2018年第2次课习题答案

——Vance 吴方熠

2. 熟悉 Eigen 矩阵运算

设线性方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，在 A 为方阵的前提下，请回答以下问题：

2.1. 在什么条件下，x 有解且唯一？

$\boldsymbol{A}x=b$有唯一解的充分必要条件：

① $\mathrm{r}(\mathbf{A})=\mathrm{r}(\mathbf{A},\mathrm{b})=\mathrm{n}.$

② $\mathrm{r}(\mathbf{A})=\mathrm{n}$ 且 b 可由 A 的列向量线性表示.

2.2. 高斯消元法的原理是什么？

高斯消元法是一个古老的求解线性方程组的方法，用其解线性方程的基本思想是：用逐次消去未知数的方法把原线性方程组 $\boldsymbol{A}x=b$ 化为与其等价的三角形线性方程组。简单来说，就是对系数矩阵 A 施行一些左边换（用一些简单矩阵）将其约化为上三角矩阵。

高斯消元法定理：

如果$a_{kk}^{(k)}\neq 0(k=1,2,\cdots,n-1)$，则可通过高斯消元法将 $\boldsymbol{A}x=b$ 约化为等价的三角形线性方程组：

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{21}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

且计算公式为：

①消元计算（$k=1,2,\cdots,n-1$）

$$\begin{cases} m_{ik}=a_{ik}^{(k)}/a_{kk}^{(k)}, & i=k+1,\cdots,n, \\ a_{ij}^{(k+1)}=a_{ij}^{(k)}-m_{ik}a_{kj}^{(k)}, & i,j=k+1,\cdots,n, \\ b_i^{(k+1)}=b_i^{(k)}-m_{ik}b_k^{(k)}, & i=k+1,\cdots,n. \end{cases}$$

②回代计算

$$\begin{cases} x_n=b_{nn}^{(n)}/a_{nn}^{(n)}, \\ x_n=(b_i^{(i)}-\sum\limits_{j=i+1}^{n}a_{ij}^{(i)}x_j)\Big/a_{ii}^{(i)}, & i=n-1,\cdots 2,1 \end{cases}$$

高斯消元法对某些简单的矩阵可能会失败，例如$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. 若要保证高斯消元法可用，需保证 A 的顺序主子式$\boldsymbol{D_k}\neq 0$ $(k=1,2,\cdots,n-1)$.

2.3. QR 分解的原理是什么？

QR 分解是计算一般矩阵（中小型矩阵）全部特征值问题的最有效方法之一，目前主要用来计算：①上海森伯格矩阵的全部特征值问题；②计算对称三对角矩阵的全部特征值问题。QR 方法具有收敛快，算法稳定等特点。

一般矩阵将 A 正交相似变化成为 Hessenberg 矩阵 B，然后再应用 QR 方法求 B 的特征值和特征向量。QR 分解将矩阵分解成一个正规正交矩阵 Q 与上三角形矩阵 R，所以称为 QR 分解法，与此正规正交矩阵的通用符号 Q 有关。

2.4. Cholesky 分解的原理是什么？

Cholesky 分解是把一个对称正定的矩阵表示成一个下三角矩阵 L 和其转置的乘积的分解。它要求矩阵的所有特征值必须大于零，故分解的下三角的对角元也是大于零的。Cholesky 分解法又称**平方根法**，是当 A 为实对称正定矩阵时，LU 三角分解法的变形。

2.5. 编程实现 A 为 100*100 随机矩阵时，用 QR 和 Cholesky 分解求 x 的程序。

程序代码如下：

```
#include <iostream>
#include <cstdlib>
#include <ctime>

#include <Eigen/Core>
#include <Eigen/Cholesky>
#include <Eigen/QR>

using namespace std;

int main(int argc, char** argv)
{
    srand((unsigned)time(NULL));

    Eigen::MatrixXd A = Eigen::MatrixXd::Random(100, 100);
    Eigen::VectorXd b = Eigen::VectorXd::Random(100);

    Eigen::VectorXd x1 = (A.adjoint()*A).ldlt().solve(A.adjoint()*b);    // 正或负半定
    Eigen::VectorXd x2 = (A.adjoint()*A).llt().solve(A.adjoint()*b);    // 正定
    Eigen::VectorXd x3 = A.householderQr().solve(b);
    Eigen::VectorXd x4 = A.colPivHouseholderQr().solve(b);
    Eigen::VectorXd x5 = A.fullPivHouseholderQr().solve(b);

    cout << "x1(using ldlt Cholesky):" << endl << x1 << endl;
    cout << "x2(using llt Cholesky):" << endl << x2 << endl;
    cout << "x3(using householderQr):" << endl << x3 << endl;
    cout << "x4(using colPivHouseholderQr):" << x4 << endl;
    cout << "x5(using fullPivHouseholderQr):" << x5 << endl;

    return 0;
}
```

