（随机化）

对一个任意顺序的排列，求快速排序所进行的比较次数 X 的期望

解：对于排列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，不妨设它是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列.

$$X_{ij} = \begin{cases} 1, & i与j进行过比较 \\ 0, & \end{cases} \quad (i<j).$$

因为只有主元会被比较，所以

$$X_{ij} = \begin{cases} 1, & \underbrace{i或j成为主元}_{①}，\underbrace{且另一个未曾成为主元}_{②}，\underbrace{且i和j在同一分组}_{③} \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

若 i 和 j 在同一分组，则 $i,\cdots,j$ 都在同一分组，且 $\forall x$，$i<x<j$ 不能先于 i 和 j 成为主元.

$$因此\ X_{ij} = \begin{cases} 1, & i或j为\{i,i+1,\cdots,j\}内第一个成为主元的 \\ 0 & \end{cases}$$

故 $E(X_{ij}) = \dfrac{2}{j-i+1}$；因为两两是否被比较相互独立

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} X_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} E(X_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{2}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{2}{n-i+1}\right) \\ &= 2\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-i+1}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\leq 2\sum_{i=1}^{n-1} \cancel{(\lg n}(\ln n+\gamma) \\ &= O(n\lg n) \end{aligned}}$$

上界

$$\boxed{\begin{aligned} &\geq 2\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-i+1}\right) \\ &\geq 2\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right) \\ &\geq 2\cdot\frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right) \\ &= \Omega(n\lg n). \end{aligned}}$$

下界

7.4-4.

扫描全能王 创建

4.1 $T(n)=\max(T(q)+T(n-q-1))+\theta(n)$

假设 $T(q)\geq cq^2$ 对 $1\leq q<n$ 成立，

那么 $T(n)\geq \max(cq^2+c(n-q-1)^2)+dn$

$=\max(cq^2+c(n^2+q^2+1-2nq-2n+2q))+dn$

$=\max(cn^2+\cancel{2cq^2}+c-\cancel{2nqc}-2nc+\cancel{2qc})+dn$

$\geq cn^2-2nc+c+dn$

因此只需取 $c=\min\{\frac{d}{2},T(1)\}$ 即可保证 $T(n)\geq cn^2$.

~~7.4-4~~

7.4-5 证：当小于K返回时，递归树深度为 $\frac{n}{k}$ ~~原本……~~

所以快排 $O(\frac{n}{k}\lg\frac{n}{k})$

然后插排 每组是 $O(k)$ 的，共 $O(nk)$

故一共 $O(nk+n\lg\frac{n}{k})$

$f(k)=c_1kn+c_2n\lg n-c_2n\lg k$

$f'(k)=c_1n-\frac{c_2n}{k\cdot\ln 2}$

$\cancel{f(x)=c_1kx+c_2x\lg\frac{x}{k}}$

$\cancel{f'(x)=}\ c_1k+c_2$

k 为 $\frac{c_2}{c_1\cdot\ln 2}$

7.4-6 ~~题目不清楚，但很简单~~

~~P(x)~~

7-3

a. $E(X_i)=P(\text{被选作主元})=\frac{1}{n}$

$\cancel{=P(}$

b. 证：$E(T(n))=E\left(\sum_{q=1}^{n}P(q=i)(T(q-1)+T(n-q)+\theta(n))\right)$

$=\sum_{q=1}^{n}E(X_q)E(T(q-1)+T(n-q))+\cancel{\theta(n)}+\theta(n)$

$=\sum_{q=1}^{n}E(X_q(T(q-1)+T(n-q)+\theta(n)))$

$=\sum_{q=1}^{n}\left(E(X_qT(q-1))+E(X_qT(n-q))\right)+\theta(n)$

$=2\sum E(X_q(T(q-1)))$

c. $=\frac{2}{n}\sum E(T(q))$

d.求证：

$$\sum_{k=2}^{n-1} k\lg k \le \frac{1}{2}n^2\lg n - \frac{1}{8}n^2$$

证、

$$左 = \sum_{k=2}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} k\lg k + \sum_{k=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+1}^{n-1} k\lg k \le \sum_{k=2}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} k\lg\frac{n}{2} + \sum_{k=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+1}^{n-1} k\lg n$$

$$\le (2+\cdots+\frac{n}{2})\lg\frac{n}{2} + (\frac{n}{2}+\cdots+n-1)\lg n$$

$$= \left(\frac{\frac{n}{2}(\frac{n}{2}+1)}{2} - 1\right)\lg\frac{n}{2} + \frac{(\frac{3n}{2}-1)\cdot\frac{n}{2}}{2}\lg n$$

$$= (\frac{1}{8}n^2 + \frac{1}{4}n - 1)(\lg n - 1) + (\frac{3}{8}n^2 - \frac{1}{4}n)\lg n$$

$$= \frac{1}{2}n^2\lg n - \frac{1}{8}n^2 - \frac{1}{4}n + 1$$

$$\le \frac{1}{2}n^2\lg n - \frac{1}{8}n^2$$

e.估计 E(T(n))

假设 $E(T(q)) \le aq\lg q$，$q \le n-1$

$$E(T(n)) = \frac{2}{n}\sum_{q=2}^{n-1} E(T(q)) + \Theta(n)$$

$$\le \frac{2a}{n}(2\lg 2 + 3\lg 3 + \cdots + (n-1)\lg(n-1)) + \Theta(n)$$

$$\le \frac{2a}{n}(\frac{1}{2}n^2\lg n - \frac{1}{8}n^2)$$

$$= an\lg n - \frac{1}{8}an + \Theta(n)$$

取足够大的a