# Fama-Macbeth回归

（大约可能是DNS污染或者被墙了，图片显示不出来了┬┬﹏┬┬，幸好还有pdf）

# 一、理论概述

Fama-Macbeth回归是1973年Fama和Macbeth为验证CAPM模型而提出的一种因子统计方法，该模型现如今被广泛用于计量经济学的面板数据分析，而在金融领域在用于多因子模型的回归检验，用于估计各类模型中的因子暴露和因子收益（风险溢价）。

Fama-Macbeth回归是实证资产定价中最常用的方法之一。它的主要用途是炎症因子对资产收益率是否产生系统性影响。与投资组合分析不同的是，Fama-Macbeth回归可以在同时控制多个银子对资产收益率的影响下，考察特定因子对资产收益率产生系统性影响，具体体现在因子是否存在显著的风险溢价。

Fama-Macbeth与传统的截面回归类似，本质上也与是一个两阶段回归，不同的是它用巧妙的方法解决了截面相关性的问题，从而得出更加无偏，相合的估计。

**时间序列回归**

Fama-Macbeth模型与传统截面回归相同，第一步都是做时间序列回归。在因子分析框架中，时间序列回归是为了获得个股在因子上的暴露。如果模型中的因子是 portfolio returns（即使用投资组合收益率作为因子，例如Fama-French三因子模型中的SMB，HML和市场因子），那么可以通过时间序列回归（time-series regression）来分析$E[R_i]$和$\beta_i$在截面上的关系。

令$f_t$为因子组合在t期的收益率，$R_{it}$为个股i在t期的收益率，用$f_t$对每只股票的$R_{it}$回归，即可得到每只股票的全样本因子暴露$\beta_i$。

$R_{it} = \alpha_i + \beta_i f_t + \epsilon_{it}, t = 1, 2, \ldots, T, \forall i$ （1）

也可滚动计算某个时间段的因子暴露$\beta_{it}$，体现个股随市场的变化设置时间段长度为period

$R_{ik} = \alpha_i + \beta_{it} f_k + \epsilon_{ik}, k = t - period, 2, \ldots, t, \forall i$ （2）

**截面回归**

传统截面回归的第一步是通过时间序列回归得到个股暴露，这一步与Fama-Macbeth回归相同，而第二步回归体现了传统截面回归和Fama-Macbeth的最大不同。

传统截面回归：

在时序回归中回归式在时间序列上取均值，在$E[\epsilon] = 0$的假设下可以得出：

$E[R_i] = \alpha_i + \beta_i E[f]$ （3）

上式正是个股的期望收益与因子暴露在截面上的关系，截距$\alpha_i$为个股的错误定价。

那么便可通过截面回归找到因子的期望收益率$E[f]$，方法是最小化个股定价错误$\alpha_i$的平方和。对个股的的收益在时序上取均值得到个股期望收益$E[R_i]$，用全样本的个股因子暴露对个股期望收益做无截距回归。

$E[R_i] = \beta_i \lambda + \alpha_i$ （4）

回归残差$\alpha_i$为个股的错误定价，$\lambda$为因子的期望收益率。

截面回归最大的缺陷在于忽略了截面上的残差相关性，使得OLS给出的标准误存在巨大的低估。

**Fama-Macbeth回归**

与截面回归相同，Fama-Macbeth回归第一步是通过时间序列回归得到因子暴露值，不同的是，第二步中，Fama-Macbeth在每个t上都做了一次无截距截面回归：

$R_{it} = \beta_i \lambda_t + \alpha_{it}, i = 1, 2, \ldots, N, \forall t$ (5)

上式中的$\beta_i$为全样本$\beta$，当然若使用滚动回归数据，也可以在不同截面的回归上使用对应时期的$\beta_{i,t}$。

Fama-Macbeth回归相当于在每个t上做一次独立的截面回归，这T次回归的参数取均值作为回归的估计值：

$\hat{\lambda} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\hat{\lambda}_t, \hat{\alpha}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\hat{\alpha}_{it}$ (6)

