# 第 3 讲基于优化的 IMU 与视觉信息融合

贺一家，高翔，崔华坤

2019 年 6 月 27 日

# 目录

1. 基于 Bundle Adjustment 的 VIO 融合
2. 最小二乘问题的求解
   - 基础：最速下降法，牛顿法
   - 进阶：高斯牛顿法，LM 算法的具体实现
   - 终极：鲁棒核函数的实现
3. VIO 残差函数的构建
   - 视觉重投影误差
   - 预积分模型由来及意义
   - 预积分量方差的计算
4. 残差 Jacobian 的推导
   - 视觉重投影残差的 Jacobian
   - IMU 预积分残差的雅克比

Section 1

# 基于 Bundle Adjustment 的 VIO 融合

# 视觉 SLAM 里的 Bundle Adjustment 问题

## 已知

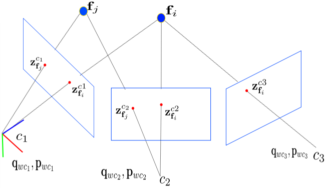
- 状态量初始值：特征点的三维坐标，相机的位姿。
- 系统测量值：特征点在不同图像上的图像坐标。

问题：如何估计状态量的最优值？

## 解决方式

构建误差函数，利用最小二乘得到状态量的最优估计：

$$\arg\min_{\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{f}} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \left\| \pi\left(\mathbf{q}_{wc_i}, \mathbf{p}_{wc_i}, \mathbf{f}_j\right) - \mathbf{z}_{f_j}^{c_i} \right\|_{\Sigma_{ij}} \tag{1}$$




符号定义：

- $\mathbf{q}$：旋转四元数
- $\mathbf{p}$：平移向量
- $\mathbf{f}$：特征点 3D 坐标
- $c_i$：第 $i$ 个相机系
- $\pi(\cdot)$：投影函数 归一化平面
- $\mathbf{z}_{f_j}^{c_i}$：$c_i$ 对 $f_j$ 的观测
- $\Sigma_{ij}$：$\Sigma$ 范数

# g2o or ceres 中采用如下的求解方式，实现细节是什么？[1]

**Input**: A vector function $f : \mathcal{R}^m \rightarrow \mathcal{R}^n$ with $n \geq m$, a measurement vector $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$ and an initial parameters estimate $\mathbf{p}_0 \in \mathcal{R}^m$.

**Output**: A vector $\mathbf{p}^+ \in \mathcal{R}^m$ minimizing $||\mathbf{x} - f(\mathbf{p})||^2$.

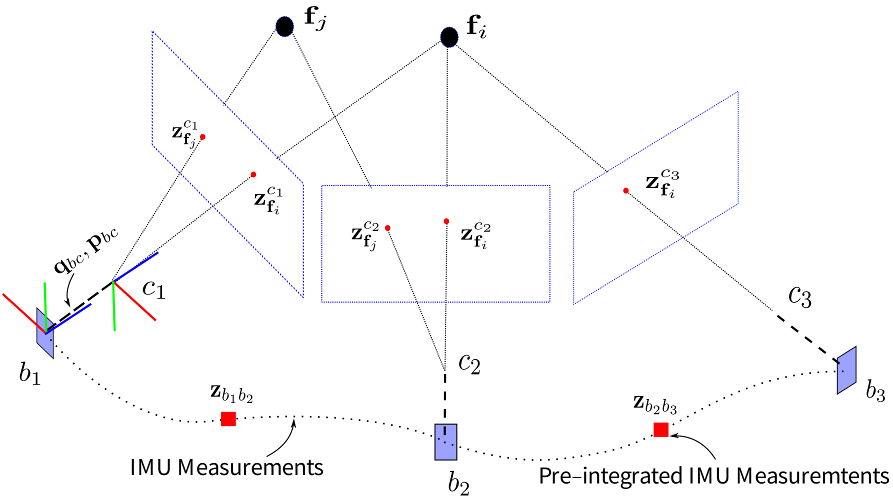
SBA论文求解，LM方法

**Algorithm**:

$k := 0$; $\nu := 2$; $\mathbf{p} := \mathbf{p}_0$;
$\mathbf{A} := \mathbf{J}^T\mathbf{J}$; $\epsilon_\mathbf{p} := \mathbf{x} - f(\mathbf{p})$; $\mathbf{g} := \mathbf{J}^T\epsilon_\mathbf{p}$;
stop:=$(||\mathbf{g}||_\infty \leq \varepsilon_1)$; $\mu := \tau * \max_{i=1,\ldots,m}(A_{ii})$;
while (not stop) and ($k < k_{max}$)
    $k := k + 1$;
    repeat
        $\boxed{\text{Solve } (\mathbf{A} + \mu\mathbf{I})\delta_\mathbf{p} = \mathbf{g};}$
        if $(||\delta_\mathbf{p}|| \leq \varepsilon_2(||\mathbf{p}|| + \varepsilon_2))$
            stop:=true;
        else
            $\mathbf{p}_{new} := \mathbf{p} + \delta_\mathbf{p}$;
            $\rho := (||\epsilon_\mathbf{p}||^2 - ||\mathbf{x} - f(\mathbf{p}_{new})||^2)/(\delta_\mathbf{p}^T(\mu\delta_\mathbf{p} + \mathbf{g}))$;
            if $\rho > 0$
                stop:=$(||\epsilon_\mathbf{p}|| - ||\mathbf{x} - f(\mathbf{p}_{new})|| < \varepsilon_4||\epsilon_\mathbf{p}||)$;
                $\mathbf{p} = \mathbf{p}_{new}$;
                $\mathbf{A} := \mathbf{J}^T\mathbf{J}$; $\epsilon_\mathbf{p} := \mathbf{x} - f(\mathbf{p})$; $\mathbf{g} := \mathbf{J}^T\epsilon_\mathbf{p}$;
                stop:=(stop) or $(||\mathbf{g}||_\infty \leq \varepsilon_1)$;
                $\mu := \mu * \max(\frac{1}{3}, 1 - (2\rho - 1)^3)$; $\nu := 2$;
            else
                $\mu := \mu * \nu$; $\nu := 2 * \nu$;
            endif
        endif
    until $(\rho > 0)$ or (stop)
    stop:=$(||\epsilon_\mathbf{p}|| \leq \varepsilon_3)$;
endwhile
$\mathbf{p}^+ := \mathbf{p}$;

[1] 本页数学符号和前页无关

# VIO 信息融合问题




如何构建 IMU 误差 $\mathbf{z}_{b_1 b_2}$ ? 如何设定多个信息源权重 ? 如何求解 ?

核心问题就是: 多个imu信息融合到一个里,如果确定其误差和信息矩阵?

Section 2

# 最小二乘问题的求解

# 最小二乘基础概念

## 定义

找到一个 $n$ 维的变量 $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$，使得损失函数 $F(\mathbf{x})$ 取局部最小值：

Cost Function

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \left(f_i(\mathbf{x})\right)^2$$

Residual

e = _estimate - _measurement

其中 $f_i$ 是残差函数，比如测量值和预测值之间的差，且有 $m \geq n$。局部最小值指对任意 $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| < \delta$ 有 $F(\mathbf{x}^*) \leq F(\mathbf{x})$

观测数量要大于变量维度，以便有更好的估计！

## 损失函数泰勒展开

假设损失函数 $F(\mathbf{x})$ 是可导并且平滑的，因此，二阶泰勒展开：

$$F(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}) + \mathbf{J}\Delta\mathbf{x} + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{x}^\top \mathbf{H}\Delta\mathbf{x} + O\left(\|\Delta\mathbf{x}\|^3\right) \tag{2}$$

其中 $\mathbf{J}$ 和 $\mathbf{H}$ 分别为损失函数 $F$ 对变量 $\mathbf{x}$ 的一阶导和二阶导矩阵。

## 损失函数泰勒展开性质

忽略泰勒展开的高阶项，损失函数变成了二次函数，可以轻易得到如下性质：

- 如果在点 $\mathbf{x}_s$ 处有导数为 $\mathbf{0}$，则称这个点为稳定点。
- 在点 $\mathbf{x}_s$ 处对应的 Hessian 为 $\mathbf{H}$：
- 如果是正定矩阵，即它的特征值都大于 0，则在 $\mathbf{x}_s$ 处有 $F(\mathbf{x})$ 为局部最小值；
- 如果是负定矩阵，即它的特征值都小于 0，则在 $\mathbf{x}_s$ 处有 $F(\mathbf{x})$ 为局部最大值；
- 如果是不定矩阵，即它的特征值大于 0 也有小于 0 的，则 $\mathbf{x}_s$ 处为鞍点。

## 求解法

- 直接求解：线性最小二乘。
- 迭代下降法：适用于线性和非线性最小二乘。

# 迭代下降法求解：下降法

## 迭代法初衷

找一个下降方向使损失函数随 $\mathbf{x}$ 的迭代逐渐减小，直到 $\mathbf{x}$ 收敛到 $\mathbf{x}^*$：

$$F(\mathbf{x}_{k+1}) < F(\mathbf{x}_k)$$

希望总损失在迭代过程中缩小

分两步：第一，找下降方向单位向量 $\mathbf{d}$，第二，确定下降步长 $\alpha$.

假设 $\alpha$ 足够小，我们可以对损失函数 $F(\mathbf{x})$ 进行一阶泰勒展开：

$$F(\mathbf{x}+\alpha\mathbf{d}) \approx F(\mathbf{x}) + \alpha\mathbf{J}\mathbf{d}$$

只需寻找下降方向，满足：

$$\mathbf{J}\mathbf{d} < 0$$

通过 line search 方法找到下降的步长：$\alpha^* = \operatorname{argmin}_{\alpha>0}\{F(\mathbf{x}+\alpha\mathbf{d})\}$

# 最速下降法和牛顿法

1阶 2阶

## 最速下降法：适用于迭代的开始阶段

从下降方向的条件可知：$\mathbf{J}\mathbf{d} = \|\mathbf{J}\| \cos\theta$，$\theta$ 表示下降方向和梯度方向的夹角。当 $\theta = \pi$，有

$$\mathbf{d} = \frac{-\mathbf{J}^\top}{\|\mathbf{J}\|}$$

即 梯度的负方向为最速下降方向。缺点：最优值附近震荡，收敛慢。

## 牛顿法：适用于最优值附近

在局部最优点 $\mathbf{x}^*$ 附近，如果 $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$ 是最优解，则损失函数对 $\Delta\mathbf{x}$ 的导数等于 $\mathbf{0}$，对公式 (2) 取一阶导有：

$$\frac{\partial}{\partial \Delta\mathbf{x}}\left(F(\mathbf{x}) + \mathbf{J}\Delta\mathbf{x} + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{x}^\top\mathbf{H}\Delta\mathbf{x}\right) = \mathbf{J}^\top + \mathbf{H}\Delta\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{3}$$

得到：$\Delta\mathbf{x} = -\mathbf{H}^{-1}\mathbf{J}^\top$。缺点：二阶导矩阵计算复杂。

# 阻尼法 阻尼牛顿法

## Damp Method

将损失函数的二阶泰勒展开记作

$$F(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}) \approx L(\Delta\mathbf{x}) \equiv F(\mathbf{x}) + \mathbf{J}\Delta\mathbf{x} + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{x}^\top\mathbf{H}\Delta\mathbf{x}$$

求以下函数的最小化：

$$\Delta\mathbf{x} \equiv \arg\min_{\Delta\mathbf{x}} \left\{ L(\Delta\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\mu\Delta\mathbf{x}^\top\Delta\mathbf{x} \right\}$$

其中，$\mu \geq 0$ **为阻尼因子**，$\frac{1}{2}\mu\Delta\mathbf{x}^\top\Delta\mathbf{x} = \frac{1}{2}\mu\|\Delta\mathbf{x}\|^2$ 是惩罚项。
对新的损失函数求一阶导，并令其等于 $\mathbf{0}$ 有：

$$\begin{aligned} \mathbf{L}'(\Delta\mathbf{x}) + \mu\Delta\mathbf{x} &= \mathbf{0} \\ \Rightarrow (\mathbf{H}+\mu\mathbf{I})\,\Delta\mathbf{x} &= -\mathbf{J}^\top \end{aligned} \tag{4}$$

