

METODE ITERASI JACOBI DAN GAUSS-SEIDEL PREKONDISI UNTUK MENYELESAIKAN SISTEM PERSAMAN LINEAR DENGAN M -MATRIKS

Efriani Widya^{1*}, Syamsudhuha², Bustami²

¹ Mahasiswa Program Studi S1 Matematika

² Dosen Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

*efrianiwidya@yahoo.co.id

ABSTRACT

This article discusses the preconditioner for solving the linear system $Ax = b$, where A is of the form M -matrix, which is a review of the Zhuan-De Wang and Ting-Zhu Huang paper [Applied Mathematics Letters, 19 : 1029 – 1036 (2006)]. Numerical experiments using some sizes of A show that the convergence rate of Jacobi and Gauss Seidel type methods can be increased using the preconditioner.

Keywords: *preconditioned method, Jacobi method, Gauss-Seidel method, spectral radius, M-matrix.*

ABSTRAK

Artikel ini membahas prekondisi untuk menyelesaikan sistem persamaan linear $Ax = b$, dengan A berbentuk M -matriks, yang merupakan review dari artikel Zhuan-De Wang and Ting-Zhu Huang [Applied Mathematics Letters, 19 : 1029 – 1036 (2006)]. Dari contoh komputasi dengan ukuran matriks A bervariasi terlihat bahwa kecepatan konvergensi metode iterasi Jacobi dan Gauss Seidel meningkat dengan menggunakan prekondisi dibanding tanpa menggunakan prekondisi.

Kata kunci: *metode prekondisi, metode Jacobi, metode Gauss-Seidel, spektral radius, M-matriks.*

1. PENDAHULUAN

Sistem persamaan linear dalam bentuk perkalian matriks dapat ditulis menjadi

$$Ax = b, \tag{1}$$

dimana $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dan $x, b \in \mathbb{R}^n$. Matriks A di persamaan (1) diasumsikan merupakan M -matriks yang diagonal utamanya adalah 1, sehingga $A = I - L - U$, dengan I adalah matriks identitas, L adalah matriks *strictly lower triangular*, dan

U adalah matriks *strictly upper triangular*. Jika matriks koefisien A bersifat *sparse*, yaitu sebagian besar elemennya adalah nol dan berukuran besar, untuk mencari solusi sistem persamaan linear (1) dapat menggunakan metode iterasi Jacobi dan Gauss-Seidel. Tetapi, kelemahan dari metode iterasi Jacobi dan Gauss-Seidel adalah konvergensinya yang lambat [3, h. 508].

Pada artikel ini didiskusikan prekondisi untuk mempercepat kekonvergenan metode iterasi Jacobi dan Gauss-Seidel untuk kasus sistem dengan matriks koefisien berbentuk M -matriks.

2. METODE PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR

Dengan mengasumsikan bahwa matriks koefisien A di persamaan (1) adalah non-singular, dan semua elemen diagonalnya tidak ada nol, matriks A dapat dipisahkan (*splitting*) menjadi $A = M - N$ dimana M adalah non-singular maka diperoleh

$$x = M^{-1}Nx + M^{-1}b. \quad (2)$$

Persamaan (2) dapat ditulis menjadi

$$x = Hx + c, \quad (3)$$

dimana $H = M^{-1}N$ disebut matriks iterasi dan $c = M^{-1}b$. Kemudian diberikan tebakan awal $x^{(0)} \approx x$ sehingga bentuk dari persamaan (3) dapat dibentuk menjadi

$$x^{(k)} = Hx^{(k-1)} + c, \quad k = 1, 2, \dots. \quad (4)$$

Jika $x^{(k)} \rightarrow x$ ketika $k \rightarrow \infty$ maka iterasi persamaan (4) konvergen ke persamaan (3).

Untuk memilih matriks H seperti pada persamaan (4), pisahkan matriks A , menjadi

$$A = D - L - U,$$

dimana D adalah matriks diagonal, L adalah matriks *strictly lower triangular* dan U adalah matriks *strictly upper triangular*.

Definisi 1 [1, h. 147] Metode Jacobi adalah metode iterasi yang didefinisikan dengan mengambil matriks

$$M = D, \quad N = D - A.$$

Matriks iterasi dari metode ini dinotasikan dengan $H_J = I - D^{-1}A$.