上述方法的巧妙之处在于它把 T 期的回归结果当作 T 个独立的样本。参数的 standard errors 刻画的是样本统计量在不同样本间是如何变化的。在传统的截面回归中，我们只进行一次回归，得到λ和$\alpha_i$的一个样本估计。而在Fama-Macbeth截面回归中，把T期样本点独立处理，得到T个λ和$\alpha_i$的样本估计。

若使用全样本因子暴露$\beta_i$进行估计,截面回归和Fama-Macbeth的估计结果相同，当使用滚动窗口进行估计时（Fama and MacBeth (1973)中作者使用了滚动窗口），截面回归和Fama-Macbeth回归会得到完全不同的估计结果。

Fama-Macbeth回归很好的解决了截面相关性的问题，但对于时间序列上的相关性仍然无力。

（用一些更通俗的话来说，Fama-Macbeth回归的两步是：

1、估计资产承担风险大小（beta值）。通过对资产收益率的时间序列分析，得到资产承担的风险水平。

2、估计风险溢价时间序列以及统计检验。通过在每个时点的资产收益率对得到的beta值进行截面回归，得到因子在每个时刻的风险溢价。对每个时刻的风险溢价进行平均，并检验均值是否显著异于0.)

# 二、从CAPM到Fama-Macbeth

CAPM：$r_i = r_f + (r_m - r_f) * \beta$

这个公式有三个含义：

1、风险与收益的关系是线性的

2、$\beta$是对系统性风险的完全度量

3、$r_m - r_f > 0$，在一个风险规避的世界，更高的风险要有更高的收益

要验证CAPM只需要看满不满足上面的三个条件，因此，设定要拟合的模型为：

$r_i = \gamma_0 + \gamma_1 * \beta + \gamma_2 * \beta^2 + \gamma_3 * s + \epsilon$

s是系统性风险，$\epsilon$为残差项

条件1成立有：$\gamma_2 = 0$

条件2成立有：$\gamma_3 = 0$，非beta风险不具有系统性影响

条件3成立有：$\gamma_1 = r_m - r_f > 0$

sharpe-lintner capm假定：$\gamma_0 = r_f$

详细的步骤为：

1、用四年1926-1929的月收益率，对个股进行时序回归，计算出beta，排序分组为20组

2、用之后五年共60个月1930-1934年的月收益率，重新时间序列回归计算出个股beta和个股残差标准差$s(\epsilon)$，在计算出beta（个股beta的直接简单平均）和组合残差标准差$s_p(\epsilon)$（个股残差标准查直接简单平均）

3、之后四年1935-1938，每一个月都进行一次截面回归，那么四年回归48次。每一次截面回归的因子都是用上期获得的因子（不是上个月的因子）。具体来说，他是个这样的结构化数据：

| | **ri** | **beta** | **beta**2** | **s(e)** |
|---|---|---|---|---|
| 1935-01 | group1 | | | |
| | group2 | | | |
| | ... | | | |
| | group20 | | | |
| 1935-02 | group1 | | | |
| | group2 | | | |
| | ... | | | |
| | group20 | | | |

...使用过去60个月的数据进行时间序列回归，得到因子（第二步）后进行截面回归。

然后进行滚动回归，每次都是用过去的60个月跟新beta与s(e)因子。

所以每个时点的截面回归也就20个样本。

到1935-02，重新滚动分组，从第一步开始，用1930-02~1935-01这60个月的数据进行时间序列回归后得到每组的beta与s(e)

（这里，关于什么是滚动分组：beta是滚动计算的，如果分组里的股票一直不变显然是不太合理哈。因为分组是按照beta分组，是重要保证高beta组的股票的beta始终高。所以分组不能固定，一个股票在上期可能是第一组，下一期可能是第二组。也就是1935-02的分组依据是用四年的月收益率，对个股进行时序回归，计算出beta然后分组）

我们将我们设定的模型加上下标t表示时间，加上p表示组合，因为最后的截面回归就是组合之间的：

$$r_{pt} = \gamma_{0t} + \gamma_{1t}\beta_{p,t-1} + \gamma_{2t}\beta_{p,t-1}^2 + \gamma_{3t}s(\epsilon)_{p,t-1} + u$$

p=1,2,...20

u表示残差，$\epsilon$是时间序列回归得到的残差。

4、对所有截面回归得到的参数求均值，得到我们对参数的最终估计。第三步界面回归完成后，我们得到了这样的结构化数据：

| | **gamma0** | **gamma1** | **...** |
|---|---|---|---|
| 1935-01 | | | |
| 1935-02 | | | |
| 1935-03 | | | |
| ... | | | |