# 非线性最小二乘

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

## 符号说明

为了公式约简，可将残差组合成向量的形式。

原本: F = Sigma(fi(x))
改写: F = 1/2 * f^T * f

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \dots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \tag{5}$$

则有: $\mathbf{f}^\top(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} \left(f_i(\mathbf{x})\right)^2$

同理，如果记 $\mathbf{J}_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ 则有:

注意这里的J和上文的J已经不一样了：
上文J为F对x的偏导数，
这里J是f 对x的偏导数.

$$\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1(\mathbf{x}) \\ \dots \\ \mathbf{J}_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \tag{6}$$

# 非线性最小二乘

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

## 基础

残差函数 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 为非线性函数，对其一阶泰勒近似有：

注意不是CostFunction

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}) \approx \ell(\Delta\mathbf{x}) \equiv \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{J}\Delta\mathbf{x}$$

请特别注意，这里的 $\mathbf{J}$ 是残差函数 $\mathbf{f}$ 的雅克比矩阵。代入损失函数：

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}) \approx L(\Delta\mathbf{x}) &\equiv \frac{1}{2}\ell(\Delta\mathbf{x})^\top\ell(\Delta\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{f}^\top\mathbf{f} + \Delta\mathbf{x}^\top\mathbf{J}^\top\mathbf{f} + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{x}^\top\mathbf{J}^\top\mathbf{J}\Delta\mathbf{x} \\ &= F(\mathbf{x}) + \Delta\mathbf{x}^\top\mathbf{J}^\top\mathbf{f} + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{x}^\top\mathbf{J}^\top\mathbf{J}\Delta\mathbf{x} \end{aligned} \tag{7}$$

这样损失函数就近似成了一个二次函数，并且如果雅克比是满秩的，则 $\mathbf{J}^\top\mathbf{J}$ 正定，损失函数有最小值。

雅克比不满秩，则半正定，存在零空间

另外，易得：$F'(\mathbf{x}) = (\mathbf{J}^\top\mathbf{f})^\top$，以及 $F''(\mathbf{x}) \approx \mathbf{J}^\top\mathbf{J}$.

# Gauss-Newton 和 LM

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

## Gauss-Newton Method

令公式 (7) 的一阶导等于 $\mathbf{0}$，得到：

J^Tf 近似牛顿法中的J^T, 也即b

J^TJ 近似牛顿法中的H

$$\left(\mathbf{J}^\top\mathbf{J}\right)\Delta\mathbf{x}_{\mathrm{gn}} = -\mathbf{J}^\top\mathbf{f} \tag{8}$$

J^TJ 近似于 d"F/dx^2 (J^Tf)^T 近似于 dF/dx

上式就是通常论文里看到的 $\mathbf{H}\Delta\mathbf{x}_{\mathrm{gn}} = \mathbf{b}$，称其为 normal equation.

## The Levenberg-Marquardt Method

Levenberg (1944) 和 Marquardt (1963) 先后对高斯牛顿法进行了改进，求解过程中引入了阻尼因子：

$$\left(\mathbf{J}^\top\mathbf{J} + \mu\mathbf{I}\right)\Delta\mathbf{x}_{\mathrm{lm}} = -\mathbf{J}^\top\mathbf{f} \quad \text{with} \quad \mu \geq 0$$

疑问：LM 中阻尼因子有什么作用，它怎么设定呢？

## 阻尼因子的作用

- $\mu > 0$ 保证 $\left(\mathbf{J}^\top\mathbf{J} + \mu\mathbf{I}\right)$ 正定，迭代朝着下降方向进行。
- $\mu$ 非常大，则 $\Delta\mathbf{x}_{\text{lm}} = -\frac{1}{\mu}\mathbf{J}^\top\mathbf{f} = -\frac{1}{\mu}F'(\mathbf{x})^\top$，接近最速下降法.
- $\mu$ 比较小，则 $\Delta\mathbf{x}_{\text{lm}} \approx \Delta\mathbf{x}_{\text{gn}}$，接近高斯牛顿法。

## 阻尼因子初始值的选取

阻尼因子 $\mu$ 大小是相对于 $\mathbf{J}^\top\mathbf{J}$ 的元素而言的。半正定的信息矩阵 $\mathbf{J}^\top\mathbf{J}$ 特征值 $\{\lambda_j\}$ 和对应的特征向量为 $\{\mathbf{v}_j\}$。对 $\mathbf{J}^\top\mathbf{J}$ 做特征值分解分解后有：$\mathbf{J}^\top\mathbf{J} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^\top$ 可得：

SVD分解

$$\Delta\mathbf{x}_{\text{lm}} = -\sum_{j=1}^{n}\frac{\mathbf{v}_j^\top\mathbf{F}'^\top}{\lambda_j + \mu}\mathbf{v}_j \tag{9}$$

u和最大特征值应该是同一个数量级.最大特征值的数量级又和对角线上最大元素的数量级一致(韦达定理).

所以，一个简单的 $\mu_0$ 初始值的策略就是：

$$\mu_0 = \tau \cdot \max\left\{\left(\mathbf{J}^\top\mathbf{J}\right)_{ii}\right\}$$

若初始值x_0离真值近，应偏向用GN法，故 $\tau$ 取小值；反之应用最速下降法，$\tau$ 取大值1

通常，按需设定 $\tau \sim [10^{-8}, 1]$。

## 阻尼因子 $\mu$ 的更新策略

**定性分析，直观感受阻尼因子的更新:**

1. 如果 $\Delta \mathbf{x} \rightarrow F(\mathbf{x}) \uparrow$，则 $\mu \uparrow \rightarrow \Delta \mathbf{x} \downarrow$，增大阻尼减小步长，拒绝本次迭代。 不希望出现
2. 如果 $\Delta \mathbf{x} \rightarrow F(\mathbf{x}) \downarrow$，则 $\mu \downarrow \rightarrow \Delta \mathbf{x} \uparrow$，减小阻尼增大步长。加快收敛，减少迭代次数。

**定量分析，阻尼因子更新策略通过比例因子来确定的:**

$$\rho = \frac{F(\mathbf{x}) - F\left(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}_{\mathrm{lm}}\right)}{L(\mathbf{0}) - L\left(\Delta \mathbf{x}_{\mathrm{lm}}\right)} \quad \boxed{\frac{\text{实际下降}}{\text{近似下降}}} \tag{10}$$

其中:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{0}) - L\left(\Delta \mathbf{x}_{\mathrm{lm}}\right) &= -\Delta \mathbf{x}_{\mathrm{lm}}^{\top} \mathbf{J}^{\top} \mathbf{f} - \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}_{\mathrm{lm}}^{\top} \mathbf{J}^{\top} \mathbf{J} \Delta \mathbf{x}_{\mathrm{lm}} \\ &\overset{\mathbf{b}=-\mathbf{J}^{\top}\mathbf{f}}{=} -\frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}_{\mathrm{lm}}^{\top} \left(-2\mathbf{b} + \left(\mathbf{J}^{\top}\mathbf{J} + \mu \mathbf{I} - \mu \mathbf{I}\right) \Delta \mathbf{x}_{\mathrm{lm}}\right) \\ &= \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}_{\mathrm{lm}}^{\top} \left(\mu \Delta \mathbf{x}_{\mathrm{lm}} + \mathbf{b}\right) > 0 \end{aligned} \tag{11}$$

SBA论文的来源

## Marquardt 策略

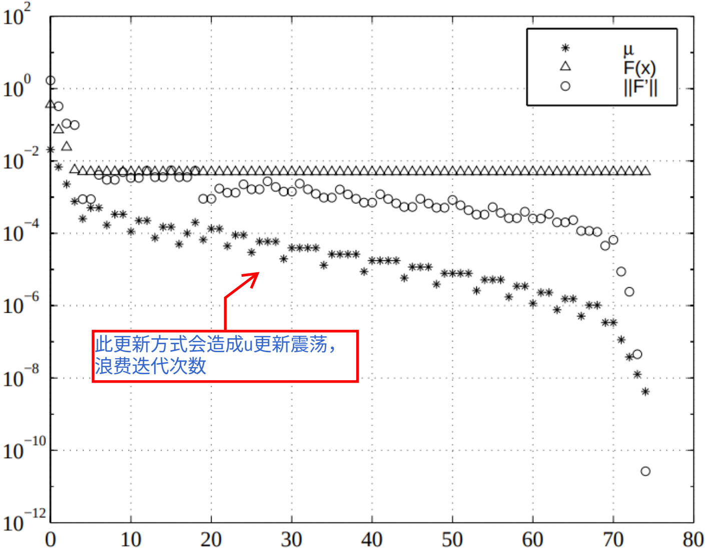
首先比例因子分母始终大于 0，如果：

- $\rho < 0$, 则 $F(\mathbf{x}) \uparrow$，应该 $\mu \uparrow \rightarrow \Delta\mathbf{x} \downarrow$, 增大阻尼减小步长。不希望出现
- 如果 $\rho > 0$ 且比较大，减小 $\mu$, 让 LM 接近 Gauss-Newton 使得系统更快收敛。
- 反之，如果是比较小的正数，则增大阻尼 $\mu$，缩小迭代步长。

1963 年 Marquardt 提出了一个如下的阻尼策略:

$$
\begin{aligned}
\text{if } \rho &< 0.25 \\
\mu &:= \mu * 2 \\
\text{elseif } \rho &> 0.75 \\
\mu &:= \mu / 3
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Marquardt 好不好呢？如下图所示[2]：

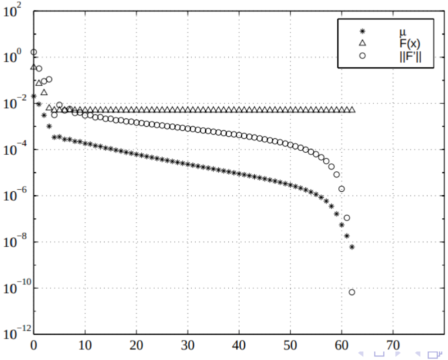



横轴为迭代次数

[2]Kaj Madsen, Hans Bruun Nielsen, and Ole Tingleff. “Methods for non-linear least squares problems”. In: (1999).

## Nielsen 策略（被 g2o, ceres 采用）

$$
\begin{aligned}
&\text{if } \rho > 0 \\
&\quad \mu := \mu * \max\left\{\frac{1}{3}, 1 - (2\rho - 1)^3\right\}; \quad \nu := 2 \\
&\text{else} \\
&\quad \mu := \mu * \nu; \quad \nu := 2 * \nu
\end{aligned}
\tag{13}
$$



# 鲁棒核函数的实现

M-Estimation / Reweighted / Robust Kernel Function

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

引言：最小二乘中遇到 outlier 怎么处理？核函数如何在代码中实现？有多种方法[3]，这里主要介绍 g2o 和 ceres 中使用的 Triggs Correction[4].

## Triggs Correction

鲁棒核函数直接作用残差 $f_k(\mathbf{x})$ 上，最小二乘函数变成了如下形式：

$$\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \sum_k \rho \left( \| f_k(\mathbf{x}) \|^2 \right)$$

将误差的平方项记作 $s_k = \| f_k(\mathbf{x}) \|^2$，则鲁棒核误差函数进行二阶泰勒展开有：

$$\frac{1}{2}\rho(s) = \frac{1}{2}(const + \rho' \Delta s + \frac{1}{2}\rho'' \Delta^2 s) \tag{14}$$

[3] Christopher Zach. "Robust bundle adjustment revisited". In: *European Conference on Computer Vision*. Springer. 2014, pp. 772–787.

[4] Bill Triggs et al. "Bundle adjustment—a modern synthesis". In: *International workshop on vision algorithms*. Springer. 1999, pp. 298–372.

