

10 Z变换

针对离散信号的复频域分析



如何描述一个系统

1. Z变换的定义：
复频域分析的推广

2. Z变换的性质：
离散信号的复频域分析

3. Z反变换及其应用：
Z变换求解差分方程

如何描述一个系统

1. Z变换的定义：
复频域分析的推广

2. Z变换的性质：
离散信号的复频域分析

3. Z反变换及其应用：
Z变换求解差分方程

拉普拉斯变换到Z变换

- 连续因果信号通过抽样得到离散信号

$$x_s(t) = x(t) \cdot \delta_{T_s}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s)$$

- 两边同时取拉普拉斯变换

$$X_s(s) = \int_0^{\infty} x_s(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \left[\sum_{n=0}^{\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s) \right] e^{-st} dt = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_s) e^{-snT_s}$$

得到

$$\text{令 } z = e^{sT_s}, s = \frac{1}{T_s} \ln z$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_s) z^{-n}$$

- 设置 $T_s = 1$, 因此

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}, \quad z = e^s$$

利用Z变换形式对离散信号进行分析

单边Z变换

- 序列 $x[n]$ 的单边Z变换定义为

$$\begin{aligned} X(z) = \mathcal{Z}[x[n]] &= \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} \\ &= x[0] + \frac{x[1]}{z} + \frac{x[2]}{z^2} + \dots \end{aligned}$$

$X(z)$ 也称为 $x[n]$ 的生成函数

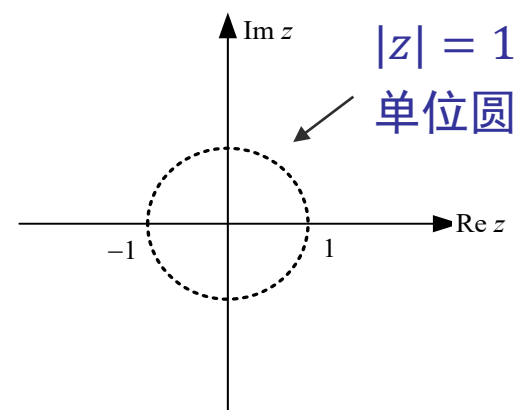
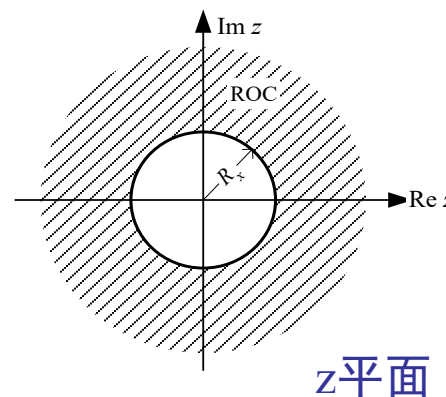
- 其中 z 为复数。离散信号的Z变换是 z^{-1} 级数形式
- Z变换过程表示为

$$x[n] \xrightarrow{z} X(z)$$

- 收敛域 (Region of Convergence, ROC)

- 使上式级数收敛的所有 z 的范围称为 $X(z)$ 的收敛域
- 一般右边序列的收敛域为 z 平面中的一圆外区域

$$|z| > R_x$$



常用单边序列的z变换

- 单位脉冲序列

$$\mathcal{Z}\{\delta[n]\} = 1, \quad |z| \geq 0$$

- 单位阶跃序列

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{u[n]\} &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots \\ &= \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad |z| > 1\end{aligned}$$

单边Z变换及其收敛域

- 斜变序列

$$\mathcal{Z}[x[n]] = \mathcal{Z}[nu[n]] = \sum_{n=0}^{\infty} nz^{-n}$$

- 根据阶跃序列的Z变换

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}}, |z| > 1$$

- 两边对 z^{-1} 求导，有

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(z^{-1})^{n-1} = \frac{1}{(1 - z^{-1})^2}$$

- 因此

$$\mathcal{Z}[nu[n]] = \sum_{n=0}^{\infty} nz^{-n} = \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}, |z| > 1$$

单边Z变换及其收敛域

- 指数序列

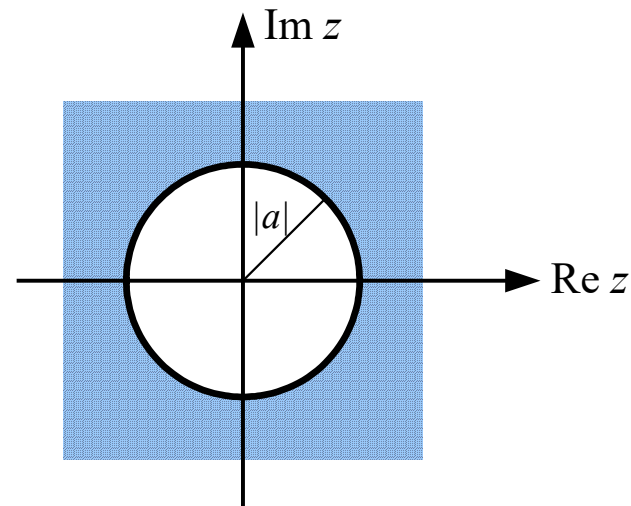
$$x[n] = a^n u[n]$$

- 根据定义

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1 - az^{-1}}, |z| > |a|$$

- 令 $a = e^b$, 当 $|z| > |e^b|$, 有

$$\mathcal{Z} \left[e^{bn} u[n] \right] = \frac{z}{z - e^b} = \frac{1}{1 - e^b z^{-1}}$$



单边Z变换及其收敛域

- 由于

$$\mathcal{Z}[a^n u[n]] = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1 - az^{-1}}, |z| > |a|$$

- 两边对 z^{-1} 求导

$$\sum_{n=0}^{\infty} na^n (z^{-1})^{n-1} = \frac{a}{(1 - az^{-1})^2}$$

- 因此

$$\mathcal{Z}[na^n u[n]] = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2} = \frac{az}{(z - a)^2}$$