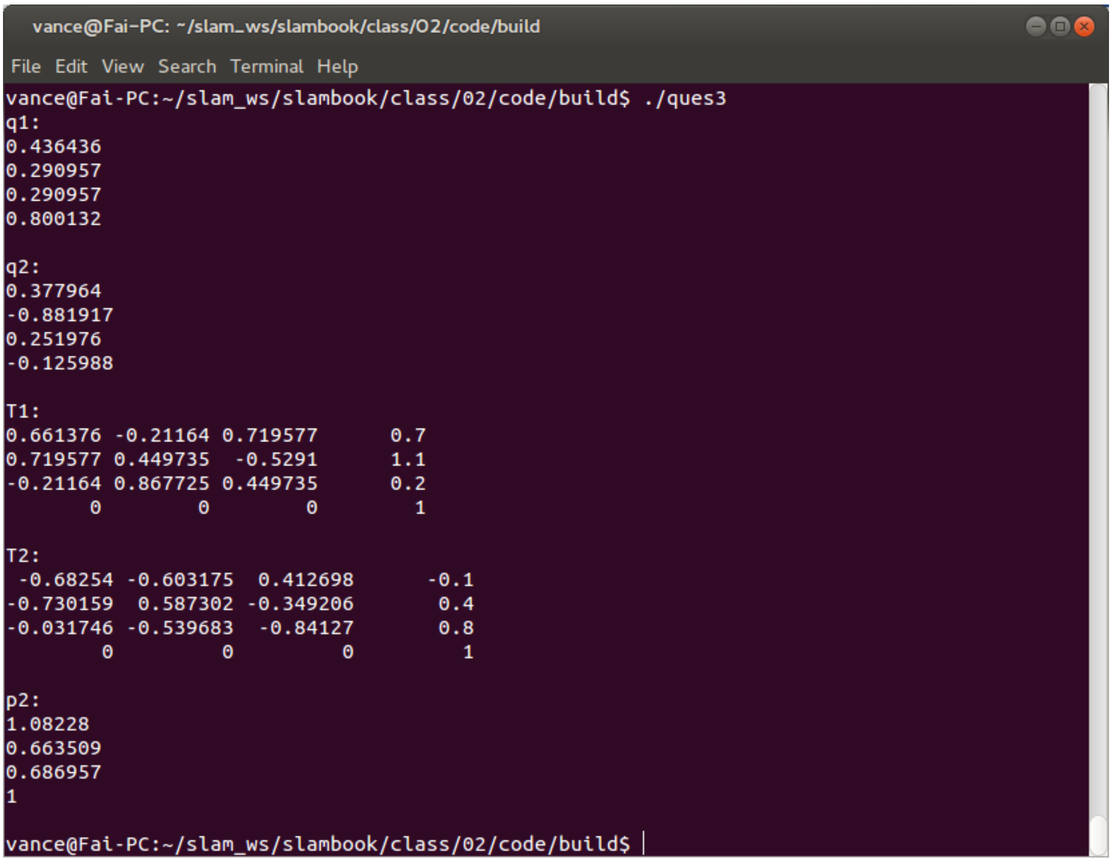
3. 几何运算练习

设有小萝卜 1 一号和小萝卜二号位于世界坐标系中。小萝卜一号的位姿为 $\boldsymbol{q_1} = [0.55,\ 0.3,\ 0.2,\ 0.2]$，$\boldsymbol{t_1} = [0.7,\ 1.1,\ 0.2]^T$（$q$ 的第一项为实部）。这里的 q 和 t 表达的是$\boldsymbol{T_{cw}}$，也就是世界到相机的变换关系。小萝卜二号的位姿为 $\boldsymbol{q_2} = [-0.1,\ 0.3, -0.7,\ 0.2]$，$\boldsymbol{t_2} = [-0.1,\ 0.4,\ 0.8]^T$。现在，小萝卜一号看到某个点在自身的坐标系下，坐标为 $\boldsymbol{p_1} = [0.5, -0.1,\ 0.2]^T$，求该向量在小萝卜二号坐标系下的坐标。请编程实现此事，并提交你的程序。