## Triggs Correction

上述函数中 $\Delta s_k$ 的计算稍微复杂一点：

$$\begin{aligned}\Delta s_k &= \|f_k(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x})\|^2 - \|f_k(\mathbf{x})\|^2 \\ &\approx \|f_k + \mathbf{J}_k\Delta\mathbf{x}\|^2 - \|f_k(\mathbf{x})\|^2 \\ &= 2f_k^\top\mathbf{J}_k\Delta\mathbf{x} + (\Delta\mathbf{x})^\top\mathbf{J}_k^\top\mathbf{J}_k\Delta\mathbf{x}\end{aligned} \tag{15}$$

公式(15)代入公式 (14) 有：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\rho(s) &\approx \frac{1}{2}(\rho'[2f_k^\top\mathbf{J}_k\Delta\mathbf{x} + (\Delta\mathbf{x})^\top\mathbf{J}_k^\top\mathbf{J}_k\Delta\mathbf{x}] \\ &\quad + \frac{1}{2}\rho''[2f_k^\top\mathbf{J}_k\Delta\mathbf{x} + (\Delta\mathbf{x})^\top\mathbf{J}_k^\top\mathbf{J}_k\Delta\mathbf{x}]^2 + const) \\ &\approx \rho' f_k^\top\mathbf{J}_k\Delta\mathbf{x} + \frac{1}{2}\rho'(\Delta\mathbf{x})^\top\mathbf{J}_k^\top\mathbf{J}_k\Delta\mathbf{x} + \rho''(\Delta\mathbf{x})^\top\mathbf{J}_k^\top f_k f_k^\top\mathbf{J}_k\Delta\mathbf{x} + const \\ &= \rho' f_k^\top\mathbf{J}_k\Delta\mathbf{x} + \frac{1}{2}(\Delta\mathbf{x})^\top\mathbf{J}_k^\top(\rho' I + 2\rho'' f_k f_k^\top)\mathbf{J}_k\Delta\mathbf{x} + const\end{aligned} \tag{16}$$

## Triggs Correction

对公式(16)求和后，对变量 $\Delta\mathbf{x}$ 求导，令其等于 $\mathbf{0}$，得到：

$$\begin{aligned}\sum_k \mathbf{J}_k^\top(\rho' I + 2\rho'' f_k f_k^\top)\mathbf{J}_k\Delta\mathbf{x} &= -\sum_k \rho'\mathbf{J}_k^\top f_k \\ \sum_k \mathbf{J}_k^\top W \mathbf{J}_k\Delta\mathbf{x} &= -\sum_k \rho'\mathbf{J}_k^\top f_k\end{aligned} \tag{17}$$

相当于权重

## Example: Cauchy Cost Function

柯西鲁棒核函数的定义为：

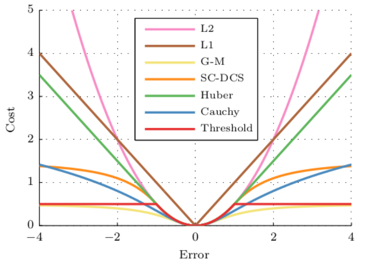
$$\rho(s) = c^2 \log(1 + \frac{s}{c^2})$$

其中 $c$ 为控制参数。对 $s$ 的一阶导和二阶导为：

$$\rho'(s) = \frac{1}{1+\frac{s}{c^2}}, \qquad \rho''(s) = -\frac{1}{c^2}(\rho'(s))^2$$

# 核函数拓展

## Robust Cost Functions




Cauchy等价于IRLS，实际更常用

图片引自论文[5].

## 核函数控制参数的设定

95% efficiency rule (Huber, 1981)： it provides an asymptotic efficiency 95% that of linear regression for the normal distribution.

- 如果残差 $f_i$ 是正态分布， Huber $c = 1.345$, Cauchy $c = 2.3849$.
- 如果残差非正态分布， 需估计残差方差， 然后对残差归一化。 median absolute residual 方法

$$\sigma = 1.482 \cdot med(med(r) - r_i)$$

重投影误差并不符合高斯分布！

[5] Kirk MacTavish and Timothy D Barfoot. "At all costs: A comparison of robust cost functions for camera correspondence outliers". In: *2015 12th Conference on Computer and Robot Vision*. IEEE. 2015, pp. 62–69.

# g2o 代码样例

$H\delta X=b$
$J^TJ\delta X=-J^Tf$
参考公式(17)

f

J

```
Vector3D rho;  // 用来保存鲁棒核函数，一阶导，二阶导
//   rho[0] = rho(sq_norm),
//   rho[1] = rho'(sq_norm),
//   rho[2] = rho''(sq_norm),
this->robustKernel()->robustify(error, rho);
InformationType weightedOmega = this->robustInformation(rho);
omega_r *= rho[1];  //  公式中的 rho'(r^2) * r

from->b().noalias() += A.transpose() * omega_r;  //  公式中的 b = -rho'(r^2)*r^T*J
from->A().noalias() += A.transpose() * weightedOmega * A;  // 公式中的 J^T*W*J
```

上述代码片段，基本和前面的推导一致，其中 robustInformation() 函数在 base_edge.h 中进行了实现，具体代码为：

```
InformationType robustInformation(const Vector3D& rho)
{
    // _information 可以看成是单位矩阵
    InformationType result = rho[1] * _information;
    // 计算权重 W = rho' + 2 * rho'' * r * r^T
    // 但是不知道为啥作者注释了后面这小段代码，也就是变成了 W = rho'
    //ErrorVector weightedErrror = _information * _error;
    //result.noalias() += 2 * rho[2] * (weightedErrror * weightedErrror.transpose());
    return result;
```

# 回顾最小二乘求解

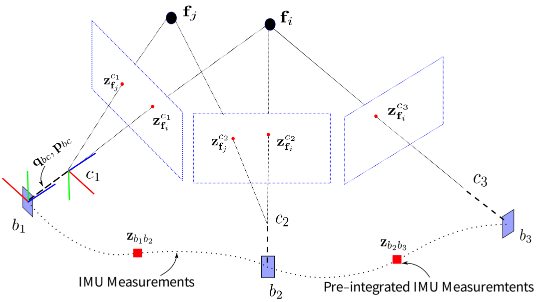
深蓝学院 shenlanxueyuan.com

**步骤**

1. 找到一个合适的关于状态量 $\mathbf{x}$ 的残差函数 $\mathbf{f}_i(\mathbf{x})$，后续用 $\mathbf{r}, err$ 等表示。
2. 计算残差函数对状态量 $\mathbf{x}$ 的雅克比 $\mathbf{J}$。
3. 选定 cost function 以及其参数。
4. LM 算法求解。

# Section 3

## VIO 残差函数的构建




## 基于滑动窗口的 VIO Bundle Adjustment

$$
\begin{aligned}
\min_{\mathcal{X}} \underbrace{\rho\left(\left\|\mathbf{r}_p - \mathbf{J}_p \mathcal{X}\right\|^2_{\Sigma_p}\right)}_{\text{prior}} + \underbrace{\sum_{i \in B} \rho\left(\left\|\mathbf{r}_b(\mathbf{z}_{b_i b_{i+1}}, \mathcal{X})\right\|^2_{\Sigma_{b_i b_{i+1}}}\right)}_{\text{IMU error}} \\
+ \underbrace{\sum_{(i,j) \in F} \rho\left(\left\|\mathbf{r}_f(\mathbf{z}^{c_i}_{\mathbf{f}_j}, \mathcal{X})\right\|^2_{\Sigma^{c_i}_{\mathbf{f}_j}}\right)}_{\text{image error}}
\end{aligned}
\tag{18}
$$

# 系统需要优化的状态量

为了节约计算量采用滑动窗口形式的 Bundle Adjustment，在 $i$ 时刻，滑动窗口内待优化的系统状态量定义如下:

15维状态量

$$\begin{aligned}\mathcal{X} &= \left[\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+1}, \ldots, \mathbf{x}_{n+N}, \lambda_m, \lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_{m+M}\right] \\ \mathbf{x}_i &= \left[\mathbf{p}_{wb_i}, \mathbf{q}_{wb_i}, \mathbf{v}_i^w, \mathbf{b}_a^{b_i}, \mathbf{b}_g^{b_i}\right]^\top, i \in [n, n+N]\end{aligned} \tag{19}$$

其中:

- $\mathbf{x}_i$ 包含 $i$ 时刻 IMU 机体的在惯性坐标系中的位置，速度，姿态，以及 IMU 机体坐标系中的加速度和角速度的偏置量估计。
- $n, m$ 分别是机体状态量，路标在滑动窗口里的起始时刻。
- $N$ 滑动窗口中关键帧数量。
- $M$ 是被滑动窗口内所有关键帧观测到的路标数量。

# 视觉重投影误差

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

## 视觉重投影误差

**定义**：一个特征点在**归一化相机坐标系下**的估计值与观测值的差。

不在图像坐标系下处理可以避免涉及相机内参

$$\mathbf{r}_c = \begin{bmatrix} \frac{x}{z} - u \\ \frac{y}{z} - v \end{bmatrix} \tag{20}$$

其中，待估计的状态量为特征点的三维空间坐标 $(x, y, z)^\top$，观测值 $(u, v)^\top$ 为特征在相机归一化平面的坐标。

## 逆深度参数化

特征点在**归一化相机坐标系**与在**相机坐标系**下的坐标关系为：

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} \tag{21}$$

对于远点来说,在三角化时深度数值很大,在优化时更新量相对太小;另外用逆深度只有1个变量值,也更接近高斯分布.

其中 $\lambda = 1/z$ 称为**逆深度**。

使用逆深度需要关联2个相机加1个观测，使用xyz需关联1个相机和1个观测

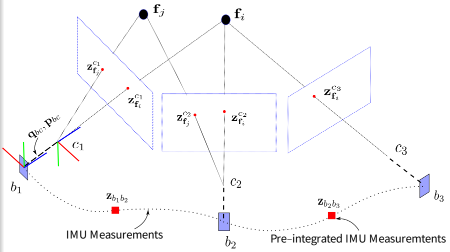
## VIO 中基于逆深度的重投影误差

特征点逆深度在第 $i$ 帧中初始化得到，在第 $j$ 帧又被观测到，预测其在第 $j$ 中的坐标为：

$$\begin{bmatrix} x_{c_j} \\ y_{c_j} \\ z_{c_j} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{bc}^{-1}\mathbf{T}_{wb_j}^{-1}\mathbf{T}_{wb_i}\mathbf{T}_{bc}\begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda}u_{c_i} \\ \frac{1}{\lambda}v_{c_i} \\ \frac{1}{\lambda} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{22}$$

视觉重投影误差为：

$$\mathbf{r}_c = \begin{bmatrix} \frac{x_{c_j}}{z_{c_j}} - u_{c_j} \\ \frac{y_{c_j}}{z_{c_j}} - v_{c_j} \end{bmatrix} \tag{23}$$



# IMU 测量值积分

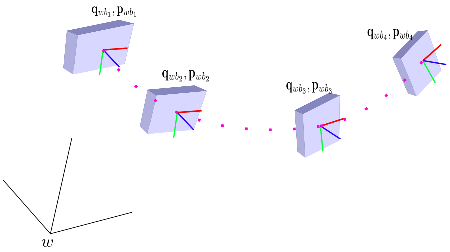
IMU 的真实值为 $\boldsymbol{\omega}, \mathbf{a}$, 测量值为 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{a}}$，则有:

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^b = \boldsymbol{\omega}^b + \mathbf{b}^g + \mathbf{n}^g \tag{24}$$

$$\tilde{\mathbf{a}}^b = \mathbf{q}_{bw}(\mathbf{a}^w + \mathbf{g}^w) + \mathbf{b}^a + \mathbf{n}^a \tag{25}$$

上标 $g$ 表示 gyro，$a$ 表示 acc，$w$ 表示在世界坐标系 world，$b$ 表示 imu 机体坐标系 body。
PVQ 对时间的导数可写成:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{p}}_{wb_t} &= \mathbf{v}_t^w \\
\dot{\mathbf{v}}_t^w &= \mathbf{a}_t^w \\
\dot{\mathbf{q}}_{wb_t} &= \mathbf{q}_{wb_t} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{b_t} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{26}$$