Definisi 2 [1, h. 148] Metode Gauss-Seidel adalah metode iterasi yang didefinisikan dengan mengambil matriks

$$M = D - L, \quad N = U.$$

Matriks iterasi dari metode ini dinotasikan dengan $H_{GS} = (D - L)^{-1}U$.

Syarat metode iterasi Jacobi dan Gauss-Seidel konvergen adalah matriks koefisien A bersifat *diagonally dominant*.

Definisi 3 [2, h. 412] Matriks A adalah matriks *diagonally dominant* jika

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|,$$

untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$. Matriks A dikatakan *strictly diagonally dominant* jika

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|,$$

untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$.

Definisi 4 [6, h. 9] Misalkan matriks A = adalah matriks persegi berukuran $n \times n$, dengan nilai eigen λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ maka

$$\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|,$$

adalah spektral radius matriks A .

Bilangan kondisi (*condition number*) digunakan untuk menentukan baik atau buruknya kondisi dari suatu matriks.

Definisi 5 [1, h. 182] Bilangan kondisi dari matriks A non-singular relatif terhadap norm $\|\cdot\|$ didefinisikan sebagai berikut

$$\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|.$$

Definisi 6 [5, h. 357] Suatu matriks A disebut berkondisi buruk (*ill-conditioned*) jika perubahan yang relatif kecil dalam elemen-elemennya dapat menyebabkan perubahan yang relatif besar dalam solusi $Ax = b$. Matriks A berkondisi baik (*well-conditioned*) jika perubahan relatif kecil dalam elemen-elemennya mengakibatkan terjadi perubahan yang relatif kecil dalam solusi $Ax = b$.

Jika bilangan kondisi mendekati 1, matriks A berkondisi baik. Jika bilangan kondisi lebih besar dari 1, matriks A berkondisi buruk. Untuk menyelesaikan sistem persamaan linear $Ax = b$ dengan matriks A berkondisi buruk dapat menggunakan metode prekondisi $PAx = Pb$, dengan P adalah matriks prekondisi.

Definisi 7 [6, h. 85] Misalkan matriks A non-singular yang berukuran $n \times n$ dengan $a_{ij} \leq 0$ untuk $i \neq j$ dan $a_{ij} > 0$ untuk $i = j$, dan matriks $A^{-1} \geq 0$ (dengan semua elemen dari matriks $a_{ij} \geq 0$) maka matriks A disebut M -matriks.

3. METODE ITERASI JACOBI DAN GAUSS-SEIDEL PREKONDISI UNTUK MENYELESAIKAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR DENGAN M -MATRIKS

Untuk menyelesaikan sistem persamaan linear (1), dengan A adalah M -matriks yang semua diagonal utamanya adalah 1, diperoleh $A = I - L - U$, dengan I adalah matriks identitas, L adalah matriks *strictly lower triangular*, dan U adalah matriks *strictly upper triangular*.

Misalkan matriks prekondisi [7] yang digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear (1) sebagai berikut

$$P(\alpha) = I + S(\alpha), \quad (5)$$

dimana

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad S(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Dengan mengalikan ke kedua ruas persamaan (1) dari kiri dengan $P(\alpha)$ pada (5), diperoleh

$$\begin{aligned} P(\alpha)Ax &= P(\alpha)b, \\ (I + S(\alpha))Ax &= (I + S(\alpha))b, \\ \tilde{A}(\alpha)x &= \tilde{b}(\alpha). \end{aligned} \quad (6)$$

Matriks koefisien pada persamaan (6), dapat dinyatakan dengan

$$\begin{aligned} \tilde{A}(\alpha) &= (I + S(\alpha))A, \\ \tilde{A}(\alpha) &= (I + S(\alpha))I - L - U, \\ \tilde{A}(\alpha) &= I - L - U + S(\alpha) - S(\alpha)L - S(\alpha)U, \end{aligned} \quad (7)$$

dengan entri-entri $\tilde{a}_{ij}(\alpha)$ dari matriks $\tilde{A}(\alpha)$ yang dinyatakan sebagai berikut

$$\tilde{a}_{ij}(\alpha) = \begin{cases} a_{ij} & 1 \leq i \leq n-1, \\ (1-\alpha)a_{n1} & i = n, j = 1, \\ a_{nj} - \alpha a_{n1}a_{1j} & i = n, j \neq 1. \end{cases} \quad (8)$$

