

## 深蓝学院 VIO 课程第六课作业

### 基础题

- ① 证明式(15)中, 取  $y = u_4$  是该问题的最优解。提示: 设  $y' = u_4 + v$ , 其中  $v$  正交于  $u_4$ , 证明

$$y'^T D^T D y' \geq y^T D^T D y$$

该方法基于奇异值构造矩阵零空间的理论。

### 提升题

完成代码部分。

#### 1. 证明公式

$D$  是  $14 \times 4$  的矩阵, 易知  $D$  的秩为 3, 则  $D$  存在 1 维零空间。 $Dy = 0$  的解即是  $D$  零空间中的向量, 故  $y = u_4$  是  $Dy = 0$  的最优解。也可以用公式证明:

结合公式(14) (15)有:

$$e = \min_y \|Dy\|^2 = \min_y (y^T D^T D y)$$

当  $y = u_k$ , ( $k = 1 \sim 4$ ) 时, 有:

$$e = \min_y \left( u_k^T \left( \sum_{i,j=1}^4 \sigma_i^2 u_i u_j \right) u_k \right)$$

由于  $D^T D$  半正定, 有:

$$u_i u_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

故有:

$$e = \min_y \left( u_k^T \left( \sum_{i,j=1}^4 \sigma_i^2 u_i u_j \right) u_k \right) = \min_y (\sigma_k^2) = \sigma_4^2$$

由于奇异值  $\sigma_k^2$  由大到小排列, 故  $y = u_4$  是最优解。

## 2. 完成三角化代码

补充的代码如下所示，详情可见附件 `triangulate.cpp` 文件。程序运行结果所图 1 所示。

```

25  int main() {
...  ...
71      /* your code begin */
72      Eigen::Matrix<double, 14, 4> D;
73      for (int i = start_frame_id; i < end_frame_id; ++i) {    // 3~9
74          double ui = camera_pose[i].uv[0];
75          double vi = camera_pose[i].uv[1];
76          // 这里R, t是World->Camera的投影
77          Eigen::Matrix<double, 3, 4> P;
78          P.block(0, 0, 3, 3) = camera_pose[i].Rwc.inverse();
79          P.block(0, 3, 3, 1) = -camera_pose[i].Rwc.inverse()*camera_pose[i].twc;
80
81          int idx = 2 * (i - start_frame_id);
82          D.block(idx, 0, 1, 4) = ui * P.row(2) - P.row(0);
83          D.block(idx+1, 0, 1, 4) = vi * P.row(2) - P.row(1);
84      }
85      Eigen::JacobiSVD<Eigen::MatrixX<double>> svd(D.transpose()*D, Eigen::ComputeThinU |
Eigen::ComputeThinV);
86      cout << "SVD singular values: \n" << svd.singularValues().transpose() << endl;
87
88      Eigen::Matrix4d U = svd.matrixU(); // 这里 U = V
89      P_est = U.col(3).head(3) / U.col(3)[3];
90      /* your code end */
...  ...

```

从图 1 的程序运行结果截图中可以看到，经过 SVD 分解后求得的奇异值分别为：468.406、7.74642、0.723255、8.2864e-16。最后一维的奇异值与前三维差距特别大，值接近于 0，表明这是 D 的零空间。由课件资料可知，矩阵 D 的零空间就  $D\mathbf{y} = 0$  的解的集合。D 的零空间只有最后一维，故取 U 的最后一列（代码 88 行）作为  $\mathbf{y}$  的解。

```

22:55:39: Starting /home/vance/vio_ws/src/vio_homework_code/L6/Triangulate/build/estimate_depth ...
SVD singular values:
 468.406    7.74642    0.723255  8.2864e-16
ground truth:
-2.9477 -0.330799  8.43792
your result:
-2.9477 -0.330799  8.43792
22:55:39: /home/vance/vio_ws/src/vio_homework_code/L6/Triangulate/build/estimate_depth exited with code 0

```

图 1 estimate\_depth 程序运行结果截图