从第 $i$ 时刻的 PVQ 对 IMU 的测量值进行积分得到第 $j$ 时刻的 PVQ:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p}_{wb_j} &= \mathbf{p}_{wb_i} + \mathbf{v}_i^w \Delta t + \int\int_{t\in[i,j]} (\mathbf{q}_{wb_t}\mathbf{a}^{b_t} - \mathbf{g}^w)\delta t^2 \\
\mathbf{v}_j^w &= \mathbf{v}_i^w + \int_{t\in[i,j]} (\mathbf{q}_{wb_t}\mathbf{a}^{b_t} - \mathbf{g}^w)\delta t \\
\mathbf{q}_{wb_j} &= \int_{t\in[i,j]} \mathbf{q}_{wb_t} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{b_t} \end{bmatrix} \delta t
\end{aligned}
\tag{27}
$$

q的值与它前面时刻的q有关，在优化时qi变动了，则之后q、v、p也要重新积分计算

问题：每次 $\mathbf{q}_{wb_t}$ 优化更新后，都需要重新进行积分，运算量较大。

# IMU 预积分

一个很简单的公式转换，就可以将积分模型转为预积分模型：

$$\mathbf{q}_{wb_t} = \mathbf{q}_{wb_i} \otimes \mathbf{q}_{b_i b_t} \tag{28}$$

那么，PVQ 积分公式中的积分项则变成相对于第 i 时刻的姿态，而不是相对于世界坐标系的姿态：

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_{wb_j} &= \mathbf{p}_{wb_i} + \mathbf{v}_i^w \Delta t - \frac{1}{2}\mathbf{g}^w \Delta t^2 + \mathbf{q}_{wb_i} \underline{\iint_{t\in[i,j]} (\mathbf{q}_{b_i b_t} \mathbf{a}^{b_t}) \delta t^2} \\
\mathbf{v}_j^w &= \mathbf{v}_i^w - \mathbf{g}^w \Delta t + \mathbf{q}_{wb_i} \underline{\int_{t\in[i,j]} (\mathbf{q}_{b_i b_t} \mathbf{a}^{b_t}) \delta t} \\
\mathbf{q}_{wb_j} &= \mathbf{q}_{wb_i} \underline{\int_{t\in[i,j]} \mathbf{q}_{b_i b_t} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{b_t} \end{bmatrix} \delta t}
\end{aligned} \tag{29}$$

imu预积分量，和世界坐标无关

## 预积分量

预积分量仅仅跟 IMU 测量值有关，它将一段时间内的 IMU 数据直接积分起来就得到了预积分量：

△t=tj-ti
δ t=1/imu_Hz

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}_{b_i b_j} &= \iint_{t\in[i,j]} (\mathbf{q}_{b_i b_t} \mathbf{a}^{b_t}) \delta t^2 \\
\boldsymbol{\beta}_{b_i b_j} &= \int_{t\in[i,j]} (\mathbf{q}_{b_i b_t} \mathbf{a}^{b_t}) \delta t \\
\mathbf{q}_{b_i b_j} &= \int_{t\in[i,j]} \mathbf{q}_{b_i b_t} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{b_t} \end{bmatrix} \delta t
\end{aligned}
\tag{30}
$$

重新整理下 PVQ 的积分公式，有：

$$
\begin{bmatrix} \mathbf{p}_{wb_j} \\ \mathbf{v}_j^w \\ \mathbf{q}_{wb_j} \\ \mathbf{b}_j^a \\ \mathbf{b}_j^g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{wb_i} + \mathbf{v}_i^w \Delta t - \frac{1}{2}\mathbf{g}^w \Delta t^2 + \mathbf{q}_{wb_i} \boldsymbol{\alpha}_{b_i b_j} \\ \mathbf{v}_i^w - \mathbf{g}^w \Delta t + \mathbf{q}_{wb_i} \boldsymbol{\beta}_{b_i b_j} \\ \mathbf{q}_{wb_i} \mathbf{q}_{b_i b_j} \\ \mathbf{b}_i^a \\ \mathbf{b}_i^g \end{bmatrix}
\tag{31}
$$

# IMU 的预积分误差

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

## 预积分误差

**定义**：一段时间内 IMU 构建的预积分量作为测量值，对两时刻之间的状态量进行约束，

为啥这里有个2？

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_p \\ \mathbf{r}_q \\ \mathbf{r}_v \\ \mathbf{r}_{ba} \\ \mathbf{r}_{bg} \end{bmatrix}_{15\times 1} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{b_i w}(\mathbf{p}_{wb_j} - \mathbf{p}_{wb_i} - \mathbf{v}_i^w \Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{g}^w \Delta t^2) - \boldsymbol{\alpha}_{b_i b_j} \\ 2[\mathbf{q}_{b_j b_i} \otimes (\mathbf{q}_{b_i w} \otimes \mathbf{q}_{wb_j})]_{xyz} \\ \mathbf{q}_{b_i w}(\mathbf{v}_j^w - \mathbf{v}_i^w + \mathbf{g}^w \Delta t) - \boldsymbol{\beta}_{b_i b_j} \\ \mathbf{b}_j^a - \mathbf{b}_i^a \\ \mathbf{b}_j^g - \mathbf{b}_i^g \end{bmatrix} \tag{32}$$

上面误差中位移，速度，偏置都是直接相减得到。第二项是关于四元数的旋转误差，其中 $[\cdot]_{xyz}$ 表示只取四元数的虚部 $(x, y, z)$ 组成的三维向量。

# 预积分的离散形式

这里使用 mid-point 方法，即两个相邻时刻 k 到 k+1 的位姿是用两个时刻的测量值 $\mathbf{a}, \boldsymbol{\omega}$ 的平均值来计算：

k到k+1时刻的bias是一样的，短时间内认为不变

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega} &= \frac{1}{2}((\boldsymbol{\omega}^{b_k} - \mathbf{b}_k^g) + (\boldsymbol{\omega}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}_k^g)) \\
\boxed{\mathbf{q}_{b_i b_{k+1}} = \mathbf{q}_{b_i b_k} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\delta t \end{bmatrix}} \\
\mathbf{a} &= \frac{1}{2}(\mathbf{q}_{b_i b_k}(\mathbf{a}^{b_k} - \mathbf{b}_k^a) + \mathbf{q}_{b_i b_{k+1}}(\mathbf{a}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}_k^a)) \\
\boldsymbol{\alpha}_{b_i b_{k+1}} &= \boldsymbol{\alpha}_{b_i b_k} + \boldsymbol{\beta}_{b_i b_k}\delta t + \frac{1}{2}\mathbf{a}\delta t^2 \\
\boldsymbol{\beta}_{b_i b_{k+1}} &= \boldsymbol{\beta}_{b_i b_k} + \mathbf{a}\delta t \\
\mathbf{b}_{k+1}^a &= \mathbf{b}_k^a + \mathbf{n}_{\mathbf{b}_k^a}\delta t \\
\mathbf{b}_{k+1}^g &= \mathbf{b}_k^g + \mathbf{n}_{\mathbf{b}_k^g}\delta t
\end{aligned} \tag{33}$$

# 预积分量的方差

## 疑问

一个 IMU 数据作为测量值的噪声方差我们能够标定。现在，一段时间内多个 IMU 数据积分形成的预积分量的方差呢？

## Covariance Propagation

已知一个变量 $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathcal{N}(0, \mathbf{\Sigma}_x)$，则有 $\mathbf{\Sigma}_y = A\mathbf{\Sigma}_x A^\top$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{\Sigma}_y &= E((\mathbf{A}\mathbf{x})(\mathbf{A}\mathbf{x})^\top) \\
&= E(\mathbf{A}\mathbf{x}\mathbf{x}^\top\mathbf{A}^\top) \\
&= A\mathbf{\Sigma}_x A^\top
\end{aligned}
$$

所以，要推导预积分量的协方差，我们需要知道 imu 噪声和预积分量之间的线性递推关系。

假设已知了相邻时刻误差的线性传递方程:

$$\boldsymbol{\eta}_{ik} = \mathbf{F}_{k-1}\boldsymbol{\eta}_{ik-1} + \mathbf{G}_{k-1}\mathbf{n}_{k-1} \tag{34}$$

比如：状态量误差为 $\boldsymbol{\eta}_{ik} = [\delta\boldsymbol{\theta}_{ik}, \delta\mathbf{v}_{ik}, \delta\mathbf{p}_{ik}]$，测量噪声为 $\mathbf{n}_k = [\mathbf{n}_k^g, \mathbf{n}_k^a]$。

误差的传递由两部分组成：当前时刻的误差传递给下一时刻，当前时刻测量噪声传递给下一时刻。

## 一个有趣的例子

综艺节目中常有传递信息的节目，前一个人根据上一个人的信息 + 自己的理解（测量）传递给下一个人，导致这个信息越传越错。

协方差矩阵可以通过递推计算得到:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{ik} = \mathbf{F}_{k-1}\boldsymbol{\Sigma}_{ik-1}\mathbf{F}_{k-1}^\top + \mathbf{G}_{k-1}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{n}}\mathbf{G}_{k-1}^\top \tag{35}$$

其中，$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{n}}$ 是测量噪声的协方差矩阵，方差从 i 时刻开始进行递推，$\boldsymbol{\Sigma}_{ii} = \mathbf{0}$。

# 状态误差线性递推公式的推导

## 简介

通常对于状态量之间的递推关系是非线性的方程如 $\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})$，其中状态量为 $\mathbf{x}$，$\mathbf{u}$ 为系统的输入量。

我们可以用两种方法来推导状态误差传递的线性递推关系：

- 一种是基于一阶泰勒展开的误差递推方程。
- 一种是基于误差随时间变化的递推方程。

# 基于一阶泰勒展开的误差递推方程

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

令状态量为 $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}} + \delta\mathbf{x}$，其中，真值为 $\hat{\mathbf{x}}$，误差为 $\delta\mathbf{x}$。另外，输入量 $\mathbf{u}$ 的噪声为 $\mathbf{n}$。

## 基于泰勒展开的误差传递（应用于 EKF 的协方差预测）

非线性系统 $\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})$ 的状态误差的线性递推关系如下：

$$\delta\mathbf{x}_k = \mathbf{F}\delta\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}\mathbf{n}_{k-1} \tag{36}$$

其中，$\mathbf{F}$ 是状态量 $\mathbf{x}_k$ 对状态量 $\mathbf{x}_{k-1}$ 的雅克比矩阵，$\mathbf{G}$ 是状态量 $\mathbf{x}_k$ 对输入量 $\mathbf{u}_{k-1}$ 的雅克比矩阵。

证明：对非线性状态方程进行一阶泰勒展开有：

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_k &= f(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) \\
\hat{\mathbf{x}}_k + \delta\mathbf{x}_k &= f(\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \delta\mathbf{x}_{k-1}, \hat{\mathbf{u}}_{k-1} + \mathbf{n}_{k-1}) \\
\underline{\hat{\mathbf{x}}_k} + \delta\mathbf{x}_k &= \underline{f(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \hat{\mathbf{u}}_{k-1})} + \mathbf{F}\delta\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}\mathbf{n}_{k-1}
\end{aligned} \tag{37}$$

蓝色部分是真值，等号两边可以抵消，即可得式(36)

2

# 基于误差随时间变化的递推方程

## 基于误差随时间变化的递推方程

如果我们能够推导状态误差随时间变化的导数关系，比如：

$$\dot{\delta \mathbf{x}} = \mathbf{A}\delta\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{n} \tag{38}$$

则误差状态的传递方程为：

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{x}_k &= \delta\mathbf{x}_{k-1} + \dot{\delta\mathbf{x}}_{k-1}\Delta t \\ \rightarrow \delta\mathbf{x}_k &= (\mathbf{I} + \mathbf{A}\Delta t)\delta\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}\Delta t\mathbf{n}_{k-1} \end{aligned} \tag{39}$$

## 两方法对比

这两种推导方式的可以看出有：

$$\boxed{\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{A}\Delta t, \ \mathbf{G} = \mathbf{B}\Delta t} \tag{40}$$

# 基于误差随时间变化的递推方程

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

**第一种方法不是很好么，为什么会想着去弄误差随时间的变化呢？**

这是因为 VIO 系统中已经知道了状态的导数和状态之间的转移矩阵。如：我们已经知道速度和状态量之间的关系：

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{R}\mathbf{a}^b + \mathbf{g} \tag{41}$$

