с.149-157]. Ауд: 1-4, сам: 5-8.

1. Випадкова величина $\zeta_{\lambda\alpha}$ має гама-розподіл $\Gamma(\lambda, \alpha)$. (а) Довести слабку збіжність $(\lambda\zeta_{\lambda\alpha} - \alpha)/\sqrt{\alpha} \to^W \zeta \simeq N(0,1), \alpha \to \infty$. (б) Розмір вимог для деякого типу полісів моделюються гама-розподілом з параметрами $\alpha = 120$, $\lambda = 21$. Обчислити наближено ймовірність того, що вимога перевищить 120.

2. Величини $(\xi_n, n \geq 1)$ задовольняють умови класичної центральної граничної теореми, а функція $g \in C_2(\mathbb{R})$ така, що $g'(\mu) = 0$. Довести, що (а) $n\,(g(S_n/n) - g(\mu)) \to^W g''(\mu)\sigma^2\zeta^2/2$, де $\zeta \simeq N(0,1)$; (б) при $\mu = 1/2$ має місце збіжність

$$S_n(n - S_n)/n - n/4 \to^W -\sigma^2\zeta^2/2, \quad n \to \infty.$$

3. Випадкові величини $(\xi_k, k \geq 1)$ незалежні, $\mathbf{P}(\xi_k = \pm k^\alpha) = k^{-\beta}/2$, $\mathbf{P}(\xi_k = 0) = 1 - k^{-\beta}$, де $2\alpha > \beta - 1$. Довести, що для загальної послідовності серій $(\xi_k, k = \overline{1,n},\ n \geq 1)$ умова Ліндеберга виконується тоді і тільки тоді, коли $\beta \in [0,1)$.

4. Випадкові величини $(\xi_n,\ n \geq 1)$ незалежні, однаково розподілені зі щільністю Коші $(\pi(1+x^2))^{-1}$. Знайти граничний розподіл для нормованих максимумів $n^{-1}\max_{1\leq k\leq n}\xi_k$.

5. Випадкова величина ζ_λ має розподіл Пуассона $\Pi(\lambda)$. (а) Довести, що $(\zeta_\lambda - \lambda)/\sqrt{\lambda} \to^W \zeta \simeq N(0,1), \lambda \to \infty$. (б) Перевірити, що вказане наближення можна вважати прийнятним вже при $\lambda \geq 5$. (в) Вивести звідси таку тотожність $\lim_{n\to\infty}\exp(-n)\sum_{k=0}^n n^k/k! = 1/2$.

6. Випадкові величини $(\xi_n,\ n \geq 1)$ незалежні, однаково рівномірно розподілені на інтервалі $[0,1]$. (а) Знайти таке перетворення добутків $\prod_{k=1}^n \xi_k$, яке б слабко збігалося до стандартної нормальної випадкової величини $N(0,1)$. (б) Знайти граничний при $n \to \infty$ розподіл величин $n\min_{1\leq k\leq n}\xi_k$.

7. Випадкові величини $(\xi_k, k \geq 1)$ незалежні у сукупності. За яких умов існують додатні сталі $b_n \to \infty$ такі, що $b_n^{-1}\sum_{k=1}^n \xi_k \to^W \zeta \simeq N(0,1)$, якщо: (а) $\mathbf{P}(\xi_k = \pm a_k) = 1/2$; (б) величини ξ_k рівномірно розподілені на $[-a_k, a_k]$?

8. Випадкові величини $(\xi_{nk},\ k = \overline{1,n},\ n \geq 1)$ незалежні при кожному n, $\xi_{nk} \in \{0,1\}$, а ймовірності $p_{nk} \equiv \mathbf{P}(\xi_{nk} = 1)$ такі, що $\max_{k\leq n} p_{nk} \to 0$. Довести, що збіжність $\sum_{k=1}^n p_{nk} \to \lambda, n \to \infty$, необхідна і достатня для того, щоб $\mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^n \xi_{nk} = m\right) \to e^{-\lambda}\lambda^m/m!$, $\forall m \in \mathbb{Z}_+$.

9. Довести класичну центральну граничну теорему без використання поняття логарифмічної функції на комплексній площині за допомогою нерівності $|z^n - \zeta^n| \leq n\,|z - \zeta|$.

10. Випадкові величини $(\xi_n,\ n \geq 1)$ незалежні, однаково розподілені, та $a_n^{-1}(\xi_1+\ldots+\xi_n)-b_n \to^W \eta, n \to \infty$, для деяких $a_n > 0, b_n$, причому $\eta \neq 0$ м.н. Довести, що $a_n \to \infty, a_n/a_{n-1} \to 1, n \to \infty$.

11. Випадкові вектори $(\xi_{nk}, k = \overline{1, n+1})$ рівномірно розподілені на одиничній сфері у $\mathbb{R}^{n+1}$. Довести, що $\sqrt{n}\xi_{n1} \to^W \zeta, n \to \infty$, де ζ має розподіл Релея.

12. Випадкові величини $(\xi_n,\ n \geq 1)$ незалежні, однаково розподілені, $\mathbf{E}\xi_1 = 0, \mathbf{D}\xi_1 = 1$. Довести, що $\max_{1\leq k\leq n} |\xi_k| / \sqrt{n} \to^W 0$.

13. Випадкові величини $(\xi_n, n \geq 1)$ незалежні, $\mathbf{P}(\xi_n = \pm 1) = 1/2$. Довести, що $\max_{1\leq k\leq n}(\xi_1 + ... + \xi_k)/\sqrt{n} \to^W |\zeta|, n \to \infty$, де $\zeta \simeq N(0,1)$.

14. Випадкові величини $(\xi_k, k \geq 1)$ незалежні, причому

$$\mathbf{P}(\xi_k = \pm 1) = (1 - k^{-2})/2, \quad \mathbf{P}(\xi_k = \pm k) = k^{-2}/2.$$

Довести, що $S_n/\sqrt{2n} \to^W \zeta \simeq N(0,1)$, однак $\mathbf{D}S_n/n \to 2, n \to \infty$.

15. Випадкові величини $(\xi_k, k \geq 1)$ незалежні та $\mathbf{E}\xi_k = 0$, $|\xi_k| \leq c_k$, причому $c_n \to \infty$, $c_n^2 = o(\mathbf{D}S_n)$, $n \to \infty$, де $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Довести, що $S_n/\sqrt{\mathbf{D}S_n} \to^W \zeta \simeq N(0,1)$.

16. Випадкові величини $(\xi_n, n \geq 1)$ незалежні, однаково розподілені, та мають парну обмежену щільність, що неперервна та додатна в околі нуля. Довести слабку збіжність

$$T_n \equiv n^{-1} \sum_{k=1}^{n} \xi_k^{-1} \to^W b\kappa, \quad n \to \infty,$$

де $b > 0$, а κ має розподіл Коші.

17. Випадкові величини $(\xi_k, k \geq 1)$ незалежні,

$$\mathbf{P}(\xi_k = \pm 1) = (1 - k^{-1})/2, \quad \mathbf{P}(\xi_k = \pm\sqrt{k}) = 1/2k.$$

Довести, що не існує таких сталих b_n, що має місце збіжність $S_n/b_n \to^W \zeta \simeq N(0,1), n \to \infty$.

18. Випадкові величини $(\xi_k, k \geq 1)$ незалежні, $\xi_k \simeq \Gamma(1, \alpha_k)$. Загальна послідовність серій $(\xi_k, k = \overline{1,n}, n \geq 1)$ задовольняє умову Ліндеберга, якщо $\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k\right)^{-1} \to 0,\ n \to \infty$.

19. Випадкові величини $(\xi_k, k \geq 1)$ незалежні, $\mathbf{P}(\xi_k = 0) = 1 - k^{-1}$, $\mathbf{P}(\xi_k = 1) = k^{-1}$. Довести, що

$$(S_n - \ln n)/\sqrt{\ln n} \to^W \zeta \simeq N(0,1), \quad n \to \infty.$$

20. Випадкові величини у кожній серії $(\xi_{nk}, k = \overline{1, k_n})$ незалежні та невід'ємні. Довести, що збіжність за ймовірністю $\sum_{k=1}^{k_n} \xi_{nk} \to^{\mathbf{P}} 0, n \to \infty$, має місце тоді і тільки тоді, коли для кожного $\varepsilon > 0$ виконуються умови: $\sum_{k=1}^{k_n} \mathbf{P}(\xi_{nk} > \varepsilon) \to 0$ і $\sum_{k=1}^{k_n} \mathbf{E}\xi_{nk} 1\!\!\mathrm{I}_{\{\xi_{nk} \le \varepsilon\}} \to 0$ при $n \to \infty$.

21. Випадкові величини $(\xi_n, n \ge 1)$ незалежні однаково розподілені та мають симетричний розподіл: $\xi_1 \simeq -\xi_1$.. Довести, що при виконанні умови $x^2 \mathbf{P}(|\xi_1| > x) = o(\mathbf{E}(\xi_1^2 1\!\!\mathrm{I}_{\{|\xi_1| \le x\}})), x \to \infty$, знайдуться $\sigma_n \in \mathbb{R}$ такі, що $(\xi_1 + ... + \xi_n)/\sigma_n \to^W N(0,1), n \to \infty$.

22. Розглянемо послідовність серій $(\xi_{nk},\ k = \overline{1, n},\ n \ge 1)$ випадкових величин із розподілом Пуассона з параметром $1/n$ всередині n-ої серії. Доведіть, що виконані всі умови теореми Ляпунова, за винятком умови Ляпунова, причому центральна гранична теорема також не виконується.

23. Випадкові величини $(\xi_k, k \ge 1)$ незалежні, $\mathbf{P}(\xi_k = \pm k^\alpha) = k^{-2\alpha-2}/6$, $\mathbf{P}(\xi_k = 0) = 1 - \mathbf{P}(\xi_k \ne 0)$. Довести, що умова Ліндеберга виконується тоді і тільки тоді, коли $\alpha < 3/2$.

24. Випадкові величини $(\xi_k, k \ge 1)$ невід'ємні незалежні однаково розподілені, $\mathbf{E}\xi_1 = 1$, $\mathbf{D}\xi_1 = \sigma^2$. Довести, що

$$2\left(\sqrt{\xi_1 + \ldots + \xi_n} - \sqrt{n}\right) \to^W \sigma\zeta \simeq N(0, \sigma^2).$$

25. Випадкові величини $(\xi_k, k \ge 1)$ невід'ємні незалежні однаково розподілені, причому $\mathbf{P}(\xi_1 \ge t) > 0$ для всіх t. Позначимо $\nu(t) = \inf(n \ge 1 : \xi_n \ge t)$. Довести, що $\mathbf{P}(\xi_1 \ge t)\nu_t \to^W \eta, t \to \infty$, де $\eta \simeq \mathrm{Exp}(1)$.

26. Випадкові величини $(\xi_k, k \ge 1)$ незалежні та не залежать від $\xi \simeq N(0,1)$, причому $\mathbf{P}(\xi_k = k) = 1/k = 1 - \mathbf{P}(\xi_k = 1)$. Довести для залежних величин $\zeta_n = \xi \cdot \xi_n$, що $\zeta_n \to^W \zeta \simeq N(0,1)$, $\mathbf{E}\zeta_n = 0$, та $\mathbf{D}\zeta_n \to \infty, n \to \infty$.

27. Випадкові величини $(\xi_k, k \ge 1)$ незалежні та $\mathbf{P}(\xi_k = 1) = p_k = 1 - \mathbf{P}(\xi_k = 0)$, $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, $\mu_n = \sum_{k \le n} p_k$, $\sigma_n^2 = \sum_{k \le n} p_k(1 - p_k)$. Довести, що збіжність

$$(S_n - \mu_n)/\sigma_n \to^W \zeta \simeq N(0,1), \quad n \to \infty,$$

має місце тоді і тільки тоді, коли $\sigma_n^2 \to \infty, n \to \infty$.

28. Випадкові величини $(\xi_k, k \geq 1)$ незалежні та рівномірно розподілені: $\xi_k \simeq U(-1,1)$, послідовність $n_k \in \mathbb{N}$, а $S_n = \sum_{k \leq n} (\xi_k)^{n_k}$. Довести, що збіжність $(S_n - \mathbf{E}S_n)/\sqrt{\mathbf{D}S_n} \to^W \zeta \simeq N(0,1), n \to \infty$, має місце тоді і тільки тоді, коли $\sum_{k \geq 1} 1/n_k = \infty$.

29. Випадкові величини $(\xi_k, k \geq 1)$ незалежні та $\mathbf{P}(\xi_k = \pm 1/\sqrt{k}) = 1/2$. Довести, що після відповідного нормування послідовність $X_n = \prod_{k=1}^n (1 + \xi_k)^{1/\ln n}$ слабко збігається та знайти границю.

30. Випадкові величини $(\xi_k, k \geq 1)$ незалежні та $\xi_k \simeq \mathrm{Exp}(1)$, $\widehat{\mu}_n = (\xi_1 + \ldots + \xi_n)/n$. Довести, що $\sqrt{n}(\widehat{\mu}_n - 1)/\sqrt{\widehat{\mu}_n} \to^W \zeta \simeq N(0,1)$.

31. Випадкові величини $(\xi_k, k \geq 1)$ незалежні та мають щільність $f(x) = 2^{-1} \exp(-|x|), x \in \mathbb{R}$. Довести збіжність

$$\sqrt{2n} \left(\sum_{k=1}^n \xi_k\right) \left(\sum_{k=1}^n \xi_k^2\right)^{-1} \to^W \zeta \simeq N(0,1), n \to \infty.$$

32. Випадкові величини $(\xi_k, k \geq 1)$ незалежні та рівномірно розподілені: $\xi_k \simeq U(-1,1)$. Довести, що при $n \to \infty$ величини

$$\eta_n = \sqrt{n/3} \left(\sum_{k=1}^n \xi_k\right) / \left(\sum_{k=1}^n (\xi_k^2 + \xi_k^3)\right)$$

слабко збігаються до стандартної нормальної величини.

33. Випадкові величини $(\xi_k, k \geq 1)$ незалежні та рівномірно розподілені: $\xi_k \simeq U(-k,k)$, а $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Довести, що $n^{-3/2} S_n \to^W \xi \simeq N(0, 1/3), n \to \infty$.

34. Випадкові величини $(\xi_k, k \geq 1)$ незалежні та мають неперервну функцію розподілу $F(x)$, а $\mu_n = \max_{k \leq n} \xi_k$. Знайти граничний розподіл величин $n(1 - F(\mu_n))$ при $n \to \infty$.

35. Випадкові величини $(\xi_k, k \geq 1)$ незалежні та рівномірно розподілені: $\xi_k \simeq U(a_k - 1, a_k + 1)$, причому ряд $\sum a_k$ абсолютно збігається. Знайти границю $\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}((\xi_1 + \ldots + \xi_n)/\sqrt{n} \in [0,1])$.

36. Випадкова величина ζ_n мають розподіл Пуассона з параметром n. Знайти слабку границю послідовності $(\zeta_n - n)/\sqrt{n}$ при $n \to \infty$.

37. При типографському наборі книги існує ймовірність $p = 0.0001$ того, що будь-яка буква буде набрана неправильно. Після набору гранки прочитує коректор, який виявляє кожну друкарську

помилку з імовірністю $q = 0.9$. Після коректора автор знаходить кожну з друкарських помилок, що залишилися, з імовірністю $r = 0.5$. Знайти ймовірність того, що в книзі з 100 тисячами друкарських знаків залишиться після цього не більше 10 непомічених помилок.

1.24. Процеси Пуассона та Вінера

Література: [1, с.299–318], [2,с.301-307,313-321]. Сам: 1-7.

1. Довести, що процес Пуассона є стохастично неперервним, тобто $\nu(t+h) \to^{\mathbf{P}} \nu(t)$, $h \to 0$.

2. Нехай $f(n,t) = \mathbf{E}g(n+\nu_t)$. Довести, що

$$(\partial/\partial t)f(n,t) = \lambda g(n+1) - \lambda g(n), n \geq 0.$$

3. Довести посилений закон великих чисел: $\nu(t)/t \to^{\mathbf{P}1} \lambda$ при $t \to \infty$.

4. Для довільних $0 < t_1 < \ldots < t_n$ знайти сумісну щільність величин $(w(t_1), \ldots, w(t_n))$.

5. Довести, що вінерівськими є такі перетворення вінерівського процесу $w(t)$: (а) $-w(t), t \geq 0$, (б) $tw(1/t), t > 0$, $w(0) \equiv 0$, (в) $w(t+c) - w(c), t \geq 0$, (г) $w(c) - w(c-t)$, $0 \leq t \leq c$, (д) $c^{-1}w(c^2 t)$.

6. Нехай $t_{nk} = k2^{-n}$. Довести, що випадкові величини

$$\zeta_{nk} \equiv w(t_{n,2k-1}) - (w(t_{n-1,k-1}) + w(t_{n-1,k}))/2, \quad n, k \geq 1,$$

$\zeta_{0k} \equiv w(t_{0k}) - w(t_{0,k-1})$, є незалежними у сукупності з нормальним розподілом. Обчислити значення $w(t_{nk})$ через ці величини.

7. Знайти розподіл величин: (а) $w(t) + w(s), s < t$; (б) $\int_0^1 w(s)ds$.

8. Нехай $(\tau_n, n \geq 1)$ – стохастичний потік для процесу Пуассона з параметром λ, а $(\delta_n, n \geq 1)$ – незалежна від нього послідовність незалежних величин таких, що $\mathbf{P}(\delta_n = 1) = p = 1 - \mathbf{P}(\delta_n = 0)$. Довести, що послідовність $(\delta_n \tau_n, n \geq 1)$ після усунення нульових значень є стохастичним потоком для процесу Пуассона з параметром λp.

9. Нехай $(\tau_n^{(i)}, n \geq 1), i = 1, 2,$ – стохастичні потоки для незалежних процесів Пуассона з параметрами λ_i. Довести, що об'єднана

послідовність $(\{\tau_n^{(1)}, n \geq 1\} \cup \{\tau_n^{(2)}, n \geq 1\})$ після впорядкування за зростанням є стохастичним потоком для процесу Пуассона з параметром $\lambda_1 + \lambda_2$.

10. Знайти середнє та коваріаційну функцію випадкового процесу $((-1)^{\nu_t}, t \geq 0)$. Чи є цей процес марковським ?

11. Нехай $\nu_k(t), t \geq 0, k = 1, 2$, пара незалежних процесів Пуассона з параметрами λ_k. Довести, що ймовірність перетину двовимірним випадковим процесом $(\nu_1(t), \nu_2(t))$ прямої $\{(i,j) : i + j = n\}$ саме у точці (i, j) дорівнює $C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$, де $p = \lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2)$.

12. Випадкові величини (ξ_n) незалежні однаково розподілені з функцією розподілу F і характеристичною функцією φ, та не залежні з процесом Пуассона $(\nu(t), t \geq 0)$, що має інтенсивність λ. Випадковий процес $\eta(t) = \sum_{k=1}^{\nu(t)} \xi_n$ називається складним процесом Пуассона. (а) Довести, що $(\eta(t), t \geq 0)$ - процес з незалежними та однорідними приростами. (б) Обчислити характеристичну функцію $\varphi_{\eta(t)}(s) = \exp(\lambda t(\varphi(s) - 1))$. (в) Обчислити $\mathbf{E}\eta(t), \mathbf{D}\eta(t)$. (г) Знайти функцію розподілу

$$\mathbf{P}(\eta(t) < x) = \sum_{n \geq 0} \exp(-\lambda t)(\lambda t)^n F^{*n}(x)/n!,$$

де F^{*n} - n-кратна згортка функції розподілу F. (д) Довести, що

$$\eta(t)/t \to^{\mathbf{P}1} \lambda \mathbf{E}\xi_1, t \to \infty,$$

якщо ξ_1 - інтегровна. (е) Якщо ξ_1 інтегровна у квадраті, то

$$(\eta(t) - \lambda t \mathbf{E}\xi_1)/\sqrt{\lambda t \mathbf{D}\xi_1} \to^{W} \zeta \simeq N(0,1), t \to \infty.$$

13. Для складного процесу Пуассона $(\eta(t), t \geq 0)$ довести, що (а) процес $\eta(t, B) = \sum_{k=1}^{\nu(t)} \xi_n 1\!\!\mathrm{I}_{\xi_n \in B}$ є складним процесом Пуассона для $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. (б) процеси $(\eta(t, B_1), t \geq 0)$ та $(\eta(t, B_2), t \geq 0)$ незалежні при $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ і $B_1 \cap B_2 = \varnothing$.

14. Нехай $(\nu(t), t \geq 0)$, - процес Пуассона, що має інтенсивність λ, а $\alpha > 0$. Визначимо процес $\zeta(t) = \nu(t) - \alpha t$. Довести, що $\sup_{t \geq 0} \zeta(t) < \infty$ м.н. тоді і тільки тоді, коли $\alpha > \lambda$.

15. Вінерівський процес $(w(t), t \geq 0)$, не залежить від показникової з параметром λ випадкової величини τ. Знайти характеристичну функцію величини $w(\tau)$.

16. Випадкові величини $(\xi_{nk}, k = \overline{1,n}, n \geq 1)$ незалежні всередині кожної серії, набувають цілі невід'ємні значення, $p_{nk} = \mathbf{P}(\xi_{nk} = 1)$, $q_{nk} = \mathbf{P}(\xi_{nk} > 1)$. Довести, що за умов

$$(1)\ \sum_{k=1}^n p_{nk} \to \lambda; \quad (2)\ \max_{k \leq n} p_{nk} \to 0; \quad (3)\ \sum_{k=1}^n q_{nk} \to 0$$

при $n \to \infty$ має місце збіжність $\sum_{k=1}^n \xi_{nk} \to^W \eta \simeq \Pi(\lambda)$.

17. При побудові таблиць смертності використовують такі припущення: особа у віці t вмирає на інтервалі $[t, t + dt)$ з імовірністю $\lambda(t)dt + o(dt)$, при $dt \to 0, t \geq 0$. Знайти імовірність виживання на інтервалі $[0, t)$.

18. Молекула, що мала у момент $t = 0$ зіткнення з іншою молекулою, не має інших зіткнень до моменту t та матиме зіткнення в проміжок часу між t і $t + dt$ з імовірністю $\lambda dt + o(dt)$ при $dt \to 0$. Знайти вірогідність того, що час вільного пробігу (тобто час між двома сусідніми зіткненнями) буде більше за t.

19. Для вінерівського процесу $w(t)$ знайти коваріаційну функцію процесу Орнштейна-Уленбека $\xi(t) = \exp(-bt)w(a\exp(2bt))$.

20. Нехай $(\nu(t), t \geq 0)$ - неоднорідний за часом процес Пуассона, тобто процес з незалежними приростами і одиничними стрибками, що починається у 0 та

$$\mathbf{P}(\nu[t, t+h) = 1) = \lambda(t)h + o(h), \quad \mathbf{P}(\nu[t, t+h) > 1) = o(h), \quad h \to 0,$$

з деякою невід'ємною функцією інтенсивності $\lambda(t)$. Довести, що

$$\mathbf{P}(\nu(t) = 0) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(u)du\right),$$

$$\mathbf{P}(\nu(t) = n) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(u)du\right)\left(\int_0^t \lambda(u)du\right)^n / n!$$

21. Нехай $(\nu(t), t \geq 0)$ процес Пуассона з інтенсивністю λ, а неперервна функція $\lambda(t)$ така, що $0 \leq \lambda(t) \leq \lambda$ для всіх t. Розглянемо стохастичний потік, що включає моменти (τ_n) n-их стрибків процесу ν незалежно від усіх інших виборів з імовірністю $\lambda(\tau_n)/\lambda$, та виключає цей момент з імовірністю, що доповнює.. Довести, що цей потік відповідає неоднорідному процесу Пуассона з функцією інтенсивності $\lambda(t)$.

22. Нехай $(\nu(t), t \geq 0)$ процес Пуассона з інтенсивністю 1, а $\lambda(t)$ неперервна функція. Довести, що процес $\nu(\Lambda_t)$ є неоднорідним процесом Пуассона з функцією інтенсивності $\lambda(t)$, де $\Lambda_t = \int_0^t \lambda(s)ds$.

23. Процес Пуассона $(\nu(t))$ має інтенсивність λ та не залежить від послідовності (ξ_k) незалежних однаково розподілених величин з середнім μ та дисперсією σ^2, а $\zeta(t) = \sum_{k=1}^{\nu(t)} \xi_k$. Знайти: (а) $\operatorname{cov}(\nu(t), \zeta(t))$, (б) $\operatorname{cov}(\zeta(t), \zeta(t+s))$.

1.25. Вказівки та відповіді

1.1. Простір елементарних подій дорівнює $\Omega = \{0,1\}^3$, $A = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, $B = \{(1,1,1),(1,1,0),(0,1,1),(0,1,0)\}$, $A \cap B = \{(0,1,0)\}$- один раз з'явиться аверс, і при другому підкиданні з'явиться аверс означає, що аверс з'явиться лише при другому підкиданні. Інші події описуються аналогічно.

1.2. $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2$, $A = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$, $B = \{(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6),(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6)\}$.

1.3. $\Omega = \mathbb{N} = \{1,2,\ldots\}$, причому $p_k = (1/2)^k$, $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, $B = \{2n |\ n \in \mathbb{N}\}$.

1.4. $\Omega = [0,1]^2$, кожній події відповідає певна фігура на площині. Наприклад, події A відповідає квадрат $[0,a]^2, a \in [0,1]$, події B - перетин кола радіусу b з центром в початку координат і прямокутника $[0,1]^2$.

1.5. Відбулася лише подія A - $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$, тут $\overline{B} = \Omega \setminus B$, лише A та B: $A \cap B \cap \overline{C}$, відбулися всі три: $A \cap B \cap C$, хоча б одна $A \cup B \cup C$, рівно одна $(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$.

1.6. $A \cup B \cup C = A \cup (B \setminus A) \cup (C \setminus (A \cup B))$.

1.7. $\{\{1,2\},\{1,2,3\},\{4,5,6\},\{3,4,5,6\},\{1,2,4,5,6\},\{3\},\{1,2,3,4,5,6\},\emptyset\}$.

1.8. Найменша алгебра - множина всіх скінчених підмножин Ω та їх доповнень, сигма-алгебра - множина всіх підмножин Ω.

1.9. Зобразіть події A, та B - графічно, як множину точок з $[-10, 10]$, які задовольняють умовам задачі.

1.10. Зауважимо, що експеримент триватиме $i+1$ підкидання, якщо i разів підряд монета змінювала сторону. Тому простором елементарних подій можна вибрати множину всіх пар $(0, i)$, $(1, i)$, $i \in \mathbb{N}$, і пара $(0, i)$ відповідає експерименту що почався з нуля і тривав i підкидання, тобто на i-му підкиданні випало теж що і на $(i-1)$-му (в залежності від парності i це буде або 0 або 1). $p_{0i} = p_{1i} = 1/2^{i+1}$.

1.11. Скористайтесь геометричним зображенням вказаних подій.

1.12. (а) $\cap\overline{A_k}$, (б) $\cup A_k$; (в) $\cup_i(A_i \cap_{j\neq i} \overline{A_j})$; (г) об'єднання множин з п. (а), (в), (е); (д). Позначимо через B_k - подію, що полягає в тому, що рівно k деталей не мають дефектів. Тоді шукана подія це $\cup_{k\geq 2} B_k = \cup_{i\neq j} \overline{A}_i \cap \overline{A}_j$, отже $B_k = \cup_{i_1\neq\ldots\neq i_k} \cap_{j=1}^k \overline{A_{i_j}} \cap \cap_{l\neq i_j, \forall j} A_l$; (е) див. (д) $\cup_{i\neq j} A_i \cap A_j \cap_{l\neq i, l\neq j} \overline{A_l}$.

1.13. Покажемо, що даному класу належать доповнення, дійсно: $\overline{A} = \Omega \setminus A$. Далі покажемо, що об'єднання теж належать даному класу. З того, що $\overline{A} \cap \overline{B} = (\Omega \setminus A) \setminus B$, випливає, що $A \cup B = \Omega \setminus ((\Omega \setminus A) \setminus B)$.

1.14. (а) $A \setminus B = A \cap \overline{B} = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{A}) = A \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = A \cap \overline{A \cap B} = A \setminus (A \cap B)$. (б) Скористайтесь п. (а), (в) $A\Delta(B\Delta C) =$
$(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap C) =$
$A \cap ((\overline{B} \cup \overline{C}) \cup (B \cap C)) \cup \overline{A} \cap ((B \cap \overline{C}) \cup (\overline{B} \cap C)) =$
$A \cap ((\overline{B} \cup C) \cap (\overline{C} \cup B)) \cap \overline{A} \cap (B\Delta C) = (A \cap \overline{B\Delta C}) \cup (\overline{A} \cap (B\Delta C)) = A\Delta(B\Delta C)$.

1.15. Доведіть, що мінімальна алгебра породжена основними подіями співпадає з 2^Ω. Обчисліть скільки існує різних об'єднань основних подій.

1.16. (а) $\underline{\lim} A_n = (-\infty, \underline{\lim} a_n), \overline{\lim} A_n = (-\infty, \overline{\lim} a_n)$;
(б) $\underline{\lim} A_n = A \cap B$; та $\overline{\lim} A_n = A \cup B$; (в) та (г) $\underline{\lim} A_n = \overline{\lim} A_n = A$.

1.17. $\Omega = \{1, 2, \ldots\}$, $p_k = (5/6)^{k-1} \cdot 1/6$, $A = \{1, 2, 3\}$.

1.18. Для того щоб останні два рази випала 1, необхідно, щоб послідовність підкидань була або 11, або закінчувалась 011. Тому в даному випадку простір елементарних подій буде таким же як і в

1.3, але з іншими ймовірностями.

1.19. Доведіть дане твердження за індукцією, скориставшись наступними міркуваннями: $A \cup B = A \cup (B \cap A \cup B \cap \overline{A}) = A \cup (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup (\overline{A} \cap B)$, де остання рівність виконана в силу того, що $A \cap B \subset A$.

1.20. Помітимо, що множина всіх злічених та скінчених об'єднань утворює сигма-кільце, в силу того, що множини неперетинні. Ліва частина рівна перетину всіх сигма-кілець, що містять набір $\{H_n, n \geq 1\}$, а отже є підмножиною правої. Далі, кожне злічене, чи скінчене об'єднання міститься в будь-якому сигма-кільці, що містить $\{H_n,\ n \geq 1\}$, а отже права множина є підмножиною лівої.

1.21. Помітимо, що $F(\omega)$ приймає не більш як 2^n різних значень, причому кожному значенню відповідає деяка послідовність 0 та 1 (що передані в якості аргументів). Тоді кожній такій послідовності поставимо у відповідність множину B_k що рівна перетину всіх A_i, та $\overline{A_j}$, де i-пробігає множину індексів, що відповідають одиницям, а j -нулям (отримаємо множини такого типу як в задачі 1.15). Дані множини очевидно попарно не перетинаються і кожна комбінація аргументів відповідає одній і лише одній множині B_k. В якості c_k залишилось покласти значення функції f на даній послідовності нулів та одиниць.

1.22. Перетин класу множин містить ті множини, що одночасно належать кожному класу.

1.23. $\{\varnothing, \Omega, A, \overline{A}\}$.

1.24. Довести, що $\alpha[K] = \alpha[\cap_{i=1}^{n} A_i^{\nu_i}, A_i \in K, n \geq 1, \nu_i \in \{0, 1\}]$, де $A^0 = A, A^1 = \overline{A}$.

1.25. Врахувати, що $K \subset \alpha[K]$ та $\alpha[K] \subset \sigma[K]$.

1.26. За означенням $\overline{\lim}_{n\to\infty} 1\!\!\mathrm{I}_{A_n} = 1\!\!\mathrm{I}_{\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n}$.

1.27. Якщо $\underline{\lim} A_n = \varnothing$, то C_n є сталою починаючи з деякого номера.

1.28. Породжена алгебра складається з множин вигляду $\cup_{k\geq 1}(A_k \cap B_k)$, де $(A_k) \subset \mathfrak{A}_2, (B_k) \subset \mathfrak{A}_k$ - довільні повні групи подій.

2.1. Покажіть, що вказана система множин є сигма-алгеброю, та що вона міститься в кожній сигма-алгебрі що містить дане об'єднання.

2.2. $1 = \sum_{k=1}^{n} kp = pn(n+1)/2$, звідки $p = \frac{2}{n(n+1)}$. Нехай $mq \le n < (m+1)q$. Тоді ймовірність того, що з'явиться число кратне q, рівна $p\sum_{k=1}^{m}(kq) = pqm(m+1)/2 = \frac{pqm(m+1)}{n(n+1)}$.

2.3. Елементарними подіями можуть бути довільні бінарні вектори.

2.4. Скористайтесь формулою:

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B).$$

2.5. (а) Обчислити $\mathbf{P}(A\Delta B) = \mathbf{P}(A \cup B) - \mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - 2\mathbf{P}(A \cap B)$. (б) Покажіть, що для довільних множин A, B, C має місце вкладення $A\Delta B \subset (A\Delta C) \cup (B\Delta C)$. (в) Нехай $x \in (\cup A_i)\Delta(\cup B_i)$, припустимо $x \in \cup A_i$, та $x \notin \cup B_i$. Тоді існує таке k, що $x \in A_k$. В той же час для кожного i, $x \notin B_i$, а отже $x \notin B_k$, тому $x \in A_k \Delta B_k$. Аналогічно розглядається випадок коли $x \in \cup B_i$. Отже ми довели вкладення множин: $(\cup A_i)\Delta(\cup B_i) \subset \cup(A_i \Delta B_i)$. Звідси, а також з напівадитивності ймовірності випливає шукане твердження.

2.6. Покажемо: $\mathbf{P}(\underline{\lim} A_n) \le \underline{\lim} \mathbf{P}(A_n) \le \overline{\lim} \mathbf{P}(A_n) \le \mathbf{P}(\overline{\lim} A_n)$, шукане твердження випливатиме з рівності першого та останнього членів цього ланцюжка нерівностей. Позначимо $B_n = \cap_{k \ge n} A_k$, тоді $B_n \uparrow \underline{\lim} A_n$, а отже за неперервністю ймовірності $\mathbf{P}(B_n) \uparrow \mathbf{P}(\underline{\lim} A_n)$. Зауважимо також, що $B_n = B_{n+1} \cap A_n \subset A_n$,

$$\mathbf{P}(\underline{\lim}\, A_n) = \lim \mathbf{P}(B_n) = \underline{\lim}\, \mathbf{P}(B_n) \le \underline{\lim}\, \mathbf{P}(A_n) \le \overline{\lim}\, \mathbf{P}(A_n).$$

Остання нерівність для верхніх границь доводиться аналогічно.

2.7. Позначимо $N_k = \overline{A_k}$, тоді

$$\mathbf{P}(\cap_{n \ge 1} A_n) \le \mathbf{P}(\Omega) - \mathbf{P}(\cup_{n \ge 1} N_n) = 1.$$

2.8. Формули додавання ймовірностей зводились би відповідно до рівностей:

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + 2\sqrt{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)},$$

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \sqrt{\mathbf{P}^2(A) + \mathbf{P}^2(B)}.$$

2.9. Той факт, що дана система множин є алгеброю, перевіряється безпосередньо. Щоб довести, що дана система не є сигма-алгеброю розгляньте множину $\mathbb{Q}$ - вона не є ні відкритою ні замкненою і не може бути представленою як перетин відкритої та замкненої множини. Дійсно, нехай $\mathbb{Q} = F \cap G$, де F – відкрита, G – замкнена. Тоді $\mathbb{Q} \subset F$, а оскільки F відкрита, то кожна його точка внутрішня. Оскільки $\mathbb{Q}$ скрізь щільна, то виходить $F = \mathbb{R}$. Аналогічно $\mathbb{Q} \subset G$, оскільки G - замкнена, то вона містить кожну граничну точку, а отже $G = \mathbb{R}$. Протиріччя.

2.10. (a) $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(\Omega \backslash \overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A} \cup \overline{B}) \geq 1 - \mathbf{P}(\overline{A}) - \mathbf{P}(\overline{B})$.

2.11. Позначимо $a = \mathbf{P}(A \backslash B), b = \mathbf{P}(B \backslash A), c = \mathbf{P}(A \cap B)$. Шукана нерівність має вигляд $(a + b + c)c \leq (a + c)(b + c)$.

2.12. $1/6, 1/2, 1/3$.

2.13. Нехай $\mathbf{P}(A) = p_1,\ \mathbf{P}(B) = p_2, \mathbf{P}(A \cap B) = p_{12}$. Тоді шукані ймовірності рівні: $p_1 + p_2 - p_{12}$, $1 - p_{12}$, $1 - p_1 + p_{12}$, $p_2 - p_{12}$, $1 - p_1 - p_2 + p_{12}$, $1 - p_{12}$.

2.14. Побудуйте такі ймовірнісні простори в яких кожен доданок відповідатиме деякій події. Наприклад для першої суми це може бути ймовірнісний простір, що відповідає підкиданні монети з ймовірністю успіху $1 - q$ до першого успіху.

2.15. Див. 2.2.

2.16. Скористайтесь наступними формулами:
$\mathbf{P}(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A \cap C) + \mathbf{P}(A \cap B \cap C)$,
$\mathbf{P}(A \cap B \cap \overline{C}) = \mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A \cap B \cap C)$.

2.17. Див. 2.10.

2.18. Події під знаком імовірностей утворюють повну групу. Тому достатньо застосувати нерівність Коші.

2.19. Позначимо $a = \mathbf{P}(A \backslash B)$, $b = \mathbf{P}(B \backslash A)$, $c = \mathbf{P}(A \cap B)$. Тоді $a + b + c \leq 1$, $ab \leq a(1 - a) \leq 1/4$, $c(1 - a - b - c) \leq 1/4$. Шукана нерівність має вигляд $|-(a + c)(b + c)| \leq 1/4$, або $|-ab + c(1 - a - b - c)| \leq 1/4$, як показано вище.

2.20. Застосуйте формулу включення-виключення та означення числа сполучень.

2.21. $1/3$.

2.22. За припущення рівної сили гравців $(2/5, 2/5, 1/5)$.

2.23. $2/3$.

2.24. Використати включення $A\Delta C \subset (A\Delta B) \cup (B\Delta C)$.

2.25. Розглянемо величину $\nu = \sum_{j=1}^{n} 1\!\!1_{A_j} \in \mathbb{Z}_+$. За нерівністю Коші $(\mathbf{E}\nu)^2 = (\mathbf{E}\nu 1\!\!1_{\nu\geq 1})^2 \leq (\mathbf{E}\nu^2)(\mathbf{E}1\!\!1^2_{\nu\geq 1}) = (\mathbf{E}\nu^2)\mathbf{P}(\nu \geq 1)$. Оскільки $\{\nu > 0\} = \cup_{j=1}^{n} A_j$,обчисленням $\mathbf{E}\nu$ та $\mathbf{E}\nu^2$ доводимо шукану нерівність.

2.26. Сума імовірностей атомів не перевищує 1 внаслідок м.н. неперетинності, а не-атомарні події можна необмежено "подрібнювати".

2.27. Використати твердження 2.26.

2.28. Для $x \in (0,1)$ побудувати шляхом включення-виключення (збіжний) ряд $\sum_{n:\omega_n\in A} p_n$, з частинними сумами, що нескінченно часто більші та менші за x.

2.29. При перевірці адитивності врахувати, що дві нескінченні множини з даної сигма-алгебри не є неперетинними. Однак об'єднання скінчених множин може бути нескінченним.

2.30. Перевірте включення для точок $x \in \cup A_j, y \notin \cup B_i$.

2 31. Ряд з імовірностей A_n збігається.

3.1. $49, 42$.

3.2. 6^3, $6^3 - 5^3$, 36.

3.3. (а) $C_{52}^{10} - C_{48}^{10}$; (б) $4C_{48}^{9}$; (в) $C_{52}^{10} - C_{48}^{10} - 4C_{48}^{9}$; (г) $C_4^2 C_{48}^{8}$.

3.4. $(n!)^2$.

3.5. $6^{12} - C_6^1 5^{12} + C_6^2 4^{12} - C_6^3 3^{12} + C_6^4 2^{12} - 6$.

3.6. (а) та (б) $(9/10)^k$; (в) $(8/10)^k$; (г) $2(9/10)^k - (8/10)^k$.

3.7. $1 - C_{n-m}^k / C_n^k$.

3.8. 3^n.

3.9. Див. 4.9 (б)

3.10. Порахуйте, скільки серед чисел $\{1, \ldots, n\}$ є чисел кратних 6, кратних 2 але не кратних 6, кратних 3 але не кратних 6 та всіх інших.

3.11. $C^a_{a+b+c}C^b_{b+c}$.

3.12. 1-повтор, $\frac{3\cdot 10\cdot 9}{10^3}$, 0-повторів: $\frac{10\cdot 9\cdot 8}{10^3}$.

3.13. Ймовірність повного виграшу: ${C^6_{49}}^{-1}$, ймовірність вгадати k номерів $k\in\{3,4,5,6\}$: $C^k_6 C^{6-k}_{43}/C^6_{49}$.

3.14. Нехай m таке число, що $mp \le n < mp+1$. Тоді серед чисел $\{1,\dots,n\}$ є рівно m кратних p. Тоді (а) ймовірність того, що кожне з k чисел кратне m рівна C^k_m/C^k_n. (б) Ймовірність того, що серед k чисел кожне кратне або p або q: застосуйте формулу для ймовірності об'єднання. (в) Ймовірність того, що всі k чисел кратні p: $1 - C^k_{n-m}/C^k_n$.

3.15. Оскільки кості (i,j) та (j,i) - однакові, то шукана кількість дорівнює $n(n+1)/2$.

3.16. Припустимо предмети різні (бо інакше спосіб лише один). Тоді кількість способів: $C^n_{3n}C^n_{2n}$.

3.17. $C^2_4 C^{24}_{48}$.

3.18. C^4_9, C^{n-m+1}_n.

3.19. C^{m-1}_{n+m-1}, C^{m-1}_{n-1}. Покажіть, що в першому випадку кожній комбінації відповідає послідовність з нулів та одиниць довжини $n+m-1$ з $m-1$ одиницею. (В цьому випадку k-та дитина отримає кількість подарунків, рівна кількості нулів між $k-1$ та k-тою одиницею, остання отримає кількість подарунків рівну кількості нулів після останньої одиниці). В другому випадку кожній комбінації при якій кожна дитина отримає хоча б один подарунок відповідає розміщення $m-1$ одиниці між n нулями. Всього таких позицій $n-1$.

3.20. (а) $6!/6^6$, (б) обчисліть ймовірність доповнення, (в) $6^{-6}C^3_6\left(3^6 - 3\cdot 2^6 + 3\cdot 1^6 - 0\right)$.

3.21. Частинна похідна визнається перестановкою з повтореннями аргументів.

3.22. $(n-2)!$

3.23. Нехай $(n_i, i=\overline{1,3})$ - склад предметів для першої особи. Кількість розподілів дорівнює кількості трійок таких, що $\sum_{i=1}^3 = 6n$ та $0\le n_i \le 2n, i=\overline{1,3}$. заміною $k_i = n_1 - n$ зводимо для числа розв'язків системи $n_3 = -(n_1+n_2)$, $|n_i|\le n$. Перебором пар (n_1,n_2)

знаходимо відповідь $3n^2+3n+1$.

3.24. C_{N+n-1}^{n-1}, C_{N-1}^{n-1}, див. задачу 3.19.

3.25. $C_{2n-k+1}^{n-1}2^{-2n+k}$.

3.26. (а) $1-\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k(n-k)! = 1-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k/k!$; (б) $C_n^m\sum_{k=0}^{n-m}(-1)^k/k!$

3.27. $1-1/e$.

3.28. $1/365^3$.

4.1. (а) $\frac{12\cdot 11\ldots 3}{12^{10}}$, (б) $12^{-30}C_{12}^6C_{30}^3C_{27}^3C_{24}^3C_{21}^3C_{18}^3C_{15}^3C_{12}^2\ldots C_4^2$.

4.2. Поставимо A на будь-яке місце від 1 до $n-k-1$. Тоді для того, щоб між A і B було рівно k людей, B мусить стояти за $k+1$ людей від A, о отже його позиція визначена однозначно. Враховуючи, що A і B можуть стояти в різному порядку, маємо таку ймовірність: $\frac{2(n-k-1)}{n(n-1)}$. Якщо люди стоять в колі, то A може стати в будь-якому з n місць, і в попередній формулі замість $n-k-1$ слід написати n. В результаті отримаємо: $2/(n-1)$.

4.3. (а) $N^{-n}C_n^{n_1}C_{n-n_1}^{n_2}\ldots C_{n-n_1-\ldots-n_{N-1}}^{n_N}$, (б) $N^{-k}C_n^k\left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-k}$, (в) За формулою включення-виключення $N^{-n}\sum_{k=0}^{N-1}(-1)^kC_N^k(N-k)^n$.

4.4. Порахуємо кількість елементарних подій. Вони рівні кількості можливостей розбити число n на N доданків деякі з яких можливо нульові. Кількість таких розбиттів рівна $C_{N+n-1}^{N-1}=C_{N+n-1}^n$. Тоді ймовірність одного конкретного розбиття: ${C_{N+n-1}^n}^{-1}$. Обчислимо число комбінацій в яких перший лічильник реєструє рівно k частинок. В цьому випадку, решта, $N-1$ лічильник реєструє $n-k$ частинок, що рівне кількості розбиттів числа $n-k$ на $N-1$ доданок, або $C_{n-k-1+N-1}^{n-k}=C_{N+n-k-2}^{n-k}$, що співпадає з виразом в умові задачі. Обчислимо ймовірність того, що рівно m лічильників не зареєструються жодної частинки. Тоді ці m лічильників можна вибрати C_N^m способами. Щодо решти, то слід відшукати розбиття числа n на $N-m$ доданків, так, щоб кожен доданок був більшим одиниці, що було зроблено в задачі 3. Таким чином шукана ймовірність рівна: $\frac{C_N^mC_{n-1}^{N-m-1}}{C_{N+n-1}^n}$.

4.5. В даному випадку, в кожному лічильнику може бути 0 або 1 частинка. А отже кількість всіх можливих комбінацій рівна кількості n-елементних підмножин множини з N елементів. Зауважимо, що в даному випадку, $N > n$. Отже всього C_N^n елементарних подій. Шуканій в умові конфігурації відповідає лише одна можлива підмножина N (а саме в неї входить k, якщо $n_k = 1$), тоді ймовірність ${C_N^n}^{-1}$.

4.6. Вважаємо, що всі черевики різні. Тоді всього можливо C_{2n}^{2k} виборів. З них лише парних C_n^{2k}. (а) $2^{2k}C_n^{2k}/C_{2n}^{2k}$ (з n пар обираємо $2k$ різних, потім у кожній з цих пар - один з двох черевиків). (б) Розглянемо випадок коли вибрана лише одна комплектна пара. Цю пару можна вибрати n способами. Залишається $n-1$ пара з якої треба зробити вибірку розміром $2k-2$ в яку не повинні потрапити черевики з однієї пари. З урахуванням попереднього міркування маємо: $nC_{n-1}^{2k-2}/C_{2n}^{2k}$. (в) Для випадку, коли серед вибраних є хоча б дві пари, обчисліть ймовірність доповнення - а саме того, що немає жодної, або що є рівно одна (обчислено в (б)).

4.7. (а) $\frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32}$, (б) $6 \cdot \frac{20 \cdot 19 \cdot 15 \cdot 14}{35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32}$.

4.8. $5 \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 1/3$.

4.9. (а) $1 - \frac{C_{48}^6}{C_{52}^6}$, (б) Спочатку порахуємо, які комбінації мастей можуть бути серед 6 карт. Це може бути $(3,1,1,1)$ - три карти однієї масті, та ще три інших та різних мастей, або $(2,2,1,1)$ - по дві карти однакової масті та дві карти інших, різних мастей. Порахуємо, скільки є комбінацій для першого типу: вибираємо 4 способами першу масть, та C_{13}^3 три карти для неї, далі 13^3 способами вибираємо решту карт - отже всього $4C_{13}^3 13^3$. Для другого типу: $C_4^2 {C_{13}^2}^2 13^2$. Отже, шукана ймовірність: $\frac{4C_{13}^3 13^3 + C_4^2 {C_{13}^2}^2 13^2}{C_{52}^6}$.
(в) Порахуємо ймовірність доповнення - а саме, що всі карти мають різні назви. Тоді шукана ймовірність має вигляд: $1 - \frac{C_{13}^6 4^6}{C_{52}^6}$.

4.10. Вважаємо кулі різними: ${C_{15}^5}^{-1} 3^5$.

4.11. Оскільки пасажири різні, то див. розподіл Максвелла-Больцмана (задача 3).

4.12. Див. статистику Бозе-Ейнштейна, задача 4.

4.13. Ця задача є переформулюванням задачі 12.

4.14. Діагональний доданок має вигляд $a_{1i_1}a_{2i_2}...a_{ni_n}$, де $(i_1, \ldots, i_n)$ – перестановка номерів стовпчиків така, що $i_k \neq k$ для всіх k. Тому використайте формулу включення-виключення, як в задачі про перестановку листів.

4.15. (б) $48^{k-1}\ 4/52^k$.

4.16. Див. 20.

4.17. Вважаємо всі калоші різними: $2^n(n!)^2/(2n)! = \frac{2^n}{C_{2n}^n}$.

4.18. Див. задачу про флуктуації в грі (принцип відбиття) [18].

4.19. Див. 18.

4.20. Знайдемо ймовірність того, що новина не повернеться до того, хто її розповсюдив - позначимо його через A. Ймовірність того, що перша особа, позначимо A_1, не розповість новину A рівна $(n-1)/n$. Друга особа A_2 може або розповісти новину A_1, з ймовірністю $1/n$ - тоді процес припиниться, або ще комусь з ймовірністю $(n-2)/n$. Тоді ймовірність за k кроків має вигляд: $\frac{n-1}{n}\left(1/n + \frac{n-2}{n}\left(2/n + \frac{n-3}{n}\left(\ldots((n-1)/n+0)\right)\right)\right)$.

4.21. Якщо $n > 365$, то ймовірність 1, інакше:
$1 - 365^{-n}\prod_{j=0}^{n-1}(365-j)$.

4.22. Див. 3.

4.23. Див. 4.

4.24. Див. 5

4.25. (а) та (б) $6 \cdot 5/12 \cdot 11$; (в) $6 \cdot 6/12 \cdot 11$; (г) $6/11$.

4.26. 2 рази.

5.1. $2/3$.

5.2. В якості простору елементарних подій оберіть квадрат зі стороною 1. Тоді, якщо перше судно приходить в момент x, то для того, щоб друге його чекало, необхідно, щоб воно прийшло в проміжку $[x, x+1/24]$. Тому множина тих точок, при яких друге судно чекає першого, утворює діагональну смугу товщиною $1/24$. Аналогічно будуємо фігуру, що моделює ситуацію, коли перше судно чекає другого.

5.3. (а) Обчисліть довжину сектора кола, обмеженого прямими $x = r$ та $x = -r$. (б) Обчисліть довжину перетину одиничного круга з кругом в центрі $(1, 0)$ радіуса r.

5.4. $\mathbf{P}\{\xi < x, \eta < y\}$ - рівна площі прямокутника зі сторонами x та y. При цьому $\mathbf{P}\{\xi < x\} = x$ як площа прямокутника зі сторонами x та 1. Аналогічно для $\mathbf{P}\{\eta < y\}$.

5.5. (а) $(l - 2r)^2/l^2$; (б) $1 - 4r^2/l^2$.

5.6. (а) 1/2; (б) Побудуйте фігуру на квадраті зі стороною l: $\{(x, y) : |x - y| < x\}$.

5.7. З трьох точок, що належать кубу $[0, l]^3$ можна побудувати трикутник, якщо: $y < x + z$, та $x < y + z$, $z < x + y$.

5.8. (а) r^2/R^2, (в) Площа правильного n-кутника вписаного в коло радіуса R рівна: $(n/2)R^2 \sin(2\pi/n)$.

5.9. $4 \arcsin(r/2R)/2\pi R$.

5.10. (а) Ймовірність рівна площі фігури: $\{(x, y) \in [0, 1]^2 : x^2 \geq 4y\}$. (б) Скористайтесь теоремою Вієта.

5.11. Дана ймовірність рівна одній четвертій від площі наступної фігури: $\{(x, y) \in [0, 2]^2 : y \leq 1/x, y \leq 2x\}$

5.12. Див. 7.

5.13. Порахуємо ймовірність доповнення, а саме того, що всі точки лежать від центру на відстані більшій ніж r. Для однієї точки це буде об'єм тривимірного кільця, що обмежена сферами з радіусами r та R, поділеного на об'єм кулі радіуса R, а саме $1 - (r/R)^3$. Оскільки точки вибираються незалежно, то шукана ймовірність: $\left(1 - (r/R)^3\right)^N$.

5.14. Вважаємо, що монета крутиться навколо однієї зі своїх осей. Тому дану задачу можна змоделювати так. В якості простора елементарних подій вибираємо одиничне коло, з рівномірним розподілом точки на ньому. Якщо монета має товщину h, то точки, які сприяють падінню на ребро - це дуги, які відрізає смуга $|y| \leq h/2$ від даного кола.

5.15. $2l/(a\pi)$.

5.16. Відповідь залежить від побудови ймовірнісної моделі, і може бути рівна $1/3$, $1 - \sqrt{3}/2$ та $1/4$. Ці способи - випадковий вибір вершин на колі, чи середини хорди на даному радіусі, чи середини хорди всередині кола.

5.17. Зафіксуємо одну точку на колі, і сполучимо її з центром. Тоді друга точка визначається кутом φ утвореним даним радіусом та довільно обраним іншим. Зауважимо, що $\cos(\varphi/2) = x/r$, де x - це довжина перпендикуляра опущеного на хорду, а r - радіус кола.

5.18. $\int_0^x \int_0^y 1\!\!1_{[0,1]}(\rho \sin(\varphi)) 1\!\!1_{[0,1]}(\rho\cos(\varphi))\rho d\rho d\varphi$. У загальному вигляді див. задачу: 14.3.

5.19. Див. задачу 5.15.

5.20. l/a.

5.21. (а) 1; (б) 0; (в) 0.

6.1. (а). Див. 6.30; (б) 1/6.

6.2. (а) $\frac{n-1}{n+m-1}$; (б) $\frac{n(n-1)+m(m-1)}{(n+m)(n+m-1)}$; (в) $\frac{2nm}{(n+m)(n+m-1)}$.

6.3. (а) $\frac{5\cdot6\cdot8}{19\cdot18\cdot17}$; (б) $\frac{5\cdot6\cdot5}{19\cdot18\cdot17}$.

6.4. Розглянемо спочатку вибір з поверненням. Тоді $\mathbf{P}\{B_j \cap A_k\} = pC_{n-1}^{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k}$, $\mathbf{P}\{A_k\} = C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$, де $p = M_1/M$. Отже $\mathbf{P}\{B_j|A_k\} = \frac{C_{n-1}^{k-1}p^k(1-p)^{n-k+1}}{C_n^k p^k(1-p)^{n-k}} = k/n$.
Розглянемо тепер вибір без повернення.
$\mathbf{P}\{A_k\} = \frac{C_n^k M_1(M_1-1)...(M_1-k+1)(M-M_1)(M-M_1-1)...(M-M_1-(n-k)+1)}{M\cdot(M-1)...(M-n+1)}$,
$\mathbf{P}\{B_j \cap A_k\} = \frac{C_{n-1}^{k-1}M_1(M_1-1)...(M_1-k+1)(M-M_1)...(M-M_1-(n-k)+1)}{M\cdot(M-1)...(M-n+1)}$.
Отримаємо $\mathbf{P}\{B_j|A_k\} = C_{n-1}^{k-1}/C_n^k = k/n$.

6.5. Знайдіть таку кількість пострілів n, при якому ймовірність не влучити жодного разу буде меншою за 0.1. Для цього слід знайти найменше n при якому: $0.8^n < 0.1$.

6.6. (а) Знайдіть ймовірність того, що об'єкт не буде виявлено жодною станцією. (б) $(1-(1-p)^n)^m$.

6.7. Для першого гравця: $\sum_{k\geq0}(1-p_1)^k(1-p_2)^k p_1$, для другого гравця $(1-p_1)\sum_{k\geq0}(1-p_1)^k(1-p_2)^k p_2$.

6.8. Підрахуйте всі ω, що сприяють кожній з події, кожній комбінації, та всім трьом.

6.9. $\mathbf{P}(A) = C_3^2 2^{-3}$, $\mathbf{P}(B) = 1/2$, $\mathbf{P}(A|B) = 1/2$.

6.10. Нехай $A = \{$випала хоча б одна шістка$\}$,
$B = \{$шістка випала 2 або більше разів$\}$. Слід знайти $\mathbf{P}(B|A)$. Обчислимо: $\mathbf{P}(A) = 1 - (5/6)^{10}$, для обчислення $\mathbf{P}(B \cap A)$ скористаємося формулою: $\mathbf{P}(B \cap A) + \mathbf{P}(\overline{B} \cap A) = \mathbf{P}(A)$, і обчислимо:
$\mathbf{P}(\overline{B} \cap A) = \mathbf{P}\{$шістка випала рівно один раз$\} = 10 \cdot (1/6) \cdot (5/6)^9$.

6.11. (а) $\frac{6 \cdot 5}{12 \cdot 11}$; (б) $\frac{6 \cdot 5}{12 \cdot 11}$; (в) $\frac{6 \cdot 6}{12 \cdot 11}$; (г) $\frac{2 \cdot 6 \cdot 6}{12 \cdot 11}$.

6.12. (а) $0 = \mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A|B) < \mathbf{P}(A) < \mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$. (б) $0 < \mathbf{P}(A \cap B) < \mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A) < \mathbf{P}(A \cup B) < \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$.

6.13. Під надійністю розуміється ймовірність того, що хоча б один прилад працює. Для обчислень використайте ймовірності доповнення (того що всі не спрацювали).

6.14. p знаходиться з рівняння: $(1-p)^4 = 1/2$.

6.15. (а) $\alpha_1\alpha_2$; (б) $\beta_1 + (1-\beta_1)\beta_2$.

6.16. Нехай $B = \{$відбулось рівно дві події$\}$, тоді
$B = (A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) \cup (A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) \cup (\overline{A_1} \cup A_2 \cup A_3)$. Тоді
$\mathbf{P}(B) = p_1p_2(1-p_3) + p_1(1-p_2)p_3 + (1-p_1)p_2p_3$,
$\mathbf{P}(A_1 \cap B) = p_1(p_2(1-p_3) + (1-p_2)p_3)$.

6.17. (а) 2/5; (б) 3/11.

6.18. $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A \cap C) + \mathbf{P}(A \cap \overline{C}) = \mathbf{P}(C)\mathbf{P}(A|C) + \mathbf{P}(\overline{C})\mathbf{P}(A|\overline{C}) > \mathbf{P}(C)\mathbf{P}(B|C) + \mathbf{P}(\overline{C})\mathbf{P}(B|\overline{C}) = \mathbf{P}(B)$.

6.19. $\mathbf{P}(A|B \cap C)\mathbf{P}(C|B) + \mathbf{P}(A|B \cap \overline{C})\mathbf{P}(\overline{C}|B) =$
$\mathbf{P}(A \cap B \cap C)\mathbf{P}(B \cap C)/\mathbf{P}(B \cap C)\mathbf{P}(B) +$
$\mathbf{P}(A \cap B \cap \overline{C})\mathbf{P}(B \cap \overline{C})/\mathbf{P}(B \cap \overline{C})\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A \cap B)/\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A|B)$.

6.20. Розпишіть умовні ймовірності в правій частині за означенням. Після скорочення залишиться $\mathbf{P}(A_1 \cap \ldots A_n)$.

6.21. (а) 1/20; (б) 4/25.

6.22. (а) Так. $\mathbf{P}(A \cap \overline{B}) + \mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)$, звідки:
$\mathbf{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbf{P}(A)(1 - \mathbf{P}(B)) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(\overline{B})$.
(б) Так. Доведення аналогічно до (а).

6.23. Для першого гравця ймовірність: $1 - (5/6)^6 = 0.6651$. Для другого: $1 - \big((5/6)^{12} + 2(5/6)^{11}\big) = 0.6187$.
Для третього: $1 - \big((5/6)^{18} + 3(5/6)^{18} + C_{18}^2(1/36)(5/6)^{16}\big) = 0.5963$.
Отже ймовірності різні, і найбільша у першого гравця.

6.24. (а) $\prod_{k=1}^{n}(1-p_k)$; (б) $\sum_{k=1}^{n} p_k \prod_{j=1,\ j\neq k}^{n}(1-p_j)$; (в) сума ймовірностей з (а) і (б).

6.25. Треба знайти найменше n, при якому $1-(20/22)^n > 0.5$.

6.26. Позначимо події A, B, C. Тоді одна з ймовірностей $\mathbf{P}(A\cap B\cap \overline{C})$, $\mathbf{P}(A\cap \overline{BC})$, $\mathbf{P}(\overline{A}\cap B\cap C)$ відмінна від нуля. Не втрачаючи загальності нехай це буде $\mathbf{P}(A\cap B\cap \overline{C})$, тоді: $\mathbf{P}(A\cap B\cap \overline{C}) = \mathbf{P}(A\cap B) = p^2$, але $A\cap B\cap \overline{C} \in B\cap \overline{C}$, а отже маємо нерівність: $p^2 \le p(1-p)$, звідки маємо, що максимальне $p = 1/2$.

6.27. Задача про випадкове блукання. Зрозуміло, що п'яничка може впасти лише на непарному кроці. Обчислимо, ймовірність p_{2n+1} того, що п'яничка впаде за $2n+1$ кроків вперше: $p_{2n+1} = \frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$, $n \ge 1$, $p_1 = 1/3$. Шукана ймовірність дорівнює $1-\sum_{k\ge 0} p_{2k+1}$.

6.28. Нехай дані події A_k, та $A = \cup_{k\ge 1}A_k$. Тоді права нерівність випливає з того що : $\mathbf{P}(\cup_{k=1}^{n}A_k) \le \sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}(A_k)$. Для доведення лівої нерівності скористайтесь формулою включення-виключення та розклад експоненти в ряд Тейлора.

6.29. Ні.

6.30. Нехай $A = \{$випала принаймні одна шістка$\}$, $B = \{$всі три грані різні$\}$. Тоді $\mathbf{P}(A) = 1-(5/6)^3$, $\mathbf{P}(B\cap A) = 10/36$, $\mathbf{P}(B) = 120/6^3$.

6.31. Скористайтеся формулою:

$$\cup_{k=1}^{n}A_k = (A_1\cap \overline{A}_2\ldots \overline{A}_n)\cup_{k=2}^{n} A_k.$$

6.32. Див. 6.6.

6.33. Нехай $A = \{$хоча б k шісток$\}$, $A_k = \{$рівно k шісток$\}$, $B = \{$хоча б одна шістка$\}$. Тоді $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A)/\mathbf{P}(B)$, оскільки $A\subset B$. Тоді: $\mathbf{P}(B) = 1-(5/6)^n$, $\mathbf{P}(A) = \sum_{j\ge k}\mathbf{P}(A_j)$, $\mathbf{P}(A_k) = C_n^k 6^{-k}(5/6)^{n-k}$.

6.34. Якщо A не залежить від себе, то $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A\cap A) = \mathbf{P}^2(A)$.

6.35. Нехай Ω - скінчена множина, і $p =$card(Ω) - просте число. Нехай $A, B \in \Omega$ незалежні і card$(A) = n$, card$(B) = m$, позначимо через $q =$card$(A\cap B)$. Тоді маємо: $\mathbf{P}(A\cap B) = \frac{nm}{p^2} = \frac{q}{p}$, звідки $nm = pq$. Оскільки p просте, то одне з чисел n, m націло ділиться на p, а оскільки вони менші за p то одне з них рівне p. А отже одна з множин A, B співпадає з Ω. Тоді кожна підмножина утворює пару незалежних множин з Ω, ну і зрозуміло з $\emptyset$. Отже, кількість всіх пар незалежних множин: 2^{p+1} (включаючи пари $(\Omega, \Omega), (\emptyset, \emptyset), (\Omega, \emptyset)$).

6.36. (а) $0.95 \cdot 0.15 \cdot 0.3 + 0.05 \cdot 0.85 \cdot 0.3 + 0.05 \cdot 0.15 \cdot 0.7$;
(б) $0.95 \cdot 0.15 \cdot 0.3$ поділене на вираз з (а).

6.37. (а) Скористайтесь тим фактом, що будь-який елемент породженої алгебри можна представити у вигляді скінчених об'єднань та перетинів з базового набору множин. (б) Див. 6.22.

6.38. Позначимо випадкові події $A = \{$зроблено закупівлю$\}$, $B = \{$збирається повернутись$\}$. Тоді: $\mathbf{P}(A) = 101/220$, $\mathbf{P}(A \cap B) = 69/220$, $\mathbf{P}(\overline{A} \cap B) = 68/220$. Звідси знаходимо: $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(\overline{A} \cap B) = 137/220$. Підставивши отримані значення в формули умовних ймовірностей які необхідно порахувати, отримаємо результат.

6.39. Див. задачу 6.13.

6.40. $\min\{n : 1 - (20/22)^n > 0.5\}$.

6.41. Обчисліть $\mathbf{P}(A \cap B \cap \overline{C})$.

6.42. Ймовірність того, що для шуканої події знадобиться N випробувань, дорівнює добутку 2^{-N} на кількість різних зображень N у вигляді $N = i_1 + j_1 + ... + i_l + j_l + k$ для деяких $l \geq 0$ та натуральних $i_s < k, j_s < n$. Дані параметри задають довжини послідовних серій повторень успіхів та неуспіхів відповідно. Відповідну суму за N можна згорнути.

7.1. Застосуйте формулу повної ймовірності для повної групи подій $A_i = \{$було обрано i-ту кулю$\}$.

7.2. Застосуйте формулу повної ймовірності для повної групи подій $A_i = \{$спочатку було обрано і білих куль$\}$

7.3. $\sum_{k \geq n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} C_k^n p^n (1-p)^{k-n}$.

7.4. Розглянемо події:
$A_1 = \{$спочатку в урні була біла кулька$\}$,
$A_2 = \{$спочатку в урні була чорна кулька$\}$,

$B = \{$з урни спочатку вибрали білу кульку$\}$.
Тоді за формулою Байєса шукана ймовірність має вигляд: $\mathbf{P}\{A_1|B\} = \mathbf{P}\{B|A_1\}\mathbf{P}\{A_1\}/\mathbf{P}\{B\}$. Обчислимо ймовірність B. За формулою повної ймовірності:
$\mathbf{P}\{B\} = \mathbf{P}\{B|A_1\}\mathbf{P}\{A_1\} + \mathbf{P}\{B|A_2\}\mathbf{P}\{A_2\} = 1 \cdot 1/2 + 1/2 \cdot 1/2 = 3/4$.
Тоді: $\mathbf{P}\{A_1|B\} = \frac{1/2}{3/4} = 2/3$.

7.5. Розглянемо події: $A_i = \{$не влучив і-тий стрілець$\}$,
$B = \{$відбулося 2 влучення$\}$. Скористаємося формулою Баєса:

$$\mathbf{P}\{A_3|B\} = \frac{\mathbf{P}\{B|A_3\}\mathbf{P}\{A_3\}}{\mathbf{P}\{B|A_1\}\mathbf{P}\{A_1\} + \mathbf{P}\{B|A_2\}\mathbf{P}\{A_2\} + \mathbf{P}\{P|A_3\}\mathbf{P}\{A_3\}} =$$
$$\frac{4/5 \cdot 3/4 \cdot 1/3}{3/4 \cdot 2/3 \cdot 1/5 + 4/5 \cdot 2/3 \cdot 1/4 + 4/5 \cdot 3/4 \cdot 1/3} = \frac{12}{6+8+12} = 6/13.$$

7.6. Скористайтеся формулою Байєса з повною групою подій $H = \{A_i \cap B, i = \overline{1..3}, \overline{B}\}$, де $A_i = \{$влучив i-тий стрілець$\}$, та $B = \{$відбулося лише одне попадання$\}$.

7.7. Позначимо: $A_i = \{$A відбулася i разів$\}$, тоді: $\mathbf{P}\{A_0|B\} = 0$, $\mathbf{P}\{A_1|B\} = \frac{\mathbf{P}\{B|A_1\}\mathbf{P}\{A_1\}}{\sum_{k=1}^{3}\mathbf{P}\{B|A_k\}\mathbf{P}\{A_k\}} = \frac{0.1 \cdot C_3^1 \cdot 0.2 \cdot 0.8^2}{0.1 \cdot C_3^1 \cdot 0.2 \cdot 0.8^2 + 0.3 \cdot C_3^2 \cdot 0.2^2 \cdot 0.8 + 0.7 \cdot C_3^3 \cdot 0.2^3}$ $= 0.528$. Інші ймовірності обчислюються аналогічно.

7.8. $\sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{(n+1)^2}$.

7.9. $\frac{m_1 n_2 + 2m_1 m_2 + n_1 m_2}{2(m_1+n_1)(m_2+n_2)}$.

7.10. Див. задачу 7.3.

7.11. Нехай гравець витягає n куль з першої урни та $20 - n$ з другої. Тоді ймовірність не витягти мічену кулю: $(9/10)^n 2/3 + (9/10)^{20-n} 1/3$. Обчисліть таке n, при якому заданий вираз буде найменшим.

7.12. Нехай $A_1 = \{$було вибрану урну з 5 білими кулями$\}$,
$A_2 = \{$було обрано урну з 2 білими кулями$\}$, $B = \{$було обрано білу кулю$\}$. $\mathbf{P}\{A_1|B\} = \frac{\mathbf{P}\{B|A_1\}\mathbf{P}\{A_1\}}{\mathbf{P}\{B|A_1\}\mathbf{P}\{A_1\} + \mathbf{P}\{B|A_2\}\mathbf{P}\{A_2\}} = \frac{5/6 \cdot 1/10}{5/60 + 1/2 \cdot 9/10} =$ $5/32$.

7.13. Скористайтесь формулою Байєса, з повною групою подій: $A_k = \{$першим почав стріляти k-тий стрілець$\}$.

7.14. Випробування є без повернень. Розгляньте події $A_1 =$

$\{$було загублено білу кулю$\}$, $A_2 = \{$було загублено чорну кулю$\}$, $B = \{$Було витягнуто a білих та b чорних куль$\}$. Тоді:

$$\mathbf{P}\{A_1|B\} = \frac{\left(\frac{m-1}{m-1+n}\right)^a \left(\frac{n}{m-1+n}\right)^b}{\left(\frac{m-1}{m-1+n}\right)^a \left(\frac{n}{m-1+n}\right)^b + \left(\frac{m}{m+n-1}\right)^a \left(\frac{n-1}{m+n-1}\right)^b}.$$

7.15. $1/\sum_{j=1}^{n} C_n^j (j/n)^k$.

7.16. (а) Обчисліть ймовірність того, що точка не перейде в 4 за n кроків. (б) Обчисліть границю ймовірностей з (а), при $n \to \infty$.

7.17. Однакові. Не важливо, коли брати білет.

7.18. Скористайтесь формулою повної ймовірності де в якості повної групи подій вибрані події виду:
$A_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}} = \cap_{t=1}^{n-1}\{$на t-тому кроці було вийнято білу кулю якщо $i_t = 1$ і чорну інакше$\}$, $i_t \in \{0, 1\}$. Тоді:

$$\mathbf{P}\{A_{i_1 \ldots i_{n-1}}\} = \frac{m^{i_1} k^{1-i_1}}{m+k} \prod_{t=2}^{n-1} \frac{(m + i_{t-1})^{i_t}(k + 1 - i_{t-1})^{1-i_t}}{m+k+1}$$

7.19. Скористайтесь формулою повної ймовірності, використавши той же прийом для вибору повної групи подій, що і в задачі 7.18.

7.21. Скористайтесь формулою Байєса.

7.22. Нехай $A_k = \{$В урні k білих куль$\}$, $B = \{$витягнуто білу кулю$\}$. $\mathbf{P}\{A_k|B\} = \frac{k/n}{\sum_{j=1}^{n} j/n} = \frac{2k}{n(n+1)}$. Ця ймовірність максимальна, якщо $k = n$.

7.23. Скористайтесь формулою Байєса з повною групою подій: $A_k = \{$навмання обраний стрілець належить до k-тої групи$\}$. Врахуйте, що ймовірності A_k різні.

7.24. З формули Байєса найбільш імовірна одна поява.

7.25. Визначимо повну групу подій
$A_{ij} = \{$пацієнт має i-ту групу, донор має j-ту групу крові$\}$. За допомогою формули Байєса обчисліть всі апостеріорні ймовірності. Подія, ймовірність якої шукана в (а) має вигляд: $\cup_j A_{1j}$, а в (б) $\cup_i A_{i2}$.

7.26. Оберіть повну групу подій $(A_k, k = \overline{0, N})$, що співпадає з початковими припущеннями про розподіл кульок в урні. Обчислимо $\mathbf{P}\{B|A_k\} = \binom{m+n}{m}\binom{N-n-m}{k-m}/\binom{N}{k}$. Обчислення $\mathbf{P}\{B\}$ призводить до наближеної оцінки найбільш імовірного вмісту білих куль вигляду $Nm/(n+m)$.

7.27. Нехай B_n^m - подія, що полягає в тому, що при n незалежних випробуваннях, подія B відбудеться точно m разів. Позначимо $(H_i, i = \overline{1, k})$ можливі гіпотези після проведення першої групи випробувань, де k кількість гіпотез. За формулою Байєса $\mathbf{P}(H_i \mid B_{n_1}^{m_1}) = D_1 \frac{1}{k} C_{n_1}^{m_1} p_i^{m_1} q_i^{n_1-m_1}$, де стала D_1 знаходиться з умови нормованості лівої частини як розподілу імовірностей за аргументом i. Тому $\mathbf{P}(H_i \mid B_{n_1}^{m_1}, B_{n_2}^{m_2}) = D_{12} \frac{1}{k} C_{n_1}^{m_1} C_{n_2}^{m_2} p_i^{m_1+m_2} q_i^{n_1+n_2-m_1-m_2} = \mathbf{P}(H_i \mid B_{n_1+n_2}^{m_1+m_2})$, де стала B_{12} знаходиться зі вказаної умови нормованості.

7.28. Див. 7.18.

7.29. Вибір вважаємо впорядкованим, то шукана ймовірність дорівнює $C_n^m m! m^{k-m}/n^k$.

7.30. Див. 7.4.

7.31. Нехай $A_1 = \{$втрачено білу кулю$\}$, $A_2 = \{$втрачено чорну кулю$\}$, $B = \{$витягнуто дві білих кулі$\}$. Тоді:
$\mathbf{P}\{A_1|B\} = \frac{(m-1)(m-2)}{(m+n-1)(m+n-2)} / \left(\frac{(m-1)(m-2)}{(m+n-1)(m+n-2)} + \frac{m(m-1)}{(m+n-1)(m+n-2)}\right) = \frac{m-2}{2m-2}$.

7.32. Позначимо через $A_l(t)$ подію, що полягає у додаванні в результаті l кроків t груп з k білих куль. Тоді $\mathbf{P}(A_l(s+1) \mid A_{l-1}(s)) = (n+sk)/(n+m+lk-k) = 1 - \mathbf{P}(A_l(s) \mid A_{l-1}(s))$. Далі за індукцією використати формулу для ймовірності перерізу l подій.

7.33. $1/n$.

8.1. Розподіл є біноміальним $B(3, 1/6)$,
$\mathbf{E}[\xi] = 3 \cdot 1/6 = 1/2$, $\mathbf{D}[\xi] = 3 \cdot 1/6 \cdot 5/6 = 15/36$.

8.2. ξ має геометричний розподіл з параметрами $p = 1/6$, та $q = 5/6$.

8.3. Нехай $A_i = \{i$–та урна непорожня$\}$. Тоді шукана кількість $\nu = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i}$. Оскільки $\mathbf{P}(A_i) = 1 - (n-1)^k/n^k$, то $\mathbf{E}\nu =$

$n-(n-1)^k/n^{k-1}$.

8.4. Сумісний розподіл: $p_{ij}=0$, якщо $j<i$, $p_{ij}=1/36$, якщо $j>i$, і $p_{ii}=i/36$.

8.5. η приймає значення $1,4$. $p_{-1,1}=p_{1,1}=p_{-2,4}=p_{2,4}=1/4$, решта ймовірностей рівна нулю. Залежність випливає з того, що $p_{1,1}=1/4\neq 1/8=\mathbf{P}\{\xi=1\}\mathbf{P}\{\eta=1\}$. Зауважимо, що ξ має симетричний розподіл, отже математичне сподівання всіх ξ^{2n+1} рівне нулю, а отже рівна нулю і коваріація.

8.6. Відношення послідовних імовірностей має вигляд

$$(k+1)(N-n-m+k+1)/(n-k)(m-k).$$

та є монотонною функцією k, тому достатньо розв'язати нерівність відносно k, для яких воно менше за 1.

8.7. Якщо $k<8$, $p_k=(k-1)/36$, якщо $k\in\{8,9,10,11,12\}$, $p_k=(13-k)/36$. $\mathbf{E}[\xi]=7$, $\mathbf{D}[\xi]=35/6$.

8.8. Дана величина має геометричний розподіл з параметром $p=1/2$.

8.9. ξ має біноміальний розподіл, $p_k=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$, $\mathbf{E}[\xi]=np$, $\mathbf{D}[\xi]=np(1-p)$.

8.10. $p_{kj}=1/36$, для довільних $k,j\in\{1,2,3,4,5,6\}$. Незалежність випливає з означення.

8.11. Для доведення некорельованості достатньо обчислити

$$\mathbf{E}(\xi+\eta)(\xi-\eta)=\mathbf{E}\xi^2-\mathbf{E}\eta^2=0=\mathbf{E}(\xi+\eta)\mathbf{E}(\xi-\eta),$$

оскільки величини ξ,η однаково розподілені. Для доведення залежності зауважте, що пара рівнянь $\xi+\eta=k,\ \xi-\eta=j$ однозначно визначають ξ, та η, а отже сумісні ймовірності будуть або 1/36 або 0, в залежності від того, чи потрапляють $(k+j)/2,(k-j)/2$ в множину $\{1,2,3,4,5,6\}$.

8.12. $\mathbf{E}[\xi]=\sum_{k=1}^N kC_m^k C_{N-m}^{n-k}/C_N^n=$
$\sum_{k=1}^N \frac{m!(N-m)!n!(N-n)!}{(m-k)!(k-1)!(n-k)!(N-m-n+k)!N!}=$
$\frac{nm}{N}\left(\sum_{k=1}^N \frac{(m-1)!(N-m)!(n-1)!(N-n)!}{(m-k)!(k-1)!(n-k)!(N-m-n+k)!(N-1)!}\right)=$
$\frac{nm}{N}\left(\sum_{k=1}^N C_{m-1}^{k-1}C_{N-m}^{n-k}/C_{N-1}^{n-1}\right)=\frac{nm}{N}$, оскільки вираз під дужками - це сума ймовірностей від 0 до $N-1$ гіпергеометричного розподілу

з параметрами $N-1, m-1, n-1$.

8.13. (б) і (г).

8.14. Коли $np = m/2$ для натурального m.

8.15. Див. задачу 9.16.

8.16. Див. задачу 9.21.

8.17. Розподіли ξ та η однакові. $\mathbf{P}\{\xi = 0\} = 25/36$, $\mathbf{P}\{\xi = 1\} = 10/36$, $\mathbf{P}\{\xi = 2\} = 1/36$.

8.18. Розподіл кількості підкидань до k-го успіху має вигляд $\mathbf{P}(\xi = k) = C_k^{r-1} p^r q^{n-r}, k \geq r$. Тому достатньо використати формулу для обчислення біноміальних коефіцієнтів.

8.19. $\mathrm{Cov}(\nu_1, \nu_6) = \mathbf{E}\nu_1\nu_6 - \mathbf{E}\nu_1\mathbf{E}\nu_6 = \mathbf{E}\sum_{i\neq j=1}^n 1\!\!\mathrm{I}_{\xi_i=1,\xi_j=6} - (n/6)^2 = -n/36$.

8.20. Зауважте, що $1\!\!\mathrm{I}_A^{(-1)}(\{1\}) = A$, та $1\!\!\mathrm{I}_A^{(-1)}(\{0\}) = \overline{A}$.

8.21. ξ має біноміальний розподіл з параметрами $3, 1/2$, або $p_k = C_3^k 2^{-3}$.

8.22. Розглянути включення $\omega \in A\cap B$, $\omega \in A\cup B$, $\omega \in \lim 1\!\!\mathrm{I}_{A_n}$, $\omega \in \overline{\lim} 1\!\!\mathrm{I}_{A_n}$ та їх заперечення.

8.23. $\sum_{n\geq 0} 1\!\!\mathrm{I}_{\{\xi>n\}} = \xi$.

8.24. $n = ([\lambda]-1)^+$.

9.1. η_1 набуває значень $1, 4$ з ймовірностями $1/2$ кожна. $\mathbf{E}\eta_1 = 5/2$, $\mathbf{D}\eta_1 = 9/4$. η_2 набуває значень з множини $\{e^{-it}, e^{it}, e^{-2it}, e^{2it}\}$ з ймовірностями $1/4$. $\mathbf{E}\eta_2 = (\cos(t) + \cos(2t))/2$, $\mathbf{E}\eta_2^2 = (\cos(2t) + \cos(4t))/2$.

9.2. Вважаємо що вибір робиться без повернення, а вибірка не впорядкована. Для відповідних m, n, k:
$\mathbf{P}\{\xi = k\} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)(N-n)(N-n-1)\ldots(N-n-(m-k)+1)}{N(N-1)\ldots(N-m+1)} \frac{m!}{k!(m-k)!} = C_n^k C_{N-n}^{m-k}/C_N^m$.
Знаючи розподіл, обчисліть математичне сподівання та дисперсію ξ.

9.3. $\sum_{k\geq 1} p_k q_k$.

9.4. Для $k \in \overline{1, n}$: $\mathbf{P}\{\zeta = k\} = (k-1)/n^2$. Для $k \in \overline{n+1, 2n}$: $\mathbf{P}\{\zeta = k\} = (2n-k+1)/n^2$.

9.5. Див. задачу 9.10.

9.6. Вказана кількість більша за k тоді і тільки тоді, коли серед перших k купонів відсутній один з номерів $\overline{1,n}$. Тому за формулою включення-виключення шукане середнє $n(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + ... + \frac{1}{2} + 1)$.

9.7. Скористайтеся властивістю відсутності післядії в геометричного розподілу.

9.8. $\mathbf{E}\min\{\xi,\eta\} = \sum_{k\geq 1}\mathbf{P}\{\min\{\xi,\eta\}\geq k\} =$
$\sum_{k\geq 1}\mathbf{P}\{\xi\geq k,\eta\geq k\} = \sum_{k\geq 1}\mathbf{P}\{\xi\geq k\}\mathbf{P}\{\eta\geq k\}$.

9.9 $\mathbf{P}\{\xi_1 = k|\xi_1+\xi_2 = n\} =$
$\mathbf{P}\{\xi_1 = k, \xi_2 = n-k\}/\sum_{i=1}^{n-1}\mathbf{P}\{\xi_1 = i\}\mathbf{P}\{\xi_2 = n-i\} =$
$p^2(1-p)^{n-2}/(n-1)p^2(1-p)^{n-2} = 1/(n-1)$.

9.10. Обчисліть ймовірності: $\mathbf{P}\{\zeta > t\}$, $\mathbf{P}\{\eta < t\}$.

9.11. Див. задачу 17.7.

9.12. ξ,η - незалежні геометрично розподілені випадкові величини.

9.13. $\mathbf{E}[\xi^{n+1}]/\mathbf{E}[\xi^n] = (x_1^{n+1}p_1 + \ldots x_k^{n+1}p_k)/(x_1^n p_1 + \ldots + x_k^n p_k)$. Для того, щоб отримати першу рівність поділіть чисельник і знаменник на $(\max_k x_k)^n$, для того, щоб отримати другу, винесіть $(\max_k x_k)^n$ за знак кореня.

9.14. Див. задачу 15.1.

9.15. Позначимо через ξ_k - номер, який було витягнуто під час k-того випробування. Тоді ξ_k - рівномірно розподілена на $\{1,\ldots,m\}$, а $\xi = \max\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}$. Розподіл максимума зручно знаходити через функцію розподілу: $F(t) = \mathbf{P}\{\xi < t\} = F_1^n(t)$, де
$F_1(t) = (m-[m-t])/m$, $0\leq t\leq m$ - функція розподілу ξ_1.

9.16. Подія $\{\xi = n\}$ означає, що в n випробуваннях відбувся $k-1$ успіх, і в $n+1$ теж випробуванні відбувся успіх.

9.17. $C_5^3 0.4^3 0.6^2$.

9.18. Нехай a,b,c відповідні суми, α,β,γ - ймовірності ризиків, A,B,C - страхові події. Тоді сума відшкодувань $S = a\mathbb{1}_A + b\mathbb{1}_B + c\mathbb{1}_C$. (а) Звідси $\mathbf{E}S = a\alpha + b\beta + c\gamma$, $\mathbf{D}S = a^2\alpha(1-\alpha) + b^2\beta(1-\beta) + c^2\gamma(1-\gamma)$. (б) Використати формулу повної імовірності для відшукання умовної імовірності.

9.19. Обчислимо кореляцію: $\mathbf{E}[\xi\eta] = 8$, $\mathbf{E}[\xi] = 2$, $\mathbf{E}[\eta] = 4$. Отже величин некорельовані. Помітимо, що $\mathbf{P}\{\xi = 1, \eta = 2\} = 0.2$, тоді як: $\mathbf{P}\{\xi = 1\} = 0.4 = \mathbf{P}\{\eta = 2\}$. Отже величини залежні. Для того, щоб знайти такі значення в другому рядку, які зроблять їх незалежними, запишіть систему рівнянь виду: $\mathbf{P}\{\xi = k, \eta = j\} = \mathbf{P}\{\xi = j\}\mathbf{P}\{\eta = k\}$.

9.20. Визначимо:
$A_k^l = \{$точно l різних номерів вибрані з k коробок$\}$,
$B_i^{kl} = \{$номер i присутній у виборі l різних з числа $k\}$. За формулою включення-виключення $\mathbf{P}(A_k^l) = C_n^l \mathbf{P}(B_1^{kl} \cap ... \cap B_l^{kl}) = C_n^l(1 - l(l-1)^k/n^k + C_l^2(l-2)^k/n^k + ... + (-1)^{l-1}/n^k)$. $\mathbf{E}\nu = \sum_{k\geq 1} k\mathbf{P}(\nu = k) = \sum_{k\geq 1} k\mathbf{P}(A_k^{k-1})$.

9.21. Позначимо, через η_k - випадкову величину, номер адреси написаної на k-тому листі. Тоді вектор $(\eta_k, k = \overline{1,n})$ має рівномірний розподіл на множині перестановок $\{1, \ldots, n\}$. За означенням $\xi_n = \sum_{k=1}^n 1\!\!\mathrm{I}_{\eta_k = k}$.

$\mathbf{E}\xi_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{P}\{\eta_k = k\} = n/n = 1$, $\mathbf{D}[\xi_n] = \mathbf{E}\xi_n^2 - (\mathbf{E}\xi_n)^2 =$

$2\sum_{1\leq k<j\leq n} \mathbf{P}\{\eta_k = k, \eta_j = j\} + \mathbf{E}\xi_n - (\mathbf{E}\xi_n)^2 = 1 + 1 - 1 = 1$.

9.22. Нехай $\xi \in \{x_i\}$, $\eta \in \{y_l\}$. Побудуємо матриці $(a_{in}), (b_{lm})$ такі, що $\sum_j a_{jr} x_s^j = \delta_{rs}$, $\sum_j b_{jr} y_s^j = \delta_{rs}$. Множенням на ці матриці даних рівностей отримуємо $\mathbf{P}(\xi = x_i, \eta = y_l) = \mathbf{P}(\xi = x_i)\mathbf{P}(\eta = y_l)$.

9.23. $\mathbf{D}\nu_n = \sum_{k=1}^n p_k(1 - p_k) \in (na - [na],\ na(1-a))$.

10.1. Для того, щоб перевірити, що $p(x)$ є щільністю розподілу, слід перевірити: $p(x) \geq 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$.

10.2. $F_1(t)$ рівна площі фігури $\{(x,y)|x + y < t, (x,y) \in [0,1]^2\}$, тобто $t^2/2$, якщо $t \leq 1$, або $1 - (2-t)^2/2$, якщо $t \in [1,2]$, аналогічно: $F_2(t)$ рівна площі фігури $\{(x,y)|xy < t, (x,y) \in [0,1]^2\}$. Для обчислення третьої функції розподілу зручніше порахувати $1 - F_3(t) = (1-t)^2$.

10.3. (а) $3/4$; (б) $2t/R^2$, $t \in [0,R]$; (в) $2R/3$; (г) $R^2/2 - 4R^2/9$.

10.4. (а) $(1/\pi)\mathrm{arctg}(1/\sqrt{2}) + 1/2$; (б) $1/2 + \left(\frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}(-1) + 1/2\right) = 1/2 - 1/4 + 1/2 = 3/4$; (в) $1 - \frac{2}{\pi}\mathrm{arctg}(2)$.

10.5. Оберіть геометричне означення ймовірностей для положення тріщини на колі.

10.6. $F_\xi(x) = (1-(T-x)^2/T^2 \mathbb{1}_{x\le T})\mathbb{1}_{x\ge 0}$, $f_\xi(x) = \frac{2(T-x)}{T^2}\mathbb{1}_{x\in(0,T)}$.

10.7. (а) Розглянемо кут повороту другої сторони φ, як випадкову величину. Вона буде рівномірно розподілена на відрізку $[0, 2\pi]$. Тоді довжина третьої сторони має вигляд: $2\sin(\varphi/2)$. Функція розподілу даної величини: $\frac{2}{\pi}\arcsin(t/2)$, щільність: $1/\pi\sqrt{1-(t/2)^2}$, $t \in [0, 2]$ (б) У випадку площини слід розглянути два кути φ, ψ, кожен з яких рівномірно розподілений на $[0, 2\pi]$.

10.8. Треба перевірити умови: $p(x) \ge 0, \int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$.

10.9. Для $\{\xi_4 < t\}$ розгляньте окремо випадок $t \in [0,1]$ - в цьому разі це буде площа чверті круга радіусу $\sqrt{t}$, та $t \in [1,2]$, в цьому випадку це буде площа криволінійної фігури утвореної перетином квадрату та кругу радіуса $\sqrt{t}$. Для ξ_5, скористайтеся тим, що $\{\max\{x,y\} < t\} = \{x < t\} \cap \{y < t\}$, а це є квадрат зі стороною t. Отже функція розподілу буде t^2, $t \in [0,1]$. Для ξ_6 намалюйте смугу $\{|x-y| < t\}$ при різних значеннях t, та обчисліть її площу.

10.10 (а) $\mathbf{P}\{\xi < 1\} = \int_{-\infty}^{1} p(x)dx = 1/2 + \int_0^1 e^{-2x}dx = 1 - e^{-2}/2$.
(б) $\mathbf{P}\{\xi < 3|\xi \ge 2\} = \int_2^3 e^{-2x}dx / \int_2^\infty e^{-2x}dx = \frac{e^{-4}-e^{-6}}{e^{-4}} = 1 - e^{-2}$.
(в) $\mathbf{E}[\xi] = 0$, $\mathbf{D}[\xi] = \mathbf{E}[\xi^2] = 2\int_0^\infty x^2 e^{-2x}dx = 1/2$.

10.11. (а) $\xi = \nu + \zeta$, де доданки незалежні, $\mathbf{P}(\nu = \pm 1) = 1/2$, $\zeta \simeq N(0,1)$. Тому $\mathbf{E}[\xi] = 0$, $\mathbf{D}[\xi] = 2$.

10.12. В силу симетрії досить розглянути лише кут φ між двома точками, який можна вважати рівномірно розподіленим на $[0, 2\pi]$. Тоді довжина відрізка, що сполучає ці точки змінюється від 0 до $2R$ і обчислюється аналогічно до задачі 10.7. (з тією різницею, що там рівнобедрений трикутник був зі стороною 1 а тут зі стороною R, і довжина хорди рівна $2R\sin(\varphi/2)$).

10.13. Нехай φ - кут, про який йдеться в умові. Тоді абсциса ξ точки P має довжину: $\mathrm{tg}(\varphi)$. Легко бачити, що $F_\xi(t) = \frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}(t) + 1/2$, $f_\xi(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Тобто ξ має розподіл Коші, а отже не є інтегровною.

10.14. Нехай ξ - проекція випадкової точки (або на Ox або на

xOy). Намалюйте фігуру, що відповідає події $\{\xi < t\}$, в першому випадку, це буде шматок сфери, що відрізаний площиною $x = t$, в другому шматок сфери вирізаний циліндром з основою - колом з центром в початку координат і радіусу t. Обчисліть площу поверхні такої фігури.

10.15. Нехай $(\xi_{(k)})$ - варіаційний ряд вибірки. Тоді $\mathbf{P}(\xi_{(k+1)} - \xi_{(k)} > x,\ \xi_{(k)} \in dy) = C_n^{n-k} y^{k-1}(1-x-y)^{n-k}dy$ при $0 \le y \le 1-x, 0 \le x \le 1$. Звідси інтегруванням знаходимо $\mathbf{P}(\xi_{(k+1)} - \xi_{(k)} < x) = 1-(1-x)^n$, для $x \in (0,1)$.

10.16. (a) $\Gamma^{-1}(\alpha)$.

10.17. Нехай I_k - інтервали монотонності функції g. Заміною змінної $x = g(y)$ обчисліть вираз
$\mathbf{P}(g(\xi) < a) = \sum_k \int_{I_k} 1\!\!\mathrm{I}_{g(y)<a}\ f_\xi(y)dy$.

10.18. Перевірте умови теореми про властивості функції розподілу.

10.19. Нехай D - множина значень в.в. ξ на атомі A. Тоді $D \cap [a,b]$ теж є борелівською множиною, тоді $\xi^{(-1)}(D \cap [a,b])$ - є вимірною підмножиною A. Отже її міра рівна або нулю, або $\mathbf{P}\{A\}$. Твердження випливає з довільності вибору інтервалу $[a,b]$.

10.20. $\{\omega | \xi(\omega) = c\} = \xi^{(-1)}(\{c\})$ - випадкова подія. Обернене твердження невірне, в якості прикладу оберіть $\Omega = \mathbb{R}, \mathfrak{F} = \sigma[\{\omega\}, \omega \in \Omega]$, та $\xi(\omega) = \omega$.

10.21. Для довільного $\varepsilon > 0$, знайдемо такі a, b, що $F(a) < \varepsilon/2$, $1 - F(b) < \varepsilon/2$. Тоді функція F - рівномірно неперервна на відрізку $[a,b]$. А отже для $\varepsilon/2$ знайдеться таке δ, що з того що $|x-y| < \delta$ випливає $|F(x) - F(y)| < \varepsilon/2$, $x, y \in [a,b]$. Розглянемо тепер довільні $x < y \in \mathbb{R}$, такі, що $|x-y| < \delta$. Якщо $x, y < a$, то $|F(x) - F(y)| \le F(a) \le \varepsilon/2$. Якщо $x < a, y > a$, то $|F(x) - F(y)| = F(y) - F(x) = F(y) - F(a) + F(a) - F(x) \le F(y) - F(a) + F(a) \le \varepsilon$. Аналогічним чином розглядається ситуація з $x < b < y$, та $x, y > b$.

10.22. $\mathbf{P}(\eta < g(\xi)) = \int_0^1 \int_0^1 1\!\!\mathrm{I}_{g(x)>y} dydx = 1/\sup f$,
$\mathbf{P}(\xi < a \mid \eta < g(\xi)) = \sup f\ \int_0^1 \int_0^1 1\!\!\mathrm{I}_{x<a,\ g(x)>y} dydx = \int_0^a f(y)dy$ при $a \in [0,1)$.

10.23. Неперервність функції Кантора випливає з того, що вона монотонна та її значення скрізь щільні на $[0,1]$. В той же час похідна функції Кантора рівна нулю майже скрізь на $[0,1]$ (більш точно, на $[0,1]\backslash D$, де D - множина Кантора).

10.24. Покажемо, що m не є сигма-адитивною. Якби це було так, то вона б була неперервною. Розглянемо набір множин $B_n = [0, 1/n)$. Очевидно, що множини B_n спадають до $\{0\}$, причому $m(\{0\}) = 0$. Але $m(B_n) = \infty$, для кожного n.

10.25. Див. [11, Розділ 1, параграфи 8-11].

10.26. $\mathbf{E}\xi = 2/3$, $\mathbf{D}\xi = 8/9$.

10.27. $\left(\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - \mu_k)\right)^2 =$
$\left(\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - \mu_k)^2\right) + \left(\sum_{k\neq j=1}^{n}(\xi_k - \mu_k)(\xi_j - \mu_j)\right)$.

10.28. Виводиться з неперервності імовірності, внаслідок тотожності: $\cap_{n\geq 1}(x, x + 1/n) = \varnothing$.

10.29. З 10.28 виводимо: $\mathbf{P}(\xi \in (x, x+\varepsilon)) \to 0, \varepsilon \to 0$, при $x \notin \mathbb{Q}$.

11.1. Треба обчислити математичне сподівання величини $\min\{\xi, 4\}$: $\mathbf{E}[\min\{\xi, 4\}] = \int_1^4 x(2/x^3)dx + 4\int_4^\infty 2/x^3 dx = 7/4$.

11.2. (а) $\mathbf{E}|\xi|/(1+\xi^2) = 2\int_0^\infty \frac{x}{\pi(1+x^2)^2}dx = \int_0^\infty \frac{1}{\pi(1+t)^2}dt = 1/\pi$. (б) $\pi^2/12$.

11.3. (а) Обчислимо функцію розподілу: $F_1(t) = \mathbf{P}\{\eta_1 < t\} = \mathbf{P}\{\xi > -\ln(t)\} = e^{-\lambda(-\ln(t)))} = t^\lambda,\ t \in [0,1]$. Її щільність $f_1(t) = \lambda t^{\lambda-1}, t \in [0,1]$, $\mathbf{E}[\eta_1] = \lambda/(\lambda+1)$.
(б) $F_2(t) = \mathbf{P}\{\xi^2 < t\} = F(\sqrt{t}) = 1 - e^{-\lambda\sqrt{t}}$, $t \geq 0$. Тоді щільність: $f_2(t) = \lambda\frac{e^{-\lambda\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}, t \geq 0$. $\mathbf{E}\eta_2 = \mathbf{E}\xi^2 = 2/\lambda^2$.
(в) $F_3(t) = \sum_{k\geq 0}\mathbf{P}\{\lambda\xi \in [k, k+t)\} = \sum_{k\geq 0}\int_{k/\lambda}^{(k+t)/\lambda}\lambda e^{-\lambda t}dt = \frac{1-e^{-t}}{1-e^{-1}}$, $t \in [0,1]$, $f_e(t) = \frac{e^{-t}}{1-e^{-1}},\ t \in [0,1]$. $\mathbf{E}\eta_3 = \frac{1-2e^{-1}}{1-e^{-1}}$.

11.4. $\eta_1 \simeq N(b, a^2)$, $F(x) = \Phi(-\sqrt{1/x})) + 1 - \Phi(\sqrt{1/x})$, η має рівномірний розподіл на $\{-1, 1\}$.

11.5. (а) $F_1(t) = \frac{t+2}{3},\ t \in [-2,1],\ f_1(t) = 1/3,\ t \in [-2,1]$, $\mathbf{E}\eta_1 = -1/2$. (б) $F_2(t) = \mathbf{P}\{|2\xi - 1| < t\} = \mathbf{P}\{\frac{1-t}{2} < \xi < \frac{1+t}{2}\} = t,\ t \in [0,1],\ f_2(t) = \mathbb{1}_{[0,1]}(t)$, $\mathbf{E}\eta_2 = 1/2$. (в) $F_3(t) = \mathbf{P}\{-\ln(\xi) < t\} =$

$\mathbf{P}\{\xi > e^{-t}\} = 1 - e^{-t},\ t \geq 0,\ f_3(t) = e^{-t}$, $\mathbf{E}\eta_3 = 1$.

11.6. (a) $\mathbf{E}\max\{\xi, 2\} = 2\int_{-\infty}^{0} e^{2x}dx + 2\int_0^2 e^{-2x}dx + \int_2^{\infty} xe^{-2x}dx = 1 + (1 - e^{-4}) + e^{-4}5/16 = 2 - e^{-4}11/16$.

11.7. $F_{\eta_1}(x) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x})$, $x > 0$, $F_{\eta_2}(x) = \Phi(x) - \Phi(-x)$, $x > 0$.

11.8. (a) $\eta \simeq U(-1, 1)$.

11.9. (a) $\mathbf{P}(\xi^{1/\alpha} < x) = \mathbf{P}(\xi < x^{\alpha}) = 1 - \exp(-\lambda x^{\alpha}), x \geq 0$.

11.10. $F(t) = \mathbf{P}\{|\sin(\xi)| < t\} = (2/\pi)\arcsin(t),\ f(t) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-t^2}}, t \in [0, 1]$.

11.11. $\mathbf{P}\{F(\xi) < t\} = \mathbf{P}\{\xi < F^{(-1)}(t)\} = F(F^{(-1)}(t)) = t, t \in [0, 1]$.

11.12. Доведіть, що $F(F^{(-1)}(y)) = y$, для довільних y. Тоді $\mathbf{P}\{F^{(-1)}(\xi) < t\} = \mathbf{P}\{\xi < F(t)\} = F(t)$.

11.13. $F_{\eta_1}(t) = F((t - b)/a),\ F_{\eta_2}(t) = F(\ln(t)), t \geq 0,\ F_{\eta_3}(t) = t, t \in [0, 1]$.

11.14. Скористайтесь теоремою про вимірність суперпозиції.

11.15. (а) Так. (б) Ні.

11.16. Позначимо через $\zeta = \xi - \eta$. Функція ζ- вимірна. Шукана множина це $\zeta^{-1}\{0\}$.

11.17. Зобразимо $\xi = \mathrm{tg}\ \alpha$, де $\alpha \simeq U(-\pi/2, \pi/2)$. Тоді $1/\xi = \mathrm{tg}\ (\pi/2 - \alpha)$, $2\xi/(1 - \xi^2) = \mathrm{tg}(2\alpha)$, і т.д., де $\pi/2 - \alpha$, $2\alpha \simeq \alpha$ за модулем π.

11.18. $f_{\xi}(x)$ - парна.

11.19. Середнє $\pi(R^2 + \varepsilon^2/6)$.

11.20. $(\sqrt{2\pi}\sigma x)^{-1}\exp(-(\ln x - \mu)/2\sigma^2), x > 0$.

11.21. $(\sqrt{2\pi})^{-1}\exp(-x^2/2), x \in \mathbb{R}$.

11.22. $x/R\sqrt{4R^2 - x^2}, x \in (0, 2R)$.

11.23. Використати зображення

$$\eta = \sum\nolimits_{n\in\mathbb{Z}} \sin(\xi - b - 2n\pi)\mathbb{1}_{\xi - b - 2n\pi \in [0, 2\pi)}.$$

11.24. З симетрії $\xi \simeq -\xi$ випливає, що $\eta \simeq -\eta$. Тому дане твердження виводиться з рівності $|\eta| = |\xi|$.

11.25. $g(x) = \max(0, \min(1, x))$, а ξ набуває значень поза $[0, 1]$.

11.26. $\mathbf{P}(\eta = \pm 1) = 1/2$.

11.27. $f(x)+f(-x), x>0$.
11.28. $\left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right|$.

12.1 (а) Скористайтесь теоремою про властивості математичного сподівання для величини ξ_B;
(б) $\mathbf{E}(\xi \mid B) = \sum_{n\geq 1} x_n \mathbf{P}(\xi 1\!\!1_B = x_n)/\mathbf{P}(B) =$
$\sum_{n\geq 1} x_n \mathbf{P}(\xi = x_n, B)/\mathbf{P}(B) = \sum_{n\geq 1} x_n \mathbf{P}(\xi = x_n \mid B)$.