参数$\gamma_i = \frac{1}{T}\sum \gamma_{it}, i = 0, 1, 2, 3$，标准差就是直接求标准差，那么t统计量也有了：

$t = \frac{\bar{\gamma}}{\sqrt{\frac{s\gamma}{n}}}$

然后就可以进行假设检验了

# 三、Stata实现

为简单说明Fama-Macbeth两阶段回归的主要步骤，以下用投资组合数据估计一个简单的 CAPM 模型。数据主要使用了[25 Portfolios Formed on Size and Book-to-Market] 中的 25 个投资组合 1926.7-2020.10 期间的月度收益率(RP.csv)，和[Fama/French 3 Factors] 中的无风险收益、市场超额收益数据(Mkt-RF.csv)。

数据说明：仓库中RP.csv中存储的是25 个投资组合 1926.7-2020.10 期间的月度收益率，每行代表一个月份，每列代表一个投资组合；Mkt-RF.csv存储的是1926.7-2020.10 期间的无风险收益、市场超额收益数据，每行代表一个月份，Mkt-RF和RF列代表市场超额收益率和无风险收益。

数据预处理：

| 变量 | 含义 |
|---|---|
| port_num | 投资组合编号，1~25 |
| t | 时期，如1936m7格式 |
| rpe | 超额收益，投资组合收益-无风险收益 |

第一阶段：

pass1 1930.1-1938.11：25*48次时序回归 （1930.1-1934.12->1933.12-1938.11）

估计$beta_{it}, i = 1, 2..25$，窗口为五年，每次向后移动一个月

```
bys port_num: asreg rp mktrf if (t>=ym(1930,1) & t<=ym(1938,12)) , wind(t 60)
rmse se newey(4)
```

. list in 46/50

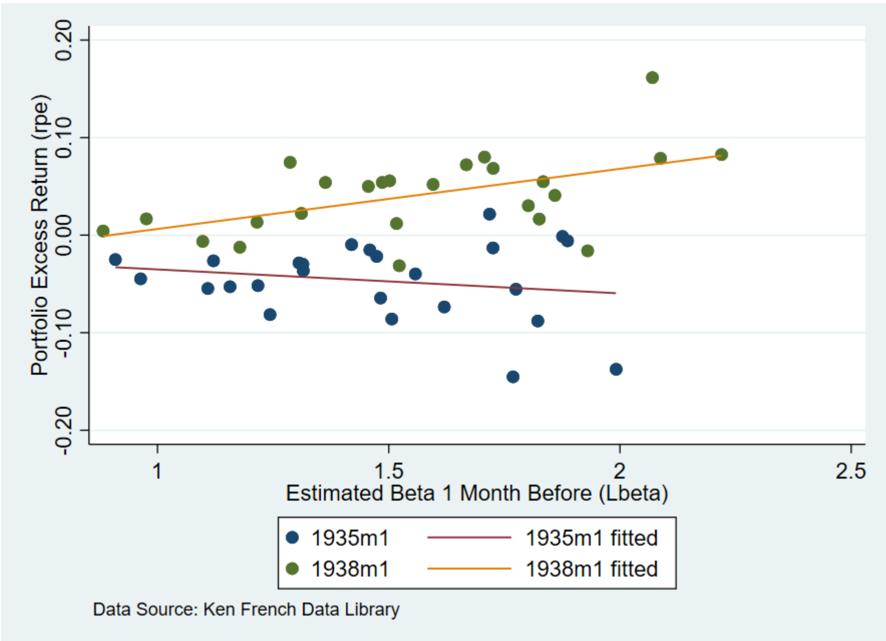
| | port_num | t | mktrf | rpe | _rmse | _Nobs | _R2 | _adjR2 | _b_mktrf | _b_cons | _se_mk~f | _se_cons |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 46. | 1 | 1938m9 | 0.01 | -0.14 | 0.16 | 60 | 0.42 | 0.41 | 1.90 | -0.00 | 0.33 | 0.01 |
| 47. | 1 | 1938m10 | 0.08 | 0.12 | 0.16 | 60 | 0.42 | 0.41 | 1.91 | -0.00 | 0.33 | 0.01 |
| 48. | 1 | 1938m11 | -0.02 | -0.04 | 0.16 | 60 | 0.44 | 0.43 | 1.97 | -0.00 | 0.38 | 0.01 |
| 49. | 1 | 1938m12 | 0.04 | 0.04 | 0.15 | 60 | 0.47 | 0.46 | 1.97 | 0.00 | 0.38 | 0.02 |
| 50. | 2 | 1934m12 | 0.00 | -0.01 | 0.22 | 60 | 0.48 | 0.47 | 1.62 | 0.03 | 0.30 | 0.03 |