那我们就可以推导速度的误差和状态误差之间的关系，~~再~~在每一项上都加上各自的误差就有：

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{v}} + \dot{\delta \mathbf{v}} &= \mathbf{R}\left(\mathbf{I} + [\delta\boldsymbol{\theta}]_\times\right)\left(\mathbf{a}^b + \delta\mathbf{a}^b\right) + \mathbf{g} + \delta\mathbf{g} \\
\dot{\delta \mathbf{v}} &= \mathbf{R}\delta\mathbf{a}^b + \mathbf{R}[\delta\boldsymbol{\theta}]_\times\left(\mathbf{a}^b + \delta\mathbf{a}^b\right) + \delta\mathbf{g} \\
\dot{\delta \mathbf{v}} &= \mathbf{R}\delta\mathbf{a}^\mathbf{b} - \mathbf{R}\left[\mathbf{a}^b\right]_\times \delta\boldsymbol{\theta} + \delta\mathbf{g}
\end{aligned} \tag{42}$$

忽略了R[δθ]×δa^b的小量

由此就能以此类推，轻易写出整个 A 和 B 其他方程了。

# 预积分的误差递推公式推导

这里考虑了噪声，和式(33)不一样

首先回顾预积分的误差递推公式，将测量噪声也考虑进模型：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega} &= \frac{1}{2}((\boldsymbol{\omega}^{b_k}+\mathbf{n}^g_k - \mathbf{b}^g_k) + (\boldsymbol{\omega}^{b_{k+1}}+\mathbf{n}^g_{k+1} - \mathbf{b}^g_k)) \\
\mathbf{q}_{b_i b_{k+1}} &= \mathbf{q}_{b_i b_k} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\delta t \end{bmatrix} \\
\mathbf{a} &= \frac{1}{2}(\mathbf{q}_{b_i b_k}(\mathbf{a}^{b_k}+\mathbf{n}^a_k - \mathbf{b}^a_k) + \mathbf{q}_{b_i b_{k+1}}(\mathbf{a}^{b_{k+1}}+\mathbf{n}^a_{k+1} - \mathbf{b}^a_k)) \\
\boldsymbol{\alpha}_{b_i b_{k+1}} &= \boldsymbol{\alpha}_{b_i b_k} + \boldsymbol{\beta}_{b_i b_k}\delta t + \frac{1}{2}\mathbf{a}\delta t^2 \\
\boldsymbol{\beta}_{b_i b_{k+1}} &= \boldsymbol{\beta}_{b_i b_k} + \mathbf{a}\delta t \\
\mathbf{b}^a_{k+1} &= \mathbf{b}^a_k + \mathbf{n}_{\mathbf{b}^a_k}\delta t \\
\mathbf{b}^g_{k+1} &= \mathbf{b}^g_k + \mathbf{n}_{\mathbf{b}^g_k}\delta t
\end{aligned}$$

确定误差传递的状态量，噪声量，然后开始构建传递方程。

## 预积分误差传递的形式

用前面一阶泰勒展开的推导方式，我们希望能推导出如下的形式：

δ x_k+1 = F δ x_k + Gn_k

位子
角度
速度
acc误差
gry误差

$$\begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{\alpha}_{b_{k+1}b'_{k+1}} \\ \delta\boldsymbol{\theta}_{b_{k+1}b'_{k+1}} \\ \delta\boldsymbol{\beta}_{b_{k+1}b'_{k+1}} \\ \delta\mathbf{b}^a_{k+1} \\ \delta\mathbf{b}^g_{k+1} \end{bmatrix} = \mathbf{F} \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{\alpha}_{b_k b'_k} \\ \delta\boldsymbol{\theta}_{b_k b'_k} \\ \delta\boldsymbol{\beta}_{b_k b'_k} \\ \delta\mathbf{b}^a_k \\ \delta\mathbf{b}^g_k \end{bmatrix} + \mathbf{G} \begin{bmatrix} \mathbf{n}^a_k \\ \mathbf{n}^g_k \\ \mathbf{n}^a_{k+1} \\ \mathbf{n}^g_{k+1} \\ \mathbf{n}_{\mathbf{b}^a_k} \\ \mathbf{n}_{\mathbf{b}^g_k} \end{bmatrix} \tag{43}$$

$\mathbf{F}, \mathbf{G}$ 为两个时刻间的协方差传递矩阵。

这里我们直接给出 $\mathbf{F}, \mathbf{G}$ 的最终形式，后面会对部分项进行详细推导：

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{f}_{12} & \mathbf{I}\delta t & -\frac{1}{4}(\mathbf{q}_{b_i b_k} + \mathbf{q}_{b_i b_{k+1}})\delta t^2 & \mathbf{f}_{15} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} - [\boldsymbol{\omega}]_\times & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I}\delta t \\ \mathbf{0} & \mathbf{f}_{32} & \mathbf{I} & -\frac{1}{2}(\mathbf{q}_{b_i b_k} + \mathbf{q}_{b_i b_{k+1}})\delta t & \mathbf{f}_{35} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \tag{44}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\mathbf{q}_{b_i b_k}\delta t^2 & \mathbf{g}_{12} & \frac{1}{4}\mathbf{q}_{b_i b_{k+1}}\delta t^2 & \mathbf{g}_{14} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{2}\mathbf{I}\delta t & \mathbf{0} & \frac{1}{2}\mathbf{I}\delta t & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{1}{2}\mathbf{q}_{b_i b_k}\delta t & \mathbf{g}_{32} & \frac{1}{2}\mathbf{q}_{b_i b_{k+1}}\delta t & \mathbf{g}_{34} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}\delta t & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}\delta t \end{bmatrix} \tag{45}$$

其中的系数为:

$$\mathbf{f}_{12} = \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}_{b_i b_{k+1}}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_k b'_k}} = -\frac{1}{4}(\mathbf{R}_{b_i b_k}[\mathbf{a}^{b_k} - \mathbf{b}^a_k]_\times \delta t^2 + \mathbf{R}_{b_i b_{k+1}}[(\mathbf{a}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}^a_k)]_\times (\mathbf{I} - [\boldsymbol{\omega}]_\times \delta t)\delta t^2)$$
$$\mathbf{f}_{32} = \frac{\partial \boldsymbol{\beta}_{b_i b_{k+1}}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_k b'_k}} = -\frac{1}{2}(\mathbf{R}_{b_i b_k}[\mathbf{a}^{b_k} - \mathbf{b}^a_k]_\times \delta t + \mathbf{R}_{b_i b_{k+1}}[(\mathbf{a}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}^a_k)]_\times (\mathbf{I} - [\boldsymbol{\omega}]_\times \delta t)\delta t)$$
$$\mathbf{f}_{15} = \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}_{b_i b_{k+1}}}{\partial \delta \mathbf{b}^g_k} = -\frac{1}{4}(\mathbf{R}_{b_i b_{k+1}}[(\mathbf{a}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}^a_k)]_\times \delta t^2)(-\delta t)$$
$$\mathbf{f}_{35} = \frac{\partial \boldsymbol{\beta}_{b_i b_{k+1}}}{\partial \delta \mathbf{b}^g_k} = -\frac{1}{2}(\mathbf{R}_{b_i b_{k+1}}[(\mathbf{a}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}^a_k)]_\times \delta t)(-\delta t)$$
$$\mathbf{g}_{12} = \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}_{b_i b_{k+1}}}{\partial \mathbf{n}^g_k} = \mathbf{g}_{14} = \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}_{b_i b_{k+1}}}{\partial \mathbf{n}^g_{k+1}} = -\frac{1}{4}(\mathbf{R}_{b_i b_{k+1}}[(\mathbf{a}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}^a_k)]_\times \delta t^2)(\frac{1}{2}\delta t)$$
$$\mathbf{g}_{32} = \frac{\partial \boldsymbol{\beta}_{b_i b_{k+1}}}{\partial \mathbf{n}^g_k} = \mathbf{g}_{34} = \frac{\partial \boldsymbol{\beta}_{b_i b_{k+1}}}{\partial \mathbf{n}^g_{k+1}} = -\frac{1}{2}(\mathbf{R}_{b_i b_{k+1}}[(\mathbf{a}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}^a_k)]_\times \delta t^2)(\frac{1}{2}\delta t) \tag{46}$$

# 雅克比矩阵 F, G 的推导

## 公式简化约定

考虑到公式的编辑篇幅，为了对一些求导公式进行简化，这里做一些简单的约定，比如求导公式：

$$\frac{\partial \mathbf{x}_a}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}} = \lim_{\delta\theta \to 0} \frac{\mathbf{R}_{ab} \exp([\delta \boldsymbol{\theta}]_\times) \mathbf{x}_b - \mathbf{R}_{ab} \mathbf{x}_b}{\delta \boldsymbol{\theta}}$$

后续直接简写为

$$\frac{\partial \mathbf{x}_a}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial \mathbf{R}_{ab} \exp([\delta \boldsymbol{\theta}]_\times) \mathbf{x}_b}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}}$$

# 雅克比矩阵 F 的推导

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

## $\beta$ 对各状态量的雅克比推导，即 F 第三行

速度预积分量 $\beta$ 的递推计算形式:

这里没有噪声项nk^a，是因为噪声值无法测量具体值，只知道它的方差。在实际计算中a^bk用测量值来代替

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}_{b_i b_{k+1}} &= \boldsymbol{\beta}_{b_i b_k} + \mathbf{a}\delta t \\ \text{a中值积分} &= \boldsymbol{\beta}_{b_i b_k} + \frac{1}{2}(\mathbf{q}_{b_i b_k}(\mathbf{a}^{b_k} - \mathbf{b}_k^a) + \boxed{\mathbf{q}_{b_i b_{k+1}}}(\mathbf{a}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}_k^a))\delta t\end{aligned} \tag{47}$$

## $\mathbf{f}_{33}$: 对上一时刻速度预积分量的 Jacobian

$$\mathbf{f}_{33} = \frac{\partial \boldsymbol{\beta}_{b_i b_{k+1}}}{\partial \delta \boldsymbol{\beta}_{b_k b_k'}} = \mathbf{I}_{3\times 3} \tag{48}$$

J=x1_k+1至x3_k+1分对x1_k至x3_k的导数，故是3x3单位矩阵

## $\mathbf{f}_{32}$: 对角度预积分量的 Jacobian

首先将公式(47)写成如下形式:

$$\boldsymbol{\beta}_{b_i b_{k+1}} = \boldsymbol{\beta}_{b_i b_k} + \frac{1}{2}(\mathbf{q}_{b_i b_k}(\mathbf{a}^{b_k} - \mathbf{b}_k^a) + \boxed{\mathbf{q}_{b_i b_k} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\delta t \end{bmatrix}}(\mathbf{a}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}_k^a))\delta t \tag{49}$$

# $\mathbf{f}_{32}$: 对角度预积分量的 Jacobian

那么，速度的预积分量对角度预积分量的 Jacobian：

$$\frac{\partial \boldsymbol{\beta}_{b_i b_{k+1}}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_k b_k'}} = \frac{\partial \mathbf{a} \delta t}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_k b_k'}} \tag{50}$$

其中，分子可写成：

加上微小扰动

$$\begin{aligned}
\partial \mathbf{a} \delta t =& \frac{1}{2} \mathbf{q}_{b_i b_k} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \delta \boldsymbol{\theta}_{b_k b_k'} \end{bmatrix} \left( \mathbf{a}^{b_k} - \mathbf{b}_k^a \right) \delta t \\
&+ \frac{1}{2} \mathbf{q}_{b_i b_k} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \delta \boldsymbol{\theta}_{b_k b_k'} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \delta t \end{bmatrix} \left( \mathbf{a}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}_k^a \right) \delta t \\
=& \underbrace{\frac{1}{2} \mathbf{R}_{b_i b_k} \exp\left( [\delta \boldsymbol{\theta}_{b_k b_k'}]_\times \right) (\mathbf{a}^{b_k} - \mathbf{b}_k^a) \delta t}_{Part\ 1} \\
&+ \underbrace{\frac{1}{2} \mathbf{R}_{b_i b_k} \exp\left( [\delta \boldsymbol{\theta}_{b_k b_k'}]_\times \right) \exp\left( [\boldsymbol{\omega} \delta t]_\times \right) (\mathbf{a}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}_k^a) \delta t}_{Part\ 2}
\end{aligned} \tag{51}$$