双边Z变换

- 双边Z变换

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

- Z反变换

$$x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{n-1} dz$$

- C 为 $X(z)$ 的收敛域中一闭合曲线（包围 $X(z)z^{n-1}$ 极点逆时针积分闭合曲线）
- 离散信号可分解为不同频率复指数 z^n 的线性组合

Z变换的发展历程



Abraham de Moivre

法国数学家，1730年在研究概率论时引入生成函数 (Generating function)，与Z变换有类似的形式



Pierre-Simon Laplace

拉普拉斯1785年使用形如 $\int x^s \varphi(x) dx$ 的变换对整个微分方程进行转换和求解，并研究其性质。1809年使用该变换求解空间任意形式的热扩散求解问题。



Witold Hurewicz

美国数学家，1947年 Witold Hurewicz 在处理基于雷达的抽样数据控制系统中使用Z变换基本想法，能够求解线性、常系数差分方程。



John R. Ragazzini

1952年哥伦比亚大学 Ragazzini和Zadeh命名为Z变换



Lotfi A. Zadeh



Eliahu I. Jury

1973年，美国工程师 E. I. Jury在Z变换基础上发展出高级Z变换，能够处理非抽样周期上的延迟。

如何描述一个系统

1. Z变换的定义：
复频域分析的推广

2. Z变换的性质：
离散信号的复频域分析

3. Z反变换及其应用：
Z变换求解差分方程

单边Z变换的主要性质

- 已知 $x_1[n] \xrightarrow{z} X_1(z), |z| > R_{x1}, x_2[n] \xrightarrow{z} X_2(z), |z| > R_{x2}$

- 线性特性

$$ax_1[n] + bx_2[n] \xrightarrow{z} aX_1(z) + bX_2(z)$$

$$|z| > \max(R_{x1}, R_{x2})$$

单边Z变换的主要性质

$$\mathcal{Z} \left[e^{bn} u[n] \right] = \frac{z}{z - e^b} = \frac{1}{1 - e^b z^{-1}}$$

求 $\sin(\omega_0 n)u[n]$ 和 $\cos(\omega_0 n)u[n]$ 的z变换及收敛域

- 由于

$$\mathcal{Z} \{ e^{j\omega_0 n} u[n] \} = \frac{1}{1 - e^{j\omega_0} z^{-1}}, |z| > 1$$

- 根据欧拉公式，利用线性特性

$$\cos(\omega_0 n)u[n] \longleftrightarrow \frac{1 - \cos \omega_0 z^{-1}}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}, \quad |z| > 1$$

$$\sin(\omega_0 n)u[n] \longleftrightarrow \frac{\sin \omega_0 z^{-1}}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}, \quad |z| > 1$$

单边Z变换的主要性质

- 已知 $x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), |z| > R_x$

- 位移特性

- 因果序列的位移

$$x[n-k]u[n-k] \xleftrightarrow{Z} z^{-k} X(z), |z| > R_x$$

- 非因果序列的位移

$$Z\{x[n+k]u[n]\} = z^k \left[X(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x[n]z^{-n} \right], |z| > R_x$$

$$Z\{x[n-k]u[n]\} = z^{-k} \left[X(z) + \sum_{n=-k}^{-1} x[n]z^{-n} \right], |z| > R_x$$

单边Z变换的主要性质

求 $R_N[n] = u[n] - u[n - N]$ 的Z变换及收敛域

$$u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad |z| > 1$$

- 利用因果序列的**位移特性**和**线性特性**，可得

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{z^{-N}}{1 - z^{-1}} = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}}$$

- 由于 $R_N[n]$ 为有限长序列，故其收敛域为 $|z| > 0$
- 线性加权后序列z变换的ROC可能比原序列z变换的ROC大

单边Z变换的主要性质

- 已知 $x[n] \xrightarrow{Z} X(z), |z| > R_x$

- 指数加权特性

$$a^n x[n] \xrightarrow{Z} X\left(\frac{z}{a}\right), \quad \text{ROC} = |a|R_x$$

单边Z变换的主要性质

求 $a^n \sin(\omega_0 n) u[n]$ 的Z变换及收敛域

$$\sin(\omega_0 n) u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{\sin \omega_0 z^{-1}}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}, |z| > 1$$

- 利用Z变换的指数加权特性, 可得

$$\alpha^n \sin(\omega_0 n) u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{\sin \omega_0 (z/\alpha)^{-1}}{1 - 2(z/\alpha)^{-1} \cos \omega_0 + (z/\alpha)^{-2}}$$

$$= \frac{\alpha \sin \omega_0 z^{-1}}{\alpha^2 - 2\alpha z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}, |z| > |\alpha|$$

单边Z变换的主要性质

- 已知 $x[n] \xrightarrow{z} X(z), |z| > R_x$

- z域微分特性

$$nx[n] \xrightarrow{z} -z \frac{dX(z)}{dz}, \text{ROC} = R_x$$

单边Z变换的主要性质

求 $x[n] = (n + 1)a^n u[n]$ 的z变换及收敛域

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

- 利用z域微分特性, 可得

$$Z\{\textcolor{red}{n}a^n u[n]\} = -z \frac{d \frac{1}{1 - az^{-1}}}{dz} = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}, \quad |z| > |a|$$

- 利用z变换的**线性**特性, 可得

$$(n + 1)a^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{(1 - az^{-1})^2}, \quad |z| > |a|$$

单边Z变换的主要性质

- 已知 $x_1[n] \xrightarrow{Z} X_1(z), |z| > R_{x_1}, x_2[n] \xrightarrow{Z} X_2(z), |z| > R_{x_2}$

- 序列卷积

$$x_1[k] * x_2[k] \xrightarrow{Z} X_1(z)X_2(z)$$

$$|z| \in R_{x_1} \cap R_{x_2}$$

单边Z变换的主要性质

- 已知 $x[n] \xrightarrow{Z} X(z), |z| > R_x$

- 初值与终值定理

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

若 $(z - 1)X(z)$ 的收敛域包含单位圆, 则

$$x[\infty] = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)X(z)$$

单边Z变换的主要性质

$$Z\{x[n+k]u[n]\} = z^k \left[X(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x[n]z^{-n} \right], |z| > R_x$$

