TD 1 sur les algorithmes récursifs

1. Que calcule la fonction récursive suivante ?

```
let rec f x y = match x with
 0 -> 0
 | x when x>0 -> f (x-1) y + y
 | _ -> - f (-x) y ;;
```

2. Que calcule la fonction récursive suivante ?

```
let rec g n =
 if n = 0 then 0 else match (n mod 2) with
  0 -> 1 + g (n/2)
 | 1 -> g (n-1) ;;
```

3. Un palindrome est un mot dont la lecture est la même en sens inverse (par exemple "abba" ou "radar"). Ecrire une fonction récursive testant si un mot est un palindrome.
   Justifier la terminaison et la correction de l'algorithme.

4. Ecrire une fonction récursive affichant à l'écran le développement binaire d'un entier. La fonction devra être de type `int -> unit`.

5. **Numérotation de $\mathbb{N}^2$**

   On numérote $\mathbb{N}^2$ par diagonales croissantes : $(0,0) \to 0$, $(1,0) \to 1$, $(0,1) \to 2$ et ainsi de suite.

   Ecrire la fonction récursive `numero : int * int -> int` calculant le numéro correspondant à un couple d'entiers naturels et la fonction `couple` réalisant l'opération inverse.

   Donner une formule directe pour calculer le numéro du couple (p, q) en fonction de p et q.

6. **Coupe minimale dans un tableau**

   Soit $X = (x_1, \ldots, x_p)$ une séquence d'entiers relatifs. Une coupe de X est une somme d'éléments consécutifs de X, c'est-à-dire une somme de la forme $\sum_{k=i}^{j} x_k$.

   Ecrire une fonction déterminant une coupe de valeur minimale dans un tableau.
   On utilisera une fonction récursive déterminant une coupe minimale dans une portion du tableau.

7. **Anagrammes**

   (a) Ecrire une fonction affichant, séparées par un espace, toutes les anagrammes d'un mot.
   On pourra écrire une fonction auxiliaire `ana_aux` *telle que* `ana_aux a b` *affiche la concaténation de* `b` *avec les anagrammes de* `a`.

   (b) Combien y a t-il d'anagrammes distinctes d'un mot donné ?

8. La suite de Thue-Morse est définie par $t_0 = 0$ et pour tout n, $t_{2n} = t_n$ et $t_{2n+1} = 1 - t_n$.

   - Programmer le calcul de t_n.
   - Relier cette fonction au développement binaire de n.
   - Ecrire une fonction `compte` telle que `compte n` calcule le nombre d'entiers $k \leqslant n$ tels que $t_k = 1$.
   - Ecrire une fonction affichant les valeurs de $u_n = t_{n^2}$ jusqu'à un indice donné.
     Vérifier par des simulations informatiques que si on écrit le mot infini formé des valeurs successives de u_n, tous les facteurs de longueur p apparaissent pour tout entier p (et avec la même fréquence). Vérifier que ce n'est pas le cas avec la suite (t_n).