Dari persamaan (8) diperoleh $\tilde{a}_{n1}(\alpha) = (1-\alpha)a_{n1} \leq 0$, dengan semua entri-entri yang diluar diagonal adalah tak-positif, dan $\tilde{a}_{nn} = 1 - \alpha a_{n1}a_{1n} > 0$ adalah positif. Selanjutnya, dari persamaan (7) dengan $S(\alpha)L = 0$ dan

$$S(\alpha)U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \alpha a_{n1}a_{12} & \cdots & \alpha a_{n1}a_{1n} \end{bmatrix},$$

dimana $S(\alpha)U = D_\alpha + L_\alpha + U_\alpha$ dengan D_α adalah matriks diagonal dari $S(\alpha)U$, L_α adalah *strictly lower triangular* dari $S(\alpha)U$, U_α adalah *strictly upper triangular* dari $S(\alpha)U$ diperoleh

$$\tilde{A}(\alpha) = I - L - U + S(\alpha) - (D_\alpha + L_\alpha + U_\alpha). \quad (9)$$

Dengan menyamakan setiap bentuk matriksnya, pemisahan matriks $\tilde{A}(\alpha)$ dipersamaan (9) menjadi

$$\left. \begin{aligned} \tilde{D}(\alpha) &= I - D_\alpha, \\ \tilde{L}(\alpha) &= L - S(\alpha) + L_\alpha, \\ \tilde{U}(\alpha) &= U + U_\alpha, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

dimana matriks diagonal dari $\tilde{D}(\alpha)$ adalah positif, ketika matriks $\tilde{L}(\alpha)$ adalah tak-negatif dan matriks $\tilde{U}(\alpha)$ adalah tak-negatif.

Dengan menggunakan Definisi 1 pada persamaan (10) diperoleh matriks iterasi Jacobi prekondisi

$$\tilde{H}_{J(\alpha)} = \tilde{D}(\alpha)^{-1}(\tilde{L}(\alpha) + \tilde{U}(\alpha)),$$

dan matriks iterasi Gauss-Seidel prekondisi dari Definisi 2, yaitu

$$\tilde{H}_{GS(\alpha)} = (\tilde{D}(\alpha) - \tilde{L}(\alpha))^{-1}\tilde{U}(\alpha).$$

4. ANALISA KEKONVERGENAN

Teorema 8 [4] Misalkan matriks A adalah M -matriks. Pemisahan matriks $A = M - N$ dan $\tilde{A}(\alpha) = \tilde{M}(\alpha) - \tilde{N}(\alpha)$ pada metode iterasi Jacobi dan Gauss-Seidel adalah konvergen, maka berlaku

$$\rho(\tilde{H}(\alpha)) \leq \rho(H) < 1. \quad (11)$$

Bukti.

Dari asumsi Teorema [3] bahwa $\rho(M^{-1}N) < 1$. Karena $\tilde{A}(\alpha)$ juga M -matriks, sehingga pemisahan matriks $\tilde{A}(\alpha) = \tilde{M}(\alpha) - \tilde{N}(\alpha)$ juga konvergen. Dengan memasukkan $A = \tilde{P}(\alpha)^{-1}(\tilde{M}(\alpha) - \tilde{N}(\alpha))$, diperoleh $A = M - N = \tilde{P}(\alpha)^{-1}(\tilde{M}(\alpha) - \tilde{N}(\alpha))$, dimana pemisahan $A = M - N$ adalah konvergen, maka terdapat vektor x yang menyatakan $\rho(M^{-1}N) = M^{-1}Nx$, sehingga

$$\begin{aligned} Ax &= (M - N), \\ Ax &= M(I - M^{-1}N)x, \\ Ax &= \frac{1 - \rho(M^{-1}N)}{\rho(M^{-1}N)}Nx \geq 0. \end{aligned}$$

Karena $\widetilde{M}(\alpha)^{-1} \geq 0$ dan $\widetilde{P}(\alpha) \geq 0$, maka di peroleh $\widetilde{M}(\alpha)^{-1}\widetilde{P}(\alpha) \geq \widetilde{M}(\alpha)^{-1} \geq M^{-1}$, sehingga

$$\begin{aligned}(\widetilde{M}(\alpha)^{-1}\widetilde{P}(\alpha) - M^{-1})Ax &= \widetilde{M}(\alpha)^{-1}\widetilde{P}(\alpha) \left\{ \widetilde{P}(\alpha)^{-1}(\widetilde{M}(\alpha) - \widetilde{N}(\alpha)) \right\} x(I - M^{-1}N)x, \\&= (I - \widetilde{M}(\alpha)^{-1}\widetilde{N}(\alpha))x - (I - M^{-1}N)x, \\&= M^{-1}Nx - \widetilde{M}(\alpha)^{-1}\widetilde{N}(\alpha)x, \\(\widetilde{M}(\alpha)^{-1}\widetilde{P}(\alpha) - M^{-1})Ax &= \rho(M^{-1}N)x - \widetilde{M}(\alpha)^{-1}\widetilde{N}(\alpha)x \geq 0,\end{aligned}$$

yang mengimplikasikan persamaan (11).