已知 $X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$, $|z| > |a|$ 求 $x[0]$, $x[1]$ 和 $x[\infty]$

- 根据初值定理

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{1-az^{-1}} = 1$$

- 根据位移特性有

$$x[n+1]u[n] \xleftrightarrow{Z} z\{X(z) - x[0]\}$$

- 对上式应用初值定理, 即得

$$x[1] = \lim_{z \rightarrow \infty} z\{X(z) - x[0]\} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{a}{1-az^{-1}} = a$$

- 当 $|a| < 1$ 时, $(z-1)X(z)$ 的收敛域包含单位圆, 由终值定理, 有

$$x[\infty] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{1-az^{-1}} = 0$$

Z变换的性质

Z变换性质	内容
线性特性	$ax_1[n] + bx_2[n] \xleftrightarrow{Z} aX_1(z) + bX_2(z), \quad z > \max(R_{x1}, R_{x2})$
因果序列位移特性	$x[n - k]u[n - k] \xleftrightarrow{Z} z^{-k}X(z), z > R_x$
非因果序列的位移	$Z\{x[n - k]u[n]\} = z^{-k} \left[X(z) + \sum_{n=-k}^{-1} x[n]z^{-n} \right], z > R_x$
指数加权特性	$a^n x[n] \xleftrightarrow{Z} X\left(\frac{z}{a}\right), \quad \text{ROC} = a R_x$
z域微分特性	$nx[n] \xleftrightarrow{Z} -z \frac{dX(z)}{dz}, \text{ROC} = R_x$
序列卷积	$x_1[k] * x_2[k] \xleftrightarrow{Z} X_1(z)X_2(z), \quad z \in R_{x_1} \cap R_{x_2}$
初值与终值定理	$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z), \quad x[\infty] = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)X(z)$

Z变换与拉普拉斯变换性质对比

Z变换性质	内容	拉普拉斯变换性质	内容
线性特性	$ax_1[n] + bx_2[n] \xrightarrow{Z} aX_1(z) + bX_2(z)$	线性特性	$a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} a_1X_1(s) + a_2X_2(s)$
因果序列位移特性	$x[n - k]u[n - k] \xrightarrow{Z} z^{-k}X(z)$	时移特性	$x(t - t_0)u(t - t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} e^{-st_0}X(s)$
非因果序列的位移	$Z\{x[n - k]u[n]\} = z^{-k} \left[X(z) + \sum_{n=-k}^{-1} x[n]z^{-n} \right]$	展缩特性 (尺度变换)	$x(at) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right)$
指数加权特性	$a^n x[n] \xrightarrow{Z} X\left(\frac{z}{a}\right)$	指数加权特性	$e^{-\lambda t}x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s + \lambda)$
z域微分特性	$nx[n] \xrightarrow{Z} -z \frac{dX(z)}{dz}$	s域微分	$-tx(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{dX(s)}{ds}$
序列卷积	$x_1[k] * x_2[k] \xrightarrow{Z} X_1(z)X_2(z)$	卷积特性 乘积特性	$x_1(t) * x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_1(s)X_2(s)$ $x_1(t)x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{2\pi j} [X_1(s) * X_2(s)]$
初/终值定理	$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z), x[\infty] = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)X(z)$	初/终值定理	$x(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s), x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$
		微/积分特性	$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} sX(s) - x(0_-),$ $\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{X(s)}{s} + \frac{x^{-1}(0_-)}{s}$

如何描述一个系统

1. Z变换的定义：
复频域分析的推广

2. Z变换的性质：
离散信号的复频域分析

3. Z反变换及其应用：
Z变换求解差分方程

单边Z反变换

- 单边Z反变换的定义

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{k-1} dz$$

- C 为 $X(z)$ 的ROC中的一**闭合**曲线
- 计算方法:
 - 幂级数展开和长除法
 - 留数计算法
 - **部分分式展开**

常见信号的Z变换

信号	形式1	形式2
$\delta[n]$	1	1
$u[n]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$\frac{z}{z - 1}$
$nu[n]$	$\frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$	$\frac{z}{(z - 1)^2}$
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$\frac{z}{z - a}$
$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$\frac{az}{(z - a)^2}$
$\cos(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{1 - \cos \omega_0 z^{-1}}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$	$\frac{z(z - \cos \omega_0)}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}$
$\sin(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{\sin \omega_0 z^{-1}}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$	$\frac{z \cdot \sin \omega_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}$
$\alpha^n \sin(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{\alpha \sin \omega_0 z^{-1}}{1 - 2\alpha z^{-1} \cos \omega_0 + \alpha^2 z^{-2}}$	$\frac{\alpha \sin \omega_0 z^2}{z^2 - 2\alpha z \cos \omega_0 + \alpha^2}$

单边Z反变换

- 部分分式法：将Z变换结果表示为

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}}$$

- 考虑 $m < n$ ，分母多项式无重根

$$X(z) = \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{1 - p_i z^{-1}}$$

- 各部分分式的系数为

$$r_i = (1 - p_i z^{-1})X(z) \Big|_{z=p_i}$$

单边Z反变换

- 部分分式法：将Z变换结果表示为

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}}$$

- $m < n$, 分母多项式在 $z = u$ 处有 l 阶重极点

$$X(z) = \sum_{i=1}^{n-l} \frac{r_i}{1 - p_i z^{-1}} + \sum_{i=0}^{l-1} \frac{q_i}{(1 - u z^{-1})^{l-i}}$$

$$q_i = \frac{1}{(-u)^i i!} \frac{d^i}{d(z^{-1})^i} [(1 - u z^{-1})^l X(z)] \Big|_{z=u}, \quad i = 0, \dots, l-1$$

单边Z反变换

- 部分分式法：将Z变换结果表示为

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}$$

- 考虑 $m \geq n$

根据前两种情况处理

$$X(z) = \sum_{i=1}^{m-n} k_i z^{-i} + \frac{B_1(z^{-1})}{A(z^{-1})}$$

多项式

单边Z反变换

已知 $X(z) = \frac{z^2}{z^2 + a^2} = \frac{1}{1 + a^2 z^{-2}}$, $|z| > a$, 求 $x[n]$