# $\mathbf{f}_{32}$: 对角度预积分量的 Jacobian

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

$Part\ 1$ 对应的的雅克比为:

$$\frac{\partial \mathbf{R}_{b_i b_k} \exp\left([\delta \boldsymbol{\theta}_{b_k b_k'}]_\times\right)(\mathbf{a}^{b_k} - \mathbf{b}_k^a)\delta t}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_k b_k'}} \boxed{\text{一阶泰勒展开}} = \frac{\partial \mathbf{R}_{b_i b_k}\left(\mathbf{I} + [\delta \boldsymbol{\theta}_{b_k b_k'}]_\times\right)(\mathbf{a}^{b_k} - \mathbf{b}_k^a)\delta t}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_k b_k'}}$$

$$\boxed{\text{去掉无关项}} = \frac{\partial - \mathbf{R}_{b_i b_k}[(\mathbf{a}^{b_k} - \mathbf{b}_k^a)\delta t]_\times \delta \boldsymbol{\theta}_{b_k b_k'}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_k b_k'}}$$

$$\boxed{\text{约去}\delta\ \theta} = -\mathbf{R}_{b_i b_k}[(\mathbf{a}^{b_k} - \mathbf{b}_k^a)\delta t]_\times \tag{52}$$

$Part\ 2$ **对应的的雅克比为:**

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial \mathbf{R}_{b_i b_k} \exp\left([\delta\boldsymbol{\theta}_{b_k b'_k}]_\times\right) \exp\left([\boldsymbol{\omega}\delta t]_\times\right)(\mathbf{a}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}^a_k)\delta t}{\partial \delta\boldsymbol{\theta}_{b_k b'_k}} \\
& \boxed{\text{泰勒展开}} \\
&= \frac{\partial \mathbf{R}_{b_i b_k} (\mathbf{I} + [\delta\boldsymbol{\theta}_{b_k b'_k}]_\times) \exp\left([\boldsymbol{\omega}\delta t]_\times\right)(\mathbf{a}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}^a_k))\delta t}{\partial \delta\boldsymbol{\theta}_{b_k b'_k}} \\
& \boxed{\text{去无关项并交换位置}} \\
&= -\frac{\partial \mathbf{R}_{b_i b_k} [\exp\left([\boldsymbol{\omega}\delta t]_\times\right)(\mathbf{a}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}^a_k)\delta t]_\times \delta\boldsymbol{\theta}_{b_k b'_k}}{\partial \delta\boldsymbol{\theta}_{b_k b'_k}} \\
& \boxed{\text{伴随性质}} \\
&= -\frac{\partial \mathbf{R}_{b_i b_k} \exp\left([\boldsymbol{\omega}\delta t]_\times\right)[(\mathbf{a}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}^a_k)\delta t]_\times \exp\left([-\boldsymbol{\omega}\delta t]_\times\right)\delta\boldsymbol{\theta}_{b_k b'_k}}{\partial \delta\boldsymbol{\theta}_{b_k b'_k}} \\
&= -\mathbf{R}_{b_i b_{k+1}} [(\mathbf{a}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}^a_k)\delta t]_\times \exp\left([-\boldsymbol{\omega}\delta t]_\times\right) \\
&\approx -\mathbf{R}_{b_i b_{k+1}} [(\mathbf{a}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}^a_k)\delta t]_\times (\mathbf{I} - [\boldsymbol{\omega}\delta t]_\times) \qquad \boxed{\text{泰勒展开}}
\end{aligned}
\tag{53}
$$

**将上面两部分综合起来就能得到**

$$
\mathbf{f}_{32} = \frac{\partial \boldsymbol{\beta}_{b_i b_{k+1}}}{\partial \delta\boldsymbol{\theta}_{b_k b'_k}} = -\frac{1}{2}(\mathbf{R}_{b_i b_k}[\mathbf{a}^{b_k} - \mathbf{b}^a_k]_\times \delta t + \mathbf{R}_{b_i b_{k+1}}[(\mathbf{a}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}^a_k)]_\times (\mathbf{I} - [\boldsymbol{\omega}]_\times \delta t)\delta t)
$$

## $f_{35}$: 速度预积分量对 k 时刻角速度 bias 的 Jacobian

递推公式如下：

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}((\boldsymbol{\omega}^{b_k} - \mathbf{b}_k^g) + (\boldsymbol{\omega}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}_k^g)) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}^{b_k} + \boldsymbol{\omega}^{b_{k+1}}) - \mathbf{b}_k^g$$

$$\boldsymbol{\beta}_{b_i b_{k+1}} = \boldsymbol{\beta}_{b_i b_k} + \frac{1}{2}(\mathbf{q}_{b_i b_k}(\mathbf{a}^{b_k} - \mathbf{b}_k^a) + \underbrace{\mathbf{q}_{b_i b_k} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\delta t \end{bmatrix} (\mathbf{a}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}_k^a))\delta t}$$

只有红色公式部分和角速度 bias 有关系，因此雅克比的推导只考虑红色公式部分。

$$
\begin{aligned}
\mathbf{f}_{35} = \frac{\partial \boldsymbol{\beta}_{b_i b_{k+1}}}{\partial \delta \mathbf{b}_k^g} &= \frac{\partial \frac{1}{2}\mathbf{q}_{b_i b_k} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\delta t \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2}\delta \mathbf{b}_k^g \delta t \end{bmatrix} (\mathbf{a}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}_k^a)\delta t}{\partial \delta \mathbf{b}_k^g} \\
\boxed{\text{转成矩阵}} &= \frac{1}{2}\frac{\partial \mathbf{R}_{b_i b_{k+1}} \exp\left([-\delta \mathbf{b}_k^g \delta t]_\times\right)(\mathbf{a}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}_k^a)\delta t}{\partial \delta \mathbf{b}_k^g} \\
\boxed{\text{泰勒展开}} &= \frac{1}{2}\frac{\partial \mathbf{R}_{b_i b_{k+1}} (\mathbf{I} + [-\delta \mathbf{b}_k^g \delta t]_\times)(\mathbf{a}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}_k^a)\delta t}{\partial \delta \mathbf{b}_k^g} \\
\boxed{\text{去无关项}} &= \frac{1}{2}\frac{\partial - \mathbf{R}_{b_i b_{k+1}} ([(\mathbf{a}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}_k^a)\delta t]_\times)(-\delta \mathbf{b}_k^g \delta t)}{\partial \delta \mathbf{b}_k^g} \\
&= -\frac{1}{2}(\mathbf{R}_{b_i b_{k+1}} [(\mathbf{a}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}_k^a)]_\times \delta t)(-\delta t)
\end{aligned}
\tag{54}
$$

不约掉是为了保持和VINS代码一致

# 旋转预积分量的 Jacobian，即 F 第二行

旋转预积分的递推公式为：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega} &= \frac{1}{2}((\boldsymbol{\omega}^{b_k} - \mathbf{b}_k^g) + (\boldsymbol{\omega}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}_k^g)) \\
\mathbf{q}_{b_i b_{k+1}} &= \mathbf{q}_{b_i b_k} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\delta t \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{q}_{b_i b_k} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}^{b_k} + \boldsymbol{\omega}^{b_{k+1}}) - \mathbf{b}_k^g)\delta t \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{55}
$$

## $\mathbf{f}_{22}$: 前一时刻的旋转误差 $\delta\boldsymbol{\theta}_{b_k b'_k}$ 如何影响当前旋转误差 $\delta\boldsymbol{\theta}_{b_{k+1} b'_{k+1}}$

假设两个时刻的真值为 $\mathbf{q}_{b_i b_{k+1}}, \mathbf{q}_{b_i b_k}$，两个时刻间的增量真值为 $\mathbf{q}_{b_k b_{k+1}}$。推导过程只考虑一个变量，即旋转误差 $\delta\boldsymbol{\theta}_{b_k b'_k}$ 的影响，而不考虑测量值角速度 bias 误差影响。可以假设 $\mathbf{q}_{b_k b_{k+1}} \approx \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\delta t \end{bmatrix}$。

另外，三元组四元数相乘有如下性质：

$$\mathbf{q} \otimes \mathbf{p} \otimes \mathbf{q}^* = [\mathbf{q}]_L [\mathbf{q}]_R^\top \mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_w \\ \mathbf{R}\mathbf{p}_v \end{bmatrix} \tag{56}$$

其中 $\mathbf{R}$ 是和 $\mathbf{q}$ 对应的旋转矩阵，$p_w$ 为 $\mathbf{p}$ 的实部，$\mathbf{p}_v$ 为 $\mathbf{p}$ 的虚部。

下面开始详细推导:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{q}_{b_i b_{k+1}} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\delta\boldsymbol{\theta}_{b_{k+1}b'_{k+1}} \end{bmatrix} &= \mathbf{q}_{b_i b_k} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\delta\boldsymbol{\theta}_{b_k b'_k} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\delta t \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\delta\boldsymbol{\theta}_{b_{k+1}b'_{k+1}} \end{bmatrix} &= \mathbf{q}^{*}_{b_i b_{k+1}} \otimes \mathbf{q}_{b_i b_k} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\delta\boldsymbol{\theta}_{b_k b'_k} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\delta t \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{q}_{b_{k+1} b_k} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\delta\boldsymbol{\theta}_{b_k b'_k} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\delta t \end{bmatrix} \\
&\approx \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\delta t \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\delta\boldsymbol{\theta}_{b_k b'_k} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\delta t \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\mathbf{R}\delta\boldsymbol{\theta}_{b_k b'_k} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{57}
$$

**注意: 上面推导过程，也可以用李代数的右扰动 $\mathbf{R}\exp([\delta\boldsymbol{\theta}_{k+1}]_\times)$**

# 雅克比 $\mathbf{f}_{22}$ 的推导

只考虑公式(57) 中的虚部：

$$\begin{aligned} \delta\boldsymbol{\theta}_{b_{k+1}b'_{k+1}} &= \mathbf{R}\delta\boldsymbol{\theta}_{b_k b'_k} \\ &= \exp([-\boldsymbol{\omega}\delta t]_\times)\delta\boldsymbol{\theta}_{b_k b'_k} \\ &\approx (\mathbf{I} - [\boldsymbol{\omega}\delta t]_\times)\delta\boldsymbol{\theta}_{b_k b'_k} \end{aligned} \tag{58}$$

那么，第 k+1 时刻的旋转预积分的误差相对于第 k 时刻的 Jacobian 为：

$$\mathbf{f}_{22} = \frac{\partial \delta\boldsymbol{\theta}_{b_{k+1}b'_{k+1}}}{\partial \delta\boldsymbol{\theta}_{b_k b'_k}} = \mathbf{I} - [\boldsymbol{\omega}\delta t]_\times \tag{59}$$

**渔已授完，$\mathbf{F}, \mathbf{G}$ 中的其他鱼靠大家去捞了…**

# Section 4

## 整个系统的残差 Jacobian 的推导

# 视觉重投影残差的 Jacobian

视觉残差为：

$$\mathbf{r}_c = \begin{bmatrix} \frac{x_{c_j}}{z_{c_j}} - u_{c_j} \\ \frac{y_{c_j}}{z_{c_j}} - v_{c_j} \end{bmatrix}$$

对于第 i 帧中的特征点，它投影到第 j 帧相机坐标系下的值为：

$$\begin{bmatrix} x_{c_j} \\ y_{c_j} \\ z_{c_j} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{bc}^{-1}\mathbf{T}_{wb_j}^{-1}\mathbf{T}_{wb_i}\mathbf{T}_{bc}\begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda}u_{c_i} \\ \frac{1}{\lambda}v_{c_i} \\ \frac{1}{\lambda} \\ 1 \end{bmatrix}$$

拆成三维坐标形式为：

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{c_j} = \begin{bmatrix} x_{c_j} \\ y_{c_j} \\ z_{c_j} \end{bmatrix} &= \mathbf{R}_{bc}^{\top}\mathbf{R}_{wb_j}^{\top}\mathbf{R}_{wb_i}\mathbf{R}_{bc}\frac{1}{\lambda}\begin{bmatrix} u_{c_i} \\ v_{c_i} \\ 1 \end{bmatrix} \\ &+ \mathbf{R}_{bc}^{\top}(\mathbf{R}_{wb_j}^{\top}((\mathbf{R}_{wb_i}\mathbf{p}_{bc} + \mathbf{p}_{wb_i}) - \mathbf{p}_{wb_j}) - \mathbf{p}_{bc}) \end{aligned} \tag{60}$$

再推导各类 Jacobian 之前，为了简化公式，先定义如下变量：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{f}_{b_i} &= \mathbf{R}_{bc}\mathbf{f}_{c_i} + \mathbf{p}_{bc} \\
\mathbf{f}_{w} &= \mathbf{R}_{wb_i}\mathbf{f}_{b_i} + \mathbf{p}_{wb_i} \\
\mathbf{f}_{b_j} &= \mathbf{R}_{wb_j}^{\top}(\mathbf{f}_{w} - \mathbf{p}_{bc})
\end{aligned}
\tag{61}
$$

?