12.2. $\mathbf{E}\xi - h \leq I(\xi, h) \leq \mathbf{E}\xi$ для невід'ємних чи інтегровних ξ, та $\left|\sum_{|n|>m} nh\mathbf{P}(nh \leq \xi < nh+h)\right| \leq \mathbf{E}(|\xi| 1\!\!1_{|\xi|\geq mh}$.

12.3. Нехай ξ приймає значення з множини $\{x_0, \ldots, x_n, \ldots\}$, з ймовірностями $\mathbf{P}\{\xi = k\} = p_k$. Вважаємо, що $x_i < x_j$, $i<j$. Тоді для функції розподілу, справедливі рівності: $F(x_k+0) - F(x_k) = p_k$, і для довільних x, y таких, що $x_k < x < y < x_{k+1}$, $F(y) - F(x) = 0$. Тоді за властивістю інтегралу Стілтьєса: $\int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) = \sum_{k\geq 0} x_k (F(x_k+0) - F(x_k)) = \sum_{k\geq 0} x_k p_k$.

12.4. Припустимо, що існує таке $\varepsilon > 0$, та послідовність множин A_n, що $\mathbf{P}(A_n) \to 0$, $n\to\infty$, що $\mu(A_n) = \mathbf{E}[\xi 1\!\!1_{A_n}] \geq \varepsilon$, для довільного n. Зауважимо, що послідовність випадкових величин $\xi 1\!\!1_{A_n}$ мажорована інтегровною функцією $|\xi|$. Таким, чином можна зробити граничний перехід під знаком математичне сподівання для послідовності $\mathbf{E}[\xi 1\!\!1_{A_n}]$, отримавши, що границя цієї послідовності рівна нулю, що протирічить умові $\mu(A_n) \geq \varepsilon$.

12.5. Оберемо рівномірний розподіл на відрізку $[0,1]$, з сигма-алгеброю борелевих множин на відрізку $[0,1]$, у якості ймовірнісного простору, та послідовність випадкових величин виду $\xi_n = cne^{-nx}$, де $c = (1-e^{-1})^{-1}$. Тоді для кожного $x \in (0,1]$, $\xi_n(x) \to 0$, $n\to\infty$. Оскільки $\mathbf{P}\{0\} = 0$, то ξ_n прямує до нуля майже напевно. В той же час $\mathbf{E}[\xi_n] = cn(1/n)(1-e^{-n}) \geq c(1-1/e) = 1$.

12.6. Доведіть лему Фату за даних умов.

12.7. Запишіть $F(-x) + 1 - F(x) = \int_{-\infty}^{-x} dF(y) + \int_x^{\infty} dF(y)$, звідки $\int_0^{\infty}(F(-x)+1-F(x))dx = \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{-x} dF(y)dx + \int_0^{\infty}\int_x^{\infty} dF(y)dx =$ $\int_0^{-\infty} -x dF(x) + \int_0^{\infty} x dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x)$, де в передостанній рівності було зроблено заміну порядку інтегрування.

12.8. Запишіть, $\mathbf{P}(\xi \geq n) = \sum_{k=n}^{\infty} \mathbf{P}(\xi = k)$, і змініть порядок підсумовування.

12.9. П. 1-4 додаткового доведення не вимагають. Інші пункти слід доводити лише для випадків, коли $\max \mathbf{E}\{\xi^+, \xi^-, \zeta^+, \zeta^-\} = \infty$. Для (5). слід додатково вимагати, щоб $\xi + \zeta$ була узагальнено інтегровною.

12.10. Скористайтесь лемою Фату для послідовності випадкових величин $\xi_n = 1\!\!\mathrm{I}_{A_n}$.

12.11. $\mathbf{E}[\xi 1\!\!\mathrm{I}_{\cup_{n\geq 1} A_n}] = \mathbf{E}[\lim(\xi 1\!\!\mathrm{I}_{\cup_{k=1}^{n} A_k})] = \lim \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}[\xi 1\!\!\mathrm{I}_{A_k}] = \sum_{k\geq 1} \mathbf{E}[\xi 1\!\!\mathrm{I}_{A_k}]$, де ми скористались тим фактом, що індикатор суми неперетинних множин рівний сумі індикаторів, а також, тим, що $\xi 1\!\!\mathrm{I}_A \leq |\xi|$, що дозволило зробити граничний перехід.

12.12. Скористайтеся тим, що для довільного $n \in \mathbb{Z}$, $\lambda(\{n\}) = 1$.

12.13. Нехай F деяка функція, така, що її повна варіація на $\mathbb{R}$ рівна 1. Інтегровність обмежених функцій є очевидною, інтеграл по такій функції не перевищує її супремума. Покажемо, що існує необмежена інтегровна функція. Якщо існує таке x_0, що $\mathrm{Var}(F, (-\infty, x_0)) = 1$, то функція F є сталою при $y > x_0$. Отже, функція $g(y) = y 1\!\!\mathrm{I}_{[x_0+1,\infty)}(y)$ є необмеженою та інтегровною. Якщо такого x_0 не існує, то знайдемо таку послідовність $x_n \to \infty$, $n \to \infty$, що $\mathrm{Var}(F, [x_n, \infty)) < 1/2^n$. Тоді визначимо наступну функцію $V(x) = \sum_{n\geq 1} n 1\!\!\mathrm{I}_{[x_n, x_{n+1})}(x)$. Тоді очевидно $V(x) \to \infty$, $x \to \infty$, і крім того, повний інтеграл є скінченим і не перевищує 2.

12.14. (а) Запишіть $(1 - F(x)) = \int_x^{\infty} dF(y)$, та змініть порядок інтегрування. (б) Застосуйте формулу інтегрування частинами.

12.15. Скористайтеся тим же прийомом, що у 12.7.

12.16. Скористайтеся твердженням задачі 12.15.

12.17. Можна вважати, що $\xi \geq 0$. Оберемо $\alpha_m \geq \alpha m, m \geq 1$, так, щоб $\mathbf{P}(\xi \geq \alpha_m) \leq \varepsilon \mathbf{P}(\xi \geq m), m \geq 1$, причому $\varepsilon\alpha < 1$. Визначимо рекурентно $\alpha_m^{k+1} = a_{a_m^k}, k \geq 1$, та $n_k = [\alpha_m^k]$. Тоді $\sum_{n\geq 0} \mathbf{P}(\xi \geq n) \leq \sum_{k\geq 0} (n_{k+1} - n_k)\varepsilon^k \leq \sum_{k\geq 0} m\alpha_m^{k+1} \varepsilon^k < \infty$, отже $\mathbf{E}\xi < \infty$. Загальний випадок отримуємо заміною ξ на ξ^β.

12.18. Див. Теорему 4.2. [11, ст. 144]

12.19. Теорема Лебега про мажоровану збіжність.

12.20. Замінити змінну $y = F(x)$.

12.21. Змінити порядок інтегрування.

12.22. $\sigma(1 - 2\Phi(-a)) + \sqrt{2/\pi}\exp(-a^2/2)$, де $a = \mu/\sigma$, а Φ - стандартна нормальна функція розподілу.

12.23. Якщо $a = 0, b = 1$, то оцінимо $\mathbf{D}\xi = \mathbf{E}\xi^2 - (\mathbf{E}\xi)^2 \leq \mathbf{E}\xi - (\mathbf{E}\xi)^2 \leq 1/4$.

12.24. Застосувати нерівність Маркова.

12.25. Нерівність Маркова для $g(x) = \exp(cx), c > 0$.

12.26. (а) $\mathbf{P}(|\xi| \geq \varepsilon) = \mathbf{P}(\xi^2 \geq \varepsilon^2) \leq \sigma^2/\varepsilon^2 \leq 2\sigma^2/(\sigma^2 + \varepsilon^2)$. (б) $\mathbf{P}(\xi \geq \varepsilon) = 1/2\mathbf{P}(|\xi| \geq \varepsilon)$. (в) Навести приклад з 2 значеннями.

12.27. Звести до стандартної нормальної величини.

12.28. (а) Зробити заміну змінних $\lambda y = x$, (б) У нерівність Маркова $\mathbf{P}(\xi \geq x) \leq \exp(-ax)\mathbf{E}\exp(a\xi)$ підставити $a = x/\tau^2(\xi)$ та оцінити перший множник з означення $\tau(\xi)$.

12.29. Твердження еквівалентне нерівності $\mathbf{P}(\eta \geq b) \geq (\mathbf{E}\eta - b)/(a - b)$ для величини $\eta = g(\xi) \in [0, a]$.

12.30. Див. 12.25.

12.31. Див. 12.24.

12.32. $\mathbf{P}(\xi = a) = \mathbf{P}(\xi = b) = 1/2$.

12.33. Застосувати до величини $\eta = (\xi - \mathbf{E}\xi)^2$ нерівність Маркова зі сталою ε^2 та функцією $g(x) = 1 + x/\sigma^2$.

13.1. (а) $\int_{-1}^{1}\int_0^\infty p(x,y)dydx$.
(б) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_x^\infty p(x,y)dxdy$.
(в) $\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^\infty p(s,y)dyds$.
(г) $\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_k^{k+1}\int_k^{k+1} p(x,y)dxdy$.

13.2. (а) $f_\xi(t) = \int_0^\infty p(t,y)dy = \int_0^\infty te^{-t-ty}dy = e^{-t} \simeq Exp(1)$, $f_\eta(t) = \int_0^\infty p(x,t)dx = \int_0^\infty xe^{-x(1+t)}dx = (1+t)^{-1}\int_0^\infty e^{-x(1+t)}dx = (1+t)^{-2}$.
(б) Дана ймовірність рівна інтегралу $\int_0^\infty \int_0^{2y+4} xe^{-x(1+y)}dxdy$.
(в) Дана ймовірність рівна інтегралу $\int_1^\infty \int_0^{y-1} xe^{-x(1+y)}dxdy$.
(г) $\mathbf{E}[\xi] = 1$, $\mathbf{E}[\eta] = \int_0^\infty x/(1+x)^2dx = \infty$,

$\mathbf{E}[\xi\eta] = \int_0^\infty \int_0^\infty x^2 y e^{-x(1+y)} dxdy$. Зауважимо, що останній інтеграл скінченний, а отже $\mathrm{cov}(\xi, \eta) \neq 0$, а тому величини залежні.

13.3. Зауважимо, що $\mathbf{E}[\xi] = 0$, тому $\mathrm{cov}(\xi, \eta) = \mathbf{E}[\xi\eta]$, для довільної випадкової величини η. Розглянемо випадок $a \leq -1$. Тоді $|\xi - a| = \xi - a > 0$ майже напевно. Тому $\mathrm{cov}(\xi, \xi - a) = \mathbf{E}[\xi^2] - a\mathbf{E}[\xi] = 1/3 > 0$ Аналогічно розглядається випадок $a \geq 1$. Нехай тепер $a \in (-1, 1)$, тоді $\mathrm{cov}(\xi, |\xi - a|) = \mathbf{E}[\xi|\xi - a|] = \int_{-1}^{a} (ax - x^2)/2dx + \int_a^1 (x^2 - ax)/2dx = a(a^2-1)/4 - a^3/6 - 1/6 + 1/6 - a^3/6 - a(1-a^2)/4 = (a^3 - 3a)/6$. Таким чином величини ξ та $|\xi - a|$ будуть некорельованими лише для $a = 0$.
(а) $\mathrm{cov}(\xi, \xi^2) = \mathbf{E}[\xi^3] = \int_{-1}^{1} 1/2x^3 dx = 0$;
(б) $\mathrm{cov}(\xi, \xi^3) = \mathbf{E}[\xi^4] = \int_{-1}^{1} 1/2x^4 dx = 1/5$;
(в) $\mathrm{cov}(\sin(\pi\xi), \cos(\pi\xi)) = 1/2\mathbf{E}[\sin(2\pi\xi)] - \mathbf{E}[\sin(\pi\xi)]\mathbf{E}[\cos(\pi\xi)] = 0$, оскільки $\sin x$ непарна функція.

13.4. (а) Нехай (ξ, η) вектор, що рівномірно розподілений в даному трикутнику. Тоді його сумісна щільність має вигляд: $f(x, y) = 2\mathbb{I}_{y \leq 1-x}$, $x, y \in [0, 1]$. Тоді щільність ξ: $f_\xi(t) = \int_0^1 f(t, y)dy = 2\int_0^{1-t} dy = 2(1 - t)$, $t \in [0, 1]$, в силу симетрії $f_\eta(t) = 2(1 - t)$, $t \in [0, 1]$. Отже: $\mathbf{E}[\xi] = \mathbf{E}[\eta] = 2\int_0^1 (t - t^2)dt = 1 - 2/3 = 1/3$. Для обчислення коваріації знайдемо: $\mathbf{E}[\xi\eta] = \int_0^1 \int_0^1 xy\, f(x, y)dxdy = 2\int_0^1 \int_0^{1-x} xydydx = 2\int_0^1 x(1 - x)^2/2dx = \int_0^1 (x - 2x^2 + x^3)dx = 1/2 - 2/3 + 1/4 = 1/12$. (б) Сумісна щільність даного вектора має вигляд: $f(x, y) = (\pi)^{-1} \mathbb{I}_{\{(x,y)|(x-1)^2+y^2 \leq 1\}} f_\xi(t) =$

$\pi^{-1} \int_{-1}^{1} f(t, y)dy = \pi^{-1} \int_{-\sqrt{1-(t-1)^2}}^{\sqrt{1-(t-1)^2}} dy = 2\sqrt{2t - t^2}/\pi$, $t \in [0, 2]$.

$f_\eta(t) = \pi^{-1} \int_0^2 f(x, t)dx = \pi^{-1} \int_{1-\sqrt{1-t^2}}^{1+\sqrt{1-t^2}} dx = 2\sqrt{1 - t^2}/\pi$, $t \in [-1, 1]$. Математичне сподівання та коваріація обчислюються як у (а).

13.5. Див. теорему про основні властивості функції розподілу.

13.6. $\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(x+y)}{x+y} dxdy = \int_0^\infty \int_0^t (f(t)/t)dydt = 1$.

13.7. $D[\xi + \eta] = E[\xi + \eta]^2 - (E[\xi + \eta])^2 = E\xi^2 + E\eta^2 + 2E\xi\eta - (E\xi)^2 - (E\eta)^2 - 2E\xi E\eta = D\xi + D\eta + 2\mathrm{cov}(\xi, \eta)$.

13.8. Нехай $a > 0$. Обчислимо:

$\mathbf{E}\xi|\xi - a| = \int_0^a x(a-x)e^{-x}dx + \int_a^\infty x(x-a)e^{-x}dx = a + 4ae^{-a} + 2$. Тепер обчислимо $\mathbf{E}|\xi - a| = \int_0^a (a-x)e^{-x}dx + \int_a^\infty (x-a)e^{-x}dx = a(1-e^{-a}) - 1 + e^{-a}(1+a) + e^{-a}(1+a) - ae^{-a} = a + 2e^{-a} - 1$. Отже, шукане a знайдемо, прирівнявши отримані значення. Аналогічно розглядається випадок $a < 0$. (а) Обчислимо коваріацію ξ та ξ^2: $\mathrm{cov}(\xi, \xi^2) = \mathbf{E}\xi^3 - \mathbf{E}\xi\mathbf{E}\xi^2 = 6 - 2 = 4$.
(б) $\mathrm{cov}(\xi, \xi^3) = 24 - 6 = 18$.

13.9. Намалюйте вказану область, та обчисліть сумісну функцію розподілу координат.

13.10. (а) Скористайтесь означенням з [2, ст. 83]; (б) $U(x,\infty) = F(x)$, $U(\infty, y) = G(y)$; (в) $V(x,y) = \mathbf{P}\{\xi < x, \eta < y\} \le \mathbf{P}\{\xi < x\} = F(x)$, аналогічно $V(x,y) \le G(y)$.

13.11. Скористайтесь зображенням: $\max\{\xi_1, \xi_2\} = (\xi_1 + \xi_2 + |\xi_1 - \xi_2|)/2$, $\min\{\xi_1, \xi_2\} = (\xi_1 + \xi_2 - |\xi_1 - \xi_2|)/2$, а також тим, що суми, різниці та модулі вимірних функцій є вимірними.

13.12. Доведіть, що $\{\sup\{\xi_n\} < a\} = \cup_{m\ge1} \cap_{k\ge1} \{\xi_k < a - 1/m\}$, $\{\inf\{\xi_n\} > a\} = \cup_{m\ge1} \cap_{k\ge1} \{\xi_k > a + 1/m\}$. Якщо множина I незлічена, то таке твердження невірне. Розгляньте в якості I - множину, не вимірну за Лебегом, а в якості $\xi_x = 1\!\!1_{\{x\}}$, $x \in I$. Тоді супремум буде рівним $1\!\!1_I$ - не вимірна за Лебегом функція.

13.13. Скористайтеся теоремою про властивості сумісної функції розподілу.

13.14. Переконайтеся, що порушена умова (4) з теореми про прирости сумісної функції розподілу.

13.15. Скористайтесь теоремою про ймовірність значення всередині паралелепіпеда.

13.16. Скористайтесь тим, що $\mathbf{P}\{\xi_k < x\} = \mathbf{P}\{\xi_1 \in \mathbb{R}, \ldots, \xi_{k-1} \in \mathbb{R}, \xi_k < x, \xi_{k+1} \in \mathbb{R}, \ldots, \xi_n \in \mathbb{R}\}$.

13.17. Оскільки $\mathrm{cov}(\xi, \eta) = \mathrm{cov}(\eta, \xi)$, то перевіримо такі властивості: (а) $\mathrm{cov}(\alpha\xi, \eta) = \mathbf{E}[\alpha\xi\eta] - \mathbf{E}[\alpha\xi]\mathbf{E}[\eta] = \alpha(\mathbf{E}[\xi\eta] - \mathbf{E}[\xi]\mathbf{E}[\eta]) = \alpha\mathrm{cov}(\xi, \eta)$; (б) $\mathrm{cov}(\xi + \eta, \zeta) = \mathbf{E}[\xi\zeta] + \mathbf{E}[\eta\zeta] + \mathbf{E}[\xi]\mathbf{E}[\zeta] + \mathbf{E}[\eta]\mathbf{E}[\zeta] = \mathrm{cov}(\xi, \zeta) + \mathrm{cov}(\eta, \zeta)$.

13.18. Скористайтесь результатами задачі 13.17.

13.19. Скористайтеся тим фактом, що $\int_{-\infty}^\infty f(x)(2F(x) - 1)dx =$

$2\int_0^1 tdt - 1 = 0$, де була зроблена заміна $t = F(x), dt = f(x)dx$.

13.20. $2\mathbf{E}\max(\xi_1^2, \xi_2^2) = \mathbf{E}(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \left|\xi_1^2 - \xi_2^2\right|) =$
$2 + \mathbf{E}\left|\xi_1 - \xi_2\right|\left|\xi_1 + \xi_2\right| \le 2 + \sqrt{1 - 2\rho + 1}\sqrt{1 + 2\rho + 1} = 2 + 2\sqrt{1 - \rho^2}$.

13.21. Див. зауваження до нерівності Коші [1, ст. 79].

13.22. Доведіть спочатку нерівність $|x - y| \le 1 - xy$ при $x, y \in [-1, 1]$.

13.23. Ліва частина дорівнює $\mathbf{P}(\max(|\xi_1|, |\xi_2|) \ge \varepsilon)$. Тому скористайтесь нерівністю Чебишева та задачею 20.

13.24. Використати нерівність Мінковського.

13.25. Можна вважати доданки центрованими.

14.1. $f_\xi(x) = 1/\pi(1 + x^2)$, $x \in \mathbb{R}$, $f_\eta(x) = 3x^2$, $x \in [0, 1]$.
(а) $\int_0^1 \int_{-\infty}^{1/y} p(x, y)dxdy$; (б) $-3/5$.

14.2. $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, t - x)dx = t\int_{-\infty}^{\infty} 1\!\!1_{[0,1]}(x) 1\!\!1_{[0,1]}(t - x)dx =$
$t^2 1\!\!1_{[0,1]}(t) + t(2 - t)1\!\!1_{[1,2]}(t)$.

14.3. $f(\rho, \varphi) = \rho p(\rho\cos(\varphi), \rho\sin(\varphi))$. Якщо розподіл є радіально симетричним, то $f(\rho, \varphi) = \rho p(\rho)$, звідки виводиться шукане твердження.

14.4. Скористаємося твердженням задачі 14.10. Для цього порахуємо обернене перетворення координат: $\xi = \zeta_1^2 + \zeta_2^2$, $\eta = \operatorname{arctg}(\frac{\zeta_2}{\zeta_1})$. Прості обчислення показують, що якобіан цього перетворення рівний 2. Тоді запишемо вираз для сумісної щільності $\zeta_1, \zeta_2 \ge 0$:
$f(x, y) = 2\lambda e^{-\lambda(x^2+y^2)} \frac{2}{\pi} 1\!\!1_{[0, \frac{\pi}{2}]}(\operatorname{arctg} \frac{y}{x}) =$
$(4\lambda/\pi)e^{-\lambda(x^2+y^2)} 1\!\!1_{[0,\infty)}(x) 1\!\!1_{[0,\infty)}(y) =$
$\left(2\sqrt{\lambda/\pi} e^{-\lambda x^2} 1\!\!1_{[0,\infty)}(x)\right)\left(2\sqrt{\lambda/\pi} e^{-\lambda y^2} 1\!\!1_{[0,\infty)}(y)\right)$.

14.5. Скористайтесь 14.10 зі спеціальним чином підібраним перетворенням координат.

14.6. Обчислимо функцію розподілу при $t \ge 0$:
$F(t) = \int_0^t \int_0^{\min\{t-x,x\}} p(x, y)dydx = \int_0^{t/2} \int_0^x p(x, y)dydx +$
$\int_{t/2}^t \int_0^{t-x} p(x, y)dydx = \int_0^{t/2} \lambda^2 x e^{-\lambda x}dx + \int_{t/2}^t \lambda^2(t - x)e^{-\lambda x}dx =$
$-\lambda t e^{-\lambda t/2}/2 + 1 - e^{-\lambda t/2} - \lambda t(e^{-\lambda t} - e^{-\lambda t/2}) + \lambda t e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda t/2}/2 +$
$e^{-\lambda t/2} - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-\lambda t}$. Отже, $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t \ge 0$, $\zeta \simeq \operatorname{Exp}(\lambda)$.

14.7. Скористаємося формулою із задачі 14.10. Розглянемо перетворення координат (ξ,η): $\zeta_1 = \xi+\eta$, $\zeta_2 = \xi/\eta$, знайдемо обернене перетворення: $\xi = \frac{\zeta_1\zeta_2}{1+\zeta_2}$, $\eta = \frac{\zeta_1}{1+\zeta_2}$. Обчислимо якобіан перетворення: $G(x,y) = \left(\frac{xy}{1+y}, \frac{x}{1+y}\right)$: $J[G] = -\left(\frac{xy}{(1+y)^3} + \frac{x}{(1+y)^3}\right) = -\frac{x}{(1+y)^2}$.
Тоді: $f_{\zeta_1,\zeta_2}(x,y) = \frac{x}{(1+y)^2}\lambda^2 \exp\left(-\lambda(\frac{x+xy}{1+y})\right) = \lambda^2 x e^{-\lambda x}\frac{1}{(1+y)^2}, x \geq 0, y \geq 0$, звідки бачимо, що сумісна щільність розпадається у добуток: $f_{\zeta_1}(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x},\ x \geq 0,\ f_{\zeta_2}(y) = (1+y)^{-2},\ y \geq 0$. Отже ζ_1 та ζ_2 - незалежні.

14.8. (а) Щільність ξ знайдіть шляхом інтегрування сумісної щільності по y. Для цього доцільно перейти до полярних координат.
(б) За формулою з 14.10, маємо $f(\rho,\varphi) = \rho/2\pi(1+\rho^2)^{3/2}$.

14.9. $r^2\sin(\theta)p(r\sin(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\theta)\sin(\varphi), r\cos(\theta))$. Для радіально симетричного розподілу: $r^2\sin(\theta)g(r^2)$.

14.10. Запишіть вираз для функції розподілу $g(\xi)$, та скористайтеся формулою заміни змінної у кратному інтегралі.
(а) Лінійне перетворення. Нехай A - невироджена $n\times n$ матриця. Тоді $\eta = A\xi$, а обернене перетворення: $\xi = A^{-1}\eta$. Тоді нова щільність матиме вигляд:
$f_\eta(y_1,\ldots,y_n) = f_\xi((A^{-1}y)_1, (A^{-1}y)_2, \ldots, (A^{-1}y)_n)\det^{-1}(A)$.
(б) Полярні координати. Обернене перетворення має вигляд:
$x = \rho\cos(\theta),\ y = \rho\sin(\theta)$. Якобіан оберненого перетворення рівний ρ. Тоді нова щільність $f_\eta(\rho,\theta) = \rho f(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))$.

14.11. Обчисліть функцію розподілу при $t \geq 0$:
$F(t) = \mathbf{P}\{\xi < t/\eta\} = \int_0^\infty \int_0^{t/y} xe^{-x(1+y)}dxdy$, та знайдіть її похідну.

14.12. Обчисліть щільність $\ln((\xi_1\xi_2)^{\xi_3}) = \xi_3(\ln(\xi_1)+\ln(\xi_2))$.

14.13. (а) Використати теорему про сумісну щільність варіаційного ряду. (б) Заміною змінних $x_k = y_1 + \ldots + y_k, k = \overline{1,n+1}$, довести, що сумісна щільність вектора $(S_1,\ldots,S_{n+1})$ дорівнює $\exp(-x_{n+1})1\!\!1_{0<x_1<\ldots<x_{n+1}}$, звідки знайти шукану щільність.

14.14. Припустимо, що вектор має сумісну щільність і $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$. Переходом до полярних координат вивести, що $f_1(x) = f_2(x) = cg(x^2)$, причому $g(x^2)g(y^2) = g(x^2+y^2)$. Отже, $g(x^2)$ - експоненційна функція від x^2.

14.15. Запишіть вираз для ij-того елемента матриці $\mathrm{Cov}(\xi, \eta)$.

14.16. Перейти до полярних координат.

14.17. Записати $\mathbf{P}(\xi\eta < a)$ при $a > 0$ через кратний інтеграл та без обчислення знайти його похідну за a. Врахувати, що $\xi\eta$ має парну щільність.

14.18. $\frac{\lambda}{2}(\exp(-\lambda x) - \exp(-2\lambda x)), x > 0$.

14.19. $c = \Gamma(p+q+2)/\Gamma(p)\Gamma(q)$, $(1-x)x^{p+q+1}(p+q)(p+q+1), x \in (0, 1)$.

14.20. $8x(x^2 - 1 - \ln x), x \in (0, 1)$.

14.21. Застосувати формулу про обчислення сумісної щільності при полярному перетворенні.

15.1. Позначимо $p_{jk} = \mathbf{P}(\xi = x_j, \eta = y_k)$, $p_j = \mathbf{P}(\xi = x_j)$, $q_k = \mathbf{P}(\eta = y_k)$. Запишіть систему рівнянь, що складається з умов некорельованості для всіх j, k, де в якості змінних будуть $p_{jk} - p_j q_k$. Покажіть, що єдиний розв'язок цієї системи - нульовий.

15.2. $f(t) = 1/4 \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{[-1,1]}(t - x)\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)dx =$
$(1/2 + t/4)\mathbb{1}_{[-2,0]}(t) + (1/2 - t/4)\mathbb{1}_{[0,2]}(t)$.

15.3. (а) $(1 + x^2)^{-1}, x \geq 0$. (б) $\lambda \exp(-\lambda x), x \geq 0$.

15.4. Нехай $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \simeq Exp(\lambda)$. (а) Обчисліть ймовірність того, що $\min\{\xi_1, \xi_2\} + \xi_3 >max\{\xi_1, \xi_2\}$. (б) Знайдіть щільність випадкової величини $\min\{\xi_1, \xi_2\} + \xi_3$, та зауважте, що за теоремою про перетворення випадкових.величин $\min\{\xi_1, \xi_2\}$ та ξ_3 - незалежні.

15.5. $\tau_1 = \min_{1 \leq k \leq n} \xi_k$, $\tau_2 = \max_{1 \leq k \leq n} \xi_k - \min_{1 \leq k \leq n} \xi_k$. Для обчислення функції розподілу див. 15.6.

15.6. (а) $1 - (1 - F(x))^n$; (б) $F^n(x)$; (в) Позначимо $\nu(x)$ - кількість елементів з $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ менших за x. Тоді $\mathbf{P}\{\nu(x) = m\} = \mathbf{P}\{\xi_{(m)} < x \leq \xi_{(m+1)}\} = C_n^m F^m(x)(1 - F(x))^{n-m}$, далі помітимо, що $\{\xi_{(m)} < x\} = \{\nu(x) \geq m\}$, звідки: $F_{(m)}(x) = \sum_{k \geq m} C_n^k F^k(x)(1 - F(x))^{n-k}$.

15.7. Обчисліть згортку $p * p(x)$.

15.8. Нехай $\xi, \eta \simeq Exp(\lambda)$, обчисліть ймовірність того, що $\min\{\xi, \eta\} > \max\{\xi, \eta\} - \min\{\xi, \eta\}$.

15.9. Розглянемо наступне перетворення координат: $\zeta_1 = \xi + \eta$, $\zeta_2 = \frac{\xi}{\xi+\eta}$. Обчислимо обернене перетворення: $\xi = \zeta_1\zeta_2$, $\eta = \zeta_1(1 - \zeta_2)$. Порахуємо якобіан цього перетворення:

$$\begin{vmatrix} y & x \\ 1-y & -x \end{vmatrix} = -(xy + x - xy) = -x.$$

Тоді щільність має вигляд: $f_{\zeta_1,\zeta_2}(x,y) = xe^{-x},\ x \geq 0, y \in [0,1]$. Отже, ζ_1 та ζ_2 - незалежні, та мають щільності: $f_{\zeta_1}(x) = xe^{-x},\ x \geq 0,\ f_{\zeta_2}(y) = 1\!\!\mathrm{I}_{[0,1]}(y)$.

15.10. Нехай τ - час роботи системи. (а) $\tau = \max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$. (б) $\{\tau > t\} = \{\xi_{(n-k+1)} > t\}$.

15.11. Можна вважати, що $F(\xi_k)$ рівномірно розподілені на $[0,1)$. Тому їх максимум має функцію розподілу $x^n, x \in (0,1)$. Шукане сподівання дорівнює $\mathbf{E}(\max_{k\leq n} F(\xi_k))^m = \int_0^1 x^m d(x^n) = n/(n+m)$. (б) Аналогічно, $\mathbf{P}(\max_{k\leq n} F(\xi_k))^{\alpha n} < x) = (x^{1/\alpha n})^n = x^{1/\alpha}, x \in (0,1)$.

15.12. Події $A_k = \{\xi_k = \xi_{(n)}\}, k = \overline{1,n}$, м.н. попарно несумісні, $\cup A_k = \Omega$, та рівноймовірні, оскільки вектори $(\xi_k, \xi_{(n)}\}, k = \overline{1,n}$, мають однакові функції розподілу.

15.13. Перейдіть до полярних координат. Див. задачі 16.3, 14.7.

15.14. Обчислити сумісну щільність вектора $(\zeta_1, ..., \zeta_n)$ через сумісну щільність варіаційного ряду $(\xi_{(1)}, ..., \xi_{(n)})$, що відома.

15.15. (а) Позначимо $I_n = \{0,1\}^n$, та $x(k) = \sum_{s=1}^n k_s 2^{-s}$ при $k \in I_n$. Визначимо на I_n лексикографічний порядок: $\{j < k\} \equiv \{x(j) < x(k)\}$. Тоді $\sum_{j<k, j\in I_n} 2^{-n} = x(k)$, та має місце розбиття $[0,1) = \cup_{k\in I_n} J_k$, де $J_k = [x(k), x(k) + 2^{-n})$. Отже, будь-який $x \in [0,1)$ має вигляд $x = x(k) + 2^{-n}y$, де $k \in I_n, y \in [0,1)$. Звідси $\mathbf{P}(\xi < x) = \mathbf{P}(\{(\xi_1, ..., \xi_n) < k\} \cup \{\xi \in J_k, \eta < y\}) = \sum_{j<k,j\in I_n} 2^{-n} + \mathbf{P}(\xi \in J_k, \eta < y) = x(k) + 2^{-n}y = x, x \in [0,1)$. (б) Позначимо $\zeta_n = x((\xi_1, ..., \xi_n))$. Тоді $\zeta_n \leq \xi < \zeta_n + 2^{-n}$. Для кожного $x \in J_k, k \in I_n$, маємо $\mathbf{P}(\zeta_n < x) \geq \mathbf{P}((\xi_1, ..., \xi_n) < k) = x(k) \geq x - 2^{-n}$, та $\mathbf{P}(\zeta_n < x) \leq \mathbf{P}(\zeta_n < x(k) + 2^{-n}) \leq x + 2^{-n}$. Тому $|\mathbf{P}(\xi < x) - x| \leq 2^{-n+1} \to 0, n \to \infty$.

15.16. Скористайтесь тим, що ξ має парну щільність, а отже

$\mathbf{E}[\xi] = \mathbf{E}[\xi^3] = 0$.

15.17. (а) Функція розподілу ξ/η
$F(t) = \int_0^\infty \left(\int_0^{xt} \lambda e^{-\lambda y} dy\right) \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^\infty \lambda(1 - e^{-\lambda x t}) e^{-\lambda x} dx =$
$1 - \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda(t+1)x} dx = 1 - (t+1)^{-1}$, $t \geq 0$. Знайдемо щільність: $f(t) = (t+1)^{-2}$, $t \geq 0$. Математичне сподівання: $\mathbf{E}[\xi/\eta] = \int_0^\infty \frac{t}{(1+t)^2} dt = \infty$.
(б) Обчислимо функцію розподілу: $F(t) = \mathbf{P}\{\xi < t(\xi+\eta)\} = \mathbf{P}\{\xi < t\eta/(1-t)\}$. Бачимо, що це така ж ймовірність, як і в (а), але з $t/(1-t)$ замість t. Тому $F(t) = t$, $t \in [0,1]$ ($\xi/(\xi+\eta)$ приймає лише значення з $[0,1]$). Таким чином бачимо, що $\xi/(\xi+\eta)$ має рівномірний на $[0,1]$ розподіл, зі щільністю $1\!\!1_{[0,1]}(x)$, та математичним сподіванням $1/2$.

15.18. (а) Див. задачу 15.20.
(б) Зауважимо, що $-\eta$ має рівномірний розподіл на $[-1,0]$. Тоді
$f_{\xi-\eta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} 1\!\!1_{[0,1]}(t-x) 1\!\!1_{[-1,0]}(x) dx = (1+t) 1\!\!1_{[-1,0]}(t) + (1-t) 1\!\!1_{[0,1]}(t)$.
(в) Позначимо $\zeta = \xi - \eta$. Тоді з (б) $f_\zeta(t) = (1+t) 1\!\!1_{[-1,0]}(t) + (1-t) 1\!\!1_{[0,1]}(t)$. В силу того, що f_ζ - парна: $\mathbf{P}\{|\zeta| < x\} = 2\mathbf{P}\{\zeta \in [0,x]\} = 2\int_0^x (1-t) dt = 2x - x^2$, тоді щільність: $f_{|\xi-\eta|}(x) = 2(1-x)$, $x \in [0,1]$.

15.19. (а) Зобразимо $\xi_i = \mathrm{tg}\,\alpha_i$, $\alpha_i \simeq U(0,\pi)$. Тоді $(\xi_1+\xi_2)/(1-\xi_1\xi_2) = \mathrm{tg}(\alpha_1+\alpha_2) \simeq \mathrm{tg}(\alpha_1+\alpha_2 \bmod \pi)$.

15.20. Позначимо через $\zeta = \prod_{k=1}^n \xi_k$. Зауважимо, що
$\ln \xi_k \simeq \mathrm{Exp}(1)$, тому $\ln \zeta \simeq \Gamma(1,n)$.

15.21. Скористайтесь означенням незалежності для дискретних випадкових величин.

15.22. Доведення необхідності випливає з теореми про перетворення незалежних випадкових величин. Для доведення достатності скористайтеся тим, що індикатор можна наблизити неперервними функціями.

15.23. Некорельованість еквівалентна тотожності:
$\mathbf{E}[g_1(\xi_1) g_2(\xi_2)] = \mathbf{E}[g_1(\xi_1)]\mathbf{E}[g_2(\xi_2)]$. Далі, в якості g_i оберіть індикатори борелєвих множин. Для доведення в інший бік скористайтесь теоремою про перетворення незалежних випадкових величин.

15.24. Знайти сумісну функцію розподілу вектора (ξ,η).

15.25. Скористатись зображенням

$$\{\xi_1 < a, \xi_2 < a\} = \{\xi_1 < \xi_2 < a\} \cup \{\xi_2 \leq \xi_1 < a\}.$$

15.26. Доведіть твердження спочатку для функцій вигляду: $g(x,y) = g_1(x)g_2(y)$. Потім покажіть, що з урахуванням лінійності довільну функцію $g(x,y)$ можна наблизити таким чином.

15.27. $\mathbf{D}[\xi\eta] = \mathbf{E}[\xi^2\eta^2] - \mathbf{E}[\xi\eta]^2 = \mathbf{E}[\xi^2]\mathbf{E}[\eta^2] - \mathbf{E}[\xi]^2\mathbf{E}[\eta]^2$.

15.28. Необхідність даного твердження випливає з теореми про перетворення незалежних випадкових величин та теореми про математичне сподівання добутку незалежних випадкових величин. Доведемо достатність. Помітимо, що з даного твердження випливає таке: $\mathbf{E}[f(\xi)g(\eta)] = \mathbf{E}[f(\xi)]\mathbf{E}[g(\eta)]$, де f, g- поліноми. А оскільки ξ та η - обмежені, то мають місце граничні переходи, а тому в якості f, g можна вибирати будь-які борелєві функції. Зокрема, вибравши індикатори довільних борелєвих множин, отримаємо незалежність ξ та η за означенням.

15.29. $\mathbf{E}[\mu\left(\sum_{k=1}^n(\xi_k-\mu)^2\right)] = \mathbf{E}\left[\sum_{k=1}^n\left(\xi_k^2\mu - 2\xi_k\mu^2 + \mu^3\right)\right]$. Покажемо, що кожен з доданків рівний нулю:
(1) $n\mathbf{E}[\xi_k^2\mu] = \sum_{j=1}^n \mathbf{E}[\xi_k^2\xi_j] = \sum_{j\neq k}\mathbf{E}[\xi_k^2]\mathbf{E}[\xi_j] + \mathbf{E}[\xi_k^3] = 0$.
(2) $n^3\mathbf{E}[\mu^3] = \sum_{i\neq j\neq k}\mathbf{E}[c_{ijk}\xi_i\xi_j\xi_k] + \sum_{k\neq j}\mathbf{E}[c_{kj}\xi_k\xi_j^2] + \sum_{k=1}^n\mathbf{E}[\xi_k^3] = 0$. (3) Зауважимо, що сума інших доданків рівна $2n\mathbf{E}[\mu^3] = 0$.

15.30. Зобразьте ξ_n як суму індикаторів того, що випробування були успішними. Зауважте, що ці індикатори є незалежними випадковими величинами.

15.31. Доведіть рівність множин:

$$\{\xi + \eta = a\} = \cup_y\{\xi = a - y, \eta = y\}.$$

15.32. Використати тотожність задачі 15.31.

15.33. Оберемо ξ_1 – рівномірно розподіленою на множині $\{0, 1, \ldots, n\}$, а $\xi_2 \in \{0, n\}$ з додатними імовірностями.

15.34. (б) Доведемо формулу за індукцією. Формула для $U_1(x)$ випливає з означення. Нехай формула вірна для n, доведемо для $n+1$. Тоді $\mathbf{P}\{\xi_1 + \ldots + \xi_n + \xi_{n+1} < x\} = \int_0^1 U_n(x-y)dy =$
$(n!)^{-1}\sum_{k=0}^n(-1)^k C_n^k \int_0^1 (x-y-k)^n \mathbb{1}_{k<x-y}dy$. Покажіть, що даний

вираз співпадає з $U_{n+1}(x)$, на кожному з інтервалів $x \in [m, m+1)$, $m = \overline{1,n}$.

15.35. Зафіксуємо нульовий напрям, нехай α_k - випадковий кут між $(k-1)$-м та k-м відрізком, та ξ_k - відповідний вектор, $k = \overline{1,n}$. Обчислимо $\mathbf{E}\xi_m 1 = \mathbf{E}\cos(\alpha_1 + ... + \alpha_m) = \operatorname{Re}\mathbf{E}\exp(i(\alpha_1 + ... + \alpha_m)) = \operatorname{Re}(\mathbf{E}\exp(i\alpha_1))^m = \cos^m \alpha$. Отже, $\mathbf{E}(\xi_1 + ... + \xi_n)^2 = n + 2\sum_{1 \le j < k \le n} \mathbf{E}\xi_j\xi_k = n + 2\sum_{j<k} \mathbf{E}\cos(\alpha_{j+1} + ... + \alpha_k) = n + 2\sum_{r=1}^{n-1}(n-r)\cos^r \alpha$. Як можна було очікувати, $|\xi_1 + ... + \xi_n| \to n$ при $\alpha \to 0$.

15.36. Скористайтеся тим, що для довільної борелєвої функції g: $\mathbf{E}g(\xi + \eta) = \mathbf{E}g(\xi)$.

15.37. За нерівністю Коші $f(y)f(x-y) \le (f^2(y) + f^2(x-y))/2$.

15.38. Скористайтесь нерівністю Гельдера.

15.39. Застосувати нерівність
$|\xi + \eta| \, 1\!\!\mathrm{I}_{|\eta| \le a} \ge \min(|\xi - a|\,, |\xi + a|) 1\!\!\mathrm{I}_{|\eta| \le a}$ для $\mathbf{P}(|\eta| \le a) > 0$.

15.40. Використанням зображення $\eta_k = -\ln(1 - \alpha_k)$,
$\xi_j = \Phi^{(-1)}(\beta_j)$, де величини α_k, β_j незалежні і рівномірно розподілені на $(0,1)$, а Φ – стандартна нормальна функція розподілу, та збіжності $\mathbf{P}((\max_{k \le n} \alpha_k)^n < x) \to x, n \to \infty$, довести що границя дорівнює 1.

15.41. Застосувати теорему про розподіл суми незалежних величин.

15.42. Можна вважати, що ці значення - 0 та 1.

15.43. Знайдіть розподіл кількості значень, які не набуваються.

15.44. Доведіть, що розподіл $\operatorname{tg}(\xi + x)$ не залежить від x.

16.1. Скористайтесь теоремою про лінійне перетворення нормальних векторів: $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix}$; (а) $a = \rho$; (б) $a = \rho$.

16.2. $\mathbf{P}\{Y + 5 \le X\} = \mathbf{P}\{X - Y \ge 5\} = (10\pi)^{-1/2} \int_5^\infty e^{-\frac{(x-3)^2}{10}} dx$.

16.3. Покажіть, що функція розподілу $\rho = \sqrt{-2\ln(\alpha_1)}$, має вигляд: $F_\rho(x) = 1 - e^{-x^2/2}$, $x \ge 0$, а щільність $f_\rho(x) = xe^{-x^2/2}$, $x \ge 0$. Зауважте, що $\varphi = 2\pi\alpha_2$ має рівномірний розподіл на $[0, 2\pi]$. Також зауважимо, що ρ та φ - незалежні. Тоді маємо: $\xi_1 = \rho\sin(\varphi)$, $\xi_2 = \rho\cos(\varphi)$. Бачимо, що (ρ, φ) є записом вектора (ξ_1, ξ_2) в полярних координатах. Щоб отримати сумісну щільність ξ_1, ξ_2, обчислимо обернене перетворення координат та порахуємо його якобіан: $\rho = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$, $\varphi =$arctg(ξ_1/ξ_2). Обчислимо якобіан відображення $G(x, y) = (\rho(x, y), \varphi(x, y))$, що дорівнює $(x^2 + y^2)^{-1/2}$. Тоді сумісна щільність ξ_1, ξ_2 має вигляд (див. задачу 14.10):

$$f(x, y) = \frac{\rho(x, y)e^{-\rho^2(x,y)/2}}{2\pi\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

– сумісна щільність стандартного нормального вектора.

16.4. Переконайтесь, що функція розподілу ζ_1/ζ_2, при $t > 0$ та при $t \in \mathbb{R}$ має вигляд: $F(t) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{tx} e^{\frac{-x^2-y^2}{2}} dydx$. Тоді щільність матиме вигляд:

$$f(t) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} xe^{\frac{-x^2-(tx)^2}{2}} dx$$
$$= \pi^{-1} \int_{0}^{\infty} e^{-z^2(t^2+1)/2} dz = (\pi(1 + t^2))^{-1}.$$

16.5. Переконайтесь в даному твердженні шляхом безпосередньої підстановки щільностей описаних величин.

16.6. Позначимо $f(x, y) = \varphi(x)\varphi(y) + \psi(x)\psi(y)$. В силу того, що $|\psi| \le 2\pi e^{-1}$, та функція ψ непарна, маємо: $f(x, y) \ge 0$, та $\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)dxdy = 1$, отже $f(x, y)$ є сумісною щільністю. Нормальність кожної компоненти випливає з того, що $\int_{\mathbb{R}} f(x, y)dy = \varphi(x)$, в силу непарності ψ. Те, що вектор зі щільністю $f(x, y)$ не є нормальним випливає з побудови

16.7. Скористайтесь теоремою про лінійне перетворення нормальних векторів з матрицею:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Покажіть, що коваріаційна матриця вектору $T(\zeta_1, \zeta_2)$, має вигляд:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Таким чином, випадкові величини $\zeta_1 + \zeta_2$ та $\zeta_1 - \zeta_2$ некорельовані, а отже незалежні.

16.8. Квадрат полярного радіусу рівний: $\zeta_1^2 + \zeta_2^2$, що має розподіл χ^2. Полярний кут має вигляд $\mathrm{arctg}(\zeta_1/\zeta_2)$, але величина ζ_1/ζ_2 має розподіл Коші (див. задачу 16.4).

16.9. Обчислимо спочатку функцію розподілу: $F_\xi(x) = \mathbf{P}\{\xi_1^2 + \xi_2^2 \le t\} = t^2$, $t \in [0,1]$ Тоді щільність $\rho = \sqrt{-2\ln(\xi)}$ дорівнює $f_\rho(x) = xe^{-x^2/2}$, $x \ge 0$. Далі бачимо, що $\zeta_1/\zeta_2 = \xi_1/\xi_2 = \tan(\varphi)$, де φ кут, що відповідає точці (ξ_1, ξ_2) в полярних координатах. Маємо також: $\zeta_1^2 + \zeta_2^2 = \frac{(\xi_1^2+\xi_2^2)(-2\ln(\xi))}{\xi} = -2\ln(\xi) = \rho^2$. Отже отримали, що вектор (ζ_1, ζ_2) є результат наступного оберненого відображення вектору (ρ, φ): $\varphi = \mathrm{arctg}(\zeta_1/\zeta_2)$, $\rho = \sqrt{\zeta_1^2 + \zeta_2^2}$, причому величини ρ та φ незалежні, і їх сумісна щільність має вигляд: $f_{\rho,\varphi}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\rho e^{-\rho^2/2}$, $\rho \ge 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. Модуль якобіану такого перетворення рівний $(x^2+y^2)^{-1/2}$, і сумісна щільність (ζ_1, ζ_2) має вигляд: $f_{\zeta_1,\zeta_2}(x,y) = \frac{1}{2\pi}e^{-(x^2+y^2)/2} \simeq N_2(0,0,1,1,0)$.

16.10. Скористайтесь теоремою про лінійне перетворення нормальних величин з $T = (\cos(\theta), \sin(\theta))$.

16.11. (а) Обчисліть $\mathbf{P}\{\max\{|\zeta_1|, |\zeta_2|\} < t\} = (\Phi(t) - \Phi(-t))^2$, (б) $\rho e^{-\rho^2/2}/(2\pi)$, див. 14.3. (в) Перейдемо до полярних координат: $\zeta_1 = \rho\sin(\varphi)$, $\zeta_2 = \rho\cos(\varphi)$. Тоді

$$\zeta_1\zeta_2/\sqrt{\zeta_1^2 + \zeta_2^2} = \rho^2\sin(\varphi)\cos(\varphi)/\rho = \rho\sin(2\varphi)/2.$$

Розглянемо таке перетворення випадкового вектора (ρ, φ): $\eta_1 = \rho\sin(2\varphi)/2$, $\eta_2 = \rho\cos(2\varphi)/2$. Обернене перетворення має вигляд: $\rho = 2\sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2}$, $\varphi = \mathrm{arctg}(\eta_1/\eta_2)/2$. Обчислимо якобіан перетворення $G(x,y) = (2\sqrt{x^2+y^2}, \mathrm{arctg}(x/y)/2)$:

$$r = \begin{vmatrix} \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{2(x^2+y^2)} & -\frac{x}{2(x^2+y^2)} \end{vmatrix} = -\left(\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right) =$$

$= -(x^2+y^2)^{-1/2}$. Тоді сумісна щільність (η_1, η_2) має вигляд:

$$f_{\eta_1,\eta_2}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{x^2+y^2}}\rho(x,y)e^{-\rho^2(x,y)/2} = \frac{1}{\pi}e^{-2(x^2+y^2)} \simeq$$

$N_2(0,0,1/2,1/2,0)$, звідки маємо, що $\eta_1 \simeq N(0,1/2)$.

16.12. Обчислити інтегруванням коефіцієнт кореляції відповідного вектора: $\rho = (\rho_1 + \rho_2)/2$ та довести, що сумісна щільність $(f_1(x_1,x_2) + f_2(x_1,x_2))/2$ не є щільністю нормального вектора $N(0,0,1,1,\rho)$. Щодо маргінальних розподілів, то $\int f_1(x_1,x_2)dx_2 = \int f_2(x_1,x_2)dx_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x_1^2/2}$, звідки випливає шукане твердження.

16.13. $F_{X,Z}(x,z) = \frac{1}{2}\mathbf{P}(X < x, X < z) + \frac{1}{2}\mathbf{P}(X < x, X > -z) = (\Phi(\min(x,z)) + \Phi(x) - \Phi(\min(x,-z)))/2$.

16.14. (а) Перейдіть до полярних координат. Тоді $\xi_1\xi_2 = r^2\sin(2\varphi)/2$, обчисліть щільність φ, у випадку корельованих нормальних векторів. (б) Обчисліть функцію розподілу $\max\{\xi_1,\xi_2\}$. (в) Перейдіть до полярних координат. Зауважте, що $\xi_1/\xi_2 = \text{tg}(\varphi)$.

16.15. Див. 16.32.

16.16. (а) Довести, що $|\rho(f_1(\xi_1), f_2(\xi_2))| = |\rho(\xi_1,\xi_2)|$.

16.17. З зображення $\xi = m + A\zeta$, де $\zeta \simeq N(0,I)$, знаходимо

$$\|\xi\|^2 \le m'm + 2m'A\zeta + \zeta'V\zeta \le \|m\|^2 + \|\zeta\|\, 2\,\|m'A\| + \|\zeta\|^2\,\|V\|\,.$$

Тому достатньо при малих $t > 0$ оцінити

$$\mathbf{E}\exp(t\,\|\zeta\|^2) = (\mathbf{E}\exp(t\zeta_1^2))^n < \infty.$$

16.18. Зобразимо $\xi = A\zeta$, де $\zeta \simeq N_d(0,I)$. Оберемо $B = [b,\infty)$ з $b > 0$. Нехай $y(n) = A^{-1}nb$. З зображення $1 - \Phi(t) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}t}e^{-t^2/2}$, $t \to \infty$, обчислимо $2n^{-2}\ln\mathbf{P}(\xi \ge nb) \sim 2n^{-2}\left(-\sum_{j=1}^d \ln y_j(n) - \sum_{j=1}^d y_j^2(n)/2\right) \sim n^{-2}\,\|y(n)\|^2 \le -\inf_{x\ge b}\left\|A^{-1}x\right\|^2$. Далі за лінійністю поширюємо нерівність на $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$.

16.19. ξ, та $-\xi$.

16.20. Див. задачу 16.19.

16.21. Скористайтесь задачею 10, оскільки дана величина дорівнює $\zeta_1\sin\theta + \zeta_2\cos\theta$, а випадковий кут θ не залежить від ζ_1,ζ_2.

16.22. Перейдіть до полярних координат. Позначте $\zeta_1 = \frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}$, $\zeta_2 = \frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}$. Тоді $\zeta_1/\zeta_2 = \text{tg}(\varphi)$, $\zeta_1^2 + \zeta_2^2 = r^{-2}$, де (r,φ)- полярні координати вектора (ξ,η). Далі знайдіть сумісний розподіл (ζ_1,ζ_2), а потім і розподіл $\zeta_1 + \zeta_2$.

16.23. (а) 2. Для розв'язання (б) та (в) скористайтесь теоремою про лінійне перетворення нормальних векторів з матрицею:

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

16.24. Зауважимо, що величини ξ та $\sqrt{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2}$ незалежні. Знайдемо розподіл $\eta = \sqrt{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2}$. Спочатку помітимо, що $\eta^2 \simeq \chi^2(n)$. Тому $F_\eta(x) = F_{\chi^2(n)}(x^2)$, а щільність η має вигляд: $f_\eta(x) = 2xf_{\chi^2(n)}(x^2) = 2^{-n/2+1}x^{n-1}e^{-x^2/2}/\Gamma(n/2)$, $x \geq 0$. Звідси обчислимо:

$$\mathbf{P}\{\xi/\eta < t\} = \left(2^{(n-1)/2}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\tfrac{n}{2}\right)\right)^{-1} \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x^2/2}\int_{-\infty}^{tx} e^{-y^2/2}\,dy\,dx.$$

Тоді шукана щільність рівна:

$$f(t) = \left(2^{(n-1)/2}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\tfrac{n}{2}\right)\right)^{-1} \int_0^\infty x^n e^{-x^2(1+t^2)/2}dx.$$

Зробимо заміну $y = \frac{x^2(1+t^2)}{2}$, $dy = (1+t^2)xdx$, $x^{n-1} = \left(\frac{2y}{1+t^2}\right)^{(n-1)/2}$.

Тоді $f(t) = (2^{(n-1)/2}\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n}{2})(1+t^2))^{-1}\int_0^\infty \left(\frac{2y}{1+t^2}\right)^{\frac{n-1}{2}} e^{-y}dy =$
$(\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n}{2})(1+t^2)^{\frac{n+1}{2}})^{-1}\int_0^\infty y^{\frac{n+1}{2}-1}e^{-y}dy =$
$(\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n}{2})(1+t^2)^{\frac{n+1}{2}})^{-1}\Gamma(\frac{n+1}{2})$.

16.25. Перейдіть до полярних координат.

16.26. Див. теорему про розподіл хі-квадрат [2, ст. 99].

16.27. Розподіл Фішера з параметрами n, n.

16.28. Досить показати, що $\sum_{k=1}^n \zeta_k\sigma_k$ мають такий же розподіл, що і $\zeta_1\sigma$. Але $\zeta_k\sigma_k$ мають нормальний розподіл з параметрами $(0, \sigma^2)$, а сума таких величин має нормальний розподіл з $(0, \sum_{k=1}^n \sigma_k^2)$, що співпадає з розподілом $\zeta_1\sigma$.

16.29. Покажіть, що має місце рівність:
$f(x)g(y) = f(x\cos(\theta) - y\sin(\theta))g(x\sin(\theta) + y\cos(\theta))$, де f та g - щільності ξ та η. Візьміть похідні по x та y та розв'яжіть отриману систему диференціальних рівнянь.

16.30. Розкладіть проекції за базисами у відповідних просторах. Покажіть, що кожна проекція зображується у вигляді $a_{i_1}\xi_{i_1} + \ldots a_{i_n}\xi_n$, та $b_{j_1}\xi_{j_1} + \ldots + b_{j_m}\xi_{j_m}$, причому множини $\{i_1, \ldots, i_n\}$ та

$\{j_1, \dots, j_m\}$ не перетинаються. Далі скористайтесь теоремою про лінійне перетворення нормального вектору, та теоремою про перетворення незалежних випадкових величин.

16.31. Нехай T' – нульове продовження на $\mathbb{R}^n$ матриці ортонормованого базису простору власних векторів матриці A. Тоді $AT' = 0$, ідемпотентна матриця $J = TT'$ містить $n - \mathrm{rang}(A) = n - \mathrm{rang}(V)$ перших одиниць на діагоналі, причому для кожного $\varepsilon \neq 0$ матриця $A+ \varepsilon T$ невироджена. Отже, вектор $\xi_\varepsilon = m + (A + \varepsilon T)\zeta = \xi + \varepsilon T\zeta$ є n-вимірним нормальним, $\xi_\varepsilon \to \xi, \varepsilon \to 0$, і оскільки $\mathbf{E}\xi_\varepsilon = m$, $\mathrm{Cov}(\xi_\varepsilon) = (A + \varepsilon T)(A + \varepsilon T)' = V + \varepsilon^2 J$, то розподіл $\xi_\varepsilon \simeq N_n(m, V + \varepsilon^2 J)$ повністю визначається параметрами ε та m, V. Тому границя $\mathbf{P}(\xi \in \Pi_x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathbf{P}(\xi_\varepsilon \in \Pi_x)$ залежить лише від m, V та x.

16.32. Спочатку знайдіть щільність добутку $\zeta_1\zeta_4$.

16.33. Звести до стандартної нормальної величини, $2\sigma^2 = (b^2 - a^2)^{-1} \ln(b/a)$.

16.34. $\sqrt{2/\pi}$.

16.35. Ні.

16.36. Знайти вираз для даного вектора через стандартний нормальний вектор.

16.37. Застосувати формулу для обчислення сумісної щільності підвектора $f_{(\xi_1,\dots\xi_k)}(x_1, \dots x_k) = \int \dots \int f_{(\xi_1,\dots\xi_n)}(x_1, \dots x_n)dx_{k+1} \dots dx_n$.

17.1. $\mathbf{P}\{\xi = k\} = e^{-\lambda}\lambda^k/k! = \left(e^{-\lambda}\lambda^{k-1}/(k-1)!\right)\lambda/k = \mathbf{P}\{\xi = k-1\}\lambda/k$.

17.2. При $\lambda \leq 1$, максимальне значення досягається в $n = 0$. При $\lambda > 1$, в $[\lambda]$. Для доведення скористайтесь формулою з 17.1.

17.3. (а) Обчисліть згортку. (б) Розгляньте перетворене координат, $\zeta_1 = \xi_1 + \xi_2$, $\zeta_2 = \xi_1/\xi_2$, та обчисліть сумісну щільність f_{ζ_1,ζ_2}.

17.4. Рекурентні рівняння: $c_{11} = \lambda_1$, $c_{n+1,k} = \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1}-\lambda_k} c_{nk}$, $k \leq n$, $c_{n+1,n+1} = -\sum_{k=1}^n c_{n+1,k}$.

17.5. Доведемо формулу за індукцією. База індукції випливає з означення розподілу Ерланга. Нехай формула виконана для n, тоді

для $n+1$: $F_{n+1}(t) = \int_0^t F_n(t-x)\lambda e^{-\lambda x}dx =$
$\lambda\int_0^t e^{-\lambda x}dx - \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_0^t(\lambda(t-x))^k/k!e^{-\lambda(t-x)}\lambda e^{-\lambda x}dx\right) =$
$1-e^{-\lambda t}-e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{(\lambda t)^{k+1}}{(k+1)!}\right) = 1-\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\right)e^{-\lambda t}$.

17.6. Адитивність безпосередньо випливає з теореми про згортку двох гама розподілів. Покажемо однорідність, або: $\mu(\lambda,\alpha) = \alpha\mu(\lambda,1)$. Для цілих α це випливає з адитивності. Нехай $\alpha = p/q$, де p,q-цілі. Тоді, в силу адитивності: $\mu(\lambda,p/q) = \sum_{k=1}^{p}\mu(\lambda,1/q) = p\mu(\lambda,1/q)$, але з іншого боку: $\mu(\lambda,1) = \sum_{k=1}^{q}\mu(\lambda,1/q) = q\mu(\lambda,1/q)$. Таким, чином $\mu(\lambda,p/q) = (p/q)\mu(\lambda,1)$. Помітимо, що в силу рівномірної збіжності гама функції, $\mu(\lambda,\alpha)$ -є неперервною функцією. Тому твердження $\mu(\lambda,\alpha) = \alpha\mu(\lambda,1)$ виконано для всіх α. А оскільки $\mu(\lambda,1)$ -це математичне сподівання показникового розподілу з параметром λ, маємо: $\mu(\lambda,\alpha) = \alpha/\lambda$. Доведення для дисперсій проводиться аналогічно.

17.7. (а) $\mathbf{P}\{\xi+\eta=n\} = \sum_{k=0}^{n}\mathbf{P}\{\xi=k,\eta=n-k\} =$
$\sum_{k=0}^{n}(e^{-\lambda}\lambda^k/k!)(e^{-\mu}\mu^{n-k}/(n-k)! =$
$e^{-(\lambda+\mu)}\sum_{k=0}^{n}\lambda^k\mu^{n-k}/(k!(n-k)!) = e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^n/n!$,
(б) $\mathbf{P}\{\xi=k|\xi+\eta=n\} = \mathbf{P}\{\xi=k,\eta=n-k\}/\mathbf{P}\{\xi+\eta=n\} =$
$e^{-\lambda}\frac{(\lambda)^k}{k!}e^{-\mu}\frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}/e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^n/n! = \lambda^k\mu^{n-k}n!/(\lambda+\mu)^n k!(n-k)! =$
$C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$, де $p=\lambda/(\lambda+\mu)$.

17.8. (а) Позначимо $\zeta_1 = \min\{\xi_1,\xi_2\}$, $\zeta_2 = |\xi_1-\xi_2|$, обчислимо $F_{\zeta_1,\zeta_2}(u,v) = \mathbf{P}\{\zeta_1<u,\zeta_2<v\} = \mathbf{P}\{\xi_1<u,\xi_2-\xi_1<v,\xi_1<\xi_2\} + \mathbf{P}\{\xi_2<u,\xi_1-\xi_2<v,\xi_1\geq\xi_2\} = \int_0^u\int_x^{x+v}e^{-x-y}dydx + \int_0^u\int_y^{y+v}e^{-x-y}dxdy = 2\int_0^u e^{-x}(e^{-x}-e^{-x-v})dx = 1-e^{-2u}-(e^{-v}-e^{-2u-v})) = 1-e^{-2u}-e^{-v}+e^{-2u-v} = (1-e^{-2u})(1-e^{-v}),\ u,v\geq 0$. Отже ζ_1,ζ_2 незалежні, $\zeta_1\simeq Exp(2)$, $\zeta_2\simeq Exp(1)$. (б) Див. 15.19.

17.9. (а) $F(t) = 1-\frac{\lambda_2(1-t)}{\lambda_1 t+\lambda_2(1-t)}$, $t\in[0,1]$, $F(t)=1,\ t\geq 1$.
(б) Щільність суми при $\lambda_1\neq\lambda_2$ має вигляд: $\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}(e^{-\lambda_1 t}-e^{-\lambda_2 t})$, $t\geq 0$. (в) $F(t) = 1-\frac{\lambda_2}{\lambda_2+\lambda_1 t}$. (г) $F(t) = 1-1/t$, $t\geq 1$.

17.10. $\mathbf{E}[\zeta^r] = \lambda^\alpha\Gamma^{-1}(\alpha)\int_0^\infty x^{\alpha-1+r}e^{-\lambda x}dx =$
$\frac{\lambda^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\lambda^{\alpha-1+r}}\int_0^\infty y^{\alpha+r-1}e^{-y}dy = \frac{\Gamma(\alpha+r)}{\lambda^r\Gamma(\alpha)}$

17.11. Скористаємося заміною координат, як і в 15.19. Модуль якобіану оберненого перетворення рівний x. Запишемо сумісну щільність:

$$f_{\zeta_1,\zeta_2}(x,y) = x\lambda^2(\lambda xy)^{\alpha_1-1}e^{-\lambda xy}(\lambda x(1-y))^{\alpha_2-1}e^{-\lambda x(1-y)}/\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)$$
$$= \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}x^{\alpha_1+\alpha_2-1}e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}y^{\alpha_1-1}(1-y)^{\alpha_2-1}\frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)},$$

$x \geq 0$, $y \in [0,1]$, звідки бачимо, що ζ_1 та ζ_2 незалежні, та $\zeta_1 \simeq \Gamma(\lambda, \alpha_1+\alpha_2)$, $\zeta_2 \simeq B(\alpha_1, \alpha_2)$.

17.12. (а) Позначимо $S_n = \sum_{k=1}^n \zeta_k \simeq \Gamma(\lambda, n)$, тоді, для $m \geq 2$: $\mathbf{P}\{\nu = m\} = \mathbf{P}\{S_{m-1} < 1, \xi_m \geq 1 - S_{m-1}\} =$ $\frac{1}{(m-2)!}\int_0^1 \lambda^{m-1}x^{m-2}e^{-\lambda x}\int_{1-x}^{\infty}\lambda e^{-\lambda y}dydx =$ $\frac{1}{(m-2)!}\int_0^1 \lambda^{m-1}x^{m-2}e^{-\lambda x}e^{-\lambda(1-x)}dx = \frac{\lambda^{m-1}e^{-\lambda}}{(m-2)!}\int_0^1 x^{m-2}dx = \frac{\lambda^{m-1}e^{-\lambda}}{(m-1)!}$. Для $m = 1$, $\mathbf{P}\{\nu = 1\} = \mathbf{P}\{\zeta_1 > 1\} = e^{-\lambda}$, отже $\nu - 1$ має розподіл Пуассона з параметром λ. (б) та (в) Обчисліть сумісну функцію розподілу ζ_ν та $\zeta_{\nu+k}$,.з урахуванням незалежності подій $\{\zeta_n = i, \nu = n\}$ та $\{\zeta_{n+k} = j\}$.

17.13. Врахувати рівність $\mathbf{P}(\eta_A = i, \eta_B = n - i \mid \eta = n) = C_n^i p^i(1-p)^{n-i}$.

17.14. Геометричний розподіл на $\mathbb{Z}_+$ з параметром $p = 1 - \exp(-\lambda/\alpha)$.

17.15. $\lambda\exp(-\lambda|x|/2), x \in \mathbb{R}$.

17.16. $f_{nm}(x) = c_{nm}x^{n/2-1}\left(1 + \frac{n}{m}x\right)^{-(n+m)/2}$, $c_{nm} = (\frac{n}{m})^{n/2}B(\frac{n}{2}, \frac{m}{2})$.

17.17. Див. 16.3.

17.18. Див. 14.13.

17.19. Зауважимо, що $-\ln\xi_j \simeq Exp(1) \simeq \chi_2^2$.

17.20. $0.2\ \ln 5$.

17.21. Зобразити ξ через стандартний нормальний вектор.

18.1. Нехай $\xi_n \to^{\mathbf{P}} \xi$. Зауважимо, що для послідовності величин $\eta_n = \xi_n - \xi \to^{\mathbf{P}} 0$, $n \to \infty$. Розглянемо функцію $f(x) = 1 - \exp(-|x|)$. Зауважимо, що ця функція є неперервною, та обмеженою. Тоді за теоремою про властивості збіжності за ймовірністю, (в) $\mathbf{E}f(\eta_n) \to \mathbf{E}f(0) = 0,\ n \to \infty$.

Доведемо обернене твердження. Як і раніше, розглянемо випадкову величину $\eta_n = \xi_n - \xi$. Покажемо, що з того, що $\mathbf{E}[1 - \exp(-|\eta_n|)] \to 0,\ n \to \infty$, випливає, $\eta_n \to^{\mathbf{P}} 0,\ n \to \infty$. Нехай існує таке $\varepsilon > 0$, що $\mathbf{P}\{|\eta_n| > \varepsilon\}$ не прямує до нуля, при $n \to \infty$. Позначимо, через $A_n = \{|\eta_n| > \varepsilon\}$. Тоді існує таке $\delta > 0$, що $\mathbf{P}\{A_n\} > \delta$, для нескінченної кількості n. Тоді:
$\mathbf{E}[1 - \exp(-|\eta_n|)] \geq \mathbf{E}[(1 - \exp(-|\eta_n|))\mathbb{1}_{A_n}] \geq (1 - \exp(-\varepsilon))\delta$, причому остання нерівність виконується для нескінченної кількості n, що протирічить збіжності до нуля $\mathbf{E}[1 - \exp(-|\eta_n|)]$.

18.2. Покажемо, що для довільного $\varepsilon > 0$, та $m > 0$, існує такий номер n_m, що для всіх $n > n_m$: $\mathbf{P}\{|g(\xi_n + \eta_n) - g(\xi_n)| > \varepsilon\} < 1/m$. Запишемо: $\mathbf{P}\{|g(\xi_n+\eta_n)-g(\xi_n)| > \varepsilon\} \leq \mathbf{P}\{|\eta_n| > c\}+\mathbf{P}\{|\xi_n| > c\}+ \mathbf{P}\{|g(\xi_n + \eta_n) - g(\xi_n)| > \varepsilon, |\eta_n| < c, |\xi_n| < c\}$. В силу обмеженості за ймовірністю послідовності ξ_n, можемо знайти таке c_m, що для всіх n, $\mathbf{P}\{|\xi_n| > c_m\} < (3m)^{-1}$. В силу того, що $\eta_n \to^{\mathbf{P}} 0,\ n \to \infty$, знайдеться такий номер n', що для всіх $n > n'$: $\mathbf{P}\{|\eta_n| > c_m\} < (3m)^{-1}$. Розглянемо: $\mathbf{P}\{|g(\xi_n+\eta_n)-g(\xi_n)| > \varepsilon, |\eta_n| < c_m, |\xi_n| < c_m\}$. Зауважимо, що ми маємо справу з неперервною функцією g на компакті $[-2c_m, 2c_m]$. Отже на цьому проміжку вона є рівномірно неперервною. А тому знайдеться таке $\delta > 0$, що для довільних $x, x' \in [-2c_m, 2c_m]$, з того, що $|x-x'| < \delta$, випливає $|g(x)-g(x')| < \varepsilon$. Тому маємо нерівність: $\mathbf{P}\{|g(\xi_n + \eta_n) - g(\xi_n)| > \varepsilon, |\eta_n| < c_m, |\xi_n| < c_m\} \leq \mathbf{P}\{|\eta_n| > \delta, |\eta_n| < c_m, |\xi_n| < c_m\} \leq \mathbf{P}\{|\eta_n| > \delta\}$. В силу того, що η_n прямує до нуля за ймовірністю, знайдеться таке n'', що для кожного $n > n''$: $\mathbf{P}\{|\eta_n| > \delta\} < (3m)^{-1}$. Тоді шукане n_m рівне $\max\{n', n''\}$.

18.3. $\mathbf{D}[\ln(\xi_n)] = o(n), n \to \infty$.

18.4. $I_n = \mathbf{E}[g(S_n/n)]$, де $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$, де ξ_k - незалежні, рівномірно розподілені на $[0, 1]$, випадкові величини. Для завершення доведення скористайтеся законом великих чисел, та теоремою про властивості збіжності для ймовірністю.

18.5. Повторіть доведення (а) теореми про властивості збіжності за ймовірності в $\mathbb{R}^2$.

18.6. Розглянемо квадрат $[-c,c]^2$, на ньому функція f буде рівномірно неперервною, а отже $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0, \forall(x_1,x_2),(y_1,y_2) \in [-c,c]^2$, з того, що $\|x-y\| < \delta$, випливає, що $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$. Тому $\{\|(\xi_n,\eta_n)-(\xi,\eta)\| < \delta\} \cap \{(\xi_n,\eta_n) \in [-c,c]^2\} \subset \{|f(\xi_n,\eta_n) - f(\xi,\eta)| < \varepsilon\}$, $\mathbf{P}\{|f(\xi_n,\eta_n)-f(\xi,\eta)| < \varepsilon\} \geq \mathbf{P}\{\|(\xi_n,\eta_n)-(\xi,\eta)\| < \delta\} \to 1$, $n \to \infty$.

18.7. Застосуйте властивості збіжності за ймовірністю.

18.8. Обчисліть дисперсії, та скористайтеся теоремою Чебишева, про закон великих чисел.

18.9. Ліва частина дорівнює $\mathbf{E}f((\xi_1+...+\xi_n)/n)$, де ξ_k незалежні та мають розподіл Пуассона $\Pi(x)$.

18.10. Дане твердження досить довести для $f(x) = x^m$, розгляньте $n > m$. Тоді поліном Бернштейна набуває вигляду: $B_n(f,x) = \sum_{k=1}^{n}(k/n)^m C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$, що рівне $\mu_m(x)/n^m$, де $\mu_m(x)$- m-тий момент біноміального розподілу $B(n,x)$. Покажіть, що степінь $\mu_m(x)$ не перевищує m. Помітимо, що $\mu_1(x) = nx$ - поліном першого степеня. Далі за індукцією, припустіть, що $\mu_l(x)$ - поліном l-того степеня, покажіть, що $\mu_{l+1}(x)$ має степінь $l+1$. Для цього візьміть похідну від $\mu_l(x)$.

18.11. Для доведення нерівності трикутника див. задачу 2.5. Доведемо повноту. Нехай A_n, така послідовність, що $\mathbf{P}(A_n \Delta A_m) \to 0$, $n,m \to \infty$. Позначимо, $A = \cap_{n\geq 1} A_n$. Тоді $\mathbf{P}(A_n \Delta A) = \mathbf{P}(A_n \setminus A) \leq \mathbf{P}(A_n \setminus A_m) \to 0$, $n,m \to \infty$.

18.12. Зауважимо, що $\mathbf{E}(\xi_n - \xi)(\eta_n - \eta) \leq ||\xi_n - \xi|| ||\eta_n - \eta|| \to 0$, $n \to \infty$. Також маємо: $\mathbf{E}[\xi_n\eta] = \mathbf{E}[(\xi_n - \xi)\eta] + \mathbf{E}[\xi\eta] \to \mathbf{E}[\xi\eta]$. Далі запишемо: $\mathbf{E}[\xi_n\eta_n] = \mathbf{E}[(\xi_n - \xi)(\eta_n - \eta)] - \mathbf{E}[\xi\eta] + \mathbf{E}[\xi_n\eta] + \mathbf{E}[(\eta_n\xi)] \to \mathbf{E}[\xi\eta]$.

18.13. Нехай $\xi_n \to^{\mathbf{P}} \xi$, $n \to \infty$. Тоді існує підпослідовність ξ_{n_k} що збігається до ξ майже напевно. Застосувавши до цієї підпослідовності теорему Лебега про мажоровану збіжність, отримаємо: $\lim_{k\to\infty} \mathbf{E}\xi_{n_k} = \mathbf{E}\xi$. Нехай тепер існує така підпослідовність $m_k \to \infty$, що для неї остання збіжність не виконується. Оскільки $\xi_{m_k} \to^{\mathbf{P}} \xi$, то існує підпідпослідовність $(m_{k_j}) \subset (m_k)$ така, що

$\xi_{m_{k_j}}$ збігається до ξ майже напевно. Застосувавши теорему Лебега про мажоровану збіжність, отримаємо, що границя математичних сподівань $\xi_{m_{k_j}}$ рівна $\mathbf{E}\xi$, що протирічить припущенню.

18.14. Позначимо через $A_n^+(\varepsilon) = \{|\eta_n - \zeta| > \varepsilon\}$, $A_n^-(\varepsilon) = \{|\xi_n - \zeta| > \varepsilon\}$, $A_n(\varepsilon) = \{|\zeta_n - \zeta| > \varepsilon\}$. Нехай $\omega \in A_n(\varepsilon)$, тоді або $\eta_n(\omega) \geq \zeta_n(\omega) > \zeta(\omega) + \varepsilon$ або, $\xi_n(\omega) \leq \zeta_n(\omega) < \zeta(\omega) - \varepsilon$, іншими словами $\omega \in A_n^+(\varepsilon) \cup A_n^-(\varepsilon)$. А отже: $A_n(\varepsilon) \subset A_n^+(\varepsilon) \cup A_n^-(\varepsilon)$, звідки маємо: $\mathbf{P}\{|\zeta_n - \zeta| > \varepsilon\} = \mathbf{P}(A_n(\varepsilon)) \leq \mathbf{P}(A_n^+(\varepsilon)) + \mathbf{P}(A_n^-(\varepsilon)) \to 0,\ n \to \infty.$

18.15. Лема Пратта. Покажемо спочатку, що множина $\{\xi_{2n}, n \geq 1\}$ рівномірно інтегровна, тобто $\sup_n \mathbf{E}|\xi_{2n}|1\!\!1_{|\xi_{2n}|>c} \to 0,\ c \to \infty$. Запишемо, для $c > 0$: $\mathbf{E}|\xi_{2n}|1\!\!1_{|\xi_{2n}|>c+1} = \mathbf{E}\xi_{2n}1\!\!1_{\xi_{2n}>c+1} - \mathbf{E}\xi_{2n}1\!\!1_{\xi_{2n}<-c-1}$ $\leq \mathbf{E}\xi_{3n}1\!\!1_{\xi_{3n}>c+1} - \mathbf{E}\xi_{1n}1\!\!1_{\xi_{1n}>-c-1}$. Покажемо, що перший доданок прямує до нуля. $\mathbf{E}\xi_{3n}1\!\!1_{\xi_{3n}>c+1} \leq |\mathbf{E}(\xi_{3n} - \xi_3)| + \mathbf{E}\xi_3 1\!\!1_{\xi_{3n}>c+1}$. Перший доданок прямує до нуля за умовою. Перевіримо другий:
$\mathbf{E}\xi_3 1\!\!1_{\xi_{3n}>c+1} = \mathbf{E}\xi_3 1\!\!1_{\xi_{3n}>c+1, |\xi_{3n}-\xi_3|>1} + \mathbf{E}\xi_3 1\!\!1_{\xi_{3n}>c+1, |\xi_{3n}-\xi_3|<1} \leq$ $\mathbf{E}\xi_3 1\!\!1_{|\xi_{3n}-\xi_3|>1} + \mathbf{E}\xi_3 1\!\!1_{\xi_3>c}$. Зауважимо, що другий доданок прямує до нуля при $c \to \infty$, оскільки ξ_3 інтегровна, а $\overline{\lim}$ першого доданку рівний нулю, оскільки $\mathbf{P}\{|\xi_{3n} - \xi_3| > 1\} \to 0$, $n \to \infty$. Отже показано, що $\overline{\lim}\, \mathbf{E}\xi_{2n}1\!\!1_{|\xi_{2n}|>c} \to 0,\ c \to \infty$. Але супремум від верхньої границі відрізняється на не більш ніж скінчену кількість елементів, і взявши це до уваги, легко переконатися у збіжність до нуля для супремума. Покажемо тепер, що має місце збіжність в L_1. Помітимо, спочатку, що з рівномірної інтегровності випливає, що $\sup \mathbf{E}|\xi_{2n}| < \infty$. Покажемо, що $\overline{\lim}\mathbf{E}|\xi_{2n} - \xi_2|1\!\!1_{|\xi_{2n}-\xi_2|>\varepsilon} = 0$. Позначимо, через A_n множину: $\{|\xi_{2n} - \xi_2| > \varepsilon\}$, тоді $\mathbf{P}(A_n) \to 0$. Запишемо: $\mathbf{E}|\xi_{2n} - \xi_2|1\!\!1_{A_n} \leq \mathbf{E}|\xi_{2n}|1\!\!1_{A_n} + \mathbf{E}|\xi_2|1\!\!1_{A_n}$, другий доданок прямую до нуля за теоремою Лебега про мажоровану збіжність, щодо першого доданку, то: $\mathbf{E}|\xi_{2n}|1\!\!1_{A_n} = \mathbf{E}|\xi_{2n}|1\!\!1_{A_n \cap |\xi_{2n}| \leq a} + \mathbf{E}|\xi_{2n}|1\!\!1_{A_n \cap |\xi_{2n}|>a} \leq$ $a\mathbf{P}(A_n) + \mathbf{E}|\xi_{2n}|1\!\!1_{|\xi_{2n}|>a}$, тому вибравши спочатку таке a, щоб малим був другий доданок, а потім таке n, щоб малим був доданок $a\mathbf{P}(A_n)$, можемо зробити весь вираз як завгодно малим. Для доведення збіжності в L_1 залишилось записати: $\mathbf{E}|\xi_{2n} - \xi_2| = \mathbf{E}|\xi_{2n} - \xi_2|1\!\!1_{A_n} + \mathbf{E}|\xi_{2n} - \xi_2|1\!\!1_{\overline{A_n}} \leq \varepsilon + \mathbf{E}|\xi_{2n} - \xi_2|1\!\!1_{A_n}$, звідки враховуючи по-

передньо доведений факт: $\overline{\lim}\mathbf{E}|\xi_{2n}-\xi_2|\le\varepsilon$, а в силу довільності ε отримаємо збіжність в L_1. Для завершення доведення залишилось записати: $|\mathbf{E}(\xi_{2n}-\xi_2)|\le\mathbf{E}|\xi_{2n}-\xi_2|\to 0,\ n\to\infty$.

18.16. $\mathbf{E}\left(\frac{S_n-\mathbf{E}S_n}{n}\right)^2=\mathbf{D}S_n/n^2$. Обчислимо $\mathbf{D}S_n=\mathbf{D}\xi_n+\mathbf{D}S_{n-1}+2\mathrm{cov}(S_{n-1},\xi_n)=\sum_{k=1}^n\mathbf{D}\xi_n+2\sum_{k=2}^n\mathrm{cov}(S_{k-1},\xi_k)\le n\sup\mathbf{D}\xi_n+2\sum_{k=2}^n\mathrm{cov}(S_{k-1},\xi_k)$. Для завершення доведення слід показати, що другий доданок є $o(n^2)$. Позначимо, через $a_n=\sup_k|\rho(\xi_{n+k},\xi_k)|$, тоді $a_n\to 0,\ n\to\infty$. Запишемо: $|\sum_{k=2}^n\mathrm{cov}(S_{k-1},\xi_k)|=\left|\sum_{k=2}^n\sum_{j=1}^{k-1}\mathrm{cov}(\xi_j,\xi_k)\right|\le\sup\mathbf{D}\xi_n\sum_{k=2}^n\sum_{j=1}^{k-1}|\rho(\xi_j,\xi_k)|=\sup\mathbf{D}\xi_n\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-k}|\rho(\xi_{k+j},\xi_j)|=\sup\mathbf{D}\xi_n\sum_{k=1}^n a_k(n-k)$. Покажемо, що останній вираз є $o(n^2)$: $\sum_{k=1}^n a_k(n-k)n^{-2}\le\sum_{k=1}^n a_k/n+\sum_{k=1}^n a_k k/n^2\le 2\sum_{k=1}^n a_k/n\to 0$, $n\to\infty$, за теоремою Тьопліца.

18.17. Має місце більш сильний результат, а саме збіжність м.н. Зауважимо, що попарної незалежності достатньо для того, щоб дисперсія суми була рівною сумі дисперсій. Не втрачаючи загальності, доведемо дане твердження для $\xi_1\ge 0$. Позначимо $\xi_n'=\xi_n 1\!\!1_{\xi_n\le n}$, $S_n'=\sum_{k=1}^n\xi_k'$, $k_n=[\alpha]^n$, для деякого $\alpha>1$. Доведення проведемо в декілька етапів.

(1) Покажемо, що $S_n'/k_n\to\mu$, м.н. та $\mathbf{E}S_n'/k_n\to\mu$. Запишемо: $\sum_{n\ge1}\mathbf{P}\left\{|\frac{S_{k_n}'-\mathbf{E}S_{k_n}'}{k_n}|>\varepsilon\right\}\le\sum_{n\ge1}\frac{\mathbf{D}S_{k_n}'}{\varepsilon^2k_n^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{n\ge1}\frac{1}{k_n^2}\sum_{j=1}^{k_n}\mathbf{D}\xi_j'\le\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{n\ge1}\mathbf{E}(\xi_n')^2\sum_{j\ge n}\frac{1}{[\alpha]^{2j}}\le c\sum_{n\ge1}\mathbf{E}(\xi_n')^2/n^2=c\sum_{n\ge1}n^{-2}\sum_{j=0}^{n-1}\mathbf{E}\xi_n^2 1\!\!1_{j\le\xi_n<j+1}\le c_1\sum_{n\ge0}\frac{1}{n+1}\mathbf{E}\xi_1^2 1\!\!1_{n\le\xi_1<n+1}\le c_1\sum_{n\ge0}\mathbf{E}\xi_1 1\!\!1_{n\le\xi_1<n+1}=c_1\mu$. Звідки за лемою Бореля-Кантеллі: $\overline{\lim}\left|\frac{S_n'-\mathbf{E}S_n'}{k_n}\right|=0$, м.н. Далі: $\mu=\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\xi_1 1\!\!1_{0\le\xi_1<n}=\lim\mathbf{E}\xi_1'=\lim\frac{S_{k_n}'}{k_n}$, де остання рівність випливає з теореми Тьопліца. А отже і $S_{k_n}'/k_n\to^{\mathbf{P}1}\mu$.

(2) Покажемо, що $S_{k_n}/k_n\to\mu$, м.н. Для цього розглянемо: $\sum_{n\ge1}\mathbf{P}\{\xi_n\ne\xi_n'\}=\sum_{n\ge1}\mathbf{P}\{\xi_1>n\}\le\mu$. Отже за лемою Бореля-Кантеллі, отримаємо, що $\xi_n\ne\xi_n'$ може виконуватись лише для скінченої кількості індексів n. А тому $S_{k_n}/k_n\to\mu$, м.н.

(3) Далі з монотонності S_n отримаємо: $\mu/\alpha\le\underline{\lim}S_n/n\le\overline{\lim}S_n/n\le$

$\alpha\mu$, в силу довільності $\alpha > 1$ отримаємо твердження задачі.

18.18. Нехай величини $(\xi_k, k \geq 1)$ незалежні та $\mathbf{P}(\xi_k = k) = 1/k = 1 - \mathbf{P}(\xi_k = 0)$. Ясно, що $\mathbf{E}|\xi_k| = 1$ обмежені, та умова теореми Чебишева не виконується. Якби мав місце ЗВЧ, то при $z \in (0,1)$ границя генератрис $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E} z^{S_n/n-1} = 1$. Однак остання дорівнює

$$\lim_{n\to\infty} z^{-1} \prod\nolimits_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\left(1 - z^{k/n}\right)\right) \leq z^{-1} \exp\left(-\int_0^1 \frac{1-z^s}{s} ds\right) < 1.$$

18.19. Обчислимо дисперсії ξ_n: $\mathbf{D}[\xi_n] = \mathbf{D}[\sum_{k=0}^{m} c_k \varepsilon_{n-k}] = \sigma^2 \sum_{k=0}^{m} c_k^2$, де σ^2 - дисперсія ε_k. Аналогічно знаходимо дисперсію сум $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$ та доводимо збіжність $\mathbf{D}[S_n/n] \to 0$.

18.20. Позначимо, $\xi'_{k,n} = \xi_k 1\!\!1_{|\xi_k| \leq n}$, $S'_n = \sum_{k=1}^{n} \xi'_{k,n}$, $m_n = \mathbf{E} S'_n = n\mathbf{E}\xi_1 1\!\!1_{|\xi_1| \leq n}$. Доведемо достатність. Для цього покажемо виконання наступної нерівності:

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{S_n - m_n}{n}\right| > \varepsilon\right\} \leq \frac{1}{n\varepsilon^2} \mathbf{D}\xi_1 1\!\!1_{|\xi_1| \leq n} + n\mathbf{P}\{|\xi_1| > n\}.$$

Для цього помітимо, що:
$\mathbf{P}\{|S_n - m_n| \geq n\varepsilon\} = \mathbf{P}(\{|S_n - m_n| \geq n\varepsilon\} \cap \cap_{k=1}^{n} \{|\xi_k| \leq n\}) + \mathbf{P}(\{|S_n - m_n| \geq n\varepsilon\} \cap \cup_{k=1}^{n} \{|\xi_k| > n\}) \leq \mathbf{P}\{|S'_n - m_n| > n\varepsilon\} + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\{|\xi_k| > n\} \leq (n\varepsilon)^{-2} \mathbf{D} S'_n + n\mathbf{P}\{|\xi_1| > n\} = \frac{1}{n\varepsilon^2} \mathbf{D}\xi'_{n,n} + n\mathbf{P}\{|\xi_1| > n\}$. Таким чином нерівність доведена. Помітимо, що другий доданок у цій нерівності прямую до нуля за умовою. Покажемо, що перший теж прямує до нуля: $n^{-1}\mathbf{D}\xi_1 1\!\!1_{|\xi_1| \leq n} \leq n^{-1}\mathbf{E}\xi_1^2 1\!\!1_{|\xi_1| \leq n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k^2 \mathbf{P}\{k-1 \leq |\xi_1| < k\} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{k} (2j-1)\right) \mathbf{P}\{k-1 \leq |\xi_1| < k\} \leq \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n} j\mathbf{P}\{j-1 \leq |\xi_1| < n\} \leq \frac{2}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)\mathbf{P}\{|\xi_1| > j\} \leq \frac{4}{n} \sum_{j=0}^{n-1} j\mathbf{P}\{|\xi_1| > j\} \to 0,\ n \to \infty$. Отже достатність доведена. Для доведення необхідності припустіть спочатку, що ξ_1 має симетричний розподіл, потім доведіть слабкий закон великих чисел для максимумів: $\frac{\max_{1\leq k\leq n} |\xi_k|}{n} \to 0$, за ймовірністю, звідси виведіть виконання умови $n\mathbf{P}\{|\xi_1| > n\} \to 0,\ n \to \infty$. Після цього поверніться до загального випадку і завершіть доведення.

18.21. Зобразіть дані вирази у вигляді: $\mathbf{E}[f(\xi_n)]$, для підходящим чином вибраних випадкових величин ξ_n (наприклад, в першому випадку, це буде $\mathbf{E}f(x+\xi_n/n)$, де ξ_n має розподіл Пуассона з параметром cn). Потім доведіть, що для ξ_n виконано закон великих чисел і повторіть доведення теореми про поліноми Бернштейна.

18.22. Скористайтеся тим же прийомом, що і в 18.4.

18.23. Звести величину під знаком границі до вигляду $\mathbf{E}f(s(\xi_1 + \ldots + \xi_n)/n)$, де величини ξ_k незалежні, $\xi_k \simeq Exp(1)$.

18.24. Послідовність $(p/\theta)^k((1-p)/(1-\theta))^{n-k}, k=\overline{0,n}$, не зростає при $\theta \geq p$, та не перевищує $\exp(nH(\theta,p))$ при $k \geq n\theta$. Тому $p^k(1-p)^{n-k} \leq \theta^k(1-\theta)^{n-k}\exp(nH(\theta,p))$, звідки виводимо шукану нерівність. При $p = 1/2$ вибором $\theta = 1/2 \pm \varepsilon/2$ отримуємо другу нерівність.

18.25. Вивести з монотонності існування границі м.н.

18.26. За законом великих чисел границя дорівнює $\mathbf{E}g(x+\xi_1) = \mathbf{E}g(\xi_1)$.

18.27. Довести збіжність м.н. за посиленим законом великих чисел та скористатись теоремою Лебега про мажоровану збіжність.

18.28. Обчислити ξ_n через ε_n.

18.29. Число $m = \sup(x : \mathbf{P}(\xi < x) < 1/2)$ є медіаною. Остання визначена однозначно тоді і тільки тоді, коли m є точкою зростання для функції $\mathbf{P}(\xi < x)$.

18.30. Після заміни $\eta_n = \xi_n^\alpha/\mathbf{E}\xi_n^\alpha$ довести, що $\mathbf{E}g(\eta_n) \to 0, n \to \infty$, де функція $g(x) = x^\gamma - \gamma(x-1)$ для $\gamma = \beta/\alpha > 1$ строго додатна при $x \neq 1$.

18.31. Достатньо перевірити збіжність у с.к.ряду $\sum_{k\geq 1}\eta_k/\ln k$.

18.32. $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}) = ([0,1),\ \mathfrak{B}[0,1),\ L),\ \ \xi_n = 1\!\!\mathrm{I}_{\omega\in[\sqrt{n},\sqrt{n+1})\ \mathrm{mod}\ 1]}$.

18.33. Аналогічно до скалярного випадку.

18.34. Зобразити ліву частину як пуассонівську величину $\eta_n \simeq \Pi(n)$.

19.1. Оберемо підпослідовність n_{1k} таку, що $\mathbf{P}\{|\xi_{n_{1k}} - \xi| \geq 1\} < 2^{-k}$. Серед чисел n_{1k} виберемо підпослідовність n_{2k}, що $\mathbf{P}\{|\xi_{n_{2k}} - \xi| \geq 1/2\} < 2^{-k}$. Таким чином отримаємо набір вкладених підпослідовностей: n_{mk}, $\mathbf{P}\{|\xi_{n_{mk}} - \xi| \geq 1/m\} < 2^{-k}$. Покладемо $n_j = n_{jj}$.

Для доведення застосуємо критерій збіжності майже напевно, для послідовності ξ_{n_j}.

19.2. Скористайтеся лемою Бореля-Кантеллі, а також тим фактом, що операцію перерізу можна винести за верхню границю множин.

19.3. Зауважимо, що $\mathbf{P}\{\xi_n = o(n),\ n \to \infty\} = \mathbf{P}\{\xi_n/n \to 0,\ n \to \infty\}$. Для довільного $\varepsilon > 0$, позначимо $A_n(\varepsilon) := \{\xi_n > n\varepsilon\}$. Зауважимо, що в силу однаковою розподіленості ξ_n, ряд з ймовірностей $A_n(\varepsilon)$ збіжний тоді і лише тоді коли $\mathbf{E}[\xi_1^+] < \infty$. Для завершення доведення застосуємо лему Бореля-Кантеллі для послідовності $A_n(\varepsilon)$.

19.4. Скористайтесь теоремою Тьопліца.

19.5. Обчисліть дисперсії ξ_n та підставте їх в умову теореми Колмогорова про посилений закон великих чисел.

19.6. Необхідність випливає з 19.1. Для доведення достатності припустимо, що $\mathbf{P}\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\}$ не прямує до нуля при деякому ε. Отже знайдеться підпослідовність n_k, що: $\mathbf{P}\{|\xi_{n_k} - \xi| > \varepsilon\} \to \delta > 0,\ n \to \infty$. А це протирічить тому, що з послідовності ξ_{n_k} можна вибрати збіжну майже напевно до ξ під-підпослідовність.

19.7. Покажемо, що зі збіжності за ймовірністю випливає збіжність майже напевно. Нехай простір має вигляд:
$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots\}$, з ймовірностями $\mathbf{P}\{\omega_j\} = p_j$. Нехай ξ_n збігається за ймовірністю до ξ. Зафіксуємо деяке ω_j. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$: $\mathbf{P}\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} \to 0,\ n \to \infty$. Отже існує такий номер n_0, що для всіх $n > n_0$, $\mathbf{P}\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} < p_j$, звідки випливає, що $|\xi_n(\omega_j) - \xi(\omega_j)| < \varepsilon$, а це в свою чергу означає, що $\xi_n(\omega_j) \to \xi(\omega_j),\ n \to \infty$.

19.8. Використати: (а) означення верхньої границі множин. (б) лему Бореля-Кантеллі. (в) $\mathbf{P}\{\nu = k\} = p_k(1-p_1)\ldots(1-p_{k-1})$.

19.9. Скористайтесь тим же прийомом, що і у 19.3.

19.10. $\sum_{n\ge1} \sigma_n^2/n^2 < \infty$, та $\sum_{n\ge1} p_n(1-p_n)/n < \infty$. Для доведення необхідності повторіть доведення необхідності в теоремі Колмогорова про закон великих чисел для однаково розподілених випадкових величин, де для оцінки $\mathbf{P}\{|\xi_n| > n\}$ скористайтесь нерівністю Чебишева.

19.11. Позначимо $\xi_{nk}^{+} = n\mathbb{I}_{[k/n,(k+1)/n)}$, $k = \overline{0, n-1}$, $\xi_{nk}^{-} = -\xi_{nk}^{+}$. Послідовність $\{\xi_n\} = \cup\{\xi_{nk}^{+}, \xi_{nk}^{-}\}$.

19.12. Для довільного $\varepsilon > 0$, та кожного $k \geq 1$, знайдемо таке N_k, що для всіх $n \geq N_k$: $\mathbf{P}\{|\xi_n - \xi| > 1/k\} < \varepsilon/2^k$. Позначимо через A_k наступну подію: $A_k = \cap_{n \geq N_k}\{|\xi_n - \xi| > 1/k\}$, зауважимо, що ймовірність кожної події з даного перетину не перевищує $\varepsilon/2^k$, а отже і $\mathbf{P}(A_k) \leq \varepsilon/2^k$. Позначимо $A_\varepsilon = \overline{\cup_{k\geq 1} A_k}$. Тоді $\mathbf{P}(A_\varepsilon) = 1 - \mathbf{P}(\cup_{k\geq 1} A_k) \geq 1 - \varepsilon$. Нехай збіжність на A_ε не є рівномірною за ω. Тоді знайдеться така послідовність $n_j \to \infty$, $\delta > 0$ та набір $\omega_{n_j} \in A_\varepsilon$, що $|\xi_{n_j}(\omega_{n_j}) - \xi(\omega_{n_j})| > \delta$. Знайдемо таке $k_\delta \geq 1$, що $\delta > 1/k_\delta$, а тоді отримаємо: $|\xi_{n_j}(\omega_{n_j}) - \xi(\omega_{n_j})| > 1/k_\delta$. Оскільки $n_j \to \infty$, то існує деякий $n_{j0} > N_{k_\delta}$, а це означає, що $\omega_{n_{j0}} \in A_{k_\delta}$, а отже $\omega_{n_{j0}} \notin A_\varepsilon$ - протиріччя.

19.13. Див. розв'язок задачі 18.15. Для узагальнення на L_p, припустіть збіжність $\mathbf{E}|\xi_k|^p$.

19.14. Позначимо: $c_n = \sup\{x\colon F(x) < 1 - 1/n\}$, $n \geq 2$, де $F(x)$ - функція розподілу $|\xi_1|$. Зауважимо, що для довільного $\delta > 0$: $F(c_n - \delta) < 1 - 1/n$, а отже $F(c_n -) \leq 1 - 1/n$, а в силу неперервності зліва і $F(c_n) \leq 1 - 1/n$, звідки маємо: $\mathbf{P}\{|\xi_1| \geq c_n\} \geq 1/n$. Зауважимо, що послідовність c_n не спадає, а отже існує $c = \lim c_n \leq \infty$. Припустимо, $c < \infty$. Тоді $\mathbf{P}\{|\xi_1| \geq c\} = 1 - F(c) \leq 1 - F(c_n) \leq 1/n \to 0$, а оскільки ліва частина не залежить від n, то: $\mathbf{P}\{|\xi_1| > c\} = 0$ - що протирічить умові. Отже ми знайшли таку послідовність чисел $\{c_n, n \geq 2\}$, що $c_n \to \infty$, та $\mathbf{P}\{|\xi_1| \geq c_n\} \geq 1/n,\ n \geq 2$. Зрозуміло, що $\mathbf{P}\{|\xi_1| \geq \varepsilon c_n\} \to 0,\ n \to \infty$, оскільки $c_n \to \infty$. Розглянемо подію $A_n(\varepsilon) = \{\exists k \geq n,\ |\xi_k| \geq \varepsilon c_k, \}$, і зауважимо, що збіжність послідовності ξ_n/c_n до нуля майже напевно, має місце тоді лише тоді коли $\mathbf{P}(A_n(\varepsilon)) \to 0,\ n \to \infty$. Але
$\mathbf{P}(A_n(\varepsilon)) = 1 - \mathbf{P}\{\forall k \geq n,\ |\xi_k| < \varepsilon c_k\} = 1 - \prod_{k=n}^{\infty} \mathbf{P}\{|\xi_k| < \varepsilon c_k\} = 1 - \prod_{k=1}^{\infty}(1 - \mathbf{P}\{|\xi_k| \geq \varepsilon c_k\} \geq 1 - \prod_{k\geq n}(1 - 1/n) = 1$. Отже ξ_n/c_n прямує до нуля за ймовірністю, але не м.н.

19.15. Див. доведення критерія Колмогорова про посилений закон великих чисел. [2, ст. 122].

19.16. Нехай ξ- випадкові величини з розподілом Коші. Позначимо через $A_n = \{\xi \geq n\}$, тоді $A_{n+1} \subset A_n$, а отже $\cup_{k \geq n} A_k = A_n$, тоді $\mathbf{P}\{\cap_{n \geq 1} A_n\} = 0$, але $\sum_{k \geq 1} \mathbf{P}\{\xi \geq n\} = \infty$, оскільки ξ не є інтегровною.

19.17. (а) Див. 2.25. (б) Згідно з (а), $\mathbf{P}(\cup_{i=1}^n A_i) \geq s^2(s^2 - \sum_{i=1}^n \mathbf{P}^2(A_i) + s)^{-1} \to 1, s \equiv \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_i) \to \infty, n \to \infty$.

19.18. Нехай метрика існує, позначимо її $\rho(\xi, \eta)$. Нехай ξ_n прямує до ξ за ймовірністю, але не майже напевно. Тоді існує така підпослідовність n_k, що $\gamma = \inf \rho(\xi_{n_k}, \xi) > 0$. Але з ξ_{n_k} можна вибрати підпослідовність $\xi_{n_{k_j}}$ збіжну до ξ м.н. Отже $\rho(\xi_{n_{k_j}}, \xi) \to 0,\ n \to \infty$ - протиріччя.

19.19. Позначимо через $F(x)$ функцію розподілу ξ. Розглянемо два довільних інтервали $(a, b), (c, d)$ такі, що $a < b < c < d$. Покажемо, що $\min\{\mathbf{P}\{\xi \in (a, b)\}, \mathbf{P}\{\xi \in (c, d)\}\} = 0$. Припустимо протилежне, тобто що цей мінімум рівний $\delta > 0$. Згідно з задачею 19.12, існує така множина A, що $\mathbf{P}(A) \geq 1 - \delta/2$, та $\xi_n(\omega) \to \xi(\omega)$ рівномірно на A. Тоді:
$0 < \delta \leq \mathbf{P}\{\xi \in (a, b)\} = \mathbf{P}\{\xi \in (a, b), A\} + \mathbf{P}\{\xi \in (a, b), \overline{A}\} \leq$
$\mathbf{P}\{\xi \in (a, b), A\} + \mathbf{P}\{\overline{A}\} \leq \mathbf{P}\{\xi \in (a, b), A\} + \delta/2$, звідки маємо:
$0 < \delta/2 \leq \mathbf{P}\{\xi \in (a, b), A\}$. Тоді для $\varepsilon = (c - b)/3$ знайдеться таке $N_0 > 0$, що $\{\xi \in (a, b), A\} \subset \{\xi_n \in (a - \varepsilon, b + \varepsilon), \forall n \geq N_0\}$. Але в силу незалежності отримаємо: $0 < \delta/2 \leq \prod_{n \geq N_0} \mathbf{P}\{\xi_n \in (a - \varepsilon, b + \varepsilon)\}$, звідки з необхідністю: $\mathbf{P}\{\xi_n \in (a - \varepsilon, b + \varepsilon)\} \to 1,\ n \to \infty$. Аналогічно отримується збіжність: $\mathbf{P}\{\xi_n \in (c - \varepsilon, d + \varepsilon)\} \to 1,\ n \to \infty$, що неможливо. Отже $\delta = 0$. Позначимо $x_- := \sup\{x : F(x) = 0\}$, $x_+ := \inf\{x : F(x) = 1\}$, зауважимо, що обидві ці величини скінчені в силу доведеного вище. Очевидно, що $x_- \leq x_+$. Припустимо, нерівність строга: $x_- < x_+$. Позначимо $\Delta = (x_+ - x_-)/3$. Тоді $F(x_- - \Delta) = 0$ а $F(x_- + \Delta) > 0$, і аналогічно $F(x_+ - \Delta) < 1,\ F(x_+ + \Delta) = 1$. Отже ймовірності попадання ξ в інтервали $(x_- - \Delta, x_- + \Delta),\ (x_+ - \Delta, x_+ + \Delta)$ строго додатні, що протирічить доведеному вище. Тому припущення $x_- < x_+$ невірне, а отже $x_- = x_+$, що означає, що функція розподілу має одиничний стрибок, або $\xi = c$ м.н.