- 根据 $X(z)$ 有一对共轭复根, 由于

$$\sin(\omega_0 n)u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{\sin \omega_0 z^{-1}}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$$

- 可得

$$\sin[\omega_0(n+1)]u[n+1] \xleftrightarrow{z} \frac{\sin \omega_0}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$$

单边Z反变换

已知 $X(z) = \frac{z^2}{z^2 + a^2} = \frac{1}{1 + a^2 z^{-2}}$, $|z| > a$, 求 $x[n]$

- 由于

$$X(z) = \frac{1}{1 + (z/a)^{-2}}$$

- 针对 $X_1(z) = \frac{1}{1 + z^{-2}}$, 可得

$$x_1[n] = \sin\left[\frac{\pi}{2}(n+1)\right]u[n+1]$$

- 由指数加权性质

$$x[n] = a^n \sin\left[\frac{\pi}{2}(n+1)\right]u[n+1]$$

单边Z反变换

$$\mathcal{Z}\{u[n]\} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

已知 $X(z) = \frac{2z^2 - 0.5z}{z^2 - 0.5z - 0.5}$ $|z| > 1$, 求 $x[n]$

$$a^n x[n] \xleftrightarrow{z} X\left(\frac{z}{a}\right),$$

- 将 $X(z)$ 化为 z 的负幂, 可得

$$X(z) = \frac{2 - 0.5z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1} - 0.5z^{-2}} = \frac{A}{1 - z^{-1}} + \frac{B}{1 + 0.5z^{-1}}$$

- 可求得

$$A = (1 - z^{-1})X(z) \Big|_{z=1} = \frac{2 - 0.5z^{-1}}{1 + 0.5z^{-1}} \Big|_{z=1} = 1$$

$$B = (1 + 0.5z^{-1})X(z) \Big|_{z=-0.5} = \frac{2 - 0.5z^{-1}}{1 - z^{-1}} \Big|_{z=-0.5} = 1$$

- 将 $X(z)$ 进行 Z 反变换, 可得

$$x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = u[n] + (-0.5)^n u[n]$$

单边Z反变换

$$(n+1)a^n u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{(1-az^{-1})^2}, |z| > |a|$$

$$\mathcal{Z}\{u[n]\} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$a^n x[n] \xleftrightarrow{Z} X\left(\frac{z}{a}\right),$$

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-az^{-1}},$$

$$\mathcal{Z}\{na^n u[n]\} = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$$

$$\mathcal{Z}[nu[n]] = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

已知 $X(z) = \frac{2}{(1-2z^{-1})^2(1-4z^{-1})}$, $|z| > 4$, 求 $x[n]$

▪ 由于

$$X(z) = \frac{A}{(1-2z^{-1})^2} + \frac{B}{1-2z^{-1}} + \frac{C}{1-4z^{-1}}$$

▪ 可求得

$$A = (1-2z^{-1})^2 X(z) \Big|_{z=2} = \frac{2}{1-4z^{-1}} = -2$$

$$B = \frac{1}{(-2)} \frac{d[X(z)(1-2z^{-1})^2]}{dz^{-1}} \Big|_{z=2} = \frac{1}{-2} \frac{d}{dz^{-1}} \frac{2}{1-4z^{-1}} \Big|_{z=2} = -4$$

$$C = (1-4z^{-1})X(z) \Big|_{z=4} = 8$$

进行Z反变换, 得

$$x[n] = [-2(n+1)2^n - 4 \cdot 2^n + 8 \cdot 4^n]u[n]$$

单边Z反变换（另一种分解方式）

已知 $X(z) = \frac{2}{(1-2z^{-1})^2(1-4z^{-1})}$, $|z| > 4$, 求 $x[n]$

- 可转化为

$$X(z) = \frac{2z^3}{(z-2)^2(z-4)}$$

- 针对 $\frac{X(z)}{z}$ 进行分解

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A}{(z-2)^2} + \frac{B}{z-2} + \frac{C}{z-4}$$

- 可求得

$$C = (z-4) \frac{X(z)}{z} \Big|_{z=4} = 8$$

单边Z反变换（另一种分解方式）

已知 $X(z) = \frac{2}{(1-2z^{-1})^2(1-4z^{-1})}$, $|z| > 4$, 求 $x[n]$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A}{(z-2)^2} + \frac{B}{z-2} + \frac{C}{z-4}$$