| port_num | _b_mktrf | _se_mk~f | _R2 | _rmse |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.89 | 0.32 | 0.48 | 0.21 |
| 2 | 1.82 | 0.30 | 0.52 | 0.19 |
| 3 | 1.87 | 0.20 | 0.72 | 0.12 |
| 4 | 1.75 | 0.17 | 0.70 | 0.12 |
| 5 | 1.95 | 0.22 | 0.65 | 0.15 |
| 6 | 1.39 | 0.15 | 0.66 | 0.11 |
| 7 | 1.51 | 0.13 | 0.77 | 0.09 |
| 8 | 1.55 | 0.16 | 0.79 | 0.09 |
| 9 | 1.62 | 0.15 | 0.80 | 0.09 |
| 10 | 1.74 | 0.15 | 0.75 | 0.10 |
| 11 | 1.25 | 0.08 | 0.81 | 0.06 |
| 12 | 1.20 | 0.06 | 0.90 | 0.04 |
| 13 | 1.36 | 0.09 | 0.92 | 0.04 |
| 14 | 1.47 | 0.09 | 0.86 | 0.06 |
| 15 | 1.79 | 0.10 | 0.89 | 0.07 |
| 16 | 0.96 | 0.05 | 0.92 | 0.03 |
| 17 | 1.13 | 0.07 | 0.94 | 0.03 |
| 18 | 1.32 | 0.06 | 0.93 | 0.04 |
| 19 | 1.50 | 0.09 | 0.91 | 0.05 |
| 20 | 1.98 | 0.15 | 0.86 | 0.08 |
| 21 | 0.90 | 0.03 | 0.97 | 0.02 |
| 22 | 1.09 | 0.03 | 0.98 | 0.02 |
| 23 | 1.26 | 0.06 | 0.95 | 0.03 |
| 24 | 1.50 | 0.06 | 0.92 | 0.05 |
| 25 | 1.69 | 0.18 | 0.78 | 0.10 |
| Total | 1.50 | 0.13 | 0.81 | 0.08 |

(_b_mkrtf就是beta)

为了截面回归更方便，直接将自变量取滞后项(beta滞后一个月)

在做截面回归之前，先看一下rpe和beta估计值的关系




该图画出了 1935m1 和 1938m1 两个时间节点上投资组合超额收益率 rpe 和上一月 估计值 **Lbeta** 的关系，横轴是 Lbeta，纵轴是 rpe。

接下来使用xtfmb进行第二阶段估计，也可以用asreg fmb，还可以用statsby

```
.   global regvar "rpe Lbeta"

.         *xtfmb
.         xtfmb $regvar

Fama-MacBeth (1973) Two-Step procedure          Number of obs      =      1200
                                                Num. time periods  =        48
                                                F(  1,     47)     =      0.91
                                                Prob > F           =    0.3437
                                                avg. R-squared     =    0.2567
```

| rpe | Coef. | Fama-MacBeth Std. Err. | t | P>\|t\| | [95% Conf. | Interval] |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Lbeta | .0122536 | .0128116 | 0.96 | 0.344 | -.01352 | .0380272 |
| _cons | -.0029518 | .0131503 | -0.22 | 0.823 | -.0294067 | .0235032 |