19.20. Скористатись лемою Бореля-Кантеллі та нерівністю Чебишева.

19.21. Виберемо довільне $x \in [0,1]$, та $\varepsilon > 0$. Покажемо, що у відрізок $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ потрапляє, хоча б одне з ξ_k. Обчислимо ймовірність того, що жодне з ξ_k, $k \le n$ не потрапляє в цей відрізок. В силу незалежності ця ймовірність рівна: $(1-2\varepsilon)^n$. Далі скористаємося лемою Бореля-Кантеллі.

19.22. Обчисліть дисперсії ξ_n, та скористайтесь теоремою Чебишева про закон великих чисел.

19.23. $g(x,y) = x - y$.

19.24. Визначимо незалежні у сукупності випадкові величини ε_n незалежні від ξ_n, з розподілами $\mathbf{P}\{\varepsilon_n = 2^n\} = \mathbf{P}\{\varepsilon_n = -2^n\} = 2^{-n-1}$, $\mathbf{P}\{\varepsilon_n = 0\} = 1 - 2^{-n}$. Покладемо $\eta_n = \xi_n + \varepsilon_n$. Тоді $\mathbf{D}\eta_n \ge \mathbf{D}\varepsilon_n = 2^n$ і очевидно умова Колмогорова не виконана. Зауважимо, що $\mathbf{P}\{\varepsilon_n \ne 0\} = 2^{-n}$, отже з леми Бореля-Кантеллі випливає $\mathbf{P}(\underline{\lim}\{\xi_n = \eta_n\}) = 1$, що еквівалентно твердженню (а). Виконання посиленого закону великих чисел випливає з того, що $\mathbf{P}(\overline{\lim}\{\varepsilon_n \ne 0\}) = 0$, а отже $\sum_{k=1}^n \varepsilon_n/n \to 0$, м.н.

19.25.Позначимо $p_k = \mathbf{P}(A_k)$, $b_n = \mathbf{E}S_n = \sum_{k=1}^n p_k$. Можна вважати, що $p_1 > 0$. (а) Припустимо, що $\lim b_n = b < \infty$. Тоді за лемою Бореля-Кантеллі, (а), $P(\overline{\lim} A_n) = 0$ та скінченою м.н. є сума $S = \lim S_n$. Зокрема, границя S/b є випадковою. (б) Якщо ж $b_n \to \infty$, то $\lim \mathbf{D}(S_n/b_n) = \lim b_n^{-2} \sum_{k=1}^n p_k(1-p_k) = 0, n \to \infty$, тобто $S_n/b_n \to^{L_2} 0$. За критерієм фундаментальності м.н. та нерівністю Колмогорова (як у теоремі про посилений закон великих чисел) виводимо збіжність м.н. ряду $\sum_{k\ge1}(1\!\!\mathrm{I}_{A_k} - p_k)/b_k$, оскільки сума дисперсій не перевищує $\sum_{k\ge1} p_k/b_k^2 \le 1/b_1 < \infty$. Нарешті з теореми Тьопліца звідси встановлюємо збіжність $(S_n - b_n)/b_n \to^{\mathbf{P}1} 0, n \to \infty$.

19.26. Див. 18.24. Доведення оцінки для $\ln \mathbf{P}(\nu_n < n\theta)$ проводиться аналогічно при $\theta < p$ з еквівалентності $\ln(1-x) \sim -x, x \to 0$.

19.27. Послідовність під знаком логарифму напівмультиплікативна.

19.28. Див. закон повторного логарифму: [2, ст. 210], за яким

$\overline{\lim}\frac{S_n-n\mu}{\sqrt{n}\sqrt{\ln(\ln(n))}} = c$, м.н., та: $\frac{S_n-n\mu}{\sqrt{n}n^\delta} = \frac{S_n-n\mu}{\sqrt{n}\sqrt{\ln(\ln(n))}}\frac{\sqrt{\ln(\ln(n))}}{n^\delta} \to 0$, $n \to \infty$.

19.29. Достатність. Позначимо $\zeta_n = \xi_n \mathbb{1}_{|\xi_n|\le n}$, $T_n = \zeta_1 + ... + \zeta_n$. Доведемо, що $S_n/n = (S_n - T_n)/n + (T_n - \mathbf{E}T_n)/n + \mathbf{E}T_n/n \to^{\mathbf{P}} 0, n \to \infty$. По-перше, $\mathbf{P}(S_n \ne T_n) \le n\mathbf{P}(\xi_1 \ne \zeta_1) = n\mathbf{P}(|\xi_1| > n) \to 0, n \to \infty$. По-друге, частинні суми збігаються: $R_n = \sum_{k=1}^n(\zeta_k - \mathbf{E}\zeta_k)/k \to^{\mathbf{P}} R \in \mathbb{R}, n \to \infty$, у с.к. та за ймовірністю, оскільки $\sum_{k\ge1}\mathbf{D}\zeta_k/k^2 < \infty$. Тому за теоремою Тьопліца $(T_n - \mathbf{E}T_n)/n = R_n - n^{-1}\sum_{k=1}^n R_k \to^{\mathbf{P}} R - R = 0, n \to \infty$. По-третє, за теоремою Штольця $\lim \mathbf{E}T_n/n = \mathbf{E}\zeta_n = 0$ за умовою.

19.30. Скористайтесь доведенням необхідності в критерії Колмогорова посиленого закону великих чисел.

19.31. Твердження при $\alpha = 1$ є наслідком посиленого закону великих чисел. Тому вважаємо, що $\alpha \ne 1$. Позначимо $n_\alpha = n^{1/\alpha}, k_\alpha = k^{1/\alpha}$, $\zeta_k = \xi_k \mathbb{1}_{|\xi_k|\le k_\alpha}$, $T_n = \sum_{k=1}^n \zeta_k$. Достатність. Оскільки $\sum_{k\ge1}\mathbf{P}(\xi_k \ne \zeta_k) \le \sum_{k\ge1}\mathbf{P}(|\xi_1|^\alpha \ge k) = \mathbf{E}\,|\xi_1|^\alpha < \infty$, то $S_n = T_n$ м.н. починаючи з деякого n. Збіжність послідовності $n_\alpha^{-1}\mathbf{E}T_n \to 0$ випливає за теоремою Тьопліца зі збіжності ряду для середніх $\sum_{k\ge1}k_\alpha^{-1}(\mathbf{E}\xi_1\mathbb{1}_{|\xi_1|>k_\alpha})$. Далі, за цією ж теоремою збіжність $n_\alpha^{-1}(T_n - \mathbf{E}T_n) \to^{\mathbf{P}1} 0, n \to \infty$, є наслідком збіжності м.н. послідовності $R_n = \sum_{k=1}^n(\zeta_k - \mathbf{E}\zeta_k)/k_\alpha$. Тому $n_\alpha^{-1}S_n = n_\alpha^{-1}(S_n - T_n) + n_\alpha^{-1}(T_n - \mathbf{E}T_n) + n_\alpha^{-1}\mathbf{E}T_n \to 0, n \to \infty$. Необхідність. Зі збіжності $\xi_n/n = S_n/n_\alpha - (n-1)^{1/\alpha}n_\alpha^{-1}S_{n-1} \to^{\mathbf{P}1} 0, n \to \infty$, виводимо, що $\mathbf{P}(\overline{\lim}\{|\xi_n| \ge n_\alpha\}) = 0$, звідки за лемою Бореля-Кантеллі $\infty > \sum_{n\ge1}\mathbf{P}(|\xi_1| \ge n_\alpha) = \sum_{n\ge1}\mathbf{P}(|\xi_1|^\alpha \ge n) = \mathbf{E}\,|\xi_1|^\alpha$. З припущення $\alpha > 1$ випливає інтегровність ξ_1, отже $S_n/n \to^{\mathbf{P}1} \mathbf{E}\xi_1$. Отже, останнє середнє - нульове.

19.32. Довести, що послідовність $|S_n/n - \mathbf{E}\xi_1|$ рівномірно інтегровна.

19.33. Для доведення (а) застосувати нерівність Чебишева, з (а) вивести спочатку, що $\sum_{k\le n}\mathbb{1}_{A_k} \to^{\mathbf{P}} \infty$.

19.34. Достатньо перевірити, що $\mathbf{P}(\overline{\lim}_{n\to\infty}\{|\xi_n| > 2a_n\}) = 1$.

19.35. Довести, що $\mathbf{P}(\xi_n = o(n), n \to \infty) = 0$.

19.36. Побудувати незалежну послідовність величин ε_n таку, що $\mathbf{P}(\overline{\lim}\{\varepsilon_n \neq 0\}) = 0$ та $\sum \mathbf{D}\varepsilon_n/n^2 = \infty$ та визначити $\eta_n = \xi_n + \varepsilon_n$.

19.37. Послідовність цифр рівномірно розподіленої на $[0,1)$ величини є незалежними однаково розподіленими на $\{0,1,...,9\}$ величинами.

19.38. Побудуйте межі спочатку для границі.

19.39. Знайти $\varepsilon_n \to 0$ такі, що $\sum \mathbf{P}(|\xi_n| \geq a_n\varepsilon_n) < \infty$.

19.40. Довести, що $\mathbf{P}(\overline{\lim}\{\xi_n \in [a,b)\}) \in (0,1)$ для всіх $a < b$.

19.41. Див.19.37.

19.42. Скористатись доведенням Колмогорова посиленого закону великих чисел.

19.43. Обчислити π_n через частоти $\nu_{ni} = \sum_{j=1}^n 1\!\!1_{\xi_j = x_i}$.

19.44. Остання умова еквівалентна розбіжності $\prod_{n\geq 1}(1 - \mathbf{P}(A_n)) = 0$.

20.1. Скористатись нерівністю Чебишева-Маркова з $g(x) = e^{ax}$.

20.2. Проаналізуйте доведення нерівності Маркова. З'ясуйте в якому місці доведення відбувається загрублення. Для прикладу розгляньте такі випадкові величини : $\mathbf{P}\{\xi = -x\} = \mathbf{P}\{\xi = x\} = p$, $\mathbf{P}\{\xi = 0\} = 1 - 2p$.

20.3. Нормування ξ на$\mathbf{E}\xi$ дозволяє припустити, що $\mathbf{E}\xi = 1$. За нерівністю Коші $\mathbf{E}\xi^2\ \mathbf{P}(\xi \geq \varepsilon) \geq (\mathbf{E}\xi 1\!\!1_{\xi\geq\varepsilon})^2 = (1 - \mathbf{E}\xi 1\!\!1_{\xi<\varepsilon})^2 \geq (1-\varepsilon)^2$.

20.4. Розглянемо випадкову величину ξ, що набуває значень з множини $\{x_1, \ldots, x_n\}$, з ймовірностями $p_1, \ldots, p_k$. Тоді в силу нерівності Йенсена, а також того, що логарифм угнута функція маємо: $\ln(\mathbf{E}\xi) \geq \mathbf{E}[\ln(\xi)]$, або:

$$\ln(\textstyle\sum_{k=1}^n x_k p_k) \geq \sum_{k=1}^n \ln(x_k)p_k = \sum_{k=1}^n \ln(x_k^{p_k}) = \ln\left(\prod_{k=1}^n x_k^{p_k}\right),$$

застосувавши до обох частин нерівності монотонно зростаючу функцію e^x, отримаємо шукану нерівність.

20.5. Повторіть доведення нерівності Колмогорова, скориставшись при цьому нерівністю Йенсена.

20.6. Для доведення (a) запишемо:

$$\mathbf{E}[\exp(tS_n)] = (\mathbf{E}[\exp(t\xi_1)])^n = (e^t + e^{-t})/2)^n \leq e^{nt^2/2}.$$

Для доведення (б) скористайтеся (а), а також задачею 20.5.

20.7. Після множення відповідних нерівностей на $\varphi(x)$ та переносу правої частини диференціюванням перевірити, що ліва частина є монотонною функцією.

20.8. Оскільки $1\!\!\mathrm{I}_{x\geq m+a} \leq (x-m-t)^2/(a-t)^2, x \in \mathbb{R}$, для всіх $t < a$, то $\mathbf{P}(\xi - m \geq a) \leq (s^2+t^2)/(a-t)^2$ для всіх $a > 0, t < a$. Мінімізуючи праву частину вибором $t = -s^2/a$, отримуємо $\mathbf{P}(\xi - m \geq a) \leq s^2/(s^2+a^2)$ для вказаних у умові величин ξ. Зокрема, для $\mathbf{P}(\xi = \pm 1) = 1/2$ при $a = 1$ тут має місце рівність. Див. також 12.26.

20.9. $(\xi^2 - \varepsilon^2)/c^2 \leq 1$ при $|\xi| \in (\varepsilon, c]$.

20.10. Нерівність Кантеллі. Оберемо довільне t, та запишемо: $\mathbf{P}\{\xi - \mathbf{E}\xi \geq x\} = \mathbf{P}\{\xi + t - \mathbf{E}\xi \geq x + t\} \leq \mathbf{P}\{|\xi + t - \mathbf{E}\xi| \geq x + t\} \leq \frac{\mathbf{D}\xi + t^2}{(x+t)^2}$. Зауважимо, що функція $\frac{\mathbf{D}\xi + t^2}{(x+t)^2}$ як функція від t досягає свого мінімуму в точці $\mathbf{D}[\xi]/x$, а отже: $\mathbf{P}\{\xi - \mathbf{E}\xi \geq x\} \leq \inf_t \frac{\mathbf{D}\xi + t^2}{(x+t)^2} = \frac{\mathbf{D}\xi + (\mathbf{D}[\xi]/x)^2}{(x + (\mathbf{D}[\xi]/x))^2} = \frac{\mathbf{D}[\xi]}{x^2 + \mathbf{D}[\xi]}$. Для завершення доведення, помітимо, що випадкова величина $\frac{\xi - \mathbf{E}[\xi]}{\sigma_\xi}$ має одиничну дисперсію.

20.11. Застосуйте нерівність Маркова.

20.12. Зауважимо, що $r/p + r/q = 1$. Скористаємося нерівністю: $xy \leq r(x^{p/r}/p + y^{q/r}/q)$, підставивши в якості $x = |\xi|^r/\mathbf{E}[|\xi|^p]^{r/p}$, $y = |\eta|^r/\mathbf{E}[|\eta|^q]^{r/q}$. Тоді: $\mathbf{E}[|\xi\eta|^r]/\mathbf{E}[|\xi|^p]^{r/p}\mathbf{E}[|\eta^q|]^{r/q} \leq$
$r\left(\mathbf{E}[|\xi|^p]/(p\mathbf{E}[|\xi|^p]) + \mathbf{E}[|\eta|^q]/(q\mathbf{E}[|\eta|^q])\right) = r/p + r/q = 1.$

20.13. Оцінимо ймовірність доповнення: $\mathbf{P}\{\exists k: \ |S_k|/a_k > 1\}$, зауважимо, що $\mathbf{P}\{\exists k: \ |S_k|/a_k > 1\} = \mathbf{P}\{\max_k |S_k|/a_k > 1\}$. Як і в доведенні нерівності Колмогорова позначимо $A = \{\max_k |S_k|/a_k > 1\}$, $A_k = \{|S_1|/a_1 \leq 1, \ldots, |S_{k-1}|/a_{k-1} \leq 1, |S_k|/a_k > 1\}$, тоді $A = \cup_k A_k$, та $A_k \cap A_j = \emptyset$. Далі запишемо:

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{E}[\xi_k^2/a_k^2] \geq \mathbf{E}[S_n^2/a_n^2] = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}[\tfrac{S_n^2}{a_n^2} 1\!\!\mathrm{I}_{A_k}] =$$

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{E}[\left(\tfrac{S_n}{a_n} - \tfrac{S_k}{a_k} + \tfrac{S_k}{a_k}\right)^2 1\!\!\mathrm{I}_{A_k}] \geq$$

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{E}[\tfrac{S_k^2}{a_k^2} 1\!\!\mathrm{I}_{A_k}] - 2\sum_{k=1}^n \mathbf{E}[\left(\tfrac{S_n}{a_n} - \tfrac{S_k}{a_k}\right) 1\!\!\mathrm{I}_{A_k} \tfrac{S_k}{a_k}] \geq$$

$$\sum_{k=1}^{n} P(A_k) - 2\sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{k}(\frac{\xi_j}{a_n} - \frac{\xi_j}{a_k})\right)\mathbb{I}_{A_k}\frac{S_k}{a_k}\right] =$$
$$\mathbf{P}(A) - 2\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\mathbf{E}\left[\xi_j^2\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_k}\right)\frac{1}{a_k}\right] \geq P(A),$$

де в останній нерівності ми використали той факт, що $\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_k} \leq 0$.

20.14. Обчислити вказану імовірність та довести монотонність за ρ.

20.15. Застосувати нерівність Маркова для $(\xi - \mathbf{E}\xi)^2$ та $g(x) = x^{r/2}$.

20.16. Максимум можна знаходити при $l < m - 1$. У нерівності $\max_{l<m}|S_l - S_m| \leq |S_{m-1} - S_m| + \max_{l<m-1}|S_{m-1} - S_l|$ доданки незалежні, тому їх сума не більша за 2α з імовірністю $\alpha\alpha = \alpha^2$.

20.17. $|S_k| \leq |S_k - \mathbf{E}S_k| + m_k$.

20.18. Розглянути перший момент перевищення та скористатись нерівністю $\mathbf{P}(S_n - S_k \geq 0) \geq 1/2$.

20.19. Проінтегрувати нерівність Колмогорова за ε.

20.20. Використати нерівність Коші.

20.21. Врахувати, що

$$\{|S_k| > x + y\} \cap \{|S_n - S_k| \leq y\} \subset \{|S_n| > x\}.$$

21.1. $\varphi(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{itn}p_n$ - періодична функція. Формулу для $p_n = \mathbf{P}\{\xi = n\}$ виведіть з формули обертання.

21.2. Достатність цього твердження доводиться вибором $t = 2\pi/b$. Доведемо необхідність. Нехай $|\varphi_\xi(t)| = 1$, отже існує таке θ, що $\varphi_\xi(t) = e^{i\theta}$, тоді: $1 = e^{-i\theta}\varphi_\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(tx-\theta)}dF(x)$. Взявши дійсну частину від обох сторін цієї рівності отримаємо: $0 = \int_{-\infty}^{+\infty}(1 - cos(tx - \theta))dF(x)$. Зауважимо, що вираз під інтегралом невід'ємний, і рівний нулю лише при $tx - \theta = 2\pi k$. Звідси маємо, що розподіл $F(x)$ з необхідністю розташований на решітці: $(2\pi/t)k + \theta/t$.

21.3. Нехай ξ - кількість успіхів у випадковому числі випробувань Бернулі ν. Тоді $\mathbf{P}\{\xi = n\} = \sum_{k\geq n} p^n(1-p)^{k-n}C_k^n e^{-\lambda}\lambda^k/k!$. Відповідна характеристична функція дорівнює
$\varphi(t) = \sum_{n\geq 0} e^{itn}\sum_{k\geq n} p^n(1-p)^{k-n}C_k^n e^{-\lambda}\lambda^k/k! =$

$e^{-\lambda}\sum_{k\geq 0}\lambda^k/k!\sum_{n=0}^{k}e^{itn}p^n(1-p)^{k-n}C_k^n =$
$e^{-\lambda}\sum_{k\geq 0}\lambda^k(1-p+e^{it}p)^k/k! = e^{-\lambda}e^{\lambda-\lambda p+\lambda e^{it}p} = e^{\lambda p(e^{it}-1)}$. Отже, отримали розподіл Пуассона з параметром λp.

21.4. Для доведення достатності, покажіть, що $\mathbf{E}[f(\xi)g(\eta)] = \mathbf{E}[f(\xi)]\mathbf{E}[g(\eta)]$, для неперервних обмежених функцій f, g. Для цього скористайтесь наближенням неперервної функції тригонометричним рядом.

21.5. Скористайтесь означенням слабкої збіжності, та наближенням неперервної обмеженої функції поліномами.

21.6. Оскільки ξ та $-\xi$ мають однакові функції розподілу, то $\varphi(t) = \varphi(-t)$, за властивістю х.ф. $\varphi(t) = \overline{\varphi(-t)} = \overline{\varphi(t)}$, отже $\varphi(t)$ дійснозначна.

21.7. Скористайтеся тим же прийомом, що і в задачі 21.2.

21.8. Зауважимо, що з даного рівняння з $\varphi(t_0) = 0$ випливало б $\varphi'(t_0) = 0, ..., \varphi^{(n)}(t_0) = 0$, що суперечить аналітичності φ. Тому $\ln\varphi(t)$ коректно визначається з рівнянь $(\ln\varphi(t))' = -t$, $\ln\varphi(0) = 0$.

21.9. Позначимо $p = \mathbf{P}(\delta = 0) = 1-q$, $\varphi(z) = \mathbf{E}(z+1)^{\eta}, |z+1| < 1$. З незалежності обчислюємо $\varphi(p(\exp(is)-1)+q(\exp(it)-1)) = \varphi(p(\exp(is)-1))\varphi(q(\exp(it)-1))$, $t, s \in \mathbb{R}$. Звідси випливає локальна мультиплікативність φ, тому внаслідок дійснозначності $\varphi(z) = \exp(\lambda z)$ для деякого $\lambda \in \mathbb{R}$.

21.10. Знайдемо $\mathbf{E}[\zeta]$, використовуючи х.ф. ζ. Позначимо її через $\varphi_\zeta(t)$, а х.ф. ξ_k через $\varphi(t)$, через $p_k := \mathbf{P}\{\nu = k\}, k \geq 0$. Тоді:
$\varphi_\zeta(t) = \mathbf{E}[\exp(it\zeta)] = \sum_{k\geq 0}\mathbf{E}[\exp(it\sum_{j=0}^{k}\xi_j)1\!\!1_{\nu=k}] = \sum_{k\geq 0}\varphi^k(t)p_k$. Інтегрованість ζ випливає з інтегрованості ξ_k, ν. Візьмемо похідну в нулі: $\mathbf{E}[\zeta] = \varphi'_\zeta(0) = \sum_{k\geq 0}kp_k(\varphi(0))^{k-1}\varphi'(0) = E\xi_1 E\nu$. Вираз для дисперсії отримується аналогічно.

21.11. Обчислимо $\varphi_\xi(t) = \sum_{n\geq 0}(it)^n(n+k-1)!/(k-1)! = \sum_{n\geq 0}C_{-k}^n(-it)^n = (1-it)^{-k}$.

21.12. Обчислимо $\mathbf{E}\,|\xi - t| = \mathbf{E}\xi - t + 2\int_{-\infty}^{t}F_\xi(y)dy$, звідки $\mathbf{E}\xi = \lim_{t\to-\infty}(t+\mathbf{E}\,|\xi-t|)$. Далі з цієї ж формули встановлюємо $F_\xi(y)$.

21.13. Оберемо $t_1 = t, t_2 = 0, c_1 = a, c_2 = b$. та запишемо умову додатної визначеності і її спряжену. Діленням на ab отримуємо

$(\varphi(-t) - \overline{\varphi(t)})\overline{b}/b = (\varphi(t) - \overline{\varphi(-t)})\overline{a}/a$. Внаслідок довільності a, b виводимо ермітовість.

21.14. (а) $(1-\cos Tt)/(T^2t^2/2)$. (б) $(1-|t|/T)^+$.

21.15. Умови нормованості та неперервності - локальні, умови ермітовості та позитивної визначеності - лінійні. Тому вони виконуються для $\psi(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(t+2na)$.

21.16. Доведіть наступну рівність:

$$(\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-\cos(Tx))\cos(tx)}{x^2}dx = (T-|t|)^+.$$

З цієї рівності отримайте, що $(1-|t|/T)^+$ є характеристичною функцією.

21.17. Для φ має місце зображення: $\varphi(t) = 1 - t^2\sigma^2/2 + o(t^2)$, $t \to 0$, що співпадає з розкладом у ряд Тейлора функції $e^{-t^2\sigma^2/2}$ в околі нуля.

21.18. Нехай існує таке $t \neq 0$, що $|\varphi(t)| = 1$. Тоді за задачею 21.2, розподіл ξ зосереджений на деякій решітці, а отже щільності не існує.

21.19. Побудуйте дві різні характеристичні функції, що співпадають в деякому інтервалі $[-\delta, \delta]$. В якості третьої х.ф. виберіть таку, що рівна нулю поза околом $[-\delta, \delta]$.

21.20. Скористайтесь задачею 21.16, та теоремою Бохнера-Хінчина.

21.21. Довести, що $\varphi(t)$ можна зобразити у вигляді інтегралу $\int_0^\infty (1-|t|/s)^+\mu(ds)$ для деякої міри μ.

21.22. $\varphi(t) = C\sum_{n\geq 2}(e^{2itn} + e^{-2itn})(n^2\ln(n))^{-1} = C\sum_{n\geq 2} 2\cos(2tn)(n^2\ln(n))^{-1}$. Даний ряд збігається абсолютно та рівномірно, а ряд з похідних збігається умовно.

21.23. Доведення проведемо за індукцією. Для $n=1$, припустимо $\varphi''(0) < \infty$. Тоді: $\frac{\varphi(h)-2\varphi(0)+\varphi(-h)}{h^2} = \int_{-\infty}^{\infty} h^{-2}(e^{ihx} - 2 + e^{-ihx})dF(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} 2h^{-2}(1-\cos(hx))dF(x)$. Зауважимо, що $0 \leq 2h^{-2}(1-\cos(hx)) \to x^2$, при $h \to 0$. Тоді за лемою Фату: $\mathbf{E}[\xi^2] \leq \liminf_{h\to 0} -\frac{\varphi(h)-2\varphi(0)+\varphi(-h)}{h^2} = \varphi''(0)$. Крок індукції доводиться за аналогічною схемою:

$\frac{\varphi^{(2n)}(h)-2\varphi^{(2n)}(0)+\varphi^{(2n)}(-h)}{h^2}=\int_{-\infty}^{\infty}(ix)^{2n}h^{-2}(e^{ihx}-2+e^{-ihx})dF(x)=$
$+(-1)^n\int_{-\infty}^{\infty}2x^{2n}h^{-2}(1-\cos(hx))dF(x)$.
І за лемою Фату маємо: $\mathbf{E}\xi^{2n+2}\le(-1)^n\varphi^{(2n+2)}(0)<\infty$.

21.24. Врахувати при $\alpha\in(0,1)$ нерівність: $|\exp(ix)-1|\le 2\,|x|^{\alpha}$, для всіх $x\in\mathbb{R}$.

21.25. Скористайтеся теоремою Коші про лишки.

21.26. $\varphi(t)=\mathbf{E}[e^{it\xi}]=(2a)^{-1}\int_{-a}^{a}e^{itx}dx=(2ait)^{-1}(e^{ita}-e^{-ita})=$ $(2ait)^{-1}2i\,\sin(at)=\frac{\sin(at)}{at}$.

21.27. Використайте теорему Коші про інтегрування по контуру.

21.28. Припустимо, що $\varphi(t)=e^{t^4}$ - х.ф. В розкладі Тейлора e^{t^4} перший ненульовий коефіцієнт буде при t^4. Звідси випливає, що $\varphi'(0)=\varphi''(0)=0$, а отже математичне сподівання та дисперсія відповідної випадкової величини рівні 0. Звідси випливає, що випадкові величини є константою майже напевно. Але х.ф. константи e^{itc} - протиріччя.

21.29. Покладіть $\xi=\eta=$const.

21.30. Для доведення достатності покажіть, що характеристична функція суми розпадається в добуток х.ф., та скористайтесь задачею 21.4.

21.31. Запишемо нерівність $(\cos(t\xi)-1)^2\ge 0$, що еквівалентно: $-\cos^2(t\xi)+2\cos(t\xi)\le 1$, додамо 1 до обох частин нерівності:
$1-\cos^2(t\xi)\le 2-2\cos(t\xi)$, помножимо обидві частини на 2 та скористаємося формулою косинуса подвійного кута:
$1-\cos(2t\xi)\le 4-4\cos(t\xi)$. Для завершення доведення, помітимо, що $\mathrm{Re}(\varphi(t))=\mathbf{E}[\cos(t\xi)]$, а $\mathrm{Re}(\varphi(2t))=\mathbf{E}[\cos(2t\xi)]$.

21.32. Взяти до уваги, що $|t\xi|\le 1$ для достатньо малих t, та скористатись нерівностями $1-x^2/2\le\cos x\le 1-x^2/2+x^4/24$, причому $\mathrm{Re}\,\varphi(t)=\mathbf{E}\cos t\xi$. Оцінку зверху див. у 21.18.

21.33. (а) $\varphi^n(t)$ - це характеристична функція суми з n незалежних однаково розподілених випадкових величин з х.ф. $\varphi(t)$. (б) Нехай ξ має х.ф. φ. Тоді розглянемо випадкові величини η - незалежну від ξ, з таким же розподілом як і ξ. Тоді $|\varphi(t)|^2$ це х.ф. $\xi-\eta$. (в) Нехай ξ має х.ф. φ, а η умовно незалежна від ξ та розподілена рівномірно на інтервалі $[0, \xi]$. Тоді $t^{-1} \int_0^t \varphi(s)ds$ буде х.ф. η.

21.34. $\varphi_1(t) = \cos t$, $\varphi_2(t) = (-1)^{[t/\pi+1/2]} \cos t$.

21.35. Не втрачаючи загальності, припустимо, що ξ, η мають нульове середнє та одиничні дисперсії. Нехай φ - це х.ф. ξ, тоді маємо тотожність: $\varphi(2t) = \varphi^3(t)\varphi(-t)$. Нехай існує таке t_0, що $\varphi(t_0) = 0$, тоді $\varphi(t_0/2)$, або $\varphi(-t_0/2)$ теж рівні нулю, продовжуючи далі отримаємо послідовність $t_n \to 0$, таку, що $\varphi(t_n) = 0$, що протирічить неперервності φ в нулі, а також тому що $|\varphi(0)| = 1$. Отже $\varphi(t) \neq 0$, для всіх t. Покладемо $\rho(t) = \varphi(t)/\varphi(-t)$, тоді $\rho(2t) = \rho^2(t)$, а отже $\rho(t) = \rho(t/2^n)^{2^n} = (1 + o(t/2^n)^{2^n} \to 1,\ n \to \infty$. Отже $\rho(t) = 1$, звідки $\varphi(t) = \varphi(-t)$, та $\varphi(2t) = \varphi^4(t)$, а отже: $\varphi(t) = \varphi^{4^n}(t/2^n) = \left(1 - \frac{t^2}{2^{2n+1}} + o\left[\frac{t^2}{2^{2n}}\right]\right)^{4^n} \to e^{-t^2/2}, n \to \infty$.

21.36. Нехай φ - х.ф. ξ. Тоді: $\varphi(t) = \varphi^2(t/\sqrt{2}) = \varphi^{2^n}(t/2^{n/2}) = \left(1 - \frac{t^2}{2^{n+1}} + o(t^2/2^n)\right)^{2^n} \to e^{-t^2/2}, n \to \infty$.

21.37. Обчислимо генератрису розподілу Пуассона: $\varphi(z) = e^{-\lambda} \sum_{k\geq 0} z^k \lambda^k/k! = e^{-\lambda} e^{z\lambda} = e^{\lambda(z-1)}$. (а) Нехай тепер, ξ має розподіл Пуассона з параметром λ_1, а η з параметром λ_2, тоді їх сума матиме генератрису $e^{(\lambda_1+\lambda_2)(z-1)}$ що відповідає розподілу Пуассона з параметром $\lambda_1 + \lambda_2$. (б) Скористайтеся аналогом теореми Леві для генератрис, та зауважте, що границя $e^{\lambda_n(e^{it}-1)}$ існує тоді і лише тоді, коли існує границя $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$. Це λ і буде параметром розподілу Пуассона граничної величини.

21.38. $\mathbf{E} \exp(-t\xi) 1\!\!1_{\xi>0} \to 0, t \to \infty$.

21.39. Доведіть, що з вказаної в задачі умови випливає поточкова збіжність характеристичних функцій, далі скористайтесь теоремою Леві.

21.40. Повторіть доведення теореми Леві для перетворення Лапласа, зауважте, що необхідно лише змінити знак в декількох викладках, та переконатися, що всі нерівності виконані.

21.41. Розглянемо $\xi_n \simeq N(0, n)$, тоді, х.ф. ξ_n має вигляд: $\varphi_n(t) = e^{-nt^2/2}$. Зауважимо, що $\varphi_n(t) \to \delta_0(t)$, при $n \to \infty$ - де, $\delta_0(t) = 1$, якщо $t = 0$, і нулю інакше. Зрозуміло, що $\delta_0(t)$ не є неперервною в нулі. З іншого боку $F_n(x) = \Phi(n^{-1/2}x) \to 1/2$, $n \to \infty$. Зрозуміло, що $F(x) = 1/2$ не є функцією розподілу. Отже, умова неперервності в нулі є суттєвою.

21.42. Характеристичною функцією $\xi = 0$ є тотожна одиниця, що є неперервною функцією. За теоремою Леві зі слабкої збіжності випливає поточкова збіжність характеристичних функцій.

21.43. Для доведення існування F скористайтесь теоремою Хелі. Еквівалентність вказаних у задачі тверджень проведемо за наступною схемою: (б) випливає з (а) за означенням, далі (в) випливає з (б), (г) випливає з (в) та (д) випливає з (г) очевидним чином. Нарешті, (а) випливає з (д) за теоремою Леві.

21.44. Виведіть наступну нерівність (див. доведення теореми Леві): $F([-2c, 2c]) \geq c\left|\int_{-1/c}^{1/c} \varphi(t)dt\right| - 1$. Скористайтеся критерієм Прохорова.

21.45. Застосуйте схему доведення класичної центральної граничної теореми.

21.46. Доведіть слабку збіжність, скориставшись теоремою Леві.

21.47. (а) Доведіть рівність відповідних характеристичних функцій. (б) $e^{it/2}\prod_{k=1}^{\infty}\cos(t/3^k)$.

21.48. Величина з рівномірним на $[-1, 1]$ розподілом, рівна сумі ряду зважених незалежних, однаково розподілених випадкових величин що приймають значення $\{1, -1\}$ з ймовірностями $1/2$.

21.49. Функція φ_α є характеристичною для функції розподілу $F_\alpha(x) = \int_{-\infty}^{x} b_\alpha(y)dF(y)$, де $b_\alpha(y) = \frac{1-\cos\alpha y}{1-c_\alpha}, c_\alpha = \operatorname{Re}\varphi(\alpha)$. Якщо F має щільність, то за теоремою Рімана-Лебега $c_\alpha \to 0, \alpha \to \infty$, тому $\varphi_\alpha(t) \to \varphi(t), \alpha \to \infty$. Однак щільність $f_\alpha(x) = b_\alpha(x)f(x)$ не збігається при $\alpha \to \infty$.

21.50. $\varphi_{a_n+\xi_n}(t) = \varphi_n(t)e^{-ita_n} \to \varphi(t)e^{-ita}$ - х.ф. величини $\xi + a$.

21.51. Доведіть збіжність в основному, скориставшись тим, що при великих n, η_n буде з великою ймовірністю близьким до a.

22.1. Оберіть $F_n(x)$ функцію розподілу з одиничним стрибком в точці $(-1)^n/n$. Ця послідовність збігається в основному до $\mathbb{1}_{[0,\infty)}$, але не збігається поточково.

22.2. Доведення проведіть за наступною схемою:

(1) Зафіксуйте досить велике $c > 0$. За критерієм Прохорова: $\sup_n F_n\overline{[-c,c)} \to 0,\ c \to \infty$. Тому для кожного ε можна знайти таке c, що хвости $F_n(-c)$, та $1 - F_n(c)$ будуть рівномірно малими. Отже поза інтервалом $[-c, c)$ буде рівномірна збіжність.

(2) Всередині інтервалу $[-c, c]$ функція F буде рівномірно неперервною. Візьмемо деякий малий окіл деякої точки $x : [x - \delta, x + \delta]$. Тоді починаючи з деякого номеру всі $F_n(x - \delta)$ та $F_n(x + \delta)$ будуть близькими відповідно до $F(x - \delta)$, $F(x + \delta)$.

(3) Оскільки F_n, та F монотонні, виведіть з рівномірної неперервності F, що збіжність буде рівномірною на $[x-\delta, x+\delta]$, зокрема: $\sup_{y\in[x-\delta,x+\delta]} |F_n(y) - F(y)| < \varepsilon$.

(4) Навколо кожного $x \in [-c, c]$ побудуємо інтервали $(x - \delta, x + \delta)$. Система цих інтервалів утворить відкрите покриття компакту $[-c, c]$, отже з нього можна вибрати скінчене підпокриття. Виведіть звідси, що величина $\sup_{y\in[-c,c]} |F_n(y) - F(y)|$ може бути зроблена як завгодно малою, з ростом n.

22.3. Скористайтеся рівностями $F_\xi(x) = \sum_{k<x} \mathbf{P}(\xi = k)$, $\mathbf{P}(\xi = k) = F_\xi(k+0)-F_\xi(k)$ та еквівалентністю збіжності слабкої та в основному. Прослідкуйте можливість внесення границі під знак суми ряду.

22.4. (а) Нехай $F(\mathrm{Int}(B)) \le \underline{\lim} F_n(B) \le \overline{\lim} F_n(B) \le F(\mathrm{Cl}(B))$. Нехай x_0 - точка неперервності F, $B = (-\infty, x_0)$. Тоді $\mathrm{Int}(B) = B$, $\mathrm{Cl}(B) = (-\infty, x_0]$, $F(\mathrm{Int}(B)) = F(x_0)$, $F(\mathrm{Cl}(B)) = F(x_0+) = F(x_0)$ - оскільки x_0 - точка неперервності. Тоді: $F(x_0) \le \underline{\lim} F_n(x_0) \le \overline{\lim} F_n(x_0) \le F(x_0)$, а тому всі нерівності є рівностями і $F_n(x_0) \to F(x_0),\ n \to \infty$. (б) Як і в (а) визначимо для точки неперервності F - x_0, множину $B = (-\infty, x_0)$. Тоді межа B складається з однієї точки $\{x_0\}$, але $F(\{x_0\}) = F(x_0+) - F(x_0) = 0$, звідки випливає, що $F_n(B) = F_n(x_0) \to F(B) = F(x_0),\ n \to \infty$.

22.5. $|\exp(it(\xi_n + \eta_n)) - \exp(it(\xi + c))|$
$\le |\exp(it(\xi_n + \eta_n)) - \exp(it(\xi_n + c))| +$
$|\exp(it(\xi_n + c)) - \exp(it(\xi + c))|$.

22.6. Нехай ξ_n слабко збігається до c. Нехай F_n - функція розподілу ξ_n, а $F(x) = \mathbb{1}_{[c,\infty)}(x)$ - функція розподілу c. Покажемо, що має місце збіжність за ймовірністю $\mathbf{P}\{|\xi_n - c| > \varepsilon|\} = 1 - \mathbf{P}\{c - \varepsilon \le \xi_n \le c + \varepsilon\} = 1 - F_n(c+\varepsilon) + F_n(c-\varepsilon) - \mathbf{P}\{\xi_n = c + \varepsilon\} \le 1 - F_n(c+\varepsilon) + F_n(c-\varepsilon) \to 1 - 1 + 0 = 0$, $n \to \infty$, оскільки $F_n(c+\varepsilon) \to F(c+\varepsilon) = 1$, $F_n(c-\varepsilon) \to F(c-\varepsilon) = 0$, та $\{c+\varepsilon, c-\varepsilon\}$ належать множині точок неперервності F, що рівна $(-\infty, c) \cup (c, +\infty)$.

22.7. Нехай $\sup(|\mu_n| + \sigma_n^2) = M < \infty$. Тоді за нерівністю Чебишева: $F_n(\overline{[-c,c]}) = \mathbf{P}(|\xi_n| > c) \le \frac{\mathbf{E}\xi_n^2}{c^2} = \frac{\sigma_n^2 + \mu_n^2}{c^2} \le 2M^2/c^2$, що прямує до нуля при $c \to \infty$ рівномірно за n. Отже, за критерієм Прохорова множина функцій розподілу $\{F_n,\ n \ge 1\}$ - слабко компактна. Доведемо обернене твердження. Нехай $\sup(|\mu_n| + \sigma_n^2) = \infty$, покажемо, що слабкої компактності немає. Припустимо спочатку $\overline{\lim}\sigma_n = \infty$. тоді $|\varphi_n(t)| = |e^{it\mu_n - \frac{\sigma_n^2 t^2}{2}}| = \exp\left(-\sigma_n^2 t^2/2\right)$. Верхня границя останнього виразу рівна нулю при $t > 0$. Крім того $\varphi_n(0) = 1$, тобто граничний розподіл не є неперервним в нулі, а отже слабкої збіжності немає, а отже і слабкої компактності теж немає. Нехай тепер $\sup_n \sigma_n^2 = S < \infty$. Тоді $\sup_n |\mu_n| = \infty$. Не втрачаючи загальності вважаємо, що існує така підпослідовність $\mu_{n_k} \to +\infty, k \to \infty$. Зафіксуємо довільне $c > 0$ і розглянемо $F_n([c,\infty))$. Зауважимо, що за нерівністю Чебишева: $\mathbf{P}\{|\xi_n - \mu_n| \le c_1) \ge 1 - \frac{\sigma_n^2}{c_1^2} \ge 1 - S/c_1^2$. Виберемо $c_1^2 = 2S$, та знайдемо такий номер n_k, що $\mu_{n_k} > c + c_1$. Тоді має місце наступне включення подій: $\{|\xi_{n_k} - \mu_{n_k}| \le c_1\} \subset \{|\xi_{n_k}| > c\}$. А тому $F_{n_k}\overline{[-c,c]} \ge 1/2$, причому ця нерівність виконана для нескінченно багатьох індексів n_k. Тому за критерієм Прохорова слабка компактність не виконується.

22.8. Нехай F деяка функція, що є границею в основному, і x_0 її точка розриву. Тоді існує безліч функцій $G(x) = F(x),\ x \ne x_0$, та $G(x_0) \ne F(x_0)$. Всі такі функції G теж будуть границями в основному для тієї ж послідовності. Однак G не будуть функціями розподілу. Той факт, що границя в основному, якщо вона існує, завжди є узагальненою функцією розподілу, випливає з теореми Хеллі.

22.9. Доведемо, що зі збіжності $L(F_n, F) \to 0, n \to \infty$ випливає збіжність в основному. Нехай x_0 точка неперервності F, та існує така константа $\Delta > 0$ та підпослідовність n_k, що $|F_{n_k}(x_0) - F(x_0)| > \Delta$. Не втрачаючи загальності, можна припустити, що всі $F_{n_k}(x_0)$ або більші або менші за $F(x_0)$. Припустимо, спочатку, що всі $F_{n_k}(x_0) < F(x_0)$. Тоді знайдемо таке $\delta < \Delta/2$, що F рівномірно неперервна на $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ та: $F(x_0 + \delta) - F(x_0 - \delta) < \Delta/2$. Оберемо тепер $x' = x_0 - \delta/2$, та $\varepsilon = \delta/2$. Тоді починаючи з деякого номера: $F_{n_k}(x' - \varepsilon) - \varepsilon \le F(x') \le F_{n_k}(x' + \varepsilon) + \varepsilon \le F_{n_k}(x_0) + \varepsilon \le F(x_0) - \Delta + \varepsilon$. Але $F(x') \ge F(x_0 - \delta) > F(x_0) - \Delta/2$, таким чином отримали нерівність: $F(x_0) - \Delta/2 < F(x_0) - \Delta + \varepsilon < F(x_0) - \Delta + \Delta/4 = F(x_0) - 3\Delta/4$, звідки $\Delta/4 < 0$ - протиріччя. Випадок, коли всі $F_{n_k}(x_0) > F(x_0)$ розглядається аналогічно. Отже отримали: $F_n(x_0) \to F(x_0)$, $n \to \infty$, для кожної точки неперервності x_0. Тому збіжність в основному доведена.

22.10. Має місце включення наступних подій:
$\{\eta_n < x\} \subset \{\zeta_n < x\} \subset \{\xi_n < x\}$. А отже, мають місце обмеження для функцій розподілу: $F_{\eta_n}(x) \le F_{\zeta_n}(x) \le F_{\xi_n}(x)$. Якщо x точка неперервності функції розподілу ζ, то дві крайніх числових послідовності збігаються до $F_\zeta(x)$, а тому і $F_{\zeta_n}(x) \to F_\zeta(x)$, а отже, має місце збіжність ζ_n до ζ в основному.

22.11. Оберіть $\Omega = [0, 1]$, з борелєвою сигма-алгеброю та рівномірним розподілом. В якості $\xi_n(\omega) := F_n^{(-1)}([0, \omega))$ - узагальнена обернена функція розподілу, в якості $\xi(\omega) := F^{(-1)}([0, \omega))$.

22.12. Рівномірний розподіл на $[0, 1]$.

22.13. Нехай ξ_n - кількість успіхів, в серії з n незалежних випробувань Бернуллі, з ймовірністю успіху p. З теореми Муавра-Лапласа відомо, що центровані і нормовані ξ_n слабко збігаються до $\xi \simeq N(0, 1)$. Зауважимо, що $\mathbf{P}\{\xi_n \in \{0, 1, \ldots, n\}\} = 1$. Позначимо $A := \{\frac{j - np}{\sqrt{np(1-p)}},\ j = \overline{0, n},\ n \ge 1\}$, тоді $\mathbf{P}\{\frac{\xi_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \in A\} = 1$, але в той же час $\mathbf{P}\{\xi \in A\} = 0$. Зауважимо, що межа множини A рівна $\mathbb{R}$. Інший приклад: ξ_n - рівномірно розподілена на $\{1/n, 2/n, \ldots, 1\}$. Тоді ξ_n слабко збігається до $\xi \in U(0, 1)$, але $\mathbf{P}\{\xi_n \in \mathbb{Q}\} = 1$ та $\mathbf{P}\{\xi \in \mathbb{Q}\} = 0$.

22.14. Доведіть твердження спочатку для індикаторів інтервалів з кінцями в точках неперервності F, потім для простих функцій, утворених такими індикаторами, а потім для довільної функції неперервної майже скрізь за мірою породженою F.

22.15. Нехай A - деяке додатне число з множини точок неперервності F - функції розподілу ξ. Доведіть наступні нерівності: $\liminf \mathbf{E}[|\xi_n|] \geq \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left[|\xi_n|\mathbb{I}_{|\xi_n|<A}\right] = \mathbf{E}\left[|\xi|\mathbb{I}_{|\xi|<A}\right]$. Для доведення останньої рівності, скористайтесь задачею 22.14, з функцією $g(x) = |x|\mathbb{I}_{[-A,A]}(x)$. Для завершення доведення спрямуйте A до нескінченності (в множині точок неперервності F).

22.16. (а) Достатньо застосувати умову для $-g$. (б) Клас $\mathrm{Lip}_b(\mathbb{R}) \subset C_b(\mathbb{R})$ вкладений щільно по відношенню рівномірної збіжності на компактах. Далі скористатись критерієм Колмогорова слабкої компактності.

22.17. Скористайтеся задачею 22.14. з функцією $g(x) = x\mathbb{I}_{[-A,A]}(x)$, де $\pm A$ - точки неперервності F.

22.18. Припустимо, що μ_n - точки неперервності для F_n. Нехай існує така підпослідовність n_k, що $\mu_{n_k} \to \mu \neq \mu_0$. Зауважимо, що $F(\mu_0) = 1/2$, і μ_0 - точка неперервності F за припущенням. Тоді $F_n(\mu_0) \to 1/2$, $n \to \infty$. В той же час $F_{n_k}(\mu_{n_k}) = 1/2$. Отримайте звідси протиріччя, з тим, що медіани визначені однозначно.

22.19. Скориставшись 22.11, розширимо ймовірнісний простір так, щоб на ньому $\xi_n \to^{\mathbf{P}1} \xi, n \to \infty$, де ξ_n, ξ мають функції розподілу F_n, F відповідно. За властивістю границі $(\sup\ /\ \inf)_{k\geq t_n}\xi_k \to \xi, t_n \to \infty$. Частинні границі величин ξ_{ν_n} лежать поміж останніх двох границь, а тому збігаються до ξ майже напевне та слабко.

22.20. Нехай має місце слабка компактність. Тоді визначимо функцію $V(x) = (\sup_F(1 - F(x)))^{-1/2}$, $x \geq 0$, та $V(x) = (\sup_F F(x))^{-1/2}$, $x < 0$. Одразу зауважимо, що ми припустили, що $V(x)$ визначено коректно. В іншому разі, наприклад, коли $\sup_F(1 - F(x)) = 0$, це означає що всі функції розподілу з даного класу рівні одиниці починаючи з деякого x. Тоді твердження буде виконано автоматично. За критерієм Прохорова зі слабкої компактності випливає рівномірна збіжність хвостів: $\sup_F F\overline{[-c,c]} \to$

$0,\ c \to \infty$, звідки виводимо, що $V(x) \to \infty, |x| \to \infty$. Для кожного F з даного класу розглянемо:

$$\int_0^\infty V(x)dF(x) = \int_0^\infty \frac{dF}{\sqrt{\sup_F(1-F(x))}} \le \int_0^\infty \frac{dF(x)}{\sqrt{1-F(x)}} = \frac{\sqrt{1-F(0)}}{2} \le 1/2.$$

Аналогічно розглядається інтеграл $\int_{-\infty}^0 V(x)dF(x)$. Отже, умова виконана. Нехай існує така функція $V(x)$. Тоді:

$$F\overline{[-c,c]} = \int_{\mathbb{R}\setminus(-c,c)} dF(x) \le \int_{\mathbb{R}\setminus(-c,c)} V(x)dF(x),$$

але останній інтеграл прямує до нуля рівномірно за F за умовою. Отже даний клас слабко компактний за теоремою Прохорова.

22.21. Довести збіжність характеристичних функцій за теоремою Лебега про мажоровану збіжність.

22.22. Граничний розподіл $ck^{-2}, k \in \mathbb{N},\ c = 6/\pi^2$.

22.23. Знайти характеристичну функцію ξ_{ν_n}.

22.24. Побудувати ξ_n, ξ на одному імовірнісному просторі на $[0,1)$ з мірою Лебега та обчислити $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\xi_n - \xi > 1/2) > 0$.

22.25. Скористатись формулою для площі поверхні сегмента n-вимірного кола для знаходження функції розподілу ξ_1.

22.26. Достатньо перевірити, що інтеграл $\mathbf{E}g(\xi_n)$ неперервно залежить від параметрів μ_n, σ_n^2.

22.27. $N(0,1/n),\ B(n,1/2)$.

22.28. Послідовність величин $\eta_n = \max_{k\le n} \xi_k$ не спадає та м.н. обмежена.

22.29. Обрати $\mathbf{P}(|\xi_n| > a_n/n) \le 1/n^2$.

22.30. Підставити замість f, g гармонічні функції та послатися на теорему Леві.

22.31. $\mathbf{P}(\xi = l) = C_n^l C_{N-n}^{k-l}/C_N^n \to C_k^l p^l (1-p)^{k-l}, N \to \infty$.

22.32. Довести збіжність в основному.

22.33. Клас $C_b^\infty(\mathbb{R}) \subset C_p(\mathbb{R})$ щільно вкладений. Див. 22.16.

22.34. Лінійна замкнена оболонка даного класу при обмеженій рівномірній збіжності на компактах збігається з $C_b(\mathbb{R})$, див. 22.16.

22.35. Можна вважати, що $c_n > 0$. Необхідність випливає з нерівності $\overline{\lim}_{n\to\infty}\mathbf{P}(c_n|\xi_n| \ge \varepsilon) \le \overline{\lim}_{n\to\infty}\mathbf{P}(|\xi_n| \ge \varepsilon/c)$ для довільних $\varepsilon, c > 0$, оскільки $c_n \to 0$, а праву частину за критерієм

Прохорова можна зробити як завгодно малою вибором $c > 0$. Достатність. Позначимо $x_n(\varepsilon) = \inf(x \geq 0 : \mathbf{P}(|\xi_n| \geq x) \leq \varepsilon)$ при $\varepsilon > 0$, .та $x(\varepsilon) = \sup_{n\geq 1} x_n(\varepsilon)$. Можливе одне з двох припущень. (а) $x(\varepsilon) = \infty$ при деякому $\varepsilon > 0$. Оберемо $c_n = 1/x_n(\varepsilon)$. Тоді $c_n \to 0$ та $\mathbf{P}(c_n |\xi_n| \geq 1 + \delta) \geq \varepsilon > 0$, що суперечить умові. (б) $x(\varepsilon) < \infty$ при кожному $\varepsilon > 0$. Тоді $\mathbf{P}(|\xi_n| \geq x(\varepsilon)) \leq \mathbf{P}(|\xi_n| \geq x_n(\varepsilon)) \leq \varepsilon$ для всіх $\varepsilon > 0$, звідки за критерієм Прохорова виводимо слабку компактність.

22.36. Не можна.

23.1. Х.ф. гама розподілу $\varphi_\zeta(t) = (1 - it/\lambda)^{-\alpha}$, х.ф. центрованого і нормованого гама-розподілу: $\varphi(t) = e^{-it\sqrt{\alpha}}(1 - it/\sqrt{\alpha})^{-\alpha}$. Обчислимо, границю, при $\alpha \to \infty$:

$$\lim e^{-it\sqrt{\alpha}}(1 - it/\sqrt{\alpha})^{-\alpha} = \lim e^{-it\sqrt{\alpha}-\alpha\ln(1-it/\sqrt{\alpha})} =$$
$$\lim \exp(-it\sqrt{\alpha} - \alpha \textstyle\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}(-it/\sqrt{\alpha})^n/n) =$$
$$\lim \exp(-it\sqrt{\alpha} + it\sqrt{\alpha} + (it)^2/2 - \alpha + \textstyle\sum_{n\geq 3}(-1)^{n+1}(-\frac{it}{\sqrt{\alpha}})^n/n) =$$
$$e^{-t^2/2}.$$

23.2. Запишемо формулу Тейлора із залишковим членом у формі Лагранжа, для функції g, в околі μ:

$$g(S_n/n) = g(\mu)+g'(\mu)(S_n/n-\mu)+((S_n/n-\mu)^2/2)g''(\mu+\theta(S_n/n-\mu)).$$

Тоді

$$n(g(S_n/n) - g(\mu)) = n(S_n/n - \mu)^2 g''(\mu + \theta(S_n/n - \mu))/2 =$$
$$\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}}\right)^2 g''(\mu + \theta(S_n/n - \mu))/2.$$

Зауважимо, що $S_n/n \to \mu$ м.н,. оскільки величини ξ_n - незалежні, однаково розподілені з середнім μ (умови класичної центральної граничної теореми, що виконані за умовою задачі), а отже для них справджується посилений закон великих чисел. Тому, в силу того, що g'' - неперервна: $g''(\mu + \theta(S_n/n - \mu)) \to g''(\mu) =$const м.н..

За класичною центральною граничною теоремою $\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}}$ слабко збігається до величини з розподілом $N(0, \sigma^2)$. Доведення завершує застосування теореми Слуцького.

23.3. Обчислимо математичне сподівання та дисперсію величин $\xi_k : \mathbf{E}[\xi_k] = 0$, $\mathbf{E}[\xi_k^2] = k^{2\alpha-\beta}$. Тоді умова Ліндеберга має вигляд: $L_n(\varepsilon) = \sigma_n^{-2} \sum_{k=1}^n \mathbf{E}[\xi_k^2 1\!\!1_{|\xi_k| \geq \varepsilon\sigma_n}] \to 0, n \to \infty$, де $\sigma_n^2 = \sum_{k=1}^n k^{2\alpha-\beta}$. За умови $2\alpha > \beta - 1$. Покажемо, що починаючи з деякого N, $n^\alpha < \varepsilon\sqrt{\sum_{k=1}^n k^{2\alpha-\beta}}$. Для цього зауважимо, що $\sqrt{\sum_{k=1}^n k^{2\alpha-\beta}}/n^\alpha = \sqrt{\sum_{k=1}^n (k/n)^{2\alpha} k^{-\beta}}$, де сума під коренем, прямує до нескінченності тоді і лише тоді, коли $\beta < 1$. Ясно, що $\beta \geq 0$ за умовою (інакше ймовірності були б більшими за 1).

23.4. Скористайтеся тим фактом, що функція розподілу $\max_{1 \leq k \leq n} \xi_k/n$ має вигляд: $F(nx)^n$, і обчисліть її границю при $n \to \infty$. Зауважте, що при $x < 0$, $F(nx)^n \to 0$, $n \to \infty$, отже досить розглядати лише $x > 0$.

23.5. Знайдемо х.ф. центрованої і нормованої величини: $\varphi(t) = e^{-it\sqrt{\lambda}} e^{\lambda(e^{it/\sqrt{\lambda}} - 1)}$. Обчислимо границю при $\lambda \to \infty$:
$-it\sqrt{\lambda} + \lambda(e^{it/\sqrt{\lambda}} - 1) = -it\sqrt{\lambda} + \lambda \sum_{n \geq 1} \lambda^{-n/2}(it)^n/n! =$
$-it\sqrt{\lambda} + it\sqrt{\lambda} + (it)^2/2 + \sum_{n \geq 3} \lambda^{1-n/2}(it)^n/n! \to -t^2/2,\ \lambda \to \infty.$
(в) Зауважте, що $e^{-n} \sum_{k=0}^n n^k/k! = F_n(n+0)$, де $F_n(k)$ – функція розподілу випадкових величин ξ_n з розподілом $\Pi(n)$.

23.6. $\ln(x)$. (б) Експоненційний розподіл з $\lambda = 1$.

23.7. Перевірити, за яких обмежень на a_k виконані умови теореми Ляпунова для загальних серій.

23.8. Х.ф. ξ_{nk} дорівнює $\varphi_{nk}(t) = e^{it} p_{nk} + (1 - p_{nk}) =$
$1 + p_{nk}(e^{it} - 1)$. Тому х.ф. суми $\sum_{k=1}^n \xi_{nk}$, має вигляд: $\varphi_n(t) = \prod_{k=1}^n \left(1 + p_{nk}(e^{it} - 1)\right)$. Покажіть, що $\ln \varphi_n(t) = \sum_{k=1}^n p_{nk}(e^{it} - 1) + o(\sum_{k=1}^n p_{nk}) \to \lambda(e^{it} - 1), n \to \infty$, та остання збіжність еквівалентна збіжності $\sum_{k=1}^n p_{nk} \to \lambda,\ n \to \infty$.

23.9. Розгляньте $|\varphi_n(t) - \left(e^{-t^2/(2n)}\right)^n|$, представте $\varphi_n(t)$ у вигляді n-того степеня х.ф. φ, після застосування нерівності з умови, зобразьте φ та $e^{-t^2/(2n)}$ у вигляді ряду Тейлора.

23.10. Розгляньте випадок, коли випадкові величини сталі м.н. Якщо вони не є сталими, розгляньте х.ф. $a_n^{-1}(\xi_1 + \ldots + \xi_n) - b_n$.

23.11. Позначимо $S_n(r), O_n(r)$ сферу та кулю радіусу r у $\mathbb{R}^n$. Сфера $S_{n+1}(1)$ утворена точками $O_n(1)$, що доповнені відповідною $(n+1)$-ю координатою. Внаслідок симетрії розподілу ξ_1 отримуємо $\mathbf{P}(\xi_1 < a) = 1/2 \pm 1/2\mathbf{P}(\xi_1^2 < a^2)$, де знак збігається зі знаком a, і за геометричним означенням імовірностей $\mathbf{P}(\xi_1^2 < a^2) = \left|O_n(\sqrt{1-a^2})\right| / |O_n(1)| = (1-a^2)^{n/2}$. Звідси виводимо, що $\mathbf{P}(\xi_1 < y/\sqrt{n}) \to 1/2 \pm 1/2\exp(-y^2/2), n \to \infty$.

23.12. Позначимо $\zeta_n = \max_{k \le n} \frac{|\xi_k|}{\sqrt{n}}$, тоді:
$F_n(x) = \mathbf{P}\{\max_{k \le n} |\xi_k| < x\sqrt{n}\} = \mathbf{P}\{|\xi_1| < x\sqrt{n}\}^n \ge 1 - \left(\frac{1}{x^2 n}\right)^n = 1 - e^{-n\ln(x^2 n)} \to 1,\ n \to \infty$, де в першій нерівності ми скористалися нерівністю Чебишева. Отже, $F_n(x) \to 1,\ n \to \infty$, при $x > 0$, і очевидно $F_n(x) = 0,\ x < 0$.

23.13. Нехай $x \ge 0$. Використовуючи принцип віддзеркалення, покажіть, що кількість шляхів довжини n з нуля, що перетинають пряму $y = x$ (а отже, максимум більший або рівний за x), рівна кількості всіх шляхів з нуля в точку (n, B), де $B \ge x$, або $B \le -x$.

23.14. Зауважимо, що для ξ_n виконана умова Ляпунова з
$\delta = 1$ ($\mathbf{E}[\xi_k{}^{2n+1}] = 0$), тому для послідовності ξ_n виконана ЦГТ, звідки випливає слабка збіжність $S_n/\sqrt{\mathbf{D}S_n}$ до стандартного нормального розподілу. Зауважимо, що $\mathbf{D}[\xi_n] = 2 - k^{-2}$, тому $\mathbf{D}[S_n] = 2n - \sum_{k=1}^n k^{-2}$, $\mathbf{D}[S_n]/n = 2 - 1/n\sum_{k=1}^n k^{-2} \to 2,\ n \to \infty$.

23.15. Позначимо $\xi_{nk} = \xi_k/\sqrt{\mathbf{D}S_n}$. Тоді ξ_{nk} - послідовність стандартних серій. Перевіримо умову Ліндеберга (зауважимо, що $\sigma_n = 1$)
$L_n(\varepsilon) = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}|\xi_{nk}|^2 \mathbb{1}_{|\xi_{nk}| > \varepsilon} = (\mathbf{D}S_n)^{-1} \sum_{k=1}^n \mathbf{E}|\xi_k|^2 \mathbb{1}_{|\xi_k| > \varepsilon\sqrt{\mathbf{D}S_n}} \le (\mathbf{D}S_n)^{-1} \sum_{k=1}^n \mathbf{E}|\xi_k|^2 \mathbb{1}_{c_k > \varepsilon\sqrt{\mathbf{D}S_k}}$. Оскільки $c_k/\sqrt{\mathbf{D}S_k} \to 0,\ k \to \infty$, то починаючи з деякого номеру: $c_k < \varepsilon\sqrt{\mathbf{D}S_k}$, тому починаючи з деякого номеру N_0, всі доданки в $L_n(\varepsilon)$ більші за N_0 будуть рівними нулю. Якщо $\mathbf{D}S_n \to \infty$, то і решта доданків стануть нульовими, починаючи з деякого номеру.

23.16. Нехай f - щільність ξ_1. Характеристична функція доданку $(n\xi_1)^{-1}$ дорівнює $2\int_0^\infty \cos(t/nx)f(x)dx$, тому $\mathbf{E}\exp(itT_n) = (1 - 2\int_0^\infty (1-\cos(t/nx))f(x)dx)^n \sim \exp(-2t\int_0^\infty (1-\cos(y))y^{-2}f(\frac{t}{ny})dy) \to \exp(-tb), n \to \infty$, при $t > 0$, де $b = 2f(0)\int_0^\infty (1-\cos(y))y^{-2} \in \mathbb{R}_+$. Тут використано заміну $y = t/nx$. Враховуючи симетрію розподілу T_n, виводимо граничну характеристичну функцію Коші $\exp(-|t|)b)$.

23.17. Обчислимо $\mathbf{E}S_n = 0$, $\mathbf{D}S_n = 2n + o(n), n \to \infty$, та характеристичну функцію $\varphi_k(t) = \mathbf{E}\exp(it\xi_k) = (1 - 1/k)\cos t + 1/k\ \cos t\sqrt{k}$. Звідси $\ln\varphi_{S_n}(t/b_n) = \sum_{k=1}^n \ln\varphi_k(t/b_n) \to -t^2/2, n \to \infty$, за умови збіжності $S_n/b_n \to^W \zeta$. Оскільки ряд $\sum_{k\ge 1}\ln\varphi_k(t/b)$ розбігається при $t, b > 0$, то послідовність b_n не може бути обмеженою. Далі, можна вважати, що $S_n/b_n \to^{\mathbf{P}1} \zeta, n \to \infty$, на деякому ймовірнісному просторі (див. 22.11). Тому внаслідок лівої нерівності Фату $1 = \mathbf{E}\zeta^2 \le \underline{\lim}_{n\to\infty}\mathbf{E}S_n^2/b_n^2$ отримуємо $\overline{\lim}_{n\to\infty} b_n^2/2n \le 1$. Переходячи до підпослідовності, вважатимемо, що $b_n/\sqrt{n} \to b, n \to \infty$, де $b \in [0, \sqrt{2}]$. Припустимо, що $b > 0$. Оскільки $0 \le 1 - \varphi_k(t/b_n) \le t^2/b_n^2$, то $\ln\varphi_{S_n}(t/b_n) = -\sum_{k=1}^n (1-\varphi_k(t/b_n)) + o(n/b_n^2) = -nt^2/2b_n^2 + o(1) - r_n(t)$, де $r_n(t) = \sum_{k=1}^n k^{-1}(1 - \cos(t\sqrt{k}/b_n)) \to \psi(t) \equiv \int_0^1 (1 - \cos(t/b\sqrt{x}))dx/x, n \to \infty$. Тому гранична характеристична функція $\exp(-t^2/2b - \psi(t))$ не збігається з нормальною. Нехай, нарешті $b = 0$. Тоді $n/b_n^2 \to \infty$, отже $\ln\varphi_{S_n}(t/b_n) \le -nt^2/b_n^2 + \ln n + O(1) \to -\infty, n \to \infty$, що суперечить вибору b_n.

23.18. Позначимо $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$, $\mu_n = \mathbf{E}S_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k = \mathbf{D}S_n = \sigma_n^2$, $b_n^2 = \sum_{k=1}^n \alpha_k^2$. За теоремою Штольця збіжність $b_n^2/\mu_n \to 0$ еквівалентна $\alpha_n^2/\alpha_n = \alpha_n \to 0$, до того ж з неї випливає, що $\mu_n \to \infty, n \to \infty$. За тією ж теоремою показник Ліндеберга $L_n(\varepsilon) \to 0$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha_n^{-1}\mathbf{E}(\xi_n - \alpha_n)^2 1\!\!\mathrm{I}_{|\xi_n - \alpha_n| \ge \varepsilon\sigma_n} \to 0, n \to \infty$. Останній показник не перевищує $(\Gamma(\alpha_n + 1))^{-1}\int_{\alpha_n+\varepsilon\sigma_n}^\infty 2(x^2 + \alpha_n^2)x^{\alpha_n - 1}\exp(-x)dx \to 0, n \to \infty$, оскільки $\sigma_n \to \infty, \alpha_n \to 0$.

23.19. Зауважимо, що $\mathbf{E}\xi_k = \mathbf{D}\xi_k = 1/k$. Тому $\mathbf{E}S_n = \mathbf{D}S_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n = \ln(n) + \gamma + \varepsilon_n$, де $\varepsilon_n \to 0,\ n \to \infty$, γ - стала Ейлера. Покажемо, що виконані умови центральної граничної теореми Ляпунова для загальних серій: $(\sigma_n^2)^{-1-\delta}\sum_{k=1}^n \mathbf{E}\left[|\xi_k - 1/k|^{2+2\delta}\right] =$

$(\ln(n)+\gamma+\varepsilon_n)(\ln(n)+\gamma+\varepsilon_n)^{-1-\delta} = (\ln(n)+\gamma+\varepsilon_n)^{-\delta} \to 0,\ n \to \infty.$

23.20. Доведемо достатність. Позначимо $\zeta_n = \sum_{k=1}^{k_n} \xi_{nk}$, $\xi'_{nk} = \xi_{nk}1\!\!\mathrm{I}_{|\xi|\le\varepsilon}$, $\zeta'_n = \sum_{k=1}^{k_n} \xi'_{nk}$. Покладемо $B_n = \{\zeta_n = \zeta'_n\}$. Тоді: $\mathbf{P}\{\overline{B_n}\} \le \sum_{k=1}^{k_n} \mathbf{P}\{|\xi_{nk}| \ge \varepsilon\} \to 0,\ n \to \infty$, за умовою. Далі, маємо: $\mathbf{P}\{|\zeta_n| \ge \varepsilon\} = \mathbf{P}\{\zeta_n \ge \varepsilon, B_n\} + \mathbf{P}\{\zeta_n \ge \varepsilon, \overline{B_n}\} \le \mathbf{E}[\zeta'_n]/\varepsilon + \mathbf{P}(\overline{B_n}) \to 0$, $n \to \infty$, в останній нерівності ми скористалися нерівністю Маркова з $g(x) = x$, в силу невід'ємності ζ_n, тим фактом, що на множині B_n, $\zeta_n = \zeta'_n$. Збіжність першого доданку до нуля випливає з того, що $\sum_{k=1}^{k_n} \mathbf{E}[\xi_{nk}1\!\!\mathrm{I}_{\xi_{nk}\le\varepsilon}] = \mathbf{E}[\zeta'_n] \to 0,\ n \to \infty$, за умовою. Для доведення необхідності доведіть $\sum_{k=1}^{k_n}(1 - \varphi_{nk}(t)) \to 0,\ n \to \infty$, і виведіть звідси твердження задачі. За подробицями див. [45, с. 114-115].

23.21. Див. Теорема 1, [45, с.186].

23.22. В n-тій серії математичне сподівання і дисперсія ξ_{nk} рівні $1/n$, отже (ξ_{nk}) - є загальною схемою серій. Покажемо, що центральна гранична теорема не виконана. Для цього обчислимо х.ф. $\frac{\xi_{n1}+\ldots+\xi_{nn}-1}{\sqrt{n}\sigma_n} = \xi_{n1} + \ldots + \xi_{nn} - 1$. Х.ф. цього виразу: $\varphi_n(t) = \exp^n\left(\frac{1}{n}(e^{it} - 1)\right)e^{-it} = e^{e^{it}-it-1}$, як бачимо, до х.ф. нормального розподілу це не прямує. Переконаємося, що умова Ляпунова не виконана: $\sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}|\xi_{nk} - 1/n|^{2+\delta} = n\mathbf{E}|\xi_{11} - 1/n|^{2+\delta} \ge$ $n(\mathbf{E}\left[\left(|\xi_{11} - 1/n|^{2+\delta} - |\xi_{11} - 1/n|^2\right)1\!\!\mathrm{I}_{\xi_{11}\in\{0,1\}}\right] + \mathbf{E}(\xi_{11} - 1/n)^2) =$ $n(\frac{e^{-1/n}}{n^2}(\frac{1}{n^\delta} - 1) + \frac{e^{-1/n}}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2((\frac{n-1}{n})^\delta - 1) + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^2}) \to 1$, $n \to \infty$.

23.23. Обчислити $\mathbf{E}\,|\xi_n|^2\,1\!\!\mathrm{I}_{|\xi_n|\ge\varepsilon}$.

23.24. Допграничний вираз дорівнює $((S_n - n)/\sqrt{n})2/(\sqrt{S_n/n} + 1)$.

23.25. Величина $\nu(t)$ має геометричний розподіл.

23.26. Знайти характеристичну функцію ζ_n.

23.27. Обчислити відповідну характеристичну функцію.

23.28. Позначимо $K_n = \{k \le n : n_k \in 2\mathbb{N}\}$, $\mu_k = \mathbf{E}\xi_k = 1\!\!\mathrm{I}_{k\in K_\infty}/(n_k + 1)$, $\sigma_n^2 = \sum_{k\le n} 1/(2n_k + 1)$, $\mathbf{D}S_n = \sigma_n^2 - \sum_{k\in K_n} \mu_k^2 = \sigma_n^2 + o(\sigma_n^2), n \to \infty$. Припустимо, що $\sigma_n^2 \to \infty$. За теоремою Штольця внаслідок монотонності σ_n показник Ліндеберга для послідовності серій $(\xi_k, k = \overline{1,n}, n \ge 1)$ прямує до 0 тоді і тільки тоді, коли $(2n_k + 1)\mathbf{E}(\xi_k - \mu_k)^2 1\!\!\mathrm{I}_{|\xi_k-\mu_k|\ge\varepsilon\sigma_k} \to 0, k \to \infty$. Останній вираз дорівнює нулю, починаючи з $\varepsilon\sigma_k > 1$. Тому суми (S_n) асимптотично нормальні за теоремою Ліндеберга. Нехай тепер σ_n^2 - обмежені. Тоді і $\mathbf{E}S_n = \sum_{k\le n}\mu_k$ обмежені. Звідси виводимо, що слабка границя S_n є сумою м.н. збіжного (внаслідок обмеженості σ_n^2) ряду $\sum_{k\ge 1}(\xi_k)^{n_k} = S$. Якщо $K_\infty \ne \emptyset$, то S є сумою незалежних невід'ємних величин $(k \in K_\infty)$ та симетричної величини $(k \notin K_\infty)$, тому не є симетричною та не є гаусівською. Якщо ж $K_\infty = \emptyset$, то щільність S_n в околі нуля має вигляд $c_n\,|x|^{\alpha_n - 1}\,\mathbb{1}_{|x|\le n}$, де $\alpha_n = \sum_{k\le n} 1/n_k - 1$ збігається до скінченої границі. Тому S також не є гаусівською.

23.29. Обчислити відповідну характеристичну функцію.

23.30. Див. 22.5.

23.31. Див. 22.5.

23.32. Див. 22.5.

23.33. Обчислимо $\varphi_k(t) = \mathbf{E}\exp(it\xi_k) = (\sin kt)/kt$, $\mathbf{D}S_n = \sigma_n^2/3 + o(\sigma_n^2)$, де $\sigma_n^2 = n^3$, звідки $\varphi_k(t/\sigma_n) = 1 - k^2t^2/6\sigma_n^2 + o(k^2/\sigma_n^2)$. Тому $\ln\varphi_{S_n}(t/\sigma_n) = \sum_{k=1}^n \ln(1 - k^2t^2/6\sigma_n^2 + o(1/n)) = -t^2/6 + o(1), n \to \infty$.

23.34. Дограничні розподіли не залежать від F.

23.35. Розглянути величини $\eta_k = \xi_k - a_k$.

23.36. Нехай $\xi_k \simeq \Pi(1)$ незалежні, $\zeta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Тоді $(\eta_n - n)/\sqrt{n} \simeq (\zeta_n - \mathbf{E}\zeta_n)/\sqrt{\mathbf{D}\zeta_n}$.

23.37. Застосувати нормальну апроксимацію біноміального розподілу.

24.1. $\mathbf{P}\{|\nu(t+h) - \nu(t)| > \varepsilon\} = \mathbf{P}\{\nu(h) > \varepsilon\} \to 0,\ h \to 0$.

24.2. Запишіть означення похідної для функції $f(n,t)$, та скористайтеся означенням та теоремою про розподіл процесу Пуассона.

24.3. Представте $\nu(t)$ як суму n незалежних, однаково розподілених приростів.

24.4. Скористайтеся тим фактом, що прирости $\omega(t) - \omega(u)$ вінерівського процесу незалежні, та мають розподіл $N(0, \sigma^2(t-u))$.

24.5. Скористайтесь означенням Вінерівського процесу.

24.6. Нормальність випливає з лінійності перетворення, а незалежність - з некорельованості, якщо врахувати незалежність приростів w та зображення $\zeta_{nk} = (w(t_{n,2k-1}) - w(t_{n,2k}))/2 - (w(t_{n,2k-2}) - w(t_{n,2k-1}))/2$. Тут застосовано тотожність $w(t_{n,2k}) = w(t_{n-1,k})$.

24.7. (а) $\omega(s) + \omega(t) = \omega(t) - \omega(s) + 2\omega(s)$.
(б) $W \equiv \int_0^1 w(s)ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n 1/n\ w((k-1)/n)$, що має гаусів розподіл. Тому достатньо обчислити $\mathbf{E}W = \int_0^1 \mathbf{E}w(s)ds = 0$,
$\mathbf{E}W^2 = \mathbf{E}\int_0^1 w(s)ds \int_0^1 w(t)dt = \int_0^1\int_0^1 \min(t,s)dsdt = 1/3$. Отже, $W \simeq N(0, 1/3)$.

24.8. Скористатись зауваженням до теореми про структуру траєкторій процесу Пуассона.

24.9. Скористатись означенням процесу Пуассона.

24.10. Обчислимо середнє:
$m(t) = \mathbf{E}[(-1)^{\nu(t)}] = e^{-\lambda t}\sum_{k\ge 0}\frac{(-\lambda t)^k}{k!} = e^{-2\lambda t}$.
Обчислимо, для $s < t$ $\quad \mathbf{E}[(-1)^{\nu(s)}(-1)^{\nu(t)}] =$
$\mathbf{E}[(-1)^{2\nu(s)}(-1)^{\nu(t)-\nu(s)}] = \mathbf{E}[(-1)^{2\nu(s)}]\mathbf{E}[(-1)^{\nu(t)-\nu(s)}] = e^{-2(t-s)}$.

24.11. Скористайтесь задачею 17.7.

24.12. (а) Незалежність та однорідність приростів виводяться з таких же властивостей процесу ν та незалежності доданків ξ_k, оскільки $\eta(t) = \sum_{k=1}^n \eta[t_{k-1}, t_k)$ при $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n$, де величини $\eta[t_{k-1}, t_k) = \sum_{j: t_{k-1}\le j < t_k} \xi_j$ незалежні у сукупності та однаково розподілені (при однакових довжинах $t_k - t_{k-1}$). (в) $\mathbf{E}\eta(t) = \lambda t \mathbf{E}\xi_1$, $\mathbf{D}\eta(t) = \lambda t\mathbf{E}\xi_1^2$. (д) Випливає з посиленого закону великих чисел, з урахуванням зображення (а).

24.13. Знайти сумісну характеристичну функцію $\eta(t, B_1)$, $\eta(t, B_2)$.

24.14. З зображення $\nu(t) = \sum_{k=1}^{[t]} \nu[t-k, t-k+1) + \nu(t-[t])$ та посиленого закону великих чисел виводимо, що $\frac{\nu(t)}{t} \to^{\mathbf{P}1} \lambda, t\to\infty$, оскільки $\nu(t-[t]) \le \sup_{0\le s\le 1}\nu(s)$, та за нерівністю Колмогорова $\mathbf{P}(\sup_{0\le s\le 1}\nu(s) \ge a) \le \mathbf{D}\nu(1)/a^2 \to 0, a\to\infty$. Залишається зауважити, що $\{\lim_{t\to\infty}\zeta(t) < 0\} \subset \{\sup_{t\ge 0}\zeta(t) < \infty\}$, та $\{\sup_{t\ge 0}\zeta(t) = \infty\} \subset \{\lim_{t\to\infty}\zeta(t) > 0\}$.

24.15. $\lambda/(\lambda + t^2/2)$.

24.16. Позначимо через λ_n, σ_n суми в умовах (1),(2), φ_n - характеристичну функцію суми $\xi_n = \sum_{k=1}^n \xi_{nk}$, φ_{nk} - характеристичну функцію ξ_{nk}. Оскільки $\lambda_n \to \lambda, \sigma_n \to 0, n \to \infty$, то $\ln \varphi_n(t) = \sum_{k=1}^n \ln \varphi_{nk}(t) \sim \sum_{k=1}^n (\varphi_{nk}(t) - 1) = \lambda_n \exp(it) - \lambda_n \to \lambda \exp(it) - \lambda, n \to \infty$.

24.17. $\exp(-\int_0^t \lambda(u)du)$.

24.18. $\exp(-\lambda t)$.

24.19. $\mathrm{Cov}(\xi(t), \xi(s)) = \exp(-b(t+s))a\exp(2b\min(t,s))$.

24.20. Довести, що інтеграл після моменту s до наступного стрибка процесу має функцію інтенсивності $\lambda_s(t) = \lambda(s+t)$ (принцип локальності). Для знаходження розподілу виведіть систему диференціальних рівнянь для умовних розподілів $p_n(s,t) = \mathbf{P}(\nu(t) = n|\nu(s) = 0), t \geq s$.

24.21. Довести властивість незалежності приростів для результуючого процесу та обчислити його інтенсивність.

24.22. Перевірити умови означення у 24.20.

24.23. (а) $\mu\lambda t$; (б) $\mathbf{D}\zeta(t)$.

Розділ 2

Імовірність 2

Вступ: теми розділу та їх призначення

1. Випадкові послідовності. Оволодіння поняттями вимірних просторів на R, R^n та їх побудова. Ймовірнісні простори на R, R^n та їх побудова. Ймовірнісні простори на просторі послідовностей R^∞. Випадкові величини та елементи. Породжені розподіли та сигма-алгебри. Лема про вимірність.

2. Незалежні класи подій та величин. Незалежні системи випадкових подій та їх перетворення. Незалежні системи випадкових величин та їх перетворення. Закон нуля та одиниці Колмогорова. Приклади та наслідки. Закон нуля та одиниці Хьюітта-Севіджа для переставних величин.

3. Умовне сподівання відносно сигма-алгебри. Умовне математичне сподівання для скінчених сигма-алгебр. Загальне визначення умовного математичного сподівання. Існування та єдиність. Властивості умовного математичного сподівання як оператора від величин. Властивості умовного математичного сподівання в залежності від умови.

4. Умовне сподівання відносно системи величин. Умовне математичне сподівання відносно систем випадкових величин. Властивості. Функція регресії. Приклади обчислення через сумісну щільність. Нормальна регресія на площині Властивості умовного математичного сподівання в залежності від умов.

5. Теорема Колмогорова про три ряди. Збіжність випадкових величин майже напевне, за ймовірністю та в середньому. Фундаментальність. Співвідношення між ними. Нерівності Колмогорова. Теореми Колмогорова про один та два ряди Теорема Колмогорова про три ряди. Наслідок про посилений закон великих чисел.

6. Закон повторного логарифму та строго стаціонарні послідовності. Ознайомлення з законом повторного логарифму, строго стаціонарними послідовностями. Теорема Гарсіа, Теореми Біркгофа-Хінчина та ергодична теорема для стаціонарних послідовностей. Приклади.

7. Характеристичні функції. Вивчення властивостей характеристичних функцій. Формула обертання.

8. Метод характеристичних функцій для уточнення граничних теорем. Метод характеристичних функцій для уточнення центральної граничної теореми. Розклад Еджуорта. Про співвідношення метрик для функцій розподілу та характеристичних функцій. Теорема Бері-Ессеєна.

9. Рекурентність блукань. Цілочисельне блукання на прямій. Решітковість. Моменти досягнення. Загальний критерій рекурентності. Критерій рекурентності через характеристичну функцію стрибка. Критерій рекурентності при скінченому середньому.

10. Нескінченно подільні розподіли та канонічні міри. Нескінченно подільні розподіли та канонічні міри. Теорема Леві-Хінчина.

2.1. Випадкові послідовності

Література: [1,с.162-169]. Сам: 1-6.

1. Довести, що клас циліндричних множин J у $\mathbb{R}^\infty$ не є сигма-алгеброю.

2. Нехай $a = (a_k, k \geq 1) \in \mathbb{R}^\infty$, а $V = (V_{ij}, i, j \geq 1)$ симетрична додатно визначена матриця. Позначимо вектор $a^n = (a_1, ..., a_n)$, та

матрицю $V_n = (V_{ij}, 1 \le i, j \le n)$ і припустимо її невиродженою. Довести, що сумісні функції розподілу $F_n(x^n)$, які визначаються сумісними щільностями

$$(2\pi)^{-n/2} \left|\det V_n\right|^{-1/2} \exp(-(x^n - a^n)' V_n^{-1}(x^n - a^n)/2), \ x^n \in \mathbb{R}^n,$$

задовольняють умову узгодженості.

3. Нехай $E \subset \mathbb{R}$ – дискретна множина. Вивести з теореми Колмогорова про побудову міри такі твердження. (а) Якщо розподіли $(p_n(x_1, ..., x_n),\ x_k \in E, n \ge 1)$ такі, що $\sum_{x \in E} p_{n+1}(x_1, .., x_n, x) = p_n(x_1, ..., x_n)$, то існує єдина ймовірність $\mathbf{P}$ на $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^\infty)$, для якої при всіх $n \ge 1$ та $a_k \in E$ має місце рівність $\mathbf{P}(\{x \in \mathbb{R}^\infty : x_1 = a_1, ... x_n = a_n\}) = p_n(a_1, ..., a_n)$. (б) Якщо $(q(x), x \in E)$ та рядки матриці $(p(x, y), x, y \in E)$ є розподілами ймовірностей, то послідовність $p_n(x_1, ..., x_n) = q(x_1) p(x_1, x_2) ... p(x_{n-1}, x_n)$ задовольняє умови (а) для кожного розподілу q.

4. Нехай $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$ для деяких (ξ_k). Довести, що $\sigma[\xi_1, ..., \xi_n] = \sigma[S_1, ..., S_n]$.

5. Функції розподілу F, G такі, що $F(x) \le G(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Довести, що існує ймовірнісний простір $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ та випадкові величини ξ, η на ньому з функціями розподілу F, G відповідно такі, що $\xi \ge \eta$ при всіх ω.

6. Нехай $\zeta, (\xi_n, n \ge 1)$ випадкові величини такі, що ζ вимірна відносно породженої сигма-алгебри $\sigma[\xi_n, n \ge 1]$. Довести, що знайдеться борелєва функція $g : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$ така, що $\zeta = g((\xi_n, n \ge 1))$ для майже всіх ω.

7. Довести, що множини $\{x \in \mathbb{R}^\infty : \sup x_n < a\}$, $\{x \in \mathbb{R}^\infty : \exists \lim x_n < a\}$, $\{x \in \mathbb{R}^\infty : \sum_{n \ge 1} |x_n| < a\}$, $\{x \in \mathbb{R}^\infty : \sum_{k=1}^n x_k = 0$ нескінченно часто$\}$ є борелєвими.

8. Визначимо на $\mathbb{R}^\infty$ метрику

$$\rho(x, y) = \sum_{n \ge 1} 2^{-n} \min(|x_n - y_n|, 1),$$

що визначає покоординатну збіжність. Тоді $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^\infty)$ породжується відкритими кулями.

9. Нехай задано послідовність довільних функцій розподілу

$(G_n, n \geq 1)$. Тоді існує єдина ймовірність $\mathbf{P}$ на $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^\infty)$ така, що $\mathbf{P}(\{x \in \mathbb{R}^\infty : x_1 < a_1, ..., x_n < a_n\}) = \prod_{k=1}^n G_k(a_k)$, $\forall a_k \in \mathbb{R}$, $\forall n \geq 1$.

10. Нехай $C(\mathbb{Q})$ – простір неперервних функцій на множині раціональних чисел $\mathbb{Q}$, з борелєвою сигма-алгеброю $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^\mathbb{Q})$. Функція Q задана на циліндрах $C_F = \{x : x_t \in B_t, t \in F\}$ при скінчених $F \subset \mathbb{Q}$ та довільних $B_t \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ рівністю $Q(C_F) = \prod_{t \in F} G(B_t)$, де G – імовірнісна міра Лебега – Стілтьєса на $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Довести, що Q продовжується до адитивної імовірності на алгебру циліндрів, що породжена множинами C_F, однак ця ймовірність не є σ-адитивною.

11. Нехай T – довільна множина. Розглянемо простір $\mathbb{R}^T = \{x : T \to \mathbb{R}\}$. Нехай $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^T) \equiv \sigma[\{x : x(t) < a\}, a \in \mathbb{R}, t \in T]$. Довести, що $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^T) = \cup_{\tau \subset T} \mathfrak{B}(\mathbb{R}^\tau)$, де об'єднання береться по зліченним підмножинам множини T, а сигма-алгебра $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^\tau)$ визначається так само, як і $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^\infty)$. У випадку $T = [0, 1]$, довести, що $S_a \equiv \{x : \sup_{t \in [0,1]} x(t) < a\} \notin \mathfrak{B}(\mathbb{R}^T)$. Одночасно перетин $S_a \cap C([0, 1])$ вже належить $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^T)$.

12. Функції розподілу слабко збігаються: $F_n \to^W F_0, n \to \infty$. Довести, що знайдеться ймовірнісний простір $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ та випадкові величини $\xi_n, n \geq 0$, на ньому такі, що ξ_n має функцію розподілу F_n, причому $\xi_n \to^{\mathbf{P}1} \xi_0, n \to \infty$.

13. Послідовності $(\xi_n), (\eta_n)$ мають однакові скінченно-вимірні розподіли: $F_{(\xi_1,...,\xi_n)}(x_1, ..., x_n) = F_{(\eta_1,...,\eta_n)}(x_1, ..., x_n)$, $\forall x_k \in \mathbb{R}$, $\forall n \geq 1$, та $\xi_n \to^{\mathbf{P}} \xi$, $n \to \infty$. Довести, що $\eta_n \to^{\mathbf{P}} \eta, n \to \infty$, для деякої випадкової величини $\eta \simeq \xi$.

14. Для кожної точки $x = (x_1, ..., x_n, ...) \in \mathbb{R}^\infty$, визначимо оператор зсуву $\theta x = (x_2, ..., x_{n+1}, ...) \in \mathbb{R}^\infty$. Довести, що клас множин $\mathfrak{F} = \{B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^\infty) : B = \theta^{(-1)}(B)\}$ є сигма-алгеброю. Описати $\mathfrak{F}$-вимірні скалярні функції.

15. Сумісні функції розподілу $F_n(x_1, ..., x_n)$ мають характеристичні функції $\varphi_n(t_1, ...t_n)$. Довести, що послідовність $(F_n, n \geq 1)$ є узгодженою тоді і тільки тоді, коли $\varphi_{n+1}(t_1, ...t_n, 0) = \varphi_n(t_1, ...t_n)$, $n \geq 1, t_k \in \mathbb{R}$.

16. Нехай $Q_{n+1}(x_1, ..., x_n, B)$ при кожному $n \geq 1$ є вимірною

функцією вектора $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ для всіх $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, та ймовірністю від $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ для всіх $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Нехай також Q_1 - імовірність на $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Довести без використання теореми Колмогорова, що на вимірному просторі $(\mathbb{R}^\infty, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^\infty))$ існує ймовірність $\mathbf{P}$ така, що

$$\mathbf{P}(\{x \in \mathbb{R}^\infty : x_1 < a_1, \ldots, x_n < a_n\}) =$$
$$\int_{-\infty}^{a_1} Q_1(dx_1) \int_{-\infty}^{a_2} Q_2(x_1, dx_2) \ldots \int_{-\infty}^{a_n} Q_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, dx_n).$$

17. Довести, що $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ є найменшою сигма-алгеброю, відносно якої вимірні всі неперервні відображення з $\mathbb{R}^n$ у $\mathbb{R}$.

18. Сигма-алгебра $\mathfrak{F}$ називається зліченно породженою, якщо знайдеться зліченний клас $\mathfrak{C} \subset 2^\Omega$ такий, що $\mathfrak{F} = \sigma[\mathfrak{C}]$. Довести, що сигма-алгебра $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^\infty)$ – зліченно породжена.

19. Випадкові величини (ξ_n) незалежні у сукупності, $\mathbf{P}(\xi_n = 0) = \mathbf{P}(\xi_n = 1) = 1/2$. Довести, що сума ряду $\sum_{n \ge 1} 2^{-n} \xi_n$ рівномірно розподілена на $[0, 1]$. Довести також обернене твердження.

2.2. Незалежні класи подій та величин

Література: [1,с.170-174]. Сам: 1-6.

1. Довести, що сигма-алгебри $(\mathfrak{F}_k, k = \overline{1, n})$ незалежні у сукупності тоді й тільки тоді, коли при кожному $k > 1$ незалежні сигма-алгебри $(\mathfrak{F}_k,\ \sigma[\cup_{i<k} \mathfrak{F}_i])$.

2. Нехай $\mathfrak{F}_n = \{\{a \in \mathbb{R}^\infty : a_n \in B\}, B \in \mathfrak{B}[\mathbb{R}]\} \subset \mathfrak{B}[\mathbb{R}^\infty]$. Довести, що залишкова σ-алгебра $\overline{\lim}_{n \to \infty} \mathfrak{F}_n = \cap_{n \ge 1} (\mathbb{R}^n \times \mathfrak{B}[\mathbb{R}^\infty])$.

3. Випадкові величин $(\xi_n, n \ge 1)$ незалежні у сукупності. Довести, що радіус збіжності степеневого ряду $\sum_{n \ge 1} \xi_n\ x^n$ є м.н. сталою.

4. Випадкові вектори $X = (\xi_1, ..., \xi_n)$ та $Y = (\eta_1, ..., \eta_m)$ незалежні, і кожний з них складається з незалежних випадкових величин. Довести, що (а) вектор $(\xi_1, ..., \xi_n, \eta_1, ..., \eta_m)$ містить незалежні у сукупності випадкові величини; (б) обернене твердження також має місце.

5. Довести, що випадкові величини $(\xi_1, ..., \xi_n)$ незалежні в сукупності тоді й тільки тоді, коли $\mathbf{E}g_1(\xi_1)...g_n(\xi_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{E}g_k(\xi_k)$ для всіх функцій $g_k \in C_b(\mathbb{R})$.

6. Випадкові величини $\xi_1, \xi_2 \simeq Exp(1)$ незалежні та мають однаковий показниковий розподіл із параметром 1. Довести, що величини: (а) $\min(\xi_1, \xi_2)$ та $|\xi_1 - \xi_2|$ незалежні; (б) $\xi_1/(\xi_1 + \xi_2)$ та $\xi_1 + \xi_2$ незалежні; (в) знайти відповідні сумісні розподіли.

7. Нехай $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{F}$ – $\pi-$клас подій, а H – простір $\mathfrak{F}$-вимірних дійсних функцій, що має такі властивості: (а) $1\!\!1_A \in H$ при $A \in \mathfrak{C}$, та $1 \in H$; (б) $f + g \in H$ та $cf \in H$ для всіх $f, g \in H$, $c \in \mathbb{R}$; (в) з $g_n \in H$ та $0 \le g_n \uparrow g, n \to \infty$, випливає включення $g \in H$. Довести, що простір H містить всі $\sigma[\mathfrak{C}]$-вимірні обмежені функції. Вивести звідси теорему про вимірність відносно σ-алгебри, що породжена величиною.

8. Нехай $(\mathfrak{C}_\theta, \theta \in \Theta)$ – незалежні класи подій, а $\Upsilon \subset \Theta$. Довести, що $(\mathfrak{C}_\theta, \theta \in \Upsilon)$ також є незалежними класами подій.

9. Нехай $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3 \subset \mathfrak{F}$ під-сигма-алгебри випадкових подій такі, що $\mathfrak{F}_1 \subset \sigma[\mathfrak{F}_2 \cup \mathfrak{F}_3]$ та $\mathfrak{F}_2 \subset \sigma[\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_3]$, причому сигма-алгебри $\mathfrak{F}_3$ та $\sigma[\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2]$ незалежні. Довести, що сигма-алгебри $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ нерозрізнимі: для кожної події $A_1 \in \mathfrak{F}_1$ знайдеться $A_2 \in \mathfrak{F}_2$ така, що $\mathbf{P}(A_1 \Delta A_2) = 0$.

10. Навести приклад послідовності випадкових величин (ξ_n) та залишкової події $A \in \overline{\lim}_{n\to\infty} \sigma[\xi_n]$ такої, що $\mathbf{P}(A) = 1/2$.

11. Випадкові величин $(\xi_n, n \ge 1)$ незалежні у сукупності, а послідовність $(n_k, k \ge 1)$ строго зростає. Довести, що випадкові величини $(g_k(\xi_{n_k}, ..., \xi_{n_{k+1}-1}),\ k \ge 1)$ незалежні у сукупності для борелєвих функцій g_k.

12. Випадкові величини (ξ_n) незалежні у сукупності. (а) Довести, що величини $\overline{\lim}_{n\to\infty} \xi_n$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} \xi_n$ є сталими м.н. (б) Якщо $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$, та $0 < b_n \to \infty$, то $\overline{\lim}_{n\to\infty} S_n/b_n, \underline{\lim}_{n\to\infty} S_n/b_n$ також є сталими м.н.

13. Величини (ξ_n) незалежні, $\mathbf{P}(\xi_n = 1) = p = 1 - \mathbf{P}(\xi_n = -1)$, а $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$ – блукання Бернуллі. Тоді $\mathbf{P}(\overline{\lim}_{n\to\infty} \{S_n = 0\}) \in \{0, 1\}$. Ця ймовірність нульова тоді й тільки тоді, коли $p \ne 1/2$.

14. Випадкові величини (ξ_n) незалежні і однаково розподілені, та $\mathbf{E}\xi_1 = 0 < \mathbf{E}\xi_1^2 < \infty$. Довести, що $\overline{\lim}_{n\to\infty} n^{-1/2}\,|\xi_1 + ... + \xi_n| = \infty$ м.н.

15. Довести, що дискретні випадкові величини $(\xi_1, ..., \xi_n)$ незалежні в сукупності тоді й тільки тоді, коли $\mathbf{P}(\xi_1 = x_1, ..., \xi_n = x_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}(\xi_k = x_k)$ для всіх x_k з відповідних множин значень.

16. Нехай F_k – функції розподілу зі щільностями f_k, і $|a| < 1$. Довести, що (а) функція $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)(1 + a(2\,F_1(x) - 1)(2\,F_2(y) - 1))$ є сумісною щільністю розподілу деякого випадкового вектора (ξ_1, ξ_2); (б) величини ξ_k мають щільності f_k та є залежними при $a \neq 0$.

17. Вказати незалежні класи подій $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$ такі, що $\sigma[\mathfrak{C}_1]$, $\sigma[\mathfrak{C}_2]$ не є незалежними.

18. Побудувати ймовірнісний простір та величини ξ, η на ньому, що мають рівномірний на $[0, 1]$ розподіл, $\mathbf{P}(\xi = \eta) = 0$, та не є незалежними.

19. Випадкова величина ξ та борелєва функція g такі, що величини ξ та $g(\xi)$ незалежні. Довести, що $g(\xi) = c$ м.н. для деякої сталої c.

20. Нехай $(P_n, n \geq 0)$ - послідовність ймовірнісних мір на вимірному просторі $(\Omega, \mathfrak{F})$. Довести, що клас

$$\mathfrak{D} = \{B \in \mathfrak{F} : \lim_{n\to\infty} P_n(B) = P_0(B)\}$$

є d-класом.

21. Нехай P, Q - ймовірнісні міри на вимірному просторі $(\Omega, \mathfrak{F})$, де $\mathfrak{F} = \sigma[\mathfrak{C}]$ для деякого π-класу $\mathfrak{C}$. Довести, що зі збіжності звужень $P|_{\mathfrak{C}} = Q|_{\mathfrak{C}}$ випливає рівність $P = Q$.

22. Випадкові величини (ξ_n) незалежні у сукупності. Довести, що для ряду Діріхле $\sum_{n\geq 1} \xi_n / n^{\alpha}$ існує стала σ (можливо, нескінченна) така, що при $\alpha > \sigma$ ряд збігається майже напевне.

23. Випадкові величини (ξ_n) незалежні у сукупності та рівномірно розподілені на $[0, 1]$. Довести, що множина $\{\xi_n, n \geq 1\}$ майже напевне всюди щільна у $[0, 1]$.

24. Випадкові величини (ξ_n) незалежні у сукупності, причому

$\mathbf{P}(\xi_n = \pm 4^{-n}) = 1/3 = \mathbf{P}(\xi_n = 0)$. Довести, що залишкова сигма-алгебра для сум $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$ - вироджена.

25. Нехай $N \geq 3$, а випадкові величини ξ, η незалежні та рівномірно розподілені на множині $\{0, ..., N-1\}$. Довести, що при $0 \leq k < N$ випадкові величини $\zeta_k = \xi + k\eta \mod N$ попарно незалежні, та залежні у сукупності.

2.3. Умовне сподівання відносно сигма-алгебри

Література: [1,с.180-193]. Сам: 1-6.

1. У припущенні квадратичної інтегровності ξ вивести умову балансу у означенні умовного сподівання з його екстремальної властивості $\mathbf{E}(\xi-\zeta)^2 \leq \mathbf{E}(\xi-\zeta-\varepsilon\eta)^2$ для всіх $\varepsilon \in \mathbb{R}$ та всіх $\mathfrak{C}$-вимірних квадратично інтегровних η.

2. Розглянемо ймовірнісний простір $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), \mathbf{P})$ з імовірністю $\mathbf{P}$, що задається щільністю $f : \mathbf{P}(B) = \int_B f(x)dx$. Величина ξ дорівнює $\xi(\omega) = g(\omega)$. Обчислити умовне сподівання $\mathbf{E}(\xi \mid \mathfrak{C})$, якщо $\mathfrak{C}$ дорівнює:
(а) $\sigma[\{B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) : B = B + 1\}]$; (б) $\sigma[\{B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) : B = -B\}]$;
(в) $\sigma[\{x : \sin(x) < a\}, a \in \mathbb{R}]$; (г) $\sigma[\{[k2^{-n}, (k+1)2^{-n})\}, k \in \mathbb{Z}, n \geq 1]$.
Тут за означенням $h(B) = \{h(x), x \in B\}$.

3. Випадкова величина ξ має строго додатну щільність f. Обчислити $\mathbf{P}(\xi < x \mid |\xi|)$.

4. Випадкова величина ξ інтегровна. Довести, що сім'я випадкових величин $(\mathbf{E}(\xi \mid \mathfrak{C}), \mathfrak{C} \subset \mathfrak{F})$ рівномірно інтегровна.

5. Визначимо умовну дисперсію:

$$\mathbf{D}(\xi \mid \mathfrak{C}) \equiv \mathbf{E}((\xi - \mathbf{E}(\xi \mid \mathfrak{C}))^2 \mid \mathfrak{C}).$$

Довести тотожність $\mathbf{D}\xi = \mathbf{E}\mathrm{D}(\xi \mid \mathfrak{C}) + \mathbf{D}\mathrm{E}(\xi \mid \mathfrak{C})$.

6. Для величин ξ, η існує регулярна умовна ймовірність $P(x, B)$, $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, така, що $P(x, B) = \mathbf{P}(\xi \in B \mid \eta = x)$ для майже всіх $x \in \mathbb{R}$ за мірою $\mathbf{P}(\eta \in \cdot)$. Довести, що для довільної борелєвої обмеженої функції g виконується така рівність: $\mathbf{E}(g(\eta, \xi) \mid \eta = x) = \int_{\mathbb{R}} g(x, y)P(x, dy)$ для майже всіх x.

7. Довести, що умовне математичне сподівання за умови події $\mathbf{E}(\xi \mid B)$ має всі властивості математичного сподівання.

8. Нехай $|\Omega| = n$. Позначимо через $d(n)$ кількість різних розбиттів множини Ω. Довести, що $d(n) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k d(k)$, де $d(0) = 1$.

9. Нехай $\Delta = \{D_1, D_2, ..., D_n\}$ - розбиття простору Ω. Побудувати найменші: (а) алгебру; (б) сигма-алгебру, що містять Δ.

10. Довести, що для кожної обмеженої $\sigma[\Delta]$-вимірної величини η справедлива тотожність $\mathbf{E}(\xi\eta \mid \Delta) = \eta\mathbf{E}(\xi \mid \Delta)$.

11. За квадратичної інтегровності величини ξ вивести теорему про існування та єдиність умовного математичного сподівання з теореми про існування проекції на підпростір у гільбертовому просторі $L_2(\mathbf{P})$.

12. Довести, що для $\mathfrak{C}$-вимірної величини ζ та обмеженої борелівської g має місце рівність $\mathbf{E}(g(\xi, \zeta) \mid \mathfrak{C}) = \mathbf{E}(g(\xi, y) \mid \mathfrak{C}) \mid_{y=\zeta}$.

13. Довести нерівність Йенсена для опуклої функції g лише на підставі нерівності $g(x) \ge g(x_0) + k(x_0)(x - x_0)$.