▪ 可求得

$$A = (z-2)^2 \frac{X(z)}{z} \Big|_{z=2} = -4$$

$$B = \frac{d}{dz} (z-2)^2 \frac{X(z)}{z} \Big|_{z=2} = -6$$

▪ 因此

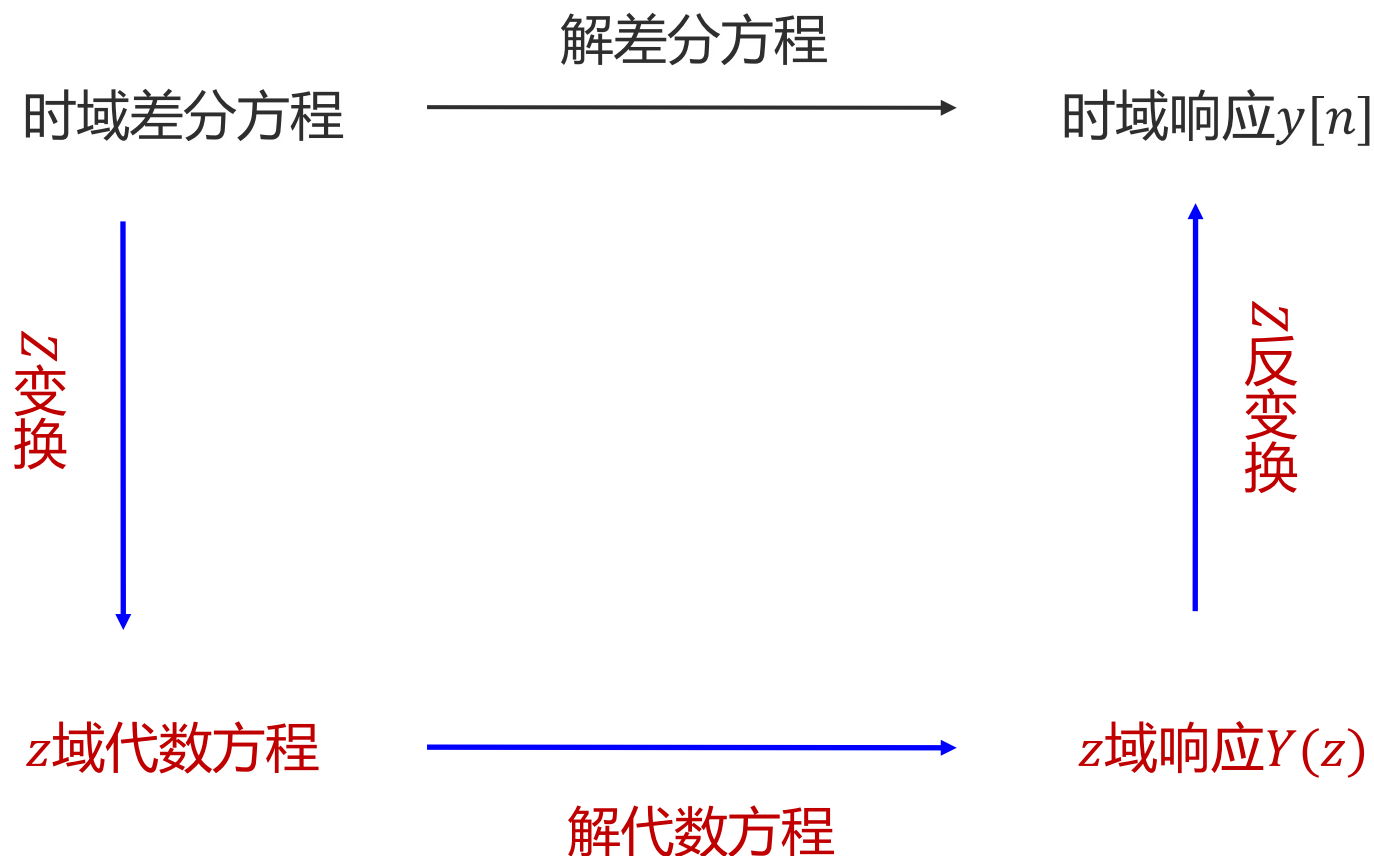
$$X(z) = \frac{-4z}{(z-2)^2} + \frac{-6z}{z-2} + \frac{8z}{z-4}$$

$$-2 \cdot n2^n u[n] \quad -6 \cdot 2^n u[n] \quad 8 \cdot 4^n u[n]$$

$\delta[n]$	1
$u[n]$	$\frac{z}{z-1}$
$nu[n]$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
$a^n u[n]$	$\frac{z}{z-a}$
$na^n u[n]$	$\frac{az}{(z-a)^2}$

离散时间系统响应的 z 域分析

- 使用 z 变换求解差分方程



二阶系统响应的z域求解

$$x[n-k]u[n-k] \xleftrightarrow{Z} z^{-k}X(z)$$

$$Z\{x[n-k]u[n]\} = z^{-k} \left[X(z) + \sum_{n=-k}^{-1} x[n]z^{-n} \right]$$

- 针对差分方程，已知初始状态为 $y[-1], y[-2]$ ，求解

$$y[n] + a_1y[n-1] + a_2y[n-2] = b_0x[n] + b_1x[n-1], \quad n \geq 0$$

- 对差分方程两边做Z变换，利用

$$Z\{y[n-1]u[n]\} = z^{-1}Y(z) + y[-1]$$

$$Z\{y[n-2]u[n]\} = z^{-2}Y(z) + y[-1]z^{-1} + y[-2]$$

- 可得

$$\begin{aligned} Y(z) + a_1z^{-1}Y(z) + a_1y[-1] + a_2z^{-2}Y(z) + a_2y[-2] + a_2y[-1]z^{-1} \\ = b_0X(z) + b_1z^{-1}X(z) \end{aligned}$$

二阶系统响应的z域求解

- 整理 $Y(z)$ 可得

$$Y(z) = \frac{-a_1y[-1] - a_2y[-2] - a_2y[-1]z^{-1}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}} + \frac{b_0 + b_1z^{-1}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}X(z)$$

$Y_{zs}(z)$

- 因此有

$Y_{zi}(z)$

$$Y_{zi}(z) = -\frac{a_1y[-1] + a_2y[-2] + a_2y[-1]z^{-1}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}$$

$$Y_{zs}(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}X(z)$$

综合可得 $y[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{Y_{zi}(z) + Y_{zs}(z)\}$

二阶系统响应的z域求解

某离散LTI系统满足 $y[n] - 4y[n-1] + 4y[n-2] = 4x[n]$, 已知 $y[-1] = 0$, $y[-2] = 2$, $x[n] = (-3)^n u[n]$, 求 $y_{zi}[n]$, $y_{zs}[n]$, $y[n]$.

- 将差分方程两边进行单边Z变换得

$$Y(z) - 4\{z^{-1}Y(z) - y[-1]\} + 4\{z^{-2}Y(z) + z^{-1}y[-1] + y[-2]\} = 4X(z)$$

- 求解此代数方程可得系统完全响应的z域表示式

$$Y(z) = \underbrace{\frac{4y[-1] - 4z^{-1}y[-1] - 4y[-2]}{1 - 4z^{-1} + 4z^{-2}}}_{Y_{zi}(z)} + \underbrace{\frac{4X(z)}{1 - 4z^{-1} + 4z^{-2}}}_{Y_{zs}(z)}$$

二阶系统响应的z域求解

某离散LTI系统满足 $y[n] - 4y[n-1] + 4y[n-2] = 4x[n]$, 已知 $y[-1] = 0$, $y[-2] = 2$, $x[n] = (-3)^n u[n]$, 由z域求 $y_{zi}[n]$, $y_{zs}[n]$, $y[n]$.