Jacobian 为视觉误差对两个时刻的状态量，外参，以及逆深度求导：

$$
\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}_c}{\partial \begin{bmatrix} \delta \mathbf{p}_{b_i b_i'} \\ \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b_i'} \end{bmatrix}} & \frac{\partial \mathbf{r}_c}{\partial \begin{bmatrix} \delta \mathbf{p}_{b_j b_j'} \\ \delta \boldsymbol{\theta}_{b_j b_j'} \end{bmatrix}} & \frac{\partial \mathbf{r}_c}{\partial \begin{bmatrix} \delta \mathbf{p}_{cc'} \\ \delta \boldsymbol{\theta}_{cc'} \end{bmatrix}} & \frac{\partial \mathbf{r}_c}{\partial \delta \lambda} \end{bmatrix}
\tag{62}
$$

根据链式法则，Jacobian 的计算可以分两步走，第一步误差对 $\mathbf{f}_{c_j}$ 求导：

$$\frac{\partial \mathbf{r}_c}{\partial \mathbf{f}_{c_j}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{z_{c_j}} & 0 & -\frac{x_{c_j}}{z_{c_j}^2} \\ 0 & \frac{1}{z_{c_j}} & -\frac{y_{c_j}}{z_{c_j}^2} \end{bmatrix} \tag{63}$$

第二步 $\mathbf{f}_{c_j}$ 对各状态量求导：

**1. 对 i 时刻的状态量求导**

a. 对 i 时刻位移求导，可直接写出如下：

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{c_j}}{\partial \delta \mathbf{p}_{b_i b_i'}} = \mathbf{R}_{bc}^\top \mathbf{R}_{wb_j}^\top \tag{64}$$

b. 对 i 时刻角度增量求导

$$\mathbf{f}_{c_j} = \mathbf{R}_{bc}^\top \mathbf{R}_{wb_j}^\top \mathbf{R}_{wb_i} \mathbf{R}_{bc} \mathbf{f}_{c_i} + \mathbf{R}_{bc}^\top (\mathbf{R}_{wb_j}^\top ((\mathbf{R}_{wb_i} \mathbf{p}_{bc} + \mathbf{p}_{wb_i}) - \mathbf{p}_{wb_j}) - \mathbf{p}_{bc}) \tag{65}$$

上面公式和 $i$ 时刻角度相关的量并不多，下面为了简化，直接丢弃了不相关的部分

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_{c_j} &= \mathbf{R}_{bc}^{\top}\mathbf{R}_{wb_j}^{\top}\mathbf{R}_{wb_i}\mathbf{R}_{bc}\mathbf{f}_{c_i} + \mathbf{R}_{bc}^{\top}\mathbf{R}_{wb_j}^{\top}\mathbf{R}_{wb_i}\mathbf{p}_{bc} + (\ldots) \\ &= \mathbf{R}_{bc}^{\top}\mathbf{R}_{wb_j}^{\top}\mathbf{R}_{wb_i}(\mathbf{R}_{bc}\mathbf{f}_{c_i} + \mathbf{p}_{bc}) + (\ldots) \\ &= \mathbf{R}_{bc}^{\top}\mathbf{R}_{wb_j}^{\top}\mathbf{R}_{wb_i}\mathbf{f}_{b_i} + (\ldots)\end{aligned} \tag{66}$$

Jacobian 为

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{f}_{c_j}}{\partial \delta\boldsymbol{\theta}_{b_i b_i'}} &= \frac{\partial \mathbf{R}_{bc}^{\top}\mathbf{R}_{wb_j}^{\top}\mathbf{R}_{wb_i}(\mathbf{I} + [\delta\boldsymbol{\theta}_{b_i b_i'}]_{\times})\mathbf{f}_{b_i}}{\partial \delta\boldsymbol{\theta}_{b_i b_i'}} \\ &= -\mathbf{R}_{bc}^{\top}\mathbf{R}_{wb_j}^{\top}\mathbf{R}_{wb_i}[\mathbf{f}_{b_i}]_{\times}\end{aligned} \tag{67}$$

## 2. 对 $j$ 时刻的状态量求导

a. 对位移求导：

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{c_j}}{\partial \delta \mathbf{p}_{b_j b_j'}} = -\mathbf{R}_{bc}^\top \mathbf{R}_{wb_j}^\top \tag{68}$$

b. 对角度增量求导，同上面的操作，也简化一下公式

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_{c_j} &= \mathbf{R}_{bc}^\top \mathbf{R}_{wb_j}^\top \mathbf{R}_{wb_i} \mathbf{R}_{bc} \mathbf{f}_{c_i} + \mathbf{R}_{bc}^\top (\mathbf{R}_{wb_j}^\top ((\mathbf{R}_{wb_i} \mathbf{p}_{bc} + \mathbf{p}_{wb_i}) - \mathbf{p}_{wb_j}) - \mathbf{p}_{bc}) \\
&= \mathbf{R}_{bc}^\top \mathbf{R}_{wb_j}^\top (\mathbf{R}_{wb_i} (\mathbf{R}_{bc} \mathbf{f}_{c_i} + \mathbf{p}_{bc}) + \mathbf{p}_{wb_i} - \mathbf{p}_{wb_j}) + (\ldots) \\
&= \mathbf{R}_{bc}^\top \mathbf{R}_{wb_j}^\top (\mathbf{f}_w - \mathbf{p}_{wb_j}) + (\ldots)
\end{aligned} \tag{69}$$

Jacobian 为 $\boxed{\text{右乘exp(),利用伴随性质}}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{f}_{c_j}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_j b_j'}} &= \frac{\partial \mathbf{R}_{bc}^\top (\mathbf{I} - [\delta \boldsymbol{\theta}_{b_j b_j'}]_\times) \mathbf{R}_{wb_j}^\top (\mathbf{f}_w - \mathbf{p}_{wb_j})}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_j b_j'}} \\
&= \frac{\partial \mathbf{R}_{bc}^\top (\mathbf{I} - [\delta \boldsymbol{\theta}_{b_j b_j'}]_\times) \mathbf{f}_{b_j}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_j b_j'}} \\
&= \mathbf{R}_{bc}^\top [\mathbf{f}_{b_j}]_\times
\end{aligned} \tag{70}$$

## 3. 对 imu 和相机之间的外参求导

a. 对位移求导

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{c_j}}{\partial \delta \mathbf{p}_{cc'}} = \mathbf{R}_{bc}^{\top}(\mathbf{R}_{wb_j}^{\top}\mathbf{R}_{wb_i} - \mathbf{I}_{3\times 3}) \tag{71}$$

b. 对角度增量求导，由于 $\mathbf{f}_{c_j}$ 都和 $\mathbf{R}_{bc}$ 有关，并且比较复杂，所以这次分两部分求导

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_{c_j} &= \mathbf{R}_{bc}^{\top}\mathbf{R}_{wb_j}^{\top}\mathbf{R}_{wb_i}\mathbf{R}_{bc}\mathbf{f}_{c_i} + \mathbf{R}_{bc}^{\top}(\mathbf{R}_{wb_j}^{\top}((\mathbf{R}_{wb_i}\mathbf{p}_{bc} + \mathbf{p}_{wb_i}) - \mathbf{p}_{wb_j}) - \mathbf{p}_{bc}) \\ &= \mathbf{f}_{c_j}^{1} + \mathbf{f}_{c_j}^{2}\end{aligned} \tag{72}$$

第一部分 Jacobian 为

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{c_j}^{1}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{cc'}} = \frac{\partial (\mathbf{I} - [\delta \boldsymbol{\theta}_{cc'}]_{\times})\mathbf{R}_{bc}^{\top}\mathbf{R}_{wb_j}^{\top}\mathbf{R}_{wb_i}\mathbf{R}_{bc}(\mathbf{I} + [\delta \boldsymbol{\theta}_{cc'}]_{\times})\mathbf{f}_{c_i}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{cc'}} \tag{73}$$

分子可写成：

$$\begin{aligned}&\partial \mathbf{R}_{bc}^{\top}\mathbf{R}_{wb_j}^{\top}\mathbf{R}_{wb_i}\mathbf{R}_{bc}[\delta \boldsymbol{\theta}_{cc'}]_{\times}\mathbf{f}_{c_i} - [\delta \boldsymbol{\theta}_{cc'}]_{\times}\mathbf{R}_{bc}^{\top}\mathbf{R}_{wb_j}^{\top}\mathbf{R}_{wb_i}\mathbf{R}_{bc}\mathbf{f}_{c_i} \\ &+ o^2(\delta \boldsymbol{\theta}_{cc'}) + (\ldots)\end{aligned}$$

那么，第一部分的 Jacobian 为：

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{c_j}^1}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{cc'}} = -\mathbf{R}_{bc}^\top \mathbf{R}_{wb_j}^\top \mathbf{R}_{wb_i} \mathbf{R}_{bc} [\mathbf{f}_{c_i}]_\times + [\mathbf{R}_{bc}^\top \mathbf{R}_{wb_j}^\top \mathbf{R}_{wb_i} \mathbf{R}_{bc} \mathbf{f}_{c_i}]_\times \tag{74}$$

第二部分的 Jacobian 为：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}_{c_j}^2}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{cc'}} &= \frac{(\mathbf{I} - [\delta \boldsymbol{\theta}_{cc'}]_\times)\mathbf{R}_{bc}^\top (\mathbf{R}_{wb_j}^\top ((\mathbf{R}_{wb_i} \mathbf{p}_{bc} + \mathbf{p}_{wb_i}) - \mathbf{p}_{wb_j}) - \mathbf{p}_{bc})}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{cc'}} \\ &= [\mathbf{R}_{bc}^\top (\mathbf{R}_{wb_j}^\top ((\mathbf{R}_{wb_i} \mathbf{p}_{bc} + \mathbf{p}_{wb_i}) - \mathbf{p}_{wb_j}) - \mathbf{p}_{bc})]_\times \end{aligned} \tag{75}$$

两个 Jacobian 相加就是视觉误差对外参中的角度增量的最终结果。

3. 视觉误差对特征逆深度的求导

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{f}_{c_j}}{\partial \delta\lambda} &= \frac{\partial \mathbf{f}_{c_j}}{\partial \mathbf{f}_{c_i}} \frac{\partial \mathbf{f}_{c_i}}{\partial \delta\lambda} \\
&= \mathbf{R}_{bc}^{\top} \mathbf{R}_{wb_j}^{\top} \mathbf{R}_{wb_i} \mathbf{R}_{bc} \left(-\frac{1}{\lambda^2} \begin{bmatrix} u_{c_i} \\ v_{c_i} \\ 1 \end{bmatrix}\right) \\
&= -\frac{1}{\lambda} \mathbf{R}_{bc}^{\top} \mathbf{R}_{wb_j}^{\top} \mathbf{R}_{wb_i} \mathbf{R}_{bc} \mathbf{f}_{c_i}
\end{aligned}
\tag{76}
$$