14. Розглянемо ймовірнісний простір $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n), \mathbf{P})$ з імовірністю $\mathbf{P}$, що задається сумісною щільністю $f : \mathbf{P}(B) = \int_B f(x)dx$. Сигма-алгебра переставних множин $\mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ містить всі борелєві множини B такі, що $\pi(x) \in B$ для всіх $x \in B$ та перестановок π координат векторів $x \in \mathbb{R}^n$. Обчислити $\mathbf{E}(\xi \mid \mathfrak{P})$ для величин: (а) $\xi(\omega) = \omega_1$; (б) $\xi(\omega) = \omega_1\omega_2$; (в) $\xi(\omega) = \omega_1^2$.

15. Випадкова величина ξ невід'ємна. Довести, що умовне сподівання $\zeta = \mathbf{E}(\xi \mid \mathfrak{C}) < \infty$ м.н. тоді й тільки тоді, коли міра $Q(A) \equiv \mathbf{E}\xi 1\!\!\mathrm{I}_A$ при $A \in \mathfrak{C}$ є сигма-скінченною.

16. Випадкові величини (ξ_n) інтегровні мажоровано зверху: $\xi_n \le \eta$, $\mathbf{E}\,|\eta| < \infty$. Довести, що

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\mathbf{E}(\xi_n \mid \mathfrak{C}) \le \mathbf{E}(\overline{\lim}_{n\to\infty}\xi_n \mid \mathfrak{C}) \quad \text{м. н.}$$

17. Випадкові величини $\xi, (\xi_n, n \ge 1)$ такі, що $\xi_n \to \xi, n \to \infty$, $|\xi_n| \le \eta$, $\mathbf{E}\eta < \infty$, а сигма-алгебри $\mathfrak{C}_k$ не зростають за k та $\cap\mathfrak{C}_k = \mathfrak{C}_\infty$. Довести, що $\mathbf{E}(\xi_n \mid \mathfrak{C}_k) \to \mathbf{E}(\xi \mid \mathfrak{C}_\infty), n, k \to \infty$, м.н. та у середньому.

18. Послідовність випадкових величин $(\xi_n, n \geq 1)$ рівномірно інтегровна та $\xi_n \to \xi, n \to \infty$. Довести, що $\mathbf{E}(\xi_n \mid \mathfrak{C}) \to^{\mathbf{P}} \mathbf{E}(\xi \mid \mathfrak{C})$.

19. Довести нерівність Коші для умовних математичних сподівань: $(\mathbf{E}(\xi\eta \mid \mathfrak{C}))^2 \leq \mathbf{E}(\xi^2 \mid \mathfrak{C})\mathbf{E}(\eta^2 \mid \mathfrak{C})$ м.н.

20. Довести, що оператор умовного сподівання є стискаючим у просторі $L_p, p \geq 1$: $\mathbf{E}(|\mathbf{E}(\xi \mid \mathfrak{C})|)^p \leq \mathbf{E}(|\xi|^p)$.

21. Випадкова величина ξ та σ-алгебра $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{F}$ такі, що $\mathbf{E}(\exp(it\xi) \mid \mathfrak{C}) = \exp(-t^2/2), \forall t \in \mathbb{R}$. Довести, що ξ – стандартна нормальна і не залежить від $\mathfrak{C}$.

22. Довести такі формули повної ймовірності: (а) $\mathbf{P}(A) = \mathbf{E}\mathrm{P}(A \mid \mathfrak{C})$ для всіх $A \in \mathfrak{F}$; (б) $\mathbf{E}g(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{E}(g(\xi) \mid \eta = y)dF_\eta(y)$ за умови інтегровності $g(\xi)$.

23. Довести узагальнену формулу Байєса: для $A \in \mathfrak{F}, H \in \mathfrak{C} \subset \mathfrak{F}$
$\mathbf{P}(H \mid A) = (\mathbf{E}1\!\!\mathrm{I}_H\mathbf{P}(A \mid \mathfrak{C})) \,/\, \mathbf{E}\ \mathbf{P}(A \mid \mathfrak{C})$.

24. Нехай $(\zeta_k, k = \overline{1,n})$ – стандартний нормальний вектор. Довести, що його умовний розподіл за умови, що фіксовані суми $\sum_{k=1}^n \zeta_k, \sum_{k=1}^n \zeta_k^2$, є рівномірним на відповідній $(n-2)$-вимірній множині.

25. Сигма-алгебри $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \subset \mathfrak{F}$ називаються умовно незалежними за умови $\mathfrak{F}_3 \subset \mathfrak{F}$, якщо $\mathbf{P}(F_1 \cap F_2 \mid \mathfrak{F}_3) = \mathbf{P}(F_1 \mid \mathfrak{F}_3)\mathbf{P}(F_2 \mid \mathfrak{F}_3)$ м.н. для всіх $F_i \in \mathfrak{F}_i$. Довести, що вказана умовна незалежність має місце тоді й тільки тоді, коли $\mathbf{P}(F_1 \mid \sigma[\mathfrak{F}_2 \cup \mathfrak{F}_3]) = \mathbf{P}(F_1 \mid \mathfrak{F}_3)$ м.н. для всіх $F_1 \in \mathfrak{F}_1$.

26. Нехай ξ – випадковий елемент у повному сепарабельному метричному просторі E з борелєвою сигма-алгеброю $\mathfrak{B}(E)$. Довести, що існує регулярна умовна ймовірність

$$P(B, \omega) = \mathbf{P}(\xi \in B \mid \mathfrak{C}).$$

27. Величини $(\xi_k, k \geq 1)$ незалежні, однаково розподілені та мають неперервну функцію розподілу F. Знайти умовну ймовірність $\mathbf{P}(\xi_1 < x \mid \max_{1 \leq k \leq n} \xi_k)$.

28. Випадкові величини ξ_1, ξ_2 вимірні відносно σ-алгебр $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$ відповідно, а параметри $p, q, r \in (0, \infty]$ такі, що $p^{-1} + q^{-1} + r^{-1} = 1$. Довести, що:

$$|\mathbf{E}\xi_1\xi_2 - \mathbf{E}\xi_1\mathbf{E}\xi_2| \le 8(\mathbf{E}\,|\xi_1|^p)^{1/p}\,(\mathbf{E}\,|\xi_2|^q)^{1/q}\,(\alpha(\mathfrak{C}_1,\mathfrak{C}_2))^{1/r},$$
де $\alpha(\mathfrak{C}_1,\mathfrak{C}_2) \equiv \sup(|\mathbf{P}(A_1\cap A_2) - \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2)|\,,\ A_k\in\mathfrak{C}_k)$.

29. Випадкова величина $\xi \ge 0$ та $\mathbf{E}\xi = 1$, а $\mathfrak{C}\subset\mathfrak{F}$. Довести, що функція $Q(A) = \mathbf{E}\xi 1\!\!\mathrm{I}_A, A\in\mathfrak{C}$, є імовірністю.

30. Для σ-алгебри $\mathfrak{C}\subset\mathfrak{F}$, та квадратично інтегровною величини ξ і $\varepsilon > 0$ довести нерівність $\mathbf{P}(|\xi| > \varepsilon \mid \mathfrak{C}) \le \mathbf{E}(\xi^2 \mid \mathfrak{C})/\varepsilon^2$.

31. Для σ-алгебри $\mathfrak{C}\subset\mathfrak{F}$, квадратично інтегровних величин ξ,η довести нерівність $(\mathbf{E}(\xi\eta \mid \mathfrak{C}))^2 \le \mathbf{E}(\xi^2 \mid \mathfrak{C})\mathbf{E}(\eta^2 \mid \mathfrak{C})$.

32. Позначимо через $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\xi \mid \mathfrak{C})$ умовне математичне сподівання на просторі $(\Omega,\mathfrak{F},\mathbf{P})$. Нехай ймовірнісні міри еквівалентні: $\mathbf{P}\ \simeq \mathbb{Q}$, та відома відповідна щільність $\eta(\omega)$. Обчислити $\mathbf{E}_{\mathbb{Q}}(\xi \mid \mathfrak{C})$ через $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\cdot \mid \mathfrak{C})$.

33. Випадкова величина ξ інтегровна, а сигма-алгебри $\mathfrak{C},\mathfrak{D}$ такі, що $\mathfrak{D}$ не залежить від системи $(\sigma[\xi],\mathfrak{C})$. Довести, що $\mathbf{E}(\xi \mid \mathfrak{C},\mathfrak{D}) = \mathbf{E}(\xi \mid \mathfrak{C})$.

2.4. Умовне сподівання відносно системи величин

Література: [1,с.194-197]. Сам: 1-6.

1. Випадкові величини ξ,η незалежні та однаково розподілені. Обчислити умовне сподівання $\mathbf{E}(\xi \mid \xi+\eta)$.

2. Випадкова величина $\xi \ge 0$, сигма-алгебра $\mathfrak{C}\subset\mathfrak{F}$, $\zeta = \mathbf{E}(\xi \mid \mathfrak{C})$, причому $\zeta < \infty$ м.н. Довести, що $\mathbf{P}(\xi > 0, \zeta = 0) = 0$, тобто дріб ξ/ζ визначений м.н. та задовольняє нерівність $\mathbf{E}(\xi/\zeta \mid \mathfrak{C}) \le 1$ м.н. Зокрема, $\mathbf{E}(\xi/\zeta) \le 1 < \infty$.

3. Довести рівність $m(y) = \mathbf{E}(\xi \mid \{\eta = y\}) \equiv \mathbf{E}(\xi 1\!\!\mathrm{I}_{\{\eta=y\}})/\mathbf{P}(\eta = y)$ для випадку, коли $\mathbf{P}(\eta = y) > 0$.

4. Випадкові величини $(\xi_n, n\ge 1)$ незалежні, а $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$. Довести, що S_k та S_l умовно незалежні за умови S_n при $k < n < l$, тобто для всіх $A,B\in\mathfrak{B}[\mathbb{R}]$
$\mathbf{P}(S_k\in A, S_l\in B \mid S_n = y) = \mathbf{P}(S_k\in A \mid S_n = y)\mathbf{P}(S_l\in B \mid S_n = y)$.

5. Випадкові величини $(\xi_n, n \geq 1)$ незалежні, однаково розподілені та інтегровні. Довести, що (а) $\mathbf{E}(\xi_k \mid S_n) = S_n/n$ м.н при $k \leq n$, де $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$. (б) $\mathbf{E}(\xi_1 \mid S_k, k \geq n) = S_n/n$ м.н. (в) У припущенні, що $\xi_1 \in \mathbb{N}$, вивести звідси для послідовного обчислення розподілів сум S_n рекурентні рівняння
$\mathbf{P}(S_n = k) = \frac{n}{k}\sum_{i=1}^{k} i\mathbf{P}(\xi_1 = i)\mathbf{P}(S_{n-1} = k - i)$.

6. Нехай величини ξ, η та борелєва функція $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ такі, що величина $g(\xi, \eta)$ інтегровна, причому η вимірна відносно сигма-алгебри $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{F}$. Довести, що $\mathbf{E}(g(\xi, \eta) \mid \mathfrak{C}) = \mathbf{E}(g(\xi, y) \mid \mathfrak{C}) \mid_{y=\eta}$.

7. Довести тотожність $\mathrm{cov}(\xi, \eta) = \mathrm{cov}(\xi, \mathbf{E}(\eta \mid \xi))$ для квадратично інтегровних величин ξ, η.

8. Величина ξ рівномірно розподілена на $[0, \pi]$. Обчислити сподівання $\mathbf{E}(\xi \mid \sin \xi)$.

9. Випадкова величина ξ має строго додатну щільність f. Обчислити $\mathbf{E}(\xi \mid \sin \xi)$, $\mathbf{E}(\xi \mid \xi^2)$, $\mathbf{E}(\xi \mid |\xi|)$.

10. Випадкові величини $(\xi_n, n \geq 1)$ незалежні, однаково розподілені та мають функцію розподілу F, а $\xi_{(n)} = \max_{1 \leq k \leq n} \xi_k$. Довести, що: $\mathbf{P}(\xi_k < x \mid \xi_{(n)} = t) = (n-1)F(x)/nF(t) 1\!\!1_{x \leq t} + 1\!\!1_{x > t}$ при $k \leq n$.

11. Узагальнити твердження теореми про лінійну регресію на площині на випадок нормального вектора

$$(\xi_1, \xi_2) \simeq N_{d_1+d_2}(\mu_1, \mu_2, V_1, V_2, Q_{12}).$$

12. Нехай $(\xi_1, \xi_2) \simeq N_2(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$. Тоді (а) частка дисперсії $\mathbf{D}(\xi_1)$, що пояснюється оптимальним прогнозом: $\mathbf{D}(\mathbf{E}(\xi_1 \mid \xi_2))/\mathbf{D}(\xi_1) = \rho^2$; (б) $\mathbf{E}((\xi_1 - \mu_1)^2/\sigma_1^2 \mid \xi_2) = \rho^2(\xi_2 - \mu_2)^2/\sigma_2^2 + 1 - \rho^2$.

13. Випадкова величина η - проста, $\mathbf{P}(\eta = x_k) = p_k > 0, k = \overline{1, n}$. Обчислити $\mathbf{E}(\xi \mid \eta)$.

14. Випадковий вектор (ξ, η) має додатну неперервну сумісну щільність $f(x, y)$. Обчислити $\mathbf{E}(\xi \mid \eta \in (y - \varepsilon, y + \varepsilon))$ при $\varepsilon > 0$, та довести, що границя вказаного сподівання при $\varepsilon \to 0$ дорівнює $\mathbf{E}(\xi \mid \eta = y)$.

15. Випадкові величини $(\xi_n, n \geq 1)$ незалежні, однаково рівномірно розподілені на $[0, a]$, $\xi_{(n)} = \max_{1 \leq k \leq n} \xi_k$. Обчислити $\mathbf{E}(n^{-1}\sum_{k=1}^{n} \xi_k \mid \xi_{(n)})$.

16. Величини $(\xi_k, k = \overline{1,n})$ незалежні, однаково розподілені рівномірно на $[0,1]$, а вектор $(\xi_{(k)}, k = \overline{1,n})$ утворений з цих величин шляхом сортування у неспадному порядку. Довести, що умовна щільність $(\xi_{(k)}, k = \overline{1,n-1})$ за умови $\xi_{(n)} = y$ дорівнює

$$f(x_1, ..., x_{n-1} \mid y) = (n-1)! y^{-n+1} 1\!\!\mathrm{I}_{x_1 < ... < x_{n-1} < y}.$$

17. Випадкова величина ξ експоненційно розподілена з параметром 1. Обчислити $\mathbf{E}(\xi \mid \min(\xi, t))$ та $\mathbf{E}(\xi \mid \max(\xi, t))$ при $t > 0$.

18. Випадкову величину ξ випадково обрано на $[0,1]$, а величину η випадково обрано на інтервалі $[0, \xi]$. Постулювати вигляд умовної щільності величини η за умови ξ. Знайти сумісну щільність (ξ, η), та числові характеристики $\mathbf{P}(\xi + \eta > 1)$, $\mathbf{E}(\xi \mid \eta)$.

19. Випадкові величини (ξ, η) мають сумісну щільність $f_{(\xi,\eta)}(x, y) = 1\!\!\mathrm{I}_{x \in [0,1], |y| \le x}$. Довести, що функція регресії $\mathbf{E}(\eta \mid \xi = x)$ є лінійною, а функція $\mathbf{E}(\xi \mid \eta = y)$ - нелінійна.

20. Випадковий вектор (ξ, η) має сумісну щільність

$$f_{\xi\eta}(x, y) = c \exp(-(1 + x^2)(1 + y^2)), \ x, y \in \mathbb{R}$$

з деякою сталою c. Довести, що умовні щільності $f_{\xi|\eta}(x \mid y)$ та $f_{\eta|\xi}(y \mid x)$ є нормальними, однак вектор (ξ, η) не є нормально розподіленим.

21. Випадкові величини ξ, η незалежні, та $\eta \simeq N(0,1)$. Довести для $g \in C_b(\mathbb{R})$ рівність $\mathbf{E} g(\xi + \sigma\eta) = \mathbf{E} g_\sigma(\xi)$, де

$$g_\sigma(x) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \exp(-(y - x)^2 / 2\sigma^2) dy.$$

22. Випадкова величина ξ інтегровна з квадратом, причому майже напевне $\mathbf{E}(\xi \mid \eta) = \eta$, та $\mathbf{E}(\xi^2 \mid \eta) = \eta^2$. Довести, що $\xi = \eta$ м.н.

23. Випадкові величини ξ, η інтегровні з квадратом, причому $\mathbf{E}(\xi \mid \eta) = \eta$, та $\mathbf{E}(\eta \mid \xi) = \xi$. Довести, що $\xi = \eta$ м.н. Довести це твердження для інтегровних величин.

24. Нехай під-сигма-алгебра $\mathfrak{C}$ сигма-алгебри випадкових подій породжується зліченним класом подій. Довести, що існує регулярна умовна імовірність за умови $\mathfrak{C}$.

25. Величини ξ, η квадратично інтегровні та $\mathbf{E}(\xi \mid \eta) = 1$. Довести, що $\mathbf{D}(\xi\eta) \ge \mathbf{D}\eta$.

26. Величина ξ інтегровна та не залежить від η. Довести, що існує величина ζ така, що не виконується $\mathbf{E}(\xi \mid \eta, \zeta) = \mathbf{E}(\xi \mid \zeta)$ м.н.

2.5. Теорема Колмогорова про три ряди

Література: [1,с.198-204]. Сам: 1-6.

1. Випадкові величини $(\xi_n, n \geq 1)$ незалежні у сукупності, причому $\mathbf{P}(\xi_n = \pm 1) = 1/2$. Довести, що ряд $\sum_{n\geq 1} a_n \xi_n$ збігається м.н. тоді й тільки тоді, коли $\sum_{n\geq 1} a_n^2 < \infty$.

2. Навести приклад (необмеженої) послідовності незалежних квадратично інтегровних центрованих величин $(\xi_n, n \geq 1)$ таких, що ряд $\sum_{n\geq 1} \xi_n$ збігається м.н., і одночасно $\sum_{n\geq 1} \mathbf{E}\xi_n^2 = \infty$.

3. Величини $(\xi_n, n \geq 1)$ незалежні та квадратично інтегровні. Довести, що: (а) ряд $\sum_{n\geq 1} \xi_n$ збігається у середньому квадратичному тоді й тільки тоді, коли збігаються ряди $\sum_{n\geq 1} \mathbf{E}\xi_n$, $\sum_{n\geq 1} \mathbf{D}\xi_n$. (б) За умов (а) ряд $\sum_{n\geq 1} \xi_n$ збігається м.н.

4. Випадкові величини $(\xi_n, n \geq 1)$ та числова сумована послідовність ε_n такі, що $\sum_{n\geq 1} \mathbf{P}(|\xi_n| \geq \varepsilon_n) < \infty$. Довести, що: $\sum_{n\geq 1} |\xi_n| < \infty$ м.н.

5. Випадкові величини $(\xi_n, n \geq 1)$ незалежні та $\mathbf{P}(\xi_n = 0) = 1 - 2^{-2n}$, $\mathbf{P}(\xi_n = n2^n) = \mathbf{P}(\xi_n = -n2^n) = 2^{-2n-1}$. Довести, що $\sum_{n\geq 1} n^{-2}\mathbf{D}\xi_n = \infty$, однак для послідовності (ξ_n) виконується посилений закон великих чисел.

6. Випадкові величини $(\xi_n, n \geq 1)$ незалежні. Знайти у найпростішому вигляді необхідні та достатні умови збіжності майже напевне ряду $\sum_{n\geq 1} \xi_n$, якщо: (а) $\xi_n \simeq Exp(\lambda_n)$; (б) $\xi_n \simeq \Pi(\lambda_n)$; (в) $\xi_n \simeq N(\mu_n, \sigma_n^2)$; (г) $\xi_n \simeq \Gamma(\lambda_n, \alpha_n)$; (д) $\xi_n = c_n \eta_n$, де η_n мають розподіл Коші.

7. Величини (ξ_n) незалежні та $\mathbf{E}\xi_n = 0$, $\sum_{k\geq 1} \mathbf{E}\,|\xi_k|/k < \infty$. Довести: (а) для $\varepsilon > 0$ нерівність

$$\mathbf{P}(\textstyle\sum_{k=n}^{m} |\xi_k|/k > \varepsilon) \leq \varepsilon^{-1} \sum_{k=n}^{m} \mathbf{E}\,|\xi_k|/k;$$

(б) збіжність м.н. ряду $\sum |\xi_k|/k$; (в) посилений закон великих чисел для послідовності (ξ_n).

8. Випадкові величини $(\xi_n, n \geq 1)$ незалежні у сукупності, $\mathbf{E}\xi_n = 0$, $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, причому $\mathbf{P}(S_n - S_k \geq a) \geq b > 0$ для всіх $k < n$. Довести нерівність $\mathbf{P}(\max_{1\leq k\leq n} S_k \geq \varepsilon) \leq b^{-1}\mathbf{P}(S_n \geq \varepsilon + a)$.

9. Знайти множину тих $\omega \in \Omega$, для яких збігається ряд $\sum_{n\geq 1} \xi_n(\omega)$.

10. Величини $(\xi_n, n \geq 1)$ незалежні та симетрично розподілені, $\mathbf{E}\xi_n = 0$, $\mathbf{E}\xi_n^2 < \infty$, $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$. Довести для $\varepsilon > 0$, що $\mathbf{P}(\max_{1\leq k\leq n} S_k \geq \varepsilon) \leq \mathbf{E}S_n^2/(\varepsilon^2 + \mathbf{E}S_n^2)$.

11. Нехай $\xi_n \to^{\mathbf{P}} 0, n \to \infty$. Тоді знайдеться числова послідовність c_n така, що $\sum_{n\geq 1} |c_n| = \infty$ та ряд $\sum_{n\geq 1} c_n\xi_n$ збігається м.н.

12. Величини (ξ_n) незалежні, $\mathbf{E}\xi_n = 0$, $\mathbf{E}\xi_n^2 < \infty$, $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$, а послідовність $a_n > 0$ не спадає. Тоді

$$\mathbf{P}(\max_{k\leq n} |S_k| /(2a_k - a_1) \geq 1) \leq \textstyle\sum_{k=1}^n a_k^{-2}\mathbf{E}\xi_k^2.$$

13. Випадкові величини $(\xi_n, n \geq 1)$ такі, що $\sum_{n\geq 1} \mathbf{E}|\xi_n| < \infty$. Довести, що ряд $\sum_{n\geq 1} \xi_n$ збігається м.н.

14. Випадкові величини (ξ_n) незалежні і невід'ємні, причому $\sum_{n\geq 1} \mathbf{E}\xi_n/(1 + \xi_n) < \infty$. Довести, що ряд $\sum_{n\geq 1} \xi_n$ збігається м.н.

15. Випадкові величини $(\xi_n, n \geq 1)$ незалежні, нормально розподілені, $\mathbf{E}\xi_n = 0$. Довести, що ряд $\sum_{n\geq 1} \xi_n$ збігається м.н. тоді й тільки тоді, коли $\sum_{n\geq 1} \mathbf{E}\xi_n^2 < \infty$.

16. Величини $(\xi_n, n \geq 1)$ незалежні. Довести, що умови збіжності ряду $\sum_{n\geq 1} \xi_n$ (а) м.н.; (б) за ймовірністю; (в) слабкої, еквівалентні.

17. Випадкові величини $\varkappa_n$ незалежні та $\mathbf{P}(\varkappa_n = 0) = \mathbf{P}(\varkappa_n = 1) = 1/2$. (а) Довести, що ряд $\sum_{n\geq 1} 2^{-n}\varkappa_n = \eta$ збігається м.н., а його сума η рівномірно розподілена на $[0, 1]$. (б) Функція розподілу суми ряду $\zeta = \sum_{n\geq 1} 3^{-n}\varkappa_n$ неперервна, але не є абсолютно неперервною.

18. Величини (ξ_n) незалежні, інтегровні і $\mathbf{E}\xi_n = 0$. Довести, що ряд $\sum_{n\geq 1} \xi_n$ збігається м.н. тоді й тільки тоді, коли

$$\textstyle\sum_{n\geq 1} \mathbf{E}\xi_n^2/(1 + |\xi_n|) < \infty.$$

19. Випадкові величини (ξ_n) незалежні, інтегровні і $\mathbf{E}\xi_n = 0$. Довести, що для виконання закону великих чисел: $(\xi_1 + ... +$

$\xi_n)/n \to^{\mathbf{P}} 0$, $n \to \infty$, необхідно і достатньо, щоб при $n \to \infty$:
(а) $\sum_{k=1}^n \mathbf{P}(|\xi_k| \ge n) = o(n)$, (б) $\sum_{k=1}^n \mathbf{E}\xi_k^n = o(n)$;
(в) $\sum_{k=1}^n \mathbf{D}\xi_k^n = o(n^2)$, де $\xi_k^n = \xi_k 1\!\!\mathrm{I}_{\{|\xi_k|<n\}}$.

20. Довести, що для збіжності майже напевне ряду $\sum_{n\ge1} \xi_n$ необхідно і достатньо, щоб $\sup_{m>n} |\sum_{k=n}^m \xi_k| \to^{\mathbf{P}} 0, n \to \infty$.

21. Випадкові величини (ξ_n) квадратично інтегровні і попарно некорельовані: $\mathbf{E}\xi_k\xi_j - \mathbf{E}\xi_k\mathbf{E}\xi_j = 0$. Довести, що ряд $\sum_{n\ge1} \xi_n$ збігається у середньому квадратичному тоді і тільки тоді, коли збігаються ряди $\sum_{n\ge1} \mathbf{E}\xi_n$, $\sum_{n\ge1} \mathbf{D}\xi_n$.

22. Випадкові величини (ξ_n) незалежні і мають нормальні розподіли, а ряд $\sum_{n\ge1} \xi_n$ збігається за ймовірністю. Довести, що збігаються ряди $\sum_{n\ge1} \mathbf{E}\xi_n$, $\sum_{n\ge1} \mathbf{D}\xi_n$, а ряд $\sum_{n\ge1} \xi_n$ збігається майже напевне.

23. Величини (ξ_n) незалежні, обмежені: $|\xi_n| \le c$ для сталої c, $\mathbf{E}\xi_n = 0$, причому $\sum_{n\ge1} \mathbf{D}\xi_n = \infty$. Довести, що $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |\sum_{k=1}^n \xi_k| = \infty$ майже напевне.

24. Випадкові величини (ξ_n) незалежні та мають стандартний розподіл Коші. Довести, що ряд $\sum_{n\ge1} c_n\xi_n$ збігається за розподілом тоді і тільки тоді, коли $\sum_{n\ge1} |c_n| < \infty$.

25. Довести, що ряд з незалежних однаково розподілених величин, що не є тотожними нулями, розбігається майже напевне.

26. Величини (ξ_n) такі, що $\xi_n \to^{\mathbf{P}1} 0, n \to \infty$. Довести, що існує ненульова борелева функція g така, що ряд $\sum_{n\ge1} g(\xi_n)$ збігається майже напевне.

27. Випадкові величини (ξ_n) незалежні та рівномірно розподілені на $[0, 1]$. Довести, що ряд $\sum_{n\ge1} \prod_{k=1}^n \xi_k$ збігається м.н.

28. (**Нерівність Етеманді**) Випадкові величини (ξ_n) незалежні, а $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$. Довести при $x > 0$ нерівність

$$\mathbf{P}(\max_{1\le k\le n} |S_k| > 3x) \le 3 \max_{1\le k\le n} \mathbf{P}(|S_k| > x).$$

2.6. Закон повторного логарифму і строго стаціонарні послідовності

Література: [1,с.205-216]. Сам: 1-6.

1. Випадкові величини $(\xi_n, n \geq 1)$ незалежні та мають стандартний нормальний розподіл. Довести зображення:
(а) $\xi_n = O(\sqrt{\ln n})$, $n \to \infty$, м.н.; (б) $\mathbf{P}(\xi_n = o(\sqrt{\ln n}), n \to \infty) = 0$;
(в) $\mathbf{P}(\overline{\lim}_{n\to\infty} \xi_n / \sqrt{2 \ln n} = 1) = 1$.

2. Величини $(\xi_n, n \geq 1)$ незалежні однаково розподілені, $\mathbf{E}\xi_1 = 0$, $\mathbf{E}\xi_1^2 = 1$, а $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Довести, що $\overline{\lim}_{n\to\infty} S_n / \sqrt{n} = \infty$ майже напевне.

3. Довести, що інваріантні множини належать залишковій сигма-алгебрі, тобто $I(\mathbb{R}^\infty) \subset \cap_{n \geq 1} (\mathbb{R}^n \times \mathfrak{B}(\mathbb{R}^\infty))$.

4. Вивести з теореми про закон нуля та одиниці Колмогорова ергодичність послідовності незалежних випадкових величин.

5. Нехай імовірнісний простір $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}) = ((0,1], \mathfrak{B}(0,1], \mu)$, де міра μ має вигляд $\mu(B) = (\ln 2)^{-1} \int_B (1+x)^{-1} dx$, функція $a(x) = x^{-1} - [x^{-1}]$ при $x \in (0,1]$. Тоді послідовність n-кратних суперпозицій $\xi_n(x) = a(a(...a(x)...))$ є строго стаціонарною, причому $\xi_n(x)$ є n-м елементом у розкладі x у неперервний дріб.

6. Для строго стаціонарної послідовності $(\xi_n, n \geq 1)$ виконується при всіх $k, l \geq 1$, $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^k)$, $C \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$ така умова перемішування: $\mathbf{P}((\xi_1, \ldots, \xi_k) \in B, (\xi_{n+1}, \ldots, \xi_{n+l}) \in C) \to$
$\mathbf{P}((\xi_1, \ldots, \xi_k) \in B)\mathbf{P}((\xi_1, \ldots, \xi_l) \in C)$ при $n \to \infty$. Довести, що дана послідовність ергодична. Вивести звідси ергодичність послідовності незалежних однаково розподілених величин.

7. Випадкові величини $(\xi_k, k = \overline{0,2})$ незалежні однаково розподілені, і мають медіану m, тобто $\mathbf{P}(\xi_0 < m) = \mathbf{P}(\xi_0 > m) = 1/2$. Довести при $|t| \geq m$ нерівність $\mathbf{P}(|\xi_0| \geq t) \leq 2\mathbf{P}(|\xi_1 - \xi_2| \geq t - |m|)$.

8. Величини $(\xi_k, k \geq 1)$ незалежні, $\mathbf{P}(\xi_k = \pm 1) = 1/2$, $S_k = \xi_1 + \ldots + \xi_k$. Довести, що $\mathbf{P}(\max_{1 \leq k \leq n} S_k \geq r) = 2\mathbf{P}(S_n > r) + \mathbf{P}(S_n = r)$ при $r \in \mathbb{Z}_+$.

9. Випадкові величини (ξ_n) незалежні та мають показниковий розподіл $Exp(1)$. Довести наступні граничні співвідношення:
(а) $\lim_{n\to\infty} \max_{1\le k\le n}(\xi_k/\ln k) = 1$ м.н.; (б) $\overline{\lim}_{n\to\infty}\xi_n/\ln n \le 1$ м.н., (в) $\underline{\lim}_{n\to\infty} \max_{\sqrt{n}\le k\le n}(\xi_k/2k) \ge 1$ м.н.

10. Випадкові величини (ξ_n) незалежні однаково розподілені Довести, що $\mathbf{E}\sup_{n\ge1}|\xi_n/n| < \infty$ тоді й тільки тоді, коли $\mathbf{E}\,|\xi_1|\,(\ln|\xi_1|)^+ < \infty$.

11. Випадкові величини (ξ_n) незалежні та мають розподіл Пуассона $\Pi(\lambda)$. Довести, що $\overline{\lim}_{n\to\infty}(\xi_n \ln\ln n)/\ln n = 1$ м.н.

12. Випадкові величини (ξ_n) незалежні та мають розподіл Бернуллі $\mathbf{P}(\xi_n = \pm1) = 1/2$. Довести, що послідовність $\varphi_n = 2n\ln\ln n + c\ln\ln\ln n$ є верхньою для $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$ при $c > 3$, та нижньою при $c \le 1$.

13. Довести твердження ергодичної теореми для послідовності випадкових величин $\eta_n = g(\xi_n, \xi_{n+1}, ..., \xi_{n+m-1})$, що утворена строго стаціонарною ергодичною послідовністю ξ та борелєвою функцією $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$.

14. Перевірити, що твердження теореми Біркгофа-Хінчина виконується при розширенні сигма-алгебри $I[\xi]$ на клас всіх випадкових подій нульової ймовірності:

$$I[\xi, \mathbf{P}] = \{A \in \mathfrak{F} : \exists B \in I[\xi],\ \mathbf{P}(A\Delta B) = 0\}.$$

15. Для строго стаціонарної послідовності $(\xi_n, n \ge 1)$ залишкова сигма-алгебра $\overline{\lim}_{n\to\infty}\sigma[\xi_n] \equiv \cap_{n\ge1}\sigma[\xi_k, k \ge n]$ містить лише події нульової чи одиничної ймовірності. Довести, що дана послідовність ергодична.

16. Строго стаціонарна послідовність $(\xi_n, n \ge 1)$ є гауссовою (тобто будь-яка скінченна її підпослідовність є нормальним вектором), причому $\mathbf{E}\xi_n = 0$ та $\mathbf{E}\xi_n\xi_{n+k} = r(k) \to 0, k \to \infty$. Довести, що ця послідовність є ергодичною.

17. Навести приклад строго стаціонарної послідовності (ξ_n), що не є ергодичною.

18. Випадкові величини (ξ_n) незалежні, $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$, $S_n^* = S_n - m_n$, де m_n - медіана S_n. Довести при $\varepsilon > 0$ нерівність

$\mathbf{P}(\max_{k\le n}|S_k^*|\ge\varepsilon)\le 3\mathbf{P}(|S_n^*|\ge\varepsilon/2)$.

19. Випадкові величини (ξ_n) незалежні, $\mathbf{P}(\xi_n=\pm n^{1/2}/\ln\ln n)=1/2$. Вивести посилений закон великих чисел: $(\xi_1+...+\xi_n)/n\to^{\mathbf{P}1}0, n\to\infty$. Одночасно довести, що умова теореми Колмогорова про посилений закон великих чисел не виконується.

20. Довести, що інваріантна подія є залишковою, а залишкова - переставною.

21. Випадкові величини (ξ_n) незалежні однаково розподілені Довести, що подія $\overline{\lim}_{n\to\infty}\{\xi_{2n}\in B\}$ для $B\in\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ є залишковою, та не завжди інваріантною. Подія $\overline{\lim}_{n\to\infty}\{\sum_{k=1}^n\xi_k\in B\}$ є переставною, та не завжди залишковою.

22. Величини (ξ_n) такі, що $\mathbf{P}(\overline{\lim}_{n\to\infty}\{\xi_n<a\}\cup\underline{\lim}_{n\to\infty}\{\xi_n>b\})=0$ для всіх $a<b$. Довести, що границя $\lim_{n\to\infty}\xi_n$ існує м.н.

23. Послідовність $(\xi_n, n\ge 1)$ строго стаціонарна, а $B\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$. Розглянемо частоту

$$\nu_n(B)=|\{k\in[1,n-d+1]:(\xi_k,...,\xi_{k+d-1})\in B\}|.$$

Довести існування м.н. границі $\lim_{n\to\infty}\nu_n(B)/n$ та знайти її.

24. **(Нерівність Хоффмана-Йоргенсена)** Величини (ξ_n) незалежні та симетричні: $\xi_k\simeq-\xi_k$, а $S_n=\xi_1+\ldots+\xi_n$. Довести при $x,y>0$ нерівність

$$\mathbf{P}(\max_{k\le n}|S_k|>2x+y)\le 2\mathbf{P}(\max_{k\le n}|\xi_k|>y)+8\,(\mathbf{P}(|S_n|>x)).$$

2.7. Характеристичні функції

Література: [1, с.133-148]

1. Знайти характеристичну функцію для випадкової величини зі щільністю: (а) $(T-|x|)^+/T$; (б) $(1-\cos(Tx))/\pi Tx^2$.

2. Нехай $\varphi(t)$ – характеристична функція така, що $\varphi(t)=0$ при $|t|>a$. Вивести з теореми Бохнера-Хінчина, що періодичне продовження з періодом $2a$ функції $\varphi(t)$ є характеристичною функцією.

3. Випадкова величина ξ має щільність та $\mathbf{E}\xi = 0$, $\mathbf{E}\xi^2 < \infty$. Довести, що $\sup_{|t|\geq u} |\varphi_\xi(t)| \leq \exp(-\delta u^2)$ для деякого $\delta > 0$ та всіх $u \in (0,1)$.

4. Нехай $\varphi(t)$ – характеристична функція стандартного нормального розподілу. (а) Інтегруванням за частинами вивести диференціальне рівняння $\varphi'(t) = -t\varphi(t)$; (б) отримати звідси формулу для функції $\varphi(t)$.

5. Якщо $\varphi(t), t \in \mathbb{R}$, – характеристична функція, тоді (а) $\varphi^n(t)$; (б) $|\varphi(t)|^2$; (в) $t^{-1}\int_0^t \varphi(s)ds$ – також характеристичні функції.

6. Довести, що координати вектора $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ незалежні тоді й тільки тоді, коли їх сумісна характеристична функція є добутком:

$$\varphi_\xi(t) \equiv \mathbf{E}\exp(i\sum\nolimits_{k=1}^{n} t_k\xi_k) = \prod\nolimits_{k=1}^{n} \varphi_{\xi_k}(t_k), \forall t = (t_1, ..., t_d) \in \mathbb{R}^d.$$

7. Довести, що для цілозначної випадкової величини ξ її характеристична функція $\varphi(t)$ має період 2π і

$$\mathbf{P}(\xi = n) = (2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} \exp(-itn)\varphi(t)dt.$$

8. Нехай випадкова величина ξ інтегровна в будь-якій степені, причому: $\mathbf{E}\xi^n = (n+k-1)!/(k-1)!$ для деякого $k \in \mathbb{N}$ та всіх $n \geq 0$. Довести, що розподіл ξ визначається однозначно та збігається з розподілом Ерланга.

9. Довести, що розподіл інтегровної випадкової величини ξ однозначно визначається функцією $\mathbf{E}\,|\xi - t|\,, t \in \mathbb{R}$.

10. Довести, що з невід'ємної визначеності випливає ермітовість.

11. Довести, що функція з періодом $2T$, що дорівнює $(T - |x|)^+/T$ при $|x| \leq T$, є характеристичною.

12. Якщо випадкова величина ξ має щільність, тоді $|\varphi_\xi(t)| < 1$ для всіх $t \neq 0$.

13. Якщо випадкова величина ξ не дорівнює м.н. сталій, тоді $|\varphi_\xi(t)| < 1$ у деякому виколотому околі нуля.

14. Довести, що рівність $|\varphi_\xi(t)| = 1$ для деякого $t \neq 0$ виконується тоді й тільки тоді, коли $\mathbf{P}(\xi \in a + b\mathbb{Z}) = 1$ для деяких

$a, b \in \mathbb{R}$.

15. Вказати незалежні величини ξ_1, ξ_2, ξ_3 такі, що ξ_2 та ξ_3 мають різні розподіли, однак $\xi_1 + \xi_2$ і $\xi_1 + \xi_3$ – однаково розподілені.

16. Довести, що для довільних розподілу $(p_k, k = \overline{1,n})$ та додатних $(a_k, k = \overline{1,n})$ опуклий полігон $\sum_{k=1}^n p_k (1 - |t|\, a_k^{-1})^+$ є характеристичною функцією.

17. Нехай φ – дійсна неперервна парна функція на $\mathbb{R}$, така, що $\varphi(0) = 1$, $\varphi(\infty) = 0$, причому графік φ на $\mathbb{R}_+$ є опуклим донизу. Тоді φ є характеристичною функцією. Вказівка: довести, що $\varphi(t)$ можна зобразити у вигляді інтегралу $\int_0^\infty (1 - |t|/s)^+ \mu(ds)$ для деякої міри μ.

18. Графік кусково-лінійної функції ψ утворений точками вигляду $(n, \varphi(n)), n \in \mathbb{Z}$, де φ – характеристична функція. Довести, що ψ – характеристична функція.

19. За означенням випадкова величина ξ симетрична, якщо ξ та $-\xi$ мають однакові функції розподілу. Довести, що симетричність еквівалентна дійснозначності характеристичної функції.

20. Перевірити що випадкова величина ξ з розподілом $\mathbf{P}(\xi = \pm 2n) = C/(n^2 \ln n)$ не інтегровна, однак її характеристична функція диференційовна в нулі.

21. Характеристична функція $\varphi_\xi(t)$ випадкової величини ξ має похідну парного порядку $2n$. Довести, що величина ξ^{2n} інтегровна.

22. Вивести з $\mathbf{E}\,|\xi|^\alpha < \infty$, $\alpha \in (0,1)$, що φ_ξ задовольняє умову Гельдера рівня α.

23. Довести, що характеристична функція рівномірного розподілу на симетричному відрізку $[-a, a]$ дорівнює $(\sin at)/at$.

24. Випадкова величина ξ має гама-розподіл $\Gamma(\lambda, \alpha)$. Обчислити $\varphi_\xi(t) = (1 - it/\lambda)^{-\alpha}$.

25. Довести, що функція $\exp(-t^4)$ не є характеристичною.

26. Довести, що для незалежності випадкових величин ξ, η необхідно і достатньо, щоб $\mathbf{E}\exp(it\xi + is\eta) = \mathbf{E}\exp(it\xi)\mathbf{E}\exp(is\eta)$ при всіх $s, t \in \mathbb{R}$.

27. Знайти залежні величини ξ, η такі, що $\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_\xi(t)\ \varphi_\eta(t)$, для всіх $t \in \mathbb{R}$.

28. Довести, що випадкові величини $(\xi_k, k = \overline{1,n})$ незалежні у сукупності тоді й тільки тоді, коли величини $\xi_1 + \ldots + \xi_k$ та ξ_{k+1} незалежні для всіх $k = \overline{1, n-1}$.

29. Для характеристичної функції φ довести при $t \in \mathbb{R}$ нерівність $\operatorname{Re}\varphi(2t) \geq 4\operatorname{Re}\varphi(t) - 3$.

30. Якщо випадкова величина ξ обмежена і $\mathbf{E}\xi = 0$, то функція $t^{-2}\ln|\varphi_\xi(t)|$ обмежена та відділена від нуля у деякому околі нуля.

31. Довести, що існують різні характеристичні функції $\varphi_k(t)$, $k = 1, 2$, такі, що $\varphi_1^2(t) = \varphi_2^2(t)$ для всіх $t \in \mathbb{R}$.

32. Якщо величини ξ, η незалежні, однаково розподілені і квадратично інтегровні, причому $\xi + \eta$ та $\xi - \eta$ також незалежні, тоді ξ, η – нормальні випадкові величини.

33. Випадкові величини ξ, η незалежні, однаково розподілені і з нульовим середнім та одиничною дисперсією. Нехай розподіл величини $(\xi+\eta)/\sqrt{2}$ збігається з розподілом ξ. Довести, що $\xi \simeq N(0,1)$.

34. Довести, що вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ є нормальним випадковим вектором тоді й тільки тоді, коли для кожного $t \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ величина $t'\xi$ має нормальний розподіл.

35. Довести методом генератрис, що (а) сума незалежних величин із розподілами Пуассона; (б) слабка границя величин із розподілами Пуассона знову мають розподіл Пуассона.

36. Довести, що (а) сумісна характеристична функція нормального випадкового вектора $\xi \simeq N_n(m, V)$ дорівнює $\varphi_\xi(t) = \exp(it'm - t'Vt/2)$; (б) ξ є узагальненим нормальним вектором тоді й тільки тоді, коли остання рівність має місце для деяких $m \in \mathbb{R}^n$ і симетричної невід'ємно визначеної матриці V.

37. Випадкова величина η набуває цілих невід'ємних значень, а величини $(\delta_k, k \geq 0)$ не залежать від η, і

$$\mathbf{P}(\delta_k = 0) = 1 - \mathbf{P}(\delta_k = 1) \in (0,1).$$

Розглянемо суми $\eta_1 = \sum_{k=0}^{\eta} \delta_k$, $\eta_0 = \sum_{k=0}^{\eta}(1 - \delta_k)$. Довести, що (а) величини η_0 та η_1 незалежні тоді й тільки тоді, коли η має розподіл Пуассона; (б) η_i мають розподіл Пуассона.

38. Довести, що кількість успіхів у випадковому числі випробу-

вань Бернуллі, яке не залежить від результатів окремих випробувань та має розподіл Пуассона, теж має пуассонівський розподіл. Знайти параметр цього розподілу.

39. Величини $(\xi_k, k \geq 1)$ незалежні однаково розподілені та не залежать від величини $\nu \in \mathbb{Z}_+$, а $\zeta = \sum_{k=1}^{\nu} \xi_k$. Довести, що $\mathbf{E}\zeta = \mathbf{E}\nu\mathbf{E}\xi_1$ та $\mathbf{D}\zeta = \mathbf{E}\nu\mathbf{D}\xi_1 + (\mathbf{E}\xi_1^2)\mathbf{D}\nu$.

40. Нехай ξ – випадкова величина з характеристичною функцією φ_ξ, а величини ζ_T не залежать від ξ і мають щільності $(1-\cos Tx)/\ (\pi T x^2)$, $x \in \mathbb{R}$. (а) Обчислити характеристичні функції величин ζ_T : $\varphi_{\zeta_T}(t) = (1 - |t|\,/T)1\!\!\mathrm{I}_{|t|<T}$. (б) Вивести звідси слабку збіжність $\xi + \zeta_T \to^W \xi$, $T \to \infty$. (в) Довести формулу обертання для точок неперервності F_ξ - функції розподілу ξ :

$$F_\xi(b) - F_\xi(a) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T\to\infty} \int_a^b dx \int_{-T}^{T} \exp(-itx)(1 - \frac{|t|}{T})\ \varphi_\xi(t)\ dt.$$

41. Нехай ξ – випадкова величина з характеристичною функцією φ_ξ. Довести таку формулу обертання для точок неперервності функції розподілу ξ :

$$F_\xi(b) - F_\xi(a) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} (\exp(-ita) - \exp(-itb))(it)^{-1}\varphi_\xi(t)dt.$$

42. Нехай ξ – випадкова величина з характеристичною функцією φ_ξ, а $\varepsilon > 0$. Довести, що $F_\xi([-2\varepsilon, 2\varepsilon]) \geq \varepsilon \left| \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} \varphi_\xi(t)dt \right| - 1$.

43. Нехай φ – характеристична функція для функції розподілу F з множиною точок розриву $\{a_n\}$. Довести, що

$$\lim_{T\to\infty}(2T)^{-1} \int_{|t|\leq T} \exp(-itx)\varphi(t)dt = F(x+0) - F(x),$$

$$\lim_{T\to\infty}(2T)^{-1} \int_{|t|\leq T} |\varphi(t)|^2\, dt = \sum_{n\geq 1}(F(a_n+0) - F(a_n))^2.$$

44. Нехай характеристична функція φ абсолютно інтегровна на $\mathbb{R}$, а f – відповідна щільність розподілу. Довести при $t, x \in \mathbb{R}$ тотожність

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(x + 2kt) = \pi t^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\pi n t^{-1}) \exp(i\pi n t^{-1} x),$$

за умови, що ряд у лівій частині збігається до неперервної функції.

45. Характеристична функція φ випадкової величини ξ задовольняє асимптотичне зображення $\varphi(s) = 1 + O(|s|^{\alpha}), s \to 0$, для деякого $\alpha \in (0, 2]$. Довести, що $\mathbf{P}(|\xi| \geq x) = O(x^{-\alpha}), x \to \infty$.

46. Випадкові величини $(\xi_k, k = \overline{1, n})$ незалежні та рівномірно розподілені на відрізку $(-1, 1)$. Довести, що сума $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$ має щільність $\pi^{-1} \int_0^{\infty} \left(t^{-1} \sin t\right)^n \cos(tx) dt$.

47. Нехай ξ – довільна випадкова величина з характеристичною функцією φ_{ξ}. Довести, що $\mathbf{E}\,|\xi| = \pi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \operatorname{Re} \varphi_{\xi}(t)) t^{-2} dt$.

48. Нехай φ, ψ, γ – характеристичні функції випадкових величин ξ, η, ζ. Довести, що функція $\varphi(t_1)\psi(t_2)\gamma(t_1 + t_2)$ є сумісною характеристичною функцію двовимірного вектора. Побудувати цей вектор.

49. Довести рівність $\mathbf{E}\xi\eta = \mathbf{E}\xi\mathbf{E}\eta$ для комплекснозначних незалежних інтегровних величин ξ, η.

2.8. Метод характеристичних функцій уточнення граничних теорем

Література: [1,с.217-225]. Сам: 1-6.

1. Довести, що абсолютна стала у правій частині нерівності Беррі-Ессеєна не менша за $(2\pi)^{-1/2} \approx 0.3989$. Вказівка: обрати випадкові величини з розподілом $\mathbf{P}(\xi_n = \pm 1) = 1/2$ та довести, що при $n = 2k$ для таких величин має місце зображення: $F_n(0) - \Phi(0) = (2\pi n)^{-1/2} + o(n^{-1/2}), n \to \infty$.

2. Нехай величини ξ_n, ξ мають характеристичні функції φ_n, φ, причому $\int_a^b \varphi_n(t) dt \to \int_a^b \varphi(t) dt, n \to \infty$, для всіх $a < b$. Довести, що $\xi_n \to^{W} \xi$.

3. Перевірити суттєвість умови неперервності теореми Леві – знайти функції розподілу F_n, що не збігаються слабко та мають характеристичні функції φ_n такі, що границя $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t)$ існує для всіх $t \in \mathbb{R}$.

4. Довести, що сім'я функцій розподілу (F_{α}) слабко компактна тоді й тільки тоді, коли $\sup_{\alpha} \sup_{|t|\leq\varepsilon} |1 - \varphi_{F_a}(t)| \to 0, \varepsilon \to 0$.

5. Величини $(\xi_n, n \geq 1)$ незалежні, $\mathbf{P}(\xi_n = 0) = \frac{1}{2} = \mathbf{P}(\xi_n = 1)$. Довести, що: (а) сума ряду $\sum_{n\geq 1} 2^{-n}\xi_n$ рівномірно розподілена на $[0,1]$; (б) величина $\xi = 2\sum_{n\geq 1} 3^{-n}\xi_n$ має (сингулярний) розподіл Кантора. Обчислити відповідну характеристичну функцію.

6. Довести, що: (а) характеристична функція величини зі щільністю Коші $(\pi(1+x^2))^{-1}$ дорівнює $\exp(-|t|)$; (б) для незалежних однаково розподілених величин $\xi_1, ..., \xi_n$ зі щільністю Коші нормована сума $(\xi_1 + ... + \xi_n)/n$ має цю ж щільність; (в) послідовність незалежних випадкових величин із щільністю Коші не задовольняє закон великих чисел.

7. Довести для невід'ємної величини $\xi \leq \infty$ такі тотожності

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{E}\exp(-t\xi) = \mathbf{P}(\xi = 0), \quad \lim_{t\downarrow 0} \mathbf{E}\exp(-t\xi) = \mathbf{P}(\xi < \infty).$$

8. Випадкові величини $(\xi_n, n \geq 1)$ незалежні , $\mathbf{E}\xi_n = 0$, $\sigma_n^2 \equiv \sum_{k=1}^n \mathbf{E}\xi_k^2$, та $\mathbf{E}\,|\xi_n|^{2+\delta} < \infty$ при $\delta \in (0,1]$. Довести для деякої сталої A нерівність

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\mathbf{P}((\xi_1 + \ldots + \xi_n)/\sigma_n < x) - \Phi(x)| \leq A\sigma_n^{-2-\delta} \sum_{k=1}^n \mathbf{E}\,|\xi_k|^{2+\delta}.$$

9. Довести теорему Леві з заміною характеристичних функцій на перетворення Лапласа для невід'ємних випадкових величин.

10. Величини $(\xi_n,\ n \geq 1)$ та ξ такі, що $|\xi_n| \leq c, |\xi| \leq c$ для сталої c, та $\mathbf{E}\xi_n^k \to \mathbf{E}\xi^k, n \to \infty$, при $k \geq 1$. Довести, що $\xi_n \to^W \xi$.

11. Величини $(\xi_n, n \geq 1)$ незалежні однаково розподілені на відрізку $[0,1)$, мають обмежені щільності і $|\mathbf{E}\exp(2\pi i k\xi_1)| < 1$ для всіх $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Довести, що $S_n = (\xi_1 + .. + \xi_n)(\mathrm{mod}\ 1) \to^W \chi$, де величина $\chi \simeq U(0,1)$.

12. Величини ξ_n мають характеристичні функції φ_n. Довести, що $\xi_n \to^W 0$ тоді й тільки тоді, коли $\varphi_n(t) \to 1$ для t з деякого околу нуля.

13. Функції розподілу F_n мають характеристичні функції φ_n, і для кожного $t \in \mathbb{R}$ існує границя $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$. Довести, що існує узагальнена функція розподілу $F \in \mathbb{M}_{01}$ така, що $F_n \to^O F, n \to \infty$. Довести еквівалентність тверджень: (а) існує функція розподілу F така, що $F_n \to^W F, n \to \infty$; (б) послідовність

(F_n) слабко компактна; (в) φ – характеристична функція; (г) φ є неперервною на $\mathbb{R}$; (д) φ – неперервна в нулі.

14. Величини $(\xi_n,\ n \geq 1)$ незалежні, однаково розподілені з характеристичною функцією φ. Довести, що збіжність

$$(\xi_1 + \ldots + \xi_n)/n \to^{\mathbf{P}} a$$

до сталої a виконується тоді й тільки тоді, коли існує похідна $\varphi'(0)$.

15. Випадкові величини $(\xi_n,\ n \geq 1)$ незалежні, однаково розподілені та інтегровні. Довести, що $(\xi_1 + ... + \xi_n)/n \to^{\mathbf{P}} \mathbf{E}\xi_1$. Вказівка: досить довести слабку збіжність.

16. Сформулювати теоретико-ймовірнісну інтерпретацію такої тотожності: $(\sin t)/t = \prod_{n\geq 1} \cos(2^{-n}t)$.

17. Нехай $\varphi(t)$ – характеристична функція для функції розподілу $F(x)$. (а) Тоді функція $\varphi_\alpha(t) \equiv (2\varphi(t) - \varphi(t+\alpha) - \varphi(t-\alpha))/(2 - \varphi(\alpha) - \varphi(-\alpha))$ також є характеристичною при $\alpha \in \mathbb{R}$. (б) За умови абсолютної неперервності F довести, що $\varphi_\alpha(t) \to \varphi(t), \alpha \to \infty$, але відповідні щільності не збігаються.

18. Довести, що в теоремі про добуток слабко збіжної послідовності зі збіжною $a_n + \xi_n \to^W a + \xi, n \to \infty$.

19. Довести, що в попередній вправі послідовність сталих a_n можна замінити на послідовність величин $\eta_n \to^{\mathbf{P}} a$.

20. Нехай $\xi_n \to^W \xi \in \mathbb{R}^d$, а функція $g \in C(\mathbb{R}^d)$. Довести, що має місце збіжність $g(\xi_n) \to^W g(\xi), n \to \infty$.

21. Нехай послідовності випадкових величин $(\xi_n), (\eta_n)$ такі, що ξ_n, η_n незалежні при кожному n, $\xi_n \to^W \xi$, $\eta_n \to^W \eta$, причому ξ та η незалежні. Довести слабку збіжність векторів

$$(\xi_n, \eta_n) \to^W (\xi, \eta), \quad n \to \infty.$$

2.9. Рекурентність блукань

Література: [1,с.233-242]. Сам: 1-6.

1. Довести, що симетричне блукання Бернуллі (з одиничними стрибками) у просторі $\mathbb{Z}^d$ рекурентне тоді й тільки тоді, коли $d \leq 2$.

2. Блукання Бернуллі $(S_n, n \geq 0)$ таке, що $\mathbf{P}(S_1 = 1) = p = 1 - q$, $\mathbf{P}(S_1 = -1) = q$, $S_0 = x \in (a, b)$. Позначимо момент виходу $\tau_x = \inf(n \geq 1 : S_n \notin (a, b))$. (а) Скласти систему рівнянь для $p_x = \mathbf{P}(\tau_x < \infty, S_{\tau_x} = b)$ та знайти $p_x = (\theta^x - \theta^a)/(\theta^b - \theta^a)$, якщо $\theta \equiv q/p \neq 1$. (б) Аналогічно знайти

$$m_x = \mathbf{E}\tau_x = (bp_x + a(1 - p_x) - x)/(p - q).$$

3. Стрибки випадкового блукання мають симетричний розподіл, причому $\mathbf{P}(\xi_1 = n) \simeq cn^{-\alpha}, n \to \infty$. Довести, що при $1 < \alpha < 2$ блукання транзієнтне, а при $\alpha > 2$ – рекурентне.

4. Випадкове блукання має такий розподіл стрибків:

$$\mathbf{P}(\xi_1 = -2) = 1/3, \quad \mathbf{P}(\xi_1 = 1) = 2/3.$$

Вивести з загального критерія, що воно є рекурентним.

5. Нехай $(S_n, n \geq 0)$ – випадкове блукання зі стійким розподілом стрибків, що мають характеристичну функцію $\exp(-|t|^\alpha)$, $\alpha \in (0, 2]$. Довести, що це блукання є рекурентним тоді й тільки тоді, коли $\alpha \geq 1$.

6. Довести, що зі збіжності $\int_{-\pi}^{\pi}(1 - \operatorname{Re}\varphi(t))^{-1}dt < \infty$ випливає транзієнтність блукання.

7. Довести, що імовірність того, що блукання Бернуллі $(S_n, n \geq 0)$ коли-небудь досягне точку $x \in \mathbb{N}$, дорівнює 1 при $p \geq q$, та $(p/q)^x$ при $p < q$. В останньому випадку величина $\sup_{n \geq 0} S_n$ має геометричний розподіл з параметром p/q.

8. Випадкові величини $(\xi_k, k \geq 1)$ незалежні однаково розподілені у $\mathbb{Z}$, а $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$. Тоді (тотожність Спарре-Андерсена) величини $\sum_{k=1}^{n} 1\!\!\mathrm{I}_{\{S_k > 0\}}$ та $\min(k \in \overline{0, n} : S_k = \max_{0 \leq j \leq n} S_j)$ однаково розподілені.

9. Довести, що клас симетричних відносно нуля дискретних розподілів $q = (\mathbf{P}(\xi_1 = n), n \in \mathbb{Z})$, для яких відповідне випадкове блукання є рекурентним, є опуклою множиною (для кожних двох своїх точок q_k містить відрізок $\alpha q_1 + (1 - \alpha)q_2, \alpha \in (0, 1)$).

10. Узагальнити теорему про критерій рекурентності блукання через характеристичну функцію стрибка на випадок блукань у просторі $\mathbb{R}^d$.

11. Нехай $(S_n^i, n \geq 0), i = 1, 2,$ - два незалежні симетричні блукання Бернуллі на $\mathbb{Z}$, а $\tau_i(x) = \inf(k \geq 1 : S_k^i = x)$. (а) Обчислити ймовірність $\mathbf{P}(\tau_1(x) \leq \tau_2(y))$. (б) Визначимо $\nu_n = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n 1\!\!\mathrm{I}_{\{S_k^1 = S_j^2\}}$. Довести, що $\mathbf{E}\nu_n \simeq cn^{3/2}, n \to \infty$. (в) Узагальнити останнє твердження на аналогічне блукання у просторі $\mathbb{Z}^d$.

12. Випадкове блукання $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$ має показниково розподілені стрибки. Знайти розподіл випадкової величини

$$\tau = \inf(n \geq 1 : S_n > 1).$$

13. Випадкове блукання $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$ таке, що $\mathbf{E}\,|\xi_1| = \infty$. Довести, що має місце хоча б одна рівностей

$$\mathbf{P}(\overline{\lim}_{n\to\infty} S_n = \infty) = 1, \quad \text{або} \quad \mathbf{P}(\underline{\lim}_{n\to\infty} S_n = -\infty) = 1.$$

14. Стрибки випадкового блукання $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$ мають розподіл Коші. Довести, що $n^{-\alpha} S_n \to^{\mathbf{P}1} 0, n \to \infty$, при $\alpha > 1$.

15. Випадкові величини (ξ_n) незалежні однаково розподілені у $\mathbb{Z}_+$ та не залежать від $\nu \in \mathbb{Z}_+$, а $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$. Довести, що генератриса $\varphi_{S_\nu}(z) = \sum_{n\geq 0} z^n \mathbf{P}(S_\nu = n) = \varphi_\nu(\varphi_{\xi_1}(z))$. Обчислити звідси $\mathbf{E}S_\nu$, $\mathbf{D}S_\nu$.

16. Випадкові величини (ξ_n) незалежні та $\mathbf{P}(\xi_n = 1) = p_n = \mathbf{P}(\xi_n \neq 0)$. Знайти генератрису, математичне сподівання та дисперсію величини $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Нехай $u_n = \mathbf{P}(S_n \in 2\mathbb{Z}_+)$. Знайти рекурентні рівняння для u_n та обчислити відповідну генератрису.

17. Випадкові величини (ξ_n) незалежні, невід'ємні, $S_n = \sum\limits_{k=1}^n \xi_k$, $\nu(t) = \max(n \geq 0 : S_n < t)$. Довести, що

$$\mathbf{E}\nu(t) = \sum_{n\geq 0} \mathbf{P}(S_n < t), \quad t \geq 0.$$

18. Для випадкового блукання $(S_n, n \geq 0)$ на $\mathbb{Z}$ та $n \geq 1$ позначимо $S_k^* = S_n - S_k$ для $k = \overline{0, n}$. Довести, що випадкові вектори $(S_0, \ldots, S_n)$ та $(S_n^*, \ldots, S_0^*)$ однаково розподілені.

19. Довести, що за умови $\mathbf{P}(\xi_1 = 0) < 1$ для випадкового блукання $(S_n, n \geq 0)$ на $\mathbb{Z}$ майже напевне або $\sup_{n\geq 1} S_n = \infty$ або $\inf_{n\geq 1} S_n = -\infty$. Для рекурентного блукання обидві вказані події виконуються м.н.

20. Довести, що випадкове блукання з цілочисельним аналогом розподілу Коші стрибків є рекурентним.

21. Довести рекурентність випадкового блукання на площині зі стрибками, що мають нульові середні та квадратично інтегровні.

22. Випадкове блукання $(S_n, n \geq 0)$ рекурентне. Довести при $k \geq 2$ рекурентність блукання $(S_{kn}, n \geq 0)$.

23. Нехай F, G - функції розподілу симетричних величин. Довести, що блукання з функцію розподілу стрибка $(F+G)/2$ є рекурентним тоді і тільки тоді, коли рекурентними є блукання з розподілами стрибків F та G відповідно.

2.10. Нескінченно подільні розподіли та канонічні міри

Література: [1,с.226-232]. Сам: 1-6.

1. Довести, що гама-розподіл, розподіли Пуассона та Коші є нескінченно подільними.

2. Нехай φ_1, φ_2 – нескінченно подільні характеристичні функції. Довести, що їх добуток $\varphi_1(t)\varphi_2(t)$ – нескінченно подільна характеристична функція.

3. Довести, що поточкова границя нескінченно подільних характеристичних функцій, що є неперервною в нулі, є нескінченно подільною характеристичною функцією.

4. Довести, що нескінченно подільна величина є слабкою границею послідовностей сум незалежних величин, які мають розподіли Пуассона на решітках вигляду $a + b\mathbb{Z}_+$, $a, b \in \mathbb{R}$.

5. Випадкові величини $(\xi_n, n \geq 1)$ незалежні однаково розподілені, мають щільності $\exp(-|x|)/2$ та характеристичну функцію $1/(1+t^2)$. Довести, що ряд $\xi = \sum_{n \geq 1} \xi_n / n$ збігається м.н., а його характеристична функція $\varphi_\xi(t) = \pi t / \sinh(\pi t)$ є нескінченно подільною. Знайти її канонічне зображення.

6. Довести, що функція $\varphi(t) = \exp(-c|t|^\alpha)$ при $c > 0, \alpha \in (0, 2]$ є нескінченно подільною характеристичною функцією. Знайти ка-

нонічне зображення для цієї функції. Вказівка: розглянути незалежні симетричні випадкові величини такі, що $\mathbf{P}(|\xi_1| > x) = x^{-\alpha}$, $x \geq 1$, та довести, що характеристична функція нормованих сум $(\xi_1 + \ldots + \xi_n)n^{-1/\alpha}$ збігається при $n \to \infty$ до $\varphi(t)$.

7. Довести, що нескінченно подільна характеристична функція не має коренів.

8. Випадкова величина ξ має розподіл (а) нормальний; (б) Пуассона, причому $\xi = \xi_1 + \xi_2$, де доданки незалежні та мають нескінченно подільні розподіли. Довести, що ξ_k мають розподіли (а) та (б).

9. Довести, що біноміальний і рівномірний розподіли не є нескінченно подільними.

10. Випадкові величини $(\xi_n, n \geq 1)$ незалежні однаково розподілені, цілочисельна величина ν не залежить від них і є нескінченно подільною, а суми $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Довести, що величина S_ν є нескінченно подільною.

11. Нехай φ – нескінченно подільна характеристична функція, $\psi = \ln \varphi$, а f – щільність розподілу симетричної квадратично інтегровної випадкової величини. Довести, що функція $\omega = \psi - \psi * f$ після ділення на сталу $\omega(0)$ є характеристичною.

12. Довести, що для нескінченно подільної характеристичної функції φ функція $(1 - \ln \varphi(t))^{-1}$ є нескінченно подільною характеристичною.

13. Функція $p(s) = \sum_{n \geq 0} p_n s^n$ така, що $p_n \geq 0$, $p_0 > 0$, $p(1) = 1$, причому $\ln p(s)/p_0$ розкладається у ряд Тейлора з невід'ємними коефіцієнтами. Довести, що для довільної характеристичної функції φ суперпозиція $p(\varphi(t))$ є нескінченно подільною характеристичною функцією. Зокрема, дане твердження виконується для $p(s) = (1 - as)(1 - bs)^{-1}$ при $0 \leq a < b < 1$.

14. Характеристична функція φ називається стійкою, якщо для довільних додатних a, b знайдуться $c, d > 0$ такі, що

$$\varphi(at)\varphi(bt) = \exp(-itc)\varphi(dt).$$

(а) Довести, що стійка характеристична функція є нескінченно подільною. (б) Характеристична функція φ є стійкою тоді й тільки тоді, коли знайдеться послідовність незалежних однаково розподілених величин $(\xi_n, n \geq 0)$ з характеристичною функцією φ такі, що при кожному $n \geq 1$ для деяких сталих $a_n, b_n > 0$ має місце збіжність розподілів $(\xi_1 + \ldots + \xi_n - a_n)/b_n \simeq \xi_0$. (в) Характеристична функція φ є стійкою тоді й тільки тоді, коли знайдеться послідовність незалежних однаково розподілених величин $(\xi_n, n \geq 0)$ такі, що при кожному n для деяких сталих $a_n, b_n > 0$ має місце слабка збіжність $(\xi_1 + \ldots + \xi_n - a_n)/b_n \to^W \xi_0$. (г) Стійким характеристичним функціям відповідають нескінченно подільні функції, для яких канонічна міра у зображенні Леві-Хінчина має щільність $C_\pm |x|^{1-\alpha} \mathbb{1}_{x \lessgtr 0}$ при деякому $\alpha \in (0, 2]$.

15. Довести, що невід'ємна випадкова величина ξ є нескінченно подільною, якщо для деяких $\mu \geq 0$ та неспадної функції G такої що $\int_0^\infty (1+x)^{-1} dG(x) < \infty$ має місце зображення

$$\varphi_\xi(t) = \exp(it\mu + \int_0^\infty (\exp(itx) - 1) dG(x)).$$

16. Довести, що довільна степінь з додатним показником нескінченно подільної характеристичної функції є нескінченно подільною характеристичною функцією.

17. Випадкова величина ξ є стійкою з фіксованим параметром $\alpha \in (0, 2)$, а η не залежить від ξ та $\mathbf{P}(\eta = \pm 1) = 1/2$. Довести, що величина $\xi\eta$ є стійкою.

18. Довести, що показникова випадкова величина $\xi \simeq Exp(1)$ нескінченно подільна, оскільки при $t \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{E} \exp(it\xi) = 1/(1 - it) = \exp\left[\int_0^\infty (\exp(itx) - 1) \exp(-x) x^{-1}\ dx\right].$$

19. Характеристична функція $\varphi(t)$ є нескінченно подільною. Довести, що $|\varphi(t)|$ також є нескінченно подільною характеристичною функцією.

20. Для довільної характеристичної функції $\varphi(t)$ та $\lambda > 0$ функція $\exp(\lambda(\varphi(t) - 1))$ є нескінченно подільною характеристичною функцією.

21. Дзета-функція Рімана визначається як сума ряду $\zeta(z) = \sum_{n\geq 1} n^{-z}$ при $\operatorname{Re} z > 1$. Вивести з формули Ейлера

$$\zeta(z) = \prod_{p>1}(1 - p^{-z}),$$

що функція $\zeta(\sigma + it)/\zeta(\sigma)$ є нескінченно подільною характеристичною функцією для кожного $\sigma > 1$.

2.11. Вказівки та відповіді

1.1. Розглянути множини $B_n = \{0\}^n \times \mathbb{R}^\infty$. Їх перетин рівний $\{0\}^\infty$- що не є циліндричною множиною.

1.2. Довести, що для сумісних щільностей умова узгодженості еквівалентна $\int f_{n+1}(x^n, x_{n+1})dx_{n+1} = f_n(x^n)$. Далі, доведіть узгодженість у припущенні діагональності матриці V. У загальному випадку для наступної матриці $V_{n+1} = \begin{vmatrix} V_n & b_n \\ b_n' & b_{n+1} \end{vmatrix}$ довести тотожність

$$V_{n+1}^{-1} = \begin{vmatrix} V_n^{-1} + \beta_{n+1} V_n^{-1} B_n V_n^{-1} & -\beta_{n+1} V_n^{-1} b_n \\ -\beta_{n+1} b_n' V_n^{-1} & \beta_{n+1} \end{vmatrix},$$

де матриця $B_n = b_n b_n\prime$, а стала $\beta_{n+1} = b_{n+1} - b_n' V_n^{-1} b_n$.

1.3. (а) Випливає прямо з теореми Колмогорова. (б) Обчислимо

$$\sum_{x\in E} p_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, x) = q(x_1)p(x_1, x_2)\ldots p(x_{n-1}, x_n)\sum_{x\in E} p(x_n, x),$$

оскільки рядки матриці $(p(x, y))$ є розподілами ймовірностей, то

$$\sum_{x\in E} p(x_n, x) = 1,$$

звідки отримаємо шукане твердження.

1.4. Узагальніть теорему про вимірність відносно сигма-алгебри, що породжена величиною на випадок випадкових векторів ([2, ст. 171]). Далі скористайтесь тим, що відображення

$$(\xi_1, \ldots, \xi_n) \to (S_1, \ldots, S_n)$$

є взаємно однозначним (дійсно, $\xi_1 = S_1,\ \xi_k = S_k - S_{k-1}$).

1.5. Припустимо, що функції F, G - строго монотонні. Оберіть у якості ймовірнісного простору множину $[0, 1]$ з борелевою сигма-алгеброю та рівномірним розподілом. Покладіть: $\xi(x) = F^{-1}(x)$, $\eta(x) = G^{-1}(x)$. Тут $F^{-1}(u) = \sup(x: F(x) < u)$.

1.6. Розглянемо вектор $\xi = (\xi_n, n \geq 1) \in \mathbb{R}^\infty$. Якщо ζ_n - проста $\sigma[\xi]$ вимірна, то $\zeta_n = \sum c_k 1\!\!1_{A_k} = \sum_k c_k 1\!\!1_{\xi \in B_k} = g_n(\xi)$ для деяких $c_k, A_k \in \sigma[\xi], B_k \in \mathbf{B}(\mathbb{R}^\infty)$, де $g_n(x) = \sum_k c_k 1\!\!1_{x \in B_k}$ - борелівська функція.

1.7. Покажемо, що кожна з множин представляється у вигляді зліченних перетинів та об'єднань множин, що залежать лише від скінченної кількості координат:

$$\{x \in \mathbb{R}^\infty : \sup x_n < a\} = \cup_{k \geq 1} \cap_{n \geq 1} \{x \in \mathbb{R}^\infty : x_n < a - 1/k\},$$

$$\{x \in \mathbb{R}^\infty : \exists \lim x_n < a\} =$$

$$\cup_{k \geq 1} \cap_{n \geq 1} \cup_{m \geq 1} \cap_{i > j > m} \{x \in \mathbb{R}^\infty : |x_j - x_i| < 1/n, x_j < a - 1/k\},$$

$$\{x \in \mathbb{R}^\infty : \sum_{n \geq 1} |x_n| < a\} =$$

$$\cup_{k \geq 1} \cap_{n \geq 1} \{x \in \mathbb{R}^\infty : \sum_{j=1}^n |x_j| < a - 1/k\},$$

$$\{x \in \mathbb{R}^\infty : \sum_{k=1}^n x_k = 0, \text{н.ч.}\} = \cap_{n \geq 1} \cup_{m \geq n} \{x \in \mathbb{R}^\infty : \sum_{k=1}^m x_k = 0\}.$$

1.8. Позначимо через $\mathfrak{B}'$ сигма-алгебру, породжену відкритими по відношенню до ρ множинами. Покажемо, що вона співпадає з борелєвою сигма алгеброю $\mathfrak{B}$. Для цього покажемо, що $\mathfrak{B}'$ містить всі циліндричні множини, а для цього досить показати, що будь-яку скінченновимірну кулю можна покрити зліченною кількістю куль породжених ρ.

Нехай B_n - n-вимірна куля, розглянемо множину: $B_n \cap \mathbb{Q}^n$, для кожної точки x з цієї множини визначимо $r(x) = \min_{i=1,n} 2^{-i} r_i(x)$, де $r_i(x)$ - відстань від точки x до межі кулі вздовж i-тої координатної осі. Тоді куля породжена ρ з радіусом $r(x)$ входить у внутрішність B_n, а отже зрозуміло, що B_n покривається зліченним числом куль, породжених ρ, а отже всі циліндричні множини з основами розмірності n входять до $\mathfrak{B}'$, а отже і $\mathfrak{B}$ входить до $\mathfrak{B}'$. Зворотне твердження доводиться аналогічно.

1.9. Для кожної G_n існує випадкова величина ξ_n задана на $\mathbb{R}$, з функцією розподілу G_n. Випадкові величини ξ_k - незалежні в сукупності, а отже існує ймовірність на $\mathbb{R}^\infty$, що задовольняє умову задачі.

1.10. Для продовження на алгебру циліндрів скористайтесь процедурою приведення двох циліндрів до спільної основи. Нехай t_n, $t \in \mathbb{Q}$ та $t_n \uparrow t$. Тоді

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n\geq N}\{x : |x(t_n) - x(t)| < \varepsilon\}\right) \leq \prod_{n\geq N}\mathbf{P}(\{x : x(t_n) < x(t)+\varepsilon\}) = 0,$$

для достатньо малих $\varepsilon > 0$, водночас внаслідок неперервності

$$\mathbf{P}(\{x : \lim_{n\to\infty} x(t_n) = x(t)\}) = 1.$$

1.11. Аналогічно до доведення у зліченному випадку, можна стверджувати, що $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^T)$ еквівалентна сигма-алгебрі, породженій всіма циліндричними множинами. Рівність сигма-алгебр випливає з того, що кожна множина з $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^T)$ залежить від не більш ніж зліченої кількості координат, а отже належить деякій $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^\tau)$, вірне також і зворотне твердження, кожна $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^\tau)$ породжена циліндричними множинами, що належать оригінальній сигма-алгебрі.

Множина $\{\sup x(t) < a\}$ не належить заданій сигма-алгебрі, оскільки вона залежить від більш ніж зліченої кількості координат. Якщо ж $x(t)$ - неперервна, то виберемо в якості τ множину раціональних точок відрізку $[0, 1]$, тоді з того, що неперервна функція $x(t) \leq a$ у всіх раціональних точках, випливає, що вона не перевищує a у всіх точках.

1.12. Визначимо ймовірнісний простір $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), \mathbf{P})$, де ймовірність $\mathbf{P}$ така, що $\mathbf{P}[a, b) = F_0(b) - F_0(a)$. Визначимо функції $G_n(y) = \sup(x\colon F_n(x) < y)$, $n \geq 0$. Визначимо випадкові величини: $\xi_n(\omega) = G_n(F_0(\omega))$, $\xi_0(\omega) = \omega$. Легко переконатися, що $F_0(\omega)$ має рівномірний розподіл на $[0, 1]$, а функції розподілу величин ξ_n співпадають з F_n.

Вірно також, що для кожної точки неперервності F_0, $G_n(y)$ збігається до $G_0(y)$, а отже ξ_n збігаються поточково до ξ_0.

1.13. Можна побудувати два ймовірнісних простори, на яких задані послідовності ξ та η, тоді в силу того, що всі ймовірності, які залежать лише від скінченної кількості ξ_i, η_i співпадають, виводимо, що η фундаментальна за ймовірністю, а також що границя за ймовірністю має той же розподіл, що і ξ.

1.14. Описана сигма-алгебра є сигма-алгеброю асимптотичних множин, вимірні відносно неї функції, це функції що не залежать від жодної скінченної кількості координат (тобто $f(x) = f(\theta x)$).

1.15. Коли t пробігає $\mathbb{R}$, лінійні комбінації функцій e^{-itx} утворюють базис у просторі вимірних функцій, а тому з узгодженості функцій розподілу на кожній функції e^{-itx} випливає узгодженість на кожній борелевій функції, а отже і на одиниці. В інший бік доведення тривіальне, оскільки $e^{-i(t_1x_1+t_2x_2)} = e^{-it_1x_1}e^{-it_2x_2}$.

1.16. Визначимо послідовно функції

$$P_n^n(x_1, \ldots, x_n, B) \equiv 1\!\!\mathrm{I}_{(x_1,\ldots,x_n)\in B},\ B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n),$$

та при $1 \le k < n, B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$

$$P_k^n(x_1, \ldots, x_k, B) \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty} Q_{k+1}(x_1, \ldots, x_k, dx_{k+1}) P_{k+1}^n(x_1, \ldots, x_{k+1}, B).$$

(а) Довести, що $P_k^n(x_1, \ldots, x_k, B) = P_k^{n+l}(x_1, \ldots, x_k, B \times \mathbb{R}^l)$ при $l \ge 0, k \le n$. (б) Визначимо $P_k(x_1, \ldots, x_k, C) \equiv P_k^n(x_1, \ldots, x_k, B)$ для циліндричних множин $C = J_n(B), B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$, та $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$. Перевірити, що це визначення не залежить від конкретного зображення C. (в) Довести, що $P_k(x_1, \ldots, x_k, C)$ є адитивною функцією від $C \in J$ та є борелєвою функцією від $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$. (г) Ця функція задовольняє рівність

$$P_k(x_1, \ldots, x_k, C) \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty} Q_{k+1}(x_1, \ldots, x_k, dx_{k+1}) P_{k+1}(x_1, \ldots, x_{k+1}, C).$$

(д) Функція $P_k(x_1, \ldots, x_k, C)$ є сигма-адитивною від $C \in J$. (е) Продовження P_k на $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^\infty) = \sigma[J]$ є ймовірністю та борелевою функцією $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$. (ж) Шукана ймовірність має вигляд

$$\mathbf{P}(B) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} Q_1(dx_1) P_1(x_1, B), \quad B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^\infty).$$

(з) Перевірити, що в цьому доведенні не використовуються топологічні структури у $\mathbb{R}^\infty$.

1.17. Зобразити індикатор $\mathbb{1}_{(-\infty,a)}$ як поточкову границю неперервних функцій.

1.18. Клас напівінтервалів зі зліченною щільною множиною границь.

1.19. $\mathbf{P}(\xi_1 = i_1, \ldots, \xi_n = i_n) = 2^{-n} =$
$\mathbf{P}(0 \leq \xi - \sum_{s=1}^{n} i_s 2^{-s} < 2^{-n})$.

2.1. Розглянемо довільний набір $1 \leq t_1 \leq \ldots t_m \leq n$, та набір A_i з t_i-тої сигма-алгебри. Тоді перетин множин $A_{t_1} \cap \ldots \cap A_{t_{m-1}}$ як елемент з сигма-алгебри, породженої $\cup_{i<t_m} \mathfrak{F}_i$ не залежить від A_{t_m}. Аналогічно показуємо, що всі A_{t_i} - незалежні.

2.2. Довести, що $\sigma[\cup_{k>n} \mathfrak{F}_k] =$
$\sigma[\{x \in \mathbb{R}^\infty : (x_{n+1}, \ldots, x_m) \in B_{m-n}\}, m > n, B_{m-n} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{m-n})]$.

2.3. Зауважити, що корені n-того степеня з $|\xi_n|$ теж незалежні випадкові величини. Далі розглянути подію $\{\overline{\lim} |\xi_n|^{1/n} < x\}$ - це можливо, лише якщо нерівність виконана для всіх $|\xi_n|^{1/n}$ окрім скінченого числа, а така подія є залишковою, а отже її ймовірність може бути лише 0 або 1. Тому функція розподілу радіусу збіжності приймає лише два значення - 0, та 1, отже така випадкова величина є сталою майже напевно.

2.4. Зауважити, що випадкові величини незалежні тоді і лише тоді, коли незалежні породжені ними сигма-алгебри. Далі твердження випливає з теореми про критерій незалежності класів подій.

2.5. Незалежність в сукупності випадкові величини $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ еквівалентна шуканій рівності, де функції g_k пробігають індикатори всіх борельових функцій. Доведення завершує апроксимація неперервних обмежених функція простими, та індикаторних функцій неперервними.

2.6. Див. задачу 1.15.9.

2.7. Покажемо, що індикатор кожної множини з сигма-алгебри породженої $\mathfrak{C}$, належить H. Це випливає з наступних двох формул:

$$\mathbb{1}_{A \setminus B} = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_{A \cap B},$$

$$\mathbb{1}_{\cup_{k=1}^{\infty} A_k} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k}, \text{ при } \ A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j.$$

2.8. Скористатися означенням.

2.9. Нехай алгебри $\mathfrak{A}_i$ такі, що $\mathfrak{F}_i = \sigma[\mathfrak{A}_i]$. Якщо $\mathbf{Q}$ – ймовірність на $\mathfrak{F}_1$ та $B \in \mathfrak{F}_2$, то існують $B_n \in \mathfrak{A}_1$ такі, що $\mathbf{Q}(B\Delta B_n) \to 0$, $n \to \infty$. Оскільки

$$\alpha[\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_3] = \{\{\cup_{k=1}^{n}(C_k \cap A_k)\}, n \geq 1, A_k \in \mathfrak{A}_1, C_k \in \mathfrak{A}_3\},$$

де можна вважати, що (C_k) – повна група подій, то для $A \in \mathfrak{F}_2$ існують C_{km}, A_{km} такі, що $\mathbf{P}(A\Delta \cup_{k\geq 1} (A_{km} \cap C_{km})) \to 0, m \to \infty$. Тому $\mathbf{P}(\cup_{k\geq 1}(C_{km} \cap (A\Delta A_{km})) = \sum_{k\geq 1} \mathbf{P}(C_{km})\mathbf{P}(A\Delta A_{km}) \to 0, m \to \infty$. Якби існувала подія $A \in \mathbf{F}_2$, така, що $\inf_{m\geq 1} \mathbf{P}(A\Delta A_{km}) > 0$ для деяких $k, A_{km} \in \mathfrak{A}_1$, то вказана збіжність до нуля не мала б місце, враховуючи рівність $\sum_{k\geq 1} \mathbf{P}(C_{km}) = 1$. Це суперечить нерозрізненості $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$.

2.10. Нехай ξ_0 приймає значення $\{-1, 1\}$ з ймовірностями $1/2$, а величини $\xi_n = -\xi_{n-1}$, $n \geq 1$. Оберемо $A = \{\overline{\lim}_{n\to\infty} \xi_{2n} = 1\}$.

2.11. Вивести безпосередньо з означення.

2.12. Для незалежних випадкових величин залишкова сигма-алгебра є тривіальною. А всі величини, що вказані у задачі є вимірними відносно залишкової сигма-алгебри, отже є сталими м.н.

2.13. Як і в попередній задачі, шукана подія належить залишковій сигма-алгебрі, що є тривіальною. Якщо $p \neq 1/2$, то блукання є транзієнтним і з ймовірністю 1 $|S_n| \to \infty, n \to \infty$.

2.14. Вивести безпосередньо з означення.

2.15. Скористатись тотожністю

$$\mathbf{P}((\xi_1, \ldots, \xi_n) \in B) = \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in B} \mathbf{P}((\xi_1, \ldots, \xi_n) = (x_1, \ldots, x_n).$$

2.16. $f(x, y) > 0$ за вибором a. Тому достатньо перевірити, що $\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy = f_1(x)$ (врахувавши симетрію) і $f(x, y) \neq f_1(x)f_2(y)$.

2.17. $\Omega = \{1, 2, 3\}$, $\mathbf{P}(\{i\}) = 1/3$, $\mathfrak{C}_1 = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$, $\mathfrak{C}_2 = \{\{1, 3\}\}$.

2.18. $\xi = \alpha, \eta = 1 - \alpha$, $\alpha \simeq U(0, 1)$.

2.19. Нехай $g(\xi) \neq c$ м.н. тоді існують попарно несумісні борелеві $B_i \subset \mathbb{R}$ з $\mathbf{P}(g(\xi) \in B_i) > 0$. Визначивши $A_i = g^{(-1)}(B_i)$, отримуємо суперечність

$$0 = \mathbf{P}(\xi \in A_1, g(\xi) \in B_2) = \mathbf{P}(\xi \in A_1)\mathbf{P}(g(\xi) \in B_2) > 0.$$

2.20. Замкненість класу відносно вкладеної різниці та скінчених об'єднань неперетинних подій очевидні. Якщо події $A_k \in \mathfrak{D}$ попарно неперетинні, а $B_k = \cup_{j\le k} A_j$, $B = \cup A_j$, то $\mathbf{P}(B) = \lim_{k\to\infty}\mathbf{P}(B_k) = \lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty} P_n(B_k) \le \underline{\lim}_{n\to\infty} P_n(B)$. Аналогічно виводимо протилежну нерівність, тому $B \in \mathfrak{D}$.

2.21. Досить показати рівність на алгебрі. Для цього, в силу адитивності міри, досить показати, що $P(A\backslash B) = Q(A\backslash B)$, але $P(A\backslash B) = P(A) - P(A\cap B) = Q(A) - Q(A\cap B)$.

2.22. Використати формулу Коші.

2.23. Знайти ймовірність не потрапляння у $(a,b), a<b\in\mathbb{Q}$.

2.24. Дана сигма-алгебра дорівнює $\cap_{n\ge1}\sigma[\sigma[S_n],\cup_{k>n}\sigma[\xi_k]]$.

2.25. У другій частині порахувати дисперсію суми ζ_k.

3.1. Розкривши дужки в правій частині, отримаємо нерівності:

$$0 \le -2\varepsilon\mathbf{E}[(\xi-\zeta)\eta] + \varepsilon^2\mathbf{E}\eta^2,$$
$$2\varepsilon\mathbf{E}[(\xi-\zeta)\eta] \le \varepsilon^2\mathbf{E}\eta^2.$$

Тепер, вибравши в якості ε спочатку $1/n$ а потім $-1/n$, отримаємо, що $\mathbf{E}[(\xi-\zeta)\eta] = 0$, для довільної квадратично інтегровної вимірної функції η, а отже і для кожного індикатора.

3.2. (а) $\zeta(\omega) = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} g(k+\omega)f(k+\omega)\right)\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k+\omega)\right)^{-1}$, (б) $\zeta(\omega) = (g(\omega)f(\omega) + g(-\omega)f(-\omega))\,(f(\omega)+f(-\omega))^{-1}$.

3.3. Розглянемо два випадки: $x>0$, та $x\le 0$. Якщо $x>0$, то шукана умовна ймовірність рівна $\frac{f(-|\xi|)}{f(|\xi|)+f(-|\xi|)} I_{|\xi|\ge x} + I_{|\xi|<x}$. Якщо $x\le 0$, то $\frac{f(-|\xi|)}{f(|\xi|)+f(-|\xi|)} I_{|\xi|>-x}$.

3.4. Можна вважати, що $\xi \ge 0$. Тоді $\mathbf{E}\zeta\mathbb{1}_{\zeta\ge b} = \mathbf{E}\xi\mathbb{1}_{\zeta\ge b} \le c\mathbf{E}\mathbb{1}_{\zeta\ge b} + \mathbf{E}\xi\mathbb{1}_{\xi\ge c} \le c\mathbf{E}\xi/b + \mathbf{E}\xi\mathbb{1}_{\xi\ge c} \to 0, b,c\to\infty$.

3.5. Позначимо $\zeta = \mathbf{E}(\xi \mid \mathfrak{C})$. Тоді: $\mathbf{E}\mathrm{D}(\xi\mid\mathfrak{C}) + \mathbf{D}\mathrm{E}(\xi\mid\mathfrak{C}) = \mathbf{E}(\xi-\zeta)^2 + \mathbf{E}\zeta^2 - (\mathbf{E}\zeta)^2 = \mathbf{E}\xi^2 - 2\mathbf{E}\xi\zeta + \mathbf{E}\zeta^2 + \mathbf{E}\zeta^2 - (\mathbf{E}\zeta)^2$. Зауважимо, що $\mathbf{E}\xi = \mathbf{E}\zeta$, а $\mathbf{E}\xi\zeta = \mathbf{E}\zeta^2$. Підставивши ці рівності у попередній вираз, отримаємо вираз для $\mathbf{D}\xi$.

3.6. Перевірити рівність для $g(x,y) = \mathbb{1}_{(x,y)\in B\times C}$, далі для простих g та борельових обмежених g за теоремою Лебега про обмежену збіжність.

3.7. Всі властивості тривіальним чином випливають з означення та властивостей математичного сподівання.

3.8. Упорядкуємо всі розбиття за потужністю, та розглянемо при кожному $k \geq 0$ групи, в яких найбільший за потужністю елемент містить $n-k$ точок, а всі решта елементів складаються з k точок.

3.9. Всі можливі скінчені об'єднання.

3.10. Спочатку перевірити рівність для індикаторних величин η.

3.11. Доводимо твердження у класі L_2 величин. Множина всіх $\mathfrak{F}$ - вимірних величин є замкненим підпростором. Нехай ζ проекція ξ на цей підпростір. Покажемо, що ζ - умовне математичне сподівання.

Дійсно, для довільного η, має місце твердження $\mathbf{E}[(\xi-\zeta)\eta] = 0$, звідки випливає умова балансу.

3.12. Твердження очевидне для $g(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$.

3.13. Підставити в нерівність $g(x) \geq g(x_0) + k(x_0)(x - x_0)$, $x = \xi$, $x_0 = \mathbf{E}(\xi \mid \mathfrak{C})$, обчислити умовне математичне сподівання від обох частин та врахувати, що $\mathbf{E}(g(\mathbf{E}(\xi \mid \mathfrak{C})) \mid \mathfrak{C}) = g(\mathbf{E}(\xi \mid \mathfrak{C}))$.

3.14. (а) $\dfrac{\sum_\pi \pi(x)_1 f(\pi(x))}{\sum_\pi f(\pi(x))}$, (б) $\dfrac{\sum_\pi \pi(x)_1 \pi(x)_2 f(\pi(x))}{\sum_\pi f(\pi(x))}$,
(в) $\dfrac{\sum_\pi \pi(x)_1^2 f(\pi(x))}{\sum_\pi f(\pi(x))}$.

3.15. Припустимо, Q – σ-скінчена. Нехай множина A, така, що $P(A) > 0$, та $\zeta 1\!\!1_A = \infty$. Нехай A_n таке розбиття Ω, що $Q(A_n) < \infty$. Тоді існує, принаймні одне A_n, таке, що $A_n \cap A$ непорожня. Але тоді: $\infty = \mathbf{E}[\zeta 1\!\!1_{A \cap A_n}] = \mathbf{E}[\xi 1\!\!1_{A \cap A_n}] = Q(A \cap A_n) \leq Q(A_n) < \infty$.

В інший бік. Позначимо: $A_n = \{\omega : n - 1 \leq \zeta < n\}$, зауважимо, що $\cup_{n \geq 1} A_n = \Omega$ м.н., оскільки ζ скінчена м.н. Також очевидно, що A_n не перетинаються. Тоді $Q(A_n) = \mathbf{E}[\xi 1\!\!1_{A_n}] = \mathbf{E}[\zeta 1\!\!1_{A_n}] \leq n$.

3.16. Доведення повторює доведення леми Фату (використовується лише теорема Лебега про мажоровану збіжність, та властивості математичного сподівання, що також має місце для умовного математичного сподівання).

3.17. Довести, що $\mathbf{E}(\xi_n \mid \mathfrak{C}_k) - \mathbf{E}(\xi \mid \mathfrak{C}_k) \to 0, n \to \infty$, при кожному k, та $\mathbf{E}(\xi \mid \mathfrak{C}_k) - \mathbf{E}(\xi \mid \mathfrak{C}) \to 0, k \to \infty$.

3.18. Див. доведення такої теореми для безумовного сподівання.

3.19. $0 \le \mathbf{E}[(\lambda\xi + \eta)^2 \mid \mathfrak{C}] = \lambda^2\mathbf{E}[\xi^2 \mid \mathfrak{C}] + 2\lambda\mathbf{E}[\xi\eta \mid \mathfrak{C}] + \mathbf{E}[\eta^2 \mid \mathfrak{C}]$, а отже дискримінант цього виразу недодатний м.н.:

$$0 \ge D = 4\mathbf{E}[\xi\eta \mid \mathfrak{C}]^2 - 4\mathbf{E}[\xi^2 \mid \mathfrak{C}]\mathbf{E}[\eta^2 \mid \mathfrak{C}].$$

3.20. За нерівністю Йенсена для умовного математичного сподівання: $\mathbf{E}[(\mathbf{E}[\xi \mid \mathfrak{C}])^p] \le \mathbf{E}[\mathbf{E}[|\xi|^p \mid \mathfrak{C}]] = \mathbf{E}[|\xi|^p]$.

3.21. Нехай величина $\zeta \simeq N(0,1)$ не залежить від $\mathfrak{C}$. Тоді $\varphi_\zeta(t) = \varphi_\xi(t)$ та $\xi \simeq \zeta$. Застосування формули обертання для характеристичної функції доводить рівність $\mathbf{P}(\xi < x \mid \mathfrak{C}) = \Phi(x)$.

3.22. Перевіряється за означенням.

3.23. Скористатись формулою про повторне умовне математичне сподівання.

3.24. Знайти сумісну щільність вектора $(\zeta_1, ..., \zeta_n, s_{1n}, s_{2n})$ у $\mathbb{R}^n$.За теоремою про умовну щільність вектора у даному прикладі шукана умовна щільність є сталою на відповідній множині.

3.25. Нехай сигма-алгебри умовно незалежні. Позначимо: $\zeta = \mathbf{E}[F_1|\mathfrak{F}_3]$. Ясно, що ζ є $\sigma[\mathfrak{F}_2 \cup \mathfrak{F}_3]$ - вимірною. Перевіримо умову балансу. Досить перевірити для множин з $\mathfrak{F}_2 \cup \mathfrak{F}_3$. Якщо $F_3 \in \mathfrak{F}_3$, то $\mathbf{E}[\zeta F_3] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[F_1, F_3 \mid \mathfrak{F}_3]] = \mathbf{E}[F_1, F_3]$. Якщо $F_2 \in \mathfrak{F}_2$, то

$$\mathbf{E}[F_2, \zeta] = \mathbf{E}[F_2\mathbf{E}[F_1 \mid \mathfrak{F}_3]] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[F_2\zeta \mid \mathfrak{F}_2]] = \mathbf{E}[\zeta\mathbf{E}[F_2 \mid \mathfrak{F}_3]].$$

За умовною незалежністю останнє рівне:

$$\mathbf{E}[\mathbf{E}[F_1, F_2 \mid \mathfrak{F}_3]] = \mathbf{E}[F_1, F_2].$$

Доведемо твердження в інший бік. Позначимо

$$\zeta = \mathbf{E}[F_1 \mid \mathfrak{F}_3]\mathbf{E}[F_2 \mid \mathfrak{F}_3],$$

очевидно, ζ є $\mathfrak{F}_3$ - вимірною. Перевіримо умову балансу. Для довільної множини $F_3 \in \mathfrak{F}_3$:

$$\mathbf{E}[F_3\zeta] = \mathbf{E}[F_3\mathbf{E}[F_1 \mid \mathfrak{F}_3]\mathbf{E}[F_2 \mid \sigma[\mathfrak{F}_2 \cup \mathfrak{F}_3]]] =$$

$$\mathbf{E}[\mathbf{E}[F_2, F_3, \mathbf{E}[F_1 \mid \mathfrak{F}_3] \mid \sigma[\mathfrak{F}_2 \cup \mathfrak{F}_3]]] =$$

$$\mathbf{E}[F_2, F_3, \mathbf{E}[F_1 \mid \mathfrak{F}_3]] = \mathbf{E}[F_2, F_3, \mathbf{E}[F_1 \mid \sigma[\mathfrak{F}_2 \cup \mathfrak{F}_3]]] =$$

$$\mathbf{E}[\mathbf{E}[F_1, F_2, F_3 \mid \sigma[\mathfrak{F}_2 \cup \mathfrak{F}_3]]] = \mathbf{E}[F_1, F_2, F_3].$$

3.26. Нехай B_n послідовність множин, що спадає до порожньої множини. Тоді індикатори цих множин прямують до нуля майже напевно, а отже міра є неперервною в нулі.

3.27. Спочатку знайти сумісну функцію розподілу.

$$\mathbf{P}(\xi_1 < x \mid \max_{k\le n} \xi_k = y) = (n-1)F(x)/nF(y)1\!\!1_{x<y} + 1\!\!1_{x\ge y}.$$

3.28. Розглянути випадок, коли ξ_i - індикаторні величини, та скористатись однорідністю нерівності.

3.29. Скористатись теоремою Лебега про монотонну збіжність.

3.30. Застосувати монотонність умовного сподівання.

3.31. Застосувати нерівність $xy \le x^2/2 + y^2/2$.

3.32. $(\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\eta \mid \mathfrak{C}))^{-1}\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\xi\eta \mid \mathfrak{C})$.

3.33. Перевірити тотожність балансу спочатку для об'єднань та перерізів подій з $\sigma[\xi]$ та $\mathfrak{D}$.

4.1. Зауважити, що в силу незалежності та однакового розподілу ξ та η, $\mathbf{E}[\xi g(\xi+\eta)] = \mathbf{E}[\eta g(\xi+\eta)]$, для довільної борельової функції g, отже $\mathbf{E}[\xi \mid \xi+\eta] = \mathbf{E}[\eta \mid \xi+\eta]$. Оскільки: $\mathbf{E}[\xi+\eta \mid \xi+\eta] = \xi+\eta$, то $\mathbf{E}[\xi \mid \xi+\eta] = (\xi+\eta)/2$.

4.2. Виберемо множину $A := \{\zeta = 0\} \in \mathfrak{C}$. Тоді за умовою балансу: $\mathbf{E}[\xi 1\!\!1_A] = \mathbf{E}[\zeta 1_A] = 0$, звідки випливає, що $\mathbf{P}[\xi > 0, \zeta = 0] = 0$. Далі скористатись тим фактом, що $1/\zeta$ є $\mathfrak{C}$ вимірною.

4.3. З умови балансу маємо:

$$\mathbf{E}[\xi 1\!\!1_{\eta=y}] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[\xi \mid \eta]1\!\!1_{\eta=y}] = m(y)\mathbf{P}(\eta = y).$$

4.4. $\mathbf{P}(S_k \in A, S_l \in B \mid S_n = y) =$
$\mathbf{P}(S_k \in A \mid S_n = y)\mathbf{P}(\xi_{n+1} + ... + \xi_l \in B - y \mid S_n = y)$,
оскільки $S_l - S_n$ не залежить від (S_k, S_n). Див. 4.17.

4.5. Скористайтеся прийомом, аналогічним до 4.1.

4.6. Перевірити рівності для $g(x,y) = 1\!\!1_{(x,y)\in A\times B}, A, B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, потім за лінійністю подовжити на індикаторні функції у $\mathbb{R}^2$, та невід'ємні вимірні.

4.7. $\mathrm{cov}(\xi, \mathbf{E}[\eta \mid \xi]) = \mathbf{E}[\xi\mathbf{E}[\eta \mid \xi]] - \mathbf{E}[\xi]\mathbf{E}[\mathbf{E}[\eta \mid \xi]] =$
$\mathbf{E}[\xi\eta] - \mathbf{E}[\xi]\mathbf{E}[\eta] = \mathrm{cov}(\xi, \eta)$.

4.8. Вектори $(\xi, \sin\xi)$ та $(\pi-\xi, \sin(\pi-\xi)) = (\pi-\xi, \sin\xi)$ однаково розподілені. Тому $\mathbf{E}(\xi g(\sin\xi)) = \mathbf{E}((\pi-\xi)g(\sin\xi))$ для довільної обмеженої борелєвої функції g. Звідси $\mathbf{E}(\xi g(\sin\xi)) = \mathbf{E}(\frac{\pi}{2}g(\sin\xi))$ та $\mathbf{E}(\xi \mid \sin\xi) = \frac{\pi}{2}$.

4.9. $\mathbf{E}[\xi \mid \sin\xi = y] = \dfrac{\sum_{k=0}^{\infty}(\arcsin y + k\pi/2) f(\arcsin y + k\pi/2)}{\sum_{k=0}^{\infty} f(\arcsin y + k\pi/2)}$,

$$\mathbf{E}[\xi \mid \xi^2 = y^2] = \mathbf{E}[\xi \mid |\xi| = y] = \frac{yf(y) - yf(-y)}{f(y) + f(-y)}.$$

4.10. $\mathbf{P}[\xi_1 < x \mid \xi_{(n)} < t] = 1\!\!\mathrm{I}_{x \le t} F(x)/F(t) + 1\!\!\mathrm{I}_{x>t}$, далі слід врахувати, що подія $\xi_{(n)} = t$ еквівалентна тому, що один з ξ_k рівний t а всі інші менші.

4.11. Розглянути умовну щільність ξ_1 за умови ξ_2.

4.12. (б) Знайти інтегруванням $(x_1 - \mu_1)^2/\sigma_1^2$ за умовною щільністю ξ_1 за умови ξ_2.

4.13. $\sum_{k=1}^{n} p_k^{-1}(\mathbf{E}(\xi 1\!\!\mathrm{I}_{\eta=x_k}))1\!\!\mathrm{I}_{\eta=x_k}$.

4.14. $\int_{-\infty}^{\infty} u\, du \int_{|v-y|\le\varepsilon} f(u,v)dv \; (\int_{-\infty}^{\infty} du \int_{|v-y|\le\varepsilon} f(u,v)dv)^{-1}$.

4.15. Див. 4.10, $(n+1)\xi_{(n)}/2n$.

4.16. Знайти сумісну щільність $(\xi_{(k)})$.

4.20. Обчислити маргінальну щільність $f_\xi(x) = d(1+x^2)^{1/2}e^{-x^2}$.

4.21. Використати $\mathbf{E}g(\xi+\sigma\eta) = \mathbf{E}\mathrm{E}(g(\xi+\sigma\eta) \mid \xi)$.

4.22. $\mathbf{E}((\xi-\eta)^2 \mid \eta) = 0$.

4.23. Використати оптимальну властивість умовного сподівання для випадку лінійних функцій від ξ та η.

4.25. Знайти $\mathbf{E}\xi = 1$, $\mathbf{E}\xi\eta = \mathbf{E}\eta$, та застосувати нерівність Йенсена.

4.26. $\zeta = \xi + \eta$.

5.1. Твердження випливає з теореми Колмогорова про один ряд.

5.2. Оберіть величини ξ_n такі, що $\mathbf{P}(\xi_n = 2^n) = \mathbf{P}(\xi_n = -2^n) = n^{-2}$, $\mathbf{P}(\xi_n = 0) = 1 - 2/n^2$. Зауважте, що ряд з ξ_n розбіжний лише коли випадкові події $\{\xi_n \ne 0\}$ трапляються нескінченно часто, ймовірність чого за лемою Бореля-Кантелі рівна нулю. В той же час величини очевидно необмежені, та ряд з дисперсій розбіжний.