▪ 化简 $Y_{zi}(z)$:

$$Y_{zi}(z) = \frac{4y[-1] - 4z^{-1}y[-1] - 4y[-2]}{1 - 4z^{-1} + 4z^{-2}} = \frac{-8}{(1 - 2z^{-1})^2}$$

▪ 可得

$$y_{zi}[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{Y_{zi}(z)\} = -8n(2)^n - 8(2)^n, \quad n \geq 0$$

首先使用 $8n2^n$ 的Z变换, 再使用移位性质消去分子上的 z^{-1}

$$\mathcal{Z}\{\textcolor{red}{n}a^n u[n]\} = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$$

二阶系统响应的z域求解

某离散LTI系统满足 $y[n] - 4y[n-1] + 4y[n-2] = 4x[n]$, 已知 $y[-1] = 0$, $y[-2] = 2$, $x[n] = (-3)^n u[n]$, 由z域求 $y_{zi}[n]$, $y_{zs}[n]$, $y[n]$.

▪ 化简 $Y_{zs}(z)$:

$$Y_{zs}(z) = \frac{4}{1 - 4z^{-1} + 4z^{-2}} \frac{1}{1 + 3z^{-1}} = \frac{1.6}{(1 - 2z^{-1})^2} + \frac{0.96}{1 - 2z^{-1}} + \frac{1.44}{1 + 3z^{-1}}$$

▪ 可得

$$y_{zs}[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{Y_{zs}(z)\} = [1.6(n+1)(2)^n + 0.96(2)^n + 1.44(-3)^n]u[n]$$

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n] = -6.4n(2)^n - 5.44(2)^n + 1.44(-3)^n, n \geq 0$$

二阶系统响应的z域求解

已知一LTI离散系统满足差分方程

$$\begin{cases} 2y[n+2] + 3y[n+1] + y[n] = x[n+2] + x[n+1] - x[n] & n \geq 0 \\ y[-1] = 2, y[-2] = -1, x[n] = u[n] \end{cases}$$

由z域求系统零输入响应，零状态响应和完全响应

- 令 $n = n - 2$

$$2y[n] + 3y[n-1] + y[n-2] = x[n] + x[n-1] - x[n-2]$$

- 对差分方程两边做Z变换

$$\begin{aligned} 2Y(z) + 3(z^{-1}Y(z) + y[-1]) + (z^{-2}Y(z) + y[-1]z^{-1} + y[-2]) \\ = (1 + z^{-1} - z^{-2})X(z) \end{aligned}$$

可得

$$Y(z) = -\frac{3y[-1] + y[-1]z^{-1} + y[-2]}{2 + 3z^{-1} + z^{-2}} + \frac{1 + z^{-1} - z^{-2}}{2 + 3z^{-1} + z^{-2}}X(z)$$

二阶系统响应的z域求解

已知一LTI离散系统满足差分方程

$$\begin{cases} 2y[n+2] + 3y[n+1] + y[n] = x[n+2] + x[n+1] - x[n] & n \geq 0 \\ y[-1] = 2, y[-2] = -1, x[n] = u[n] \end{cases}$$

由z域求系统零输入响应，零状态响应和完全响应

- 零输入响应为

$$\begin{aligned} Y_{zi}(z) &= -\frac{3y[-1] + y[-1]z^{-1} + y[-2]}{2 + 3z^{-1} + z^{-2}} = -\frac{5 + 2z^{-1}}{2 + 3z^{-1} + z^{-2}} \\ &= \frac{-3}{1 + z^{-1}} + \frac{0.5}{1 + 0.5z^{-1}} \end{aligned}$$

- 因此

$$y_{zi}[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{Y_{zi}(z)\} = 3(-1)^{n+1} - (-0.5)^{n+1}, n \geq 0$$

二阶系统响应的z域求解

已知一LTI离散系统满足差分方程

$$\begin{cases} 2y[n+2] + 3y[n+1] + y[n] = x[n+2] + x[n+1] - x[n] & n \geq 0 \\ y[-1] = 2, y[-2] = -1, x[n] = u[n] \end{cases}$$

由z域求系统零输入响应，零状态响应和完全响应

- 由于

$$u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

- 零状态响应为

$$Y_{zs}(z) = \frac{(1 + z^{-1} - z^{-2})}{2 + 3z^{-1} + z^{-2}} \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{1/6}{1 - z^{-1}} + \frac{-0.5}{1 + z^{-1}} + \frac{5/6}{1 + 0.5z^{-1}}$$

- 因此

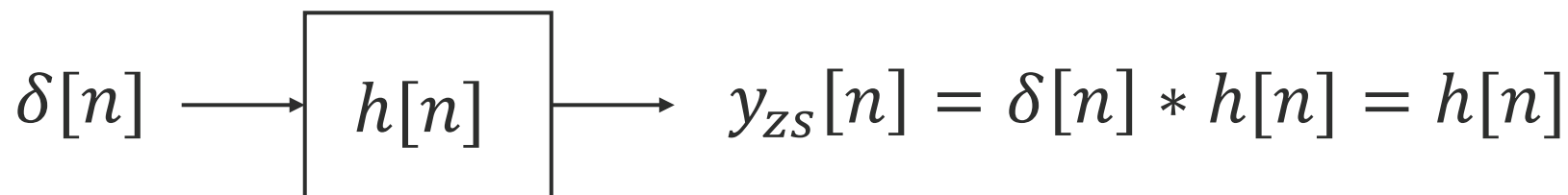
$$y_{zs}[n] = Z^{-1}\{Y_{zs}(z)\} = \{1/6 - 0.5(-1)^n + (5/6)(-0.5)^n\}u[n]$$

系统函数

- 系统在**零状态**条件下，输出的Z变换与输入的Z变换之比，记为 $H(z)$

$$H(z) = \frac{\mathcal{Z}\{y_{zs}[n]\}}{\mathcal{Z}\{x[n]\}} = \frac{Y_{zs}(z)}{X(z)}$$