# IMU 误差相对于优化变量的 Jacobian

在求解非线性方程时，需要知道误差 $\mathbf{e}_B$ 对两个关键帧 $i, j$ 的状态量 $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{v}, \mathbf{b}^a, \mathbf{b}^g$ 的 Jacobian。

$$\mathbf{e}_B(x_i, x_j) = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_p \\ \mathbf{r}_q \\ \mathbf{r}_v \\ \mathbf{r}_{ba} \\ \mathbf{r}_{bg} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{b_i w}(\mathbf{p}_{wb_j} - \mathbf{p}_{wb_i} - \mathbf{v}_i^w \Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{g}^w \Delta t^2) - \boldsymbol{\alpha}_{b_i b_j} \\ 2[\mathbf{q}_{b_j b_i} \otimes (\mathbf{q}_{b_i w} \otimes \mathbf{q}_{wb_j})]_{xyz} \\ \mathbf{q}_{b_i w}(\mathbf{v}_j^w - \mathbf{v}_i^w + \mathbf{g}^w \Delta t) - \boldsymbol{\beta}_{b_i b_j} \\ \mathbf{b}_j^a - \mathbf{b}_i^a \\ \mathbf{b}_j^g - \mathbf{b}_i^g \end{bmatrix}_{15\times 1}$$

对 $i, j$ 时刻的状态量 $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{v}$ 求导还是比较直观的，直接对误差公式进行计算就行。但是对 $i$ 时刻的 $\mathbf{b}_i^a, \mathbf{b}_i^g$ 求导就显得十分复杂，下面我们详细讨论。

因为 i 时刻的 bias 相关的预积分计算是通过迭代一步一步累计递推的，可以算但是太复杂。所以对于预积分量直接在 $i$ 时刻的 bias 附近用一阶泰勒展开来近似，而不用真的去迭代计算。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_{b_i b_j} &= \boldsymbol{\alpha}_{b_i b_j} + \mathbf{J}^{\alpha}_{b^a_i} \delta \mathbf{b}^a_i + \mathbf{J}^{\alpha}_{b^g_i} \delta \mathbf{b}^g_i \\ \boldsymbol{\beta}_{b_i b_j} &= \boldsymbol{\beta}_{b_i b_j} + \mathbf{J}^{\beta}_{b^a_i} \delta \mathbf{b}^a_i + \mathbf{J}^{\beta}_{b^g_i} \delta \mathbf{b}^g_i \\ \mathbf{q}_{b_i b_j} &= \mathbf{q}_{b_i b_j} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \mathbf{J}^{q}_{b^g_i} \delta \mathbf{b}^g_i \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{77}$$

其中 $\mathbf{J}^{\alpha}_{b^a_i} = \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}_{b_i b_j}}{\partial \delta \mathbf{b}^a_i}, \mathbf{J}^{\alpha}_{b^g_i} = \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}_{b_i b_j}}{\partial \delta \mathbf{b}^g_i}, \mathbf{J}^{\beta}_{b^a_i} = \frac{\partial \boldsymbol{\beta}_{b_i b_j}}{\partial \delta \mathbf{b}^a_i}, \mathbf{J}^{\beta}_{b^g_i} = \frac{\partial \boldsymbol{\beta}_{b_i b_j}}{\partial \delta \mathbf{b}^g_i}, \mathbf{J}^{q}_{b^g_i} = \frac{\mathbf{q}_{b_i b_j}}{\partial \mathbf{b}^g_i}$ 表示预积分量对 $i$ 时刻的 bias 求导。

这些雅克比根据前面讨论的协方差传递公式，能一步步递推得到：

$$\mathbf{J}_{k+1} = \mathbf{F} \mathbf{J}_k \tag{78}$$

下面我们来讨论 IMU 误差相对于两帧的 PVQ 的 Jacobian:
由于 $\mathbf{r}_p$ 和 $\mathbf{r}_v$ 的误差形式很相近，对各状态量求导的 Jacobian 形式也很相似，所以这里只对 $\mathbf{r}_v$ 的推导进行详细介绍。
(1) 对 $i$ 时刻位移 Jacobian

$$\frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial \delta \mathbf{p}_{b_i b_i'}} = \mathbf{0} \tag{79}$$

(2) 对 $i$ 时刻旋转 Jacobian

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b_i'}} &= \frac{\partial (\mathbf{q}_{wb_i} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b_i'} \end{bmatrix})^{-1} (\mathbf{v}_j^w - \mathbf{v}_i^w + \mathbf{g}^w \Delta t)}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b_i'}} \\
&= \frac{\partial (\mathbf{R}_{wb_i} \exp([\delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b_i'}]_\times))^{-1} (\mathbf{v}_j^w - \mathbf{v}_i^w + \mathbf{g}^w \Delta t)}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b_i'}} \\
&= \frac{\partial \exp([-\delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b_i'}]_\times) \mathbf{R}_{b_i w} (\mathbf{v}_j^w - \mathbf{v}_i^w + \mathbf{g}^w \Delta t)}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b_i'}}
\end{aligned} \tag{80}$$

上式可写为：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b_i'}} &= \frac{\partial (\mathbf{I} - [\delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b_i'}]_\times) \mathbf{R}_{b_i w} (\mathbf{v}_j^w - \mathbf{v}_i^w + \mathbf{g}^w \Delta t)}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b_i'}} \\
&= \frac{\partial - [\delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b_i'}]_\times \mathbf{R}_{b_i w} (\mathbf{v}_j^w - \mathbf{v}_i^w + \mathbf{g}^w \Delta t)}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b_i'}} \\
&= \frac{\partial [\mathbf{R}_{b_i w} (\mathbf{v}_j^w - \mathbf{v}_i^w + \mathbf{g}^w \Delta t]_\times) \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b_i'}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b_i'}} \\
&= [\mathbf{R}_{b_i w} (\mathbf{v}_j^w - \mathbf{v}_i^w + \mathbf{g}^w \Delta t)]_\times
\end{aligned}
\tag{81}
$$

(3) 对 $i$ 时刻速度 Jacobian：

$$
\frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial \delta \mathbf{v}_i^w} = -\mathbf{R}_{b_i w} \tag{82}
$$

(4) 对 $i$ 时刻的加速度 bias 的 Jacobian，注意 bias 量只和预积分 $\beta$ 有关：

$$
\frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial \delta \mathbf{b}_i^a} = -\frac{\partial \boldsymbol{\beta}_{b_i b_j}}{\partial \delta \mathbf{b}_i^a} = -\mathbf{J}_{b_i^a}^{\beta} \tag{83}
$$

# IMU 角度误差相对优化变量的 Jacobian

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

(1) 对 $i$ 时刻姿态求导

这里不能用exp()的形式推导

*号表示四元素的逆

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{r}_q}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b_i'}} &= \frac{\partial 2[\mathbf{q}_{b_j b_i} \otimes (\mathbf{q}_{b_i w} \otimes \mathbf{q}_{w b_j})]_{xyz}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b_i'}} \\
&= \frac{\partial 2[\mathbf{q}^*_{b_i b_j} \otimes (\mathbf{q}_{w b_i} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b_i'} \end{bmatrix})^* \otimes \mathbf{q}_{w b_j}]_{xyz}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b_i'}} \\
&= \frac{\partial -2[(\mathbf{q}^*_{b_i b_j} \otimes (\mathbf{q}_{w b_i} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b_i'} \end{bmatrix})^* \otimes \mathbf{q}_{w b_j})^*]_{xyz}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b_i'}} \\
&= \frac{\partial -2[\mathbf{q}^*_{w b_j} \otimes (\mathbf{q}_{w b_i} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b_i'} \end{bmatrix}) \otimes \mathbf{q}_{b_i b_j}]_{xyz}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b_i'}}
\end{aligned}
\tag{84}
$$

上式可化简为:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{r}_q}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b_i'}} &= -2 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{q}_{wb_j}^* \otimes \left( \mathbf{q}_{wb_i} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b_i'} \end{bmatrix} \right) \otimes \mathbf{q}_{b_i b_j}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b_i'}} \\
&= -2 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \frac{\partial [\mathbf{q}_{wb_j}^* \otimes \mathbf{q}_{wb_i}]_L [\mathbf{q}_{b_i b_j}]_R \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b_i'} \end{bmatrix}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b_i'}} \\
&= -2 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} [\mathbf{q}_{wb_j}^* \otimes \mathbf{q}_{wb_i}]_L [\mathbf{q}_{b_i b_j}]_R \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \frac{1}{2}\mathbf{I} \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{85}
$$

其中 $[\cdot]_L$ 和 $[\cdot]_R$ 为四元数转为左/右旋转矩阵的算子。

(2) 角度误差对 $j$ 时刻姿态求导

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathbf{r}_q}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_j b_j'}} &= \frac{\partial 2[\mathbf{q}_{b_i b_j}^* \otimes \mathbf{q}_{w b_i}^* \otimes \mathbf{q}_{w b_j} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\delta \boldsymbol{\theta}_{b_j b_j'} \end{bmatrix}]_{xyz}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b_i'}} \\
&= \frac{\partial 2[[\mathbf{q}_{b_i b_j}^* \otimes \mathbf{q}_{w b_i}^* \otimes \mathbf{q}_{w b_j}]_L \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\delta \boldsymbol{\theta}_{b_j b_j'} \end{bmatrix}]_{xyz}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b_i'}} \\
&= 2 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} [\mathbf{q}_{b_i b_j}^* \otimes \mathbf{q}_{w b_i}^* \otimes \mathbf{q}_{w b_j}]_L \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \frac{1}{2}\mathbf{I} \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{86}
$$

## (3) 角度误差对 $i$ 时刻陀螺仪偏置 $\mathbf{b}_i^g$

n个时刻的bias误差集合在一起对当前时刻的影响，这里的J就是整串误差对当前时刻的影响，所以这里多了一个雅克比

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{r}_q}{\partial \delta \mathbf{b}_i^g} &= \frac{\partial 2[(\mathbf{q}_{b_i b_j} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\mathbf{J}^q_{b_i^g}\delta \mathbf{b}_i^g \end{bmatrix})^* \otimes \mathbf{q}^*_{wb_i} \otimes \mathbf{q}_{wb_j}]_{xyz}}{\partial \delta \mathbf{b}_i^g} \\
&= \frac{\partial -2[((\mathbf{q}_{b_i b_j} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\mathbf{J}^q_{b_i^g}\delta \mathbf{b}_i^g \end{bmatrix})^* \otimes \mathbf{q}^*_{wb_i} \otimes \mathbf{q}_{wb_j})^*]_{xyz}}{\partial \delta \mathbf{b}_i^g} \\
&= \frac{\partial -2[\mathbf{q}^*_{wb_j} \otimes \mathbf{q}_{wb_i} \otimes (\mathbf{q}_{b_i b_j} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\mathbf{J}^q_{b_i^g}\delta \mathbf{b}_i^g \end{bmatrix})]_{xyz}}{\partial \delta \mathbf{b}_i^g} \\
&= -2 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} [\mathbf{q}^*_{wb_j} \otimes \mathbf{q}_{wb_i} \otimes \mathbf{q}_{b_i b_j}]_L \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \frac{1}{2}\mathbf{J}^q_{b_i^g} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{87}
$$

## 作业

1. 样例代码给出了使用 LM 算法来估计曲线 $y = \exp(ax^2 + bx + c)$ 参数 $a, b, c$ 的完整过程。
   1. 请绘制样例代码中 LM 阻尼因子 $\mu$ 随着迭代变化的曲线图
   2. 将曲线函数改成 $y = ax^2 + bx + c$，请修改样例代码中残差计算，雅克比计算等函数，完成曲线参数估计。
   3. 如果有实现其他阻尼因子更新策略可加分（选做）。

2. 公式推导，根据课程知识，完成 $\mathbf{F}, \mathbf{G}$ 中如下两项的推导过程：

$$\mathbf{f}_{15} = \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}_{b_i b_{k+1}}}{\partial \delta \mathbf{b}_k^g} = -\frac{1}{4}(\mathbf{R}_{b_i b_{k+1}}[(\mathbf{a}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}_k^a)]_\times \delta t^2)(-\delta t)$$

$$\mathbf{g}_{12} = \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}_{b_i b_{k+1}}}{\partial \mathbf{n}_k^g} = -\frac{1}{4}(\mathbf{R}_{b_i b_{k+1}}[(\mathbf{a}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}_k^a)]_\times \delta t^2)(\frac{1}{2}\delta t)$$

3. 证明式(9)。