5.3. (а) Позначимо $S_{nk} = \sum_{j=n}^{n+k} \xi_j$. Тоді ряд збіжний в середньому квадратичному тоді і лише тоді, коли до нуля прямує послідовність: $\mathbf{E}|S_{nk}|^2$, при $n, k \to \infty$. Скориставшись незалежністю, маємо: $\mathbf{E}|S_{nk}|^2 = \sum_{j=n}^{n+k} \mathbf{E}\xi_j^2 + \sum_{i \neq j} \mathbf{E}\xi_i\xi_j = \sum_{j=n}^{n+k} \mathbf{E}\xi_j^2 + \sum_{i \neq j} \mathbf{E}\xi_i \mathbf{E}\xi_j = \sum_{j=n}^{n+k}(\mathbf{E}\xi_j^2 - (\mathbf{E}\xi_j)^2) + \sum_{i \neq j} E\xi_i E\xi_j + \sum_{j=n}^{n+k}(\mathbf{E}\xi_j)^2 = \sum_{j=n}^{n+k} \mathbf{D}\xi_j + \left(\sum_{j=n}^{n+k} \mathbf{E}\xi_j\right)^2$, що прямує до нуля тоді і лише тоді коли обидва ряди $\sum \mathbf{D}\xi_j$ та $\sum \mathbf{E}\xi_j$ збіжні.

(б) Випливає з теореми про два ряди.

5.4. Скористатися лемою Бореля-Кантелі, та показати, що $\mathbf{P}(\xi_n \geq \varepsilon_n$, н.ч.$) = 0$.

5.5. За лемою Бореля-Кантелі, показати, що $\mathbf{P}(\xi_n \neq 0,$н.ч.$) = 0$.

5.6. Для доведення достатності скористайтесь теоремою про два ряди. Для необхідності див. 5.15.

5.7. (а) Позначимо $A_{nm} = \sum_{k=n}^{m} |\xi_k|/k$. Тоді

$$\mathbf{E}A_{nm} \geq \mathbf{E}[A_{nm} 1\!\!1_{A_{nm} > \varepsilon}] \geq \varepsilon \mathbf{P}(A_{nm} > \varepsilon).$$

(б) Скористатися лемою про критерій фундаментальності майже напевно.

5.8. Як і в доведенні нерівності Колмогорова позначимо:
$A = \{\max_{1 \leq k \leq n} S_k \geq \varepsilon\}$, $A_k = \{S_1 < \varepsilon, \ldots, S_{k-1} < \varepsilon, S_k \geq \varepsilon\}$. Тоді:
$b\mathbf{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} b\mathbf{P}(A_k) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(S_n - S_k \geq a)\mathbf{P}(A_k) =$
$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(S_n - S_k \geq a, A_k) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(S_n \geq a + \varepsilon, A_k) =$
$\mathbf{P}(S_n \geq a + \varepsilon)$. Тут ми скористалися тим фактом, що A_k залежить лише від $\xi_1, \ldots, \xi_k$, а $S_n - S_k$ лише від $\xi_{k+1}, \ldots, \xi_n$, а отже ці величини незалежні.

5.9. $\cap_{k \geq 1} \cup_{N \geq 1} \cap_{n \geq N, m \geq N} \{\omega : |S_n - S_m| < 1/k\}$, де $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$.

5.10. $\mathbf{P}(\max_{k \leq n} S_k \geq \varepsilon) = 1/2\mathbf{P}(\max_{k \leq n} |S_k| \geq \varepsilon)$. Див. 1.12.26, 1.20.7.

5.11. В силу збіжності за мірою, маємо, для довільного $k > 0$, існує таке n_k, що для всіх $n \geq n_k$: $\mathbf{P}(|\xi_n| > 2^{-k}) < 2^{-k}$. Визначимо c_n наступним чином: $c_n = 1$ якщо $n \in \{n_k, k \geq 0\}$, і $c_n = 0$ інакше. Ясно, що ряд з c_n розбіжний. Але $\sum_{j=1}^{\infty} c_n \xi_n = \sum_{k \geq 0} \xi_{n_k}$. Далі за лемою Бореля-Кантелі маємо, що $\mathbf{P}(\xi_{n_k} > 2^{-k}\text{ н.ч.}) = 0$, а отже для всіх k, окрім скінченого числа, $\xi_{n_k} < 2^{-k}$. Отже ряд збіжний.

5.12. Позначимо $T_k = \sum_{i=1}^k \xi_i/a_i$, $A_k = \{|T_1| < 1, ..., |T_k| \geq 1\}$. Як у доведенні нерівностей Колмогорова, виводимо, що $\mathbf{P}(\max_{k\leq n}|T_k| \geq 1) \leq \mathbf{E}T_n^2$. Оскільки

$$|S_k| = \left|a_k T_k - \sum_{i=1}^{k-1} T_i(a_{i+1} - a_i)\right| \leq (2a_k - a_1)\max_{i\leq n}|T_i|,$$

отримуємо шукане.

5.13. Позначимо $\zeta_n = \sum_{k=1}^n |\xi_k| \geq 0$. Величини ζ_n інтегровні та монотонні. Позначимо $\zeta = \lim_{n\to\infty}\zeta_n$, і нехай $A = \{\zeta = +\infty\}$. Тоді: $\mathbf{E}[\zeta] = \mathbf{E}[\lim_{n\to\infty}\zeta_n] = \lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\zeta_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \mathbf{E}|\xi_k| < \infty$ (тут ми скористалися теоремою Лебега про монотонну збіжність), а отже $\mathbf{P}(A) = 0$, таким чином ряд з $|\xi_n|$ збігається. А отже і ряд з ξ_n теж збіжний.

5.14. Кожен з трьох рядів Колмогорова при $c = 1$ не перевищує ряду $2\sum_{n\geq 1}\mathbf{E}\xi_n/(1+\xi_n)$.

5.15. Достатність випливає з теореми про один ряд. Для доведення необхідності розглянути функції розподілу $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$. Якщо S_n збіжна майже напевно, то вона збіжна і слабко. Отримати протиріччя (оскільки функції розподілу S_n поточково прямують до $1/2$ в кожній фіксованій точці, при $n \to \infty$).

5.16. Скористатись законом 0 та 1 Колмогорова.

5.17. Див. задачу 1.21.47.

5.18. Доведення аналогічне задачі 5.14.

5.19. Див. доведення теореми Колмогорова про посилений закон великих чисел.

5.20. Застосувати критерій фундаментальності майже напевне.

5.21. Вказані числові ряди є лінійними неперервними функціоналами у середньому квадратичному, тому збігаються. Навпаки, їх збіжність еквівалентна фундаментальності сум $\sum_{k=1}^n \xi_k$ у середньому квадратичному.

5.22. Врахувати, що збіжність ряду з незалежними доданками є залишковою подією.

5.23. Скористатись другою нерівністю Колмогорова з теореми Колмогорова про три ряди у частині необхідності.

5.24. Порахувати характеристичні функції частинних сум.

5.25. Останні два ряди в умовах теореми Колмогорова містять однакові доданки.

5.26. $g(x) = \sum_{n\geq 1} |x|^n \, 1\!\!\mathrm{I}_{|x|\in[1/(n+1),1/n))}$.

5.27. Вивести рекурентне рівняння для характеристичних функцій частинних сум.

6.1. Скористатися співвідношенням

$$\mathbf{P}(\xi_n > t) \sim (\sqrt{2\pi}t)^{-1}\exp(-t^2/2), \quad t \to \infty,$$

лемою Бореля - Кантеллі та включеннями

$$\left\{\varlimsup_{n\to\infty} \eta_n > \varepsilon\right\} \subset \varlimsup_{n\to\infty}\{\eta_n > \varepsilon\}, \quad \varlimsup_{n\to\infty}\{\eta_n \geq \varepsilon\} \subset \left\{\varlimsup_{n\to\infty} \eta_n \geq \varepsilon\right\}.$$

(а) Розглянути послідовність подій $A_n = \{\xi_n > c\sqrt{\ln n}\}$, тоді $\mathbf{P}(A_n) \sim \frac{n^{-c^2/2}}{c\sqrt{2\pi \ln n}}$, $\sum \mathbf{P}(A_n) < \infty$ при достатньо великих c. (б) Розглянути при $0 < c < \sqrt{2}$ події $B_n = \{|\xi_n| \geq c\sqrt{\ln n}\}$. (в) Розглянути $C_n = \{\xi_n > c\sqrt{2\ln n}\}$ при $c > 1$ і при $0 < c < 1$.

6.2. Використати закон 0 та 1 Колмогорова і довести за допомогою центральної граничної теореми, що $\mathbf{P}\left(\varlimsup_{n\to\infty} S_n/\sqrt{n} = \infty\right) > 0$.

6.3. Користуючись означенням інваріантної множини, показати, що для довільної $B \in \mathfrak{I}(\mathbb{R}^\infty)$ і для будь-якого $n \geq 1$ має місце співвідношення $B = \{x \in \mathbb{R}^\infty \mid (x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots) \in B\} = \mathbb{R}^n \times B$.

6.4. Довести, що інваріантні події належать залишковій сигма-алгебрі (див. 6.3).

6.5. Для довільного $s \in (0,1)$ зобразити $a^{(-1)}([0,s)) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{s+n}, \frac{1}{n}]$, звідки вивести, що $\mu(a^{(-1)}([0,s))) = \mu([0,s))$. Узагальнити цю властивість на випадок довільної борелєвої множини $A \in \mathfrak{B}((0,1])$, тобто $\mu(a^{(-1)}(A)) = \mu(A)$. Для послідовності $\xi(x) = (\xi_n(x), n \geq 1)$ розглянути події $A_0 = \{\xi \in B\}$ та $A_1 = \{\theta\xi \in B\}$ (де θ — оператор зсуву) і, показавши, що $A_1 = a^{(-1)}(A_0)$, встановити рівність $\mu(A_0) = \mu(A_1)$.

6.6. Поширити дану збіжність спочатку на клас циліндричних множин, а потім на всі $B, C \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^\infty)$, тобто

$$\mathbf{P}(\xi \in B, (\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \ldots) \in C) \to \mathbf{P}(\xi \in B)\mathbf{P}(\xi \in C), \quad n \to \infty.$$

Вивести звідси для $C \in \mathfrak{I}(\mathbb{R}^\infty)$ рівність

$$\mathbf{P}(\xi \in B \cap C) = \mathbf{P}(\xi \in B)\mathbf{P}(\xi \in C),$$

після чого підставити $B = C$.

6.7. Довести, що $\mathbf{P}(|\xi_1 - \xi_2| \ge t - |m|) \ge \mathbf{P}(|\xi_1 - \xi_2 + m| \ge t) \ge \mathbf{P}(\xi_1 \ge t, \xi_2 < m) + \mathbf{P}(\xi_1 \le -t, \xi_2 > m) = \frac{1}{2}\mathbf{P}(|\xi_1| \ge t)$.

6.8. Зобразити ліву частину нерівності у вигляді

$$\mathbf{P}\left(\max_{1 \le k \le n} S_k \ge r\right) = \mathbf{P}(S_n \ge r) + \sum_{m<r} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(\{S_n = m\} \cap A_k),$$

де $A_k = \{S_1 \ne r, \ldots, S_{k-1} \ne r, S_k = r\}$. Враховуючи незалежність подій A_k і $\{S_n - S_k = x\}$ та симетричність розподілу, встановити, що

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\{S_n = m\} \cap A_k) = \mathbf{P}(\{S_n - S_k = m - r\} \cap A_k) = \\ = \mathbf{P}(\{\xi_{k+1} + \ldots + \xi_n = m - r\})\mathbf{P}(A_k) = \\ \mathbf{P}(\{\xi_{k+1} + \ldots + \xi_n = r - m\})\mathbf{P}(A_k) = \\ = \mathbf{P}(\{S_n - S_k = r - m\} \cap A_k) = \mathbf{P}(\{S_n = 2r - m\} \cap A_k).\end{aligned}$$

За допомогою заміни $l = 2r - m$ показати, що

$$\sum_{m<r} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(\{S_n = 2r - m\} \cap A_k) = \sum_{l>r} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(\{S_n = l\} \cap A_k) = \mathbf{P}(S_n > r).$$

6.9. Див. 1.19.20 (а).

6.10. Позначимо $\zeta = \sup_{n \ge 1} |\xi_n / n|$. Тоді $\mathbf{P}(\zeta \le m) = \prod_{n \ge 1} \mathbf{P}(|\xi_n| \le nm)$, причому збіжність останнього добутку при кожному m еквівалентна скінченності ζ м.н. Внаслідок еквівалентності $\ln(1 - x) \sim -x$, $x \to 0$, маємо (див.1.12.2):

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\zeta \sim \textstyle\sum_{m \ge 1} \mathbf{P}(\zeta \ge m) \sim \sum_{m \ge 1} \sum_{n \ge 1} \mathbf{P}(|\xi_1| \ge nm) \sim \\ \sim \textstyle\sum_{m \ge 1} \sum_{k \ge mn} \mathbf{P}(k \le |\xi_1| < k + 1) = \\ = \textstyle\sum_{k \ge 1} \mathbf{P}(k \le |\xi_1| < k + 1) k \ln^+ k \sim \mathbf{E} |\xi_1| \ln^+ |\xi_1| .\end{aligned}$$

6.11. Розглянемо події $A_n = \{\xi_n > c \ln n / \ln\ln n\}$. За лемою Бореля - Кантеллі $\sum \mathbf{P}(A_n) < \infty$ при $c > 1$ і $\sum \mathbf{P}(A_n) = \infty$ при $0 < c < 1$.

6.12. Див. 1.18.24, 1.19.26.

6.13. Довести, що послідовність $(\eta_n, n \geq 1)$ є строго стаціонарною й ергодичною.

6.14. Довести, що $\mathbf{E}(\eta \mid I[\xi, \mathbf{P}]) = \mathbf{E}(\eta \mid I[\xi])$ м.н.

6.15. Показати, що $\mathfrak{I}[\xi] \subset \overline{\lim}_{n\to\infty} \sigma[\xi_n]$.

6.16. Кожна інваріантна величина належить замкненій лінійній оболонці (ξ_n) у середньому квадратичному, та одночасно не корельована з кожною ξ_n .

6.17. Розглянути послідовність $\xi_n = \eta$, де η — результат випробування Бернуллі.

6.18. Використати нерівності $\mathbf{P}(S_n^* < 0) \leq 1/2$, $\mathbf{P}(S_n^* > 0) \leq 1/2$.

6.19. Довести слабку збіжність нормованих сум до нуля.

6.20. Див. 6.3.

6.21. Одиничний зсув для (ξ_n) не є таким для (ξ_{2n}).

6.22. Довести, що $\mathbf{P}(\underline{\lim}\xi_n = \overline{\lim}\xi_n \in \mathbb{R}) = 1$.

6.23. Зобразити $\nu_n(B)$ у вигляді суми.

7.1. Аналогічно 1.21.14.

7.2. Внаслідок лінійності та локальності умов теореми Бохнера-Хінчіна.

7.3. Див. 1.21.17.

7.4. У похідній подати $x \exp(-x^2/2)$ як повний диференціал.

7.5. Див. 1.21.33.

7.6. Ліва частина є кратним інтегралом, тому повторний інтеграл у правій частині звести до кратного та скористатись однозначністю відповідності між характеристичними функціями та функціями розподілу.

7.7. Див. 1.21.1.

7.8. Внаслідок абсолютної збіжності ряду Тейлора,

$$\varphi_\xi(t) = \textstyle\sum_{n\geq 0} \mathbf{E}\xi^n (it)^n / n! = \sum_{n \geq 0} (it)^n C_{n+k-1}^{k-1} = (1 - it)^{-k}.$$

7.9. Див. 1.21.12.

7.10. Див. 1.21.13.
7.11. Див. 1.21.16.
7.12. Див. 1.21.18.
7.13. Див. 1.21.7.
7.14. Див. 1.21.2.
7.15. Див. 1.21.19.
7.16. Див. 1.21.20.
7.17. Див. 1.21.21.
7.18. Використати теорему Бохнера–Хінчина.
7.19. Див. 1.21.6.
7.20. Див. 1.21.22.
7.21. Див. 1.21.23.
7.22. Застосувати нерівність $|\exp(itx) - 1| \le c_\alpha \, |tx|^\alpha$.
7.23. Див. 1.21.26.
7.24. Див. 1.21.27.
7.25. Див. 1.21.28.
7.26. Див. 1.21.4.
7.27. Див. 1.21.29.
7.28. Див. 1.21.30.
7.29. Див. 1.21.31.
7.30. Застосувати нерівність $|\varphi(t) - 1 - it\mathbf{E}\xi| \le t^2\mathbf{E}\xi^2/2$.
7.31. Див. 1.21.34.
7.32. Див. 1.21.35.
7.33. Див. 1.21.36.
7.35. Див. 1.21.37.
7.38. Див. 1.21.3.
7.39. Див. 1.21.10.

7.40 (а) Див. 1.21.14. (б) Довести збіжність характеристичних функцій. (в) Використати 7.41 і попередній пункт.

7.41. Використати теорему про формулу обертання для характеристичної функції.

7.42. З означення характеристичної функції вивести співвідношення $\varepsilon \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} \varphi(t)dt = 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x/\varepsilon)}{x/\varepsilon} dF(x)$. Оцінити інтеграл у правій частині за допомогою нерівності $\left|\frac{\sin(x/\varepsilon)}{x/\varepsilon}\right| \leq 1$ на проміжку $[-2\varepsilon, 2\varepsilon]$, та за допомогою нерівності $\left|\frac{\sin(x/\varepsilon)}{x/\varepsilon}\right| \leq \frac{1}{|x/\varepsilon|} \leq \frac{1}{2}$ — на $\mathbb{R} \setminus [-2\varepsilon, 2\varepsilon]$.

7.43. (а) Для довільного $h > 0$

$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-itx}\varphi(t)dt = \int_{|y|<h} \frac{\sin(Ty)}{Ty} d_yF(y+x) + \int_{|y|\geq h} \frac{\sin(Ty)}{Ty} d_yF(y+x)$ (див. вказівку до 7.42). Покажіть, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існують T_0 і $h_0 > h_1 > 0$ такі, що

$$\int_{|y|\geq h_0} \frac{\sin(T_0 y)}{T_0 y} d_yF(y+x) \leq \varepsilon, \quad \int_{h_0\leq|y|\leq h_1} \frac{\sin(T_0 y)}{T_0 y} d_yF(y+x) \leq 2\varepsilon,$$
$$\left|\int_{|y|<h_1} \frac{\sin(T_0 y)}{T_0 y} d_yF(y+x) - F(x+0) + F(x)\right| \leq 2\varepsilon.$$

(б) Якщо ξ і η — незалежні випадкові величини з характеристичною функцією φ, то величина $\xi - \eta$ має характеристичну функцію $|\varphi(t)|^2$ і функцію розподілу $G(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x+t)dF(t)$. Обидві частини рівності дорівнюють $G(0+0) - G(0)$ (див. попередній пункт).

7.44. Підставити означення φ у ліву частину.

7.45. Використати 7.42.

7.46. Використати 1.21.26 і формулу обертання.

7.47. Скористатися формулою $|x| = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2} dt$.

7.48. Див. 1.21.56.

7.49. Див. 1.21.58.

8.1. Обрати випадкові величини з розподілом $\mathbf{P}(\xi_n = \pm 1) = 1/2$ та довести, що при $n = 2k$ для таких величин має місце зображення: $F_n(0) - \Phi(0) = (2\pi n)^{-1/2} + o(n^{-1/2})$, $n \to \infty$.

8.2. Див. 1.21.39.

8.3. Див. 1.21.41.

8.4. Див. 1.21.44.

8.5. Див. 1.21.47.

8.6. Див. 1.21.25.

8.7. Див. 1.21.38.

8.8. Див. [6].

8.9. Див. 1.21.40.

8.10. Див. 1.21.5.

8.11. Нехай $\varkappa[0,1]$ клас випадкових величин із значеннями у $[0,1]$. Розподіл величини $\xi \in \varkappa[0,1]$ однозначно визначається її послідовністю Фурьє-Стілтьєса $c_\xi(k) = \mathbf{E}\exp(2\pi ik\xi), k \in \mathbb{Z}_+$. Для цієї послідовності існує аналог теореми Леві про критерій слабкої збіжності. Оскільки $c_\eta(k) = 0$ для $\eta \simeq U(0,1), k \neq 0$, досить показати, що $c_{S_n}(k) = (c_{\xi_1}(k))^n \to 0, n \to \infty, k \neq 0$.

8.12. Див. 1.21.42.

8.13. Див. 1.21.43.

8.14. Див. 1.21.45.

8.15. Див. 1.21.46.

8.16. Див. 1.21.48.

9.1. (1) $d = 1$: $\mathbf{P}(S_{2n} = 0) = C_{2n}^n 2^{-2n} \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$, $\sum \mathbf{P}(S_{2n} = 0) = \infty$.

(2) $d = 2$: поворотом $\mathbb{Z}^2$ на 45° показати, що кожен стрибок блукання складається зі стрибків двох незалежних одновимірних блукань, звідки $\mathbf{P}(S_{2n} = 0) \simeq \frac{1}{\pi n}$.

(3) $d = 3$: обчислити

$$\mathbf{P}(S_{2n} = 0) = 2^{-2n} C_{2n}^n \sum_{\substack{j,k \geq 0 \\ j+k \leq n}} \left(3^{-n} \frac{n!}{j!k!(n-j-k)!}\right)^2,$$

та, враховуючи рівність $\sum_{j,k \geq 0,\ j+k \leq n} 3^{-n} \frac{n!}{j!k!(n-j-k)!} = 1$, оцінити

$$\mathbf{P}(S_{2n} = 0) \leq 2^{-2n} C_{2n}^n \max_{j,k \geq 0,\ j+k \leq n} \left(3^{-n} \frac{n!}{j!k!(n-j-k)!}\right) \leq cn^{-3/2}.$$

(4) $d \geq 4$: блукання є транзієнтним, оскільки його перші три координати є транзієнтними.

9.2. Розглянути перший стрибок і решту блукання. Системи рівнянь мають вигляд: (а) $p_x = qp_{x-1} + pp_{x+1}$, $a < x < b$, де $p_a = 0$, $p_b = 1$; (б) $m_x = qm_{x-1} + pm_{x+1} + 1$, $a < x < b$, де $m_a = m_b = 0$.

9.3. У випадку $\alpha > 2$ довести, що $\mathbf{E}|\xi_1| < \infty$, і скористатися теоремою про рекурентність блукання з інтегровними стрибками. У випадку $\alpha \in (1,2)$ довести, що $\lim_{t \to 0} \frac{1-\varphi(t)}{|t|^{\alpha-1}} = c\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos x}{|x|^\alpha} dx < \infty$, і скористатися критерієм рекурентності блукання через характеристичну функцію.

9.4. $\mathbf{P}(S_{3k}=0)=C_{3k}^{k}\left(\frac{1}{3}\right)^{k}\left(\frac{2}{3}\right)^{2k}\sim\sqrt{\frac{3}{4\pi k}}$.

9.5. Врахувати, що $1-\exp(-|t|^{\alpha})\sim|t|^{\alpha}$, $t\to 0$.

9.6. Див. теорему про критерій рекурентності блукання через характеристичну функцію.

9.7. Шукані ймовірності p_x досягнення точки x утворюють спадну послідовність, яка задовольняє систему рівнянь $p_x=pp_{x-1}+qp_{x+1}$, $x\geq 1$, де $p_0=1$ (див. вказівку до 9.2). $\mathbf{P}\left(\sup_{n\geq 0}S_n=x\right)=p_x-p_{x+1}=\left(\frac{p}{q}\right)^{x}\left(1-\frac{p}{q}\right)$.

9.8. Скористайтесь тим, що випадкові вектори $(S_k, k=\overline{1,n})$ та $(S_n-S_{n-k}, k=\overline{1,n})$ мають однакові сумісні функції розподілу.

9.9. Скористатися критерієм рекурентності блукання через характеристичну функцію, яка для симетричного розподілу є дійсною (див. 1.21.6).

9.10 S_n — рекурентне $\Leftrightarrow\sum\mathbf{P}(S_n=0)=\infty\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\int_{(-\delta,\delta)^d}\operatorname{Re}\frac{1}{1-\varphi(t)}dt=\infty$.

9.11. Розглянути двовимірне блукання $(S_n^1, S_n^2, n\geq 0)$.

9.12. Використати властивість відсутності післядії для показникового розподілу та розподіл Ерланга.

9.13. За законом $0-1$ Колмогорова ймовірності вказаних подій дорівнюють 0 або 1. Тому від супротивного обидві вони нульові, тобто послідовність (S_n) збігається майже напевне. Звідси $S_n/n\to^{\mathbf{P}1}0, n\to\infty$, що за критерієм Колмогорова посиленого закону великих чисел суперечить не інтегрованості ξ_1.

9.14. Довести спочатку слабку збіжність до нуля.

9.15. Доведення використовує тотожність

$$\mathbf{E}z^{S_\nu}1\!\!1_{\nu=n}=\mathbf{E}z^{S_n}\mathbf{E}1\!\!1_{\nu=n}=\varphi_{\xi_1}^{n}(z)\mathbf{P}(\nu=n).$$

9.16. $\varphi_{S_n}(z)=\prod_{k=1}^{n}(1-p_k+p_kz)$.

9.17. $\{\nu(t)\geq n\}=\{S_n<t\}$.

9.18. Див.9.8.

9.19. Вказані екстремальні події є залишковими, та одна з них або обидві мають додатну імовірність.

9.20. Скористатись другим критерієм рекурентності через характеристичну функцію.

9.21. Обчислити ймовірності повернення через характеристичну функцію стрибка.

9.22. Знайти ймовірності повернення у 0 для блукань $(S_{kn+l}, l = \overline{0, k-1})$ через такі ж ймовірності для (S_{kn}).

9.23. Відповідні характеристичні функції є дійсними, тому можна скористатись другим критерієм рекурентності.

10.1. Записати характеристичну функцію у вигляді $\varphi(t) = (\varphi_n(t))^n$, де $\varphi_n(t)$, $n \geq 1$ — характеристичні функції:

(а) $\varphi(t) = (1-it/\lambda)^{-\alpha}$, $\varphi_n(t) = (1-it/\lambda)^{-\alpha/n}$ — характеристична функція розподілу $\Gamma(\lambda, \alpha/n)$ (див. 1.21.27).

(б) $\varphi(t) = \exp(\lambda(e^{it}-1))$, $\varphi_n(t) = \exp(\frac{\lambda}{n}(e^{it}-1))$ — характеристична функція розподілу $\Pi(\frac{\lambda}{n})$.

(в) $\varphi(t) = \exp(-|t|)$ (див. 1.21.25), $\varphi_n(t) = \exp(-|t|/n)$ — характеристична функція розподілу зі щільністю $n(\pi(1+n^2x^2))^{-1}$.

10.2. Скористайтеся означенням нескінченно подільної характеристичної функції.

10.3. За умовою, $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$, та $\lim_{k\to\infty} \varphi_n^{(k)}(t) = \varphi_n(t)$, де $\varphi_n^{(k)}(t)$ — послідовність характеристичних функцій. Тоді функція $\varphi^{(k)}(t) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n^{(k)}(t)$ теж є характеристичною (за теоремою Леві про критерій слабкої збіжності), і $\varphi(t) = \lim\limits_{k\to\infty} (\varphi^{(k)}(t))^k$.

10.4. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — незалежні випадкові величини з розподілами Пуассона вигляду $\mathbf{P}(\xi_m = a_m + b_m k) = \frac{\lambda_m^k}{k!} e^{-\lambda_m}$. Показати, що характеристична функція суми $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ дорівнює

$$\varphi_{S_n}(t) = \exp\left(it \sum_{m=1}^{n} a_m + \sum_{m=1}^{n} \lambda_m (e^{itb_m} - 1)\right).$$

Порівнюючи цей вираз із зображенням Леві - Хінчина, встановити, що характеристичну функцію нескінченно подільної випадкової величини можна зобразити у вигляді границі $\lim_{n\to\infty} \varphi_{S_n}(t)$.

10.5. Розклавши характеристичну функцію в добуток

$$\varphi_{\xi_n}(t) = (1-it)^{-1}(1+it)^{-1},$$

показати, що ξ_n можна подати у вигляді різниці двох незалежних випадкових величин, які мають розподіл $\mathrm{Exp}(1)$ (а отже є нескінченно подільними — див. 10.1 (а)). Звідси вивести нескінченну подільність ξ_n, після чого скористатися задачами 10.2, 10.3 для доведення нескінченної подільності ξ. Збіжність ряду — наслідок теореми про один ряд.

10.6. Розглянути незалежні симетричні випадкові величини (ξ_j) такі, що $\mathbf{P}(|\xi_j| > x) = x^{-\alpha}/2(\alpha - 1)$, $x \geq 1$, та довести, що характеристична функція нормованих сум $(\xi_1 + \ldots + \xi_n)n^{-1/\alpha}$ збігається при $n \to \infty$ до функції $\varphi(t)$.

10.7. Перший спосіб — використати зображення Леві - Хінчина. Другий спосіб: нехай $\varphi(t) = \lim_{n\to\infty}(\varphi_n(t))^n$ — нескінченно подільна характеристична функція. Тоді $|\varphi_n(t)|^2$ — теж характеристичні функції (див. 1.21.33), а границя $\varphi_0(t) = \lim_{n\to\infty} |\varphi_n(t)|^2 = \lim_{n\to\infty} |\varphi(t)|^{2/n}$ може набувати лише двох значень: 0 і 1. Доведіть, що $\varphi_0(t)$ — характеристична функція, звідки отримайте, що $\varphi_0 \equiv 1$.

10.8. Використайте зображення Леві - Хінчина. Відповідні канонічні міри дорівнюють: (а) $\mu(A) = \sigma^2 1\!\!\mathrm{I}_{0\in A}$ для розподілу $N(\mu, \sigma^2)$; (б) $\mu(A) = \lambda 1\!\!\mathrm{I}_{1\in A}$ для розподілу $\Pi(\lambda)$.

10.9. Доведіть більш загальний факт: якщо ξ — обмежена м. н. нескінченно подільна випадкова величина, то $\mathbf{D}\xi = 0$, тобто ξ є сталою майже напевне. Для випадку рівномірного розподілу можна також скористатися задачею 10.7.

10.10. Врахувати, що характеристична функція величини S_ν має вигляд $G_\nu(\varphi(t))$, де $G_\nu(z)$ — генератриса ν, $\varphi(t)$ — характеристична функція ξ_1, а нескінченна подільність ν еквівалентна існуванню послідовності генератрис G_n такої, що $(G_n(z))^n \to G_\nu(z)$, $n \to \infty$.

10.11. Використати зображення Леві-Хінчіна, для початку зі скінченою мірою μ.

10.12. $(1 - \ln \varphi(t))^{-1} = \lim_{n\to\infty} \psi_n(t)$, де

$$\psi_n(t) = \left(n + 1 - n(\varphi(t))^{1/n}\right)^{-1}.$$

З нескінченної подільності $\varphi(t)$ вивести, що $(\varphi(t))^{1/n}$ є характеристичною функцією для будь-якого $n \geq 1$. Далі довести (наприклад, використовуючи 10.13 з $p(s) = (n+1-ns)^{-1}$), що $\psi_n(t)$ є нескінченно подільною характеристичною функцією і застосувати 10.3.

10.13. Для довільного $c > 0$ функція $\exp(c(\varphi(t)-1))$ є нескінченно подільною характеристичною (використати 10.10 з $\nu \simeq \Pi(c)$). Розкласти $p(\varphi(t))$ в нескінченний добуток

$$p(\varphi(t)) = \prod_{n=1}^{\infty} \exp(c_n(\varphi^n(t)-1))$$

і скористатися задачами 10.2, 10.3.

10.14. (а) Для довільних n і $a_1, \ldots, a_n > 0$ існують $c_n \in \mathbb{R}$ і $d_n > 0$ такі, що $\varphi(a_1 t)\varphi(a_2 t)\ldots\varphi(a_n t) = \exp(-itc_n)\varphi(d_n t)$. Поклавши $a_1 = \ldots = a_n = 1$, одержимо $\varphi^n(t) = \exp(-itc_n)\varphi(d_n t)$. Тоді $\varphi(t) = \left(\exp\left(\frac{itc_n}{nd_n}\right)\varphi\left(\frac{t}{d_n}\right)\right)^n$.

10.15. З доведення зображення Леві-Хінчіна вивести, що канонічна міра μ зосереджена на $\mathfrak{B}(\mathbb{R}_+)$. Довести твердження спочатку у припущенні, що ця міра скінченна та її носій відділений від нуля.

10.16. Скористатись зображенням Леві-Хінчина.

10.17. Знайти характеристичну функцію $\xi\eta$.

10.18. Підставити у праву частину таку тотожність для дійсних x : $(\exp(itx)-1)x^{-1} = i\int_0^t \exp(isx)ds$.

10.19. Див. 10.2, 10.16 та рівність $|\varphi(t)| = (\varphi(t)\varphi(-t))^{1/2}$.

10.20. Ця функція задовольняє зображення Леві-Хінчіна з мірою μ, що породжується функцією розподілу для характеристичної функції φ.

10.21. Знайти розклад по степенях t функції $\ln(1-p^{-\sigma-it})$.

Розділ 3

Математична статистика

Вступ: теми розділу та їх призначення

1. Статистичний простір, вибірка. Статистики і оцінки. Оволодіння основами курсу: статистичний простір, вибірка, кратна вибірка, функція вірогідності. Поняття статистики як функції від спостережень та статистичної оцінки. Вивчення властивостей оцінок: незміщеності, консистентності, асимптотичної нормальності.

2. Оцінювання ймовірності успіху у схемі Бернуллі. Оволодіння методами оцінювання ймовірності успіху та їх застосувань, властивостями відносної частоти.

3. Емпірична функція розподілу. Варіаційний ряд. Квантилі. Вивчення емпіричної функції розподілу, її властивостей. Знання порядкових статистик, варіаційного ряду, вектора рангів, теоретичних та емпіричних квантилей.

4. Вибіркові моменти. Метод моментів. Оволодіння поняттям вибіркових моментів, вибіркових середнього та дисперсії, їх властивостей. Оцінювання параметрів розподілу методом моментів. Вміння застосувань методу моментів.

5. Незміщені оцінки. Нерівність Крамера – Рао. Вивчення незміщених оцінок з мінімальною дисперсією, кількості інформації за Фішером, функції впливу. Нерівність Крамера-Рао. Ефективність та асимптотична ефективність. Вміння оцінювання параметрів у схемі Бернуллі, нормального розподілу.

6. Достатні статистики та оптимальність. Оволодіння поняттям достатніх статистик. Достатність та оптимальність.

7-8. Оцінки максимальної вірогідності. Ознайомлення з рівнянням максимальної вірогідності, співвідношення з оптимальними та ефективними оцінками. Оцінки максимальної вірогідності параметрів нормального розподілу, логнормального розподілу. Властивості оцінок максимальної вірогідності. Приклади.

9. Інтервальні оцінки параметрів нормальних спостережень. Вивчення сумісного розподілу для вибіркових середнього та дисперсії нормальної випадкової величини. Статистика Стьюдента. Інтервальні оцінки параметрів нормальної вибірки.

10. Непараметричні критерії узгодженості, однорідності, незалежності. Постановка задач перевірки гіпотез, статистична гіпотеза та альтернатива, статистичний критерій, критична область. Похибки першого та другого роду, рівень та потужність критерію. Незміщений, консистентний критерій. Непараметричні критерії Колмогорова, Смірнова. Рангові критерії. Перевірка гіпотез про параметри нормальних спостережень.

11. Критерії хі-квадрат для поліноміальної схеми Бернуллі. Вивчення статистики хі-квадрат для поліноміальної схеми випробувань. Критерій хі-квадрат для простих гіпотез. Групування, гістограма. Критерії хі-квадрат для перевірки узгодженості з функцією розподілу.

12. Критерії хі-квадрат для складної гіпотези. Вивчення статистики хі-квадрат для складних гіпотез. Критерії хі-квадрат для перевірки узгодженості з параметричною функцією розподілу, перевірки однорідності, незалежності факторів.

13. Перевірка гіпотез про параметри нормальних спостережень. Застосування статистик хі-квадрат, Стьюдента, Фішера.

14. Найбільш потужні критерії відношення вірогідностей. Вивчення найбільш потужних критеріїв. Лема Неймана - Пірсона. Рандомізовані критерії. Рівномірно найбільш потужні критерії з монотонним відношенням вірогідностей. Приклади для нормальних виборок. Поняття про послідовний аналіз.

15. Метод найменших квадратів. Оволодіння методом найменших квадратів для лінійної регресії. Рівняння методу, розклад суми квадратів відхилень. Теорема Гауса-Маркова. Поліноміальна регресія.

16. Кореляційний та дисперсійний аналіз. Ознайомлення з кореляційним та дисперсійним аналізом статистичних спостережень.

17. Оптимальний прогноз для стаціонарних послідовностей. Вивчення гільбертового простору квадратично інтегровних величин. Спектральне зображення коваріаційної функції стаціонарної послідовності. Стохастичний інтеграл за мірою з ортогональними значеннями. Теорема Карунена. Спектральний розв'язок задачі оптимального лінійного прогнозу. Процеси авторегресії та рухомого середнього.

3.1. Статистичний простір, вибірка. Статистики і оцінки

Література: [1,с.319-327], [2,с.324-331]. Ауд: 1-6, сам: 7-12 .

1. Протягом року аналізуються повні дані щодо портфелю з n страхових полісів при невідомій ймовірності θ настання страхового випадку, у припущенні незалежності таких випадків для різних полісів. Побудувати відповідний статистичний простір, описати статистичну вибірку. Обчислити функцію вірогідності. Навести приклади оцінок.

2. Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – кратна вибірка з рівномірного розподілу $U(a, b)$, $a < b$. Розглядаються оцінки: $\hat\theta_1 = \min_{1\le j\le n} \xi_j$, $\hat\theta_2 = \max_{1\le j\le n} \xi_j$, $\hat\theta_3 = n^{-1}\sum_{i=1}^n \xi_i$, $\hat\theta_4 = (\xi_1 + \xi_n)/2$. Які з оцінок $\hat\theta_1, \hat\theta_2, \hat\theta_3, \hat\theta_4$ є (а) незміщеними; (б) консистентними; (в) асимптотично нормальними для одного з параметрів a, b або для $(a+b)/2$?

3. Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – кратна вибірка з показникового розподілу

зі щільністю розподілу $f(y,\theta) = \theta^{-1}\exp\left\{-\theta^{-1}y\right\}\mathbb{1}_{y>0}, \theta > 0$. Довести, що оцінка $\hat{\theta}_1 = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ є незміщеною та консистентною оцінкою параметра θ. Чи є оцінка $\hat{\theta}_2 = (\xi_1+\xi_n)/2$ (а) незміщеною; (б) консистентною; (в) асимптотично нормальною оцінкою параметра θ?

4. Нехай $\xi_1,\ldots,\xi_n$ – кратна вибірка з гама-розподілу $\Gamma(1,\alpha)$. Довести, що статистика $\sum_{j=1}^{k} c_{nkj}\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)^j$ є незміщеною оцінкою для α^k для деяких сталих c_{nkj} та знайти їх.

5. Припустимо, що $\widehat{\theta}$ - незміщена оцінка параметра θ і має дисперсію $\theta^2/10$. Обчислити середньоквадратичну похибку оцінки $k\widehat{\theta}$, де k – стала, і визначити значення k, для якого ця похибка є мінімальною.

6. Проведено n незалежних вимірювань відстані від Землі до Місяця, що грунтуються на даних обсерваторних обстежень. Дослідники приймають нормальну (Гаусівську) модель для похибок спостережень. Побудувати відповідний статистичний простір, описати статистичну вибірку. Обчислити функцію вірогідності. Навести приклади оцінок.

7. Нехай $\xi_1,\ldots,\xi_n$ – кратна вибірка з розподілу зі щільністю розподілу $f(y,\theta) = \exp\{\theta-y\}\mathbb{1}_{y>\theta}$. Чи є оцінка

$$\hat{\theta} = -\tfrac{1}{n} + \min\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}$$

(а) незміщеною; (б) консистентною; (в) асимптотично нормальною оцінкою параметра θ ? Дослідити граничну поведінку цієї оцінки.

8. Нехай $\xi_1,\ldots,\xi_n$ – кратна вибірка з розподілу Пуассона з параметром θ. Розглянемо оцінки

$$\hat{\theta}_1 = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\xi_i, \quad \hat{\theta}_2 = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2.$$

Чи є серед оцінок $\hat{\theta}_1$ та $\hat{\theta}_2$ (а) незміщені оцінки; (б) консистентні оцінки; (в) асимптотично нормальні оцінки параметра θ ?

9. Нехай $\xi_1,\ldots,\xi_n$ – кратна вибірка з рівномірного розподілу на інтервалі $(-\theta,\theta)$. Довести, що оцінка

$$\widehat{\theta} = \max(-\min_{1\le k\le n}\xi_k, \max_{1\le k\le n}\xi_k)(n+1)/n$$

є (а) незміщеною; (б) консистентною оцінкою параметра θ. Дослідити граничну поведінку цієї оцінки.

10. Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – вибірка з результатів послідовності n випробувань Бернуллі з імовірністю успіху θ. Довести, що статистика

$$U_{ij} = \xi_1 ... \xi_i (1 - \xi_{i+1}) ... (1 - \xi_{i+j})$$

є незміщеною оцінкою для функції $\theta^i (1-\theta)^j$ при $i + j \le n$.

11. Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – кратна вибірка з нормального розподілу $N(\mu, \sigma^2)$. Довести, що оцінка $\sum_{k=1}^n (\xi_k - n^{-1} \sum_{i=1}^n \xi_i)^2$ є незміщеною для значення $(n-1)\sigma^2$.

12. Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – кратна вибірка з нормального розподілу $N(\mu, \sigma^2)$, $\theta = (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Довести, що для деякої сталої c_n оцінка

$$\widehat{\sigma} = c_n \sqrt{\sum\nolimits_{k=1}^n \left(\xi_k - n^{-1} \sum\nolimits_{i=1}^n \xi_i\right)^2}$$

є незміщеною для σ. Знайти цю сталу.

13. Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – кратна вибірка з розподілу Парето зі щільністю $f(y, \theta) = b a^{-b} y^{-b-1} 1\!\!\mathrm{I}_{y > a}$, $\theta = (a, b) \in \mathbb{R}_+^2$. Знайти незміщені оцінки для функцій $\tau_1(\theta) = a^{-m}$, при $m \in \mathbb{Z}_+$, $\tau_2(\theta) = b$.

14. Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – кратна вибірка з гама-розподілу $\Gamma(\lambda, \alpha)$, з параметром $\theta = (\lambda, \alpha) \in \mathbb{R}_+^2$. Довести, що статистика $n^{-1} \sum_{i=1}^n \xi_i$ є (а) незміщеною; (б) консистентною; (в) асимптотично нормальною оцінкою параметричної функції α / λ.

15. Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – кратна вибірка з розподілу зі щільністю спостережень

$$f(y, \theta) = a^{-1} \exp\{-(y-b)/a\} 1\!\!\mathrm{I}_{y > b}, \quad \theta = (a, b) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}.$$

Довести, що статистики $T_1 = \min_{1 \le k \le n} \xi_k$ і $T_2 = \sum_{i=1}^n \xi_i - n T_1$ незалежні та мають показникові розподіли, а статистики $T_1 - T_2/n(n-1)$, $T_2/(n-1)$ є незміщеними для b, a. Дослідити їх асимптотику.

16. Нехай $X = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ – кратна вибірка з розподілу зі щільністю $f(y, \theta) = \exp\{\theta - y\} 1\!\!\mathrm{I}_{y > \theta}$, а статистика $\xi_{(1)} = \min_{1 \le k \le n} \xi_k$. Довести, що оцінка $\exp(\xi_{(1)} - c)(1 - 1/n) 1\!\!\mathrm{I}_{c > \xi_{(1)}} + 1\!\!\mathrm{I}_{c \le \xi_{(1)}}$ є незміщеною для функції $\tau(\theta) = \mathbf{P}_\theta(\xi_1 > c)$.

17. Нехай ξ_1, ξ_2, ξ_3 – кратна вибірка з рівномірного розподілу на інтервалі $(\theta - 1, \theta + 1)$. (а) Довести, що середнє за величиною з вибіркових значень (медіана), є незміщеною оцінкою для θ. (б) Для показникового розподілу з середнім θ така оцінка є зміщеною. (в) Знайти незміщені оцінки для θ, що основані на найменшому вибірковому значенні.

18. Нехай $\widehat{\theta}_n$ – довільна незміщена консистентна оцінка параметра θ, а подія A_n не залежить від $\widehat{\theta}_n$ і $\mathbf{P}_\theta(A_n) = 1/n$. Довести, що оцінка $\widetilde{\theta}_n = \widehat{\theta}_n 1\!\!\mathrm{I}_{\overline{A}_n} + n^2 1\!\!\mathrm{I}_{A_n}$ є консистентною, однак зміщена та асимптотично зміщена.

19. Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – кратна вибірка з двовимірними квадратично інтегровними спостереженнями $\xi_j = (\xi_{1j}, \xi_{2j})$. Довести, що вибіркова коваріація

$$\widehat{\rho}_n = \frac{1}{n-1} \sum\nolimits_{j=1}^{n} (\xi_{1j} - \widehat{\mu}_{1n})(\xi_{2j} - \widehat{\mu}_{2n})$$

є незміщеною оцінкою для коваріації $\mathrm{cov}(\xi_{11}, \xi_{21})$, де $\widehat{\mu}_{in}$ – вибіркове середнє для i-ї координати спостережень.

20. Нехай $X = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ – кратна вибірка з розподілом Бернуллі: $\mathbf{P}_\theta(\xi_1 = 1) = \theta = 1 - \mathbf{P}_\theta(\xi_1 = 0)$. Визначити клас параметричних функцій $\tau(\theta)$, для яких існують незміщені оцінки $T(X)$. Довести, що функції: $1/\theta$, та θ^m при $m > n$ не належать такому класу.

21. Для кратної вибірки $X = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ з рівномірного розподілу $U(0, \theta)$ довести, що оцінки $\widehat{\theta}_1 = (n+1)\xi_{(1)}$ та $\widehat{\theta}_2 = (1+1/n)\xi_{(n)}$ є незміщеними для θ. Яка з них є кращою ?

22. Побудувати незміщену оцінку характеристичної функції одного спостереження за кратною вибіркою.

23. Розглядається кратна вибірка з двовимірними спостереженнями. Знайти незміщену оцінку для коваріації координат спостереження.

24. Для кратної вибірки $X = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ з логістичного розподілу зі щільністю $f(x, \theta) = \exp(-x+\theta)(1+\exp(-x+\theta))^{-2}$ незміщеною та консистентною оцінкою параметра θ є вибіркове середнє.

3.2. Оцінювання ймовірності успіху у схемі Бернуллі

Література: [1,с.328-329], [2,с.331-334]. Ауд: 1-6, сам: 7-12.

1. У огляді, що виконаний поштовою компанією, з 200 клієнтів 172 вказали на задоволення часом доставки кореспонденції. Обчислити наближений 95-й відсотковий інтервал для теоретичної частоти задоволених клієнтів.

2. Випадкова вибірка розміру 200 обрана з великої групи моторних полісів. Частка полісів, для яких вимоги виникли протягом минулого року - 0.16. Обчислити наближений 95-відсотковий вірогідний інтервал для істинної частки θ для всіх полісів.

3. Обчислити 99%-й вірогідний інтервал для відсотка вимог певного типу, які повністю влагоджені протягом шести місяців, якщо відомо, що у випадковій вибірці з 100 вимог цього типу, точно 83 були повністю улагоджені протягом шести місяців.

4. Імовірність того, що вимога по певному типі поліса виникне у даному році, дорівнює 0.04. П'ятсот полісів відібрано навмання. Використати нормальне наближення, для обчислення ймовірності того, що більше ніж 30 з них призведе до вимоги протягом року.

5. Імовірність того, що інформація у індивідуальному записі бази даних компанії неправильна (наприклад, застаріла), дорівнює 0.13. Обчислити ймовірність того, що у випадковій вибірці з 200 записів не більше 20 містять неправильну інформацію.

6. Спостерігається послідовність з n випробувань Бернуллі з ймовірністю успіху θ та відносною частотою $\widehat{\theta}_n$. Довести, що

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta)/(\widehat{\theta}_n(1 - \widehat{\theta}_n))^{1/2} \to^{W} \zeta \simeq N(0,1), n \to \infty.$$

7. У опитуванні кожен індивідуум у випадковій вибірці 275 осіб з великої генеральної сукупності повідомляє, яку політичну партію він підтримує. Якщо 45% генеральної сукупності підтримує партію А, обчислити наближено імовірність того, що хоча б 116 з опитуваних підтримають А.

8. Великий портфель полісів містить частку $p \in (0,1)$ вимог останнього календарного року. Дослідник вивчає групу з 25 полісів, випадково обраних з портфеля. Використати апроксимацію Пуассона до біноміального розподілу, щоб обчислити наближено ймовірність того, що є принаймні 4 вимоги за останній рік, у кожному з двох випадків: $p = 0.1$ й $p = 0.2$.

9. Для оцінки ймовірності успіху спостерігається випадкова вибірка X з біноміальним розподілом з параметрами $(20, p)$. (а) Знайти середнє квадратичне відхилення для відносної частоти $\nu_{20}/20$ та обчислити його при $p = 0.5$. (б) Знайти середнє квадратичне відхилення для оцінки $(\nu_{20} + 1)/(20 + 1)$, обчислити це значення при $p = 0.5$ та порівняти з попереднім.

10. У великій корпорації 50 нових службовців приєдналися до програми пенсійного забезпечення компанії протягом минулого року. Передбачається, що кожен новий службовець має імовірність 0.40 зі збереження в схемі протягом принаймні 10 років, незалежно для кожного службовця. Обчислити наближене значення ймовірності того, що більше ніж половина торішніх 50 нових службовців залишилися в програмі пенсійного забезпечення протягом принаймні 10 років.

11. Обчислити максимально можливу ширину симетричного двобічного 95%-го вірогідного інтервалу для теоретичної частки населення, що має специфічну характеристику, яка грунтується на відповідній інформації у випадковій вибірці розміру 1600.

12. Спостерігається дві незалежні послідовності випробувань Бернуллі з ймовірностями успіхів θ_i, та з n_i випробуваннями, $i = 1, 2$. Нехай $\widehat{\theta}_{n_i}$ – відповідні відносні частоти успіхів. Довести, що $\sqrt{n_1}(\widehat{\theta}_{n_1} - \widehat{\theta}_{n_2} - \theta_1 + \theta_2) \to^W \zeta \simeq N(0,\ (\theta_1 - \theta_1^2) + \rho(\theta_2 - \theta_2^2))$ при $n_i \to \infty$ так, що $n_1/n_2 \to \rho$. Побудувати надійний інтервал для $\theta_1 - \theta_2$.

13. Журнал стверджує, що 25% його читачів - студенти. Аналіз випадкової вибірки з 200 читачів засвідчив, що вона містить 42 студенти. Обчислити ймовірність одержання 42 або меншої кількості студентів-читачів, припускаючи, що заява журналу справедлива.

14. Компанія хоче оцінити відсоток від її клієнтів, які бажають робити покупки у Інтернеті. Для цього вирішує обчислити симетричний двосторонній 95%-й вірогідний інтервал для невідомого відсотка. (а) Показати, що на підставі випадкової вибірки з 200 клієнтів, необхідний вірогідний інтервал буде мати ширину, що не перевищує 13.9%. (б) Обчислити розмір вибірки, який буде гарантувати, що безвідносно теоретичного відсотку, ширина вірогідного інтервалу не перевищить10%.

15. Виникнення вимог у групі з (а) 200; (б) 2000 полісів моделюється так, що імовірність вимоги у наступному року дорівнює 0.015 незалежно для кожного поліса. Кожен поліс може викликати щонайбільше одну вимогу. Обчислити наближене значення ймовірності того, що більше ніж (а) 10; (б) 40 вимог виникне у групі полісів у наступному році.

16. Ринкова дослідницька компанія має намір оцінити частку населення θ, що підтримує деяку політичну партію. Вона має намір опитати велику вибірку так, щоб 95%-ий вірогідний інтервал для θ мав розмір 0.03 або менше. Вважають, що θ наближено дорівнює 0.4. За припущенням, що кожний відповість на опитування, обчислити мінімальний розмір вибірки, яку компанія повинна використати.

17. При проведенні екскурсій 84 з 250 чоловіків та 156 з 250 жінок купили сувеніри. Побудувати 95% вірогідний інтервал для різниці теоретичних пропорцій серед чоловіків та жінок.

18. Нехай $\widehat{\theta}_n$ – відносна частота успіху у n випробуваннях Бернуллі з імовірністю успіху θ. Довести, що статистка $n\widehat{\theta}_n(1-\widehat{\theta}_n)$ є зміщеною і асимптотично незміщеною для дисперсії числа успіхів.

19. Випадкова величина ζ_θ має розподіл Пуассона. (а) Довести асимптотичну нормальність: $(\zeta_\theta-\theta)/\sqrt{\theta} \to^W \zeta \simeq N(0,1)$. (б) Для заданого $p\in(0,1)$ побудувати наближений надійний інтервал рівня p для параметра θ з кінцями $(\zeta_\theta + x_p^2/2 \pm x_p\left(\zeta_\theta + x_p^2/4\right)^{1/2})$.

20. Спостерігається випадкова величина ν, що має біноміальний розподіл з параметром p та невідомою кількістю випробувань n.

Знайти надійний інтервал для n.

21. Спостерігається кількість успіхів ν_n у перших n випробуваннях Бернуллі з невідомою ймовірністю успіхів p. Знайти надійний інтервал для числа успіхів ν_m у наступних m випробуваннях.

22. При 540 випробуваннях у схемі Бернуллі успіх спостерігався 216 разів. Знайти 0,95- вірогідний інтервал для дисперсії числа успіхів.

23. Нехай p - вірогідність того, що індивідуум має певний вірус. Для аналізу присутності вірусу аналізуються зразки крові, узяті з кожного з N представників населення. Припускаємо, що відповідні події незалежні. Використати наближення Пуассона для обчислення вірогідності того, що як мінімум три особи мають вірус, якщо $N = 1000$ і $p = 0.01$.

3.3. Емпірична функція розподілу. Варіаційний ряд. Квантилі

Література: [1,с.330-341], [2,с.334-346]. Ауд: 1-5, сам: 6-10.

1. За вибіркою з неперервного розподілу:

$$2.4,\ 1.0,\ 0.7,\ 0.0,\ 1.1,\ 1.6,\ 1.1,\ -0.4,\ 0.1,\ 0.7$$

записати варіаційний ряд, знайти вибіркову медіану, нижній та верхній квартилі, розмах вибірки. Побудувати графік емпіричної функції розподілу $\hat{F}_n(x)$ та графіки функцій нормальних розподілів з параметрами $\mu = 0.8$, $\sigma^2 = 0.64$, та $\mu = 1.0$, $\sigma^2 = 0.25$ відповідно. Обчислити значення:

$$\sup_{-\infty<x<+\infty}\left|N_{0.8,0.64}(x) - \hat{F}_n(x)\right|, \qquad \sup_{-\infty<x<+\infty}\left|N_{1.0,0.25}(x) - \hat{F}_n(x)\right|$$

та показати їх на графіках.

2. Якщо спостереження у кратній вибірці мають щільність f та функцію розподілу F, то щільність порядкової статистики $\xi_{(k)}$ дорівнює $f_k(x) = nC_{n-1}^{k-1}F^{k-1}(x)f(x)(1-F(x))^{n-k}$.

3. Знайти розподіл статистик Колмогорова $\widehat{\varkappa}_1, \widehat{\varkappa}_2$.

4. На графіку стебла та листя нижче відображені вартості 40 страхових полісів. Одиниця виміру стебла - 10000, одиниця листя - 1000.

5	3
5	6
6	02
6	5779
7	122344
7	556677899
8	1123444
8	567778
9	024
9	6

Визначити вибіркові медіану та квартилі для цієї партії полісів.

5. Нехай $X = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ – кратна вибірка з нормальним розподілом спостережень $N(\theta, 1)$. Знайти граничний розподіл випадкових величин $\sqrt{n}(\widehat{m}_n - \theta), n \to \infty$, для вибіркової медіани $\widehat{m}_n$. Як співвідносяться асимптотичні ефективності медіани та вибіркового середнього при оцінюванні параметру θ ?

6. Маємо вибірку з рівномірного розподілу:

$$1.3, 8.6, 3.5, 10.8, 9.3, 7.1, 4.1, 7.9, 2.2, 10.3, 3.2, 8.0, 9.1, 9.6, 6.6.$$

Знайти варіаційний ряд. За даною вибіркою побудувати графік емпіричної функції розподілу $\hat{F}_n\,(x)$ та графік функції $F(x)$ рівномірного на [0,11] розподілу. Обчислити $\sup_{-\infty<x<+\infty}\left|F\,(x) - \hat{F}_n\,(x)\right|$.

7. Маємо вибірку: $1.31, 1.18, 1.50, 1.06, 1.01, 1.06, 1.33, 1.80, 1.30,$ 1.35 з узагальненого показникового розподілу зі щільністю

$$f\,(y, \theta) = a^{-1}\exp(-(y-b)/a)\mathbb{1}_{y>b}, \quad \theta = (a, b) = (0.5, 1).$$

За даною вибіркою побудувати графік емпіричної функції розподілу $\hat{F}_n\,(x)$ та графік показникової функції розподілу $F(x)$ з параметрами $a = 0.5$, $b = 1$. Обчислити $\sup_{-\infty<x<+\infty}\left|F\,(x) - \hat{F}_n\,(x)\right|$.

8. Дані про відсутність на роботі через захворюваність були зареєстровані для 30 службовців компанії за 91-денний період. Ці дані зведені в таблицю:

Кількість відсутніх	0	1	2	3	4	5
Число робочих днів	44	19	10	8	7	3

Обчислити вибіркове середнє і стандартне відхилення числа службовців, що були відсутні протягом хоча б одного дня.

9. Для кратної вибірки з рівномірного розподілу $U(0,1)$ знайти:
(а) сумісну щільність порядкових статистик $\xi_{(j)}, \xi_{(k)}$, $j < k$;
(б) функцію розподілу, математичне сподівання, дисперсію розмаху $\xi_{(n)} - \xi_{(1)}$.

10. Нехай $(\xi_n, n \geq 1)$ незалежні однаково розподілені величини з неперервною функцією розподілу. Довести рівність:

$$\mathbf{P}(\xi_n > \max_{1\leq k<n} \xi_k) = 1/n.$$

11. Довести для функції розподілу Колмогорова рівність

$$K(x) = 1 - 2\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\exp(-2k^2x^2).$$

12. На відрізок [0,2] навмання кидають точку, що ділить відрізок на дві частини, і фіксують її координату ξ. Експеримент проведено 10 разів, отримано 10 незалежних спостережень випадкової величини ξ:

$$0.00,\ 0.31,\ 0.70,\ 1.40,\ 0.08,\ 1.93,\ 0.79,\ 1.43,\ 1.42,\ 1.69.$$

Обчислити варіаційний ряд, вибіркову медіану, нижній та верхній квартилі, розмах вибірки. Побудувати графік емпіричної функції розподілу.

13. Довести, що теоретична медіана $m = x_{1/2}$ є абсолютним центром положення інтегровної випадкової величини ξ, тобто

$$m = \arg\min_{a\in\mathbb{R}} \mathbf{E}\,|\xi - a|\,.$$

14. Довести, що для вибірки X з неперервною функцією розподілу статистика Колмогорова $\widehat{\varkappa}_n = \sqrt{n}\ \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\widehat{F}_n(x) - F(x)\right|$ дорівнює

$$\widehat{\varkappa}_n = \sqrt{n}\max_{1\leq k\leq n}\max\left(\left|k/n - F(\xi_{(k)})\right|, \left|F(\xi_{(k)}) - (k-1)/n\right|\right).$$

15. Нехай $X = (\xi_1, ..., \xi_n)$ – кратна вибірка з неперервною функцією розподілу F спостережень. Довести, що статистики $(F(\xi_{(k)})/F(\xi_{(k+1)}))^k$, $1 \leq k < n$, незалежні, та знайти їх розподіл.

16. Нехай $(\xi_1, ..., \xi_n)$ – кратна вибірка з експоненційного розподілу $Exp(\theta)$, а $(\xi_{(k)})$ – її варіаційний ряд, $\xi_{(0)} = 0$. (а) Довести, що сумісна щільність $(\xi_{(k)},\ k = \overline{1,r})$ дорівнює

$$\theta^r C_n^r r! \exp\left(-\theta \left[\sum_{k=1}^r x_k + (n-r)x_r\right]\right).$$

(б) Випадкова величина $2\theta\left[\sum_{k=1}^r \xi_{(k)} + (n-r)\xi_{(r)}\right]$ має хі-квадрат розподіл з $2r$ ступенями свободи. (в) Величини

$$\eta_k = (n-k+1)(\xi_{(k)} - \xi_{(k-1)}), \quad k = \overline{1,r},$$

незалежні та експоненційно розподілені з параметром θ. (г) У класі лінійних незміщених оцінок для θ^{-1} від $\xi_{(i)}$, що мають вигляд $\sum_{i=1}^k c_i \xi_{(i)}$, найменшу дисперсію має оцінка

$$k^{-1}\sum_{i=1}^k \xi_{(i)} + k^{-1}(n-k)\xi_{(k)},$$

а відповідна дисперсія дорівнює $1/k\theta^2$.

17. Нехай $X = (\xi_1, ..., \xi_n)$ – кратна вибірка з рівномірним на $[0,1]$ розподілом спостережень. (а) Знайти сумісну щільність, математичні сподівання та дисперсії статистик $\xi_{(1)}, \xi_{(n)}$. (б) Довести, що спейсинги $\delta_k \equiv \xi_{(k+1)} - \xi_{(k)},\ 0 \le k < n$, незалежні, де $\xi_{(0)} = 0$, та знайти їх функції розподілу. (в) Обчислити функцію розподілу величини $\min_{0\le k\le n} \delta_k$, де $\xi_{(n+1)} = 1$. (г) Довести, що $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(n\xi_{(k)} < x) = \Gamma_{k-1,1}(x)$ для фіксованого k, де $\Gamma_{k\lambda}$ – функція гама-розподілу з параметрами k, λ.

18. Знайти коваріацію значень емпіричної функції розподілу у двох заданих точках.

19. Довести, що сумісний розподіл значень емпіричної функції розподілу у заданих точках є поліноміальним та знайти його.

20. Нехай $(\xi_n, n \ge 1)$ незалежні однаково розподілені величини з неперервною функцією розподілу, а $\xi_{(n-r+1)}$ – відповідна порядкова статистика для n-кратної вибірки. Розглянемо при $r \ge 1$ випадковий номер $\nu_{n,r} = \min(k \ge 1 : \xi_{n+k} \ge \xi_{(n-r+1)})$. Довести, що:
(а) $\mathbf{P}(\nu_{n,1} > k) = n/(n+k)$; (б) $\mathbf{P}(\nu_{n,r} > k) = C_n^r / C_{n+k}^r$;
(в) $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\nu_{n,r} > nx) = (1+x)^{-r},\ x \ge 0$.

21. Випадкові величини ξ_n, ξ мають однозначно визначені медіани m_n, m. Довести, що з $\xi_n \to^W \xi, n \to \infty$, випливає збіжність

$m_n \to m$. Навести приклад, коли таке твердження не виконується для математичних сподівань.

22. Нехай $X = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ – кратна вибірка з неперервною функцією розподілу F спостережень. Знайти граничний розподіл при $n \to \infty$ випадкових величин $n\sqrt{F(\xi_{(1)})(1 - F(\xi_{(n)}))}$.

23. Нехай $X = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ – кратна вибірка з рівномірним на $[0, 1]$ розподілом, а $\widehat{m}_n$ - вибіркова медіана. Довести, що

$$\mathbf{P}(\widehat{m}_n - 1/2 < x/\sqrt{8n}) \to \Phi(x), n \to \infty,$$

де Φ – стандартна нормальна функція розподілу.

24. Обчислити (а) розподіл порядкових статистик; (б) сумісний розподіл екстремальних статистик для вибірки з рівномірного розподілу.

25. Нехай $(\xi_n, n \geq 1)$ незалежні рівномірно розподілені на $[0, 1]$ величини. Визначимо випадковий номер $\nu = \inf(k \geq 1 : \xi_k < \xi_{k+1})$. Довести при $x \in [0, 1], k \geq 1$ тотожність

$$\mathbf{P}(\xi_1 < x, \nu = k) = x^k/k! - x^{k+1}/(k + 1)!.$$

26. Нехай $\widehat{F}_n(x)$ – емпірична функція розподілу для незалежних спостережень з рівномірним на інтервалі $[0, 1]$ розподілом. Позначимо

$$p_n(\alpha, \beta) \equiv \mathbf{P}(\widehat{F}_n(x) < \alpha + \beta x, \ \forall x \in [0, 1]),$$

де $\alpha, \beta > 0, \alpha + \beta > 1$. Довести, що
(а) $p_n(\alpha, \beta) = 1 - ((1 - \alpha)/\beta)^n$ при $\alpha \in [1 - 1/n, 1]$;
(б) $p_{n+1}(\alpha, \beta) = \int_{(1-\alpha)/\beta}^1 p_n\left(\frac{n+1}{n}\alpha, \frac{n+1}{n}\beta t\right)(n + 1)t^n dt$ при $\alpha < 1 - \frac{1}{n}$;
(в) Обчислити $p_n(\alpha, \beta)$.

27. Випадкова величина ξ має функцію розподілу F_ξ та єдину медіану m. Довести при $y \in \mathbb{R}$ тотожність

$$\mathbf{E}\,|\xi - y| = \mathbf{E}\,|\xi - m| + 2\int_m^y (y - x) dF_\xi(x).$$

28. Знайти щільність середньої порядкової статистики $\overline{\mu} = (\xi_{(1)} + \xi_{(3)})/2$ для кратної вибірки $X = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ з рівномірним розподілом $\xi_k \simeq U(0, 1)$.

29. Кратна вибірка має рівномірно розподілені спостереження як $U(a, b)$. Довести, що сумісна щільність найбільшого та найменшого

спостереження дорівнює $n(n-1)(y-x)^{n-2}(b-a)^{-n}1\!\!\mathrm{I}_{a<x<y<b}$. Обчислити звідси математичні сподівання та дисперсії вказаних спостережень.

30. Знайти розподіл, математичне сподівання та дисперсію найменшого значення кратної вибірки з розподілом Вейбула спостережень.

31. Випадкові величини (ξ_k) незалежні однаково розподілені з неперервною функцією розподілу. Розглянемо рекордні події:
$A_k = \{\xi_k > \max(\xi_1, \dots, \xi_{k-1})\}$. Довести, що: події (A_k) незалежні, $\mathbf{P}(A_k) = 1/k$, та $\mathbf{P}(\overline{\lim}_{k\to\infty} A_k) = 1$.

32. Випадкові величини (ξ_k) незалежні експоненційно розподілені: $\xi_k \simeq Exp(\lambda_k)$. Довести, що

$$\mathbf{P}(\xi_n = \min_{1\le k\le n} \xi_k) = \mathbf{P}(\xi_n < \min_{1\le k<n} \xi_k) = \lambda_n / \sum_{k=1}^n \lambda_k.$$

3.4. Вибіркові моменти. Метод моментів

Література: [1,с.342-348], [2,с.346-353]. Ауд: 1-6, сам: 7-12.

1. У наведеній таблиці вказано число гроз, зареєстрованих цим літом 100 метеорологічними станціями.

Число гроз:	0	1	2	3	4	5
Числа станцій:	22	37	20	13	6	2

Порівняти вибіркове середнє і вибіркову медіану числа гроз.

2. Нехай $\xi_1, \dots, \xi_n$ – кратна вибірка з пуассонівського розподілу з параметром λ. Оцінити параметр λ за методом моментів.

3. Оцінити значення інтеграла $\int_0^2 (1+[y]y)^{-1} dy$, де $[y]$ - ціла частина y, за вибіркою: 0.14, 1.81, 1.38, 1.28, 1.39, 0.80, 0.35, 0.70, 1.40, 0.08, 1.93, 0.79, 1.43, 1.42, 1.68 з рівномірного на [0, 2] розподілу. Знайти оцінку дисперсії цієї оцінки.

4. Нехай $\xi_1, \dots, \xi_n$ – кратна вибірка з розподілу зі щільністю $f(y, \theta) = a^{-1} \exp\{-(y-b)/a\} 1\!\!\mathrm{I}_{y>b}$, $\theta = (a, b) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Одержати оцінки параметрів a та b методом моментів.

5. Нехай $(\xi_j, j=\overline{1,n})$ – кратна вибірка з нормального розподілу $N(\mu_0,\sigma^2)$, μ_0 – відоме. Одержати оцінку для параметра $\theta=\sigma^2$ за методом моментів.

6. Довести такі співвідношення між центральними та нецентральними моментами: $\mu_2^0=\mu_2-\mu_1^2$, $\mu_3^0=\mu_3-3\mu_2\mu_1+2\mu_1^3$, $\mu_n^0=\sum_{k=0}^n C_n^k\mu_{n-k}(-\mu_1)^k$.

7. Тривалість роботи елемента до першого виходу з ладу є показниково розподілена випадкова величина. Спостерігалась робота 20 елементів і фіксувалась тривалість роботи до першого виходу з ладу (в годинах): 11, 149, 846, 563, 384, 950, 864, 63, 990, 77, 685, 158, 348, 318, 25, 218, 1803, 63, 1544, 380. Оцінити математичне сподівання тривалості роботи елемента, якщо його міняють, коли тривалість роботи до першого виходу з ладу менша 200 годин, або коли тривалість роботи досягла 200 годин (навіть якщо елемент протягом 200 годин не відмовив). Знайти дисперсію цієї оцінки.

8. Одержати оцінки для параметрів μ та σ нормального розподілу $N(\mu,\sigma^2)$ за методом моментів.

9. Нехай $\xi_1,\ldots,\xi_n$ – кратна вибірка з біноміального розподілу з параметрами k,p, k- відоме. Оцінити параметр p за методом моментів.

10. Нехай $\xi_1,\ldots,\xi_n$ – кратна вибірка з двостороннього показникового розподілу зі щільністю $f(y,\theta)=\exp\{-|y|/\theta\}/2\theta$. Одержати оцінку параметра θ методом моментів.

11. Відношення стандартного відхилення до середнього випадкової величини називають коефіцієнтом варіації. Для кожного з наступних розподілів, вирішити, чи при збільшенні середнього відбудеться: збільшення, зменшення, або не зміниться коефіцієнт варіації: (а) Пуассона із середнім λ; (б) показниковий із середнім μ; (в) хі-квадрат з n ступенями свободи.

12. Знайти щільність, математичне сподівання та дисперсію випадкової величини з логнормальним розподілом.

13. Нехай $\xi_1,\ldots,\xi_n$ – кратна вибірка з від'ємно-біноміального розподілу з параметрами r та p (кількість випробувань в схемі Бернуллі з ймовірністю успіху p, які необхідно провести до r-го успіху).

Одержати оцінки параметрів r та p методом моментів.

14. Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – кратна вибірка з геометричного розподілу з параметром p $(0 < p < 1)$. Оцінити параметр p за методом моментів.

15. Довести, що вибіркові моменти та емпірична функція розподілу $\widehat{F}_n$ пов'язані такими співвідношеннями:

$$\widehat{\mu}_{kn} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k d\widehat{F}_n(x), \quad \widehat{\mu}_{kn}^0 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \widehat{\mu}_n)^k \, d\widehat{F}_n(x).$$

16. Визначити вибіркові аналоги коефіцієнтів варіації, асиметрії, скошеності та ексцесу як відповідних функцій від вибіркових моментів.

17. Обчислити коефіцієнти асиметрії та ексцесу для стандартних дискретних та абсолютно неперервних розподілів.

18. Нехай $(\xi_k, k = \overline{1,n})$ – кратна вибірка зі щільністю спостережень $f(y, \theta) = 2\theta^{-2}(\theta - y)1\!\!1_{0<y<\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}_+$. Знайти оцінку θ методом моментів.

19. Для стандартної нормальної випадкової величини $\zeta \simeq N(0{,}1)$ довести інтегруванням за частинами тотожність $\mu_k = (k-1)\mu_{k-2}$ та рівності $\mu_{2k} = 2^k \pi^{-1/2}\Gamma(k + 1/2) = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-1) \equiv (2k-1)!!$

20. Для величини з гама-розподілом $\xi \simeq \Gamma(\lambda, \alpha)$ обчислити $\mu_k = \lambda^{-k}\alpha(\alpha+1)...(\alpha+k-1)$.

21. Довести асимптотичні зображення для моментів центрованого k-го моменту кратної вибірки $\widehat{\mu}_{kn}^0 = n^{-1}\sum_{j=1}^n (\xi_j - \widehat{\mu}_n)^k$ при $n \to \infty$: (а) $\mathbf{E}\widehat{\mu}_{kn}^0 = \mu_k + O(1/n)$,
(б) $\mathbf{D}\widehat{\mu}_{kn}^0 = (\mu_{2k} - \mu_k^2 + k\mu_{k-1}(k\mu_{k-1}\mu_2 - 2\mu_{k+1}))/n \; + \; O(1/n^2)$.

22. Довести, що вибіркове середнє для кратної вибірки з щільністю Коші $1/\pi(1 + (y - \theta)^2)$ не є консистентною оцінкою центра симетрії θ, оскільки розподіл статистики не залежить від n.

23. Нехай $(\xi_1, ..., \xi_n)$ – кратна вибірка з неперервною функцією розподілу спостережень F, варіаційним рядом $(\xi_{(1)}, ..., \xi_{(n)})$, а параметр $\alpha \in (0, 1/2)$. Для усунення впливу можливих випадкових збурень із занадто великими чи малими значеннями використовують робастний (стійкий до збурень) аналог вибіркового середнього:

$\widehat{\mu}_{n\alpha} \equiv (n(1-2\alpha))^{-1} \sum_{k=[n\alpha]+1}^{[n-n\alpha]} \xi_{(k)}$. Довести, що: (а) $\widehat{\mu}_{n,0} = \widehat{\mu}_n$; (б) $\widehat{\mu}_{n\alpha} \to^{P1} \int_{x_\alpha}^{x_{1-\alpha}} ydF(y), n \to \infty$, де x_p – квантиль рівня p для F.

24. Для зменшення похибок оцінок за кратною вибіркою $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ пропонується метод розщеплень (bootstrap). Для довільних оцінок $T_n = T_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ обирають оцінку

$$T_n^* = n^{-1} \sum\nolimits_{k=1}^{n} T_{n-1}(\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_n).$$

Довести, що метод розщеплень при $n > 2$ до статистик $\widehat{s}_n^2 = (n-1)^{-1} \sum_{j=1}^{n} (\xi_j - \widehat{\mu}_n)^2$ призводить до статистик $\widehat{\sigma}_n^2$.

25. Для кратної вибірки $X = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ з $\mu_4 < \infty$ довести асимптотичну нормальність: $\sqrt{n}(\widehat{s}_n^2 - \sigma^2) \to^W N(0, \mu_4^0 - \sigma^4), n \to \infty$.

26. Нехай $X = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ – кратна вибірка з показниковим розподілом $\mathrm{Exp}(\theta)$. Знайти оцінку методу моментів для θ через: (а) перший вибірковий момент; (б) другий вибірковий момент; (в) перші два вибіркові моменти. (г) Знайти таку оцінку для ймовірності $\mathbf{P}_\theta(\xi_1 \geq 1)$.

27. Нехай F_n – функція розподілу з моментами $(\mu_k(n), k \geq 0)$, і при кожному k існує границя $m_k = \lim_{n\to\infty} \mu_k(n)$. Довести, що: (а) послідовність $(m_k, k \geq 0)$ є моментами деякої функції розподілу F. (б) Якщо F – нормальна функція розподілу, то $F_n \to^W F, n \to \infty$.

28. Нехай випадкова величина ξ набуває значень на відрізку $[0,1]$. (а) Довести, що послідовність нецентральних моментів $(\mu_k, k \geq 0)$ з $\mu_0 \equiv 1$ є цілком монотонною, тобто $(-1)^n \Delta^n \mu_k \geq 0$ для всіх $n \geq 1, k \geq 0$, де різницевий оператор визначається через $\Delta x_k \equiv x_{k+1} - x_k, k \geq 0$. (б) Вивести, що

$$\sum\nolimits_{k<nx} C_n^k (-1)^{n-k} \Delta^{n-k} \mu_k \to^O \mathbf{P}(\xi < x), \quad n \to \infty,$$

за теоремою Бернштейна. (в) Застосувати формулу (б) до послідовностей $\mu_k = p^k$, $\mu_k = 1/(k+1)$, $\mu_k = 2/(k+2)$.

29. Довести асимптотичну нормальність вибіркової дисперсії.

30. Знайти оцінку методу моментів для кратної вибірки з подвійним розподілом Пуассона:

$$\mathbf{P}(\xi_1 = k) = (\exp(-\theta_1)\theta_1^n + \exp(-\theta_2)\theta_2^n)/2n!$$

31. Нехай $T_n(X)$ — оцінка параметра θ за вибіркою $X = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Оцінка дисперсії $T_n(X)$ має вигляд

$$\widehat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n \Big(T_{nk}(X) - n^{-1} \sum_{j=1}^n T_{nj}(X)\Big)^2,$$

де $T_{nk}(X) = T_{n-1}(\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_n)$. Для $T_n(X) = (\widehat{\mu}_n)^2$. $\widehat{\sigma}_n^2 = 4(\widehat{\mu}_n)^2 \widehat{\mu}_{2n}^0/(n-1) - 4\widehat{\mu}_n \widehat{\mu}_{3n}^0/(n-1)^2 + (\widehat{\mu}_{4n}^0 - (\widehat{\mu}_{2n}^0)^2)/(n-1)^3$.

32. Випадкова величина ξ інтегровна та $\mathbf{E}\,|\xi|^6 < \infty$. Довести, що матриця $V = (\mathbf{E}(\xi - \mathbf{E}\xi)^{k+j}, k, j = \overline{0,3})$ додатно визначена.

33. Обчислити коефіцієнт скошеності $k_s = \mathbf{E}(\xi - \mathbf{E}\xi)^3/(\mathbf{D}\xi)^{3/2}$ для випадкових величин зі щільностями: (а) $1/2(1+x)\mathbb{1}_{-1<x<1}$; (б) $(1/2)\mathbb{1}_{-1<x<1}$; (в) $1/2(1-x)\mathbb{1}_{-1<x<1}$.

34. Випадкові величини (ξ_k) незалежні та центровані: $\mathbf{E}\xi_k = 0$. Довести, що $\mathbf{E}(\sum_{k=1}^n \xi_k)^3 = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}\xi_k^3$.

35. Випадкові величини (ξ_k) незалежні та мають стандартний нормальний розподіл. Знайти дисперсію суми $\sum_{k=1}^n \prod_{j=1}^k \xi_j$.

36. Величина ξ така, що $\mathbf{E}\xi^2 = \mathbf{E}\xi^3 = \mathbf{E}\xi^4$. Тоді $\xi \in \{0,1\}$ м.н.

37. Коефіцієнтом скошеності випадкової величини ξ називається число $k_s = \mathbf{E}(\xi - \mathbf{E}\xi)^3/(\mathbf{D}\xi)^{3/2}$. Довести, що: (а) для симетричного відносно сподівання розподілу $k_s = 0$; (б) біноміальний розподіл $B(n,p)$ скошений вліво ($k_s < 0$) при $p < 1/2$, та вправо при $p > 1/2$; (в) розподіл Пуассона завжди скошений вправо.

38. Коефіцієнтом ексцесу випадкової величини ξ називається число $k_e = \mathbf{E}(\xi - \mathbf{E}\xi)^4/(\mathbf{D}\xi)^2 - 3$. Довести, що: (а) для нормально розподіленої величини $k_e = 0$; (б) для рівномірно розподіленої величини $k_e < 0$.

3.5. Незміщені оцінки. Нерівність Крамера – Рао

Література: [1,с.349-361], [2,с.353-367]. Ауд: 1-5, сам: 6-10.

1. Знайти незміщену оцінку для параметра σ за кратною вибіркою об'єма 2 з нормального розподілу $N(a, \sigma^2)$ з невідомим a.

2. Знайти оптимальну оцінку для параметра σ^2 за кратною вибіркою з нормального розподілу $N(a, \sigma^2)$, де a - відоме середнє. (*Критерій оптимальності*).

3. Нехай X – кратна вибірка з гама-розподілом $\Gamma(\lambda, \alpha)$ спостережень. Довести, що вибіркове середнє $\widehat{\mu}_n$ є оптимальною незміщеною оцінкою для величини α/λ.

4. У схемі Бернуллі $B(n, \theta)$ розглянемо клас статистик вигляду

$$T_{\alpha\beta} = (\nu_n(X) + \alpha)/(n + \beta), \;\; \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

(а) Обчислити квадратичне відхилення $T_{\alpha\beta}$ від θ. (б) Довести, що при $\alpha = \sqrt{n}/2$ та $\beta = \sqrt{n}$ це відхилення не залежить від θ і дорівнює $(2\sqrt{n} + 2)^{-2}$. (в) Порівняйте вказане значення з відхиленням оптимальної оцінки T^*.

5. Чи є ефективною оцінка за методом максимальної вірогідності $\widehat{\theta} = n\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right)^{-1}$ параметра θ показникового розподілу зі щільністю $f(y, \theta) = \theta e^{-\theta y}$, $y \geq 0$?

6. Знайти незміщену оцінку для параметра σ за кратною вибіркою об'єма 2 з нормального розподілу $N(0, \sigma^2)$.

7. Знайти оптимальну оцінку для середнього a за кратною вибіркою з нормального розподілу $N(a, \sigma^2)$, де a та σ^2 - невідомі параметри. (*Критерій оптимальності для векторного параметра*).

8. Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – кратна вибірка з рівномірного розподілу на $(0, \theta)$, $\theta \in (0, 1)$; ($\xi_k \leq \theta$ м.н.). Знайти незміщену оцінку параметра θ та дослідити її на ефективність. (Приклад суперефективної оцінки.)

9. Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – кратна вибірка з пуассонівського розподілу з параметром $\lambda > 0$. Чи є оцінка $\lambda = n^{-1} \sum_{i=1}^n \xi_i$ ефективною оцінкою параметра λ? Довести, що для значення функції $g(\lambda) = 1/\lambda$ не існує незміщеної оцінки.

10. Довести, що розподіли: біноміальний, Пуассона, негативний біноміальний, експоненційний, нормальний та багатовимірний нормальний є частковими випадками експоненційної моделі.

11. Довести, що при $|\Theta| > 1$ в класі всіх квадратично інтегровних оцінок скалярного параметра θ не існує такої, що має рівномір-

но найменше середньоквадратичне відхилення.

12. Для векторної функції $\tau(\theta)$ в умовах теореми Крамера-Рао для векторного параметра і для її незміщеної оцінки $T = T(X) \in \Gamma_\tau$ матриця $\mathrm{Cov}_\theta(T(X) - \tau(\theta)) - \tau'_\theta I^{-1}(\theta)\tau_\theta$ невід'ємно визначена, зокрема, має невід'ємні діагональні елементи.

13. Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – кратна вибірка з біноміального розподілу

$$P(k, \theta) = C_N^k \theta^k (1-\theta)^{N-k}, \ \ k = \overline{0, N},$$

де N – відоме ціле число, $\theta \in [a, b] \subset (0, 1)$. Чи є оцінка $\widehat{\theta} = \frac{1}{nN} \sum_{i=1}^n \xi_i$ ефективною оцінкою параметра θ ?

14. Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – кратна вибірка з двобічного показникового розподілу зі щільністю $f(y, \theta) = \frac{1}{2\theta} \exp\left\{-\frac{1}{\theta}|y|\right\}$, де θ належить деякому скінченому проміжку $[a, b], a > 0$. Чи є оцінка $\theta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\xi_i|$ ефективною оцінкою параметра θ ?

15. Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – кратна вибірка з показникового розподілу зі щільністю $f(y, \theta) = \theta^{-1} \exp\{-y/\theta\} \mathbb{1}_{y>0}$, де θ належить деякому скінченому проміжку $[a, b], a < b$. Чи є оцінка $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i$ ефективною оцінкою параметра θ?

16. Нехай X_1, X_2 – незалежні кратні вибірки об'ємів n_1, n_2 з нормальних розподілів $N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2)$ відповідно, а $\widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2$ – вибіркові середні. Довести, що (а) при $\alpha \in [0, 1]$ оцінка $\widehat{\mu}_\alpha = \alpha\widehat{\mu}_1 + (1-\alpha)\widehat{\mu}_2$ є незміщеною для $\mu = \alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2$; (б) її дисперсія найменша при $\alpha = (n_1\sigma_1^{-2})/(n_1\sigma_1^{-2} + n_2\sigma_2^{-2})$.

17. Нехай X – n-кратна вибірка з логістичною щільністю спостережень $f(y, \theta) = \exp(\theta - y)(1 + \exp(\theta - y))^{-2}, y \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{R}$. Довести, що: (а) вибіркове середнє $\widehat{\mu}_n$ є незміщеною оцінкою для θ з дисперсією $\pi^2/3n$; (б) функція інформації дорівнює $I_n(\theta) = n/3$, тобто вибіркове середнє не є ефективною оцінкою, хоча має непогану ефективність $9/\pi^2$.

18. За кратною вибіркою $X = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ з рівномірного розподілу $U(\theta, 2\theta)$ знайти оптимальну незміщену оцінку у класі лінійних оцінок вигляду $\widehat{\theta} = \alpha\xi_{(1)} + (1-\alpha)\xi_{(n)}, \alpha \in [0, 1]$.

19. Довести, що оптимальна оцінка $T = T(X)$ за кратною вибіркою $X = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ параметра θ є симетричною функцією від

X. Для цього довести, що дисперсія симетризованої оцінки не перевищує дисперсії вихідної незміщеної оцінки.

20. Довести, що для кратної вибірки $X = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ з логістичним розподілом спостережень

$$f(y, \theta) = \exp(\theta - y)(1 + \exp(\theta - y))^{-2},\ y \in \mathbb{R},$$

вибіркове середнє $\widehat{\mu}_n$ є незміщеною та консистентною оцінкою для параметра θ, однак не є ефективною оцінкою.

21. Нехай $X = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ – кратна вибірка з біноміальним розподілом спостережень з параметрами k, θ. Описати параметричні функції $\tau(\theta)$, для яких існує незміщена оцінка вигляду $g(\xi_1 + \ldots + \xi_n)$, з борелівською функцією g.

22. Нехай $X = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ - кратна вибірка з нормальним розподілом $N(0, \theta^2)$. Довести, що статистика $\widehat{\theta} = \sqrt{\pi/2}\ n^{-1} \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|$ є незміщеною та консистентною оцінкою параметра θ.

23. Нехай $X = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ - кратна вибірка з гама-розподілом $\Gamma(\theta, \alpha)$ спостережень, а функція $\tau(\theta) = \theta^{-2}$. Довести, що її оцінка вигляду $\widehat{\tau} = n(\widehat{\mu}_n)^2/\alpha(n\alpha + 1)$ є оптимальною незміщеною для τ, та не є ефективною.

24. Кратна вибірка $X = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ містить спостереження зі щільністю $\theta f_1(x) + (1 - \theta) f_0(x)$ з відомими різними щільностями $f_i(x)$. Коли існує оптимальна оцінка параметра $\theta \in \Theta = [0, 1]$?

25. Нехай функція впливу $U(X, \theta)$ центрована: $\mathbf{E}_\theta U(X, \theta) = 0$, та виконуються умови регулярності. Довести, що наступні твердження щодо статистики η еквівалентні:
(а) $\mathrm{cov}_\theta(\exp(it\eta), U(X, \theta)) = 0$, для всіх $t \in \mathbb{R}$;
(б) розподіл η не залежить від θ;
(в) $\mathrm{cov}_\theta(\eta^k, U(X, \theta)) = 0, k \geq 1$.

26. Спостерігається вибірка $X = \max(\xi_1, 1)$ одиничного об'єму з розподілом Пуассона $\xi_1 \simeq \Pi(\theta)$. Довести, що не існує незміщеної оцінки для параметра θ.

27. Довести, що для кратної вибірки об'єму n зі щільністю Коші спостережень: $f(x, \theta) = 1/\pi(1 + (x - \theta)^2), x \in \mathbb{R}$, нижня межа у нерівності Крамера-Рао дорівнює $2/n$.

28. Нехай $X = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ - кратна вибірка з нормальним розподілом $N(0, \theta^2)$, а функція $\rho = (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)^{1/2}$. Довести, що статистика $\widehat{\varphi}(x) = (2\rho)^{-1} 1\!\!\mathrm{I}_{x \le |\rho|}$ є незміщеною оцінкою для щільності у точці x величини X.

29. Кратна вибірка $X = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ містить спостереження з розподілом $U(\theta, 2\theta)$. Знайти оптимальну незміщену оцінку θ у класі оцінок вигляду $T = \alpha \min_{k \le n}(\xi_k) + \beta \max_{k \le n}(\xi_k)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

3.6. Достатні статистики та оптимальність

Література: [1,с.362-366], [2,с.367-372]. Ауд: 1-5, сам: 6-10.

1. Знайти функцію вірогідності та достатні статистики для кратної вибірки $\xi_1, \ldots, \xi_n$ з: (а) рівномірного розподілу $U(a, b)$; (б) узагальненого показникового розподілу з щільністю

$$f(y, \theta) = a^{-1} \exp\{-(y - b)/a\} 1\!\!\mathrm{I}_{y > b}, \quad \theta = (a, b) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}.$$

2. Для пуассонівської кратної вибірки з невідомим параметром θ вибіркова сума $\widehat{S}_n$ є повною достатньою статистикою. Знайти умовний розподіл вибірки за умови $\widehat{S}_n = s$. Зокрема, оптимальною оцінкою для полінома $\sum_{k=1}^m c_k \theta^k$ є статистика $\sum_{k=1}^m c_k \pi_k(\widehat{S}_n) n^{-k}$, де $\pi_k(s) = s(s-1)...(s-k+1)$.

3. Якщо T – достатня статистика, а φ – вимірна бієкція, то $\varphi(T)$ – також достатня статистика.

4. Довести, що для кратної вибірки $X = (\xi_1, ..., \xi_n)$ із гама-розподілом $\xi_k \simeq \Gamma(\lambda, \alpha)$ пара статистик $(\sum_{k=1}^n \xi_k, \ \sum_{k=1}^n \ln \xi_k)$ є достатньою статистикою. Враховуючи (без доведення), що ця статистика є повною, знайти оптимальні оцінки для (а) α/λ;
(б) $(\lambda/(\alpha-1))^n$; (в) $n\alpha(n\alpha+1)...(n\alpha+k-1)$ при заданих k та $\lambda = 1$.

5. Для кратної вибірки X із неперервною функцією розподілу спостережень її варіаційний ряд є достатньою статистикою при будь-якій параметризації розподілу спостереження.

6. Знайти функцію вірогідності та достатні статистики для кратної вибірки $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ з (а) біноміального розподілу $B(n, p)$;
(б) нормального розподілу $N(\mu, \sigma^2)$.

7. Нехай $X = (\xi_1, ..., \xi_n)$ – кратна вибірка з експоненційного розподілу $Exp(\theta)$. Довести, що оптимальна незміщена оцінка для функції $\exp(-\theta a)$ при $a > 0$ дорівнює $(\max(0, 1 - a/S_n))^{n-1}$, де $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$.

8. Нехай $X = (\xi_1, ..., \xi_n)$ – кратна вибірка з дискретним розподілом спостережень степеневого вигляду: $\mathbf{P}_\theta(\xi_1 = y) = a(y)\theta^y / f(\theta)$, $y \in \mathbb{Z}_+$, де $\theta \in \Theta = (0, r) \subset \mathbb{R}_+$, причому $f(\theta) = \sum_{y \geq 0} a(y)\theta^y < \infty$ для всіх $\theta < r$. Довести, що: (а) статистика $T = \sum_{k=1}^n \xi_k$ є достатньою; (б) розподіл T має аналогічний степеневий вигляд; (в) статистика T є повною; (г) знайти оптимальну оцінку для функції $\tau(\theta) = \theta^k$.

9. Вибірка $X = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ містить незалежні спостереження $\xi_j \simeq N(\alpha + \beta c_j, \sigma^2)$, де c_j - відомі коефіцієнти. Довести, що достатньою є статистика $\left(\sum_{j=1}^n \xi_j,\ \sum_{j=1}^n c_j \xi_j,\ \sum_{j=1}^n \xi_j^2\right)$.

10. Для кратної вибірки $X = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ з поліноміальним розподілом $\mathbf{P}(\xi_1 = x_i) = p_i, i = \overline{1, m}, \sum p_i = 1$, довести, що статистика $\nu(n) = (\nu_{in}, i = \overline{1, m})$ є повною, де $\nu_{in} = \sum_{j=1}^n 1\!\!1_{\{\xi_j = x_i\}}$ – частота значення x_i. Чи є ця статистика мінімальною ?

11. Для кратної нормальної вибірки з невідомими середнім та дисперсією (μ, σ^2) (а) довести, що вибіркові середнє та дисперсія утворюють повну достатню статистику; (б) знайти оптимальну оцінку для $\Phi(-\mu/\sigma)$, де Φ – стандартна нормальна функція розподілу.

12. Вибірка утворена випадковою величиною X з дискретним розподілом $\mathbf{P}(X = -1) = \theta$, $\mathbf{P}(X = k) = (1 - \theta)^2\theta^k$, $k = 0, 1, ..$, а параметр $\theta \in (0, 1)$. Довести, що (а) X - достатня, та неповна статистика; (б) оцінка $1\!\!1_{\{X=0\}}$ - оптимальна для $(1 - \theta)^2$.

13. Нехай $X = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — кратна вибірка з експоненційного розподілу $\mathrm{Exp}(\theta)$. Довести, що (а) оптимальна незміщена оцінка для значення функції $\sum_{k=0}^m c_k \theta^k / k!$ при $m < n$ дорівнює $\sum_{k=0}^m c_k C_{n-1}^k S_n^{-k}$, де $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$; (б) при $m = n$ така оцінка не завжди існує.

14. Для n-кратної нормальної вибірки з невідомими середнім θ та одиничною дисперсією довести, що оптимальна оцінка для

$\theta^k, k \in \mathbb{N}$, дорівнює $(-1)^k n^{-k/2} H_k(-\sqrt{n}\widehat{\mu}_n)$, де за означенням поліноми Ерміта дорівнюють

$$H_k(x) \equiv (-1)^k \exp(x^2/2)\ \frac{d^k}{dx^k} \exp(-x^2/2).$$

15. Для n-кратної вибірки з (а) геометричним розподілом $G(\theta)$, (б) показниковим розподілом $Exp(\theta)$ вибіркова сума $\widehat{S}_n$ є повною достатньою статистикою. Знайти умовний розподіл вибірки за умови $\widehat{S}_n = s$. У випадку (б) довести, що оптимальна оцінка для значення функції $\exp(-\theta a)$ дорівнює $\Big(1 - \min(a, \widehat{S}_n)/\widehat{S}_n\Big)^n$.

16. Для кратної вибірки X із щільністю Коші спостережень: $f(y) = (\pi(1 + (y - \theta)^2))^{-1}$ єдиною достатньою статистикою є X.

17. Довести, що статистика S є мінімальною достатньою статистикою для вибірки X тоді і тільки тоді, коли $\sigma[S] = \cap_{T\text{-достатня}} \sigma[T]$. Вивести звідси існування мінімальної достатньої статистики.

18. Довести, що статистика S є мінімальною достатньою статистикою для вибірки X, якщо для довільної достатньої статистики T статистика S є достатньою для T. Знайти мінімальну достатню статистику: (а) у схемі Бернуллі; (б) для щільності спостережень $2(1 - y/\theta)^+$; (в) для щільності спостережень $\exp\big(-y + \theta - e^{-y+\theta}\big)$.

19. Нехай $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ – кратна вибірка з рівномірного розподілу на інтервалі $(-\theta, \theta)$. Довести, що

$$\widehat{\theta} = \max\nolimits_{1 \le k \le n} \max(\xi_k, -\xi_k)(1 + 1/n)$$

є оптимальною оцінкою параметра θ.

20. Нехай $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ – кратна вибірка з рівномірного розподілу на інтервалі $(\theta, \theta + 1)$. Довести, що одновимірна достатня статистика не існує, а двовимірна статистика $(\xi_{(1)}, \xi_{(n)})$ є достатньою, та неповна.

21. Нехай T – повна достатня статистика, а розподіл статистики S не залежить від параметру θ. Довести, що випадкові величини T і S – незалежні.

22. Довести, що для кратної вибірки X із щільністю спостережень

$$f(y, \theta) = (1\!\!\mathrm{I}_{y \in [0,\theta)} + 2 \cdot 1\!\!\mathrm{I}_{y \in [\theta, 2\theta)})/3\theta, \quad \theta \in (0, 1),$$

існує одновимірна достатня статистика. Знайти її.

23. Довести, що ефективна оцінка скалярної функції $\tau(\theta)$ є достатньою.

24. Знайти оптимальну незміщену оцінку для площі кола через кратну вибірку вимірювань його радіусу у припущенні нормальності та відсутності систематичності похибок.

25. Елементи кратної вибірки набувають значень з інтервалу $[a(\theta), b]$ з відомою монотонною функцією $a(\theta)$. Довести, що екстремальна статистика $\xi_{(1)}$ є достатньою тоді і тільки тоді, коли щільність спостереження має вигляд $f(y,\theta) = g(y)/h(\theta)\mathbb{1}_{y\in[a(\theta),b]}$.

26. Статистика η не залежить від деякої достатньої статистики. Довести, що розподіл η не залежить від θ.

27. Нехай $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ – кратна вибірка з розподілу Бернуллі спостережень: $\mathbf{P}_\theta(\xi_1 = x) = \theta^x(1-\theta)^{1-x}, x \in \{0,1\}$. Довести, що $\nu_n = \sum_{j=1}^n \xi_j$ є повною достатньою статистикою для θ.

28. Нехай $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ – кратна вибірка з нормального розподілу $N(\theta, 1)$. Знайти оптимальну незміщену оцінку для θ^2. Те саме питання для розподілу $N(0, \theta)$.

29. Нехай $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ – кратна вибірка з розподілу Пуассона $\Pi(\theta)$. Знайти оптимальну незміщену оцінку для значення $(1+\theta)\exp(-\theta)$.

30. Знайти достатні статистики для кратної вибірки з нормального розподілу на площині $N_2(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$.

3.7. Оцінки максимальної вірогідності-1

Література: [1,с.367-376], [2,с.372-383]. Ауд: 1-5, сам: 6-10.

1. Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – кратна вибірка з пуассонівського розподілу з параметром $\lambda > 0$. Оцінити параметр λ за методом максимальної вірогідності та довести консистентність оцінки (враховуючи закон великих чисел).

2. Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – кратна вибірка з негативного біноміального розподілу з відомим параметром $r \geq 1$ та невідомою ймовірністю

успіху p. Оцінити параметр p за методом максимальної вірогідності та довести консистентність оцінки.

3. У тесті контролю якості відібрано випадкову вибірку з 100 виробів, з яких 90 визнані задовільної якості. Ймовірність p того, що виріб має задовільну якість, є невідомою. Обчислити імовірність спостереження 90 задовільних виробів з числа 100 як функцію від p, і в такий спосіб одержати оцінку максимальної вірогідності для p. Знайти відповідний вірогідний інтервал з урахуванням асимптотичної нормальності оцінки максимальної вірогідності.

4. Популяція бегемотів містить невідому кількість N особин. Випадково обрані n з них були помічені та відпущені. З числа m наступних випадково відловлених особин виявилось k помічених. Знайти ОМВ для N на підставі вказаної інформації.

5. На початку кожного з 20 холодних днів березня фермер намагається завести трактор. Для успішного заведення йому знадобилися такі кількості спроб: $1, 3, 5, 1, 2, 1, 3, 7, 2, 4, 4, 8, 1, 3, 6, 5, 2, 1, 2, 4$. Виходячи з моделі геометричного розподілу числа спроб, знайти оцінку максимальної вірогідності його параметра. Знайти відповідний вірогідний інтервал з урахуванням асимптотичної нормальності оцінки максимальної вірогідності.

6. Знайти функцію вірогідності, достатні статистики та оцінки максимальної вірогідності для вибірки $\xi_1, \ldots, \xi_n$ з геометричного розподілу. Довести консистентність оцінки.

7. Випадкова величина ξ має розподіл Пуассона з параметром θ, за умови, що нульове значення не набувається. (а) Довести, що розподіл ξ дорівнює

$$p(y) = \theta^y \exp(-\theta)/(y!(1 - \exp(-\theta))),\ y = 1, 2, \ldots$$

(б) Обчислити $\mathbf{E}Y = \theta/(1 - \exp(-\theta))$. (в) Нехай $(\xi_1, \ldots \xi_n)$ вибірка з розподілом p спостережень. Довести, що оцінка максимальної вірогідності $\widehat{\theta}$ є розв'язком рівняння: $\widehat{\mu}_n - \widehat{\theta}/(1 - \exp(-\widehat{\theta})) = 0$, та довести, що оцінка максимальної вірогідності збігається з оцінкою методу моментів. (г) Знайти границю Крамера-Рао дисперсії незміщеної оцінки θ.

8. Знайти оцінку максимальної вірогідності для невідомої кількості спостережень n за біноміальною одноелементною вибіркою $X \simeq B(n,p)$ при відомому p. Знайти відповідний вірогідний інтервал з урахуванням асимптотичної нормальності цієї оцінки максимальної вірогідності.

9. Для групи страхових полісів кількість вимог для кожного полісу моделюється розподілом Пуассона з інтенсивністю λ на рік, незалежно для кожного полісу. Така група з 1500 полісів викликала 183 вимоги протягом минулого року. (а) Знайти оцінку максимальної вірогідності для λ. (б) Звідси отримати оцінки наступних величин: (1) Імовірність того, що підмножина з 10 полісів не матиме жодних вимог за наступні шість місяців. (2) Імовірність того, що набір з 250 із цих полісів викличе більше ніж 40 вимог за наступний рік.

10. Обчислити інформацію за Кульбаком для кратної вибірки з біноміальним розподілом спостережень і відомим об'ємом n та невідомим параметром $\theta = p$.

11. Нехай функція вірогідності $L(X,\theta)$ неперервна за θ, а оцінка максимальної вірогідності $\widehat{\theta}_n$ визначена однозначно та є достатньою статистикою. Довести, що $\widehat{\theta}_n$ – мінімальна достатня статистика.

12. Нехай $X = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$ – кратна вибірка з біноміального розподілу з параметром $p \in (0,1)$. Оцінити параметр p методом максимальної вірогідності.

13. Кількість відвідувань S_n певного сайту за перші n днів має розподіл Пуассона $\Pi(n\lambda)$. За наступні m днів сайт відвідали S_{1m} вітчизняних та S_{2m} зарубіжних користувачів, ці кількості незалежні та мають розподіли Пуассона $\Pi(m\lambda_1)$ та $\Pi(m\lambda_2)$ відповідно, причому $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. Знайти оцінку максимальної вірогідності для (λ_1,λ_2) на підставі спостережень S_n, S_{1m}, S_{2m}.

14. Нехай X, Y – дві незалежні вибірки однакового об'єма n з нормальними розподілами спостережень $N(\alpha+\beta,1)$, $N(\alpha-\beta,1)$ відповідно. Знайти оцінку максимальної вірогідності параметрів α,β.

15. Нехай $X = (\xi_1,...,\xi_n), Y = (\zeta_1,...,\zeta_m)$ – незалежні кратні вибірки з нормальними розподілами $N(\mu_1,\sigma^2)$ та $N(\mu_2,\sigma^2)$ відпо-

відно. Знайти ОМВ для параметра $\theta = (\mu_1, \mu_2, \sigma^2)$.