程序代码如下：

```cpp
#include <iostream>
#include <Eigen/Core>
#include <Eigen/Dense>

using namespace std;

int main(int argc, char** argv)
{
    Eigen::Quaternion<float> q1(0.55, 0.3, 0.2, 0.2);
    Eigen::Quaternion<float> q2(-0.1, 0.3, -0.7, 0.2);
    q1 = q1.normalized();
    q2 = q2.normalized();

    Eigen::Vector3f t1(0.7, 1.1, 0.2);
    Eigen::Vector3f t2(-0.1, 0.4, 0.8);
    Eigen::Matrix<float,4,1> p1, p2;
    p1 << 0.5, -0.1, 0.2, 1;

    Eigen::Isometry3f T1 = Eigen::Isometry3f::Identity();
    Eigen::Isometry3f T2 = Eigen::Isometry3f::Identity();
    T1.rotate(q1); // q1.toRotationMatrix()
    T1.pretranslate(t1);
    T2.rotate(q2);
    T2.pretranslate(t2);

    p2 = T2 * T1.inverse() * p1;
    cout << "p2:" << endl << p2 << endl << endl;

    return 0;
}
```

程序运行结果截图：



结果$p_2 = [1.08228 \quad 0.663509 \quad 0.686957]^T$与答案一致。

4. 旋转的表达

4.1. 设有旋转矩阵 R，证明 $\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}$ 且 $\det(\boldsymbol{R}) = +1$。

设一个三维坐标系$e = [e_1 \quad e_2 \quad e_3]$发生了旋转，变成了$e' = [e_1' \quad e_2' \quad e_3']$，则旋转矩阵 R 可表示为：

$$\boldsymbol{R} = e^T e'$$

则有：

$$\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R} = e'^T e e^T e' = e'^T \boldsymbol{I} e' = e'^T e' = \boldsymbol{I}$$

因为$\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}$，所以有：

$$\det(\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R}) = det(\boldsymbol{R}^T)det(\boldsymbol{R}) = det(\boldsymbol{R})det(\boldsymbol{R}) = det(\boldsymbol{I}) = 1$$

故$det(\boldsymbol{R}) = \pm 1$。

当$det(\boldsymbol{R}) = -1$时为瑕疵转（Improper rotation），即物体绕某轴旋转后，又对垂直于该轴的平面做反射。故这里取$det(\boldsymbol{R}) = +1$。

4.2. 设有四元数 q，我们把虚部记为 $\boldsymbol{\epsilon}$，实部记为 $\boldsymbol{\eta}$，那么 $\boldsymbol{q}=(\boldsymbol{\epsilon},\boldsymbol{\eta})$。请说明 $\boldsymbol{\epsilon}$ 和 $\boldsymbol{\eta}$ 的维度。

ϵ：三维；η：一维。

4.3. 定义运算 $^+$和 $^\oplus$ 为：

$$\boldsymbol{q}^+=\begin{bmatrix}\eta\mathbf{1}+\epsilon^\times & \epsilon\\ -\epsilon^T & \eta\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{q}^\oplus=\begin{bmatrix}\eta\mathbf{1}-\epsilon^\times & \epsilon\\ -\epsilon^T & \eta\end{bmatrix},$$

请证明对任意单位四元数 $\boldsymbol{q_1}$，$\boldsymbol{q_2}$，四元数乘法可写成矩阵乘法：

$$\boldsymbol{q}_1\cdot\boldsymbol{q}_2=\boldsymbol{q}_1^+\boldsymbol{q}_2 \text{ 或者 } \boldsymbol{q}_1\cdot\boldsymbol{q}_2=\boldsymbol{q}_2^\oplus\boldsymbol{q}_1$$