5. PERBANDINGAN NUMERIK

Contoh 1 Tentukan solusi numerik untuk masalah nilai batas persamaan poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4 \quad 0 < x < 1, 0 < y < 2; \quad (12)$$

dengan syarat batas

$$\begin{aligned}u(x, 0) &= x^2, & u(x, 2) &= (x - 2)^2, & 0 \leq x \leq 1; \\u(0, y) &= y^2, & u(1, y) &= (y - 1)^2, & 0 \leq y \leq 2.\end{aligned}$$

Solusi. Solusi numerik dari persamaan poisson (12) dilakukan terlebih dahulu dengan proses diskritisasi dengan menggunakan metode Beda Hingga (*Finite Difference*) [2, h. 717] maka

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + k^2 w_{i+1,j}}{h^2}, \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{w_{i,j-1} - 2w_{i,j} + w_{i,j+1}}{k^2}, \quad (14)$$

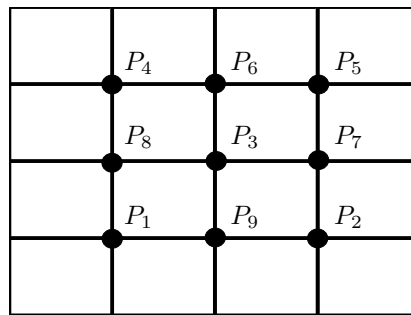
dimana $w_{i,j} = u(x_i, y_j)$. Selanjutnya, dengan mensubstitusikan persamaan (13) dan persamaan (14) ke persamaan (12), maka diperoleh suatu kesamaan

$$-k^2 w_{i-1,j} + 2(k^2 + h^2)w_{i,j} - k^2 w_{i+1,j} - h^2 w_{i,j-1} - h^2 w_{i,j+1} = -4h^2 k^2, \quad (15)$$

untuk $i = 1, 2, 3$ dan $j = 1, 2, 3$. Jika persamaan (15) digambarkan dalam bentuk *interor grid point*, dengan $h = \frac{1}{4}$ dan $k = \frac{1}{2}$, diperoleh persamaan pada titik P_i ,

dalam bentuk matriks dapat ditulis

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{2}{5} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{10} & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \\ w_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{160} \\ \frac{9}{160} \\ -\frac{1}{160} \\ -\frac{1}{10} \\ \frac{177}{160} \\ \frac{3}{20} \\ \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{10} \\ \frac{3}{10} \\ -\frac{3}{40} \end{bmatrix},$$



Gambar 1: *Ordering nodes*

dengan urutan ordering titik (*ordering nodes*) seperti pada Gambar 1. Solusi persamaan (15) dapat diselesaikan dengan menggunakan metode iterasi Jacobi dan metode iterasi Gauss-Seidel, hasil perhitungan dapat dilihat pada Tabel 1 dan Tabel 2. Untuk ukuran matriks 9×9 , di Tabel 1 terlihat bahwa hasil spektral radius

Tabel 1: Perbandingan hasil komputasi spektral radius Contoh 1 dengan menggunakan metode Jacobi (MJ), metode Jacobi prekondisi (MJP), metode Gauss-Seidel (MGS), metode Gauss-Seidel (MGSP) .