16. Спостерігаються випадкові величини $\xi_k \simeq N(\theta_k, 1)$, $k = \overline{1,2}$. (а) Знайти ОМВ для $\theta = (\theta_1, \theta_2)$; (б) Знайти вказану ОМВ у припущенні, що $\theta_1 \le \theta_2$.

17. Нехай $X = (\xi_1)$ – вибірка розміру 1 з розподілу зі щільністю $f(y,\theta) = \alpha\lambda \exp(-\lambda y) + (1-\alpha)\exp(-y), y \ge 0, \lambda > 0$, $\alpha \in (0,1)$, де $\theta = (\alpha, \lambda)$. Довести, що ОМВ для параметра θ не існує.

18. Нехай $X = (\xi_1, ..., \xi_n)$ – кратна вибірка з нормальним розподілом на площині: $\xi_1 \simeq N_2(0,0,1,1,\rho)$. (а) Знайти ОМВ для ρ та обчислити її асимптотичну дисперсію. (б) Перевірити незміщеність вибіркового коефіцієнта кореляції $\widehat{\rho}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \xi_{1j}\xi_{2j}$, знайти його асимптотичну дисперсію.

19. Знайти оцінку максимальної вірогідності для параметра μ за кратною вибіркою з розподілу $N(\mu, \sigma^2)$ за умови, що $\mu \in \mathbb{Z}$.

20. Обчислити оцінку максимальної вірогідності для параметра θ за кратною вибіркою з розподілу $N(\theta, 2\theta^2)$. Довести її конзистентність.

21. Записати рівняння максимальної вірогідності для кратної вибірки з нормальним розподілом $N(\theta, v(\theta))$ при відомій функції v. Розглянути випадок $v(\theta) = \theta^k$.

22. Спостерігається кратна вибірка об'єму n з нормального розподілу з середнім μ та дисперсією, що для кожного спостереження незалежно від інших дорівнює 1 чи σ^2 з імовірностями 1/2. Тут невідомими параметрами є μ та σ^2. Знайти ОМВ та довести, що не існує їх границі за ймовірністю при $n \to \infty$.

23. Довести, що середнє квадратичне відхилення оцінки максимальної вірогідності $\widehat{\sigma}_n^2$ від параметра σ^2 для кратної вибірки з розподілом $N(\mu, \sigma^2)$ та невідомими μ, σ^2 строго більше за таке відхилення оцінки $n\widehat{\sigma}_n^2/(n+1)$. Порівняти його з дисперсією незміщеної оцінки $\widehat{s}_n^2$.

24. Виписати рівняння максимальної вірогідності для коефіцієнта кореляції θ для кратної вибірки з двовимірних спостережень з нормальним розподілом $N_2(0,0,1,1,\theta)$.

3.8. Оцінки максимальної вірогідності-2

Література: [1,с.367-376], [2,с.372-383]. Ауд: 1-5, сам: 6-10.

1. Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ кратна вибірка з рівномірного розподілу на інтервалі $(-\theta, \theta)$, де θ - невідомий позитивний параметр. Вибірка X розміру 5 дає значення $0.87, -0.43, 0.12, -0.92$, і 0.58. Зобразити наближений графік функції вірогідності $L(X, \theta)$ проти θ для цієї вибірки. Знайти оцінку максимальної вірогідності. Чи виглядає ця оцінка прийнятною з огляду на малу кількість спостережень ?

2. Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – кратна вибірка з показникового розподілу зі щільністю

$$f(y, \theta) = a^{-1} \exp\{-(y-b)/a\} 1\!\!1_{y>b}, \quad \theta = (a, b) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}.$$

Одержати оцінки параметрів a та b методом максимальної вірогідності.

3. Кратна вибірка X утворена спостереженнями з нормальним розподілом $N(\theta, 2\theta)$. Довести, що оцінка максимальної вірогідності параметра θ має вигляд $\sqrt{1 + \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 \ /n} - 1$ і є конзистентною.

4. Відсоток відшкодування на інвестиціях певного типу протягом одного року моделюється як нормальна випадкова величина ξ із середнім μ і дисперсією 1. Потенційний інвестор цікавиться шансом, що вказаний відсоток на таких інвестиціях перевищить 9%. Випадкова вибірка з десяти таких відсотків дорівнює: $7.3, 8.9, 8.3, 6.2, 9.8, 7.7, 9.4, 7.9, 9.1, 7.4$. Обчислити оцінку максимальної вірогідності для $\theta = \mathbf{P}(\xi > 9)$. Знайти відповідний вірогідний інтервал з урахуванням асимптотичної нормальності ОМВ.

5. Довести, що оцінка максимальної вірогідності центра симетрії θ розподілу із щільністю Лапласа $(1/2)\exp(-|y-\theta|)$ збігається з вибірковою медіаною. Порівняти її дисперсію з дисперсією вибіркового середнього.

6. Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – кратна вибірка з рівномірного розподілу $U(a, b)$. Оцінити параметри a та b за методом максимальної вірогідності. Знайти розподіл оцінок та побудувати вірогідний інтервал для a.

7. Знайти функцію вірогідності, достатні статистики та оцінки максимальної вірогідності для вибірки $\xi_1, \ldots, \xi_n$ з:
(а) логарифмічно-нормального розподілу зі щільністю

$$f\left(y, \mu, \sigma^2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y} \exp\left\{-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad y > 0;$$

(б) розподілу Релея зі щільністю

$$f(y, \theta) = \begin{cases} \frac{y}{\theta} \exp\left\{-\frac{y^2}{2\theta}\right\}, & y > 0, \\ 0, & y \le 0, \end{cases} \qquad \theta > 0.$$

8. Знайти оцінку максимальної вірогідності для кратної вибірки з щільністю спостережень $\exp(-y + \theta - \exp(-y + \theta))$, $y, \theta \in \mathbb{R}$.

9. Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – кратна вибірка з двостороннього показникового розподілу зі щільністю

$$f(y, a, b) = (2a)^{-1} \exp\left\{-|y - b|/a\right\}, \quad a > 0.$$

Одержати оцінки параметрів a та b методом максимальної вірогідності.

10. Обчислити інформацію за Кульбаком для кратних вибірок (а) з нормальним розподілом $N(\mu, \sigma^2)$; (б) гама-розподілом $\Gamma(\lambda, \alpha)$ при невідомих параметрах.

11. За вибіркою $\xi_1, \ldots, \xi_n$ з розподілу зі щільністю спостережень $f(y, \theta) = \theta \exp\{-\theta y\} \mathbb{1}_{y>0}$, одержати оцінку максимальної вірогідності параметра θ.

12. Нехай $(\xi_1, ..., \xi_n)$ – кратна вибірка розміру n з розподілу зі щільністю $f(y, \theta) = 2y/\theta^2$, $0 < y < \theta$. (а) Записати функцію вірогідності, та довести, що оцінка максимальної вірогідності для θ дорівнює $\widehat{\theta} = \max(\xi_1, ..., \xi_n)$. (б) Без обчислення $\widehat{\theta}$, пояснити, чому $\widehat{\theta}$ - зміщена оцінка θ.

13. Нехай функція вірогідності $L(X, \theta)$ неперервна за θ, а ОМВ $\widehat{\theta}_n$ визначена однозначно та є достатньою статистикою. Довести, що $\widehat{\theta}_n$ – мінімальна достатня статистика.

14. Довести, що ОМВ для вибірки з рівномірним розподілом спостережень $U(\theta, 1 + \theta)$ утворюють цілий інтервал.

15. Знайти ОМВ значення функції $\tau(\theta) = \Phi(-\mu/\sigma) \equiv \mathbf{P}_\theta(\xi_1 < 0)$ для нормальної кратної вибірки $X = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\xi_k \simeq N(\mu, \sigma^2)$ з невідомим параметром $\theta = (\mu, \sigma^2)$. Знайти асимптотичний розподіл для цієї оцінки після її центрування на $\tau(\theta)$ та нормування на $\sqrt{n}$.

16. Для кратної вибірки з гама-розподілом $\Gamma(1, \theta)$ спостережень вивести рівняння максимальної вірогідності та довести, що оцінка максимальної вірогідності є асимптотично нормальною та асимптотично ефективною. Знайти оцінку методу моментів та довести, що її ефективність менша за 1.

17. Кратна вибірка утворена з урізаного на інтервал (a, b) нормального розподілу $N(\theta, 1)$:

$$f(y, \theta) = C(\theta, a, b) \exp(-(y-\theta)^2/2) 1\!\!\mathrm{I}_{y \in (a,b)}.$$

Довести, що вибіркове середнє $\widehat{\mu}_n$ є оцінкою максимальної вірогідності для функції $\mu(\theta) = \mathbf{E}_\theta \xi_1$ та обчислити ОМВ для θ.

18. Знайти оцінку максимальної вірогідності параметра $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ для кратної вибірки з розподілом спостережень

$$f(y, \theta) = \begin{cases} (\theta_1 + \theta_2)^{-1} \exp\{-y/\theta_1\}, & y \ge 0, \\ (\theta_1 + \theta_2)^{-1} \exp\{\ \ y/\theta_2\}, & y < 0, \end{cases} \qquad \theta > 0.$$

та обчислити її граничний розподіл.

19. Проводиться одне випробування у поліноміальній схемі, в якій кожна з N різних частинок розміщується в одній з n комірок. Спостерігається кількість ν комірок, що виявились зайнятими хоча б однією частинкою. Кількість N відома. Знайти оцінку максимальної вірогідності для кількості n за вибіркою $X = \nu$.

20. Знайти оцінки максимальної вірогідності параметрів через кратну вибірку з гіпергеометричного розподілу.

21. Записати рівняння максимальної вірогідності параметрів для кратної вибірки з логістичною функцією розподілу спостережень $F(x) = (1 + \exp(-\alpha - \beta x))^{-1},\ x \in \mathbb{R}$.

22. Спостерігається кратна вибірка з двовимірними спостереженнями (ξ_{1j}, ξ_{2j}), причому (ξ_{11}, ξ_{21}) незалежні та мають показникові розподіли з параметрами λ_1, λ_2. Знайти ОМВ для них. Припустимо,

що замість вибірки спостерігаються величини $\eta_j = \min(\xi_{1j}, \xi_{2j})$ та $\delta_j = \mathbb{1}_{\eta_j = \xi_{1j}}$. Знайти ОМВ у цьому випадку.

23. Знайти ОМВ параметрів для кратної вибірки з негативного біноміального розподілу: $\mathbf{P}(\xi_1 = k) = C_{k-1}^{r-1} p^r (1-p)^{k-r},\ k \geq r$.

24. Знайти необхідну і достатню умову існування єдиного розв'язку рівняння максимальної вірогідності для кратної вибірки зі щільністю спостереження $f(y, \theta) = \theta f_0(y) + (1-\theta) f_1(y), y \in \mathbb{R}$. Вказати ОМВ при порушенні цієї умови.

25. Знайти асимптотичний розподіл ОМВ функції $\tau(\theta) = \theta(1-\theta)$ від ймовірності успіху θ у схемі випробувань Бернуллі.

26. Знайти ОМВ параметрів для кратної вибірки зі щільністю Парето спостережень $f(x, \theta_1, \theta_2) = (\theta_2/\theta_1)(\theta_1/x)^{\theta_2+1} \mathbb{1}_{x > \theta_1}$ при $\theta_1, \theta_2 > 0$.

3.9. Інтервальні оцінки параметрів нормальних спостережень

Література: [1,с.377-381], [2,с.383-388]. Ауд: 1-5, сам: 6-10.

1. Середній I.Q. (рівень інтелекту) 100 студентів університету Меріленду дорівнює 110 зі стандартним відхиленням 5. Знайти 95%-ний довірчий інтервал для теоретичного середнього I.Q. генеральної сукупності всіх студентів університету.

2. Для визначення величини заряду електрона e_0 Міллікен зробив 58 незалежних однаково точних спостережень і в результаті отримав наступні значення вибіркових середнього та дисперсії: $\widehat{\mu} = 4.7808$ та $\widehat{s}^2 = 23384 \cdot 10^{-8}$. Припускаючи, що 58 результатів спостережень однаково нормально розподілені випадкові величини, обчислити довірчий інтервал для e_0 з коефіцієнтом надійності 0.975.

3. Дві лабораторії визначали концентрацію сірки в дизельному паливі по стандартному зразку. Вісім вимірювань в першій лабораторії дали результати: 0.869, 0.874, 0.867, 0.875, 0.870, 0.869, 0.864,

0.872. Після десяти вимірювань другої лабораторії було отримано: 0.865, 0.870, 0.866, 0.871, 0.868, 0.870, 0.871, 0.870, 0.869, 0.874. Істинне значення концентрації сірки в стандартному зразку дорівнює 0.870. Вважаючи систематичні похибки нульовими, знайти довірчі інтервали відношення двох невідомих дисперсій. Випадкові похибки вважаємо однаково розподіленими нормальними величинами. Коефіцієнт довіри становить 0.95.

4. Випадкові величини $\bar{x}_1$, s_1^2 та $\bar{x}_2$, s_2^2 являють собою незміщені оцінки для математичних сподівань та дисперсій двох нормальних розподілів $N(a_1, \sigma_1^2)$ та $N(a_2, \sigma_2^2)$ відповідно, обчислені за вибірками об'ємами n_1 та n_2. В результаті експерименту виявилось, що при $n_1 = 21$ та $n_2 = 36$ ці оцінки прийняли значення: $\bar{x}_1 = 10.73$, $s_1^2 = 0.0221$ та $\bar{x}_2 = 10.17$, $s_2^2 = 0.382$. Знайти довірчий інтервал для різниці $a_1 - a_2$ при умові, що невідомі дисперсії нормальних розподілів однакові, тобто $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$. Коефіцієнт довіри вибрати рівним 0.975.

5. Величина ξ_λ має розподіл Пуассона з параметром λ. Побудувати асимптотичний надійний інтервал для λ за спостереженням ξ_λ, виходячи з асимптотичної нормальності величини $(\xi_\lambda - \lambda)\,\lambda^{-1/2}$ при $\lambda \to \infty$.

6. Випадкова величина ξ має нормальний розподіл з відомим середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 2$. Знайти надійний інтервал для оцінки невідомого математичного сподівання ξ за вибірковим середнім $\widehat{\mu}$, якщо об'єм вибірки $n = 36$ і задана надійність оцінки $\gamma = 0.95$.

7. З надійністю $\gamma = 0.95$ знайти довірчий інтервал для середнього квадратичного відхилення висоти штамповок внутрішніх кілець підшипників за даними вибірки об'єму $n = 25$, якщо розподіл штамповок по висоті нормальний. Середня арифметична висота кілець $\widehat{\mu} = 32.2975$ мм, нормована дисперсія $\widehat{s}^2 = 2.5282$.

8. П'ять незалежних вимірів однієї й тієї ж невідомої фізичної сталої μ дали результати 1.78, 1.81, 1.94, 1.86, 2.00. Для виявлення систематичної похибки аналогічним чином отримано п'ять результатів вимірювань 0.92, 0.89, 0.78, 0.82, 0.92 еталонного (відомого)

значення $\mu_0 = 1$. Припускається, що систематична похибка не залежить від вимірюваного значення μ, та що всі випадкові похибки взаємно незалежні і мають однаковий нормальний розподіл $N(0, \sigma^2)$ з невідомим додатнім значенням параметра σ^2. Знайти для σ^2 надійні інтервали. Коефіцієнт надійності вибрати 0.95 для кожного.

9. Дві випадкові вибірки зроблені з двох незалежних нормальних сукупностей (із середніми μ_1 й μ_2 відповідно) з наступними результатами. Вибірка 1: Об'єм вибірки $n_1 = 11$, вибіркові середнє $\overline{\mu}_1 = 124$ і дисперсія $s_1^2 = 59$. Вибірка 2: Об'єм вибірки $n_2 = 15$, вибіркові середнє $\overline{\mu}_2 = 105$ і дисперсія $s_2^2 = 42$. Обчислити 95% вірогідний інтервал для $\mu_1 - \mu_2$, різниці між математичними очікуваннями (можна прийняти, що дисперсії сукупностей рівні).

10. Припустимо, що для статистики $T = T(X)$ ймовірність $\mathbf{P}_\theta(T < x)$ монотонно не спадає від θ при кожному x. Нехай для заданого рівня α функції θ_i визначено з рівнянь $\mathbf{P}_{\theta_1(x)}(T < x) = \alpha/2$, $\mathbf{P}_{\theta_2(x)}(T \geq x) = \alpha/2$. (а) Довести, що $(\theta_1(T(X)), \theta_2(T(X)))$ є надійним інтервалом рівня $1 - \alpha$ для θ. (б) Довести аналогічне твердження для випадку не зростаючої залежності. (в) Знайти відповідні $T(X)$ і перевірити, що вказане припущення виконується для біноміального та пуассонівського розподілу.

11. Вибірка складається з 2500 вимірів температури повітря з середнім $\mu = 25$°C і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 7$°C. Яка ймовірність того, що середнє арифметичне вибірки об'ємом 100 лежить в межах: (а) між 26°C та 27°C? (б) між 22°C та 24°C?

12. Номінальна маса виробу становить 1 кг. Відомо, що 5 відсотків виробів мають масу меншу, ніж 0.94 кг. Знайти ймовірність того, що з чотирьох виробів рівно два мають масу більшу, ніж 1.05 кг.

13. В результаті п'яти випробувань нормально розподіленої випадкової величини отримані такі значення: 2.96, 3.02, 3.07, 2.98, 3.06. Побудувати довірчі інтервали з коефіцієнтом надійності 0.95 кожен: (а) для математичного сподівання нормального розподілу, якщо відома дисперсія $\sigma^2 = 0.01$; (б) для дисперсії нормального розподілу, якщо відоме математичне сподівання $\mu = 3$; (в) для ма-

тематичного сподівання та дисперсії, якщо обидва невідомі.

14. Десять незалежних вимірювань невідомої величини дали наступні результати: 2.96, 3.07, 3.02, 2.98, 3.06, 2.92, 2.88, 3.10, 3.06, 2.95. Припускаючи, що помилки вимірювань однаково нормально розподілені випадкові величини і що систематичні помилки відсутні, вказати для середнього та для невідомої дисперсії випадкових помилок довірчі інтервали з коефіцієнтом довіри 0.9.

15. Вивести з центральної граничної теореми, що

$$(\chi^2_n - n)/\sqrt{2n} \to^W \zeta \simeq N(0,1),\ n \to \infty.$$

Вивести звідси вірогідний інтервал для невідомої кількості ступенів свободи n через одне спостереження $\xi = \chi^2_n$.

16. Довести апроксимацію Фішера:

$$\sqrt{2\chi^2_n} - \sqrt{2n-1} \to^W \zeta \simeq N(0,1),\ n \to \infty.$$

Вивести звідси вірогідний інтервал для невідомої кількості ступенів свободи n через одне спостереження $\xi = \chi^2_n$.

17. Довести, що для кратних нормальних спостережень вибіркові асиметрія та ексцес $\widehat{\mu}^0_{3n}/\widehat{s}^{3/2}_n,\ \widehat{\mu}^0_{4n}/\widehat{s}^2_n$ не залежать від вибіркових середнього та дисперсії.

18. Виходячи з виразу для щільності хі-квадрат як часткового випадку гама-щільності, довести, що щільність τ_n має вигляд

$$f_{\tau_n}(x) = c_n(1 + x^2/n)^{-(n+1)/2},\ \ c_n = (\pi n)^{-1/2}\Gamma((n+1)/2)/\Gamma(n/2),$$

причому $\mathbf{E}\tau_n = 0,\ \mathbf{D}\tau_n = n/(n-2), n > 2$. Зокрема, τ_1 має розподіл Коші.

19. Довести, що величини із розподілом Стьюдента асимптотично нормальні: $\tau_n \to^W \zeta \simeq N(0,1),\ n \to \infty$.

20. Довести, що щільність Фішера має вигляд

$$f_{nm}(x) = c_{nm}x^{n/2-1}\left(1 + \tfrac{n}{m}x\right)^{-(n+m)/2},\ c_{nm} = (\tfrac{n}{m})^{n/2}B(\tfrac{n}{2}, \tfrac{m}{2}).$$

21. Нехай f – строго монотонна функція така, що для значення $f(\theta)$ вірогідний інтервал $(\widehat{f_1}, \widehat{f_2})$ побудовано. Довести, що $(f^{(-1)}(\widehat{f_1}), f^{(-1)}(\widehat{f_2}))$ є вірогідним інтервалом того ж рівня для θ.

22. Побудувати надійний інтервал заданого рівня для параметра кратної вибірки з (а) показниковим розподілом Exp(θ); (б) рівномірним на $(\theta, 2\theta)$ розподілом; (в) розподілом Пуассона.

23. 300 випробувань Бернуллі з невідомою ймовірністю успіху θ призвели до 164 успіхів. Побудувати вірогідний інтервал для дисперсії числа успіхів при надійності 0.95.

24. Нехай $X = (\xi_1, ..., \xi_n)$ кратна нормальна вибірка з розподілом $\xi_k \simeq N(\mu, \sigma^2)$. Знайти вірогідний інтервал рівня p для наступного незалежного спостереження ξ_{n+1}.

25. Нехай $X = (\xi_1, ..., \xi_n)$ кратна нормальна вибірка з розподілом $\xi_k \simeq N(\mu, \sigma^2)$, $\Phi_{\mu\sigma}$ – нормальна функція розподілу з параметрами μ, σ^2. Довести, що: (а) для кожного $t > 0$ розподіл приросту

$$\Delta(t) = \Phi_{\mu\sigma}(\widehat{\mu}_n + t\widehat{\sigma}_n) - \Phi_{\mu\sigma}(\widehat{\mu}_n - t\widehat{\sigma}_n)$$

залежить лише від t; (б) якщо $t_{n\alpha}(1 + 1/n)^{-1/2}$ - є двобічний квантиль рівня α для розподілу Стьюдента з $n-1$ ступенем свободи, то $\mathbf{E}\Delta(t_{n\alpha}) = \alpha$. (в) $\sqrt{n}(\widehat{\mu}_n/\widehat{s}_n - \kappa)/\sqrt{1 + \kappa^2/2} \to^W N(0, 1), n \to \infty$, де $\kappa = \mu/\sigma$.

26. Нехай $X = (\xi_j, j = \overline{1, n}) = ((\xi_{1j}, \xi_{2j}), j = \overline{1, n})$ – кратна вибірка з нормальним розподілом на площині: $\xi_1 \simeq N_2(0, 0, 1, 1, \rho)$. Знайти надійний інтервал для ρ при заданому вірогідному рівні α.

27. Кратні вибірки $X = (\xi_1, ..., \xi_n)$ та $Y = (\eta_1, ..., \eta_m)$ містять спостереження з показниковими розподілами $Exp(\lambda)$ та $Exp(\mu)$ відповідно. Знайти надійний інтервал рівня p для відношення λ/μ.

28. Побудувати вірогідний інтервал рівня p для параметра λ за кратною вибіркою з гама-розподілом спостережень $\Gamma(\lambda, \alpha)$ при відомому α.

29. Довести, що вірогідний рівень інтервальної оцінки $(\xi_{(n)}, \xi_{(n)}(1-p)^{-1/n})$ для параметра θ за кратною вибіркою з рівномірного розподілу $U(0, \theta)$ дорівнює p.

30. Побудувати двобічний вірогідний інтервал рівня α для параметра $\theta > 0$ за кратною вибіркою об'єму n з нормального розподілу $N(\theta, \theta^2)$.

3.10. Непараметричні критерії узгодженості, випадковості

Література: [1,с.386-394], [2,с.389-401]. Ауд: 1-4, сам: 5-8.

1. Наведені нижче дані являють собою час безвідмовної роботи електронного приладу. З'ясуйте, чи можна вважати, що час безвідмовної роботи цього приладу має нормальний розподіл з математичним сподіванням 170 годин та середнім квадратичним відхиленням, яке дорівнює 110 годин? Час безвідмовної роботи: 48, 84, 21, 63, 219, 133, 327, 213, 118, 171, 356, 117, 175, 163, 230, 135, 18, 116, 174, 384, 100, 60, 327, 48, 410. (*Критерій Колмогорова*).

2. В першому потоці з 300 студентів оцінку "2" отримали 33 студента, "3" – 43, "4" – 80, "5" – 144, в другому потоці інші 300 студентів отримали наступні результати: "2" – 39, "3" – 35, "4" – 72, "5" – 154. Чи можна з вірогідним рівнем 0.05 вважати обидва потоки однорідними? (Інакше кажучи, чи однаково розподілені дві величини, значення яких вказані в цій задачі? *Критерій Вілкоксона* - використати коригування рангів при співпадінні різних спостережень.).

3. Довести, що для статистики Вілкоксона у припущенні неперервності розподілу спостережень

$$S_{nm} = n(n+1)/2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mathbb{I}_{\{\xi_i < \eta_j\}}.$$

Обчислити звідси $\mathbf{E}S_{nm}$, $\mathbf{D}S_{nm}$ за альтернативною гіпотезою про постійне зміщення між двома вибірками.

4. Дані про смертність населення використовуються для оцінки параметрів захворюваності. Такі дані наведено для 10 регіонів у таблиці

Регіон	Смертність на 10000(m)	Захворюваність на 1000 (s)
1	125.2	206.8
2	119.3	213.8
3	125.3	197.2
4	111.7	200.6

Регіон	Смертність на 10000(m)	Захворюваність на 1000 (s)
5	117.3	189.1
6	100.7	183.6
7	108.8	181.2
8	102.0	168.2
9	104.7	165.2
10	121.1	228.5

Перевірити гіпотезу про (не)залежність смертності від захворюваності за критерієм Спірмена.

5. Проби дуже чистого заліза, одержаного за двома різними методами A та B, мали такі точки плавлення:

A: 1493, 1519, 1518, 1512, 1514, 1489, 1508, 1503,

B: 1509, 1494, 1512, 1483, 1507, 1491.

Перевірити гіпотезу, згідно з якою обидва методи дають залізо, що має одну й ту ж точку плавлення (*Критерій Вілкоксона*).

6. Перевірити гіпотезу про однаковий розподіл захворюваності та смертності за регіонами з даних задачі 4 за допомогою критерія Смірнова після множення першого стовпчика на коефіцієнт 1.7.

7. Довести що в умовах теореми Колмогорова про відхилення емпіричної функції розподілу за нульової гіпотези розподіл статистики омега-квадрат $\widehat{\omega}_n^2 = n\int_{-\infty}^{\infty}\left(\widehat{F}_n(x) - F(x)\right)^2 dF(x)$ не залежить від вигляду теоретичної функції розподілу.

8. Перевірити рівність для статистики Спірмена $\mathbf{D}\widehat{\rho}_n = 1/(n-1)$ за нульовою гіпотезою через вирази для коваріацій рангових статистик.

9. Обчислити дисперсію статистики Вілкоксона.

10. Було проведено десять незалежних випробувань гіпотези з 5%-м критичним рівнем. Обчислити ймовірність того, що принаймні одне з випробувань призведе істотний результат, у припущенні, що нульова гіпотеза справджується для кожного з 10 випробувань.

11. Студентський актуарій збирається зібрати дані з партії форм страхування. Відомо, що у середньому одна з кожних п’ятдесяти таких форм містить неповну інформацію. Студент хоче бути на 95 %,

упевненим щодо наявності принаймні 500 форм, що є повними. Показати, що він повинен використати партію принаймні з 516 форм. (Використати підходящу модель та відповідні таблиці для розподілу числа форм, що містять неповну інформацію).

12. Спостерігаються дві незалежні схеми випробувань Бернуллі з n_i спостереженнями та ймовірностями успіху $\theta_i, i = 1, 2$. Нехай $\widehat{\theta}_i$ – відповідні кількості успіхів. Довести, що при $n_i \to \infty$:

$$\left(\widehat{\theta}_1 - \widehat{\theta}_2 - \theta_1 + \theta_2\right) / \sqrt{\theta_1(1-\theta_1)/n_1 + \theta_2(1-\theta_2)/n_2} \to^W \zeta,$$

$\zeta \simeq N(0,1)$, а за умови $H_0 : \theta_1 = \theta_2$ також

$$\left(\widehat{\theta}_1 - \widehat{\theta}_2\right) / \sqrt{\widehat{\theta}(1-\widehat{\theta})(1/n_1 + 1/n_2)} \to^W \zeta \simeq N(0,1),$$

де $\widehat{\theta} = (n_1\widehat{\theta}_1 + n_2\widehat{\theta}_2)/(n_1 + n_2)$. Використати ці твердження для перевірки гіпотези H_0.

13. Обчислити з означення нормованої статистики Вілкоксона $\varkappa_{nm} = (S_{nm} - \mathbf{E}S_{nm})/\sqrt{\mathbf{D}S_{nm}}$, що за нульової гіпотези має місце збіжність

$$\mathbf{E}(\varkappa_{nm})^{2r-1} = 0, \mathbf{E}(\varkappa_{nm})^{2r} \to (2r-1)!!, n \to \infty,$$

при всіх $r \geq 1$, та довести асимптотичну нормальність $\varkappa_{nm}$.

14. Довести асимптотичну нормальність статистики Спірмена $\widehat{\rho}_n$ методом моментів через обчислення моментів $\mathbf{E}\widehat{\rho}_n^{2r}$ при $r \geq 1$ та їх границь при $n \to \infty$.

15. Нехай $\widehat{F}_n(x)$ – емпірична функція розподілу для вибірки з неперервною функцією розподілу F одного спостереження, $\alpha > 0$, а функція $w(t)$ невід'ємна. Довести, що розподіл статистик не залежить від F :

$$S_{nw\alpha} = \sup_{x\in\mathbb{R}} w(F(x)) \left|\widehat{F}_n(x) - F(x)\right|^\alpha,$$

$$T_{nw\alpha} = \sup_{x\in\mathbb{R}} w(\widehat{F}_n(x)) \left|\widehat{F}_n(x) - F(x)\right|^\alpha,$$

$$U_{nw\alpha} = \int_{\mathbb{R}} w(F(x)) \left|\widehat{F}_n(x) - F(x)\right|^\alpha F(dx),$$

$$V_{nw\alpha} = \int_{\mathbb{R}} w(\widehat{F}(x)) \left|\widehat{F}_n(x) - F(x)\right|^\alpha \widehat{F}(dx)$$

16. Обчислити асимптотичну ефективність критерія Вілкоксона по відношенню до двовибіркового t-критерія Стьюдента у випадку

кратних виборок з
(а) логістичного розподілу $F(x) = (1 + \exp(-\alpha - \beta x))^{-1}$;
(б) рівномірного розподілу $U(a, b)$ при альтернативі зсуву.

17. Знайти розподіл статистики Вілкоксона за нульової гіпотези при $n = 2, m = 3$ за методом характеристичних функцій.

18. У означенні статистики Вілкоксона W позначимо через W^+ суму рангів додатних спостережень, та W^- - для від'ємних. Довести, що $W = W^+ - W^-$, $W = 2W^+ - N(N+1)/2$. Обчислити математичне сподівання та дисперсію W^+.

19. Спостерігається кратна вибірка (10.2, 14.1, 9.2, 11.3, 7.2, 9.8, 6.5, 11.8, 8.7, 10.8) об'єму 10 зі щільністю, що симетрична відносно параметра θ. Застосувати статистику Вілкоксона для перевірки гіпотези $H_0 : \theta = 8$ проти альтернативи $H_1 : \theta > 8$ при вірогідному рівні 0.05.

20. Партія товарів може містити частку дефектних виробів. Постачальник вважає, що ця частка дорівнює 3%, а покупець — 10%. Умови контракту: якщо при перевірці 20 випадковим чином відібраних виробів виявлено не більше одного дефектного, то партія приймається на умовах постачальника, інакше - покупця. Визначити: (а) які статистичні гіпотези, статистика критерія, область її значень, критична область; (б) який розподіл має статистика критерія, у чому полягають похибки першого та другого роду і які їх імовірності.

3.11. Критерії хі-квадрат для поліноміальної схеми Бернулі

Література: [1,с.395-405], [2,402-413]. Ауд: 1-4, сам: 5-8.

1. Чотири монети були підкинуті 20160 разів, при цьому комбінації: чотири аверси, три аверси і реверс, два аверси і два реверси, один аверс і три реверси, чотири реверси – з'явилися відповідно таке число разів: 1181, 4909, 7583, 5085, 1402. Чи свідчать ці дані

про те, що число аверсів, що з'явилися в результаті підкидання чотирьох монет, є біноміально розподіленою випадковою величиною з параметрами 4, 1/2 ?

2. Знайти сумісний розподіл та його генератрису для вектора емпіричних частот $\widehat{\nu}_n = (\widehat{\nu}_{n1}, ..., \widehat{\nu}_{nk})$ у поліноміальній схемі Бернуллі.

3. Нижче наведені інтервали в експлуатаційних годинах між послідовними відмовами апаратури кондиціювання повітря на літаку:

$6, 23, 261, 87, 7, 120, 14, 62, 47, 225, 71, 246, 21, 42, 20, 5, 12,$
$120, 11, 3, 14, 71, 11, 4, 11, 16, 90, 1, 16, 52, 95, 97, 51, 11, 4, 141,$
$18, 142, 68, 77, 80, 1, 16, 106, 206, 82, 54, 31, 216, 46, 111, 39, 63,$
$18, 191, 18, 163, 24, 50, 44, 102, 72, 22, 39, 3, 15, 197, 188, 79, 88,$
$46, 5, 5, 36, 22, 139, 210, 97, 30, 23, 13, 14, 487, 18, 100, 7, 98, 5,$
$85, 91, 43, 230, 3, 130.$

Перевірте гіпотезу про показниковий розподіл з параметром 0.01 часу безвідмовної роботи апаратури кондиціювання повітря.

4. Щосекундна реєстрація числа альфа-частинок, що потрапили до камери лічильника, призвела до таких даних

Число частинок	0	1	2	3	4	5	6	≥ 7	Всього
Кількість секунд	112	168	130	68	32	5	2	0	517

Перевірити гіпотезу про пуассонівський розподіл щосекундного числа частинок з параметром 1.5 на рівні 0.05.

5. Результати підрахунку частот цифр $0, 1, ..., 9$ у перших 10002 десяткових знаках числа $\pi - 3$ наведені в таблиці

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
968	1026	1021	974	1014	1046	1021	970	948	1014

За допомогою критерія хі-квадрат на рівні 0.01 перевірити гіпотезу про рівномірну розподіленість десяткових цифр числа π.

6. Нехай $\widehat{\nu}_{nij}$ – кількість спостережень j-го результату до першої появи i-го результату у поліноміальній схемі Бернуллі. (а) Знайти генератрису, математичне сподівання та дисперсію величини $\widehat{\nu}_{nij}$. (б) Знайти сумісну генератрису вектора $(\widehat{\nu}_{nij}, j = \overline{1, i-1})$.

7. Оберіть одну з таблиць наприкінці даного посібника, з перших 100 її чисел випишіть другу справа цифру та перевірте гіпотезу про випадковість цих цифр. Поясніть, чому не бажано обирати останню цифру ?

8. З числа 1000 застрахованих автовласників за один рік 123 потрапили у ДТП по одному разу, 22 - по два рази. При вірогідному рівні 0.01 перевірити гіпотезу про те, що кількість ДТП має розподіл Пуассона з параметром 0.1.

9. Довести, що статистика хі-квадрат у поліноміальній схемі Бернуллі дорівнює $\widehat{\chi}^2_{k-1}(n) = \sum_{i=1}^{k} \widehat{\nu}^2_{ni}/np_i - n$.

10. У експериментах з селекцією гороха Мендель спостерігав частоти різних видів насіння, що отримані при схрещуванні рослин з круглим жовтим насінням і рослин із зморшкуватим зеленим насінням. Ці дані наведені у таблиці

Насіння	Частота	Ймовірність
кругле жовте	315	9/16
зморшкувате жовте	101	3/16
кругле зелене	108	3/16
зморшкувате зелене	32	1/16
сума	556	1

Перевірити гіпотезу за критерієм хі-квадрат про відповідність спостережень теоретичним частотам.

11. У серії з 4000 незалежних випробувань події A_1, A_2, A_3 з повної групи подій відбулись відповідно 1905, 1015 та 1080 раз. Перевірити на рівні 0.05 гіпотезу про те, що ймовірності цих подій відповідно дорівнюють $1/2, 1/4, 1/4$.

12. Серед 1110 сімей, що мають двох дітей, у 527 сім'ях два хлопчики, у 476 - дві дівчинки, а у решти 107 сімей по одному хлопчику та дівчинці. Чи можна на рівні 0.05 вважати, що кількість хлопчиків у сім'ї з двома дітьми має біноміальний розподіл з параметрами 2, 1/2 ?

13. Обстеження 500 годинників, що виставлені у вітринах у центрі міста, виявило такі результати щодо положення годинникової стрілки:

Година	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Частота	41	34	54	39	49	45	41	33	37	41	47	39

Перевірити гіпотезу про рівномірний розподіл початкової години у обстежених годинників.

14. Довести, що заміна повної групи подій у поліноміальній схемі випробувань шляхом об'єднання деяких гіпотез не призводить до збільшення статистики хі-квадрат.

3.12. Критерії хі-квадрат для складної гіпотези

Література: [1,с.395-405], [2,402-413]. Ауд: 1-4, сам: 5-8.

1. Серед 1110 сімей, що мають двох дітей, у 527 сім'ях два хлопчики, у 476 - дві дівчинки, а у решті 107 сімей по одному хлопчику та дівчинці. Чи можна на рівні 0.05 вважати, що кількість хлопчиків у сім'ї з двома дітьми має біноміальний розподіл ?

2. 147 навмання вибраних студентів були поділені згідно з кольором їх волосся (біляві, темні) та кольору їх очей (блакитні, карі).

	Блакитні	Карі	Всього
Темні	31	41	72
Біляві	40	35	75
Всього	71	76	147

Чи можна на підставі цих даних зробити висновок про те, що колір очей пов'язаний з кольором волосся?

3. З випадково обраних 250 осіб, що переглядали один телевізійний канал, 74 пригадали зміст реклами, та з 250 осіб для іншого каналу пригадали 92 особи. Перевірити гіпотезу про однакову дієвість реклами на каналах на вірогідному рівні 0.01.

4. Побудувати критерій хі-квадрат узгодженості рівня p кратної вибірки $X = (\xi_1, ..., \xi_n)$ з показниковою функцією розподілу $F_\xi(x) = 1 - \exp(-x/\theta)$ при невідомому параметрі θ для N інтервалів групування довжини a (за винятком останнього).

5. Нижче наведені інтервали в експлуатаційних годинах між послідовними відмовами апаратури кондиціювання повітря на літаку:

$6, 23, 261, 87, 7, 120, 14, 62, 47, 225, 71, 246, 21, 42, 20, 5, 12,$
$120, 11, 3, 14, 71, 11, 4, 11, 16, 90, 1, 16, 52, 95, 97, 51, 11, 4, 141,$
$18, 142, 68, 77, 80, 1, 16, 106, 206, 82, 54, 31, 216, 46, 111, 39, 63,$
$18, 191, 18, 163, 24, 50, 44, 102, 72, 22, 39, 3, 15, 197, 188, 79, 88,$
$46, 5, 5, 36, 22, 139, 210, 97, 30, 23, 13, 14, 487, 18, 100, 7, 98, 5,$
$85, 91, 43, 230, 3, 130.$

Перевірте гіпотезу про показниковий розподіл часу безвідмовної роботи апаратури кондиціювання повітря.

6. Психолог припускає, що може існувати зв'язок між характером та улюбленим кольором людини. В результаті опитування 150 інтровертів та 150 екстравертів він отримав наступні результати:

	Червоний	Синій	Фіолет	Жовт	Зелен	Всього
Інтроверт	52	28	19	38	13	150
Екстраверт	48	32	21	32	17	150
Всього	100	60	40	70	30	300

Перевірити цю гіпотезу на вірогідному рівні 0.05.

7. Довести, що у 2×2 таблиці спряженості умовний розподіл частоти $\widehat{\nu}_{11}$ за умови, що фіксовані $\widehat{\nu}_{\bullet j}$ та $\widehat{\nu}_{i\bullet}$, є гіпергеометричним. Знайти його. Побудувати точний критерій Фішера перевірки незалежності, якщо критичними є великі відхиленні у обидва боки величини $\widehat{\nu}_{11}$ від $\widehat{\nu}_{\bullet 1}\widehat{\nu}_{1\bullet}\ /n$.

8. У генетичній моделі Фішера припускається, що ймовірності виникнення нащадків, що класифікуються за чотирма типами, мають вигляд: $p_1(\theta) = (2+\theta)/4$, $p_2(\theta) = p_3(\theta) = (1-\theta)/4$, $p_4(\theta) = \theta/4$, де $\theta \in (0, 1)$ - невідомий параметр. Побудувати критерій хі-квадрат для перевірки цієї гіпотези на підставі кратної вибірки, на рівні p.

9. Розглядається 2×2 таблиця спряженості для перевірки незалежності двох факторів:

1 - $22 \ \ 28 = 50$

2 - $28 \ \ 22 = 50$

Всього $50 \ \ 50 = 100$

Обчислити значення статистики хі-квадрат та сформулювати висновок щодо незалежності факторів.

10. Перевірити гіпотезу про пуассонів розподіл у задачі 11.4 при невідомому параметрі θ.

11. З числа 300 абітурієнтів 97 мали вищий бал шкільного атестату та 48 отримали вищий бал на вступних іспитах. Одночасно лише у 18 був вищий бал атестату та на іспитах. Побудувати таблицю спряженості і перевірити на рівні 0.1 гіпотезу про незалежність вищих балів.

12. Під час епідемії грипу з 3000 осіб захворіли на грип за один сезон 273 особи, з них 14 хворіли двічі. Решта осіб не захворіли. Перевірити гіпотезу про те, що розподіл частоти захворювання є пуассонівським.

13. У 8000 незалежних випробуваннях події A, B, C, що утворюють повну групу, спостерігались відповідно 2014, 5012, та 974 разів. Перевірити на рівні 0.05 гіпотезу про те, що $\mathbf{P}(A) = 0.5 - 2\theta$, $\mathbf{P}(B) = 0.5 + \theta$, $\mathbf{P}(C) = \theta$, де $\theta \in (0, 0.25)$ - невідомий параметр.

14. Перевірити гіпотезу про нормальний розподіл часу безвідмовної роботи у задачі 5.

15. Кількість страхових вимог у портфелі полісів відображено в такий спосіб:

Число вимог за день:	0	1	2	3	4	5	Всього
Частота вимог	48	32	17	2	0	1	100

Використати хі-квадрат критерій для перевірки гіпотези про те, що число вимог має розподіл Пуассона.

16. Дослідник, що вивчає досвід вимог компанії (у конкретному класі бізнесу) реєструє платежі по 100 вимогах. Платежі (в одиницях 1000, сортовані) даються нижче.

0.30	0.89	0.96	1.16	1.67	1.77
1.93	1.98	2.07	2.09	2.30	2.48
2.58	2.78	3.00	3.19	3.21	3.21
3.25	3.31	3.34	3.37	3.66	3.95

4.16	4.18	4.60	4.72	4.73	4.76
5.01	5.17	5.21	5.63	5.72	6.00
6.13	6.17	6.24	6.37	6.47	6.48
6.87	7.05	7.16	7.21	7.51	7.72
7.74	8.00	8.00	8.03	8.04	8.54
9.11	9.18	9.49	9.59	10.00	10.36
10.85	11.08	11.22	11.27	11.38	11.45
11.69	11.78	12.27	12.30	12.50	13.04
13.28	13.43	13.48	13.85	14.27	14.31
14.49	14.55	14.62	14.68	14.70	14.83
15.67	15.70	15.77	16.28	16.44	17.17
17.89	18.03	18.12	20.72	22.00	24.33
25.41	28.30	31.00	32.80		

Для цих 100 спостережень: $\sum x = 952.75$, $\sum x^2 = 13584.5217$. Дослідник хоче перевірити, чи показниковий розподіл забезпечує адекватний опис розподілу платежів. (а) Обчислити вибіркове середнє і стандартне відхилення для 100 платежів. (б) Визначити оцінку показникового розподілу. (в) Дослідник вирішив провести хі-квадрат тест для показникового розподілу даних, використовуючи п'ять рівноімовірних інтервалів (тобто інтервалів з відповідною ймовірністю 0.2). Показати, що значення x, що перевищується з імовірністю p показниковою величиною із середнім μ, дорівнює $x = -\mu \ln p$. (г) Обчислити значення, які ділять множину позитивних дійсних чисел на п'ять рівноімовірних інтервалів для оціненого показникового розподілу.

17. Перевірка 190 видів радіоприймачів виявила такі параметри чутливості та вибірковості:

Чутливість\Вибірковість	Низька	Середня	Висока
Низька	7	12	31
Середня	35	59	18
Висока	15	13	0

На вірогідному рівні 0.01 перевірити гіпотезу про незалежність чутливості від вибірковості.

18. З числа 1000 застрахованих автовласників за один рік 123 потрапили у ДТП по одному разу, 22 - по два рази. При вірогідному рівні 0.99 перевірити гіпотезу про те, що кількість ДТП має розподіл Пуассона.

19. Соціальний дослідник цікавиться розподілом статі серед дітей у сімействах, де є діти, і зібрав дані для дослідження у такий спосіб. Триста сімейств були відібрані навмання. Таблиця нижче вказує частоту розподілу дівчинок у сімействах, що мають 1, 2, 3, і 4 дитини.

Дітей\Дівчинок	0	1	2	3	4	Кількість сімей
1	23	27	-	-	-	50
2	30	46	24	-	-	100
3	9	36	43	12	-	100
4	4	17	15	11	3	50

Дослідник хоче з'ясувати, чи залежить пропорція дівчинок у межах сімейства від розміру сімейства. (а) Побудувати відповідну 2×4 таблицю спряженості, та обчислити повну частку дівчинок. (б) Сформулювати відповідні гіпотези для подальшого дослідження. (в) Обчислити значення статистик відповідних критеріїв, та перевірити, чи їх P-значення перевищують 0.05.

20. Статистика числа страхових випадків протягом дії страхових полісів призвела до таких даних

Число випадків	0	1	2	3	4	5	$\geq$6	Всього
Кількість полісів	229	211	93	35	7	1	0	576

Перевірити гіпотезу про пуассонівський розподіл числа страхових випадків на рівні 0.05.

21. Довести, що статистика для перевірки гіпотези про симетрію $H_0 : p_{ij} = p_{ji},\ i, j = \overline{1, r}$, що має вигляд

$$\chi^2(r) = \sum\nolimits_{i<j} (\upsilon_{ij} - \upsilon_{ji})^2/(\upsilon_{ij} + \upsilon_{ji})$$

має асимптотичний розподіл $\chi^2_{r(r-1)/2}$.

22. Кратна вибірка об'єму n за нульовою гіпотезою містить спостереження з показниковою щільністю $\theta^{-1}\exp(-x/\theta)\mathbb{1}_{x>0}$ при

невідомому параметрі θ. Перевірити цю гіпотезу за критерієм хі-квадрат, з використанням групування інтервалами $\Delta_k = [ka-a, ka)$, $k = \overline{1, N-1}$, $\Delta_N = [Na, \infty)$ при заданому $a > 0$.

3.13. Перевірка гіпотез про параметри нормальних спостережень

Література: [1,с.406-411], [2,с.419-423]. Ауд: 1-4, сам: 5-8.

1. Номінальний опір резисторів 2000 Ом. Для контролю добрана партія кількістю 12 резисторів. Після вимірювання опору кожного зразка з середньоквадратичним відхиленням 5 Ом отримано такі значення: 2130, 2090, 2030, 2080, 1920, 2020, 2015, 2000, 2045, 1940, 1980, 1970. Чи можна відхилення від номіналу (2000 Ом) розглядати як випадкові (припустимі), чи, навпаки, результати свідчать про те, що опір резисторів істотно відрізняється від номіналу? Використати нормальну модель.

2. В результаті вимірювання 10 зразків твердості сплаву отримано значення в умовних одиницях: 12.1, 13.7, 11.0, 11.6, 11.9, 13.9, 11.5, 12.9, 13.0, 10.5. Припустимо, що твердість сплаву розподілена нормально. Чи можна вважати, що дисперсія розподілу твердості становить 2.25?

3. Дві лабораторії визначали концентрацію сірки в дизельному паливі по стандартному зразку. Вісім вимірювань в першій лабораторії дали результати:

$$0.869, 0.874, 0.867, 0.875, 0.870, 0.869, 0.864, 0.872.$$

Після десяти вимірювань другої лабораторії було отримано:

$$0.865, 0.870, 0.866, 0.871, 0.868, 0.870, 0.871, 0.870, 0.869, 0.874.$$

Істинне значення концентрації сірки в стандартному зразку дорівнює 0.870. Вважаючи, що випадкові похибки вимірювань нормально розподілені з однаковими дисперсіями, перевірити гіпотезу про те, похибки в обох лабораторіях однакові. Перевірити гіпотезу, про те, що дисперсії похибок вимірювань однакові.

4. Нормальні випадкові величини ξ_k обчислюються з системи

$$\xi_k = \theta\xi_{k-1} + \varepsilon_k, k = \overline{1,n},$$

де похибки незалежні та $\varepsilon_k \simeq N(0, \sigma^2)$, і $\xi_0 = 0$. Довести, що сумісна щільність вектора $X = (\xi_1, ..., \xi_n)$ дорівнює

$$L(x, \theta) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp(-\sum\nolimits_{k=1}^{n} (x_k - \theta x_{k-1})^2/2\sigma^2), \quad x_0 = 0.$$

Довести, що критерій відношення вірогідностей для перевірки гіпотези $H_0 : \theta = 0$ проти альтернативи $H_1 : \theta \neq 0$ визначається статистиками

$$\sum\nolimits_{k=1}^{n-1} \xi_k\xi_{k+1}, \ \sum\nolimits_{k=1}^{n-1} \xi_k^2.$$

5. 12 хлопчиків та 10 дівчаток пройшли тест на швидкість читання, в результаті якого виявилось, що середня швидкість читання у хлопчиків дорівнює 74 слів за хвилину зі стандартним відхиленням 3, а у дівчаток – 79 з середнім квадратичним відхиленням 4. Чи можна вважати що здібності до читання у хлопчиків та дівчаток відрізняються з вірогідним рівнем 0.05?

6. При порівнянні середніх страхових премій для полісів двох компаній використаний двохвибірковий t-тест у припущенні, що дисперсії виборок однакові. Об'єми вибірок та вибіркові дисперсії дорівнюють

$n_1 = 25, \ \ \sigma_1^2 = 139.7, \ \ n_2 = 30, \ \sigma_2^2 = 76.6.$

Провести відповідний $F-$тест на 5%-у рівні для перевірки гіпотези про рівність дисперсій виборок.

7. Вибіркове среднє для 16 спостережень певної випадкової величини дорівнює 2.4, а вибіркове стандартне відхилення для даної вибірки дорівнює 0.2. Чи можна стверджувати, що вибірка одержана з нормального розподілу з середнім 2.5 (вірогідний рівень $\alpha = 0.05$)?

8. Дві незалежні кратні вибірки об'єму n з мають нормальні розподіли спостережень, з невідомими середніми μ_k та відомими дисперсіями σ_k^2, $k = 1, 2$. Довести, що мінімальне число спостережень для перевірки гіпотези $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$ проти альтернативи $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta$ при похибках α, β першого та другого роду, до-

рівнює $n_{\alpha\beta} = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)(x_\alpha + x_\beta)^2 \ / \ \delta^2$, де x_α, x_β – квантилі рівнів $1-\alpha, 1-\beta$ для стандартного нормального розподілу.

9. Зі статистичних опитувань 800 домовласників у США з'ясувалось, що 29% з них мають ступінь бакалавра. Оцінити на вірогідному рівні 0.05 теоретичну ймовірність того, що серед 4 наступних опитуваних є хоча б один бакалавр.

10. В результаті опитування 17 працівників компанії A та 25 працівників компанії B виявилось, що середня заробітна платня працівників компанії A становить 10000 з стандартним відхиленням 900, а середня зарплатня працівників компанії B становить 9000 з стандартним відхиленням 800. Вважаючи розмір заробітної плати нормально розподіленою випадковою величиною, перевірити з вірогідним рівнем 0.01 гіпотезу про те, що дисперсія зарплати працівників компанії A більша, ніж така дисперсія в компанії B.

11. В результаті вимірювання зросту 12 дорослих японців та 12 дорослих англійців визначили, що середній зріст японців становить 167.5 см з середнім квадратичним відхиленням 7.5 см, а середній зріст англійців становить 175 см з середнім квадратичним відхиленням 5 см. Чи можна стверджувати з вірогідним рівнем 0.05, що англійці вищі, ніж японці?

12. Спостерігається кратна вибірка $X = (\xi_k, k = \overline{1,n})$ з нормального розподілу $N(\mu, \sigma^2)$ та невідомими параметрами. Побудувати на підставі $t-$статистики $\sqrt{n}\widehat{\mu}_n/\widehat{s}_n$ критерій рівня α для перевірки гіпотези $\mu/\sigma \le \theta_0$ проти альтернативи $\mu/\sigma > \theta_0$ та дослідити його потужність.

13. Спостерігається кратна вибірка $X = ((\xi_{1k}, \xi_{2k}), k = \overline{1,n})$ з двовимірного нормального розподілу $N_2(0, 0, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$. Довести, що статистика критерію відношення вірогідностей для перевірки гіпотези $H_0 : \rho = 0$ проти альтернативи $H_1 : \rho \ne 0$ є функцією від $|\tau|$, де

$$\tau = \left(\sum_{k=1}^n \xi_{1k}\xi_{2k}\right) / \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n \xi_{1k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^n \xi_{2k}^2\right)}.$$

14. Випадкова величина τ_n має розподіл Стьюдента з параме-

тром n. Довести, що

$$n^{-1} \ln \mathbf{P}(\tau_n > t\sqrt{n}) \to -1/2 \ \ln(1+t^2), \quad n \to \infty, \quad t > 0.$$

3.14. Найбільш потужні критерії відношення вірогідностей

Література: [1,с.412-422], [2,с.419-427]. Ауд: 1-4, сам: 5-8.

1. Нехай про невідому ймовірність "успіху" в схемі Бернуллі $B(1, \theta)$ є дві гіпотези: $H_0 : \theta = \theta_0$ та $H_1 : \theta = \theta_1 > \theta_0$. Побудувати критерій Неймана-Пірсона для гіпотези H_0 проти альтернативи H_1. Знайти потужність цього критерію.

2. Кількість вимог, які виникають через рік для полісу деякого типу, моделюється розподілом Пуассона із середнім λ. Необхідно перевірити гіпотезу $H_0 : \lambda = 0.2$ проти $H_1 : \lambda > 0.2$. Вирішено відхилити H_0 на користь H_1, якщо 15 або більше вимог виникають через рік для групи з 50 незалежних таких полісів. Використовуючи асимптотичну нормальність розподілу Пуассона, обчислити потужність цього тесту у кожному з випадків: (а) $\lambda = 0.3$, і (б) $\lambda = 0.4$.

3. Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – кратна вибірка з функцією розподілу спостережень F. Побудувати критерій відношення вірогідностей для перевірки гіпотези про показниковий розподіл $F_0(x) = 1 - \exp(-x)$ проти альтернативи $F_1(x) = 1 - \exp(-\theta x), x \geq 0, \theta > 1$.

4. N осіб проходять аналіз крові, з імовірністю p фіксується захворювання кожної незалежно від інших. Процедура перевірки зводиться до аналізу сумарної проби кожної з k підгруп з приблизно однаковими кількостями осіб у кожній. Якщо результат негативний (жодна особа з підгрупи не захворіла), то він поширюється на кожну особу з підгрупи, інакше повторно аналізується кожна особа підгрупи. Довести, що при малих p значення k, що мінімізує середню кількість тестів, наближено дорівнює $N\sqrt{p}$, а відповідна кількість тестів становить $2N\sqrt{p}$. Порівняйте цю кількість з відповідною кількістю для стандартної процедури.

5. Для розподілу Коші $K(\theta)$ зі щільністю $\pi^{-1}/(1+(x-\theta)^2)$ перевіряється гіпотеза $H_0 : \theta = 0$ проти альтернативи $H_1 : \theta = 1$. Показати, що рівномірно найбільш потужний критерій вірогідного рівня $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0,352$ за одним спостереженням задається вибірковою критичною областю $\left\{x \geq \frac{1}{2}\right\}$ та що його потужність дорівнює $\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0,648$. Якщо вірогідний рівень $\alpha = \frac{1}{\pi}\,(\mathrm{arctg}3 - \mathrm{arctg}1) \approx 0,148$, то вибіркова критична область має вигляд $\{1 \leq x \leq 3\}$, потужність критерію дорівнює $\frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}2 \approx 0,352$.

6. Знайти критерій відношення вірогідностей для нормальної схеми за кратною вибіркою для перевірки нульової та альтернативної гіпотез вигляду: $H_i : \mu = \mu_i, \sigma = \sigma_i, i = 0,1$, з відомими дисперсіями σ_i^2 (використати теорему про розподіл вибіркових статистик для нормальної вибірки).

7. Обчислити критерій відношення вірогідностей для перевірки гіпотези про значення параметра для кратної вибірки з (а) пуассоновим; (б) геометричним; (в) показниковим розподілом. Знайти потужність критерію, перевірити його незміщеність та консистентність.

8. Нехай $X = (\xi_1, ..., \xi_n)$ – кратна вибірка, а $f(y,\theta)$ – функція вірогідності одного спостереження. (а) Довести, що $\ln l_{01}(X) = \sum_{k=1}^{n} \eta_k$, де випадкові величини $\eta_k = \ln(f(\xi_k,\theta_1)/f(\xi_k,\theta_0))$ незалежні та однаково розподілені. (б) $\mathbf{E}_{\theta_0}\eta_1 = -I(\theta_1,\theta_0)$, де $I(\theta_1,\theta_0)$ – інформація за Кульбаком. (в) Довести, що при $n \to \infty$ для критичного рівня у лемі Неймана-Пірсона виконується зображення $\ln l_\alpha + nI(\theta_1,\theta_0) \simeq x_\alpha\sigma_0\sqrt{n}$, де $\sigma_0^2 = \mathbf{D}_{\theta_0}\eta_1,\ \Phi(x_\alpha) = 1-\alpha$.
(г) Вивести асимптотичне зображення для ймовірності похибки другого роду.

9. Довести, що оптимальні (а) Байесовський, та (б) мінімаксний критерії для перевірки простих гіпотез також основані на статистиці відношення вірогідностей.

10. Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – кратна вибірка зі щільністю оберненого нормального розподілу:

$$f(y,\theta) = (\theta/2\pi y^3)^{1/2} \exp(-\theta y/2 + \theta - \theta/2y), y > 0.$$

Знайти критерій Неймана-Пірсона для перевірки гіпотези $H_0 : \theta = \theta_0$ проти альтернативи $H_1 : \theta < \theta_0$, на основі нормальної апроксимації.

11. Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – кратна вибірка з нормального розподілу $N(\theta, \sigma^2)$, де σ^2 - відома дисперсія. Побудувати критерій Неймана-Пірсона перевірки гіпотези $H_0 : \theta = \theta_0$ проти альтернативи $H_1 : \theta = \theta_1 > \theta_0$. Знайти потужність побудованого критерію.

12. Спостерігається вибірка $\xi_1, \ldots, \xi_n$ з незалежних спостережень, що мають розподіли Пуассона: $\xi_j \simeq \Pi(\lambda_j)$, де $\lambda_j = a + bt_j$ з невідомими (a, b) та додатними різними t_j. Перевірити гіпотезу $H_0 : b = 0$ за критерієм відношення вірогідностей.

13. Спостерігаються дві незалежні кратні нормальні вибірки з відомими середніми та невідомими дисперсіями

$$X = (\xi_{ik}, i = \overline{1, n_k}, k = 1, 2), \quad \xi_{ik} \simeq N(\mu_k, \sigma_k^2).$$

Побудувати рівномірно найбільш потужний критерій відношення вірогідностей для перевірки (а) гіпотези $H_0 : \mu_1 \leq \mu_2$ проти альтернативи $H_1 : \mu_1 > \mu_2$, у припущенні $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$; (б) гіпотези $H_0 : \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$ проти альтернативи $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ при відомих середніх.

14. Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – кратна вибірка з експоненціального розподілу $\Gamma(\theta, 1)$. Побудувати критерій перевірки гіпотези H_0: $\theta = \theta_0$ проти альтернативи H_1: $\theta = \theta_1$. Знайти функцію потужності цього критерію.

15. Гіпотезу про симетричність монети перевіряють за результатами n підкидань. Довести, що критична область критерія відношення вірогідностей має вигляд $\{|\nu_n - n/2| \geq x_\alpha\}$, де ν_n – кількість аверсів.

16. Знайти рівномірно найбільш потужний критерій відношення вірогідностей для перевірки гіпотези про значення ймовірності успіху для вибірки з біноміального розподілу.

17. Знайти рівномірно найбільш потужний критерій для перевірки гіпотези $H_0 : \theta = \theta_0$ проти альтернативи $H_1 : \theta > \theta_0$ для вибірки з рівномірного розподілу $U(0, \theta)$.

18. Спостерігаються n випробувань Бернуллі з імовірністю успі-

ху θ, а вибірка представлена кількістю успіхів до першого неуспіху. Знайти критерій відношення вірогідностей для перевірки гіпотези $H_0 : \theta = \theta_0$ проти альтернативи $H_1 : \theta = \theta_1$.

19. Нехай X – кратна вибірка з нормальним розподілом $N(\mu, \sigma^2)$ спостережень та невідомим параметром $\theta = (\mu, \sigma^2)$. Побудувати найбільш потужний критерій для перевірки гіпотези $H_0 : \mu = 0$, що спирається на статистику $T = (\sup_{\theta\in\Theta_0} L(X, \theta))/(\sup_{\theta\in\Theta} L(X, \theta))$.

20. Кратна вибірка $X = (\xi_1, ..., \xi_n)$ утворена спостереженнями з показниковими розподілами $Exp(\theta)$. Знайти розподіл випадкової величини $\tau = \inf(k \geq 1 : \xi_k > 1)$ для однобічного послідовного критерію з $c_0 = 1$.

21. Випадкові величини $(\xi_k, k \geq 1)$ незалежні та мають однакові рівномірні розподіли $U(0, \theta)$. Довести, що кількість спостережень послідовного критерію перевірки гіпотези $H_0 : \theta = 1$ проти альтернативи $H_1 : \theta = 2$ дорівнює $\tau = \inf(k \geq 1 : \xi_k > 1)$ за умови скінченності та $\tau = n$ у протилежному випадку. Довести, що ймовірності похибок першого та другого роду дорівнюють відповідно 0 і 2^{-n}, та $\mathbf{E}(\tau \mid H_0) = n$, $\mathbf{E}(\tau \mid H_1) = 2 - 2^{1-n}$.

22. Довести, що статистика з гіпергеометричним розподілом задовольняє умову монотонності відношення вірогідностей. Побудувати відповідний найбільш потужний критерій.

23. Маємо n випробувань Бернуллі з ймовірністю успіху p. Побудувати критерій для перевірки гіпотези $H_0 : p = 0$ проти альтернативи $H_1 : p = 0.1$, у якому ймовірності похибок першого та другого роду не перевищують 0.01.

24. Нехай спостереження X за гіпотезою H_0 має щільність f_0, а за гіпотезою H_1 - f_1. Розглянемо критерій з вибірковою критичною областю $W_c = \{x \in S : f_1(x) \geq cf_0(x)\}$ для сталої $c > 0$. Позначимо через $\alpha(c), \beta(c)$ відповідні похибки першого та другого роду. Довести, що: (а) $\beta(c)/(1-\alpha(c)) \leq c \leq \alpha(c)/(1-\beta(c))$; (б) $\alpha(c)+\beta(c) \leq 1$ - незміщеність; (в) $\alpha(c) + \beta(c) \geq \alpha(1) + \beta(1)$ (найкращий критерій при $c = 1$).

25. Кратна вибірка $X = (\xi_1, ..., \xi_n)$ містить спостереження з розподілом Бернуллі: $\mathbf{P}_\theta(\xi_1 = x) = \theta^x(1-\theta)^{1-x}, x \in \{0, 1\}$. Довести,

що найбільш потужний критерій для перевірки $H_0 : \theta = 1/2$ проти $H_1 : \theta = 1/3$ має критичну область $W = \{X : \nu_n \equiv \sum_{j=1}^{n} \xi_j \le c\}$. З центральної граничної теореми знайти n та c такі, що вірогідний рівень та потужність критерію наближено дорівнюють 0.1 та 0.9.

26. Кратна вибірка $X = (\xi_1, ..., \xi_n)$ містить спостереження з розподілом $\xi_1 \simeq N(\theta, 1)$. Перевіряється гіпотеза $H_0 : \theta = 1$ проти $H_1 : \theta < 1$. Побудувати критичну область W для рівномірно найбільш потужного критерія, обчислити оперативну характеристику (функцію потужності) при вірогідному рівні α.

3.15. Метод найменших квадратів

Література: [1,c.423-434], [2,c.432-441]. Ауд: 1-4, сам: 5-8.

1. Дані наступної таблиці містять кількості смертних випадків за причини AIDS у Австралії протягом 12 послідовних кварталів, що починаються з другого кварталу 1983 року.

Квартал (i):	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Випадків (N_i):	1	2	3	1	4	9	18	23	31	20	25	37

Зобразити графік розсіяння даних. Статистик запропонував таку модель: $\mathbf{E}[N_i] = \gamma i^2$, де γ – параметр, що буде оцінений з вищезгаданих даних. (а) Показати, що оцінка методу найменших квадратів, що мінімізує суму $q = \sum_{i=1}^{12}(N_i - \gamma i^2)^2$, дорівнює

$$\widehat{\gamma} = (\sum\nolimits_{i=1}^{12} i^2 N_i)/(\sum\nolimits_{i=1}^{12} i^4).$$

(б) Показати, що альтернативна зважена оцінка методу найменших квадратів, що мінімізує суму $q^* = \sum_{i=1}^{12}(N_i - \gamma i^2)^2/i^2$, дорівнює

$$\widetilde{\gamma} = (\sum\nolimits_{i=1}^{12} N_i)/(\sum\nolimits_{i=1}^{12} i^2).$$

(в) Відомо, що $\sum_{i=1}^{12} i^4 = 60710$, $\sum_{i=1}^{12} i^2 = 650$. Обчислити $\widehat{\gamma}$ й $\widetilde{\gamma}$ для вищезгаданих даних. (г) Щоб оцінити, чи є адекватною модель одного параметра у (а), розглянемо двопараметричну модель $E[N_i] = \gamma i^\theta$. Для оцінки параметрів γ, θ, використаєио просту лінійну модель регресії $E[Y_i] = \alpha + \beta x_i$, де $x_i = \ln i$, $Y_i = \ln N_i$,

$i = \overline{1, 12}$. Пов'язати параметри γ, θ з параметрами регресії α, β. Використанням значення оцінки β, провести статистичний тест для оцінки, чи є модель, що запропонована у (а), адекватною.

2. Для квадратично інтегровних випадкових величин ξ, η довести, що середньоквадратичне відхилення $\mathbf{E}(\eta - a - b\xi)^2$ набуває найменшого значення при $b = \mathrm{cov}(\xi, \eta)/\mathbf{D}\xi$, $a = \mathbf{E}\eta - b\mathbf{E}\xi$.

3. Судові експерти використовують різні методи для того, щоб визначити ймовірний час смерті під час посмертної експертизи людських тіл. Недавно запропонований об'єктивний метод використовує концентрацію складу (3-methoxytyramine або 3MT) у специфічній частині мозку. У вивченні відносин між посмертним інтервалом і концентрацією 3MT були взяті зразки відповідної частини мозку, для яких час смерті було визначено за показами свідка. Інтервали (x; у годинах) і концентрації (y; у частинах на мільйон) для 18 індивідуумів, що були знайдені померлими від органічної серцевої хвороби, задані наступною таблицею. Для останніх двох індивідуумів (17-го та 18-го у таблиці), показів свідків немає, і встановлено лише інформацію про активність індивідуумів на відповідні моменти. У цьому дослідженні необхідно дослідити зв'язок між концентрацією (як змінної відгуку) і інтервалом (як незалежною величиною). (а) Побудувати графік розсіяння (scatterplot) даних. (б) Обчислити коефіцієнт кореляції для даних, і використати його, для перевірки нульової гіпотези про те, що теоретичний коефіцієнт кореляції є нульовим. (в) Обчислити регресійну пряму методом найменших квадратів, і використати її для оцінки концентрації 3MT: після 1 дня та після 2 днів. (г) Обчислити 99%-й вірогідний інтервал для нахилу лінії регресії. Використати цей вірогідний інтервал для перевірки гіпотези про те, що нахил нульовий.

Номер спостереження	Інтервал (x)	Концентрація (y)
1	5.5	3.26
2	6.0	2.67

Номер спостереження	Інтервал (x)	Концентрація (y)
3	6.5	2.82
4	7.0	2.80
5	8.0	3.29
6	12.0	2.28
7	12.0	2.34
8	14.0	2.18
9	15.0	1.97
10	15.5	2.56
11	17.5	2.09
12	17.5	2.69
13	20.0	2.56
14	21.0	3.17
15	25.5	2.18
16	26.0	1.94
17	48.0	1.57
18	60.0	0.61

$$\sum x = 337,\ \sum x^2 = 9854.5,$$
$$\sum y = 42.98,\ \sum y^2 = 109.7936,\ \sum xy = 672.8.$$

4. Знайти оцінку (a, b) методу найменших квадратів перпендикулярних відстаней від регресії, що мінімізує суму

$$\sum_{j=1}^{n} (\xi_j - a - bx_j)^2/(1 + b^2).$$

5. Показати, що нахил лінійної регресії, що оцінений методом найменших квадратів за трьома спостереженнями $(0, 0), (1, y), (2, 2)$ дорівнює 1 для всіх значень y.

6. Нехай $X = (\xi_j,\ j = \overline{1, n})$ – довільна вибірка така, що $\mathbf{E}\xi_j = \mu$, $\mathbf{D}\xi_j = \sigma^2$, $\mathrm{cov}(\xi_j, \xi_k) = \rho\sigma^2$, $j \neq k$. Довести, що в класі лінійних за спостереженнями оцінок найменшу дисперсію має вибіркове середнє $\widehat{\mu}_n$.

7. Нехай $\xi_k = \theta_{l(k)} + \varepsilon_k, k = \overline{1, n}$, де $l(k) = 1$ при $k \leq m$ та $l(k) = 2$ при $k > m$, а ε_k – незалежні величини з розподілом $N(0, \sigma^2)$. Знайти оцінку МНК для параметра (θ_1, θ_2).

8. Випадковий вектор (ξ,η) має сумісну щільність $f(x,y)$, а вагова функція $w(x,y) > 0$ така, що величина $(\xi^2+\eta^2)w(\xi,\eta)$ інтегровна. Визначимо зважену оцінку МНК

$$(a^*,b^*) = \arg\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \mathbf{E}w(\xi,\eta)(\eta - a - b\xi)^2.$$

Нехай сумісна щільність вектора (ξ^*,η^*) пропорційна $f(x,y)w(x,y)$. Довести, що $b^* = \mathrm{cov}(\xi^*,\eta^*)/\mathbf{D}\xi^*$, $a^* = \mathbf{E}\eta^* - b^*\mathbf{E}\xi^*$.

9. Довести, що без припущення нормальності моделі оцінка МНК $\widehat{\theta}$ та оцінка $\widehat{\sigma}^2_{n-k}$ є незміщеними для θ та σ^2, і $\mathrm{Cov}_\theta(\widehat{\theta}) = \sigma^2 V^{-1}$.

10. Довести, що випадкові вектори $X - T'\widehat{\theta}$ і $T'(\widehat{\theta} - \theta)$ (а) ортогональні м.н.; (б) некорельовані; (в) у випадку нормальної моделі незалежні.

11. Нехай у моделі лінійної регресії $X = T'\theta + \varepsilon$ координати вектора похибок ε незалежні, а $\widehat{\theta}$ – ОМВ вектора θ. (а) Якщо ε_j рівномірно розподілені на інтервалі $[-\sigma,\sigma]$, то $\widehat{\theta}$ мінімізує функцію контрасту $\max_{1\le j\le n}\left|\xi_j - (T'\theta)_j\right|$. (б) Якщо похибки ε_j мають щільності Лапласа $(2\sigma)^{-1}\exp(-|y|/\sigma)$, то значення $\widehat{\theta}$ мінімізує суму абсолютних відхилень $\sum_{j=1}^n \left|\xi_j - (T'\theta)_j\right|$. Знайти ОМВ для σ.

12. Визначимо для випадкового вектора $\xi = (\eta,\zeta)$ змішані моменти $\mu_{ij} = E\eta^i\zeta^j$, та для кратної векторної вибірки $X = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$ вибіркові змішані моменти $\widehat{\mu}_{ij} = n^{-1}\sum_{k=1}^n \eta_k^i\zeta_k^j$. (а) Узагальнити метод моментів на клас змішаних моментів. (б) Нехай має місце модель лінійної регресії $\eta_k = a + b\zeta_k + \varepsilon_k$, $k = \overline{1,n}$, з некорельованими однаково розподіленими центрованими похибками ε_k. Довести, що оцінка методу моментів параметра $\theta = (a,b)$ має вигляд

$$\widehat{b} = \left(\sum_{k=1}^n (\eta_k - \widehat{\eta}_n)(\xi_k - \widehat{\xi}_n)\right) / \sum_{k=1}^n (\xi_k - \widehat{\xi}_n)^2, \quad \widehat{a} = \widehat{\eta}_n - \widehat{b}\widehat{\xi}_n.$$

13. Нехай $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ – кратна вибірка з нормального розподілу на площині: $\xi_j = (\zeta_{1j},\zeta_{2j}) \simeq N_2(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$. (а) Довести, що ОМВ для $(\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ при відомих μ_1,μ_2 дорівнює:

$$\widehat{\sigma}_i^2 = n^{-1}\sum_{j=1}^n (\zeta_{ij} - \mu_i)^2, i = 1,2,$$

$$\widehat{\rho} = \left(\sum_{j=1}^n (\zeta_{1j} - \mu_1)(\zeta_{2j} - \mu_2)\right) / n\widehat{\sigma}_1\widehat{\sigma}_2.$$

(б) При невідомих μ_1, μ_2 та $n > 5$ ці оцінки визначаються, як і у попередній задачі.

14. Обчислити перші п'ять поліномів Чебишева.

15. Ракета рухається рівномірно та прямолінійно, вимірювання її координат у моменти $t = \overline{1, 5}$ дорівнюють 22.97, 23.06, 23.33, 24.21, 23.98. Побудувати вірогідні інтервали для положення ракети у момент $t = 0$ та її швидкості на рівні 0.99.

16. Випадкові величини $(\xi_k, k = \overline{1, n})$ незалежні та мають спільну функцію розподілу вигляду $F((x - \mu)/\sigma)$ з відомою функцією розподілу F та невідомими параметрами μ, σ. Зобразивши $\xi_j = \mu + \sigma\alpha_j = \mu + \sigma m + \varepsilon_j$, де α_j мають функцію розподілу F, $m = \mathbf{E}\alpha_1$, $\varepsilon_j = \alpha_j - m$, знайти оцінки методу найменших квадратів для μ, σ.

17. Значення функції $x(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2$ наближено обчислені: $\xi_j = \beta_0 + \beta_1 t_j + \beta_2 t_j^2 + \varepsilon_j$, $j = \overline{1, n}$, $\mathbf{E}\varepsilon_j = 0$, $\mathrm{Cov}(\varepsilon) = \sigma^2 I$. Знайти оцінки МНК $\widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2$ параметрів $\beta_0, \beta_1, \beta_2$, їх середні та коваріації. Чи є статистика $\int_0^1 (\widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 t + \widehat{\beta}_2 t^2) dt$ незміщеною для $\int_0^1 x(t) dt$?

18. Довести, що оцінка МНК у задачі лінійної регресії у випадку, коли коваріаційна матриця похибок дорівнює $\mathrm{Cov}(\varepsilon) = \sigma^2 V$ з відомою додатно визначеною матрицею V, має вигляд

$$\widehat{\theta} = (TV^{-1}T')^{-1}TV^{-1}X.$$

19. Спостереження ξ_j з вибірки $X = (\xi_1, ..., \xi_n)$ має розподіл Пуассона з параметром θx_j з відомим x_j. Знайти ОМВ для θ, обчислити її асимптотичну дисперсію. Порівняти останню з дисперсією незміщеної оцінки МНК $(\sum_{j=1}^n \xi_j x_j)/(\sum_{j=1}^n x_j^2)$ та пересвідчитись у неефективності Оцінки Максимальної Вірогідності..

20. Довести, що для лінійної моделі $X = T_1'\theta_1 + T_2'\theta_2 + \varepsilon$ оцінка МНК має вигляд $\widehat{\theta}_1 = (T_1 T_1')^{-1} T_1 (X - T_2'\widehat{\theta}_2)$, $\widehat{\theta}_2 = (T_2 V T_2')^{-1} T_2 V X$, де $V = I - T_1'(T_1 T_1')^{-1} T_1$.

3.16. Кореляційний та дисперсійний аналіз

Література: [1,с.432-434], [2,с.434-444]. Ауд: 1-2, сам: 3-4.

1. Дані про смертність населення використовуються для оцінки параметрів захворюваності. Такі дані було наведено для 10 регіонів у таблиці

Регіон	Смертність на 10000(m)	Захворюваність на 1000 (s)
1	125.2	206.8
2	119.3	213.8
3	125.3	197.2
4	111.7	200.6
5	117.3	189.1
6	100.7	183.6
7	108.8	181.2
8	102.0	168.2
9	104.7	165.2
10	121.1	228.5

Сумарні дані:
$\sum m = 1136.1$, $\sum m^2 = 129853.03$,
$\sum s = 1934.2$, $\sum s^2 = 377700.62$, $\sum ms = 221022.58$.
(а) Обчислити коефіцієнт кореляції між смертністю та захворюваністю та знайти P-значення гіпотези, що вказаний коефіцієнт дорівнює нулю. Сформулювати результат дослідження, зобразити графік залежності та пояснити характер залежності. (б) Обчислити оцінки коефіцієнтів регресії захворюваності по відношенню до смертності та перевірити гіпотезу про те, що коефіцієнт нахилу не перевищує 2.0; (в) дорівнює 0. (г) Для регіону зі смертністю 115.0 оцінити величину захворюваності та обчислити 95%-і границі для цієї захворюваності.

2. У дослідженні різниці у розмірах вимог між трьома різними областями, була зроблена випадкова вибірка з незалежних вимог, та

було проведено дисперсійний аналіз. Таблиця ANOVA дана нижче з деякими пропущеними входженнями:

Джерело зміни	с.с.	SS	MSS
Між областями	2	4439.7	2219.9
Залишки	?	?	?
Всього	29	15153.2	

Обчислити відсутні входження у цій таблиці, і виконати відповідний F-тест для визначення, чи є істотними розходження між середніми вимогами для цих трьох областей.

3. У експерименті для порівняння результативності вакцин різної сили призначили дітям дванадцять комплектів вакцин, у дванадцятьох групах однакового розміру. Було зафіксовано відсотки дітей, хто залишився здоровим після експонування до умови, за назвою PRH. Сила кожної партії вакцин вимірювалася у незалежних випробуваннях і реєструвалася як значення SV. Зареєстровані значення:

Партія:	1	2	3	4	5	6
PRH(y):	16	68	23	35	42	41
SV(x):	0.9	1.6	2.3	2.7	3.0	3.3
Партія:	7	8	9	10	11	12
PRH(y):	46	48	52	50	54	53
SV(x):	3.7	3.8	4.1	4.2	4.3	4.5

$\sum x = 38.4$, $\sum y = 528$,

$\sum x^2 = 137.16$, $\sum y^2 = 25428$, $\sum xy = 1778.4$

(а) Зобразити наближений графік, щоб показати зв'язок між SV й PRH. (б) Обчислити повну суму квадратів, суму квадратів регресії, і залишкову суму квадратів для методу найменших квадратів лінійного регресійного аналізу для PRH проти SV, що використають всі 12 спостережень даних. Визначити коефіцієнт детермінації R^2. Визначити рівняння лінії регресії. (в) Дослідити, чи дійсно на 5% рівні можна стверджувати, що нахил основної регресії ненульовий.

4. Нехай пряма лінія отримана методом найменших квадратів з набору даних $\{(x_i, y_i), i = \overline{1,n}\}$, що має вибірковий коефіцієнт

кореляції r. Нехай оцінка значення у точці x_i дорівнює $\widehat{y}_i$. Довести, що вибірковий коефіцієнт кореляції для даних $\{(y_i, \widehat{y}_i), i = \overline{1, n}\}$ також дорівнює r.

5. Наступні дані відносяться до спалаху ботулізму. Для кожного об'єкту дослідження - людини, що захворіла - зареєстрований її вік X у роках , період Y між моментом споживання неякісної їжі та виникненням ознак хвороби, та ознака S виживання людини: Y - вижив (Survival), N - помер (Dead).

Особа	01	02	03	04	05	06	07	08	09
Вік	29	39	44	37	42	17	38	43	51
Період	13	46	43	34	20	20	18	72	19
Ознака	N	Y	Y	N	N	Y	N	Y	N
Особа	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Вік	30	32	59	33	31	32	32	36	50
Період	36	48	44	21	32	86	48	28	16
Ознака	N	N	Y	N	N	Y	N	Y	N

Померли: $\sum x = 405$, $\sum y = 305$, $\sum x^2 = 15517$, $\sum y^2 = 10035$.

Вижили : $\sum x = 270$, $\sum y = 339$, $\sum x^2 = 11396$, $\sum y^2 = 19665$.

(а) Побудувати графік залежності періоду від віку, з урахуванням ознаки. (б) Побудувати відповідні точкові графіки залежності між віком та виживанням, періодом та виживанням. (в) Побудувати 95%-і та 99%-і вірогідні інтервали для середніх періодів для груп, що вижили та тих, хто померли, і одночасно для різниці цих величин. (г) Провести перевірку гіпотези про те, що дисперсії періодів для груп, що вижили та тих, хто померли, однакові.

6. Розглянемо поліноміальну модель

$$\xi_j = \beta_0 + \beta_1 t_j + \beta_2 t_j^2 + \beta_3 t_j^3 + \varepsilon_j, \quad j \le n$$

з центрованими незалежними однаково розподіленими ε_j. Нехай $n = 12$, $t_j = 0, j \le 4$, $t_j = -1, 4 < j \le 9$, $t_j = 1$, $9 < j \le 12$. Довести, що для наступних функцій існують незміщені оцінки:

$$\beta_0 + \beta_2,\ \beta_1,\ \beta_0 - \beta_1,\ \beta_1 + \beta_3,\ \text{та}\ \ \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3.$$

7. Величини $(\xi_i, i = \overline{1, 3})$ некорельовані, мають додатні середні μ_i та малі коефіцієнти варіації $v_i^2 = \mathbf{D}\xi_i / \mu_i^2, i = \overline{1, 3}$. Довести на-

ближення для коефіцієнта кореляції

$$\rho(\xi_1\xi_3,\ \xi_2\xi_3) \approx v_3^2((v_1^2+v_3^2)(v_2^2+v_3^2))^{-1/2}.$$

8. Дві двовимірні нормальні вибірки мають однакові (невідомі) коефіцієнти кореляції $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, невідомі інші параметри, та об'єми n_i та вибіркові коефіцієнти кореляції r_i, $i = 1, 2$. Довести, що оцінка максимальної вірогідності ρ дорівнює

$$\widehat{\rho} = (n(1+r_1r_2) - (n^2(1-r_1r_2)^2 - 4n_1n_2(r_1-r_2)^2)^{1/2})/2(n_1r_2+n_2r_1),$$

де $n = n_1 + n_2$.

9. Розглянемо лінійну двохфакторну модель, у якій двовимірна вибірка $X = (\xi_{ij}, i = \overline{1,n}.j = \overline{1,m})$ задовольняє рівняння

$$\xi_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij},\ i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m},$$

де похибки $\varepsilon_{ij} \simeq N(0,\sigma^2)$ незалежні у сукупності, а вектор невідомих параметрів $\theta = (\mu,\ (\alpha_i, i = \overline{1,n}),\ (\beta_j, j = \overline{1,m}),\ \sigma^2)$ такий, що виконуються умови центрованості: $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$, $\sum_{j=1}^m \beta_j = 0$. Довести, що вектор

$$\widehat{\theta} = (\overline{\xi}_{\bullet\bullet}, (\overline{\xi}_{i\bullet} - \overline{\xi}_{\bullet\bullet}, i = \overline{1,n}), (\overline{\xi}_{\bullet j} - \overline{\xi}_{\bullet\bullet}, j = \overline{1,m}), \widehat{\sigma}^2)$$

є оптимальною оцінкою для θ, що складається з 4 незалежних груп. Тут групові середні статистики мають вигляд

$$\overline{\xi}_{\bullet\bullet} = \sum\nolimits_{i=1}^n \sum\nolimits_{j=1}^m \xi_{ij}/nm,\ \overline{\xi}_{i\bullet} = \sum\nolimits_{j=1}^m \xi_{ij}/m,\ \ \overline{\xi}_{\bullet j} = \sum\nolimits_{i=1}^n \xi_{ij}/n,$$

$$\widehat{\sigma}^2 = \sum\nolimits_{i=1}^n \sum\nolimits_{j=1}^m (\xi_{ij} - \overline{\xi}_{i\bullet} - \overline{\xi}_{\bullet j} + \overline{\xi}_{\bullet\bullet})^2/(n-1)(m-1).$$

10. Кратна вибірка $X = (\xi_1, ..., \xi_4)$ містить стандартні нормальні спостереження. Довести, що сума квадратів відхилень від середнього $\sum_{j=1}^4 (\xi_j - \widehat{\mu}_4)^2$ дорівнює

$$(\xi_1-\xi_2)^2/2 + (\xi_3-(\xi_1+\xi_2)/2)^2/(3/2) + (\xi_4-(\xi_1+\xi_2+\xi_3)/3)^2/(4/3).$$

Довести, що доданки незалежні та мають хі-квадрат розподіли з 1 ступенем свободи.

11. Провести дисперсійний аналіз

Джерело	Ст.св.	SS	MSS	F	p-знач
Регресія	1	1486.9	1486.9	165.69	0.000
Помилка	9	80.8	8.98		
Всього	10	1567.6			

Обчислити 95% вірогідний інтервал для очікуваного значення PRH для партії вакцини з $SV = 3.5$.

3.17. Оптимальний прогноз для стаціонарних послідовностей

Література: [1,с.435-457], [2,с.445-469]. Ауд: 1-3, сам: 4-6.

1. Довести, що вінерів процес $(w(t), t \in [0, a])$ є процесом з ортогональними приростами. Знайти його спектральну функцію.

2. Нехай $(\eta_n, n \geq 0)$ незалежні однаково розподілені дійсні випадкові величини, а $(\nu(t), t \geq 0)$ – незалежний від них процес Пуассона. Довести, що випадковий процес $\xi_t = \exp(i\eta_{\nu(t)})$ є стаціонарним другого порядку, та знайти його коваріаційну функцію.

3. Знайти оптимальний прогноз для $\widehat{\xi}_1$, якщо спектральна щільність дорівнює $f(\lambda) = (25 + 24\cos\lambda)^{-1}$.

4. Довести, що за умови квадратичної сумованості коваріаційної функції: $\sum_{t\in\mathbb{Z}} |r(t)|^2 < \infty$ відповідна спектральна функція F має щільність вигляду $f(\lambda) = (2\pi)^{-1} \sum_{t\in\mathbb{Z}} \exp(-it\lambda) r(t)$.

5. Довести, що при $\alpha > 0$ випадковий процес

$$\xi_t = \exp(-\alpha t) W(\exp(2\alpha t)), t \in \mathbb{R}_+,$$

є стаціонарним другого порядку (процесом Орнштейна-Уленбека), та знайти його коваріаційну функцію. Тут $W(s)$ – вінерів процес.

6. Знайти оптимальний прогноз для $\widehat{\xi}_1$, якщо спектральна щільність дорівнює $f(\lambda) = 5 + 4\cos\lambda$.

7. Випадкові величини $(\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z})$ такі, що $\mathbf{E}\varepsilon_n = 0$, $\mathbf{E}\varepsilon_n\overline{\varepsilon_k} = \delta_{nk}$, а $(c_k, k = \overline{0, m})$ – довільні сталі. Тоді послідовність $\xi_n = \sum_{k=0}^m c_k \varepsilon_{n-k}$ є стаціонарною другого порядку. Знайти її коваріаційну функцію.

8. Строго стаціонарна послідовність $(\xi_n,\ n \in \mathbb{Z})$ є центрованою: $\mathbf{E}\xi_n = 0$ та має стохастичний спектральний процес $(\zeta(\lambda))$. Довести, що має місце збіжність: $n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \xi_n \to^{L_2} \widetilde{\zeta}(\{0\}), n \to \infty$, де $\widetilde{\zeta}$ – відповідна стохастична міра.

9. Строго стаціонарна послідовність $(\xi_n, n \in \mathbb{Z})$ така, що виконуються умови $\mathbf{E}\xi_n = 0$, та $\mathbf{E}\left|\sum_{k=0}^{n-1} \xi_k\right|^2 = O(n^{2-\delta}), n \to \infty$, при деякому $\delta > 0$. Довести, що $n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \to^{P1} 0, n \to \infty$.

10. Розклад Карунена – Лоева – Пугачова. Нехай $\xi(t), t \in [0,1]$ с.к. неперервний дійсний випадковий процес з нульовим середнім та коваріаційною функцією $r(t,s) = \mathbf{E}\xi(t)\xi(s)$. Ця функція неперервна та інтегровна з квадратом на $[0,1]^2$. Тому інтегральне рівняння Фредгольма у просторі $L_2[0,1]$:

$$\varphi(t) = \lambda \int_0^1 r(t,s)\varphi(s)ds$$

має для деяких $\lambda = \lambda_n > 0$ розв'язки $\varphi_n \in L_2[0,1], n \geq 1$, що утворюють ортонормований базис. Зокрема, справедливе зображення

$$r(t,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1}\varphi_n(t)\varphi_n(s).$$

Суму справа можна розглядати як спектральний розклад за лічильною мірою m, що має одиничні стрибки на $\mathbb{N}$. Застосувавши до цього розкладу теорему Карунена, побудуйте випадковий процес $\zeta(t)$ на $[0,1]$ з ортогональними приростами та зі спектральною функцією m. Позначимо $\zeta_n = \zeta(n+0) - \zeta(n-0)$ величини ненульових стрибків цього процесу. Тоді з теореми Карунена отримуємо зображення

$$\xi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1/2}\varphi_n(t)\ \zeta_n$$

з попарно ортогональними та нормованими $\zeta_n \in L_2(\mathbf{P})$.

Зокрема, для вінерівського процесу $w(t)$ маємо $r(t,s) = \min(t,s)$, $\lambda_n = \pi^2(n-1/2)^2$, $\varphi_n(t) = \sqrt{2}\sin(n-1/2)\pi t$, та

$$w(t) = \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n\ \pi^{-1}(n-1/2)^{-1}\sin(n-1/2)\pi t.$$

11. Нехай (ζ_n) – незалежні у сукупності стандартні нормальні величини. (а) Якщо $(\varphi_n(t), n \geq 1)$ – ортонормований базис у $L^2([0,1])$, то випадковий процес $w(t) = \sum_{n\geq 1} \zeta_n \int_0^t \varphi_n(s)ds$ є вінерівським процесом. (б) Сума збіжного у середньоквадратичному на $[0,2\pi)$ ряду $w(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \zeta_n(1-\exp(int))/in$ є вінерівським процесом на $[0,2\pi)$ (при $n = 0$ коефіцієнт визначається за неперервністю).

12. Нехай (ξ_n) – стаціонарна послідовність, випадкова величина $\eta \in H_2(\xi)$ має спектральну характеристику $g(\lambda)$, а θ – оператор зсуву. Довести, що спектральна характеристика $\theta\eta$ дорівнює $\exp(i\lambda)g(\lambda)$.

13. Випадкова величина ξ має нормальний розподіл $N(\mu, \sigma^2)$. Знайти скінченновимірні розподіли, математичне сподівання та коваріаційну функцію для випадкового процесу $\zeta(t) = \xi t + a$.

14. Випадкові величини ξ, η некорельовані, центровані та квадратично інтегровані, та $\alpha, \beta > 0$. Знайти скінченновимірні розподіли, математичне сподівання та коваріаційну функцію для випадкового процесу $\zeta(t) = \xi \exp(-\alpha t) + \eta \exp(-\beta t)$.

15. Випадкові величини ξ, η некорельовані, центровані та мають одиничні дисперсії, та $\alpha > 0$. Знайти математичне сподівання та коваріаційну функцію для випадкового процесу $\zeta(t) = t + \xi \cos(\alpha t) + \eta \sin(\alpha t)$.

16. Випадкова величина ξ має щільність та набуває значень з $[0, 1]$, а незалежна від неї $\eta \simeq U(-1, 1)$. Довести, що випадковий процес $\zeta(t) = \cos(\pi(\xi t + \eta))$ є стаціонарним, знайти його математичне сподівання та коваріаційну функцію.

17. Для якого стаціонарного процесу (ζ_t) існує границя при $t \to \infty$?

18. Знайти спектральну щільність стаціонарного процесу з коваріаційною функцією $r(t) = \exp(-\alpha\,|t|)\cos(\beta t), \alpha > 0$.

19. Знайти спектральну щільність стаціонарного процесу з коваріаційною функцією $r(t) = t^{-1}\sin t$.

20. Знайти спектральні характеристики для стаціонарної послідовності $\xi_n = \zeta \simeq N(0, 1)$.

21. Випадкові величини ξ, η незалежні та набувають значень ± 1 з імовірностями $1/2$, а $\xi_{2n-1} = \xi$, $\xi_{2n} = \eta$, при $n \geq 1$, де $\mathbf{E}\xi = \mathbf{E}\eta = 0$, $\mathbf{E}\xi^2 = \mathbf{E}\eta^2 = 1$. Знайти спектральні характеристики для стаціонарної послідовності (ξ_n).

22. Побудувати стаціонарну послідовність з коваріаційною функцією $r(n) = (-1)^n + 1, n \in \mathbb{Z}$.

3.18. Вказівки та відповіді

1.1. $\Omega = \{0,1\}^n$, $\mathfrak{F} = 2^{\Omega}$, $\mathbf{P}_\theta(A) = \sum_{\omega\in A} \theta^{\nu(\omega)}(1-\theta)^{n-\nu(\omega)}$, $\theta \in \Omega = [0,1]$, $\nu(\omega) = \sum_{j=1}^n 1\!\!\mathrm{I}_{\omega_j=1}$, $X(\omega) = \omega = (\omega_1, ..., \omega_n) = (\xi_1, ..., \xi_n)$, $T(\omega) = \nu(\omega)/n$, $L(x,\theta) = \mathbf{P}_\theta(X = x)$.

1.2. $\widehat{\theta}_1$ не є незміщеною для жодного з параметрів при $n > 1$, є асимптотично незміщеною та консистентною для a (доведіть за означенням), не є асимптотично нормальною ($\mathbf{P}(c_n(\widehat{\theta}_1 - a) < x) = 0$ при $x \le 0$ і $c_n > 0$). $\widehat{\theta}_2$ не є незміщеною для жодного з параметрів при $n > 1$, є асимптотично незміщеною та консистентною для b, не є асимптотично нормальною. $\widehat{\theta}_3$ є незміщеною, строго консистентною та асимптотично нормальною для $\frac{a+b}{2}$ (використати закон великих чисел та центральну граничну теорему). $\widehat{\theta}_4$ є незміщеною для $\frac{a+b}{2}$, не є ні консистентною, ні асимптотично нормальною (скористатися тим, що $\widehat{\theta}_4$ має симетричний трикутний розподіл на $[a,b]$).

1.3. Використати закон великих чисел для доведення консистентності оцінки $\widehat{\theta}_1$. (а) Так; (б) ні; (в) ні. Скористатися тим, що $\xi_1+\xi_n$ має розподіл Ерланга.

1.4. $c_{nkj} = n^{-k}\sum_{i=0}^{j}\frac{(-1)^{i+k}i^k}{i!(j-i)!}$. Оскільки $\sum_{i=1}^n \xi_i \simeq \Gamma(1, n\alpha)$, то умова незміщеності еквівалентна тотожності

$$\alpha^k = \sum_{j=1}^k c_{nkj} n\alpha(n\alpha+1)\dots(n\alpha+j-1).$$

Значення сталих можна знайти методом невизначених коефіцієнтів, підставляючи замість α значення $-n^{-1}, -2n^{-1}, \dots, -kn^{-1}$ і розв'язуючи відповідну систему рівнянь.

1.5. $\frac{\theta^2}{10}(11k^2 - 20k + 10)$, мінімум при $k = \frac{10}{11}$.

1.6. $(\Omega, \mathfrak{F}) = (\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n))$, $\Theta = \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$, $\theta = (\mu, \sigma^2)$, $X = (\xi_1, ..., \xi_n) \in S = \mathbb{R}^n$, $\mathbf{P}_\theta(X < x) = \prod_{j=1}^n \Phi((x_j - \mu)/\sigma)$, $L(x,\theta) = \prod_{j=1}^n \sigma^{-1}\varphi((x_j-\mu)/\sigma)$.

1.7. (а) Так; (б) так; (в) ні.

1.8. (а) $\widehat{\theta}_1$ — незміщена, $\widehat{\theta}_2$ — ні; (б) $\widehat{\theta}_1$ — консистентна, $\widehat{\theta}_2$ — ні; (в) $\widehat{\theta}_1$ — асимптотично нормальна, $\widehat{\theta}_2$ — ні.

1.9. Довести, що статистика $\max\{-\min_{1\le k\le n}\xi_k, \max_{1\le k\le n}\xi_k\}$ має щільність розподілу $f(y,\theta) = n\theta^{-n}y^{n-1}1\!\!\mathrm{I}_{y\in(0,\theta)}$.

1.10. $\mathbf{E}_\theta U_{ij} = \left(\prod_{k=1}^{i}\mathbf{E}\xi_k\right)\left(\prod_{l=1}^{j}(1-\mathbf{E}\xi_{i+l})\right)$.

1.11. Підвести до квадрату кожен доданок, а потім і суму $(\xi_1+\ldots+\xi_n)$.

1.12. $c_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$. Довести, що $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}\left(\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)^2$ має розподіл χ^2_{n-1}.

1.13. Показати, що статистики $T_1 = \xi_{(1)}$ та $T_2 = \sum_{i=1}^{n}\ln\xi_i - n\ln T_1$ — незалежні, причому величина T_1 має розподіл зі щільністю $f_{T_1}(y,\theta) = nba^{nb}y^{-nb-1}1\!\!\mathrm{I}_{y>a}$, а $T_2 \simeq \Gamma(\theta, n-1)$. Розглянути оцінки: (а) $\widehat{\tau}_1 = T_1^{-m}\left(1+\frac{mT_2}{n(n-1)}\right)$; (б) $\widehat{\tau}_2 = \frac{n-2}{T_2}$.

1.14. Використати лінійність математичного сподівання, закон великих чисел та центральну граничну теорему.

1.15. Знайти сумісну щільність статистик T_1, T_2:

$$f_{T_1,T_2}(y_1,y_2,\theta) = \frac{n}{a^n(n-2)!}y_2^{n-2}\exp\left\{-\frac{ny_1+y_2-nb}{a}\right\}1\!\!\mathrm{I}_{y_1>b,y_2>0}.$$

Звідси одержати щільності: $f_{T_1}(y_1,\theta) = \frac{n}{a}\exp\left\{-\frac{n(y_1-b)}{a}\right\}1\!\!\mathrm{I}_{y_1>b}$, $f_{T_2}(y_2,\theta) = \frac{1}{a^{n-1}(n-2)!}y_2^{n-2}\exp\left\{-\frac{y_2}{a}\right\}1\!\!\mathrm{I}_{y_2>0}$. Обидві оцінки є строго консистентними, $\widehat{a}$ є асимптотично нормальною, $\widehat{b}$ — ні.

1.16. $\mathbf{E}_\theta T = \tau(\theta) = \exp\{\theta - c\}1\!\!\mathrm{I}_{c>\theta} + 1\!\!\mathrm{I}_{c\le\theta}$.

1.17. (а) Спочатку показати, що медіана $\xi_{(2)}$ має розподіл зі щільністю

$$f_{\xi_{(2)}}(x,\theta) = \left(\tfrac{3}{2}(x-\theta+1) - \tfrac{3}{4}(x-\theta+1)^2\right)1\!\!\mathrm{I}_{x\in(\theta-1,\theta+1)}.$$

(б) Для розподілу $\mathrm{Exp}\left(\theta^{-1}\right)$

$$f_{\xi_{(2)}}(x,\theta) = \frac{6}{\theta}e^{-\frac{2x}{\theta}}\left(1-e^{-\frac{x}{\theta}}\right)1\!\!\mathrm{I}_{x>0}, \quad \mathbf{E}_\theta\xi_{(2)} = \frac{5\theta}{6}.$$

(в) Для випадку рівномірного розподілу $\widehat{\theta} = \xi_{(1)} + \frac{1}{3}$; для показникового — $\widehat{\theta} = 3\xi_{(1)}$.

1.18. Для доведення консистентності оцінки $\widetilde{\theta}_n$ зобразити її у вигляді $\widetilde{\theta}_n = \widehat{\theta}_n + \left(n^2 - \widehat{\theta}_n\right)1\!\!\mathrm{I}_{A_n}$ та оцінити

$$\mathbf{P}_\theta\left(\left|\left(n^2-\widehat{\theta}_n\right)1\!\!\mathrm{I}_{A_n}\right| > \varepsilon\right) \le \mathbf{P}_\theta(A_n).$$

Для доведення зміщеності обчислити $\mathbf{E}_\theta \widetilde{\theta}_n = \theta\left(1 - n^{-1}\right) + n$.

1.19. Використати лінійність математичного сподівання, врахувавши, що $\mathbf{E}\xi_{1j}\xi_{2k} = \begin{cases} \mathbf{E}\xi_{11}\xi_{21}, & j = k, \\ \mathbf{E}\xi_{11}\mathbf{E}\xi_{21}, & j \neq k. \end{cases}$

1.20. $\tau(\theta)$ — поліном степеня не більше за n.

1.21. Знайти розподіли $\xi_{(1)}$ та $\xi_{(n)}$, користуючись тотожностями

$$\mathbf{P}\left(\xi_{(1)} < x\right) = 1 - (1 - F(x))^n, \quad \mathbf{P}\left(\xi_{(n)} < x\right) = F^n(x),$$

і обчислити математичні сподівання. $\widehat{\theta}_2$ — краща, бо $\mathbf{D}_\theta \widehat{\theta}_1 = \frac{n\theta^2}{n+2} \geq \frac{\theta^2}{n(n+2)} = \mathbf{D}_\theta \widehat{\theta}_2$. Крім того, оцінка $\widehat{\theta}_2$ є консистентною, на відміну від $\widehat{\theta}_1$. При обчисленні моментів $\xi_{(1)}$ доцільно звести інтеграл до бета-функції.

1.22. $\widehat{\varphi}(t) = n^{-1} \sum_{k=1}^{n} \exp\{it\xi_k\}$.

1.23. Див. 1.19.

1.24. Спочатку довести, що $\mathbf{E}_\theta \xi_1 = \theta$. Для доведення консистентності скористатися законом великих чисел.

2.1. $(0.805, 0.901)$. Кінці інтервалу обчислити як

$$\left(n\widehat{\theta}_n + x_\gamma^2/2 \pm x_\gamma \sqrt{n\widehat{\theta}_n\left(1 - \widehat{\theta}_n\right) + x_\gamma^2/4}\right) / \left(n + x_\gamma^2\right),$$

де γ — надійність, $\widehat{\theta}_n$ — відносна частота, $x_\gamma = \Phi^{(-1)}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)$.

2.2. $(0.116, 0.217)$.

2.3. $(0.713, 0.905)$.

2.4. $\mathbf{P}(\nu_{500} > 30) \approx 1 - \Phi\left(\frac{30 - 500 \cdot 0.04}{500 \cdot 0.04 \cdot 0.96}\right) \approx 0.011$.

2.5. 0.104.

2.6. Використати консистентність і асимптотичну нормальність $\widehat{\theta}_n$ та задачу 1.21.51.

2.7. 0.856.