证明：

设 $\boldsymbol{q}_1=[\epsilon_1,\ \eta_1]^T$，$\boldsymbol{q}_2=[\epsilon_2,\ \eta_2]^T$，其中$\epsilon=[\epsilon_x\quad\epsilon_y\quad\epsilon_z]^T$. 由《视觉SLAM 十四讲》公式（3.24）可得：

$$\boldsymbol{q}_1\cdot\boldsymbol{q}_2=\begin{bmatrix}\eta_1\epsilon_2+\eta_2\epsilon_1+\epsilon_1\times\epsilon_2\\ \eta_1\eta_2-{\epsilon_1}^T\epsilon_2\end{bmatrix} \tag{4-1}$$

由给定条件带入计算两个等式的右边，有：

$$\boldsymbol{q}_1^+\boldsymbol{q}_2=\begin{bmatrix}\eta_1\mathbf{1}+\epsilon_1^\times & \epsilon_1\\ -\epsilon_1^T & \eta_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\epsilon_2\\ \eta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\eta_1\epsilon_2+\eta_2\epsilon_1+\epsilon_1^\times\epsilon_2\\ \eta_1\eta_2-{\epsilon_1}^T\epsilon_2\end{bmatrix} \tag{4-2}$$

$$\boldsymbol{q}_2^\oplus\boldsymbol{q}_1=\begin{bmatrix}\eta_2\mathbf{1}-\epsilon_2^\times & \epsilon_2\\ -\epsilon_2^T & \eta_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\epsilon_1\\ \eta_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\eta_1\epsilon_2+\eta_2\epsilon_1-\epsilon_2^\times\epsilon_1\\ \eta_1\eta_2-{\epsilon_2}^T\epsilon_1\end{bmatrix} \tag{4-3}$$

而对于叉乘运算$\epsilon_1\times\epsilon_2$有：

$$\epsilon_1\times\epsilon_2=\epsilon_1^\times\epsilon_2=-\epsilon_2\times\epsilon_1=-\epsilon_2^\times\epsilon_1 \tag{4-4}$$

将（4-4）带入至（4-2）与（4-3）中，可得：

$$\boldsymbol{q}_1\cdot\boldsymbol{q}_2=\boldsymbol{q}_1^+\boldsymbol{q}_2 \text{ 或 } \boldsymbol{q}_1\cdot\boldsymbol{q}_2=\boldsymbol{q}_2^\oplus\boldsymbol{q}_1 \tag{4-5}$$

5．罗德里格斯公式的证明

$$\boldsymbol{R}=cos\,\theta\,\boldsymbol{I}+(1-cos\,\theta)\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^{T}+sin\,\theta\,\boldsymbol{n}^{\wedge}$$

证明：

如下图所示，有一向量$\boldsymbol{v}$经过旋转轴$\boldsymbol{n}$的旋转后，变到了$\boldsymbol{v}_{rot}$的位置。其中$\boldsymbol{n}$为单位向量，转过的角度为θ。向量$\boldsymbol{v}$可以由其平行于旋转轴n的投影$v_{||}$和垂直旋转轴n的投影$v_{\perp}$表示：$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_{||}+\boldsymbol{v}_{\perp}$，其中：

$$\boldsymbol{v}_{||}=(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}$$

$$\boldsymbol{v}_{\perp}=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_{||}-(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v})$$

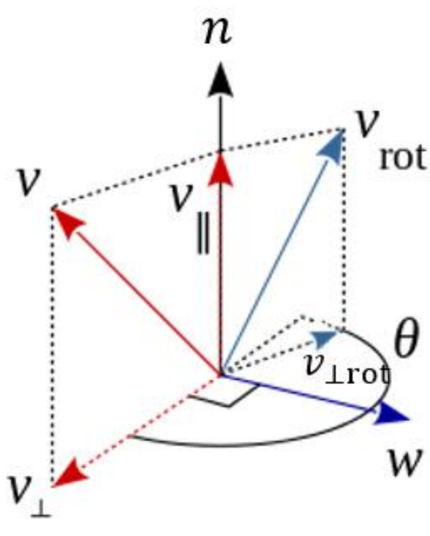
由于$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v}_{||}=\boldsymbol{0}$，所以：

$$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v}_{\perp}=\boldsymbol{n}\times\left(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_{||}\right)=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v}-\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v}_{||}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v}.$$