No.	Ukuran matriks	$\rho(\text{MJ})$	$\rho(\text{MJP})$	$\rho(\text{MGS})$	$\rho(\text{MGSP})$
1	9×9	0.7021	0.6988	0.5000	0.4888
2	49×49	0.9239	0.9238	0.8536	0.8533
3	255×255	0.9808	0.9808	0.9619	0.9619
4	961×961	0.9952	0.9952	0.9904	0.9904

dengan menggunakan MJ adalah 0.7021, sedangkan dengan menggunakan MJP menghasilkan spektral radius = 0.6988, dimana MJP menggunakan matriks prekondisi pada persamaan (5) untuk $\alpha = 0.5$. Dilihat dari hasil spektral radius yang

diperoleh dengan menggunakan MJ dan MJP, maka spektral radius MJP lebih kecil daripada spektral radius MJ. Hal ini menunjukkan bahwa dengan menggunakan metode prekondisi akan menghasilkan spektral radius yang kecil. Untuk matriks 9×9 , di Tabel 1 juga menunjukkan bahwa hasil spektral radius dengan menggunakan MGS adalah 0.5000, sedangkan dengan menggunakan MGSP memperoleh spektral radius = 0.4888. Dilihat dari hasil spektral radius yang diperoleh dengan menggunakan MGS dan MGSP, maka spektral radius MGSP lebih kecil daripada spektral radius MGS. Maka, dapat disimpulkan bahwa dengan menggunakan metode prekondisi akan menghasilkan spektral radius yang kecil. Selanjutnya, dari Tabel 1 menunjukkan bahwa MGS menghasilkan spektral radius yang kecil dibandingkan dengan menggunakan MJ, baik menggunakan metode prekondisi maupun tidak menggunakan metode prekondisi. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa konvergensi MGS lebih cepat daripada MJ karena diperoleh spektral radius yang kecil, dan dengan menggunakan metode prekondisi juga akan menghasilkan spektral radius yang kecil.

Selanjutnya, dilihat dari segi jumlah iterasi yang dihasilkan pada solusi persamaan (15) dengan menggunakan MJ, MJP, MGS, dan MGSP. Untuk ukuran

Tabel 2: Perbandingan hasil komputasi spektral radius Contoh 1 dengan menggunakan metode Jacobi (MJ), metode Jacobi prekondisi (MJP), metode Gauss-Seidel (MGS), metode Gauss-Seidel (MGSP).

No.	Ukuran matriks	MJ	MJP	MGS	MGSP
1	9×9	35	33	18	17
2	49×49	117	117	63	62
3	255×255	330	330	183	183
4	961×961	760	760	449	449

matriks 9×9 , dari Tabel 2 merupakan tabel perbandingan komputasi dari penggunaan MJ dan MJP dengan menggunakan tebakan awal $x^{(0)} = 0$ dan batas toleransi $= 10^{-6}$ diperoleh MJ dengan 35 iterasi sedangkan metode MJP memperoleh 33 iterasi. Hal ini menunjukkan bahwa penggunaan prekondisi didalam MJ mempunyai laju konvergensi yang lebih cepat dari metode iterasi biasa. Untuk ukuran matriks 9×9 , dari Tabel 2 merupakan tabel perbandingan komputasi dari penggunaan MGS dan MGSP dengan menggunakan tebakan awal $x^{(0)} = 0$ dan batas toleransi $= 10^{-6}$ diperoleh MGS dengan 18 iterasi sedangkan metode MGSP memperoleh 17 iterasi. Hal ini menunjukkan bahwa penggunaan prekondisi didalam MGS mempunyai laju konvergensi yang lebih cepat dari metode iterasi biasa. Selain itu, iterasi MGS lebih cepat dibandingkan dengan MJ dengan atau tanpa menggunakan prekondisi untuk menyelesaikan persamaan (15).

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Allaire, G. & Kaber, S. M. 2008. *Numerical Linear Algebra*. Springer, New York.
- [2] Burden, R. L. & Faires, J. D. 2010. *Numerical Analysis, Ninth Edition*. Brooks/Cole, Boston.
- [3] Golub, G. H. & Charles, F. V. L. 1996. *Matrix Computation, Third Edition*. The John Hopkins University Press, Baltimore.
- [4] Kohno, T & Niki, H. 2009. A Note On The Preconditioner $P_m = (I + S_m)$. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 225: 316–319.
- [5] Leon, S. J. 2001. *Aljabar Linear dan Aplikasinya Edisi Kelima*. Terjemahan dari *Linear Algebra with Applications, Fifth Edition*, oleh Bondan, A. Penerbit Erlangga. Jakarta.
- [6] Varga, R. S. 1962. *Matrix Iterative Analysis*. Prentice Hall. Englewood Cliffs, New Jersey.
- [7] Wang, Z. & Huang, T. 2006. The Upper Jacobi and Upper Gauss-Seidel Type Iterative Methods for Preconditioned Linear Systems. *Applied Mathematics Letters*, 19: 1029–1036.