2.8. 0.242, 0.735. $\mathbf{P}(\nu_{25} \geq 4) \approx 1 - e^{-25p} \sum_{k=0}^{3} \frac{(25p)^k}{k!}$.

2.9. (а) $\mathbf{D}\left(\widehat{\theta}_1\right) = \frac{p(1-p)}{20} = \frac{1}{80}$. (б) $\mathbf{D}\left(\widehat{\theta}_2\right) = \frac{(1-p)(1+19p)}{21^2} = \frac{1}{84}$.

2.10. 0.075.

2.11. 0.049. Показати, що для вибірки об'єму n максимально можлива ширина вірогідного інтервалу рівня γ дорівнює $x_\gamma/\sqrt{n}$, де $x_\gamma = \Phi^{(-1)}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)$.

2.12. Використовуючи асимптотичну нормальність відносної частоти та теорему про добуток слабко збіжної послідовності зі збіжною, показати, що коли $n_i \to \infty$ так, що $n_1/n_2 \to \rho$,

$$\alpha_{n_1} := \sqrt{n_1}\left(\widehat{\theta}_{n_1} - \theta_1\right) \to^W \zeta_1 \simeq N(0, \theta_1(1-\theta_1)),$$

$$\beta_{n_1,n_2} := \sqrt{n_1}\left(\widehat{\theta}_{n_2} - \theta_2\right) \to^W \zeta_2 \simeq N(0, \rho\theta_2(1-\theta_2)).$$

Потім за допомогою теореми Леві про критерій слабкої збіжності довести, що $\alpha_{n_1} + \beta_{n_1,n_2} \to^W \zeta$. Для побудови наближеного надійного інтервалу для $\theta_1 - \theta_2$ спочатку показати (аналогічно задачі 2.6), що

$$\frac{\sqrt{n_1}\left(\widehat{\theta}_{n_1} - \widehat{\theta}_{n_2} - \theta_1 + \theta_2\right)}{\sqrt{\widehat{\theta}_{n_1}\left(1-\widehat{\theta}_{n_1}\right) + \rho\widehat{\theta}_{n_2}\left(1-\widehat{\theta}_{n_2}\right)}} \to^W \eta \simeq N(0,1).$$

З цього вивести, що кінці такого інтервалу визначаються як

$$\widehat{\theta}_{n_1} - \widehat{\theta}_{n_2} \pm x_\gamma \sqrt{n_1^{-1}\left(\widehat{\theta}_{n_1}(1-\widehat{\theta}_{n_1}) + \rho\widehat{\theta}_{n_2}(1-\widehat{\theta}_{n_2})\right)},$$

де γ — заданий вірогідний рівень, $x_\gamma = \Phi^{(-1)}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)$.

2.13. 0.095.

2.14. (а) Аналогічно 2.11. (б) Мінімальний розмір дорівнює 385.

2.15. (а) 0. (б) 0.033.

2.16. 4098.

2.17. $(-0.372, -0.204)$. Скористатися результатом задачі 2.12.

2.18. Показати, що $\mathbf{E}_\theta T_n = \frac{n-1}{n(1-\theta)}\mathbf{D}_\theta \nu_n$.

2.19. Див. 1.23.5.

2.20. Представити ν як кількість успіхів у схемі Бернуллі та, користуючись асимптотичною нормальністю частоти успіхів, показати, що кінці надійного інтервалу для n з надійністю γ дорівнюють $(2\nu + x_\gamma^2 q \pm x_\gamma\sqrt{4q\nu + q^2 x_\gamma^2})/2p$, де $q = 1-p$, $x_\gamma = \Phi^{(-1)}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)$.

2.21. Знайти надійний інтервал для p та обчислити його образ для функції mp. Кінці надійного інтервалу з надійністю γ мають вигляд:

$$\frac{m}{n+x_\gamma^2}\left(\nu_n+\frac{x_\gamma^2}{2}\pm x_\gamma\sqrt{\nu_n\left(1-\frac{\nu_n}{n}\right)+\frac{x_\gamma^2}{4}}\right),$$

де $x_\gamma = \Phi^{(-1)}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)$.

2.22. Знайти вірогідний інтервал для θ, та обчислити його образ для функції $n\theta(1-\theta)$.

2.23. $\mathbf{P}(\nu_N \geq 3) \simeq 1-\exp(-\lambda)(1+\lambda+\lambda^2/2)$, $\lambda = \widehat{\lambda} = Np = 10$.

3.1. Варіаційний ряд: $-0.4, 0, 0.1, 0.7, 0.7, 1, 1.1, 1.1, 1.6, 2.4$; $\widehat{m}_{10} = 0.85$, $\hat{q}_l = 0.1$, $\hat{q}_u = 1.1$, розмах вибірки дорівнює 2.8, $\sup\limits_x \left|N_{0.8,0.64}(x) - \widehat{F}_{10}(x)\right| \approx 0.154$, $\sup\limits_x \left|N_{1.0,0.25}(x) - \widehat{F}_{10}(x)\right| \approx 0.264$.

3.2. Продиференціювати функцію розподілу статистики $\xi_{(k)}$

$$F_k(x) = \sum\nolimits_{i=k}^{n} C_n^i F^i(x)(1-F(x))^{n-i},$$

та спростити одержаний вираз, користуючись тотожностями: $iC_n^i = nC_{n-1}^{i-1}$, $(n-i)C_n^i = nC_{n-1}^i$.

3.3. За теоремою Колмогорова, розподіл $\widehat{\varkappa}_n$ не залежить від функції розподілу спостережень, тому можна вважати, що вибірка — з розподілу $U(0,1)$. Звідси виведіть, що $\widehat{\varkappa}_n = \sqrt{n}\sup_{u\in(0,1)}\left|\widehat{F}_n(u) - u\right|$ м. н., $\widehat{\varkappa}_1 \simeq U\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $\widehat{\varkappa}_2$ має розподіл зі щільністю

$$f_{\widehat{\varkappa}_2}(x) = \begin{cases} 8x - 2\sqrt{2}, & x \in \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \\ 2\sqrt{2} - 2x, & x \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right), \\ 0, & x \notin \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \sqrt{2}\right). \end{cases}$$

3.4. $\widehat{m}_{40} = 77\,500$, $\widehat{q}_l = 72\,000$, $\widehat{q}_u = 84\,000$.

3.5. $\sqrt{n}(\widehat{m}_n - \theta) \to^W N(0, \frac{\pi}{2})$, $n \to \infty$, скористайтеся теоремою про асимптотичну нормальність вибіркових квантилей. Для вибіркового середнього $\widehat{\mu}_n$ доведіть за центральною граничною теоремою збіжність $\sqrt{n}(\widehat{\mu}_n - \theta) \to^W N(0,1)$, $n \to \infty$. Вибіркове середнє є асимптотично ефективнішою оцінкою, оскільки має меншу асимптотичну дисперсію.

3.6. $\sup\limits_{-\infty<x<+\infty} \left|F(x) - \widehat{F}_n(x)\right| = \frac{4}{15}$.

3.7. $\sup\limits_{-\infty<x<+\infty} \left|F(x) - \widehat{F}_n(x)\right| \approx 0.297$.

3.8. $\widehat{\mu}_n \approx 1.16$, $\widehat{s}_n \approx 1.47$.

3.9. (а) Сумісна щільність $\xi_{(j)}$, $\xi_{(k)}$ дорівнює

$$f_{jk}(x_j, x_k) = \frac{n!}{(j-1)!(k-j-1)!(n-k)!} F^{j-1}(x_j) \times \\ (F(x_k) - F(x_j))^{k-j-1}(1 - F(x_k))^{n-k} f(x_j) f(x_k) \mathbb{I}_{x_j < x_k}.$$

(б) Нехай $W_n = \xi_{(n)} - \xi_{(1)}$. Тоді

$$F_{W_n}(x) = \begin{cases} n \int_{-\infty}^{+\infty} (F(x+y) - F(y))^{n-1} f(y)\, dy, & x > 0, \\ 0, & x \le 0; \end{cases}$$

$$\mathbf{E}W_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x(F^{n-1}(x) - (1 - F(x))^{n-1}) f(x)\, dx;$$

$$\mathbf{E}W_n^2 = n(n-1) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{x} (x-y)^2 (F(x) - F(y))^{n-2} f(x) f(y)\, dy\, dx,$$

$\mathbf{D}W_n = \mathbf{E}W_n^2 - (\mathbf{E}W_n)^2$.

3.10. Нехай $\eta = \max_{1 \le k < n} \xi_k$, $F(x) = \mathbf{P}(\xi_1 < x)$. Врахувавши, що $\mathbf{P}(\eta < y) = F^{n-1}(y)$, обчислити

$$\mathbf{P}(\xi_n > \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{x} dF^{n-1}(y)\, dF(x).$$

3.11. У сумі $K(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \exp(-2k^2 x^2)$ розділити доданки зважаючи на знак k.

3.12. Варіаційний ряд: 0.00, 0.08, 0.31, 0.70, 0.79, 1.40, 1.42, 1.43, 1.69, 1.93; $\widehat{m}_{10} = 1.095$, $\widehat{q}_l = 0.31$, $\widehat{q}_u = 1.43$, розмах вибірки дорівнює 1.93, $\sup\limits_{-\infty<x<+\infty} \left|F(x) - \widehat{F}_n(x)\right| = 0.2$.

3.13. Показати, що для будь-якого a

$$\mathbf{E}|\xi - a| = \int_{-\infty}^{a} F(x) dx + \int_{a}^{+\infty} (1 - F(x)) dx,$$

де F — функція розподілу ξ. Звідси вивести, що $\mathbf{E}|\xi-a|-\mathbf{E}|\xi-m| = \int_m^a (2F(x)-1)dx \geq 0$.

3.14. Емпірична функція розподілу є кусково сталою з точками стрибків $\xi_{(k)}$, а $F(x)$ - неспадна, тому максимум модуля різниці досягається у вказаних точках.

3.15. $T_k = \left(F\left(\xi_{(k)}\right)/F\left(\xi_{(k+1)}\right)\right)^k \simeq U(0,1)$, $1 \leq k < n$. Показати, що $F(\xi_k) \simeq U(0,1)$ та, користуючись теоремою про сумісний розподіл порядкових статистик, знайти щільність вектора $\left(F\left(\xi_{(1)}\right), \ldots, F\left(\xi_{(n)}\right)\right)$, після чого за допомогою заміни змінних знайти сумісну щільність статистик $T_1, \ldots, T_{n-1}$.

3.16. (а) Показати, що

$$f_{\xi_{(1)},\ldots,\xi_{(r)}}(x_1,\ldots,x_r) = \\ = C_n^r r! \theta^n \mathbb{I}_{0<x_1<\ldots<x_r} \int_{x_r}^{+\infty} \ldots \int_{x_r}^{+\infty} e^{-\theta\sum_{i=1}^n \xi_i} dx_{r+1} \ldots dx_n.$$

(б) Користуючись результатом (а), показати, що щільність випадкової величини $\zeta = 2\theta\left[\sum_{k=1}^r \xi_{(k)} + (n-r)\xi_{(r)}\right]$ дорівнює $f_\zeta(y) = \frac{y^{r-1}e^{-y/2}}{2^r(r-1)!}\mathbb{I}_{y>0}$. (в) Використовуючи формулу для сумісної щільності $\left(\xi_{(1)},\ldots,\xi_{(r)}\right)$, за допомогою заміни змінних $y_1 = nx_1$, $y_k = (n-k+1)(x_k - x_{k-1})$, $k = \overline{2,r}$, показати, що сумісна щільність випадкового вектора $(\eta_1,\ldots,\eta_n)$ дорівнює $\theta^r e^{-\theta\sum_{i=1}^n y_i}\mathbb{I}_{y_1>0,\ldots,y_r>0}$. (г) Виразивши $\xi_{(i)}$ через η_i довести, що $\mathbf{E}_\theta \sum_{i=1}^k c_i\xi_i = \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^k d_i$, $\mathbf{D}_\theta \sum_{i=1}^k c_i\xi_i = \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^k d_i^2$, де $d_i = \frac{1}{n-i+1}\sum_{j=i}^k c_j$. З умов незміщеності та мінімальності дисперсії одержати задачу на відшукання умовного мінімуму: $\sum_{i=1}^k d_i^2 \to \min$, $\sum_{i=1}^k d_i = 1$, єдиним розв'язком якої є $d_i = k^{-1}$, $i = \overline{1,k}$. Звідси $c_1 = \ldots = c_{k-1} = k^{-1}$, $c_k = k^{-1}(n-k+1)$.

3.17. (а) $f_{\xi_{(1)},\xi_{(n)}}(x,y) = n(n-1)(y-x)^{n-2}\mathbb{I}_{0<x<y<1}$ (див. 3.9), $\mathbf{E}\xi_{(1)} = \frac{1}{n+1}$, $\mathbf{E}\xi_{(n)} = \frac{n}{n+1}$, $\mathbf{D}\xi_{(1)} = \mathbf{D}\xi_{(n)} = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}$. (б) Користуючись теоремою про сумісний розподіл порядкових статистик, знайти сумісну щільність $f_{\xi_{(1)},\ldots,\xi_{(n)}}(x_1,\ldots,x_n) = n!\mathbb{I}_{0<x_1<\ldots<x_n<1}$, після чого за допомогою заміни змінних знайти сумісну щільність спейсингів: $f_{\delta_0,\ldots,\delta_{n-1}}(y_0,\ldots,y_{n-1}) = n!\mathbb{I}_{y_0>0,\ldots,y_{n-1}>0,y_0+\ldots+y_{n-1}<1}$.

Усі δ_k, $k = \overline{0, n-1}$, мають однакову функцію розподілу

$$F_{\delta_k}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 1-(1-x)^n, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

(в) Врахувати, що $\delta_n = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \delta_k$, і, використовуючи формулу для сумісної щільності спейсингів з попереднього пункту, показати, що

$$\mathbf{P}\left(\min_{0 \le k \le n} \delta_k < x\right) =$$

$$1 - \mathbf{P}\left(\delta_0 > x, \ldots, \delta_{n-1} > x, \delta_0 + \ldots + \delta_{n-1} < 1 - x\right) =$$

$$\begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 1-(1-(n+1)x)^n, & 0 < x \le \frac{1}{n+1}, \\ 1, & x > \frac{1}{n+1}. \end{cases}$$

(г) Використавши результат задачі 3.2, знайти щільність $\xi_{(k)}$. Показати, що для будь-якого $x > 0$ при $n \to \infty$

$$\mathbf{P}\left(n\xi_{(k)} < x\right) = n^{1-k} C_{n-1}^{k-1} \int_0^x z^{k-1} \left(1 - \frac{z}{n}\right)^{n-k} dz \to$$

$$\to \frac{1}{(k-1)!} \int_0^x z^{k-1} e^{-z} dz, \quad n \to \infty.$$

3.18. $\operatorname{cov}\left(\widehat{F}_n(x), \widehat{F}_n(y)\right) = n^{-1}(F(\min\{x, y\}) - F(x)F(y))$, де F — теоретична функція розподілу.

3.19. Нехай $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$ —задані точки, F — теоретична функція розподілу. Тоді

$$\mathbf{P}\left(\widehat{F}_n(x_1) = \frac{k_1}{n}, \ldots, \widehat{F}_n(x_m) = \frac{k_m}{n}\right) =$$

$$\frac{n!}{k_1!(k_2-k_1)!\ldots(k_m-k_{m-1})!(n-k_m)!} F^{k_1}(x_1)(F(x_2)-F(x_1))^{k_2-k_1} \ldots \times$$

$$(F(x_m) - F(x_{m-1}))^{k_m - k_{m-1}} (1 - F(x_m))^{n-k_m},$$

$0 \le k_1 \le k_2 \le \ldots \le k_m \le n$ — цілі числа.

3.20. Нехай F — функція розподілу ξ_1. (а) Показати, що

$$\mathbf{P}(\nu_{n,1} > k) = \mathbf{P}(\max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \ge \max\{\xi_{n+1}, \ldots, \xi_{n+k}\}) =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F^k(x)dF^n(x).$$

(б) Обчислити $\mathbf{P}(\nu_{n,r} > k) = \mathbf{P}(\xi_{(n-r+1)} \ge \max\{\xi_{n+1}, \ldots, \xi_{n+k}\}) = \int_{-\infty}^{+\infty} F^k(x)dG(x)$, де G — функція розподілу статистики $\xi_{(n-r+1)}$. Довести, використовуючи 3.2, що останній інтеграл дорівнює

$$nC_{n-1}^{r-1} \int_{-\infty}^{+\infty} F^{n-r+k}(x)(1-F(x))^{r-1}dF(x) = nC_{n-1}^{r-1}B(n-r+k+1, r).$$

(в) Використати формулу Стірлінга.

3.21. Див. 1.22.18. Приклад: $\Omega = [0,1]$, $\xi_n(\omega) = n^2 \mathbb{I}_{\omega\in[0,n^{-1}]}$, $\xi \equiv 0$.

3.22. Врахувати, шо $F(\xi_{(k)}) \simeq \alpha_{(k)}$ з порядковими статистиками $\alpha_{(k)}$ для кратної вибірки з рівномірним розподілом $U(0,1)$. Гранична функція розподілу - показникова $1 - \exp(-x), x \ge 0$.

3.23. Використати теорему про асимптотичну нормальність вибіркових квантилей.

3.24. Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — кратна вибірка з розподілу $U(a,b)$. Тоді
(а) $f_{\xi_{(1)},\ldots,\xi_{(n)}}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{n!}{(b-a)^n} \mathbb{I}_{a<x_1<\ldots<x_n<b}$;
(б) $f_{\xi_{(1)},\xi_{(n)}}(x, y) = \frac{n(n-1)}{(b-a)^n}(y-x)^{n-2}\mathbb{I}_{a<x<y<b}$.

3.25. $\mathbf{P}(\xi_1 < x, \nu = k) = \mathbf{P}(x > \xi_1 \ge \xi_2 \ge \ldots \ge \xi_k, \xi_k < \xi_{k+1}) =$

$$\int_0^1 \int_0^{\min\{x_{k+1},x\}} \int_{x_k}^{x} \int_{x_{k-1}}^{x} \ldots \int_{x_2}^{x} dx_1 \ldots dx_{k-2}\, dx_{k-1}\, dx_k\, dx_{k+1}.$$

3.26. Виведіть, що $p_n(\alpha, \beta) = \mathbf{P}(k/n < \alpha + \beta\xi_{(k)}, k = \overline{1,n})$, де $\xi_{(k)}$ - порядкові статистики. (а) При $\alpha > 1 - 1/n$ необхідно і достатньо перевірити останню систему нерівностей при $k = n$. (б) Для вивода рекурентного рівняння довести, що вектор $(\xi_{(k)}/\xi_{(k+1)}, k = \overline{1,n})$ для вибірки об'єму $n+1$ має такий самий розподіл, що і варіаційний ряд для $n-$кратної вибірки з того ж рівномірного розподілу.

3.27. Врахувати при $y > m$ тотожність

$$|a-y| - |a-m| = (m-y)\mathbb{I}_{a>y} + (m+y-2a)\mathbb{I}_{a\in[m,y]} + (y-m)\mathbb{I}_{a<m}.$$

3.28. $12x^2 \mathbb{I}_{0<x<1/2} + 12(1-x)^2 \mathbb{I}_{1/2<x<1}$.

3.29. Проінтегрувати сумісну щільність варіаційного ряду за аргументами $x_2, ..., x_{n-1} \in (x_1, x_n)$.

3.30. $\mathbf{P}(\xi_{(n)} < x) = 1 - \exp(-n(\lambda x)^{\alpha})$.

3.31. Використати тотожність $\mathbf{P}(\max(\xi_1, ...\xi_k) < x) = F^k(x)$.

3.32. $\mathbf{P}(\xi_n < \eta) = \int \mathbf{P}(y < \eta) F_{\xi_n}(y)$ для незалежних ξ_n, η.

4.1. $\widehat{\mu}_n = 1.5$, $\widehat{m}_n = 1$.

4.2. $\widehat{\lambda} = \widehat{\mu}_n$.

4.3. Зобразити оцінюваний інтеграл у вигляді $I = \mathbf{E}g(\xi)$, де $g(y) = 2(1 + [y]y)^{-1}$, $\xi \simeq U(0, 2)$. Оцінка методу моментів: $\widehat{I}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)$.

4.4. $\widehat{a} = \sqrt{\widehat{\mu}^0_{2,n}}$, $\widehat{b} = \widehat{\mu}_n - \widehat{a}$.

4.5. $\widehat{\sigma^2} = \widehat{\mu}_{2,n} - \mu_0^2$.

4.6. Скористатися означенням теоретичних моментів та формулою бінома Ньютона.

4.7. Оцінити параметр λ за методом моментів: $\widehat{\lambda} = \widehat{\mu}_n^{-1}$. Знайти математичне сподівання тривалості T роботи приладу: $\mathbf{E}_\lambda T = \lambda^{-1}\left(1 - e^{-200\lambda}\right)$. Підставити оцінку $\widehat{\lambda}$ в одержаний вираз.

4.8. $\widehat{\mu} = \widehat{\mu}_n$, $\widehat{\sigma} = \sqrt{\widehat{\mu}^0_{2,n}}$.

4.9. $\widehat{p} = \widehat{\mu}_n / k$.

4.10. $\widehat{\theta} = \sqrt{\widehat{\mu}_{2,n}/2}$.

4.11. (а) зменшиться; (б) не зміниться; (в) зменшиться.

4.12. Для випадкової величини ξ з логнормальним розподілом з параметрами μ, σ^2: $f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}\exp\left\{-\frac{\ln x - \mu}{2\sigma^2}\right\}$ (див. 1.11.20), $\mathbf{E}\xi = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$, $\mathbf{D}\xi = e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$.

4.13. Теоретичні моменти: $\mu_1 = \frac{r}{p}$, $\mu_2 = \frac{r(1-p+r)}{p^2}$. Оцінки: $\widehat{r} = \frac{\widehat{\mu}_n^2}{\widehat{\mu}_n + \widehat{\mu}^0_{2,n}}$, $\widehat{p} = \frac{\widehat{\mu}_n}{\widehat{\mu}_n + \widehat{\mu}^0_{2,n}}$.

4.14. $\widehat{p} = \widehat{\mu}_n^{-1}$.

4.15. Застосувати формулу для інтегралу Рімана-Стілтьєса від неперервної функції за кусково-сталою функцією.

4.16. $\widehat{k}_v = \frac{(\widehat{\mu}^0_{2,n})^{1/2}}{\widehat{\mu}_n}$, $\widehat{k}_s = \frac{3(\widehat{\mu}_n - \widehat{m}_n)}{(\widehat{\mu}^0_{2,n})^{1/2}}$, $\widehat{k}_a = \frac{\widehat{\mu}^0_{3,n}}{(\widehat{\mu}^0_{2,n})^{3/2}}$, $\widehat{k}_e = \frac{\widehat{\mu}^0_{4,n}}{(\widehat{\mu}^0_{2,n})^2} - 3$.

4.17. Нормальний розподіл: $k_a = k_e = 0$. Рівномірний розподіл: $k_a = 0$, $k_e = -\frac{6}{5}$. Розподіл $\Gamma(\lambda, \alpha)$: $k_a = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$, $k_e = \frac{6}{\alpha}$. Показниковий розподіл: $k_a = 2$, $k_e = 6$. Розподіл $B(n,p)$: $k_a = \frac{1-2p}{\sqrt{np(1-p)}}$, $k_e = \frac{1-6p(1-p)}{np(1-p)}$. Розподіл $G(p)$: $k_a = \frac{2-p}{\sqrt{1-p}}$, $k_e = 6 + \frac{p^2}{1-p}$. Розподіл $\Pi(\lambda)$: $k_a = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, $k_e = \frac{1}{\lambda}$.

4.18. $\widehat{\theta} = 3\widehat{\mu}_n$.

4.19. Зобразити $x^k = x^{k-1}x$ та виділити повний диференціал під знаком інтегралу.

4.20. Див. 1.17.10.

4.21. Можна вважати, що $\mathbf{E}\xi_j = 0$, оскільки розподіл центрованих середніх інваріантний відносно зсувів. Зауважимо, що у розкладі суми $\left(\sum_{j=1}^n x_j\right)^m$ не більше ніж $n^m - n(n-1)^{m-1} = O(n^{m-1}), n \to \infty$, доданків, що не містять лише один множник вигляду x_j. (a) Величини $\xi_j - \widehat{\mu}_n$ однаково розподілені при різних j та дорівнюють $\xi_j(1-1/n) - \widehat{\mu}_{nj}$, де $\widehat{\mu}_{nj} = n^{-1}\sum_{i\neq j, i\le n}\xi_i$ та доданки незалежні. Звідси $\mathbf{E}(\widehat{\mu}_{nj})^m = n^{-m}O(n^{m-1}) = O(1/n), n \to \infty$. Тому

$$\mathbf{E}\widehat{\mu}^0_{nk} = n^{-1}\sum_{j=1}^n \mathbf{E}(\xi_j - \widehat{\mu}_n)^k = \mathbf{E}(\xi_1 - \widehat{\mu}_n)^k =$$
$$\sum_{i=0}^k C_k^i \mathbf{E}(\xi_1(1-1/n))^i \mathbf{E}(\widehat{\mu}_{n1})^{k-i} =$$
$$C_k^k \mu_k (1-1/n)^k + O(1/n) = \mu_k + O(1/n), \quad n \to \infty.$$

4.22. Вибіркове середнє має розподіл Коші зі щільністю $1/\pi(1+(y-\theta)^2)$ (див. 1.21.25 (б)).

4.23. Визначимо $\widehat{G}_n(y) = \sum_{k<ny}\xi_{(k)}$, $G(y) = F^{(-1)}(y) = \sup(x : F(x) < y)$. За означенням (та інтегруванням за частинами) $\widehat{\mu}_{n\alpha} = (1-2\alpha)^{-1}\int_{1-\alpha}^{\alpha}\widehat{G}_n(y)dy$. Оскільки $\widehat{G}_n(y)$ є лівою оберненою до емпіричної функції розподілу $\widehat{F}_n(x)$, то $\widehat{G}_n(y) \to^{\mathbf{P}1} G(y), n \to \infty$, рівномірно за обмеженими y

4.24. $T_{n-1}(\xi_1, ..., \xi_{k-1}, \xi_k, ..., \xi_n) =$
$\frac{1}{(n-2)(n-1)}\left((n-2)\sum_{j\neq k, j\le n}\xi_j^2 - 2\sum_{i<j\le n, i,j\neq k}\xi_i\xi_j\right)$,
звідси $T_n^* = \frac{n-1}{n}T_n = \widehat{\sigma}_n^2$.

4.25. Скористатися класичною центральною граничною теоремою, теоремою про моменти вибіркових моментів та теоремою про добуток слабко збіжної послідовності зі збіжною.

4.26. (в) Для вагового коефіцієнту $\alpha \in (0,1)$ оцінка є коренем рівняння $\alpha/\widehat{\theta}_n + (1-\alpha)/\widehat{\theta}_n^2 = \alpha/\widehat{\mu}_n + (1-\alpha)/\widehat{\sigma}_n^2$. Наприклад, можна обрати $\alpha = 2/3$. (г) Скористатись вибірковою частотою $n^{-1}\sum_{j=1}^n 1\!\!\mathrm{I}_{\xi_j \geq 1} = 1 - \exp(-\widehat{\theta}_n)$.

4.27. Зі збіжності випливає обмеженість: $\sup_{n\geq 1}\mu_k(n) < \infty$, $k \geq 1$. Тому з нерівності Чебишева (при $k = 2$) виводимо за критерієм Прохорова слабку компактність послідовності (F_n). Отже, $F_n \to^W F, n \to \infty, n \in K$, для деякої функції розподілу F. За теоремою про збіжність інтегралу для рівномірно інтегровної послідовності ($|x|^k \leq |x|^{k+1} + 1$) отримуємо

$$m_k = \int_0^\infty kx^{k-1}((-1)^k F(-x) + 1 - F(x))dx = \int_{-\infty}^\infty x^k dF(x).$$

4.28. (а) Методом генератрис обчислити дію оператора $(I + \Delta)^{-1}\mu = \sum_{n\geq 0}(-\Delta)^n\mu$, звідки $(-1)^n(\Delta^n\mu)_k = \sum_{j=0}^n \mu_{k+j}C_n^j(-1)^j = \mathbf{E}\xi^k(1-\xi)^n \geq 0$. (б) Дограничнa сума дорівнює $\mathbf{E}B_n(f,\xi)$, де $f(y) = 1\!\!\mathrm{I}_{y<x}$, а B_n - поліном Бернштейна.

4.29. Див. 4.25.

4.30. Теоретичні моменти: $\mu_1 = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)$, $\mu_2 = \frac{1}{2}(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_1 + \theta_2)$. Оцінки: $\widehat{\theta}_1 = \widehat{\mu}_n - \sqrt{\widehat{\mu}_{2,n}^0 - \widehat{\mu}_n}$, $\widehat{\theta}_2 = \widehat{\mu}_n + \sqrt{\widehat{\mu}_{2,n}^0 - \widehat{\mu}_n}$ або $\widehat{\theta}_1 = \widehat{\mu}_n + \sqrt{\widehat{\mu}_{2,n}^0 - \widehat{\mu}_n}$, $\widehat{\theta}_2 = \widehat{\mu}_n - \sqrt{\widehat{\mu}_{2,n}^0 - \widehat{\mu}_n}$.

4.31. Використати зображення $T_{nk} = (n/(n-1))^k(\widehat{\mu}_n - \xi_k/n)^2$.

4.32.Обчислити квадратичну форму та винести математичне сподівання з-під знака суми.

4.33. $4/5, 0, -4/5$.

4.34. У розклад суми кубів входять доданки вигляду ξ_i^3, $\xi_i^2\xi_j$, $i \neq j$.

4.35. Знайти рекурентне рівняння з урахуванням формули для $\mathbf{D}(\xi_1\eta)$ для незалежних ξ_1, η.

4.36. $\mathbf{E}\xi^2(\xi-1)^2 = 0$.

4.37. Використайте комп'ютер для обчислення моментів.

5.1. $\widehat{\sigma} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}|\xi_1 - \xi_2|$. Врахувати, що $\xi_1 - \xi_2 \simeq N(0, 2\sigma^2)$.

5.2. $\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - a)^2$. Обчислити функцію впливу

$$U(X,\sigma^2) = \frac{n}{2\sigma^4}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - a)^2 - \sigma^2\right)$$

та застосувати критерій оптимальності Крамера - Рао. Перевірити незміщеність, обчисливши $\mathbf{E}_{\sigma^2}\widehat{\sigma}^2$.

5.3. Незміщеність — результат задачі 1.14. Для перевірки оптимальності застосувати нерівність Крамера - Рао для векторного параметра: обчислити для $\theta = (\lambda, \alpha)$

$$U(X,\theta) = \begin{pmatrix} U_1(X,\theta) \\ U_2(X,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n\frac{\alpha}{\lambda} - \sum_{k=1}^{n}\xi_k \\ n\ln\lambda + \sum_{k=1}^{n}\ln\xi_k - n\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \end{pmatrix}$$

та показати, що $\widehat{\mu}_n - \alpha/\lambda = c_1(\theta)U_1(X,\theta) + c_2(\theta)U_2(X,\theta)$, де $c_1(\theta) = -1/n$, $c_2(\theta) = 0$.

5.4. (а) $\mathbf{E}_\theta(T_{\alpha\beta} - \theta)^2 = \frac{\alpha^2+\theta(n-2\alpha\beta)+\theta^2(\beta^2-n)}{(n+\beta)^2}$. (в) Знайти за допомогою нерівності Крамера - Рао $T^* = \frac{\nu_n(X)}{n}$ та обчислити $\mathbf{E}_\theta(T^* - \theta)^2 = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$.

5.5. Ні. Користуючись тим, що $\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ має розподіл Ерланга, довести, що $\mathbf{E}_\theta\widehat{\theta} = \frac{n\theta}{n-1}$, тобто, дана оцінка є зміщеною зі зміщенням $b(\theta) = \frac{\theta}{n-1}$. Нижня межа для дисперсії в нерівності Крамера - Рао дорівнює $\frac{(1+b'(\theta))^2}{I(\theta)} = \frac{\theta^2}{n}$, де $I(\theta) = \frac{n}{\theta^2}$ — інформація за Фішером. Але $\mathbf{D}_\theta\widehat{\theta} = \frac{n^2\theta^2}{(n-1)^2(n-2)} > \frac{\theta^2}{n}$, тобто межа не досягається.

5.6. $\widehat{\sigma} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}|\xi_1 - \xi_2|$ (див. 5.1) або $\widehat{\sigma} = 2\sqrt{(\xi_1^2 + \xi_2^2)/\pi}$ (врахувати, що $(\xi_1^2 + \xi_2^2)/\sigma^2 \simeq \chi_2^2$).

5.7. $\widehat{a} = \widehat{\mu}_n$. Застосувати нерівність Крамера - Рао для векторного параметра. Для $\theta = (a, \sigma^2)$

$$U_1(X,\theta) = \frac{n}{\sigma^2}(\widehat{\mu}_n - a), \quad U_2(X,\theta) = \frac{n}{2\sigma^4}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - a)^2 - \sigma^2\right).$$

Рівність $\widehat{\mu}_n - a = c_1(\theta)U_1(X,\theta) + c_2(\theta)U_2(X,\theta)$ виконується з $c_1(\theta) = \frac{\sigma^2}{n}$, $c_2(\theta) = 0$.

5.8. Розглянути оцінку $\widehat{\theta} = \frac{n+1}{n}\xi_{(n)}$, знайти $\mathbf{D}_\theta\widehat{\theta} = \frac{\theta^2}{n(n+2)}$ (див. 1.21). Довести, що це значення строго менше нижньої межі в нерівності Крамера - Рао.

5.9. Так. Обчислити $U(X,\lambda) = \frac{n}{\lambda}\left(\widehat{\lambda} - \lambda\right)$ та застосувати критерій ефективності Крамера - Рао. Показати, що незміщені оцінки можуть існувати лише для функцій $g(\lambda)$, які можна подати у вигляді $g(\lambda) = e^{-n\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} a_k\lambda^k$. Для $g(\lambda) = 1/\lambda$ ця умова еквівалентна такій: $e^{n\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\lambda^{k+1}$. Для будь-яких a_k вона порушується при $\lambda \to 0+$.

5.10. Показати, що щільність (розподіл імовірностей) одного спостереження можна подати у вигляді $f(y,\theta) = \exp\{a(y)b(\theta) + c(y) + d(\theta)\}$.

5.11. Для такої оцінки T та всіх $a \in \mathbb{R}$ має виконуватись нерівність $0 \le \mathbf{E}((T + a - \theta)^2 - (T - \theta)^2) = a(a + 2(\mathbf{E}T - \theta)) < 0$, якщо обрати $\theta \neq E\mathbb{T}$ та $a = \theta - \mathbf{E}T$.

5.12. Для довільного вектора c розглянути функцію $g(\theta) = c'\tau(\theta)$, незміщеною оцінкою для якої є $G = c'T$, та застосувати до неї нерівність Крамера - Рао для векторного параметра. Тоді $\mathbf{E}_\theta(G - g(\theta))^2 = c'\mathrm{Cov}_\theta(T - \tau(\theta))c$, $g_\theta = \tau_\theta c$ і

$$c'(\mathrm{Cov}_\theta(T - \tau(\theta)) - \tau'_\theta I^{-1}(\theta)\tau_\theta)c = \mathbf{E}_\theta(G - g(\theta))^2 - g'_\theta I^{-1}(\theta)g_\theta \ge 0,$$

що й означає потрібну невід'ємну визначеність.

5.13. Так. I спосіб: знайти функцію впливу вибірки

$$U(X,\theta) = \frac{nN}{\theta(1-\theta)}\left(\frac{1}{nN}\sum\nolimits_{k=1}^{n} \xi_k - \theta\right)$$

і застосувати критерій оптимальності Крамера - Рао.

II спосіб: скористатися тим, що для експоненційної моделі

$$f(y,\theta) = \exp\{a(y)b(\theta) + c(y) + d(\theta)\}$$

статистика $T^*(X) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a(\xi_k)$ є ефективною оцінкою для функції $\tau(\theta) = \mathbf{E}_\theta a(\xi_1) = -\frac{d'(\theta)}{b'(\theta)}$. У даному випадку $a(y) = y/N$, $b(\theta) = N(\ln\theta - \ln(1-\theta))$, $d(\theta) = N\ln(1-\theta)$, $T^*(X) = \frac{1}{nN}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$, $\tau(\theta) = \theta$.

5.14. Аналогічно 5.13: $a(y) = |y|$, $b(\theta) = -\frac{1}{\theta}$, $d(\theta) = -\ln(2\theta)$, $T^*(X) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|$, $\tau(\theta) = \theta$.

5.15. Аналогічно 5.13: $a(y) = y$, $b(\theta) = -\frac{1}{\theta}$, $d(\theta) = -\ln\theta$, $T^*(X) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$, $\tau(\theta) = \theta$.

5.16. $\mathbf{D}_\mu \widehat{\mu}_\alpha = \frac{\alpha^2\sigma_1^2}{n_1} + \frac{(1-\alpha)^2\sigma_2^2}{n_2}$.

5.17. (a) Врахувати, що $\mathbf{E}_\theta \xi_1 = \theta$, $\mathbf{D}_\theta \xi_1 = \pi^2/3$. (б) Обчислити $u(y,\theta) = \frac{1-e^{\theta-y}}{1+e^{\theta-y}}$, $i(\theta) = -\mathbf{E}_\theta \frac{\partial}{\partial\theta} u(\xi_1,\theta) = \mathbf{E}_\theta \frac{2e^{\theta-\xi_1}}{(1+e^{\theta-\xi_1})^2} = \frac{1}{3}$ (в інтегралі зробити заміну $t = e^{\theta-y}$).

5.18. Дисперсія незміщеної оцінки є квадратичною функцією від параметра α.

5.19. Для довільної незміщеної оцінки T функції $\tau(\theta)$ розглянути симетризовану оцінку $T^* = \frac{1}{n!}\sum_\pi T(\pi X)$, де π — перестановка з n елементів, підсумовування відбувається по всіх $n!$ перестановках. Беручи до уваги однакову розподіленість векторів X і πX, показати, що $\mathbf{D}_\theta T^* \le \mathbf{D}_\theta T$.

5.20. Див. 1.24, 5.17.

5.21. $\tau(\theta)$ — поліном степеня не більше за kn. Врахувати, що сума $\xi_1 + \ldots + \xi_n \simeq B(kn, \theta)$.

5.22. Знайти $\mathbf{E}_\theta|\xi_1| = \theta\sqrt{2/\pi}$ і скористатися лінійністю математичного сподівання та законом великих чисел.

5.23. Враховуючи, що $T(X) = \sum_{k=1}^n \xi_k \simeq \Gamma(\theta, n\alpha)$, показати, що $\mathbf{E}_\theta\widehat{\tau} = \theta^{-2}$, $\mathbf{D}_\theta\widehat{\tau} = \frac{2(2n\alpha+3)}{n\alpha(n\alpha+1)\theta^4}$, а нижня межа в нерівності Крамера - Рао дорівнює $\frac{4}{n\alpha\theta^4}$. Для доведення оптимальності показати, що T — повна достатня статистика.

5.24. При об'ємі $n > 1$ незміщені (зокрема оптимальні) оцінки не існують: ліва частина рівності $\mathbf{E}_\theta T(X) = \theta$ є поліномом степені n, що при парних та непарних n має строго додатний коефіцієнт при θ^n чи θ^{n-1} відповідно. При $n = 1$ умова незміщеності має вигляд $\mu_i(T) = i, i = \overline{0,1}$, де $\mu_i(T) = \int_\mathbb{R} T(x) f_i(x)dx$. Далі, рівняння Крамера-Рао для шуканої незміщеної оцінки $T(X)$ зводяться до $T(x) - \theta = c(\theta)/(\theta + g(x))$, де $g(x) = f_0(x)/(f_1(x) - f_0(x)) \ne \mathrm{const}$. Звідси $T(x)g(x) + \theta(T(x) - g(x)) = \theta^2 + c(\theta)$, отже $T(x) - g(x) = 2\theta + c'(\theta)$ для всіх θ та м.в. x. Тому $T(x) = g(x) + c$, та з попередньої рівності $g^2(x) + cg(x) = \mathrm{const}$, що суперечить означенню g. В даній схемі оптимальних оцінок не існує.

5.25. Нехай $\eta = g(X)$. За умови регулярності $\partial/\partial\theta \mathbf{E}_\theta \exp(it\eta) = \int_\mathbb{R} \exp(itg(x))U(x,\theta)L(x,\theta)\lambda(dx) = \mathrm{cov}_\theta(\exp(it\eta), U(X,\theta))$. Тому ліва і права частини дорівнюють нулю одночасно, отже умови (а) та (б) еквівалентні за теоремою про однозначну відповідність між функціями розподілу та їх характеристичними функціями. Для доведення еквівалентності (а) і (в) зауважимо, що з (в) випливає некорельованості U та поліномів від η, умову (а) отримуємо шляхом апроксимації гармонічної функції поліномами. Обернена імплікація виводиться диференціюванням за t під знаком інтегралу.

5.26.Умова незміщеності статистики $T = T(X)$ має вигляд
$$T(1)(1+\theta) + \sum_{k\ge 2} T(k)\theta^k/k! = \theta\exp(\theta)$$
при $\theta > 0$. Суперечність маємо при $\theta \to 0$.

5.27. Знайти інформацію за Фішером у одному спостереженні за формулою $i(\theta) = -\mathbf{E}_\theta \partial^2/\partial\theta^2 \ln f(\xi_1, \theta)$.

5.28. Перейти до полярних координат у рівнянні, що визначає незміщеність.

5.29. Оцінка буде оптимальною при $\alpha = \frac{n+1}{5n+4}$, $\beta = \frac{2(n+1)}{5n+4}$. Обчислити $\mathbf{E}_\theta\widehat{\theta} = \theta \cdot \frac{\alpha(n+2)+\beta(2n+1)}{n+1}$, $\mathbf{D}_\theta\widehat{\theta} = \frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}\left(\alpha^2+\beta^2+\frac{2\alpha\beta}{n}\right)$, і розв'язати задачу на відшукання умовного мінімуму
$$\begin{cases}\alpha^2+\beta^2+\frac{2\alpha\beta}{n} \to \min,\\ \alpha(n+2)+\beta(2n+1) = n+1.\end{cases}$$
Для знаходження $\mathbf{E}_\theta\widehat{\theta}$ та $\mathbf{D}_\theta\widehat{\theta}$ можна використати результат задачі 3.17 (а), врахувавши що $\frac{\xi_1-\theta}{\theta} \simeq U(0,1)$.

6.1. (а) $L(X,a,b) = (b-a)^n \mathbb{1}_{\xi_{(1)}>a,\xi_{(n)}<b}$; $T = \left(\xi_{(1)}, \xi_{(n)}\right)$ — достатня статистика. (б) $L(X,a,b) = a^{-n}\exp\left\{\frac{bn}{a} - \frac{1}{a}\sum_{k=1}^n \xi_k\right\}\mathbb{1}_{\xi_{(1)}>b}$; $T = \left(\sum_{k=1}^n \xi_k, \xi_{(1)}\right)$ — достатня статистика.

6.2. $\widehat{S}_n$ — достатня статистика, оскільки
$$L(X,\theta) = e^{-n\theta}\theta^{\widehat{S}_n}/\left(\prod_{k=1}^n \xi_k!\right).$$
Для доведення повноти врахувати, що $\widehat{S}_n \simeq \Pi(n\theta)$, та використати той факт, що з тотожної рівності нулю степеневого ряду випливає рівність нулю всіх його коефіцієнтів.
$$\mathbf{P}_\theta\left(X = x \mid \widehat{S}_n = s\right) = \frac{\mathbf{P}_\theta(X=x,\widehat{S}_n=s)}{\mathbf{P}_\theta(\widehat{S}_n=s)} = \frac{s!}{n^s\prod_{k=1}^n x_k!}\mathbb{1}_{x_1+\ldots+x_n=s}.$$

Для доведення оптимальності перевірити, що статистика $\sum_{k=1}^{m} c_k \pi_k \widehat{S}_n n^{-k}$ є незміщеною оцінкою для $\sum_{k=1}^{m} c_k \theta^k$, і скористатися теоремою про оптимальність повної достатньої статистики.

6.3. Скористатися означенням достатньої статистики або критерієм достатності.

6.4.

$$L(X, \lambda, \alpha) = \frac{\lambda^{\alpha}}{(\Gamma(\alpha))^n} \exp\{-\lambda \sum_{k=1}^{n} \xi_k + (\alpha - 1) \sum_{k=1}^{n} \ln \xi_k\} \mathbb{1}_{\xi_{(1)} > 0}.$$

Розглянути оцінки: (а) $T_1 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k$; (б) $T_2 = \prod_{k=1}^{n} \xi_k^{-1}$; (в) $T_3 = (\sum_{k=1}^{n} \xi_k)^m$. Скористатися рівністю $\sum_{k=1}^{n} \xi_k \simeq \Gamma(\lambda, n\alpha)$, і результатами задач 1.17.6 та 1.17.8.

6.5. Скористатися критерієм достатності.

6.6. (а) Для вибірки $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ з $B(N, \theta)$:

$$L(X, \theta) = \theta^{\sum_{k=1}^{n} \xi_k} (1 - \theta)^{nN - \sum_{k=1}^{n} \xi_k} \prod_{k=1}^{n} C_N^{\xi_k},$$

$T = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ — достатня статистика.

(б) Для вибірки $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ з $N(\mu, \sigma^2)$:

$$L(X, \mu, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 - 2\mu \sum_{k=1}^{n} \xi_k + n\mu^2\right)\right\},$$

$T = \left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k, \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2\right)$ — достатня статистика.

6.7. Врахувавши, що $S_n \simeq \Gamma(\theta, n)$, довести, що S_n є повною достатньою статистикою та перевірити незміщеність заданої оцінки. Для доведення повноти показати, що з умови $\mathbf{E}_\theta \varphi(T) = 0$ випливає рівність $\int_0^{+\infty} \varphi(x) x^{n-1} e^{-\theta x} dx = 0$, і скористатися тим фактом, що перетворення Лапласа $\int_0^{+\infty} g(x) e^{-\theta x} dx$ однозначно визначає $g(x)$ для майже всіх x.

6.8. (а) Знайти $L(X, \theta) = \theta^T f^{-n}(\theta) \prod_{k=1}^{n} a(\xi_k)$ та скористатися означенням достатньої статистики. (б) Знайти генератрису $\varphi_T(z) = (\varphi_{\xi_1}(z))^n = f^n(z\theta)/f^n(\theta)$ та, виділивши в правій частині коефіцієнт при z^t, одержати, що $\mathbf{P}_\theta(T = t) = \theta^t b(t)/f^n(\theta)$, де $b(t) = \sum_{x_1 + \ldots + x_n = t} a(x_1) \ldots a(x_n)$ — коефіцієнт при z^t у степеневому ряді $f^n(z)$. (в) Розглянувши довільну функцію $\varphi(t)$, $t \in \mathbb{Z}_+$, для якої $\mathbf{E}_\theta \varphi(t) = 0$ $\forall \theta \in \Theta$, показати, що $\varphi(t) = 0$ при всіх t, для яких $b(t) = 0$, тобто $\varphi(t) = 0$ на множині значень статистики T. (г) Розглянути оцінку

$$\widehat{\tau} = \begin{cases} b(T-k)/b(T) & \text{при } T \geq k, \\ 0 & \text{при } T < k \end{cases}$$

та довести її незміщеність.

6.9. Використати означення достатньої статистики, обчисливши $L(X, \theta) =$

$$(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{j=1}^n \xi_j^2 - 2(\alpha + \beta c_j)\sum_{j=1}^n \xi_j + n(\alpha + \beta c_j)^2\right)\right\}.$$

6.10. Ні. Показати, що $T = (\nu_{n1}, \ldots, \nu_{n,m-1})$ є повною достатньою статистикою. Достатність випливає з того, що

$$L(X, \theta) = \prod_{i=1}^{m-1} p_i^{\nu_{ni}} = p_m^{n - \sum_{i=1}^{m-1} \nu_{ni}} \prod_{i=1}^{m-1} p_i^{\nu_{ni}}.$$

Для доведення повноти використати той факт, що з тотожної рівності нулю полінома випливає рівність нулю всіх його коефіцієнтів.

6.11. (a) Достатність довести за означенням, записавши

$$L(X, \theta) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{n}{2\sigma^2}\left(\widehat{\sigma}_n^2 + (\widehat{\mu}_n - \mu)^2\right)\right\}.$$

Для доведення повноти використати той факт, що для розподілу $N(\mu, \sigma^2)$ вибіркові середнє і дисперсія незалежні, причому

$$\tfrac{\sqrt{n}(\widehat{\mu}_n - \mu)}{\sigma} \simeq N(0,1), \quad \tfrac{n\widehat{\sigma}_n^2}{\sigma^2} \simeq \chi_{n-1}^2,$$

звідки $\widehat{\mu}_n \simeq N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$, $\widehat{\sigma}_n^2 \simeq \Gamma(\frac{n}{2\sigma^2}, \frac{n-1}{2})$. Для довільної вимірної φ

$$\mathbf{E}_\theta \varphi(\widehat{\mu}_n, \widehat{\sigma}_n^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\widehat{\mu}_n}(x) \left(\int_0^{+\infty} \varphi(x,y) f_{\widehat{\sigma}_n^2}(y) dy\right) dx =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\widehat{\mu}_n}(x) g(x) dx = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{n\mu^2}{2\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{\frac{\mu n x}{\sigma^2} - \frac{n x^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Виконавши в останньому інтегралі заміну змінних $z = \frac{nx}{\sigma^2}$ і користуючись тим, що двостороннє перетворення Лапласа $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) e^{-\lambda x} dx$ однозначно визначає функцію $h(x)$ для майже всіх x, показати, що з рівності $\mathbf{E}_\theta \varphi(\widehat{\mu}_n, \widehat{\sigma}_n^2) = 0\ \forall \theta \in \Theta$ випливає, що для майже всіх x

функція $g(x) = 0$, звідки $\int_0^{+\infty} \varphi(x,y) y^{\frac{n-3}{2}} e^{-\frac{ny}{2\sigma^2}} dy = 0$. Знову скориставшись властивістю перетворення Лапласа, одержати звідси, що $\varphi(x,y) = 0$ для майже всіх $x \in \mathbb{R}$ та $y > 0$.

(б) Розглянути незміщену оцінку $T_1 = 1\!\!\mathrm{I}_{\xi_1 \le 0}$ і обчислити оптимальну оцінку за формулою $T^* = \mathbf{E}_\theta(T_1|T)$, де $T = (\widehat{\mu}_n, \widehat{\sigma}_n^2)$. Для цього: (1) записати $T^* = \mathbf{P}_\theta(\xi_1 \le 0|T) = \mathbf{P}_\theta(\eta \le u_0|T)$, де $\eta = \frac{\xi_1 - \widehat{\mu}_n}{\sqrt{n}\widehat{\sigma}_n}$, $u_0 = -\frac{\widehat{\mu}_n}{\sqrt{n}\widehat{\sigma}_n}$; (2) довівши незалежність η і T за допомогою задачі 6.21, одержати, що $T^* = F_\eta(u_0)$; (3) діючи аналогічно доведенню теореми про вибіркові середнє та дисперсію від нормальної вибірки, зобразити η у вигляді $\eta = \frac{\zeta_1^2}{\sqrt{\zeta_1^2 + \ldots + \zeta_{n-1}^2}}$, де $\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}$ — незалежні стандартні нормальні величини, або, що те саме $\eta = \frac{\zeta_1^2}{\sqrt{\zeta_1^2 + \chi_{n-2}^2}}$, де χ_{n-2}^2 не залежить від ζ_1; (4) обчислити функцію розподілу F_η.

6.12. (а) Розглянути функцію $\varphi(x) = x$ і показати, що $\mathbf{E}_\theta \varphi(X) = 0$ для всіх $\theta \in (0,1)$. (б) Умова незміщеності оцінки $T(X)$ має вигляд:

$$T(-1)\theta + \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} T(k)(1-\theta)^2\theta^k = (1-\theta)^2.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при степенях θ, одержати систему рівнянь для $T(k)$ і встановити, що незміщена оцінка має вигляд:

$$T(X) = \begin{cases} -c, & \text{якщо } X = -1, \\ 1, & \text{якщо } X = 0, \\ 2^{X-1}c, & \text{якщо } X \ge 1, \end{cases} \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Обчислити дисперсію цієї оцінки і переконатися, що вона буде найменшою при $c = 0$.

6.13. Врахувати, що $S_n \simeq \Gamma(\theta, n)$ і є повною достатньою статистикою (див. вказівку до 6.7), та перевірити незміщеність оцінки.

6.14. Оскільки оцінка є функцією від повної достатньої статистики $\widehat{\mu}_n$, то достатньо перевірити незміщеність. Для цього встановити, що $-\sqrt{n}\widehat{\mu}_n \simeq N(-\sqrt{n}\theta, 1)$, і врахувати, що для випадкової величини $\eta \simeq N(\mu, 1)$ має місце рівність $\mathbf{E}H_k(\eta) = \mu^k$.

6.15. (а) Врахувати, що $\widehat{S}_n$ має негативний біноміальний розподіл $G(\theta, n)$, і діяти аналогічно розв'язанню задачі 6.2;

$$\mathbf{P}_\theta\left(X = x \mid \widehat{S}_n = s\right) = \frac{1}{C_{s-1}^{n-1}} 1\!\!\mathrm{I}_{x_1+\ldots+x_n=s}, \quad s \geq n.$$

(б) Скористатися результатом задачі 6.7, встановивши, що $\max(0, 1 - a/s) = 1 - \min(a, s)/s$ для $s > 0$.

6.16. Розглянути розвинення у ряд Тейлора функції $(\ln L(X, \theta + \varepsilon) - \ln L(X, \theta - \varepsilon))$ у припущенні, що

$$L(X, \theta) = \prod_{j=1}^{n} (\pi(1 + (\xi_j - \theta)^2))^{-1} = g(T(X), \theta).$$

6.17. Оцінка S є мінімальною тоді і тільки тоді, коли для довільної достатньої статистики T знайдеться борелєва f така, що $S = f(T)$ м.н.

6.18. (а) $S = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$; (б); (в) $S = \left(\xi_{(1)}, \ldots, \xi_{(n)}\right)$.

6.19. Врахувати незміщеність $\widehat{\theta}$ (див. 1.9) та перевірити достатність статистики $\max_{1 \leq k \leq n} \max(\xi_k, -\xi_k)$.

6.20. Записати функцію вірогідності у вигляді

$$L(X, \theta) = 1\!\!\mathrm{I}_{\theta < \xi_{(1)} \leq \xi_{(n)} < \theta + 1}.$$

Для доведення неповноти показати, що $\mathbf{E}_\theta\left(\xi_{(n)} - \xi_{(1)} - \frac{n-1}{n+1}\right) = 0$.

6.21. Для будь-якої події A ймовірності

$$\varphi_A(T) = \mathbf{P}_\theta(S \in A \mid T) \quad \text{та} \quad \gamma_A = \mathbf{P}_\theta(S \in A)$$

не залежать від θ. Враховуючи рівність $\mathbf{E}_\theta \varphi_A(T) = \gamma_A$, з умови повноти вивести, що $\varphi_A(T) = \gamma_A$.

6.22. $T(X) = \sum_{j=1}^{n} (2j + \xi_j)$.

6.23. Для ефективної оцінки $T(X)$ існує функція $c(\theta)$ така, що

$$T(X) - \tau(\theta) = c(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(X, \theta).$$

Інтегруючи по θ, одержати, що функція вірогідності має вигляд

$$L(X, \theta) = \exp\{a(\theta) T(X) + b(\theta) + d(X)\},$$

а отже, T — достатня статистика.

6.24. Припустимо, що вимірювання $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — кратна вибірка з розподілу $N(\mu, \sigma^2)$. Тоді оцінюваною функцією є $\tau(\theta) = \pi\mu^2$. Розглянути оцінку $T = \pi(\widehat{\mu}_n^2 - \widehat{\sigma}_n^2/(n-1))$, перевірити її незміщеність, та врахувати, що $(\widehat{\mu}_n, \widehat{\sigma}_n^2)$ — повна достатня статистика (див. задачу 6.11 (a)).

6.25. Щільність спостереження має вигляд

$$f(y, \theta) = p(y, \theta)1\!\!1_{y \in [a(\theta), b]},$$

тому функція вірогідності дорівнює

$$L(X, \theta) = \prod_{k=1}^n p(\xi_k, \theta) 1\!\!1_{\xi_{(1)} > a(\theta)} 1\!\!1_{\xi_{(n)} < b}.$$

Звідси випливає, що $\xi_{(1)}$ є достатньою статистикою тоді і тільки тоді, коли $p(\xi_k, \theta)$ розкладається в добуток двох функцій, одна з яких залежить від ξ_k, а друга — від θ.

6.26. Нехай T — достатня статистика. З незалежності η і T випливає, що $\mathbf{P}_\theta(\eta \in A) = \mathbf{P}_\theta(\eta \in A \mid T)$ для будь-якої події A. Остання ймовірність не залежить від θ в силу достатності T.

6.27. Повнота є наслідком однозначності поліномів Бернштейна.

6.28. Не існує.

6.29. $\nu_{01}(X) = n^{-1} \sum_{j=1}^n 1\!\!1_{\xi_j \in \{0,1\}}$.

6.30. $\widehat{\mu}_{n1}, \widehat{\mu}_{n2}, \widehat{\sigma}_{n1}^2, \widehat{\sigma}_{n2}^2, \widehat{\rho}_{n12} = \widehat{\sigma}_{n1}^{-1} \widehat{\sigma}_{n2}^{-1} \sum_{j=1}^n (\xi_{j1} - \widehat{\mu}_{n1})(\xi_{j2} - \widehat{\mu}_{n2})$.

7.1. $\widehat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k$.

7.2. $\widehat{p} = \frac{n}{\sum_{k=1}^n \xi_k}$. Для доведення консистентності використати закон великих чисел.

7.3. $\widehat{p} = 0.9$. Інформація за Фішером в одному спостереженні дорівнює $\frac{1}{p(1-p)}$, вірогідний інтервал має вигляд $\left(\widehat{p} \pm x_\gamma \sqrt{\widehat{p}(1-\widehat{p})/n}\right)$, де γ — заданий вірогідний рівень, $x_\gamma = \Phi^{(-1)}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)$.

7.4. Врахувати, що кількість помічених особин серед відловлених має гіпергеометричний розподіл.

$$\widehat{N} = \arg\max{}_N \frac{C_n^k C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m} = \left[\frac{nm}{k}\right].$$

7.5. $\widehat{p} = \widehat{\mu}_n^{-1}$ (можна скористатися результатом задачі 7.2, оскільки геометричний розподіл є частковим випадком негативного біноміального). Інформація за Фішером в одному спостереженні дорівнює $\frac{1}{p^2(1-p)}$, вірогідний інтервал має вигляд $\left(\widehat{p} \pm x_\gamma \widehat{p}\sqrt{(1-\widehat{p})/n}\right)$, де γ — заданий вірогідний рівень, $x_\gamma = \Phi^{(-1)}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)$.

7.6. $L(X,p) = p^n(1-p)^{\sum_{k=1}^n \xi_k - n}$, $\widehat{\mu}_n$ — достатня статистика, $\widehat{p} = \widehat{\mu}_n^{-1}$ — ОМВ. Для доведення конзистентності використати закон великих чисел.

7.7. (а) Використати означення умовної ймовірності.
(б) Обчислити $\mathbf{E}\xi = \frac{e^{-\theta}}{1-e^{-\theta}} \sum_{y=1}^{+\infty} \frac{\theta^y}{(y-1)!}$;
(в) $L(X,\theta) = \frac{e^{-n\theta}}{(1-e^{-\theta})^n \prod_{k=1}^n \xi_k!} \theta^{\sum_{k=1}^n \xi_k}$; $U(X,\theta) = \frac{1}{\theta}\sum_{k=1}^n \xi_k - \frac{n}{1-e^{-\theta}}$;
(г) границя дорівнює $I^{-1}(\theta) = \frac{\theta(1-e^{-\theta})^2}{n(1-e^{-\theta}-\theta e^{-\theta})}$.

7.8. $\widehat{n} = \left[\frac{\xi_1}{p}\right]$.

7.9. (а) $\widehat{\lambda} = 0.122$ (див. 7.1). (б) Врахувавши, що сума n незалежних величин з розподілом $\Pi(\lambda)$ має розподіл $\Pi(n\lambda)$, виразити оцінювані ймовірності через λ та скористатися інваріантністю ОМВ: $\theta_1 = e^{-5\lambda}$, $\theta_2 = 1 - \sum_{k=0}^{40} e^{-250\lambda}\frac{(250\lambda)^k}{k!}$, $\widehat{\theta}_1 \approx 0.543$, $\widehat{\theta}_2 \approx 0.040$.

7.10. $I(\theta,\theta_0) = -\mathbf{E}_{\theta_0} \ln \frac{\theta^{\xi_1}(1-\theta)^{n-\xi_1}}{\theta_0^{\xi_1}(1-\theta_0)^{n-\xi_1}} =$
$n\left(\theta_0 \ln\frac{\theta_0}{\theta} + (1-\theta_0)\ln\frac{1-\theta_0}{1-\theta}\right)$.

7.11 Розглянути довільну достатню статистику $T = T(X)$, записати за означенням $L(X,\theta) = g(T,\theta)h(X)$, вивести з умови задачі, що $\widehat{\theta}_n$ — єдине значення, яке максимізує функцію $g(T,\theta)$ по θ. Звідси випливає, що $\widehat{\theta}_n$ є функцією від T.

7.12. Для розподілу $B(N,p)$: $\widehat{p} = \frac{1}{Nn}\sum_{k=1}^n \xi_k$.

7.13. $\widehat{\lambda}_1 = \frac{S_{1m}(S_n+S_{1m}+S_{2m})}{(m+n)(S_{1m}+S_{2m})}$, $\widehat{\lambda}_2 = \frac{S_{2m}(S_n+S_{1m}+S_{2m})}{(m+n)(S_{1m}+S_{2m})}$.

7.14. $\widehat{\alpha} = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^n(\xi_k+\eta_k)$, $\widehat{\beta} = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^n(\xi_k-\eta_k)$.

7.15. $\widehat{\mu}_1 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \xi_k$, $\widehat{\mu}_2 = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^m \zeta_k$,
$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n+m}\left(\sum_{k=1}^n(\xi_k-\widehat{\mu}_1)^2 + \sum_{k=1}^m(\zeta_k-\widehat{\mu}_2)^2\right)$.

7.16. (а) $\widehat{\theta}_1 = \xi_1$, $\widehat{\theta}_2 = \xi_2$. (б) $\widehat{\theta}_1 = \xi_1$, $\widehat{\theta}_2 = \xi_2$, якщо $\xi_1 \le \xi_2$;

$\widehat{\theta}_1 = \widehat{\theta}_2 = \frac{\xi_1+\xi_2}{2}$, якщо $\xi_1 > \xi_2$.

7.17. Функції вірогідності не має критичних точок.

7.18. (а) Рівняння максимальної вірогідності:

$$n\rho(1-\rho^2) + (1+\rho^2)\sum\nolimits_{k=1}^{n} \xi_{1k}\xi_{2k} - \rho\sum\nolimits_{k=1}^{n}(\xi_{1k}^2 + \xi_{2k}^2) = 0.$$

Асимптотична дисперсія ОМВ дорівнює $i^{-1}(\rho) = \frac{(1-\rho^2)^2}{1+\rho^2}$. (б) Асимптотична незміщеність $\widehat{\rho}_n$ — наслідок задачі 1.19. Для доведення асимптотичної нормальності скористатися центральною граничною теоремою. Асимптотична дисперсія $\widehat{\rho}_n$ дорівнює $\mathbf{D}(\xi_{11}\xi_{21}) = 1+\rho^2$.

7.19. $\widehat{\mu} = \begin{cases} [\widehat{\mu}_n], & \widehat{\mu}_n - [\widehat{\mu}_n] < 1/2, \\ [\widehat{\mu}_n]+1, & \widehat{\mu}_n - [\widehat{\mu}_n] \geq 1/2. \end{cases}$

7.20. $\widehat{\theta} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{\widehat{\mu}_n^2 + 8\widehat{\mu}_{2,n}} - \widehat{\mu}_n\right)$, для доведення конзистентності використати закон великих чисел.

7.21. $\theta^2 - 2\theta\widehat{\mu}_n + (2\widehat{\mu}_n - 1)\nu(\theta) - 2\theta\nu(\theta) + \widehat{\mu}_{2,n} = 0$. Для випадку $\nu(\theta) = \theta^k$: $\theta^2 - 2\theta\widehat{\mu}_n + (2\widehat{\mu}_n - 1)\theta^k - 2\theta^{k+1} + \widehat{\mu}_{2,n} = 0$.

7.22. Функція вірогідності має вигляд $L(X,\theta) =$ $(2\pi)^{-n/2}\exp(-(n-\nu)\ln\sigma - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\nu}(\xi_{1j}-\mu)^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=\nu+1}^{n}(\xi_{2j}-\mu)^2)$, де ν - кількість спостережень з одиничною дисперсією, (ξ_{1j}) - відповідні спостереження, (ξ_{2j}) - решта спостережень. Звідси знаходимо ОМВ.

7.23. Показати, що $\mathbf{D}\left(\frac{n\widehat{\sigma}_n^2}{n+1}\right) = \frac{n^2}{(n+1)^2}\mathbf{D}\left(\widehat{\sigma}_n^2\right) - \frac{\sigma^4}{(n+1)^2} < \mathbf{D}\left(\widehat{\sigma}_n^2\right)$, $\mathbf{D}\widehat{s}_n^2 = \frac{n^2}{(n-1)^2}\mathbf{D}\left(\widehat{\sigma}_n^2\right) + \frac{(n-2)\sigma^4}{(n-1)^2} > \mathbf{D}\left(\widehat{\sigma}_n^2\right)$.

7.24. Див. 7.18.

8.1. $L(x,\theta) = (2\theta)^{-5}\mathbb{I}_{\theta>0.92}$, $\widehat{\theta} = 0.92$.

8.2. $\widehat{a} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \min_{k=\overline{1,n}}\xi_k$, $\widehat{b} = \min_{k=\overline{1,n}}\xi_k$.

8.3. Рівняння максимальної вірогідності: $\theta^2 + 2\theta - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2 = 0$. Для доведення конзистентності використати закон великих чисел.

8.4. Оцінити параметр μ і використати інваріантність ОМВ. $\widehat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$, $\widehat{\theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_9^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-\widehat{\mu})^2}dx = 1 - \Phi(9-\widehat{\mu})$. Для наведених даних $\widehat{\mu} = 8.2$, $\widehat{\theta} \approx 0.2119$.

8.5. Звести задачу максимізації функції вірогідності до мінімізації суми $\sum_{k=1}^n |\xi_k - \theta| = \sum_{k=1}^n |\xi_{(k)} - \theta|$.

8.6. $\widehat{a} = \min_{k=\overline{1,n}} \xi_k$, $\widehat{b} = \max_{k=\overline{1,n}} \xi_k$. Щільності розподілів дорівнюють $f_{\widehat{a}}(x) = \frac{n(b-x)^{n-1}}{(b-a)^n} 1\!\!\mathrm{I}_{x\in(a,b)}$, $f_{\widehat{b}}(x) = \frac{n(x-a)^{n-1}}{(b-a)^n} 1\!\!\mathrm{I}_{x\in(a,b)}$.

8.7. (а) Функція вірогідності: $L(X, \mu, \sigma^2) =$
$(2\pi)^{-n/2}\sigma^{-n}\left(\prod\limits_{k=1}^n \xi_k\right)^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{k=1}^n (\ln\xi_k - \mu)^2\right\} 1\!\!\mathrm{I}_{\min\limits_k \xi_k > 0}$.
Достатня статистика: $T(X) = \left(\sum_{k=1}^n \ln\xi_k, \sum_{k=1}^n \ln^2\xi_k\right)$. ОМВ:

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{n}\sum\nolimits_{k=1}^n \ln\xi_k, \quad \widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum\nolimits_{k=1}^n (\ln\xi_k - \widehat{\mu})^2 .$$

(б) Функція вірогідності:

$$L(X,\theta) = \theta^{-n}\left(\prod_{k=1}^n \xi_k\right)\exp\left\{-\frac{1}{2\theta}\sum_{k=1}^n \xi_k^2\right\} 1\!\!\mathrm{I}_{\min\limits_k \xi_k > 0}.$$

Достатня статистика: $T(X) = \sum_{k=1}^n \xi_k^2$. ОМВ: $\widehat{\theta} = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^n \xi_k^2$.

8.8. $\widehat{\theta} = \ln n - \ln\left(\sum_{k=1}^n e^{-\xi_k}\right)$.

8.9. $\widehat{a} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n |\xi_k - \widehat{m}_n|$, $\widehat{b} = \widehat{m}_n$, де $\widehat{m}_n$ — вибіркова медіана.

8.10. (а) $I(\mu,\sigma,\mu_0,\sigma_0) = -\ln\frac{\sigma_0}{\sigma} + \frac{\sigma_0^2 + (\mu_0-\mu)^2}{2\sigma^2} - \frac{1}{2}$.
(б) $I(\lambda,\alpha,\lambda_0,\alpha_0) = \alpha\ln\frac{\lambda_0}{\lambda} + (\alpha_0 - \alpha)\frac{\Gamma'(\alpha_0)}{\Gamma(\alpha_0)} - \alpha_0 + \frac{\alpha_0\lambda}{\lambda_0} - \ln\frac{\Gamma(\alpha_0)}{\Gamma(\alpha)}$, спочатку обчислити $\mathbf{E}_{\lambda_0,\alpha_0}\ln\xi_1 = \frac{\Gamma'(\alpha_0)}{\Gamma(\alpha_0)} - \ln\lambda_0$.

8.11. $\widehat{\theta} = n \,/\, \sum_{k=1}^n \xi_k$.

8.12. Функція вірогідності спадає при $\theta > \max\xi_j$, та є нульовою для інших θ. ОМВ зміщена, оскільки $\widehat{\theta} < \theta$ м.н.

8.13. Див. 7.11.

8.14. Цей інтервал має вигляд $(\max_k \xi_k - 1, \min_k \xi_k)$.

8.15. Скористатися теоремами про інваріантність та асимптотичну нормальність ОМВ: $\widehat{\tau}_n = \Phi\left(-\frac{\widehat{\mu}_n}{\widehat{\sigma}_n}\right)$; $\sqrt{n}(\widehat{\tau}_n - \tau(\theta)) \to^W \eta \simeq N(0, \sigma_\tau^2(\theta))$, де $\sigma_\tau^2(\theta) = \tau_\theta' I^{-1}(\theta)\tau_\theta = \frac{1}{2\pi}e^{-\mu^2/\sigma^2}\left(1 + \frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right)$, а $I(\theta) = \left(\begin{smallmatrix}\sigma^{-2} & 0\\ 0 & 2\sigma^{-4}\end{smallmatrix}\right)$ — інформаційна матриця за Фішером в одному спостереженні.

8.16. Рівняння ОМВ: $\sum_{k=1}^{n}\ln\xi_k - n\frac{\Gamma'(\theta)}{\Gamma(\theta)} = 0$. Використовуючи теорему про асимптотичну нормальність ОМВ, показати, що для ОМВ $\widehat{\theta}_n$

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\theta}_n - \theta\right) \to^W N\left(0, \psi_1^{-1}(\theta)\right),$$

де $\psi_1(\theta) = \frac{d^2}{d\theta^2}\ln\Gamma(\theta)$ — тригама-функція. Довести, використовуючи центральну граничну теорему, що для оцінки методу моментів $\widehat{\mu}_n$ має місце збіжність

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\mu}_n - \theta\right) \to^W N(0,\theta),\ n \to \infty.$$

Отже, асимптотична ефективність $\widehat{\mu}_n$ дорівнює $\frac{1}{\theta\psi_1(\theta)} < 1$.

8.17. Обчислити $\mu(\theta) = C(\theta,a,b)\left(e^{-\frac{1}{2}(a-\theta)^2} - e^{-\frac{1}{2}(b-\theta)^2}\right) + \theta$, $C(\theta,a,b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\Phi(b-\theta)-\Phi(a-\theta))}$. Показати, що рівняння ОМВ $\frac{C'_\theta(\theta,a,b)}{C(\theta,a,b)} - \theta + \widehat{\mu}_n = 0$ еквівалентне рівнянню $\widehat{\mu}_n = \mu(\theta)$.

8.18. $\widehat{\theta}_1 = T_1 + \sqrt{T_1T_2}$, $\widehat{\theta}_2 = T_2 + \sqrt{T_1T_2}$, де $T_1 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k 1\!\!1_{\xi_k>0}$, $T_2 = -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k 1\!\!1_{\xi_k<0}$. Граничний розподіл знайдіть за допомогою теореми про асимптотичну нормальність ОМВ:

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\theta}_n - \theta\right) \to^W N\left(0, \sigma^2(\theta)\right), n \to \infty,$$

де

$$\sigma^2(\theta) = I^{-1}(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\theta_1(2\theta_1+\theta_2) & \frac{1}{2}\theta_1\theta_2 \\ \frac{1}{2}\theta_1\theta_2 & \frac{1}{2}\theta_2(\theta_1+2\theta_2) \end{pmatrix}.$$

Тут $I(\theta)$ — інформаційна матриця за Фішером в одному спостереженні:

$$I(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\theta_1+2\theta_2}{\theta_1(\theta_1+\theta_2)^2} & -\frac{1}{(\theta_1+\theta_2)^2} \\ -\frac{1}{(\theta_1+\theta_2)^2} & \frac{2\theta_1+\theta_2}{\theta_2(\theta_1+\theta_2)^2} \end{pmatrix}.$$

8.19. Функція вірогідності $L(k,\theta) = \mathbf{P}_\theta(\nu = k) = C_n^k a_N(k) N^{-n}$, $\theta = n$, де $a_N(k)$ - кількість розміщень N частинок по k комірках, за яких всі вони зайняті. Відношення вірогідностей при $\theta = n$ та $\theta = n-1$ дорівнює $n/(n-k)N$, тому ОМВ $\widehat{\theta} = [\nu N/(N-1)]$.

8.20. Послідовне відношення вірогідностей дорівнює

$$(n-k+1)(m-k+1)/k(N-n-m+k),$$

тому найбільша імовірність досягається при

$$k = [(n+1)(m+1)/(N+2)].$$

8.21. $n - \sum_{k=1}^{n}(1+\exp(-\alpha-\beta\xi_k))^{-1} = 0$,

$$\frac{n}{\beta} + \sum\nolimits_{k=1}^{n} \xi_k(\exp(-\alpha-\beta\xi_k)-1)(1+\exp(-\alpha-\beta\xi_k))^{-1} = 0.$$

8.22. У першому випадку $\widehat{\lambda}_1 = n \,/\, \sum_{k=1}^{n}\xi_{1k}$, $\widehat{\lambda}_2 = n \,/\, \sum_{k=1}^{n}\xi_{2k}$; у другому випадку $\widehat{\lambda}_1 = \sum_{k=1}^{n}\delta_k \,/\, \sum_{k=1}^{n}\eta_k$, $\widehat{\lambda}_2 = (n - \sum_{k=1}^{n}\delta_k) \,/\, \sum_{k=1}^{n}\eta_k$.

8.23. Система рівнянь ОМВ має вигляд

$$\begin{cases} nr = p\sum_{k=1}^{n}\xi_k, \\ p^{-1} = 1 + \exp\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\psi(\xi_k - r + 1) - \psi(r)\right\}, \end{cases}$$

де $\psi(t) = \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}$ – дігама функція.

8.24. Знайти $U(X,\theta) = \sum_{k=1}^{n}\frac{f_0(\xi_k)-f_1(\xi_k)}{f_1(\xi_k)+\theta(f_0(\xi_k)-f_1(\xi_k))}$ і показати, що похідна $\frac{\partial}{\partial\theta}U(X,\theta) < 0$, а отже, рівняння $U(X,\theta) = 0$ має розв'язок тоді і тільки тоді, коли $\lim_{\theta\to 0}U(X,\theta) > 0$ і $\lim_{\theta\to 1}U(X,\theta) < 0$, що еквівалентно умові

$$\sum\nolimits_{k=1}^{n}\frac{f_0(\xi_k)}{f_1(\xi_k)} > n \quad \text{і} \quad \sum\nolimits_{k=1}^{n}\frac{f_1(\xi_k)}{f_0(\xi_k)} > n.$$

Якщо $\sum_{k=1}^{n}\frac{f_0(\xi_k)}{f_1(\xi_k)} \le n$, то ОМВ є $\widehat{\theta} = 0$, якщо $\sum_{k=1}^{n}\frac{f_1(\xi_k)}{f_0(\xi_k)} \le n$, то ОМВ дорівнює $\widehat{\theta} = 1$.

8.25. Скористатися теоремою про асимптотичну нормальність ОМВ:

$$\sqrt{n}\,(\widehat{\tau}_n - \tau(\theta)) \to^{W} N\left(0, \theta(1-\theta)(1-2\theta)^2\right), \quad n\to\infty.$$

8.26. $\widehat{\theta}_1 = \min(\xi_j, j = \overline{1,n})$, $\widehat{\theta}_2 = 1/\left(n^{-1}\sum_{j=1}^{n}\ln\xi_j - \ln\widehat{\theta}_1\right)$.

У даному розділі для статистик від кратної вибірки $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ використовуються позначення:

$$\widehat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum\nolimits_{k=1}^{n}(\xi_k-\mu)^2, \quad \widehat{s}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum\nolimits_{k=1}^{n}(\xi_k-\widehat{\mu}_n)^2.$$

9.1. $(109.968, 110.032)$. Врахувати, що $\sqrt{n}\frac{\widehat{\mu}_n-\mu}{\widehat{s}_n} \simeq \tau_{n-1}$. Кінці інтервалу дорівнюють $\widehat{\mu}_n \pm \frac{\widehat{s}_n}{\sqrt{n}} t_{\frac{1-\gamma}{2};n-1}$, де $\gamma = 0.95$ — вірогідний рівень, $t_{\frac{1-\gamma}{2};n-1}$ — квантиль рівня $\frac{1+\gamma}{2}$ розподілу Стьюдента τ_{n-1} (див. таблицю 3).

9.2. $(4.77618, 4.78542)$. Аналогічно попередній задачі.

9.3. $(0.466, 7.718)$. Показати, що для двох незалежних кратних вибірок з $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ та $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ об'ємів n та m відповідно $\frac{\sigma_1^2\widehat{\sigma}_m^2}{\sigma_2^2\widehat{\sigma}_n^2} \simeq f_{m,n}$. Інтервал для $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ має вигляд $\left(\frac{\widehat{\sigma}_n^2}{\widehat{\sigma}_m^2} F_{\frac{1+\gamma}{2};m;n}, \frac{\widehat{\sigma}_n^2}{\widehat{\sigma}_m^2} F_{\frac{1-\gamma}{2};m;n}\right)$, де $F_{p;m;n}$ — квантиль рівня $1-p$ розподілу Фішера $f_{m,n}$ (див. таблицю 4), $\gamma = 0.95$ — вірогідний рівень.

9.4. $(0.243, 0.877)$. Користуючись тим, що $\sqrt{n_i}\frac{\bar{x}_i-a_i}{\sigma} \simeq N(0,1)$, $\frac{(n_i-1)s_i^2}{\sigma^2} \simeq \chi^2_{n_i-1}$, $i = 1, 2$, та незалежністю статистик $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, s_1^2, s_2^2, показати, що

$$\sqrt{\frac{n_1n_2}{(n_1+n_2)}} \cdot \frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2-(a_1-a_2)}{\sigma} \simeq N(0,1),$$

$$\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{\sigma^2} \simeq \chi^2_{n_1+n_2-2},$$

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - (a_1 - a_2))\sqrt{\frac{n_1n_2(n_1+n_2-2)}{(n_1+n_2)\big((n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2\big)}} \simeq \tau_{n_1+n_2-2}.$$

Оцінки інтервалу $a_1 - a_2$ дорівнюють

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \pm t_{\frac{1-\gamma}{2};n_1+n_2-2}\sqrt{\frac{(n_1+n_2)\big((n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2\big)}{n_1n_2(n_1+n_2-2)}},$$

де $\gamma = 0.975$ — вірогідний рівень, $t_{\frac{1-\gamma}{2};n_1+n_2-2} \approx 2.304$ — квантиль рівня $\frac{1+\gamma}{2}$ розподілу $\tau_{n_1+n_2-2}$.

9.5. Кінці надійного інтервалу з надійністю γ дорівнюють $\xi_\lambda + \frac{x_\gamma}{2} \pm \sqrt{x_\gamma\left(\xi_\lambda + \frac{x_\gamma}{4}\right)}$, де $x_\gamma = \Phi^{(-1)}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)$.

9.6. $(\widehat{\mu} - 0.653, \widehat{\mu} + 0.653)$.

9.7. $(1.2415, 2.2120)$. Врахувати, що $\frac{(n-1)\widehat{s}^2}{\sigma^2} \simeq \chi^2_{n-1}$. Інтервал для σ має вигляд $\left(\sqrt{(n-1)\widehat{s}^2 \,/\, \chi^2_{\frac{1-\gamma}{2};n-1}}, \sqrt{(n-1)\widehat{s}^2 \,/\, \chi^2_{\frac{1+\gamma}{2};n-1}}\right)$, де $\chi^2_{p;n-1}$ — квантиль рівня $1-p$ розподілу χ^2_{n-1} (див. таблицю 2).

9.8. $(0.0030, 0.0687)$ — за першою вибіркою, $(0.0014, 0.0329)$ — за другою вибіркою, $(0.0028, 0.0226)$ — за двома вибірками. Врахувати, що $\frac{(n-1)\widehat{s}_n^2}{\sigma^2} \simeq \chi^2_{n-1}$.

9.9. $(13.26, 24.74)$. Див. вказівку до 9.4.

9.10. (б) В обох випадках можна вибрати $T(X) = \sum_{k=1}^n \xi_k$. Для вибірки з $B(m,\theta)$: $T \simeq B(nm,\theta)$,

$$\mathbf{P}_\theta(T < k) = \sum_{i=0}^{k-1} C_{nm}^i \theta^i (1-\theta)^{nm-i}.$$

Для вибірки з $\Pi(\theta)$: $T \simeq \Pi(n\theta)$, $\mathbf{P}_\theta(T < k) = \sum_{i=0}^{k-1} e^{-n\theta}\frac{(n\theta)^i}{i!}$. Монотонність перевірити диференціюванням.

9.11. (а) 0.0744; (б) 0.0766.

9.12. 0.0365. Припустити, що маса виробу ξ має нормальний розподіл $N(1,\sigma^2)$ та знайти σ з умови $\mathbf{P}(\xi < 0.94) = 0.05$. Шукана ймовірність дорівнює $C_4^2 F^2(1.05)(1-F(1.05))^2$, де $F(x) = \Phi\left(\frac{x-1}{\sigma}\right)$ — функція розподілу ξ.

9.13. (а) $(2.930, 3.106)$; (б) $(0.0008, 0.0131)$; (в) $(2.958, 3.078)$ — для математичного сподівання, $(0.0008, 0.0192)$ — для дисперсії.

9.14. $(2.958, 3.042)$ — для середнього, $(0.0028, 0.0144)$ — для дисперсії випадкових помилок.

9.15. Зобразити χ^2_n у вигляді суми незалежних випадкових величин з розподілом χ^2_1. Кінці наближеного вірогідного інтервалу для n рівня γ дорівнюють $\xi + x_\gamma^2 \pm x_\gamma\sqrt{2\xi + x_\gamma^2}$, де $x_\gamma = \Phi^{(-1)}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)$.

9.16. Маємо $\sqrt{2\chi^2_n} - \sqrt{2n-1} = \left(\frac{\chi^2_n - n}{\sqrt{2n}} + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right)\frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2\chi^2_n}+\sqrt{2n-1}}$. Довести за допомогою закону великих чисел, що $\chi^2_n/n \xrightarrow{\mathbf{P}} 1$, звідки $\frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2\chi^2_n}+\sqrt{2n-1}} \xrightarrow{\mathbf{P}} 1$. Далі використати 9.15 та 1.21.51. Шуканий вірогідний інтервал рівня γ має вигляд $\left(\frac{1+(\sqrt{2\xi}-x_\gamma)^2}{2}, \frac{1+(\sqrt{2\xi}+x_\gamma)^2}{2}\right)$, де $x_\gamma = \Phi^{(-1)}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)$.

9.17. Показати, що розподіл даних статистик не залежить від параметрів розподілу спостережень, та скористатися задачами 6.21 та 6.11 (а).

9.18. Показати, що щільність величини $\eta = \sqrt{\chi^2_n/n}$ дорівнює

$f_\eta(y) = 2nyf_{\chi^2_n}(ny^2)$, і скористатися задачею 1.14.5 (б). Центрованість τ_n випливає з парності щільності. При обчисленні дисперсії звести інтеграл до бета-функції.

9.19. Записати $\tau_n = \frac{\zeta}{\sqrt{\chi^2_n/n}}$, $\zeta \simeq N(0,1)$, довести за допомогою закону великих чисел, що $\chi^2_n/n \to^{\mathbf{P}} 1$, і використати задачу 1.21.51.

9.20. Використати формулу для щільності хі-квадрат та задачу 1.14.5.

9.21. Нерівності $\widehat{f_1} \le f(\theta)$ та $f^{(-1)}(\widehat{f_1}) \le \theta$ еквівалентні для зростаючої функції f. Для спадної достатньо змінити нерівності на протилежні.

9.22. (а) Показати, що для кратної вибірки $\xi_1, \ldots, \xi_n$ з розподілу $\mathrm{Exp}(\theta)$ $2\theta\sum_{k=1}^n \xi_k \simeq \chi^2_{2n}$. Тоді надійний інтервал рівня γ для θ має вигляд

$$\left(\frac{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2};2n}}{2\sum_{k=1}^n \xi_k}, \frac{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2};2n}}{2\sum_{k=1}^n \xi_k}\right),$$

де $\chi^2_{p;2n}$ — квантиль рівня $1-p$ розподілу χ^2_{2n}. II спосіб — скористатися задачею 3.16 (б). Показати, що для кратної вибірки $\xi_1, \ldots, \xi_n$ з розподілу $U(\theta, 2\theta)$ $\left(\frac{\xi_{(n)}}{\theta} - 1\right)^n \simeq U(0,1)$, і вивести звідси, що надійний інтервал рівня γ для θ має вигляд $\left(\frac{\xi_{(n)}}{\sqrt[n]{\beta}+1}, \frac{\xi_{(n)}}{\sqrt[n]{\beta-\gamma}+1}\right)$, де $\beta \in [\gamma, 1]$ — довільне число. (в) Скористатися задачею 9.10. Надійний інтервал рівня γ для θ має вигляд $\left(\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2\right)$, де $\widehat{\theta}_1$, $\widehat{\theta}_2$ визначаються з умов

$$\sum_{k=S_n}^{\infty} e^{-n\widehat{\theta}_1}\frac{(n\widehat{\theta}_1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{S_n} e^{-n\widehat{\theta}_2}\frac{(n\widehat{\theta}_2)^k}{k!} = \frac{1-\gamma}{2}.$$

9.23. Нормальна апроксимація дає оцінку

$$164 \pm 1.96\sqrt{164 \cdot 136}/300 \approx 164 \ne 1.$$

Оскільки $\widehat{\theta} \approx 164/300 > 1/2$, то $\mathbf{D}_\theta \nu$ спадає за θ в околі $\widehat{\theta}$ та інтервал для дисперсії має вигляд $(165 \cdot 175,\ 163 \cdot 137)/300$.

9.24. Показати, що $\widehat{\mu}_n - \xi_{n+1}$ і $\widehat{s}^2_n$ — незалежні, причому

$$\frac{n\widehat{s}^2_n}{\sigma^2} \simeq \chi^2_{n-1}, \quad \widehat{\mu}_n - \xi_{n+1} \simeq N\left(0, \frac{n+1}{n}\sigma^2\right).$$

Звідси одержати, що $\sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \cdot \frac{\widehat{\mu}_n - \xi_{n+1}}{\widehat{s}_n} \simeq \tau_{n-1}$, а шуканий інтервал має вигляд $\left(\widehat{\mu}_n \pm t_{\frac{1-p}{2};n-1} \widehat{s}_n \sqrt{\frac{n+1}{n-1}}\right)$, де $t_{\frac{1-p}{2};n-1}$ — квантиль рівня $\frac{1+p}{2}$ розподілу τ_{n-1}.

9.25. (а) Заміною змінної пересвідчитись, що $\Phi_{\mu\sigma}(A_{\mu\sigma}) = \Phi_{01}(A_{01})$, де множини $A_{\mu\sigma} = \{x : (x-\mu)/\sigma \in A_{01}\}$. (б) Величина $(\zeta - \widehat{\mu}_n)/\widehat{\sigma}_n$ має нормований розподіл Стьюдента, де $\zeta \simeq N(0,1)$ не залежить від X. (в) Використати розподіл вектора $(\widehat{\mu}_n, \widehat{s}_n^2)$.

9.26. Скористатись асимптотичною нормальністю статистики $\widehat{\rho}_n^2 = n^{-1} \sum_{j=1}^n \xi_{1j}\xi_{2j}$, де $\sqrt{n}(\widehat{\rho}_n^2 - \rho^2) \to^W \eta \simeq N(0, 1+2\rho^2), n \to \infty$.

9.27. Показати, що $2n\lambda\overline{X} \simeq \chi^2_{2n}$, $2m\mu\overline{Y} \simeq \chi^2_{2m}$, а отже, $\frac{\lambda\overline{X}}{\mu\overline{Y}} \simeq f_{2n,2m}$. Шуканий інтервал має вигляд

$$\left(F_{\frac{1+p}{2};2n;2m}\overline{Y}/\overline{X}, F_{\frac{1-p}{2};2n;2m}\overline{Y}/\overline{X}\right),$$

де $F_{q;2n;2m}$ — квантиль рівня $1-q$ розподілу $f_{2n,2m}$. Тут $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \xi_k$, $\overline{Y} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^m \eta_k$.

9.28. Врахувати, що $\lambda n\widehat{\mu}_n \simeq \Gamma(1, \alpha n)$. Шуканий інтервал має вигляд $\left(u_{\frac{1-p}{2}}/(n\widehat{\mu}_n), u_{\frac{1+p}{2}}/(n\widehat{\mu}_n)\right)$, де u_q — квантиль рівня q розподілу $\Gamma(1, \alpha n)$.

9.29. Довести, що $(\xi_{(n)}/\theta)^n \simeq U(0,1)$, і вивести звідси, що

$$\mathbf{P}\left(\xi_{(n)} < \theta < \xi_{(n)}(1-p)^{-1/n}\right) = \mathbf{P}\left((\xi_{(n)}/\theta)^n > 1-p\right) = p.$$

9.30. Використати співвідношення $\sqrt{n}(\widehat{\mu}_n - \theta)/\theta \simeq N(0,1)$ і $(n-1)\widehat{s}_n^2/\theta^2 \simeq \varkappa^2_{n-1}$ та незалежність відповідних подій. Результуючий інтервал є перерізом таких двох інтервалів, що має найменшу довжину при заданій похибці першого роду.

10.1. Для наведених даних та $\alpha = 0.05$ маємо:
$\sup\limits_{-\infty<x<+\infty} \left|F(x) - \widehat{F}_n(x)\right| \approx 0.5198$, критичний рівень $\varepsilon_{\alpha;n} = 0.2640$ (див. таблицю 5). Гіпотеза про узгодженість відхиляється.

10.2. Ранг для “2” дорівнює 36.5, для “3” — 111.5, для “4” — 226.5, для “5” — 451.5. Статистика Вілкоксона

$$S_{nm} = 33 \cdot 36.5 + 43 \cdot 111.5 + 80 \cdot 226.5 + 144 \cdot 451.5 = 89\,135.$$

Для двобічного критерію рівня α нижнє критичне значення обчислюємо з

$$W_{\alpha/2;n,m} = \frac{n(n+m+1)}{2} - x_{\alpha/2}\sqrt{\frac{nm(n+m+1)}{12}} =$$

$$\frac{300\cdot 601}{2} - 1.96\sqrt{\frac{300^2\cdot 601}{12}} = 85\,988.8,$$

де $x_{\alpha/2} = \Phi^{(-1)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$, верхнє критичне значення дорівнює

$$n(n+m+1) - W_{\alpha/2;n,m} = 94\,311.2.$$

Гіпотеза про однорідність приймається.

10.3. Записати ранг спостереження ξ_i в об'єднаній вибірці у вигляді $\nu_i = 1 + \sum_{k=1,k\neq i}^{n} \mathbb{I}_{\xi_i>\xi_k} + \sum_{j=1}^{m} \mathbb{I}_{\xi_i>\eta_j}$, підставити в статистику Вілкоксона $S_{nm} = \sum_{i=1}^{n}\nu_i$ та спростити одержаний вираз. Якщо виконується альтернатива $H_1\colon F\neq G$, то

$$\mathbf{E}S_{nm} = \frac{n(n+1)}{2} + nm\mathbf{P}(\xi_1>\eta_1) = \frac{n(n+1)}{2} + nm\int_{-\infty}^{+\infty} G(x)dF(x).$$

Дисперсію знайти за формулою $\mathbf{D}S_{nm} = \mathbf{E}S_{nm}^2 - (\mathbf{E}S_{nm})^2$, обчисливши

$$\mathbf{E}S_{nm}^2 = \tfrac{n^2(n+1)^2}{4} + n(n+1)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\mathbf{E}\mathbb{I}_{\xi_1>\eta_j} + \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\mathbf{E}\mathbb{I}_{\xi_1>\eta_j}\right)^2 =$$

$$\tfrac{n^2(n+1)^2}{4} + nm(n^2+n+1)\mathbf{P}(\xi_1>\eta_1)+$$

$$n(n-1)m(m-1)(\mathbf{P}(\xi_1>\eta_1))^2 + nm(m-1)\mathbf{P}(\xi_1>\eta_1,\xi_1>\eta_2)+$$

$$n(n-1)m\mathbf{P}(\xi_1>\eta_1,\xi_2>\eta_1),$$

$$\mathbf{P}(\xi_1>\eta_1) = \textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} G(x)dF(x),$$

$$\mathbf{P}(\xi_1>\eta_1,\xi_1>\eta_2) = \textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} G^2(x)dF(x),$$

$$\mathbf{P}(\xi_1>\eta_1,\xi_2>\eta_1) = \textstyle\int_{-\infty}^{+\infty}(1-F(x))^2dG(x).$$

10.4. Знайти вектори рангів:

$$\nu = (9,7,10,5,6,1,4,2,3,8),\quad \tau = (8,9,6,7,5,4,3,2,1,10)$$

та статистику Спірмена: $\widehat{\rho}_n = 1 - \frac{6}{n(n^2-1)}\sum_{k=1}^{n}(\nu_k-\tau_k)^2 = 0.733$. Критична область для критерію рівня α має вигляд $\{\rho : |\rho| > r_\alpha\}$, критичне значення можна знайти з таблиці або наближено за формулою $r_\alpha = x_{\alpha/2}/\sqrt{n-1}$, де $x_{\alpha/2} = \Phi^{(-1)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$. Для $\alpha = 0.05$ маємо $r_\alpha \approx 0.65$, гіпотеза про незалежність відхиляється.

10.5. Статистика Вілкоксона $S_{6,8} = 1+3+5+7+9+10.5 = 35.5$. Для двобічного критерію рівня $\alpha = 0.05$ нижнє критичне значення дорівнює $W_{0.025;6,8} = 29$ (див. таблицю 6), верхнє критичне значення дорівнює $6(6+8+1) - W_{0.025;6,8} = 61$. Гіпотеза про однорідність приймається.

10.6. Для наведених даних $\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\widehat{F}_n(x) - \widehat{G}_n(x)\right| = 0.2$.

10.7. Виконати заміну $u = F(x)$ і врахувати, що

$$\widehat{F}_n(x) = \widehat{F}_n\left(F^{(-1)}(u)\right) = \tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{k=1}^{n} 1\!\!\mathrm{I}_{\{F(\xi_k)<u\}},$$

а випадкові величини $\alpha_k = F(\xi_k)$, $k = \overline{1,n}$ — незалежні та рівномірно розподілені на $[0,1]$. Тут $F^{(-1)}(u) = \sup\{x : F(x) < u\}$.

10.8. Врахувати, що

$$\mathbf{D}\widehat{\rho}_n = \mathbf{E}\widehat{\rho}_n^2 = \tfrac{144}{n^2(n^2-1)^2}\textstyle\sum_{i,j=1}^{n}\mathrm{cov}(\nu_i,\nu_j)\,\mathrm{cov}(\tau_i,\tau_j),$$

$$\mathrm{cov}(\nu_i,\nu_j) = \mathrm{cov}(\tau_i,\tau_j) = \begin{cases} -\frac{n+1}{12}, & i \neq j, \\ \frac{n^2-1}{12}, & i = j. \end{cases}$$

10.9. За нульової гіпотези $\mathbf{D}S_{nm} = \frac{nm(n+m+1)}{12}$ (врахувати формулу для коваріації рангів — див. вказівку до попередньої задачі). При альтернативі — див. 10.3.

10.10. Якщо A_k - відхилення гіпотези у k-му спостереженні, то $\mathbf{P}(\cup_{k=1}^{10} A_k) = 1 - \mathbf{P}(\cap_{k=1}^{10}\overline{A}_k) = 1 - 0.95^{10}$.

10.11. Розглянути схему з n випробувань Бернуллі з імовірністю успіху $p = 0.98 = 1 - 1/50$. Використовуючи нормальне наближення (інтегральну теорему Муавра - Лапласа), звести задачу до задачі відшукання мінімального цілого n, яке задовольняє нерівність $\frac{500-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \Phi^{(-1)}(0.05) = -1.645$.

10.12. Для доведення першої збіжності використати асимптотичну нормальність відносної частоти, теорему Леві про критерій слабкої збіжності та теорему про добуток слабко збіжної послідовності зі збіжною. Для отримання другої збіжності використати консистентність відносної частоти та задачу 1.21.51. Критерій рівня α має вигляд $(\widehat{\varkappa}, [x_\alpha, \infty))$, де

$$\widehat{\varkappa} = \left|\widehat{\theta}_1 - \widehat{\theta}_2\right| \ / \ \sqrt{\widehat{\theta}\left(1 - \widehat{\theta}\right)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}, \quad x_\alpha = \Phi^{(-1)}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right).$$

10.13. Використовуючи задачу 10.3, показати, що

$$\mathbf{E}(S_{nm} - \mathbf{E}S_{nm})^{2r} =$$

$$\mathbf{E}\left(\sum\nolimits_{i=1}^{n}\sum\nolimits_{j=1}^{m}\left(1\!\!\mathrm{I}_{\xi_i > \eta_j} - \frac{1}{2}\right)\right)^{2r} \approx \frac{(2r-1)!!n^r m^r (n+m)^r}{12^r}$$

при $n, m \to \infty$, далі скористатися результатом задачі 10.9. Врахувати, що за нульової гіпотези

$$\mathbf{E}\left[\left(1\!\!\mathrm{I}_{\xi_1>\eta_1} - \tfrac{1}{2}\right)\left(1\!\!\mathrm{I}_{\xi_1>\eta_2} - \tfrac{1}{2}\right)\right] = \mathbf{E}\left[\left(1\!\!\mathrm{I}_{\xi_1>\eta_1} - \tfrac{1}{2}\right)\left(1\!\!\mathrm{I}_{\xi_2>\eta_1} - \tfrac{1}{2}\right)\right] = \tfrac{1}{12}.$$

10.14. З урахуванням симетрії моменти непарного порядку - нульові. Довести, що граничні моменти збігаються з відповідними моментами нормальної випадкової величини.

10.15. Див. вказівку до 10.7.

10.16. Порівняти дисперсії асимптотичних нормальних розподілів статистик критеріїв.

10.17. $\mathbf{E}\exp(itW_{2,3}) = \sum_{\pi\in\Pi_5}\exp(it(\pi_1 + \pi_2))/n!$

10.18. Використати альтернативне означення рангу у об'єднаній вибірці $\nu_k = 1 + \sum_{j\neq k} 1\!\!\mathrm{I}_{\xi_j < \xi_k}$. Від'ємність спостереження означає його мажорування альтернативним.

11.1. Обчислити значення статистики хі-квадрат за формулою $\widehat{\chi}^2_{k-1}(n) = \sum_{i=1}^{k}\frac{(\widehat{\nu}_{ni} - np_i)^2}{np_i}$ та порівняти з критичним рівнем $\chi^2_{\alpha;k-1}$ — квантилем розподілу χ^2_{k-1} рівня $1-\alpha$. Для наведених даних $n = 20160$, $p_i = C_4^i(1/2)^4$, $k = 5$, $\widehat{\nu}_n = (1181, 4909, 7583, 5085, 1402)$, $\widehat{\chi}^2_{k-1}(n) = 24.83$. Для $\alpha = 0.05$ $\chi^2_{0.05;4} = 9.48$ (див. таблицю 2), гіпотеза про біноміальний розподіл з параметрами 4, 1/2 відхиляється.

11.2. $\mathbf{P}(\widehat{\nu}_{n1} = y_1, \ldots, \widehat{\nu}_{nk} = y_k) = \frac{n!}{y_1!\ldots y_k!}p_1^{y_1}\ldots p_k^{y_k}$, де величини $y_i \in \mathbb{Z}_+$, та $\sum_{i=1}^{k} y_i = n$. Генератриса $G(z_1, \ldots, z_k) =$

$$\sum\nolimits_{y_1,\ldots,y_k=0}^{\infty}\mathbf{P}(\widehat{\nu}_{n1} = y_1, \ldots, \widehat{\nu}_{nk} = y_k)z_1^{y_1}\ldots z_k^{y_k} = (p_1z_1 + \ldots + p_kz_k)^n.$$

11.3. Перевірити гіпотезу за критерієм хі-квадрат, застосувавши метод групування спостережень. Наприклад, розбити множину $_+$ на 5 рівноймовірних інтервалів (з відповідною теоретичною імовірністю 0.2). Кінці інтервалів x_j, $j = \overline{1,4}$, обчислюються з рівняння $1 - \exp^{-0.01x_j} = 0.2j$ і дорівнюють: 22.31, 51.08, 91.63, 160.94. При цьому в інтервали розбиття потрапить така кількість спостережень: $35, 16, 17, 14, 12$. Відповідна статистика хі-квадрат дорівнює 18.23. Для $\alpha = 0.05$ критичний рівень $\chi^2_{0.05;4} = 9.48$, гіпотеза про показниковий розподіл з параметром 0.01 відхиляється.

11.4. Об'єднати рівні $i \geq 7$, для яких $\widehat{\nu}_{ni} = 0$, з рівнем $i = 6$. Гіпотеза приймається: $\widehat{\chi}^2 = 3.57$, $\chi^2_{0.05;6} = 12.59$.

11.5. Гіпотеза приймається: $\widehat{\chi}^2 = 9.37$, $\chi^2_{0.01;9} = 21.67$.

11.6. (а) $G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathbf{P}(\widehat{\nu}_{nij} = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} C_l^k p_i p_j^k (1 - p_i - p_j)^{l-k} z^k = p_i \sum_{l=0}^{\infty} (1 - p_i - p_j + p_j z)^l = \frac{p_i}{p_i + (1-z)p_j}$, $\mathbf{E}\widehat{\nu}_{nij} = G'(1) = \frac{p_j}{p_i}$, $\mathbf{D}\widehat{\nu}_{nij} = G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2 = \frac{p_j^2}{p_i^2} + \frac{p_j}{p_i}$; (б) $G(z_1, \ldots, z_{i-1}) = p_i \;/\; \left(p_i + \sum_{j=1}^{i-1} (1 - z_j) p_j\right)$.

11.7. Для перших 100 значень таблиці 1 (значень стандартної нормальної функції розподілу в точках $0.00, \ldots, -0.99$) і $\alpha = 0.05$: $\widehat{\chi}^2 = 6$, $\chi^2_{0.05;9} = 16.92$, гіпотеза приймається.