同理，向量$\boldsymbol{v}_{rot}$也可以表示为：$\boldsymbol{v}_{rot}=\boldsymbol{v}_{||\mathrm{rot}}+\boldsymbol{v}_{\perp\mathrm{rot}}$，其中：

$$\boldsymbol{v}_{||\mathrm{rot}}=\boldsymbol{v}_{||}$$

$$\boldsymbol{v}_{\perp\mathrm{rot}}=\cos\theta\,\boldsymbol{v}_{\perp}+\sin\theta\,\boldsymbol{w}=\cos\theta\,\boldsymbol{v}_{\perp}+\sin\theta\,\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v}$$



则联立以上各式，可得：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_{rot}&=\boldsymbol{v}_{||\mathrm{rot}}+\boldsymbol{v}_{\perp\mathrm{rot}}\\&=\boldsymbol{v}_{||}+\cos\theta\,\boldsymbol{v}_{\perp}+\sin\theta\,\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v}\\&=\boldsymbol{v}_{||}+\cos\theta\left(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_{||}\right)+\sin\theta\,\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v}\\&=\cos\theta\,\boldsymbol{v}+(1-\cos\theta)\boldsymbol{v}_{||}+\sin\theta\,\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v}\\&=\cos\theta\,\boldsymbol{v}+(1-\cos\theta)(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{n}+\sin\theta\,\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v}\end{aligned}$$

又$\boldsymbol{v}_{rot}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{v}$, 所以：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}&=\boldsymbol{v}_{rot}\boldsymbol{v}^{-1}\\&=(\cos\theta\,\boldsymbol{v}+(1-\cos\theta)(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{n}+\sin\theta\,\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}^{-1}\\&=\cos\theta\,\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^{-1}+(1-\cos\theta)(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{n}\boldsymbol{v}^{-1}+\sin\theta\,\boldsymbol{n}^{\wedge}\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^{-1}\\&=cos\,\theta\,\boldsymbol{I}+(1-cos\,\theta)\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^{T}+sin\,\theta\,\boldsymbol{n}^{\wedge}\end{aligned}$$

证毕。

6．四元素运算性质的验证

课程中介绍了单位四元数可以表达旋转。其中，在谈论用四元数 q 旋转点 p 时，结果为：

$$\boldsymbol{p'=qpq^{-1}}$$

我们说，此时$\boldsymbol{p'}$必定为虚四元数（实部为零）。请你验证上述说法。

此外，上式亦可写成矩阵运算：$\boldsymbol{p'=Qp}$。请根据你的推导，给出矩阵 Q。注意此时 p 和$\boldsymbol{p'}$都是四元数形式的变量，所以 Q 为 4×4 的矩阵。

（1）证明：

点$\mathbf{p}$可由一个虚四元数来表示。首先证明

$$(\lambda\mathbf{q})\mathbf{p}(\lambda\mathbf{q})^{-1}=\mathbf{qpq^{-1}} \tag{6-1}$$

对（6-1）有：

$$\text{左边}=\lambda\mathbf{qpq^{-1}}\lambda^{-\mathbf{1}}=\lambda\lambda^{-\mathbf{1}}\mathbf{qpq^{-1}}=\mathbf{qpq^{-1}}=\text{右边}$$

（6-1）得证。再根据（6-1）的性质，可将$\mathbf{q}$视为单位四元素（若q不是单位四元素，可令其乘一常数λ使化为单位四元素）。则根据单位四元素的性质，有：

$$\mathbf{q}^{-1}=\mathbf{q}^*，\mathbf{qq}^*=\mathbf{qq}^{-1}=1$$

令函数$\mathrm{S}(\mathbf{q})=(\mathbf{q}+\mathbf{q^{-1}})/2=(\mathbf{q}+\mathbf{q}^*)/2$，可知$\mathrm{S}(\mathbf{q})$为求$\mathbf{q}$实部标量的函数。则有：

$$\begin{aligned}2\mathrm{S}(\boldsymbol{p'})&=2\mathrm{S}(\boldsymbol{qpq^{-1}})=2\mathrm{S}(\boldsymbol{qpq}^*)=2*\frac{(\boldsymbol{qpq}^*+(\boldsymbol{qpq}^*)^*)}{2}\\&=\boldsymbol{qpq}^*+\boldsymbol{qp}^*\boldsymbol{q}^*=\boldsymbol{q}(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}^*)\boldsymbol{q}^*=\boldsymbol{q}2\mathrm{S}(\boldsymbol{p})\boldsymbol{q}^*\end{aligned} \tag{6-2}$$

