# תרגיל בית 5

**<u>שאלה 1:</u>**

א)

```
A ← |C|
size1 ← 0
size2 ← 0
for i = 0 to A − 1
      if size1 == 2
        Q2.enqueue(Q1.dequeue)
          Size2++
          Size1--
      if size2 == 2
          Allocate a new node z
          z.left ←Q2. dequeue
          z.right← Q2. dequeue
         z.freq←z.left.freq+z.right.freq
          size2 ← size2 - 2
          if z.freq>=Q1.peek
             Q1. enqueue (z)
              Size1++
          else Q2. enqueue (z)
                size2++
      if Q1. is not Empty
          If C[i]>=Q1.peek
         Q1. enqueue (C[i])
          Size1++
          else Q2. enqueue (C[i])
                size2++
      else Q1. enqueue (C[i])
            size1++
      if size1 == 2
        Q2.enqueue(Q1.dequeue)
          Size2++
          Size1--
      if size2 == 2
          Allocate a new node z
          z.left ←Q2. dequeue
          z.right← Q2. dequeue
          z.freq←z.left.freq+z.right.freq
          size2 ← size2 - 2
          if z.freq>=Q1.peek
             Q1. enqueue (z)
              Size1++
          else Q2. enqueue (z)
                size2++

allocate a new node z
z.left← Q2.dequeue
z.right← Q1.dequeue
z.freq← z.left+z.right
return z
```

ב) לכל פעולה למעט הלולאה תקח $O(1)$ עבור הלולאה שתעבור על איברי המערך תצטרך $O(n)$ לכן אם נסכום את כל הזמנים ייקח לכל היותר $O(n)$ וזה יותר טוב מקוד הפמן שידרוש $O(nlog\ n)$

**שאלה 2:**

שמשון_ומושון_מששו_ששה_משמשים_משומשים

**שאלה 3:**

נאתחל טבלת גיבוב בגודל $n$ זה לוקח $O(n)$ זמן ריצה, ובתוך התאים יהיו הערכים עם שדה בוליאני מאותחל ב $false$ שמרמז לאם יש עוד ערך במבנה ששווה לו.
בעת ההכנסה נבדוק במבנה **אם** קיים ערך ששווה לערך שרוצים להכניס אזי נשנה את הערך הבוליאני לשניהם ל$true$ ונכניסו למבנה, **אחרת** נכניסו למבנה עם הערך $false$.
זמן הריצה בעת ההכנסה והחיפוש בטבלת גיבוב לפי מה שלמדנו צפוי $O(1)$ ובמקרה גרוע $O(n)$.
נשתמש בנוסף בערימת מינימום רק עם הערכים שהשדה הבוליאני שלהם $false$, וזה לוקח במקרה הגרוע $O(n)$ לפי מה שלמדנו ( כאשר כל הערכים עם הערך $false$ ), ואחר כך נשתמש בפעולת $EXTRAXTMIN$ $\left\lfloor \frac{n}{\log n} \right\rfloor$ פעמים, שלוקחת $O(n)$ ( עבור יציאת המינימום $O(\log n)$ אך $\left\lfloor \frac{n}{\log n} \right\rfloor$ פעמים ולכן הכל יוצא $O(n)$).
מכאן נקבל בסכ"ה $O(n)$ זמן ריצה.

**שאלה 4:**

כיוון ש $1 \le k \le \log n$ אז מספר האיברים יהי log n
נבנה מערך B עם log n תאים ונעבור על המערך הראשי נפעל לפי פעולת ה select שלמדנו במיון מהיר, כיוון שאנו יודעים שכל איבר שונה מופיע $\frac{n}{2^i}$ כך ש $1 \le i \le n$ אזי החציון של המערך שגודלו n-1 הוא האיבר המופיע בחצי המערך, אז נוסיף אותו למערך B עם התדירות $\frac{n}{2}$ אחר כך נפעיל את ה select על $\frac{n}{2^2}$ ונבי את החציון של החציון ונוסיפו אל B וכך הלאה עם שאר האיברים במערך הראשי.

נקבל בסוף מערך B עם כל הערכים ומספר התדרות של כל אחד מהם.
בשלב הבא נמיין את המערך B על ידי merge sort, מכיוון שהגודל של B הינו log n אז מיונו יקח במקרה הגרוע $O(\log n * \log(\log n))$ וזה קטן מ- n
בשלב האחרון נבנה מערך סופי כפלט ונעבור על כל האיברים ב B הממוין ולכל תא נציב את התדירות במשתני זמני ונוריד באחד את ערכו ונוסיף את הערך עצמו לתא הפנוי הבא במערך הפלט עד שיתאפס המשתי הזמי ונעבור לאיבר הבא . פעוה זו תקח לכל היותר $O(n)$
לבסוף נקבל מערך פלט ממוין בזמן ריצה לכל היותר $O(n)$