11.8. Гіпотеза відхиляється: $\widehat{\chi}^2 = 78.55$, $\chi^2_{0.01;2} = 9.21$.

11.9. $\widehat{\chi}^2_{k-1}(n) = \sum_{i=1}^{k} \frac{(\widehat{\nu}_{ni} - np_i)^2}{np_i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\widehat{\nu}_{ni}^2}{np_i} - 2\sum_{i=1}^{k} \widehat{\nu}_{ni} + n\sum_{i=1}^{k} p_i$.

11.10. Гіпотеза приймається: $\widehat{\chi}^2 = 0.47$, $\chi^2_{0.05;3} = 7.82$.

11.11. Гіпотеза відхиляється: $\widehat{\chi}^2 = 11.14$, $\chi^2_{0.05;2} = 5.99$.

11.12. Не можна: $\widehat{\chi}^2 = 727.94$, $\chi^2_{0.05;2} = 5.99$, отже, гіпотеза відхиляється.

11.13. Гіпотеза приймається: $\widehat{\chi}^2 = 10.00$, $\chi^2_{0.05;11} = 19.68$.

11.14. Використати те, що $\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}$ для всіх $a_i > 0$, $b_i > 0$, $i = \overline{1,n}$ (за нерівністю Коші - Буняковського).

12.1. Застосувати критерій хі-квадрат для складної гіпотези: (1) знайти ОМВ параметра θ біноміального розподілу $B(2, \theta)$ (задача

7.12): $\widehat{\theta} = 0.523$; (2) обчислити статистику хі-квадрат $\widehat{\chi}^2 = 722.5$; (3) порівняти з критичним рівнем $\chi^2_{0.05;1} = 3.84$. Гіпотеза відхиляється.

12.2. Застосувати критерій хі-квадрат перевірки незалежності:

$$\widehat{\chi}^2 = \frac{(31 - 71 \cdot 72/147)^2}{71 \cdot 72/147} + \frac{(41 - 76 \cdot 72/147)^2}{76 \cdot 72/147} + \frac{(40 - 71 \cdot 75/147)^2}{71 \cdot 75/147} + \frac{(35 - 76 \cdot 75/147)^2}{76 \cdot 75/147} = 1.55,$$

$\chi^2_{0.05;1} = 3.84$, приймається гіпотеза про незалежність.

12.3. Застосувати критерій хі-квадрат для перевірки однорідності: $\widehat{\chi}^2 = 2.92$, $\chi^2_{0.01;1} = 6.64$, приймається гіпотеза про однорідність.

12.4. Інтервали групування мають вигляд $\Delta_j = [(j-1)a, ja)$, $j = \overline{1, N-1}$, $\Delta_N = [(N-1)a, \infty)$; відповідні ймовірності дорівнюють

$$p_j(\theta) = e^{-(j-1)a/\theta}\left(1 - e^{-a/\theta}\right),\ j = \overline{1, N-1},\ p_N(\theta) = e^{-(N-1)a/\theta}.$$

Записати рівняння ОМВ $\sum_{j=1}^N \frac{\nu_j p'(\theta)}{p(\theta)} = 0$, еквівалентне рівнянню

$$\sum\nolimits_{j=1}^{N-1} \frac{\nu_j\left(j - 1 - je^{-a/\theta}\right)}{1 - e^{-a/\theta}} + (N-1)\nu_N = 0.$$

Позначивши $z = e^{-a/\theta}$ знайти оцінки:

$$\widehat{z} = \left(\sum\nolimits_{j=1}^N j\nu_j - n\right) \Big/ \left(\sum\nolimits_{j=1}^N j\nu_j - \nu_N\right),$$
$$\widehat{p}_j = \widehat{z}^{j-1}(1 - \widehat{z}),\ j = \overline{1, N-1},\ \widehat{p}_N = \widehat{z}^{N-1}.$$

Шуканий критерій має вигляд $\left(\widehat{\chi}^2, \left[\chi^2_{\alpha;N-2}, \infty\right)\right)$, де $\widehat{\chi}^2 = \sum_{j=1}^N \frac{(\nu_j - n\widehat{p}_j)^2}{n\widehat{p}_j}$.

12.5. Використати результат попередньої задачі. При $N = 4$, $a = 50$ маємо: $\widehat{\chi}^2 = 0.311$, $\chi^2_{0.05;2} = 5.99$, гіпотеза приймається.

12.6. Гіпотеза про залежність відкидається, оскільки: $\widehat{\chi}^2 = 1.57$, $\chi^2_{0.05;4} = 9.48$.

12.7. За нульової гіпотези,

$$\mathbf{P}\left(\widehat{\nu}_{11} = k \mid \widehat{\nu}_{1\bullet} = l, \widehat{\nu}_{\bullet 1} = m\right) = \frac{C_l^k C_{n-l}^{m-k}}{C_n^m}.$$

12.8. Рівняння ОМВ має вигляд $\frac{\nu_1}{2+\theta} - \frac{\nu_2+\nu_3}{1-\theta} + \frac{\nu_4}{\theta} = 0$, звідки

$$\widehat{\theta} = \frac{1}{2n}\left(\nu_1 - 2\nu_2 - 2\nu_3 - \nu_4 + \sqrt{8n\nu_4 + (\nu_1 - 2\nu_2 - 2\nu_3 - \nu_4)^2}\right).$$

Критерій має вигляд $\left(\widehat{\chi}^2, \left[\chi^2_{p;2}, \infty\right)\right)$, де $\widehat{\chi}^2 = \sum_{j=1}^{4} \frac{\left(\nu_j - np_j\left(\widehat{\theta}\right)\right)^2}{np_j\left(\widehat{\theta}\right)}$.

12.9. Гіпотеза про незалежність приймається: $\widehat{\chi}^2 = 1.44$, $\chi^2_{0.05;1} = 3.84$.

12.10. Згрупувати дані (див. вказівку до 11.4): $p_i(\theta) = \frac{e^{-\theta}\theta^i}{i!}$, $i = \overline{0,5}$, $p_6(\theta) = \sum_{j=6}^{\infty} \frac{e^{-\theta}\theta^j}{j!}$. Рівняння ОМВ має вигляд:

$$\sum_{i=0}^{5}\left(\frac{i}{\theta} - 1\right)\nu_i + \frac{\nu_6 \sum_{j=6}^{\infty} \frac{e^{-\theta}\theta^j}{j!}\left(\frac{j}{\theta} - 1\right)}{\sum_{j=6}^{\infty} \frac{e^{-\theta}\theta^j}{j!}} = 0.$$

або $\theta = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=0}^{5} i\nu_i + \frac{\nu_6 \sum_{j=6}^{\infty} \frac{e^{-\theta}\theta^j}{(j-1)!}}{\sum_{j=6}^{\infty} \frac{e^{-\theta}\theta^j}{j!}}\right)$. В ролі наближеної оцінки розглянути вибіркове середнє $\widehat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{6} i\nu_i = 1.54$,
$\widehat{\chi}^2 = \sum_{j=0}^{6} \frac{\left(\nu_j - np_j\left(\widehat{\theta}\right)\right)^2}{np_j\left(\widehat{\theta}\right)} = 2.74$, $\chi^2_{0.05;5} = 11.07$, гіпотеза приймається.

12.11. Гіпотеза про незалежність приймається, оскільки: $\widehat{\chi}^2 = 0.70$, $\chi^2_{0.1;1} = 2.71$.

12.12. $\widehat{\theta} = 0.100$, $\widehat{\chi}^2 = 0.01$, $\chi^2_{0.05;1} = 3.84$, гіпотеза приймається.

12.13. $\widehat{\theta} = \frac{1}{8n}\left(-2\nu_1 + \nu_2 - \nu_3 + \sqrt{8n\nu_3 + (2\nu_1 - \nu_2 + \nu_3)^2}\right) = 0.124$, $\widehat{\chi}^2 = 0.36$, $\chi^2_{0.05;1} = 3.84$, гіпотеза приймається.

12.14. Для перевірки гіпотези про розподіл $N(\theta_1, \theta_2^2)$ розглянути інтервали групування вигляду $(x_{j-1}, x_j]$, $j = \overline{1,N}$, де $x_0 = -\infty$, $x_N = +\infty$, $x_j - x_{j-1} = a$, $j = \overline{2, N-1}$. Тоді $p_j(\theta) = \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(y,\theta)dy$, $j = \overline{1,N}$, де $f(y,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta_2}\exp\left\{-\frac{(y-\theta_1)^2}{2\theta_2^2}\right\}$. Система рівнянь ОМВ має вигляд

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\nu_j}{p_j(\theta)} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (y - \theta_1) f(y,\theta)dy = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\nu_j}{p_j(\theta)} \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(y,\theta)\left(\frac{(y-\theta_1)^2}{\theta_2^2} - 1\right) = 0,$$

або, враховуючи, що $\sum_{j=1}^{N} \nu_j = n$,

$$\theta_1 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{N} \nu_j \frac{\int_{x_{j-1}}^{x_j} y f(y,\theta) dy}{\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(y,\theta) dy},$$

$$\theta_2^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{N} \nu_j \frac{\int_{x_{j-1}}^{x_j} (y-\theta_1)^2 f(y,\theta) dy}{\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(y,\theta) dy}.$$

При малому a можна використовувати наближення для ОМВ:

$$\widehat{\theta}_1 \approx \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{N} \nu_j z_j, \quad \widehat{\theta}_2^2 \approx \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{N} \nu_j \left(z_j - \widehat{\theta}_1 \right)^2,$$

де $z_1 = x_1$, $z_j = \frac{1}{2}(x_{j-1} + x_j)$, $j = \overline{2, N-1}$, $z_n = x_{N-1}$. Критерій рівня α має вигляд $\left(\widehat{\chi}^2, \left[\chi^2_{\alpha;N-3}, \infty\right)\right)$, де $\widehat{\chi}^2 = \sum_{j=1}^{N} \frac{\left(\nu_j - np_j\left(\widehat{\theta}\right)\right)^2}{np_j\left(\widehat{\theta}\right)}$. У загальному випадку слід використати метод послідовних наближень Ньютона-Рафсона.

12.15. $\widehat{\theta} = 0.77$, $\widehat{\chi}^2 = 10.23$, $\chi^2_{0.05;4} = 9.48$, гіпотеза відхиляється.

12.16. (а) 9.5275 і 6.7136. (б) Оцінкою для параметра μ розподілу зі щільністю $f(y,\mu) = \mu^{-1} e^{-y/\mu}$ є вибіркове середнє. (в) Ймовірність перевищення значення x дорівнює $p = e^{-x/\mu}$. (г) 2.126, 4.867, 8.730, 15.334.

12.17. $\widehat{\chi}^2 = 52.72$, $\chi^2_{0.01;4} = 13.28$, гіпотеза відхиляється.

12.18. $\widehat{\theta} = 0.168$, $\widehat{\chi}^2 = 9.62$, $\chi^2_{0.01;1} = 6.64$, гіпотеза відхиляється.

12.20. $\widehat{\theta} = 0.93$, $\widehat{\chi}^2 = 1.05$, $\chi^2_{0.05;1} = 9.48$, гіпотеза приймається.

13.1. Для вибірки з розподілу $N(\mu, \sigma^2)$ перевірити гіпотезу $H_0 \colon \mu = \mu_0$ проти альтернативи $H_1 \colon \mu \neq \mu_0$ за критерієм $\left(\sqrt{n}\frac{|\widehat{\mu}_n - \mu_0|}{\sigma}, [x_\alpha, \infty)\right)$, де α — рівень критерію, $x_\alpha = \Phi^{(-1)}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$. Для наведених даних при $\alpha = 0.05$ значення статистики дорівнює 12.70, $x_\alpha = 1.96$, H_0 відхиляється.

13.2. Критерій рівня α для перевірки гіпотези $H_0 \colon \sigma^2 = \sigma_0^2$ проти альтернативи $H_1 \colon \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ має вигляд

$$\left(\frac{(n-1)\widehat{s}_n^2}{\sigma_0^2}, [0, \chi^2_{1-\alpha/2;n-1}] \cup [\chi^2_{\alpha/2;n-1}, +\infty)\right),$$

де $\chi^2_{p;n-1}$ — квантиль рівня $1-p$ розподілу χ^2_{n-1}. Для наведених даних і $\alpha = 0.05$ значення статистики дорівнює 5.13, надійний інтервал для неї — $(2.70, 19.02)$, H_0 приймається.

13.3. (а) Критерій рівня α для перевірки гіпотези $H_0\colon \mu_1 = \mu_2$ проти альтернативи $H_1\colon \mu_1 \neq \mu_2$ має вигляд

$$\left(\sqrt{\frac{n_1 n_2(n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}} \cdot \frac{|\widehat{\mu}_1 - \widehat{\mu}_2|}{\sqrt{(n_1-1)\widehat{s}_1^2 + (n_2-1)\widehat{s}_2^2}}, [t_{\frac{\alpha}{2};n_1+n_2-2}, \infty)\right),$$

де $t_{\frac{\alpha}{2};n_1+n_2-2}$ — квантиль рівня $1-\frac{\alpha}{2}$ розподілу $\tau_{n_1+n_2-2}$ (див. 9.4). Для наведених даних і $\alpha = 0.05$ значення статистики дорівнює 0.41, $t_{\frac{\alpha}{2};n_1+n_2-2} = 2.12$, H_0 приймається.

(б) Критерій рівня α для перевірки гіпотези $H_0\colon \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ проти альтернативи $H_1\colon \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ має вигляд

$$\left(\widehat{s}_1^2/\widehat{s}_2^2, [0, F_{1-\frac{\alpha}{2};n_1-1;n_2-1}] \cup [F_{\frac{\alpha}{2};n_1-1;n_2-1}, \infty)\right),$$

де $F_{p;n_1-1;n_2-1}$ — квантиль рівня $1-p$ розподілу f_{n_1-1,n_2-1}. Для наведених даних і $\alpha = 0.05$ значення статистики дорівнює 1.96, надійний інтервал для неї — $(0.21, 4.20)$, H_0 приймається.

13.4. За теоремою про перетворення нормальних випадкових векторів, $X = T\varepsilon \simeq N(0, A)$, де $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$,

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \theta & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \theta^2 & \theta & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta^{n-1} & \theta^{n-2} & \theta^{n-3} & \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

$A = TVT'$, $V = \mathrm{Cov}(\varepsilon) = \mathrm{diag}(\sigma^2, \ldots, \sigma^2)$. Далі обчислити щільність X за формулою $L(X, \theta) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\det A|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}x'A^{-1}x\right)$, знайшовши $\det A = \det T \cdot \det V \cdot \det T' = \sigma^{2n}$, $V^{-1} =$diag$(\sigma^{-2}, \ldots, \sigma^{-2})$,

$$T^{-1}x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -\theta & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -\theta & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\theta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - \theta x_1 \\ x_3 - \theta x_2 \\ \vdots \\ x_n - \theta x_{n-1} \end{pmatrix},$$

$$x' A^{-1} x = x'(TVT')^{-1} x =$$
$$(T^{-1}x)' V^{-1} (T^{-1}x) = \frac{1}{\sigma^2} \sum\nolimits_{k=1}^{n} (x_k - \theta x_{k-1})^2.$$

Обчислити статистику критерію відношення вірогідностей

$$\frac{L(X, 0)}{\sup_{\theta \in \Theta} L(X, \theta)} = \exp\left(-\frac{\left(\sum_{k=1}^{n-1} \xi_k \xi_{k+1}\right)^2}{\sigma^2 \sum_{k=1}^{n-1} \xi_k^2} \right).$$

13.5. Спочатку перевірити гіпотезу про рівність дисперсій, потім — про рівність середніх у припущенні, що дисперсії однакові (див. 13.3).

13.6. Див. 13.3 (б). Враховуючи, що $\widehat{\sigma}_1^2 > \widehat{\sigma}_2^2$, можна вибрати за альтернативу $H_1 \colon \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ і скористатися критерієм

$$\left(\widehat{s}_1^2 / \widehat{s}_2^2, [F_{\alpha; n_1 - 1; n_2 - 1}, \infty)\right),$$

де $\widehat{s}_i^2 = \frac{n_i}{n_i - 1} \widehat{\sigma}_i^2$, $i = 1, 2$, $F_{\alpha; n_1-1; n_2-1}$ — квантиль рівня $1-\alpha$ розподілу f_{n_1-1, n_2-1}. Для наведених даних значення статистики дорівнює 1.83, $F_{\alpha; n_1-1; n_2-1} = 1.90$, H_0 приймається.

13.7. Припускаючи, що спостереження мають розподіл $N(\mu, \sigma^2)$, перевірити гіпотезу $H_0 \colon \mu = \mu_0$ проти альтернативи $H_1 \colon \mu \neq \mu_0$ за допомогою критерію $\left(\frac{\sqrt{n-1}|\widehat{\mu}_n - \mu_0|}{\widehat{\sigma}_n}, [t_{\frac{\alpha}{2}; n-1}, \infty)\right)$, де $t_{\frac{\alpha}{2}; n-1}$ — квантиль рівня $1 - \frac{\alpha}{2}$ розподілу τ_{n-1}.

13.8. Звести задачу до задачі перевірки гіпотези про середнє вибірки з розподілу $N\left(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)$. За допомогою леми Неймана - Пірсона показати (див. 14.6), що найбільш потужний критерій рівня α має критичну область $\left\{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \widehat{\mu}_n \geq x_\alpha\right\}$, а його потужність дорівнює $\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\delta}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} - x_\alpha\right)$, отже, n — розв'язок рівняння $\frac{\sqrt{n}\delta}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} - x_\alpha = x_\beta$.

13.9. Знайти надійний інтервал для теоретичної ймовірності θ того, що опитуваний є бакалавром (див., наприклад, задачу 2.1), після чого обчислити образ цього інтервалу при відображенні $\tau(\theta) = 1 - (1-\theta)^4$.

13.10. Критерій для перевірки гіпотези $H_0\colon \sigma_A^2 \ge \sigma_B^2$ має вигляд $\left(\widehat{s}_B^2/\widehat{s}_A^2, [F_{\alpha;n_B-1;n_A-1}, \infty)\right)$, де $F_{\alpha;n_B-1;n_A-1}$ — квантиль рівня $1-\alpha$ розподілу f_{n_B-1,n_A-1}.

13.11. Задача зводиться до перевірки гіпотези $H_0\colon \mu \le 0$ за вибіркою з $N(\mu, \sigma^2)$ з невідомою дисперсією, критерій для перевірки якої має вигляд $(\sqrt{n}\widehat{\mu}_n/\widehat{s}_n, [t_{\alpha;n-1}, \infty))$, де $t_{\alpha;n-1}$ — квантиль рівня $1-\alpha$ розподілу Стьюдента τ_{n-1}.

13.12. Врахувати, що статистика $t(X) = \sqrt{n}\widehat{\mu}_n/\widehat{s}_n$ має нецентральний розподіл Стьюдента $\tau_{n-1}(\delta)$: $t(X) \simeq \frac{\xi}{\sqrt{\chi_{n-1}^2/(n-1)}}$, де $\xi \simeq N(\delta, 1)$ і χ_{n-1}^2 — незалежні, $\delta = \sqrt{n}\mu/\sigma$. Для побудови найбільш потужного критерію знайти відповідне відношення вірогідностей і показати, що воно є монотонним. Шуканий критерій має вигляд $(t(X), [c_\alpha, \infty))$, де c_α — квантиль рівня $1-\alpha$ розподілу $\tau_{n-1}(\sqrt{n}\theta_0)$.

13.13. Знайти ОМВ для параметра $\theta = (\sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$:

$$\widehat{\sigma}_1^2 = \tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{k=1}^n \xi_{1k}^2, \quad \widehat{\sigma}_2^2 = \tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{k=1}^n \xi_{2k}^2, \quad \widehat{\rho} = \tau.$$

Показати, що за нульової гіпотези оцінки $\widehat{\sigma}_1^2$, $\widehat{\sigma}_2^2$ також є ОМВ для σ_1^2, σ_2^2, а статистика критерію відношення вірогідностей дорівнює

$$T = \frac{\sup_{\theta\in\Theta_0} L(X,\theta)}{\sup_{\theta\in\Theta} L(X,\theta)} = \left(1-\tau^2\right)^{n/2}.$$

13.14. Скористатись правилом Лопіталя.

14.1. Обчислити статистику відношення вірогідностей

$$l_{01}(X) = \frac{L(X,\theta_1)}{L(X,\theta_0)} = \left(\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)}\right)^T \left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)^n,$$

де $T = T(X) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$. При $\theta_1 > \theta_0$ нерівність $l_{01} \geq l_\alpha$ еквівалентна нерівності $T \geq t_\alpha$. Для заданого вірогідного рівня α визначимо $t_\alpha \in \mathbb{Z}$ з умови

$$\alpha_1 \equiv \sum\nolimits_{k=t_\alpha+1}^{n} C_n^k \theta_0^k (1-\theta_0)^{n-k} < \alpha \leq \sum\nolimits_{k=t_\alpha}^{n} C_n^k \theta_0^k (1-\theta_0)^{n-k} \equiv \alpha_2.$$

Якщо $\alpha = \alpha_2$, то шуканий критерій задається вибірковою критичною областю $\{T \geq t_\alpha\}$ і має потужність

$$\mathbf{P}_{\theta_1}(T \geq t_\alpha) = \sum\nolimits_{k=t_\alpha}^{n} C_n^k \theta_1^k (1-\theta_1)^{n-k}.$$

При $\alpha < \alpha_2$ розглянути рандомізований критерій з критичною функцією

$$\pi^*(T) = \begin{cases} 0, & T \leq t_\alpha - 1, \\ (\alpha - \alpha_1)/(\alpha_2 - \alpha_1), & T = t_\alpha, \\ 1, & T \geq t_\alpha + 1. \end{cases}$$

Його потужність дорівнює

$$\mathbf{E}_{\theta_1}\pi^*(T) = \sum\nolimits_{k=t_\alpha+1}^{n} C_n^k \theta_1^k (1-\theta_1)^{n-k} + (\alpha - \alpha_1) \left(\tfrac{\alpha_1}{\alpha_0}\right)^{t_\alpha} \left(\tfrac{1-\alpha_1}{1-\alpha_0}\right)^{n-t_\alpha}.$$

14.2. Оскільки $S_n = \sum_{k=1}^{50} \xi_k \simeq \Pi(50\lambda)$, то потужність критерію

$$\mathbf{P}_\lambda(S_n \geq 15) \approx 1 - \Phi\left(\frac{15 - 50\lambda}{\sqrt{50\lambda}}\right), \quad \lambda > 0.2$$

(див. 1.23.5). (а) 0.5. (б) $\Phi\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) \approx 0.8682$.

14.3. Див. 14.7 (в).

14.4. Встановити, що середня кількість тестів для кожної підгрупи з $n = N/k$ осіб дорівнює $1 + n(1 - (1-p)^n)$, а загальна кількість тестів становить $f(n) = N/n + N(1 - (1-p)^n)$. Задача мінімізації $f(n)$ зводиться до знаходження розв'язку рівняння $(1-p)^n \ln(1-p) = n^{-2}$. Розкладаючи ліву частину в ряд Тейлора і відкидаючи доданки порядку $O(p^2)$, показати, що наближеним розв'язком є $n^* \approx 1/\sqrt{p}$ (звідки $k^* \approx N\sqrt{p}$). Для знаходження відповідної кількості тестів використати апроксимацію $f(n) \approx 2N/n$.

14.5. Критична область визначається нерівністю

$$l_{01}(x) = \tfrac{1+x^2}{1+(x-1)^2} \geq c.$$

Якщо $c = 1$, то нерівність еквівалентна умові $x \geq \frac{1}{2}$, відповідний критерій має вірогідний рівень

$$\mathbf{P}_0(\xi \geq \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{\pi} \int_{1/2}^{\infty} \tfrac{dx}{1+x^2} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \tfrac{1}{2}$$

і потужність

$$\mathbf{P}_1(\xi \geq \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{\pi} \int_{1/2}^{\infty} \tfrac{dx}{1+(x-1)^2} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \tfrac{1}{2}.$$

Для доведення другого твердження задачі покласти $c = 2$.

14.6. $l_{01}(X) = \exp\left(\dfrac{n}{\sigma^2}(\mu_1 - \mu_0)\widehat{\mu}_n - \dfrac{n}{2\sigma^2}(\mu_1^2 - \mu_0^2)\right)$.
При $\mu_1 > \mu_0$ найбільш потужний критерій має критичну область $\left\{\widehat{\mu}_n \geq \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} x_\alpha\right\}$, де $x_\alpha = \Phi^{-1}(1 - \alpha)$, при $\mu_1 < \mu_0$ — критичну область $\left\{\widehat{\mu}_n \leq \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} x_\alpha\right\}$.

14.7. Нехай для визначеності $H_0\colon \theta = \theta_0$, $H_1\colon \theta = \theta_1 > \theta_0$. Критерії для розподілів $\Pi(\theta)$ та $G(\theta)$ будуються аналогічно задачі 14.1. (a) $l_{01}(X) = (\theta_1/\theta_0)^T e^{n(\theta_0-\theta_1)}$, де $T = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \simeq \Pi(n\theta)$; t_α знаходиться з умови:

$$\alpha_1 \equiv \textstyle\sum_{k=t_\alpha+1}^{\infty} e^{-n\theta_0} \frac{(n\theta_0)^k}{k!} < \alpha \leq \sum_{k=t_\alpha}^{\infty} e^{-n\theta_0} \frac{(n\theta_0)^k}{k!} \equiv \alpha_2.$$

Шуканий критерій задається критичною функцією

$$\pi^*(T) = \begin{cases} 0, & T \leq t_\alpha - 1, \\ (\alpha - \alpha_1)/(\alpha_2 - \alpha_1), & T = t_\alpha, \\ 1, & T \geq t_\alpha + 1. \end{cases}$$

і має потужність $\sum_{k=t_\alpha+1}^{\infty} e^{-n\theta_1} \frac{(n\theta_1)^k}{k!} + (\alpha - \alpha_1) \left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^{t_\alpha} e^{-n(\theta_1-\theta_0)}$.

(б) $l_{01}(X) = \left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)^T \left(\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)}\right)^n$, де $T = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \simeq G(\theta, n)$; t_α визначається з умови:

$$\alpha_1 \equiv \textstyle\sum_{k=n}^{t_\alpha-1} C_{k-1}^{n-1}(1-\theta_0)^{k-n}\theta_0^n < \alpha \leq \sum_{k=n}^{t_\alpha} C_{k-1}^{n-1}(1-\theta_0)^{k-n}\theta_0^n \equiv \alpha_2,$$

$$\pi^*(T) = \begin{cases} 1, & T \leq t_\alpha - 1, \\ (\alpha - \alpha_1)/(\alpha_2 - \alpha_1), & T = t_\alpha, \\ 0, & T \geq t_\alpha + 1, \end{cases}$$

потужність дорівнює

$$\sum\nolimits_{k=n}^{t_\alpha-1} C_{k-1}^{n-1}(1-\theta_1)^{k-n}\theta_1^n + (\alpha-\alpha_1)\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)^{t_\alpha-n}\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^n.$$

(в) Для розподілу $\mathrm{Exp}(\theta)$: $l_{01}(X) = \left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^n \exp\{(\theta_0-\theta_1)T\}$, де $T = \sum_{k=1}^n \xi_k$. Враховуючи, що $2\theta T \simeq \chi^2_{2n}$, показати, що шуканий критерій має критичну область $\{T \le \chi^2_{\alpha;2n}/(2\theta_0)\}$ і потужність $F\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\chi^2_{\alpha;2n}\right)$, де F — функція розподілу χ^2_{2n}.

14.8. (а) Прологарифмувати функцію $l_{01}(X)$, скористатися теоремою про перетворення незалежних величин. (б) Скористатися означенням $I(\theta_1,\theta_0)$. (в) Застосувати центральну граничну теорему. (г) $\beta_n \to \Phi\left(\frac{\ln l_\alpha - nI(\theta_0,\theta_1)}{\sigma_1\sqrt{n}}\right)$, $n\to\infty$, де $\sigma_1^2 = \mathbf{D}_{\theta_1}\eta_1$.

14.9. В означення оптимальності критеріїв входить статистика відношення вірогідностей $l_{01}(X) = L(X,\theta_1)/L(X,\theta_0)$.

14.10. Обчислити функцію вірогідностей та скористатись тим, що подвійний логарифм відношення вірогідностей має наближено хі-квадрат розподіл.

14.11. Відношення вірогідностей $l_{01}(X)$ (див 14.6) при $\theta_0 < \theta_1$ є зростаючою функцією відносно статистики $\widehat{\mu}_n$, тому найбільш потужним є критерій з критичною областю $\left\{\widehat{\mu}_n \ge \theta_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}x_\alpha\right\}$, побудований в 14.6. Його потужність

$$\mathbf{P}_{\theta_1}\left(\widehat{\mu}_n \ge \theta_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}x_\alpha\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\theta_1-\theta_0) - x_\alpha\right), \theta_1 > \theta_0.$$

14.12. Функція відношення вірогідностей має вигляд $l_{01}(X) = \exp(\eta_n - d_n)$, де $\eta_n = \sum_{j=1}^n c_j\xi_j$, $_j = \ln(a/b + t_j)$, $d_n = a\sum_{j=1}^n t_j$. За припущення відділеності c_j від нуля слід скористатись асимптотичною нормальністю $\ln l_{01}(X)$ при $n\to\infty$ з урахуванням рівностей

$$\mathbf{E}(\eta_n - d_n) = a\sum\nolimits_{j=1}^n c_j - d_n,$$

$$\mathbf{D}(\eta_n - d_n) = a\sum\nolimits_{j=1}^n c_j^2 \to \infty, n\to\infty.$$

14.13. (а) $(t(X), [t_{\alpha;n_1+n_2-2}, \infty))$, де

$$t(X) = \frac{(\widehat{\mu}_1 - \widehat{\mu}_2)/\sqrt{n_1^{-1} + n_2^{-1}}}{\sqrt{((n_1-1)\widehat{s}_1^2 + (n_2-1)\widehat{s}_2^2)/(n_1+n_2-2)}},$$

$t_{\alpha;n_1+n_2-2}$ — квантиль рівня $1-\alpha$ розподілу $\tau_{n_1+n_2-2}$.

(б) $\left(\widehat{\sigma}_1^2/\widehat{\sigma}_2^2, [F_{\alpha;n_1;n_2}, \infty)\right)$, де $F_{\alpha;n_1;n_2}$ — квантиль рівня $1-\alpha$ розподілу f_{n_1,n_2}, $\widehat{\sigma}_k^2 = n_k^{-1}\sum_{i=1}^{n_k}(\xi_{ik} - \mu_k)^2$, $k = 1, 2$.

14.14. Див. 14.7 (в).

14.15. Логарифм відношення імовірностей $\ln l_{01}(X) = \nu_n \ln 2\theta + (n - \nu_n)\ln(2 - 2\theta)$ має похідну $4(\nu_n - n/2)$ в точці $\theta = 1/2$, тому найбільше зростає у критичній області вказаного вигляду.

14.16. Врахувати, що для кратної вибірки з розподілу $B(N, \theta)$ сума $\sum_{k=1}^n \xi_k \simeq B(Nn, \theta)$, та побудувати критерій аналогічно задачі 14.1.

14.17. Для $\theta_1 > \theta_0$ відношення вірогідностей $l_{01}(X) = \frac{\theta_1^n 1\!\!1_{\xi_{(n)}<\theta_0}}{\theta_1^n 1\!\!1_{\xi_{(n)}<\theta_0}}$ є монотонним відносно $\xi_{(n)}$. Враховуючи, що статистика $\xi_{(n)}$ має розподіл зі щільністю $f(x) = n\theta^{-n}x^{n-1}1\!\!1_{(0,\theta)}(x)$, показати, що шуканий критерій має вигляд $\left(\xi_{(n)}, [c_\alpha, \infty)\right)$, де $c_\alpha = \theta_0(1-\alpha)^{1/n}$.

14.18. $l_{01}(X) = \left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^X \frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}$. У випадку $0 < \theta_0 < \theta_1 < 1$ умова для визначення t_α має вигляд: $\theta_0^{t_\alpha+1} < \alpha \le \theta_0^{t_\alpha}$. При $\alpha = \theta_0^{t_\alpha}$ шуканий критерій має критичну область $\{X \ge t_\alpha\}$, а при $\alpha < \theta_0^{t_\alpha}$ він є рандомізованим з критичною функцією

$$\pi^*(X) = \begin{cases} 0, & X \le t_\alpha - 1, \\ \frac{\alpha - \theta_0^{t_\alpha+1}}{\theta_0^{t_\alpha}(1-\theta_0)}, & X = t_\alpha, \\ 1, & X \ge t_\alpha + 1 \end{cases}.$$

Аналогічно розглянути випадок $0 < \theta_1 < \theta_0 < 1$.

14.19. ОМВ для $\theta = (\mu, \sigma^2)$ є $(\widehat{\mu}_n, \widehat{\sigma}_n^2)$, де $\widehat{\sigma}_n^2 = n^{-1}\sum\limits_{k=1}^n(\xi_k - \widehat{\mu}_n)^2$, а ОМВ для σ^2 за гіпотези H_0 є $\widetilde{\sigma}_n^2 = n^{-1}\sum_{k=1}^n \xi_k^2$, звідки
$T = \left(\widetilde{\sigma}_n^2/\widehat{\sigma}_n^2\right)^{-n/2} = \left(1 + t^2/(n-1)\right)^{-n/2}$, де статистика $t = t(x) =$

$\sqrt{n-1}|\widehat{\mu}_n|/\widehat{\sigma}_n$ має за гіпотези H_0 розподіл Стьюдента τ_{n-1}. Шуканий критерій: $(t, [t_{\frac{\alpha}{2};n-1}, \infty))$, де $t_{\frac{\alpha}{2};n-1}$ — квантиль розподілу τ_{n-1} рівня $1-\alpha/2$.

14.20. $\mathbf{P}_\theta(\tau = k) = (1-\exp(-\theta))\exp(-(k-1)\theta), k \in \mathbb{N}$.

14.21. $\mathbf{P}_\theta(\tau = k) = 0 \cdot 1\!\!1_{\theta=1} + 2^{-k} 1\!\!1_{\theta=2}, k = \overline{1,n}$. Відповідно H_0 приймається при $\tau < n$. $\mathbf{E}(\tau \mid H_0) = n$, $\mathbf{E}(\tau \mid H_1) = \sum_{k=1}^{n-1} k2^{-k}$.

14.22. Розглянути статистику $T \simeq H(N, \theta, m)$, $\theta \in \{0, 1, \ldots, N\}$, і показати, що відношення вірогідностей $l_{01}(x) = \frac{C_{\theta_1}^x C_{N-\theta_1}^{m-x}}{C_{\theta_0}^x C_{N-\theta_0}^{m-x}}$ є монотонним по x. Критична область критерію для перевірки $H_0\colon \theta \le \theta_0$ проти $H_1\colon \theta > \theta_0$ має вигляд $\{T \ge t\}$.

14.23. Розглянути критерій з критичною областю $\{\nu_n > 0\}$, де ν_n — кількість успіхів у n випробуваннях. Ймовірності похибок: $\alpha = 0$, $\beta = 0.9^n$. При $n \ge 44$ вони не перевищують 0.01.

14.24. (а) Врахувати, що $\alpha(c) = \int_{W_c} f_0(x)dx \le \frac{1}{c}\int_{W_c} f_1(x)dx = \frac{1}{c}(1-\beta(c))$, $\beta(c) = \int_{\overline{W_c}} f_1(x)dx \le c\int_{\overline{W_c}} f_0(x)dx = c(1-\alpha(c))$. (б) При $c > 1$ використати перше з попередніх співвідношень, при $c \le 1$ — друге. (в) Показати, що $\alpha(c) + \beta(c) = 1 - \int_{W_c}(f_1(x) - f_0(x))dx = 1 - \int_{\overline{W_c}}(f_0(x) - f_1(x))dx$. При $c > 1$ використати першу з цих рівностей і врахувати, що в цьому випадку $W_c \subset W_1$ і $f_1(x) - f_0(x) \ge 0$ при $x \in W_1$. При $c < 1$ використати другу рівність.

14.25. Відносно менші значення ν_n свідчать на користь H_1, та є критичними для H_0. Оскільки відношення вірогідностей $l_{01}(X) = (2/3)^{\nu_n}(4/3)^{n-\nu_n}$, то для знаходження c та n можна використати асимптотичну нормальність $\nu_n \simeq N(n/2, n/4)$ за нульової гіпотези та $\nu_n \simeq N(n/3, 2n/9)$ за альтернативи.

14.26. Статистикою з критерія монотонного відношення вірогідностей можна обрати $\widehat{\mu}_n$, тому $W = \{\sqrt{n}(\widehat{\mu}_n - 1) \le x_\alpha\}$ з $\Phi(x_\alpha) = \alpha$, $\alpha(\theta) = \Phi(x_\alpha + \sqrt{n}(1-\theta))$.

15.1. (в) $\widehat{\gamma} = 0.259$, $\widetilde{\gamma} = 0.268$. г) $\alpha = \ln\gamma$, $\beta = \theta$. Обчислити оцінки: $\widehat{\beta} = (\overline{xY} - \overline{x}\,\overline{Y})/\sigma_x^2$, $\widehat{\alpha} = \overline{Y} - \overline{x}\,\widehat{\beta}$, де $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n x_j$, $\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n x_j^2$, $\sigma_x^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2$, $\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n Y_j$, $\overline{xY} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n x_j Y_j$. Для перевірки гіпотези $H_0\colon \beta = 2$ (що еквівалентно $\theta = 2$) використати критерій $(|\widehat{\tau}_{n-2}|, [t_{\frac{\alpha}{2};n-2}, \infty))$, де $\widehat{\tau}_{n-2} = \sqrt{n}(\widehat{\beta} - 2)\sigma_x/\widehat{\sigma}_{n-2}$, $\widehat{\sigma}^2_{n-2} = \frac{1}{n-2}\sum_{j=1}^n (Y_j - \widehat{\alpha} - \widehat{\beta}x_j)^2$, $t_{\frac{\alpha}{2};n-2}$ — квантиль рівня $1-\alpha/2$ розподілу τ_{n-2}. Для наведених даних: $\widehat{\beta} = 1.60$, $\widehat{\alpha} = -0.61$, $\widehat{\tau}_{10} = -1.58$, $t_{0.025;10} = 2.228$, H_0 приймається.

15.2. Звести задачу $f(a,b) \equiv \mathbf{E}(\eta - a - b\xi)^2 \to \min$ до розв'язання системи рівнянь

$$\begin{cases} f'_a(a,b) = 2a - 2\mathbf{E}\eta + 2b\mathbf{E}\xi = 0, \\ f'_b(a,b) = 2b\mathbf{E}\xi^2 - 2\mathbf{E}\xi\eta + 2a\mathbf{E}\xi = 0. \end{cases}$$

15.3. Модель має вигляд $y_j = a + bx_j + \varepsilon_j$, оцінки параметрів обчислюються як у 15.1: $\widehat{a} = 3.084$, $\widehat{b} = -0.038$, вірогідний інтервал рівня 0.99 для b має вигляд $(-0.056, -0.019)$, гіпотеза $H_0\colon b = 0$ відхиляється.

15.4. $\widehat{b} = \left(\sigma^2_\xi - \sigma^2_x + \sqrt{4\sigma^2_{\xi x} + (\sigma^2_\xi - \sigma^2_x)^2}\right)/(2\sigma_{\xi x})$, $\widehat{a} = \overline{\xi} - \widehat{b}\,\overline{x}$, де $\sigma^2_\xi = \overline{\xi^2} - \overline{\xi}^2$, $\sigma^2_x = \overline{x^2} - \overline{x}^2$, $\sigma_{\xi x} = \overline{\xi x} - \overline{\xi}\,\overline{x}$.

15.5. Скористатися формулою $\widehat{b} = \sum_{j=1}^3 y_j(x_j - \overline{x})/(3\sigma^2_x)$.

15.6. Для довільної оцінки виду $T = \sum_{j=1}^n c_j\xi_j$ обчислити

$$\mathbf{E}_\theta T = \mu\sum_{j=1}^n c_j, \quad \mathbf{D}_\theta T = \sigma^2\rho\left(\sum_{j=1}^n c_j\right)^2 + \sigma^2(1-\rho)\sum_{j=1}^n c_j^2$$

та, враховуючи умову незміщеності, звести задачу мінімізації дисперсії до задачі на знаходження умовного екстремуму: $\sum_{j=1}^n c_j^2 \to \min$, $\sum_{j=1}^n c_j = 1$, єдиним розв'язком якої є $c_j = 1/n$, $j = \overline{1,n}$.

15.7. Записати модель у вигляді $X = T'\theta + \varepsilon$, де

$$T_{1j} = \mathbb{1}_{j \le m}, \quad T_{2j} = \mathbb{1}_{j > m}, \quad j = \overline{1,n},$$

та обчислити шукану оцінку за формулою $\widehat{\theta} = V^{-1}TX$, де $V = TT' = \mathrm{diag}\{m, n-m\}$. $\widehat{\theta}_1 = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^m \xi_k$, $\widehat{\theta}_2 = \frac{1}{n-m}\sum_{k=m+1}^n \xi_k$.

15.8. Довести, що $\mathbf{E}w(\xi,\eta)(\eta - a - b\xi)^2 = c\mathbf{E}(\eta^* - a - b\xi^*)^2$, $c > 0$, і скористатися задачею 15.2.

15.9. Враховуючи, що $\widehat{\theta} = \theta + V^{-1}T\varepsilon$, обчислити $\mathbf{E}_\theta\widehat{\theta}$ та $\mathrm{Cov}_\theta(\widehat{\theta})$. Зобразити вектор $v = X - T'\widehat{\theta}$ у вигляді $v = (I - \Pi)\varepsilon$, де $\Pi =$

$T'V^{-1}T$. Переконатися, що матриця Π — симетрична й ідемпотентна, $\mathrm{Tr}(\Pi) = k$. Знайшовши $\mathbf{E}v = 0$, $\mathrm{Cov}(v) = \sigma^2(I - \Pi)$, довести, що $(n-k)\widehat{\sigma}^2_{n-k} = \mathbf{E}v'v = \mathrm{Tr}(\mathrm{Cov}(v)) = (n-k)\sigma^2$.

15.10. (а) Враховуючи рівняння МНК, довести, що скалярний добуток $(T'(\widehat{\theta} - \theta))'(X - T'\widehat{\theta}) = 0$. (б) Зобразити вектори у вигляді $T'(\widehat{\theta} - \theta) = \Pi\varepsilon$, $X - T'\widehat{\theta} = (I - \Pi)\varepsilon$ (див. вказівку до 15.9) та показати, що матриця взаємних коваріацій $\mathrm{Cov}\Big(X - T'\widehat{\theta}, T'(\widehat{\theta} - \theta)\Big) = \sigma^2(\Pi - \Pi^2) = 0$.

15.11. Записати функції вірогідності у вигляді:

(а) $L(X, \theta) = (2\sigma)^{-n}\mathbb{I}_{\max_{1\le j\le n}|\xi_j - (T'\theta)_j| < \sigma}$,

(б) $L(X, \theta) = (2\sigma)^{-n}\exp\left(-\frac{1}{\sigma}\sum_{j=1}^n |\xi_j - (T'\theta)_j|\right)$.

15.12. Ввести параметри $m_1 = \mathbf{E}\zeta_1$, $m_2 = \mathbf{E}\zeta_1^2$, знайти теоретичні змішані моменти $\mu_{01} = m_1$, $\mu_{02} = m_2$, $\mu_{10} = a + bm_1$, $\mu_{11} = am_1 + bm_2$, прирівняти їх до відповідних вибіркових моментів та розв'язати одержану систему рівнянь.

15.13. Скласти й розв'язати систему рівнянь ОМВ. У пункті (б) ОМВ для μ_1, μ_2 мають вигляд $\widehat{\mu}_k = n^{-1}\sum_{j=1}^n \zeta_{kj}$, $k = 1, 2$.

15.14. 1, x, $2x^2 - 1$, $4x^3 - 3x$, $8x^4 - 8x^2 + 1$.

15.15. Розглянути модель $\xi_j = a + bx_j + \varepsilon_j$, $j = \overline{1, n}$, де ξ_j — вимірювання координати ракети в момент $t = x_j$, a — її положення в момент $t = 0$, b — швидкість ракети, а $\varepsilon_j \simeq N(0, \sigma^2)$ — незалежні похибки вимірювань. Вірогідні інтервали рівня $1 - \alpha$ обчислити за формулами

$$\left(\widehat{a} \pm t_{\frac{\alpha}{2};n-2}\sqrt{\overline{x^2}\,\widehat{\sigma}^2_{n-2}/(n\sigma^2_x)}\right), \quad \left(\widehat{b} \pm t_{\frac{\alpha}{2};n-2}\sqrt{\widehat{\sigma}^2_{n-2}/(n\sigma^2_x)}\right),$$

де $\widehat{b} = \left(\overline{\xi x} - \overline{x}\,\widehat{\mu}_n\right)/\sigma^2_x$, $\widehat{a} = \widehat{\mu}_n - \overline{x}\,\widehat{b}$, $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n x_j$,

$\overline{\xi x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \xi_j x_j$, $\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n x_j^2$, $\sigma^2_x = \overline{x^2} - \overline{x}^2$,

$\widehat{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \xi_j$, $\widehat{\sigma}^2_{n-2} = \frac{1}{n-2}\sum_{j=1}^n(\xi_j - \widehat{a} - \widehat{b}x_j)^2$,

$t_{\frac{\alpha}{2};n-2}$ — квантиль рівня $1 - \alpha/2$ розподілу Стьюдента τ_{n-2}.

15.16. Оцінки утворюють множину

$$\left\{(\mu, \sigma) | \mu + \sigma m = n^{-1}\sum_{j=1}^n \xi_j\right\}.$$

15.17. $\widehat{\beta} = V^{-1}TX$, $\mathbf{E}_\beta\widehat{\beta} = \beta$, $\mathrm{Cov}_\beta(\widehat{\beta}) = \sigma^2 V^{-1}$, де $X = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$,

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_n \\ t_1^2 & t_2^2 & \ldots & t_n^2 \end{pmatrix}, \quad V = TT' = n\begin{pmatrix} 1 & \overline{t} & \overline{t^2} \\ \overline{t} & \overline{t^2} & \overline{t^3} \\ \overline{t^2} & \overline{t^3} & \overline{t^4} \end{pmatrix},$$

$\overline{t^k} = n^{-1}\sum_{j=1}^n t_j^k$. Незміщеність оцінки для інтеграла випливає з рівностей $\int_0^1 x(t)dt = \beta_0 + \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{3}$, $\int_0^1(\widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 t + \widehat{\beta}_2 t^2)dt = \widehat{\beta}_0 + \frac{\widehat{\beta}_1}{2} + \frac{\widehat{\beta}_2}{3}$.

15.18. Показати, що існує невироджена матриця C така, що $V = CC'$. Перейти до моделі $Y = Z'\theta + \delta$, де $Y = C^{-1}X$, $Z = C^{-1}T'$, $\delta = C^{-1}\varepsilon$, $\mathrm{Cov}(\delta) = \sigma^2 I$.

15.19. $\widehat{\theta}_{\text{ОМВ}} = \dfrac{\sum_{j=1}^n \xi_j}{\sum_{j=1}^n x_j}$, $\mathbf{D}_\theta\widehat{\theta}_{\text{ОМВ}} = \dfrac{\theta}{\sum_{j=1}^n x_j}$,

$\mathbf{D}_\theta\widehat{\theta}_{\text{МНК}} = \dfrac{\theta\sum_{j=1}^n x_j^3}{\left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)^2}$. Для порівняння дисперсій використати нерівність Коші - Буняковського.

15.20. Модель записати у вигляді $X = T'\theta + \varepsilon$, де $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, $T' = (T_1', T_2')$. Обчислити

$$TT' = \begin{pmatrix} T_1T_1' & T_1T_2' \\ T_2T_1' & T_2T_2' \end{pmatrix}, \quad (TT')^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

$D = (T_2VT_2')^{-1}$, $B = -(T_1T_1')^{-1}T_1T_2'D$, $C = -DT_2T_1'(T_1T_1')^{-1}$,
$A = (T_1T_1')^{-1} + (T_1T_1')^{-1}T_1T_2'DT_2T_1'(T_1T_1')^{-1}$,

$$\widehat{\theta} = (TT')^{-1}TX = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_1X \\ T_2X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AT_1X + BAT_2X \\ CT_1X + DAT_2X \end{pmatrix}.$$

16.1. (a) $\widehat{\rho}_n = \frac{\overline{ms} - \overline{m}\,\overline{s}}{\sqrt{\left(\overline{m^2} - \overline{m}^2\right)\left(\overline{s^2} - \overline{s}^2\right)}} = 0.764$, де $\overline{m} = \frac{1}{n}\sum m$, $\overline{m^2} = \frac{1}{n}\sum m^2$, $\overline{s} = \frac{1}{n}\sum s$, $\overline{s^2} = \frac{1}{n}\sum s^2$, $\overline{ms} = \frac{1}{n}\sum ms$. Розглянути нормальну модель, врахувати, що за гіпотези H_0: $\rho = 0$ статистика

$\widehat{\tau}_{n-2} = \sqrt{n-2}\widehat{\rho}_n/\sqrt{1-\widehat{\rho}_n^2}$ має розподіл Стьюдента з $n-2$ ступенями свободи. Для наведених даних $\widehat{\tau}_8 = 3.346$, P-значення для двостороннього критерію (при $H_1\colon \rho \neq 0$) дорівнює $2\mathbf{P}(\tau_8 > 3.346) = 0.0101$.

(б) $\widehat{b} = \frac{\overline{ms}-\overline{m}\,\overline{s}}{\overline{m^2}-\overline{m}^2} = 1.637$, $\widehat{a} = \overline{s} - \overline{m}\,\widehat{b} = 7.426$.
Для перевірки гіпотез $H_0\colon b = b_0$ та $H_0\colon b < b_0$ використати статистику $\widehat{\tau}_{n-2}(b_0) = \sqrt{n}(\widehat{b} - b_0)\sqrt{\overline{m^2} - \overline{m}^2}/\widehat{\sigma}_{n-2}$, де

$$\widehat{\sigma}^2_{n-2} = \tfrac{1}{n-2}\textstyle\sum_{i=1}^n \left(s_i - \widehat{a} - \widehat{b}\,m_i\right)^2 .$$

Критичні області мають вигляд $\{|\widehat{\tau}_{n-2}(b_0)| \geq t_{\frac{\alpha}{2};n-2}\}$ та $\{\widehat{\tau}_{n-2}(b_0) \geq t_{\alpha;n-2}\}$ відповідно, де $t_{q;n-2}$ — квантиль рівня $1-q$ розподілу τ_{n-2}. Для наведених даних при $\alpha = 0.05$: (в) $\widehat{\tau}_8(2) = -0.742$, $t_{\alpha;n-2} = 1.860$, $H_0\colon b < 2$ приймається; (г) $\widehat{\tau}_8(0) = 3.346$, $t_{\frac{\alpha}{2};n-2} = 2.306$, $H_0\colon b = 0$ відхиляється.

(д) Для заданого значення m межі вірогідного інтервалу рівня $1-\alpha$ для s визначаються за формулою

$$\widehat{s} \pm t_{\frac{\alpha}{2};n-2}\widehat{\sigma}_{n-2}\sqrt{\left(1 + \frac{(m-\overline{m})^2}{\overline{m^2}-\overline{m}^2}\right)/n},$$

де $\widehat{s} = \widehat{a} + \widehat{b}\,m$. Для $m = 115.0$ маємо $\widehat{s} = 195.7$ і вірогідний інтервал $(185.6, 205.8)$.

16.2. Таблиця ANOVA має вигляд

Джерело	Ст. св.	SS	MSS
Міжгрупова	$k-1$	SS_v	$SS_v/(k-1)$
Залишкова	$n-k$	SS_r	$SS_r/(n-k)$
Повна	$n-1$	SS	

де k — кількість груп (рівнів фактора), n — загальна кількість спостережень, $SS = SS_v + SS_r$. Для перевірки гіпотези про середні застосувати критерій $(\widehat{\phi}_{k-1,n-k}, [F_{\alpha;k-1;n-k}, \infty))$, де $\widehat{\phi}_{k-1,n-k} = \frac{SS_{vv}/(k-1)}{SS_{rr}/(n-k)}$, $F_{\alpha;k-1;n-k}$ — квантиль рівня $1-\alpha$ розподілу $f_{k-1,n-k}$. Для наведених даних при $\alpha = 0.05$ маємо: $\widehat{\phi}_{2,27} = 5.59$, $F_{0.05;2;27} =$

3.35, гіпотеза про рівність середніх відхиляється (тобто розходження є істотними).

16.3. (б) рівняння лінії регресії: $y = \widehat{a} + \widehat{b}x$, де $\widehat{a} = 24.10$, $\widehat{b} = 6.22$ (див. 16.1 (б)); $SS = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2 = 2196$, $SS_v = \sum_{i=1}^{n}(\widehat{y}_i - \overline{y})^2 = 552.2$, $SS_r = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \widehat{y}_i)^2 = 1643.8$ (тут $\widehat{y}_i = \widehat{a} + \widehat{b}\,x_i$); $R^2 = SS_v/SS = 0.251$. (в) не можна (див. 16.1 г)): $\widehat{\tau}_{10}(0) = 1.833$, $t_{0.025;10} = 2.228$, $H_0\colon b = 0$ приймається. (г) $(37.3, 54.4)$ (див. 16.1).

16.4. Враховуючи, що $\widehat{y}_i = \widehat{a} + \widehat{b}\,x_i$, де $\widehat{a} = \overline{y} - \overline{x}\,\widehat{b}$ (див. 15.15), довести співвідношення $\widehat{y}_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\widehat{y}_i = \widehat{b}\,(x_i - \overline{x})$.

16.5. (в) Розглянути модель, в якій періоди для тих, що вижили, та для тих, що померли, мають розподіли $N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ та $N(\mu_N, \sigma_N^2)$ відповідно, та побудувати вірогідні інтервали для їх середніх (див. 9.1) і для різниці середніх (див. 9.4; припустити, що $\sigma_Y^2 = \sigma_N^2$):

Вірогідний рівень	Інтервал для μ_Y	Інтервал для μ_N	Інтервал для $\mu_Y - \mu_N$
0.95	$(26.91, 69.95)$	$(19.29, 36.17)$	$(2.90, 38.50)$
0.99	$(15.83, 81.03)$	$(15.72, 39.73)$	$(-3.82, 45.23)$

(г) На рівні 0.05 гіпотеза приймається (див. 13.3 (б)).

16.6. $\beta_0 + \beta_2$, $\beta_1 + \beta_3$, $\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$. У лінійній моделі $X = T'\beta + \varepsilon$, $\beta \in \mathbb{R}^k$, незміщені оцінки для $l'\beta$, $l \in \mathbb{R}^k$, існують тоді і тільки тоді, коли існує вектор $c \in \mathbb{R}^k$ такий, що $l = TT'c$.

16.7. Позначимо $\sigma_i^2 = \mathbf{D}\xi_i$. Знайдемо $\operatorname{cov}(\xi_1\xi_3, \xi_2\xi_3) = \mu_1\mu_2\sigma_3^2$ та $\mathbf{D}(\xi_i\xi_3) = \mu_i^2\mu_3^2(\sigma_i^2/\mu_i^2 + \sigma_3^2/\mu_3^2) + O(\sigma_i^2 + \sigma_3^2), i = 1, 2$.

16.8. Нехай маємо кратні вибірки $X_i = \{\xi_{ij} = (\xi_{ij1}, \xi_{ij2}), j = \overline{1, n_i}\}$, $i = 1, 2$, де $\xi_{i1} \simeq N(\mu_{i1}, \mu_{i2}, \sigma_{i1}^2, \sigma_{i2}^2, \rho)$. Скласти систему рівнянь ОМВ і звести її до вигляду

$$\mu_{ik} = m_{ik}, \quad i = 1, 2,\ k = 1, 2;$$

$$1 - \rho^2 = \frac{v_{ik}^2}{\sigma_{ik}^2} - \frac{\rho r_i v_{i1} v_{i2}}{\sigma_{i1}\sigma_{i2}}, \quad i = 1, 2,\ k = 1, 2;$$

$$\sum_{i=1,2}\left(n_i\rho - \frac{n_i\rho}{1-\rho^2}\left(\frac{v_{i1}^2}{\sigma_{i1}^2} + \frac{v_{i2}^2}{\sigma_{i2}^2}\right) + \frac{n_i r_i v_{i1} v_{i2}(1+\rho^2)}{\sigma_{i1}\sigma_{i2}(1-\rho^2)}\right) = 0;$$

де $m_{ik} = n_i^{-1}\sum_{j=1}^{n_i}\xi_{ijk}$, $v_{ik}^2 = n_i^{-1}\sum_{j=1}^{n_i}(\xi_{ijk}-m_{ik})^2$, $i=1,2$, $k=1,2$. З цих рівнянь одержати співвідношення $\frac{v_{i1}^2}{\sigma_{i1}^2} = \frac{v_{i2}^2}{\sigma_{i2}^2} = \frac{1-\rho^2}{1-\rho r_i}$, $i=1,2$, та підставити їх в ці рівняння.

16.9. Враховуючи співвідношення

$$\alpha_n = -\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i, \quad \beta_m = -\sum_{j=1}^{m-1}\beta_j,$$

дану модель можна звести до моделі $X = T'\tau + \varepsilon$, де вектор $\tau = (\mu, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta_1, \ldots, \beta_{m-1})$, а матриця TT' є блочно-діагональною:

$$TT' = \begin{pmatrix} nm & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 2m & m & \ldots & m \\ m & 2m & \ldots & m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m & m & \ldots & 2m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2n & n & \ldots & n \\ n & 2n & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & \ldots & 2n \end{pmatrix}.$$

16.10. Зробити ортогональну заміну змінних $\eta_1 = \xi_1 - \xi_2$, $\eta_2 = \xi_3 - (\xi_1+\xi_2)/2$, $\eta_3 = \xi_4 - (\xi_1+\xi_2+\xi_3)/3$ та обчислити через них форму.

17.1. Скористатися тим, що $w(t)$ — процес з незалежними приростами, причому $w[s,t) \simeq N(0, \sigma^2(t-s))$. Спектральна функція $F(t) = \sigma^2 t$.

17.2. $\mathbf{E}\xi_t = z$, $r(t) = e^{-\lambda|t|}(1-|z|^2)$, де $z = \mathbf{E}e^{i\eta_1}$, λ — інтенсивність заданого процесу Пуассона $\nu(t)$. Для знаходження коваріаційної функції записати (при $t > s$)

$$\operatorname{cov}(\xi_t, \overline{\xi_s}) = \sum_{j,k=0}^{\infty}\mathbf{E}(\xi_t - z)\overline{(\xi_s - z)}\mathbb{1}_{\nu(s)=j}\mathbb{1}_{\nu(t)-\nu(s)=k}$$

і врахувати, що $\nu(s)$ та $\nu(t)-\nu(s)$ — незалежні пуассонівські випадкові величини.

17.3. Застосувати теорему про обчислення оптимального прогнозу, для спектральної щільності $f(\lambda) = \frac{1}{2\pi|4+3e^{-i\lambda}|^2} = \frac{f_+(\lambda)}{f_-(\lambda)}$, де

$f_+(\lambda) = \frac{1}{8\pi(4+3e^{i\lambda})}$, $f_-(\lambda) = 1 + \frac{3}{4}e^{-i\lambda}$. Шуканий прогноз дорівнює $\widehat{\xi}_1 = -\frac{3}{4}\xi_0$.

17.4. Врахувати, що числа $r(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} f(\lambda)d\lambda$, $t \in$, дорівнюють коефіцієнтам розкладу функції $f(\lambda)$ в ряд Фур'є за системою функцій $(e^{it\lambda}, t \in \mathbb{Z})$, ортогональних на відрізку $[-\pi, \pi]$.

17.5. $r(t) = \sigma^2 e^{-\alpha|t|}$, де $\sigma^2 = \mathbf{D}W(1)$. Врахувати, що для вінерового процесу $\operatorname{cov}(W(s), W(t)) = \sigma^2 \min(s,t)$.

17.6. Застосувати теорему про обчислення оптимального прогнозу, записавши спектральну щільність у вигляді

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}|2 + e^{-i\lambda}|^2 = \frac{f_+(\lambda)}{f_-(\lambda)},$$

де $f_+(\lambda) = \frac{1}{\pi}(2 + e^{i\lambda})$, $f_-(\lambda) = \frac{1}{1+e^{-i\lambda}/2} = 1 - \sum_{n<0}(-1)^{n+1}2^n e^{i\lambda n}$. Шуканий прогноз дорівнює $\widehat{\xi}_1 = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}2^{-n}\xi_{-n+1}$.

17.7. $r(n) = \operatorname{cov}(\xi_{n+l}, \overline{\xi_l}) = \sum_{k=0}^{m} c_{n+k}\overline{c_k}$ (при $k \notin \{0, 1, \ldots, m\}$ $c_k = 0$).

17.8. Обчислимо $n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}\xi_k = \int_{-\pi}^{\pi} n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\lambda}\widetilde{\zeta}(d\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi}\psi_n(\lambda)\widetilde{\zeta}(d\lambda)$, де

$$\psi_n(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{n}\frac{1-e^{in\lambda}}{1-e^{i\lambda}}, & \lambda \neq 0, \\ 1, & \lambda = 0. \end{cases}$$

В силу теореми про ізометрію між L_2 і H_2,

$$\left\| n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}\xi_k - \widetilde{\zeta}(0)\right\|_{L_2} = \int_{-\pi}^{\pi}|\chi_n(\lambda)|^2 F(d\lambda),$$

де $\chi_n(\lambda) = \psi_n(\lambda) - {}_{\{0\}}(\lambda)$, F — структурна міра, що відповідає стохастичній мірі $\widetilde{\zeta}$. Далі довести, що $|\chi_n(\lambda)| \to 0$ при $n \to \infty$, і застосувати теорему Лебега про мажоровану збіжність.

17.9. Зобразити квадрат модуля в умові через спектральну функцію послідовності та скористатись задачею 17.8.

17.10. Для вінерівського процесу відповідне рівняння Фредгольма має вигляд $\lambda^{-1}\varphi(t) = \int_0^t s\varphi(s)ds + t\int_t^1 \varphi(s)ds$. Для знаходження λ_n та $\varphi_n(t)$ показати за допомогою диференціювання по t, що вони є розв'язками крайової задачі $\varphi'' = -\lambda\varphi$, $\varphi(0) = \varphi'(1) = 0$.

17.11. (а) Довести, що $w(t)$ — центрований гауссівський процес з коваріаційною функцією $\min(t,s)$:

$$\operatorname{cov}(w(t),w(s)) = \sum\nolimits_{n,m\geq 1} \int_0^t \varphi_n(u)du \int_0^s \varphi_m(v)dv \ \operatorname{Cov}(\zeta_n,\zeta_m) =$$
$$= \sum\nolimits_{n\geq 1} \left(\varphi_n, 1\!\!\mathrm{I}_{[0,t]}\right)\left(\varphi_n, 1\!\!\mathrm{I}_{[0,s]}\right) = \left(1\!\!\mathrm{I}_{[0,t]}, 1\!\!\mathrm{I}_{[0,s]}\right) = \min(t,s),$$

де $(\cdot,\cdot)$ позначає скалярний добуток в $L^2([0,1])$.

(б) Врахувати, що функції $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}$, $n \in$, утворюють ортонормований базис в $L^2([0,2\pi])$, і міркувати аналогічно пункту (а).

17.12. Достатньо довести тотожність для зображення Карунена: $\theta\eta = \int_{-\pi}^{\pi} \exp(i\lambda) g(\lambda) d\zeta(\lambda)$. Для функції $g(\lambda) = \exp(in\lambda)$ інтеграл у правій частині дорівнює $\xi_{n+1} = (\theta\xi)_n$, і рівність має місце для гармонічних функцій. За лінійністю та неперервністю стохастичного інтегралу подовжуємо рівність на $g \in L_2(F)$.

17.13. $r(s,t) = \sigma^2(t-s)$.

17.14. $r(s,t) = \sigma_\xi^2(\exp(-\alpha t) - \exp(-\alpha s))^2 + \sigma_\eta^2(\exp(-\beta t) - \exp(-\beta s))^2$.

17.15. $r(s,t) = 2 - 2\cos(\alpha(t-s))$.

17.16. $r(s,t) = 2^{-1}\mathbf{E}\cos(\pi\xi(t-s))$.

17.17. Процес з некорельованими значеннями $\zeta_t = \zeta$ м.н., оскільки $r(s,t) = 0, s < t$.

17.18. $f(\lambda) = (2\pi)^{-1}\left[1 + 2\sum\nolimits_{n\geq 1}\exp(-\alpha n)\cos(\lambda n)\cos(\beta n)\right]$.

17.20. $F(\lambda) = 1\!\!\mathrm{I}_{0<\lambda}, \lambda \in [-\pi,\pi]$, $r(n) =$cov$(\xi,\xi) = 1$.

17.21. $r(n) = 1, n \in 2\mathbb{Z}$, $r(n) = \rho = \operatorname{cov}(\xi,\eta), n \in 2\mathbb{Z}+1$. $G(\lambda) = \rho 1\!\!\mathrm{I}_{0<\lambda} + \frac{1-\rho}{4}(1\!\!\mathrm{I}_{-\pi<\lambda} + 1\!\!\mathrm{I}_{\lambda\leq\pi})$ зводиться до стрибків у точках $-\pi, 0, \pi$.

17.22. Такої не існує.

Додаток

Грецький алфавіт

A, α	альфа	I, ι	йота	P, ρ	ро
B, β	бета	$K, \varkappa$	каппа	Σ, σ	сигма
Γ, γ	гама	Λ, λ	ламбда	T, τ	тау
Δ, δ	дельта	M, μ	мю	Υ, υ	іпсилон
E, ε	епсилон	N, ν	ню	Φ, φ	фі
Z, ζ	дзета	Ξ, ξ	ксі	X, χ	хі
H, η	ета	O, o	омікрон	Ψ, ψ	псі
Θ, θ	тета	Π, π	пі	Ω, ω	омега

Список позначень

$\equiv$ – рівність за означенням.

$a_n \simeq b_n$ – *асимптотична еквівалентність* послідовностей: $a_n/b_n \to 1$ при $n \to \infty$.

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_+, \mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{C}$ – множини натуральних, цілих, дійсних, невід'ємних цілих, невід'ємних дійсних та комплексних чисел.

$C(I), C_b(I)$ – простори неперервних та обмежених неперервних функцій на множині I.

$\operatorname{rang} A$ – ранг матриці A.

Ω – *простір елементарних подій*, *універсальна* множина.

$\varnothing$ – *неможлива* подія, порожня множина.

$\mathbf{P}(A \mid B)$ – *умовна ймовірність* події A за умови B.

$\varphi(x), \Phi(x)$ – щільність та функція стандартного *нормального розподілу*.

$\mathfrak{A}(\mathbb{R})$, $\mathfrak{A}(\mathbb{R}^n)$ – *алгебри* множин в $\mathbb{R}$ та $\mathbb{R}^n$, що породжуються напівінтервалами та паралелепіпедами.

$\mathfrak{B}(\mathbb{R})$, $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ – *борелєві* сигма-алгебри в $\mathbb{R}$ та $\mathbb{R}^n$.

$\sigma[\mathfrak{A}]$ – сигма-алгебра, що *породжена* класом множин $\mathfrak{A}$.

$\mathbb{1}_B$ – індикаторна функція висловлювання B.

$\mathbb{1}_{\{A\}}(\omega)$ – *індикаторна величина* випадкової події A.

$\delta_{kj} = \mathbb{1}_{k=j}$ – символ Кронекера.

$I = (\delta_{kj})$ – одинична матриця.

$\xi \simeq \eta$ – збіжність *функцій розподілу* випадкових величин ξ, η.

$B(n, p)$ – випадкова величина, що має *біноміальний розподіл* із числом випробувань n та ймовірністю успіху p.

$G(p)$ – випадкова величина, що має *геометричний розподіл* з імовірністю успіху p.

$\Pi(\lambda)$ – величина з *розподілом Пуассона* і параметром λ.

$x^+ = \max(0, x)$ – додатна частина числа x.

$x^- = \max(0, -x)$ – від'ємна частина числа x.

ξ^+, ξ^- – *додатна та від'ємна частини* випадкової величини ξ.

м.н. – *майже напевне*.

$\mathbf{E}\xi, \mathrm{M}\xi$ – *математичне сподівання* випадкової величини ξ.

$\mathbf{D}\xi$ – *дисперсія* випадкової величини ξ.

$\operatorname{argmin} F$, $\operatorname{argmax} F$ – значення аргументу, для якого досягається найменше чи найбільше значення функції F (у припущенні його існування).

$f^{(-1)}(B) = \{x : f(x) \in B\}$ – прообраз B при відображенні f.

$L_2(\mathbf{P})$ – простір *квадратично інтегровних* випадкових величин.

$N(\mu, \sigma^2)$ – випадкова величина з *нормальним розподілом*, середнім μ та дисперсією σ^2.

$N_n(m, V)$ – *нормальний вектор* у $\mathbb{R}^n$ із середнім m та коваріаційною матрицею V.

$\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ – клас лінійних перетворень із $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$.

$\mathfrak{L}_n(\mathbb{R}^n)$ – клас невироджених лінійних перетворень простору $\mathbb{R}^n$.

$U(a, b)$ – випадкова величина, *рівномірно розподілена* на (a, b).

$Exp(\lambda)$ – випадкова величина, що має *показниковий розподіл* із параметром λ.

$\Gamma(\alpha)$ – повна гама-функція в точці α.

$\Gamma(\lambda, \alpha)$ – випадкова величина з *гама-розподілом* і параметрами λ, α.

χ^2_n – величина з *хі-квадрат розподілом* і n ступенями свободи.

τ_n – величина з *розподілом Стьюдента* і n ступенями свободи.

$f_{n,m}$ – величина, що має *розподіл Фішера* з n, m ступенями свободи.

$\mathrm{cov}(\xi, \eta)$ – *коваріація* випадкових величин ξ, η.

$\mathrm{Cov}(\xi)$ – *коваріаційна матриця* випадкового вектора ξ.

$\Pi_a = (-\infty, a)$ – *кут* із правою верхньою вершиною a.

$\xi_n \to^P \xi$ – збіжність випадкових величин *за ймовірністю*.

$\xi_n \to^{P1} \xi$ – збіжність випадкових величин *з імовірністю 1*.

$\xi_n \to^L \xi$ – збіжність випадкових величин *у середньому*.

$F_n \to^O F$ – збіжність функцій розподілу *в основному*.

$\xi_n \to^W \xi$ – *слабка збіжність* випадкових величин.

$\mathrm{Int}(B)$,$\mathrm{Cl}(B)$ – внутрішність та замикання множини B.

$\overline{\lim}_{n\to\infty}\mathfrak{F}_n$ – *залишкова сигма-алгебра*, що породжена послідовністю сигма-алгебр $\mathfrak{F}_n$.

$\mathbf{P}_\theta(\cdot)$ – імовірність на класі подій при значенні параметра θ.

$\mathbf{E}_\theta\xi$ – *математичне сподівання* ξ при значенні параметра θ.

$\mathbf{D}_\theta\xi$ – *дисперсія* величини ξ при значенні параметра θ.

X – статистична *вибірка* зі значеннями у просторі S.

$(S,\ \Sigma,\ \lambda)$ – *вибірковий простір* із сигма-алгеброю Σ та мірою λ.

$F_1 \ll F_0$ – міра F_1 *абсолютно неперервна відносно міри* F_0.

$X = (\xi_1, ..., \xi_n)$ – *кратна вибірка* об'єму n.

$\widehat{\theta}$ – *оцінка* параметра θ.

$L(X, \theta)$ – *вибіркова функція вірогідності*.

$f(\xi, \theta)$ – *функція вірогідності спостереження*.

$\widehat{F}_n(x)$ – *емпірична функція розподілу*.

$\xi_{(k)}$ – k-та *порядкова статистика*.

$\widehat{\mu}_n$, $\widehat{\sigma}^2_n$ – *вибіркове середнє* та *вибіркова дисперсія*.

$\widehat{s}^2_n$ – *нормована вибіркова дисперсія*.

$\mu_k,\ \mu_k^0$ – нецентральний *теоретичний момент* та *центральний теоретичний момент* k-го порядку.

$\widehat{\mu}_{kn},\ \widehat{\mu}_{kn}^0$ – нецентральний *вибірковий момент* та *центральний вибірковий момент* k-го порядку.

$U(X, \theta)$ – вибіркова *функція впливу.*

$u(\xi, \theta)$ – *функція впливу спостереження.*

ОМВ – *оцінка максимальної вірогідності.*

$H_0 : \theta \in \Theta_0$ – *нульова гіпотеза* щодо значення параметра θ.

$H_1 : \theta \in \Theta_1$ – *альтернативна* гіпотеза щодо значення θ.

$(\widehat{\varkappa}(X),\ D_1)$ – *статистичний критерій* з *критичною областю* D_1.

$(\widehat{\varkappa}(X),\ \pi(t))$ – *рандомізований критерій* перевірки гіпотези.

$(\widehat{\varkappa}(X),\ \pi(t),\ t_0)$ – *простий рандомізований критерій.*

МНК – *метод найменших квадратів.*

$\pounds(G)$ – лінійна оболонка множини G.

$\aleph(G)$ – замикання лінійної оболонки множини G.

н.с.д. D – найбільший спільний дільник множини D.

Таблиця 1. Функція нормального розподілу $\Phi(t)$

У Таблиці 1 наведено значення функції $\Phi(t)$ стандартного нормального розподілу з параметрами (0; 1). Таблиця допускає лінійну інтерполяцію.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-0,0	,5000	,4960	,4920	,4880	,4840	,4801	,4761	,4721	,4681	,4641
-0,1	,4602	,4562	,4522	,4483	,4443	,4404	,4364	,4325	,4286	,4247
-0,2	,4207	,4168	,4129	,4090	,4052	,4013	,3974	,3936	,3897	,3859
-0,3	,3821	,3783	,3745	,3707	,3669	,3632	,3594	,3557	,3520	,3483
-0,4	,3446	,3409	,3372	,3336	,3300	,3264	,3228	,3192	,3156	,3121
-0,5	,3085	,3050	,3015	,2981	,2946	,2912	,2877	,2843	,2810	,2776
-0,6	,2743	,2709	,2676	,2643	,2611	,2578	,2546	,2514	,2483	,2451
-0,7	,2420	,2389	,2358	,2327	,2297	,2266	,2236	,2206	,2177	,2148
-0,8	,2119	,2090	,2061	,2033	,2005	,1977	,1949	,1922	,1894	,1867
-0,9	,1841	,1814	,1788	,1762	,1736	,1711	,1685	,1660	,1635	,1611
-1,0	,1587	,1562	,1539	,1515	,1492	,1469	,1446	,1423	,1401	,1379
-1,1	,1357	,1335	,1314	,1292	,1271	,1251	,1230	,1210	,1190	,1170
-1,2	,1151	,1131	,1112	,1093	,1075	,1056	,1038	,1020	,1003	,0985
-1,3	,0968	,0951	,0934	,0918	,0901	,0885	,0869	,0853	,0838	,0823
-1,4	,0808	,0793	,0778	,0764	,0749	,0735	,0721	,0708	,0694	,0681
-1,5	,0668	,0655	,0643	,0630	,0618	,0606	,0594	,0582	,0571	,0559
-1,6	,0548	,0537	,0526	,0516	,0505	,0495	,0485	,0475	,0465	,0455
-1,7	,0446	,0436	,0427	,0418	,0409	,0401	,0392	,0384	,0375	,0367
-1,8	,0359	,0351	,0344	,0336	,0329	,0322	,0314	,0307	,0301	,0294
-1,9	,0288	,0281	,0274	,0268	,0262	,0256	,0250	,0244	,0239	,0233
-2,0	,0228	,0222	,0217	,0212	,0207	,0202	,0197	,0192	,0188	,0183
-2,1	,0179	,0174	,0170	,0166	,0162	,0158	,0154	,0150	,0146	,0143
-2,2	,0139	,0136	,0132	,0129	,0125	,0122	,0119	,0116	,0113	,0110
-2,3	,0107	,0104	,0102	,0099	,0096	,0094	,0091	,0089	,0087	,0084
-2,4	,0082	,0080	,0078	,0075	,0073	,0071	,0069	,0068	,0066	,0064
-2,5	,0062	,0060	,0059	,0057	,0055	,0054	,0052	,0051	,0049	,0048
-2,6	,0047	,0045	,0044	,0043	,0041	,0040	,0039	,0038	,0037	,0036
-2,7	,0035	,0034	,0033	,0032	,0031	,0030	,0029	,0028	,0027	,0026
-2,8	,0026	,0025	,0024	,0023	,0023	,0022	,0021	,0021	,0020	,0019
-2,9	,0019	,0018	,0018	,0017	,0016	,0016	,0015	,0015	,0014	,0014
t	-3,0	-3,1	-3,2	-3,3	-3,4	-3,5	-3,6	-3,7	-3,8	-3,9
$\Phi(t)$	,0013	,0010	,0007	,0005	,0003	,0002	,0002	,0001	,0001	,0000

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	,5000	,5040	,5080	,5120	,5160	,5199	,5239	,5279	,5319	,5359
0,1	,5398	,5438	,5478	,5517	,5557	,5596	,5636	,5675	,5714	,5753
0,2	,5793	,5832	,5871	,5910	,5948	,5987	,6026	,6064	,6103	,6141
0,3	,6179	,6217	,6255	,6293	,6331	,6368	,6406	,6443	,6480	,6517
0,4	,6554	,6591	,6628	,6664	,6700	,6736	,6772	,6808	,6844	,6879
0,5	,6915	,6950	,6985	,7019	,7054	,7088	,7123	,7157	,7190	,7224
0,6	,7257	,7291	,7324	,7357	,7389	,7422	,7454	,7486	,7517	,7549
0,7	,7580	,7611	,7642	,7673	,7703	,7734	,7764	,7794	,7823	,7852
0,8	,7881	,7910	,7939	,7967	,7995	,8023	,8051	,8078	,8106	,8133
0,9	,8159	,8186	,8212	,8238	,8264	,8289	,8315	,8340	,8365	,8389
1,0	,8413	,8438	,8461	,8485	,8508	,8531	,8554	,8577	,8599	,8621
1,1	,8643	,8665	,8686	,8708	,8729	,8749	,8770	,8790	,8810	,8830
1,2	,8849	,8869	,8888	,8907	,8925	,8944	,8962	,8980	,8997	,9015
1,3	,9032	,9049	,9066	,9082	,9099	,9115	,9131	,9147	,9162	,9177
1,4	,9192	,9207	,9222	,9236	,9251	,9265	,9279	,9292	,9306	,9319
1,5	,9332	,9345	,9357	,9370	,9382	,9394	,9406	,9418	,9429	,9441
1,6	,9452	,9463	,9474	,9484	,9495	,9505	,9515	,9525	,9535	,9545
1,7	,9554	,9564	,9573	,9582	,9591	,9599	,9608	,9616	,9625	,9633
1,8	,9641	,9649	,9656	,9664	,9671	,9678	,9686	,9693	,9699	,9706
1,9	,9713	,9719	,9726	,9732	,9738	,9744	,9750	,9756	,9761	,9767
2,0	,9772	,9778	,9783	,9788	,9793	,9798	,9803	,9808	,9812	,9817
2,1	,9821	,9826	,9830	,9834	,9838	,9842	,9846	,9850	,9854	,9857
2,2	,9861	,9864	,9868	,9871	,9875	,9878	,9881	,9884	,9887	,9890
2,3	,9893	,9896	,9898	,9900	,9904	,9906	,9909	,9911	,9913	,9916
2,4	,9918	,9920	,9922	,9925	,9927	,9929	,9931	,9932	,9934	,9936
2,5	,9938	,9940	,9941	,9943	,9945	,9946	,9948	,9949	,9951	,9952
2,6	,9953	,9955	,9956	,9957	,9959	,9960	,9961	,9962	,9963	,9964
2,7	,9965	,9966	,9967	,9968	,9969	,9970	,9971	,9972	,9973	,9974
2,8	,9974	,9975	,9976	,9977	,9977	,9978	,9979	,9979	,9980	,9981
2,9	,9981	,9982	,9982	,9983	,9984	9984	,9985	,9985	,9986	,9986
t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9
$\Phi(t)$	,9987	,9990	,9993	,9995	,9997	,9998	,9998	,9999	,9999	,1000

Таблиця 2. Розподіл хі-квадрат Пірсона

У таблиці 2 наведено значення функції $\chi^2_{\alpha;n}$, що задає квантилі рівня $1-\alpha$ розподілу Пірсона (χ^2-розподілу) з n ступенями свободи. За означенням, $\mathsf{P}(\chi^2_n > \chi^2_{\alpha;n}) = \alpha$.

n	Значення α							
	0,990	0,975	0,950	0,900	0,100	0,050	0,025	0,010
1	0,00	0,00	0,00	0,02	2,71	3,84	5,02	6,64
2	0,02	0,05	0,10	0,21	4,61	5,99	7,38	9,21
3	0,12	0,22	0,35	0,58	6,23	7,82	9,35	11,34
4	0,30	0,48	0,71	1,06	7,78	9,48	11,14	13,28
5	0,55	0,83	1,14	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09
6	0,87	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81
7	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,48
8	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09
9	2,90	2,70	3,32	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67
10	2,56	3,25	3,94	4,86	15,99	18,31	20,48	23,21
11	3,05	3,82	4,58	5,58	17,28	19,68	21,92	24,72
12	3,57	4,40	5,23	6,3	18,55	21,03	23,34	26,22
13	4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69
14	4,66	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14
15	5,23	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58
16	5,81	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,85	32,00
17	6,41	7,56	8,67	10,09	24,77	27,59	30,19	33,41
18	7,02	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,53	34,81
19	7,63	8,91	10,12	11,65	27,2	30,14	32,85	36,19
20	8,26	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57
21	8,90	10,28	11,59	13,24	29,62	32,67	35,48	38,93
22	9,54	10,98	12,34	14,04	30,81	33,92	36,78	40,29
23	10,20	11,69	13,09	14,85	32,01	35,17	38,08	41,64
24	10,86	12,40	13,85	15,66	33,20	36,42	39,36	42,92
25	11,52	13,12	14,61	16,47	34,38	37,65	40,65	44,31
26	12,20	13,84	15,38	17,29	35,56	38,89	41,92	45,64
27	12,88	14,57	16,15	18,11	36,74	40,11	43,19	46,96
28	13,56	15,31	16,93	18,94	37,92	41,34	44,46	48,26
29	14,26	16,05	17,71	19,77	39,09	42,56	45,72	49,59
30	14,95	16,79	18,49	20,60	40,26	43,77	46,98	50,89
40	22,16	24,43	26,51	29,05	51,80	55,76	59,34	63,69
50	29,71	32,36	34,76	37,69	63,17	67,50	71,42	76,15

n	Значення α							
	0,990	0,975	0,950	0,900	0,100	0,050	0,025	0,010
60	37,48	40,48	43,19	46,46	74,40	79,08	83,30	88,38
70	45,44	48,76	51,74	55,33	85,53	90,53	95,02	100,4
80	53,54	57,15	60,39	64,28	96,58	101,9	106,6	112,3
90	61,75	65,65	69,13	73,29	107,6	113,1	118,1	124,1
100	70,06	74,22	77,93	82,36	118,5	124,3	129,6	135,8

Таблиця 3. Розподіл Стьюдента

У таблиці 3 наведено значення функції $t_{\alpha;n}$, що задає квантилі рівня $1-\alpha$ розподілу Стьюдента (t-розподілу) з n ступенями свободи. За означенням, $\mathsf{P}(t_n > t_{\alpha;n}) = \alpha$.

n	Значення α			
	0,050	0,025	0,010	0,005
1	6,314	12,706	31,821	63,657
2	2,920	4,303	6,965	9,925
3	2,353	3,182	4,541	5,841
4	2,132	2,776	3,747	4,604
5	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,812	2,228	2,764	3,169
11	1,796	2,201	2,718	3,106
12	1,782	2,179	2,681	3,055
13	1,771	2,160	2,651	3,012
14	1,761	2,145	2,624	2,977
15	1,753	2,131	2,602	2,947
16	1,746	2,120	2,583	2,921
17	1,740	2,110	2,567	2,898

n	Значення α			
	0,050	0,025	0,010	0,005
18	1,734	2,101	2,552	2,878
19	1,729	2,093	2,539	2,861
20	1,725	2,086	2,528	2,845
21	1,721	2,080	2,518	2,831
22	1,717	2,074	2,508	2,819
23	1,714	2,069	2,500	2,807
24	1,711	2,064	2,492	2,797
25	1,708	2,060	2,485	2,787
26	1,706	2,056	2,479	2,779
27	1,703	2,052	2,473	2,771
28	1,701	2,048	2,467	2,763
29	1,699	2,045	2,462	2,756
30	1,697	2,042	2,457	2,750
40	1,684	2,021	2,423	2,704
60	1,671	2,000	2,390	2,660
120	1,658	1,980	2,358	2,617
∞	1,645	1,960	2,326	2,576

Таблиця 4. Розподіл Фішера

У таблицях 4.1, 4.2 наведено значення функції $F_{\alpha;n;m}$, що задає квантилі рівня $1-\alpha$ для функції розподілу Фішера (F-розподілу) з n, m ступенями свободи, при вірогідних рівнях $\alpha = 0{,}05$ та $\alpha = 0{,}01$. За означенням, $\mathsf{P}(f_{n;m} > F_{\alpha;n;m}) = \alpha$.

Таблиця 4.1, $\alpha = 0{,}05$

m	n									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,57
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,03
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,10	2,03	1,97	1,93

Таблиця 4.1, $\alpha = 0{,}05$

m	n									
	12	14	16	18	20	30	40	50	60	100
3	8,74	8,71	8,69	8,67	8,66	8,62	8,59	8,58	8,57	8,55
4	5,91	5,87	5,84	5,82	5,80	5,75	5,72	5,70	5,69	5,66
5	4,68	4,64	4,60	4,58	4,56	4,50	4,46	4,44	4,43	4,41
6	4,00	3,96	3,92	3,90	3,87	3,81	3,77	3,75	3,74	3,71
7	3,57	3,53	3,49	3,47	3,44	3,38	3,34	3,32	3,30	3,27
8	3,28	3,24	3,20	3,17	3,15	3,08	3,04	3,02	3,01	2,97
9	3,07	3,03	2,99	2,96	2,94	2,86	2,83	2,80	2,79	2,76
10	2,91	2,86	2,83	2,80	2,77	2,70	2,66	2,64	2,62	2,59
11	2,79	2,74	2,70	2,67	2,65	2,57	2,53	2,51	2,49	2,46
12	2,69	2,64	2,60	2,57	2,54	2,47	2,43	2,40	2,38	2,35
13	2,60	2,55	2,51	2,48	2,46	2,38	2,34	2,31	2,30	2,26
14	2,53	2,48	2,44	2,41	2,39	2,31	2,27	2,24	2,22	2,19
15	2,48	2,42	2,38	2,35	2,33	2,25	2,20	2,18	2,16	2,12
16	2,42	2,37	2,33	2,30	2,28	2,19	2,15	2,12	2,11	2,07
17	2,38	2,33	2,29	2,26	2,23	2,15	2,10	2,08	2,06	2,02
18	2,34	2,29	2,25	2,22	2,19	2,11	2,06	2,04	2,02	1,98
19	2,31	2,26	2,21	2,18	2,16	2,07	2,03	2,00	1,98	1,94
20	2,28	2,22	2,18	2,15	2,12	2,04	1,99	1,97	1,95	1,91
22	2,23	2,17	2,13	2,10	2,07	1,98	1,94	1,91	1,89	1,85
24	2,18	2,13	2,09	2,05	2,03	1,94	1,89	1,86	1,84	1,80
26	2,15	2,09	2,05	2,02	1,99	1,90	1,85	1,82	1,80	1,76
28	2,12	2,06	2,02	1,99	1,96	1,87	1,82	1,79	1,77	1,73
30	2,09	2,04	1,99	1,96	1,93	1,84	1,79	1,76	1,74	1,70
40	2,00	1,95	1,90	1,87	1,84	1,74	1,69	1,66	1,64	1,59
50	1,95	1,89	1,85	1,81	1,78	1,69	1,63	1,60	1,58	1,52
60	1,92	1,86	1,82	1,78	1,75	1,65	1,59	1,56	1,53	1,48
100	1,85	1,79	1,75	1,71	1,68	1,57	1,52	1,48	1,45	1,39

Таблиця 4.2, $\alpha = 0{,}01$

m	n									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	34,1	30,8	29,5	28,7	28,2	27,9	27,7	27,5	27,3	27,2
4	21,2	18,0	16,7	16,0	15,5	15,2	15,0	14,8	14,7	14,5
5	16,3	13,3	12,1	11,4	11,0	10,7	10,5	10,3	10,2	10,1
6	13,7	10,9	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87
7	12,2	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62
8	11,3	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81
9	10,6	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26
10	10,0	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18	3,09
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12	3,03
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80
50	7,17	5,06	4,20	3,72	3,41	3,19	3,02	2,89	2,79	2,70
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63
100	6,90	4,82	3,98	3,51	3,21	2,99	2,82	2,69	2,59	2,50

Таблиця 4.2, $\alpha = 0{,}01$

m	n									
	12	14	16	18	20	30	40	50	60	100
3	27,1	26,9	26,8	26,8	26,7	26,5	26,4	26,4	26,3	26,2
4	14,4	14,2	14,2	14,1	14,0	13,8	13,7	13,7	13,7	13,6
5	9,89	9,77	9,68	9,61	9,55	9,38	9,29	9,24	9,20	9,13
6	7,72	7,60	7,52	7,45	7,40	7,23	7,14	7,09	7,06	6,99
7	6,47	6,36	6,27	6,21	6,16	5,99	5,91	5,86	5,82	5,75
8	5,67	5,56	5,84	5,41	5,36	5,20	5,12	5,07	5,03	4,96
9	5,11	5,00	4,92	4,86	4,81	4,65	4,57	4,52	4,48	4,42
10	4,71	4,60	4,52	4,46	4,41	4,25	4,17	4,12	4,08	4,01
11	4,40	4,29	4,21	4,15	4,10	3,94	3,86	3,81	3,78	3,71
12	4,16	4,05	4,97	3,91	3,86	3,70	3,62	3,57	3,54	3,47
13	3,96	3,86	3,78	3,72	3,66	3,51	3,43	3,38	3,34	3,27
14	3,80	3,70	3,62	3,56	3,51	3,35	3,27	3,22	3,18	3,11
15	3,67	3,56	3,49	3,42	3,37	3,21	3,13	3,08	3,05	2,98
16	3,55	3,45	3,37	3,31	3,26	3,10	3,02	2,97	2,93	2,86
17	3,46	3,35	3,27	3,21	3,16	3,00	2,92	2,87	2,83	2,76
18	3,37	3,27	3,19	3,13	3,08	2,92	2,84	2,78	2,75	2,68
19	3,30	3,19	3,12	3,05	3,00	2,84	2,76	2,71	2,67	2,60
20	3,23	3,13	3,05	2,99	2,94	2,78	2,69	2,64	2,61	2,54
22	3,12	3,02	2,94	2,88	2,83	2,67	2,58	2,53	2,50	2,42
24	3,03	2,93	2,85	2,79	2,74	2,58	2,49	2,44	2,40	2,33
26	2,96	2,86	2,78	2,72	2,66	2,50	2,42	2,36	2,33	2,25
28	2,90	2,79	2,72	2,65	2,60	2,44	2,35	2,30	2,26	2,19
30	2,84	2,74	2,66	2,60	2,55	2,39	2,30	2,25	2,21	2,13
40	2,66	2,56	2,48	2,42	2,37	2,20	2,11	2,06	2,02	1,94
50	2,56	2,46	2,38	2,32	2,27	2,10	2,01	1,95	1,91	1,82
60	2,50	2,39	2,31	2,25	2,20	2,03	1,94	1,88	1,84	1,75
100	2,37	2,26	2,19	2,12	2,07	1,89	1,80	1,73	1,69	1,60

Таблиця 5. Критерій Колмогорова

У таблиці 5 наведено критичні значення $\varepsilon_{\alpha;n}$ – верхньої межі модуля різниці істинної та емпіричної функцій розподілів.

Значення $\varepsilon_{\alpha;n}$ для заданих α та n визначається як мінімальне ε, для якого

$$P\left\{\sup_x \left|\hat{F}_n(x) - F(x)\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \alpha.$$

n	Значення α		
	0,05	0,02	0,01
1	0,9750	0,9900	0,9950
2	0,8419	0,9000	0,9293
3	0,7076	0,7846	0,8290
4	0,6239	0,6889	0,7342
5	0,5633	0,6272	0,6685
6	0,5193	0,5774	0,6166
7	0,4834	0,5384	0,5758
8	0,4543	0,5065	0,5418
9	0,4300	0,4796	0,5133
10	0,4093	0,4566	0,4889
11	0,3912	0,4367	0,4677
12	0,3754	0,4192	0,4491
13	0,3614	0,4036	0,4325
14	0,3489	0,3897	0,4176
15	0,3376	0,3771	0,4042
20	0,2941	0,3287	0,3524

n	Значення α		
	0,05	0,02	0,01
25	0,2640	0,2952	0,3166
30	0,2417	0,2702	0,2899
35	0,2243	0,2507	0,2690
40	0,2101	0,2349	0,2520
45	0,1984	0,2218	0,2380
50	0,1884	0,2107	0,2260
55	0,1798	0,2011	0,2157
60	0,1723	0,1927	0,2067
65	0,1657	0,1853	0,1988
70	0,1598	0,1796	0,1917
75	0,1544	0,1727	0,1853
80	0,1496	0,1673	0,1795
85	0,1452	0,1624	0,1742
90	0,1412	0,1579	0,1694
95	0,1375	0,1537	0,1649
100	0,1340	0,1499	0,1608

При $n > 100$ слід користуватися асимптотичними границями $\varepsilon_{0,05;n} = \frac{1,36}{\sqrt{n}}$; $\varepsilon_{0,01;n} = \frac{1,63}{\sqrt{n}}$, для яких справжні вірогідні рівні дещо більші за 0,95 і 0,99 відповідно.

Таблиця 6. Критерій Вілкоксона

У таблиці 6 наведено нижні критичні значення $W_{\alpha;n;m}$ статистики Вілкоксона S_{nm}. Значення $W_{\alpha;n;m}$ для заданих α (вірогідного рівня) та n і m – обсягів вибірок визначається як найбільше ціле t, для якого $P\{S_{nm} \le t\} \le \alpha$.

Рівень $x_{nm}(\alpha)$, що визначається умовою $P(S_{nm} \ge x_{nm}(\alpha)) \approx \alpha$, виражається через $W_{\alpha;n;m}$ наступним чином:

$$x_{nm}(\alpha) = mn + \tfrac{n(n+1)}{2} - \left(W_{\alpha;n;m} - \tfrac{n(n+1)}{2}\right) = n(n+m+1) - W_{\alpha;n;m}.$$

При значеннях n та m більших, ніж наведені в таблиці (а фактично при n і m, які задовольняють нерівності $\min\{n,\ m\} \ge 6,\ \ m+n \ge 20$), використовується нормальне наближення:

$$x_{nm}(\alpha) = n(n+m+1)/2 + x_\alpha \sqrt{nm(n+m+1)/12},$$

де x_α – квантиль рівня $1-\alpha$ стандартного нормального розподілу.

Для побудови двобічних критеріїв слід мати на увазі, що за нульової гіпотези статистика S_{nm} розподілена симетрично відносно значення $n(n+m+1)/2$.

Обсяг		Значення α			
n	m	0,005	0,01	0,025	0,05
6	6	23	24	26	28
	7	24	25	27	29
	8	25	27	29	31
	9	26	28	31	33
	10	27	29	32	35
	11	28	30	34	37
	12	30	32	35	38
	13	31	33	37	40
	14	32	34	38	42
	15	33	36	40	44
	16	34	37	42	46
	17	36	39	43	47

Обсяг		Значення α			
n	m	0,005	0,01	0,025	0,05
6	18	37	40	45	49
	19	38	41	46	51
7	7	32	34	36	39
	8	34	35	38	41
	9	35	37	40	43
	10	37	39	42	45
	11	38	40	44	47
	12	40	42	46	49
	13	41	44	48	52
	14	43	45	50	54
	15	44	47	52	56
	16	46	49	54	58

Обсяг		Значення α			
n	m	0,005	0,01	0,025	0,05
7	17	47	51	56	61
	18	49	52	58	63
8	8	43	45	49	51
	9	45	47	51	54
	10	47	49	53	56
	11	49	51	55	59
	12	51	53	58	62
	13	53	56	60	64
	14	54	58	62	67
	15	56	60	65	69
	16	58	62	67	72
	17	60	64	70	75
9	9	56	59	62	66
	10	58	61	65	69
	11	61	63	68	72
	12	63	66	71	75

Обсяг		Значення α			
n	m	0,005	0,01	0,025	0,05
9	13	65	68	73	78
	14	67	71	76	81
	15	69	73	79	84
	16	72	76	82	87
10	10	71	74	78	82
	11	73	77	81	86
	12	76	79	84	89
	13	79	82	88	92
	14	81	85	91	96
	15	84	88	94	99
11	11	87	91	96	100
	12	90	94	99	104
	13	93	97	103	108
	14	96	100	106	112
12	12	105	109	115	120
	13	109	113	119	125

Список рекомендованої літератури

Основна література

1. *Карташов М.В.* Теорія ймовірностей і математична статистика - К.: ВПЦ Київський університет, 2009.

2. *Карташов М.В.* Імовірність, процеси, статистика - Київ, ВПЦ Київський університет, 2007.

3. *Дороговцев А.Я.* Элементы общей теории меры и интеграла – Киев, Вища школа, 1989.

4. *Дороговцев А.Я.* Математичний аналіз, у двох частинах – Київ, Вища школа, 1993.

5. *Ядренко М.Й.* Дискретна математика – Київ, Експрес, 2003.

6. *Ширяев А. Н.* Вероятность, в 2-х кн. – Москва, МЦНМО, 2004.

7. *Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.Й.* Теория вероятностей и математическая статистика – Киев, Вища школа, 1988.

8. *Скороход А.В.* Елементи теорії ймовірностей та випадкові процеси – Київ, Вища школа, 1975.

9. *Скороход А.В.* Лекції з теорії випадкових процесів – Київ, Либідь, 1990.

10. *Ивченко Г.И., Медведев Ю.И.* Математическая статистика – Москва, Высшая школа, 1984.

11. *Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г.* Функциональный анализ – Киев, Вища школа, 1990.

12. *Дороговцев А.Я.,Сільвестров Д.С.,Скороход А.В.,Ядренко М.Й.* Теория вероятностей. Сборник задач – Киев, Вища школа, 1976.

13. Теория ймовірностей. Методичні вказівки до лабораторних та самостійних робіт„ Київ, КНУ, 2007.

14. Завдання до практичних занять з дисципліни ”Математична статистика”, Київ, механіко-математичний факультет КНУ, 2006.

15. Учебные задания по курсу "Теория вероятностей", Киев, КГУ, 1982.

Додаткова література

1. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей – Москва, Наука, 1987.

2. *Скороход А.В.* Вероятность – Москва, ВИНИТИ, 1989.

3. *Боровков А.А.* Теория вероятностей – Москва, Наука, 1987.

4. *Севастьянов Б.А.* Курс теории вероятностей и математической статистики – Москва, Наука, 1982.

5. *Коваленко И.Н., Гнеденко Б.В.* Теория вероятностей – Киев, Вища школа, 1990.

6. *Розанов А.А.* Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. – Москва, Наука, 1985.

7. *Лоев М.* Теория вероятностей – Москва, ИЛ, 1962.

8. *Неве Ж.* Математические основы теории вероятностей – Москва, ИЛ, 1969.

9. *Ламперти Дж.* Вероятность – Москва, Наука, 1973.

10. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения – В двух томах, Москва, Мир, 1984.

11. *Уиттл П.* Вероятность. – М.: Наука, 1982.

12. *Секей Г.* Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. – Москва, Мир, 1990.

13. *Крамер Г.* Математические методы статистики – Москва, Мир, 1975.

14. *Закс Ш.* Теория статистических выводов – Москва, Мир, 1975.

15. *Уилкс С.* Математическая статистика – Москва, Наука, 1967.

16. *Леман Э.* Проверка статистических гипотез – Москва, Наука, 1979.

17. *Леман Э.* Теория точечного оценивания – Москва, Наука, 1991.

18. *Питмен Э.* Основы теории статистических выводов – Москва, Мир, 1986.

19. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Введение в теорию случайных процессов, Москва, Наука, 1977.

20. *Карлин С.* Основы теории случайных процессов, Москва, Мир, 1971.

21. *Мешалкин Л.Д.* Сборник задач по теории вероятностей. – Москва, МГУ, 1963.

22. *Зубков А.М.,Севастьянов Б.А.,Чистяков В.П.* Сборник задач по теории вероятностей – Москва, Наука, 1989.

23. *Климов Г.П., Кузьмин А.Д.* Вероятность, процессы, статистика. Задачи с решениями – Москва, МГУ, 1986.

24. *Чибисов Д.М., Пагурова В.И.* Задачи по математической статистике – Москва, МГУ, 1990.

25. *Ивченко Г.И., Медведев Ю.И., Чистяков А.В.* Сборник задач по математической статистике – Москва, Высшая школа, 1989.

26. Справочник по прикладной статистике, под ред. *Э.Ллойд, У.Ледерман*, т.1,2 – Москва, Финансы и статистика, 1989.

27. *Айвазян С.А.,Енюков И.С.,Мешалкин Л.Д.* Прикладная статистика, Исследование зависимостей – Москва, Финансы и статистика, 1985.

28. *Турчин В.М.* Теорія ймовірностей, Основні поняття, приклади, задачі – Київ, А.С.К., 2004.

29. *Athreya K.B., Lahiri S.N.* Measure Theory and Probability Theory - Springer, 2006.

30. *Barlow M.T., Nualart D.* Lectures on probability theory and statistics, - Springer, 1998.

31. *Chung K.L.* A course in probability theory, - AP, 2001.

32. *Durrett R.* Probability, Theory and Examples – Wadsworth Publishing, 1996.

33. *Gine E., Grimmett G.R., Saloff-Coste L.* Lectures on probability theory and statistics - Springer, 1997.

34. *Gray R.M.* Probability, Random Processes and Ergodic Properties – Springer-Verlag, 1987.

35. *Gut A.* Probability. A graduate course - Springer, 2005

36. *Hsu H.P.* Probability, Random Variables and Random Processes -Schaum Outlines, MGH, 1997.

37. *Jacod J., Protter P.* Probability essentials - Springer, 2003.

38. *Kallenberg O.* Foundations of Modern Probability – Springer, 1997.

39. *Rao M., Swift R.* Probability Theory with Applications - Springer, 2006.

40. *Ross S.M.* Introduction to probability models - Elsevier, 2007.

41. *Roussas G.G.* A course in mathematical statistics - AP, 1997.

42. *Shao J.* Mathematical statistics - Springer, 2003.

43. *Stone C.J.* A course in probability and statistics -1995.

44. *Stoyanov J.* Counterexamples in Probability - Wiley, 1997.

45. *Гнеденко Б.В., Колмогоров А.Н.*, Предельные распределения сумм независимых случайных величин - 1949.

Зміст

Навчальне видання

ГОЛОМОЗИЙ Віталій Вікторович
КАРТАШОВ Микола Валентинович
РАЛЬЧЕНКО Костянтин Володимирович

ЗБІРНИК ЗАДАЧ З ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

Навчальний посібник

Друкується за авторською редакцією

Оригінал-макет виготовлений авторами

Формат $60x84^{1/16}$. Ум. друк. арк. 21,4. Наклад 150. Зам. № 215-7528.
Гарнітура Antiqua,Textbook. Папір офсетний. Друк офсетний.
Підписано до друку 17.12.15

Видавець і виготовлювач
Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет"
01601, Київ, б-р Т. Шевченка, 14, кімн. 43
☎ (38044) 239 32 22; (38044) 239 31 72; тел./факс (38044) 239 31 28
e-mail: vpc@univ.kiev.ua
http: vpc.univ.kiev.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1103 від 31.10.02