由于$2\mathrm{S}(\boldsymbol{p})$的值为标量，故式（6-2）可写成：

$$2\mathrm{S}(\boldsymbol{p'})=\boldsymbol{q}2\mathrm{S}(\boldsymbol{p})\boldsymbol{q}^*=2\mathrm{S}(\boldsymbol{p})\boldsymbol{qq}^*=2\mathrm{S}(\boldsymbol{p}) \tag{6-3}$$

即$\boldsymbol{p'}$与$\boldsymbol{p}$的实部值相等，均为 0。故$\boldsymbol{p'}$为虚四元数，得证。

（2）求解 Q：

令单位四元素$\boldsymbol{q} = [\epsilon, \eta]$，其中向量$\epsilon = [\epsilon_1 \quad \epsilon_2 \quad \epsilon_3]^{\mathrm{T}}$为虚部，$\eta$为实部。使用第 4 题结果，有：

$$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{q}\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}^{-1} = \boldsymbol{q}^{+}(\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}^{-1}) = \boldsymbol{q}^{+}\boldsymbol{q}^{-1\oplus}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{p}$$

从而可以导出四元数至旋转矩阵的转换方式：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q} &= \boldsymbol{q}^{+}\boldsymbol{q}^{-1\oplus} \\ &= \begin{bmatrix} \eta\boldsymbol{I} + \epsilon^{\times} & \epsilon \\ -\epsilon^{T} & \eta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \eta\boldsymbol{I} + \epsilon^{\times} & -\epsilon \\ \epsilon^{T} & \eta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (\eta\boldsymbol{I} + \epsilon^{\times})^{\mathbf{2}} + \epsilon\epsilon^{T} & -\epsilon^{\times}\epsilon \\ -\epsilon^{T}\epsilon^{\times} & \epsilon^{T}\epsilon + \eta^{2} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

其中：

$$\epsilon^{\times}\epsilon = 0$$

$$\epsilon^{T}\epsilon^{\times} = \mathbf{0}^{\mathbf{T}} \ \ (3 \times 1 \text{ 零向量的转置})$$

$$\epsilon^{T}\epsilon + \eta^{2} = {\epsilon_1}^{2} + {\epsilon_2}^{2} + {\epsilon_3}^{2} + \eta^{2} = 1$$

故最后

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{q}^{+}\boldsymbol{q}^{-1\oplus} = \begin{bmatrix} (\eta\boldsymbol{I} + \epsilon^{\times})^{\mathbf{2}} + \epsilon\epsilon^{T} & 0 \\ \mathbf{0}^{\mathbf{T}} & 1 \end{bmatrix}$$

为 4×4 的矩阵。

7. *熟悉 C++11

设有类 A，并有 A 类的一组对象，组成了一个 vector。现在希望对这个 vector 进行排序，但排序的方式由 *A*.index 成员大小定义。那么，在 C++11 的语法下，程序写成：

```
1  #include <iostream>
2  #include <vector>
3  #include <algorithm>
4  
5  using namespace std;
6  
7  class A {
8  public:
9    A(const int& i ) : index(i) {}
10   int index = 0; // C++11 面向对象增强
11 };
12 
13 int main() {
14   A a1(3), a2(5), a3(9);
15   vector<A> avec{a1, a2, a3}; // C++11 初始化列表
16   std::sort(avec.begin(), avec.end(), [](const A&a1, const A&a2) {return a1.index < a2.index;}); // C++11 Lambda 表达式
17   for ( auto& a : avec ) cout << a.index << " "; // C++11 区间迭代 for 循环
18   cout << endl;
19   return 0;
20 }
```

请说明该程序中哪些地方用到了 C++11 标准的内容。

- 第 10 行，面对对象增强部分
- 第 15 行，初始化列表
- 第 16 行，Lambda 表达式
- 第 17 行，区间迭代 for 循环