- $H(z)$ 与 $h[n]$ 的关系



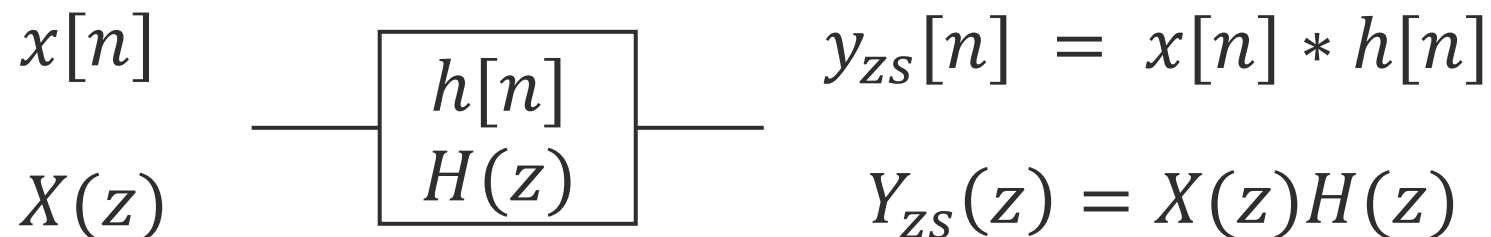
- 因此

$$H(z) = \frac{\mathcal{Z}\{y_{zs}[n]\}}{\mathcal{Z}\{\delta[n]\}} = \frac{\mathcal{Z}\{h[n]\}}{1} = \mathcal{Z}\{h[n]\}$$

有 $H(z) = \mathcal{Z}\{h[n]\}$, $h[n] = \mathcal{Z}^{-1}[H(z)]$

系统函数

- 求零状态响应



- 求 $H(z)$ 的方法

- 由系统的单位脉冲响应求解: $H(z) = Z\{h[n]\}$

- 由定义

- 由系统的差分方程写出 $H(z)$

系统函数

求单位延时器 $y[n] = x[n - 1]$ 的系统函数 $H(z)$ 。

- 设

$$x[n] \xrightarrow{z} X(z)$$

- 利用 z 变换的位移特性，有

$$x[n - 1] \xrightarrow{z} z^{-1}X(z)$$

- 根据系统函数的定义，可得

$$H(z) = \frac{Y_{zs}(z)}{X(z)} = \frac{z^{-1}X(z)}{X(z)} = z^{-1}$$

- 即单位延时器的系统函数 $H(z)$ 为 z^{-1}

系统函数

- 离散系统使用差分方程

$$y[n] - ay[n-1] = bx[n]$$

描述, 求系统函数 $H(z)$ 和 $h[n]$

- 两边同时做Z变换

$$Y(z) - az^{-1}Y(z) - ay[-1] = bX(z)$$

即

$$Y(z) = \frac{b}{1 - az^{-1}}X(z) + \frac{ay[-1]}{1 - az^{-1}}$$

零状态下 $y[-1] = 0$,

$$H(z) = \frac{b}{1 - az^{-1}}, \quad h[n] = ba^n u[n]$$

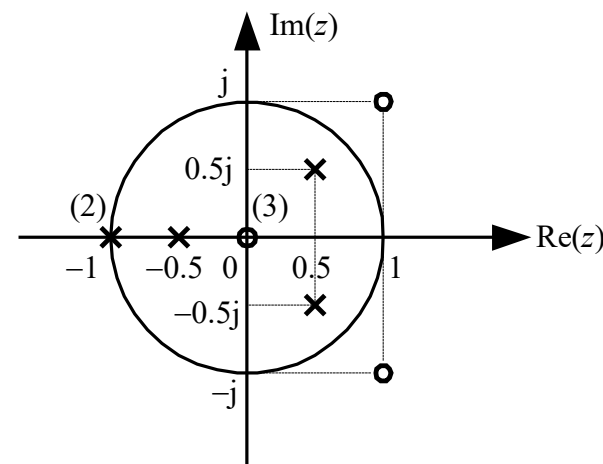
系统函数的零极点分布

- 系统函数可以表达为零极点增益形式，即

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = K \frac{(z - r_1)(z - r_2) \cdots (z - r_m)}{(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)}$$

- $D(z) = 0$ 的根是 $H(z)$ 的极点，在 z 平面用 \times 表示。
- $N(z) = 0$ 的根是 $H(z)$ 的零点，在 z 平面用 o 表示

$$H(z) = \frac{z^3(z - 1 - j)(z - 1 + j)}{(z + 0.5)(z + 1)^2(z - 0.5 - j0.5)(z - 0.5 + j0.5)}$$



零极点与时域特性

- 由系统函数 $H(z)$ 的零极点分布, 可将 $H(z)$ 展开成部分分式, 对每个部分分式取 Z 反变换可得 $h[n]$ 。
- 系统的时域特性主要取决于系统的**极点**
- 如 $H(z)$ 为单极点时, 有

$$H(z) = K \frac{(z - r_1)(z - r_2) \cdots (z - r_m)}{(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_k)} = \sum_{i=1}^k \frac{A_i}{z - z_i}$$