## <u>שאלה 5:</u>
א) נסרוק את המערך ונרצה למצוא את האיבר המקסימלי M סריקה זו תקח $O(n)$
נבציע מיון לפי bucket sort בטווח (0,M) מיון זה ייקח בצפוי$\theta(n)$
לבסוף נעבור על המערך הממוין החדש שלנו-A ונגדיר שני מצביעים אחד שמתחילים מאינדקס-0 ו השני מאנדיקס-n נסמנם q=n, p=0
אם מתקיים $\lfloor A[p] + A[q] \rfloor = z$ אז סיימנו נחזיר ערך אמת שכן קיימים.
אם מתקיים A[p]+A[q]>z אז נקטין את q באחד ושוב נבדוק אם מתקיים התנאי הראשון.
אם מתקיים A[p]+A[q]<z אז נגדל את p באחד ונבדוק שוב את קיימות התנאי הראשון.
בדיקה זו תקח במקרה גרוע $O(n)$

ב) כיוון שנתון לנו כי z<n מספיק שנבציע מיון על האיברים הקטנים שווים לz על ידי counting sort זה לוקח $O(n+k)$ כי שאר האיברים הגדולים לא ייתכן שסכום אף אחד עם אחר יהי שווה ל- $z$ וזה מכיוון שכל האיברים גם גדולים מ-0.
נתון z<n אז מערך העזר יהי קטן מ n כלומר כל פעולת המיון תצטרך $O(n)$ במקרה גרוע.
כעת נעבור על המערך הממוין החדש שלנו ושוב כפי שעשינו בסעף א נבדוק אם קיימים 2 איברים x,y שמקיימים x+y=z.

ושוב בדיקה זו תקח במקרה גרוע $O(n)$ לכן לבסוף כל הבדיקות יחד יצטרכו לכל היותר $O(n)$.

**<u>שאלה 6:</u>**

<u>סעיף א :</u>

<u>סעיף ב :</u>

צ״ל כי העלות לשיעורין לפעולת ההוספה היא $O(\frac{1+\alpha}{\alpha}+1)$.

כדי להוכיח זאת נשתמש בשיטת האסימונים כך ש :

מחיר ההכנסה לאיבר בודד למערך תהייה 1 וגם כן העברתו למערך חדש היא 1.

נשים לב שהחיוב של הוספת איבר בודד למערך תהייה $2+\frac{1+\alpha}{\alpha}+1=$

כך ש יהיה $\frac{1}{\alpha}$ אסימון 1 עבור הוספה לאיבר בודד, 1 עבור הבטחתו להעברה למערך החדש ואת השאר ( $\frac{1}{\alpha}$ ) ישמשו את האיברים שעברו למערך החדש שיש להם מעט מאסימון.

אחרי הגדלת המערך בפעם ה x יהיה לנו $(1+\alpha)^{x-1}*m$ איברים במערך וכולם יהיה להם פחות מאסימון 1 ובמערך החדש שנבנה יהיה לנו $(1+\alpha)^{x}*m$ תאים לאיברים, מכאן הגדלת המערך בפעם ה $x+1$

יהיה לנו $m * (1+\alpha)^{x-1} * m - (1+\alpha)^{x}$ איברים במערך וכולם

יהיה להם עודף $\frac{1}{\alpha}$ אסימונים.

משום ש,

$$((1+\alpha)^{x} * m - (1+\alpha)^{x-1} * m) * \frac{1}{\alpha} = ((1+\alpha)^{x} -$$

$$(1-\alpha)^{x-1}) * \frac{m}{\alpha} =$$

$$= -\to \ \alpha > 0, ---\to = m * (1+\alpha)^{x-1}$$

נסיק כי לכל איבר עם פחות מאסימון 1 יש לו בדיוק אסימון 1 שמבטיח העברתו למערך החדש.

**<u>שאלה 7:</u>**

נשתמש באלגוריתם BFS שלמדנו בכיתה כי הוא ישומש למציאת המסלול הקצר ביותר מקדקוד לכל קדקוד אחר בגרף.

נתבונן בהגדרת הגרף הנתון $G'$ בניית גרף זה לוקח $O(|v| + |E|)$ כיוון שאנו עוברים על קבוצת הקשתות והקדקודים כדי שנייצגו כרשימה,

נפעיל עליו את האלגוריתם BFS החל מ $s^{l}$, לכל קדקודי V שזה גם

לוקח $O(|v'| + |E'|) = O(|v| + |E|)$ ולבסוף נחזיר את המרחק לכל $v$ שנמצא ב $L$ אחרי הפעלת $BFS$ זמן הריצה יהיה $O(|V|)$ כמעבר על כל הקדקודים.

זמן הריצה הכולל לאלגוריתם שנציע כרגע יהיה $O(|v| + |E|)$.

כעת, נזהה כי כל מסלול מתחיל ומסתיים ב L הוא באורך זוגי, ואם הוא מסתיים ב R אזי הוא באורך א״ז, ועוד כל מסלול באורך מסוים ב $G'$ בפרט יש מסלול באותו אורך ב $G$.

מסלול המתחיל בקדקוד $s^l$ ב $G'$ שאורכו זוגי יש לו מסלול ב$G$ המתאים לו שמתחיל בקדקוד $s$.

מתובנה זו אפשר להסיק כי המסלול הקצר ביותר ב $G'$ המתחיל מ $s^l$ לקדקוד אחר כלשהו ב $L$ הוא מסלול קצר ביותר באורך זוגי ב$G$.