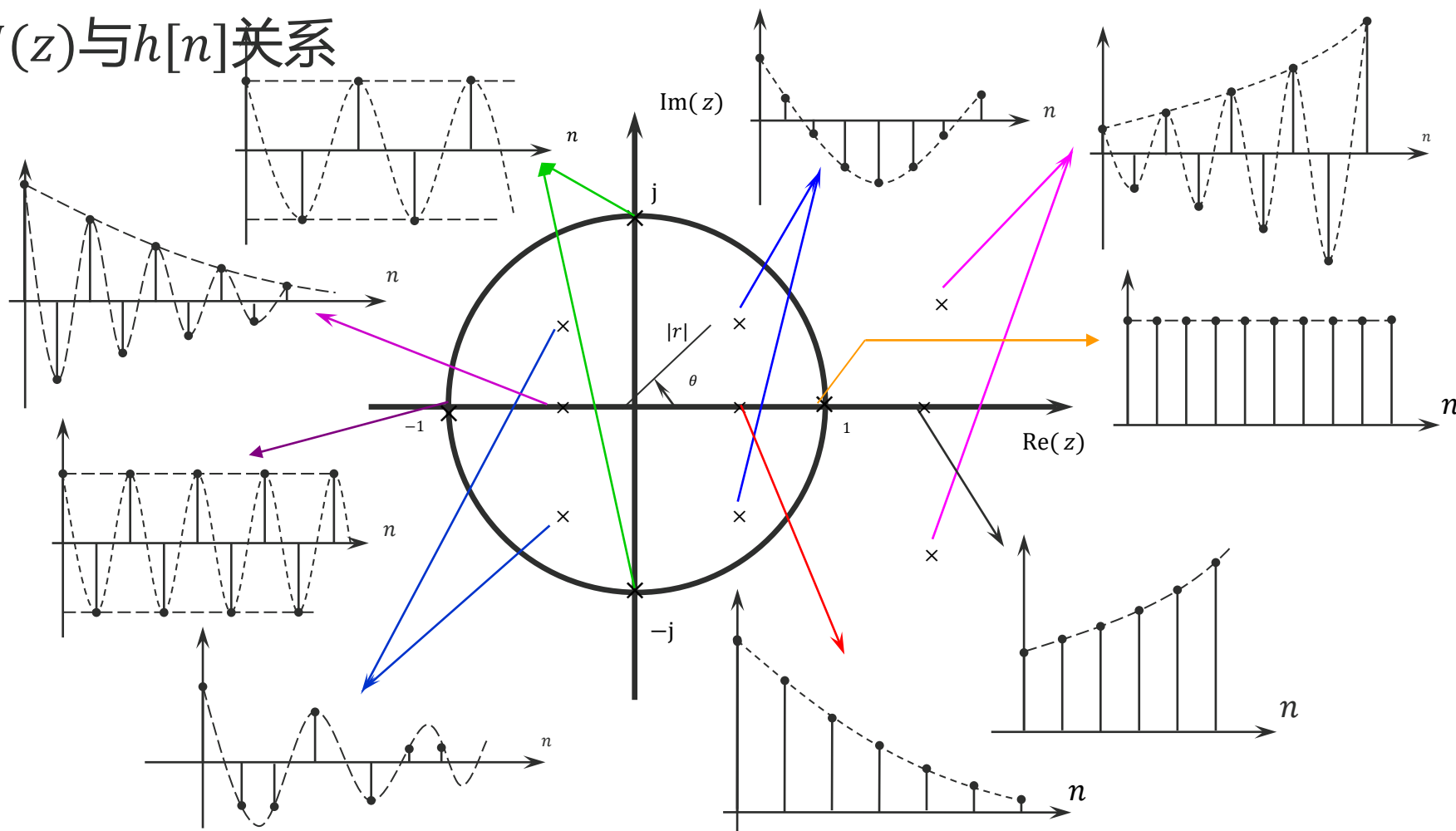
$$h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} = \sum_{i=1}^k A_i (z_i)^{n-1} u[n - 1]$$

零极点与时域特性

$H(z)$ 的极点, 在 z 平面用 \times 表示

$H(z)$ 的零点, 在 z 平面用 \circ 表示

离散系统 $H(z)$ 与 $h[n]$ 关系



离散系统的稳定性

- 离散LTI系统稳定的充要条件是

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

- 由 $H(z)$ 判断系统的稳定性：
 - $H(z)$ 的收敛域包含单位圆则系统稳定
 - 因果系统的极点全在单位圆内则该系统稳定

离散系统的稳定性

判断下面因果LTI离散系统的稳定性

$$H(z) = \frac{1}{(1 - 0.5z^{-1})(1 - 1.5z^{-1})}$$

- 从收敛域看
 - 该因果系统的收敛域为 $|z| > 1.5$
 - 收敛域不包含单位圆，故系统不稳定
- 从极点看
 - 系统的极点为 $z_1 = 0.5$, $z_2 = 1.5$
 - 极点 $z_2 = 1.5$ 在单位圆外，故系统不稳定。

离散系统的稳定性

- 离散系统对应的差分方程为

$$y[n] + 0.2y[n-1] - 0.24y[n-2] = x[n] + x[n-1]$$

求 $H(z)$, $h[n]$, 判断此因果系统是否稳定, 当 $x[n] = u[n]$ 时的零状态响应

- 两边进行Z变换

$$Y(z) + 0.2z^{-1}Y(z) - 0.24z^{-2}Y(z) = X(z) + z^{-1}X(z)$$

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 + 0.2z^{-1} - 0.24z^{-2}} = \frac{z(z+1)}{(z-0.4)(z+0.6)}$$

- 极点为0.4和-0.6, 在单位圆内, 收敛域为 $|z| > 0.6$, 为稳定的因果系统

离散系统的稳定性

- 离散系统对应的差分方程为

$$y[n] + 0.2y[n - 1] - 0.24y[n - 2] = x[n] + x[n - 1]$$

求 $H(z)$, $h[n]$, 判断此因果系统是否稳定, 当 $x[n] = u[n]$ 时的零状态响应

- 分解

$$H(z) = \frac{z(z + 1)}{(z - 0.4)(z + 0.6)} = \frac{1.4}{(1 - 0.4z^{-1})} - \frac{0.4}{(1 + 0.6z^{-1})}$$

- 进行Z反变换

$$h[n] = (1.4(0.4)^n - 0.4(-0.6)^n)u[n]$$

离散系统的稳定性

- 离散系统对应的差分方程为

$$y[n] + 0.2y[n - 1] - 0.24y[n - 2] = x[n] + x[n - 1]$$

求 $H(z)$, $h[n]$, 判断此因果系统是否稳定, 当 $x[n] = u[n]$ 时的零状态响应

- 若 $x[n] = u[n]$, $X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$, 则

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 + 0.2z^{-1} - 0.24z^{-2}} \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

- 进行Z反变换

$$y[n] = (2.08 - 0.93(0.4)^n - 0.15(-0.6)^n)u[n]$$