

10 Z变换

针对离散信号的复频域分析



如何描述一个系统

1. Z变换的定义：
复频域分析的推广

2. Z变换的性质：
离散信号的复频域分析

3. Z反变换及其应用：
Z变换求解差分方程

如何描述一个系统

1. Z变换的定义：
复频域分析的推广

2. Z变换的性质：
离散信号的复频域分析

3. Z反变换及其应用：
Z变换求解差分方程

拉普拉斯变换到Z变换

- 连续因果信号通过抽样得到离散信号

$$x_s(t) = x(t) \cdot \delta_{T_s}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s)$$

- 两边同时取拉普拉斯变换

$$X_s(s) = \int_0^{\infty} x_s(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \left[\sum_{n=0}^{\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s) \right] e^{-st} dt = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_s) e^{-snT_s}$$

得到

$$\text{令 } z = e^{sT_s}, s = \frac{1}{T_s} \ln z$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_s) z^{-n}$$

- 设置 $T_s = 1$, 因此

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}, \quad z = e^s$$

利用Z变换形式对离散信号进行分析

单边Z变换

- 序列 $x[n]$ 的单边Z变换定义为

$$\begin{aligned} X(z) = Z[x[n]] &= \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} \\ &= x[0] + \frac{x[1]}{z} + \frac{x[2]}{z^2} + \dots \end{aligned}$$

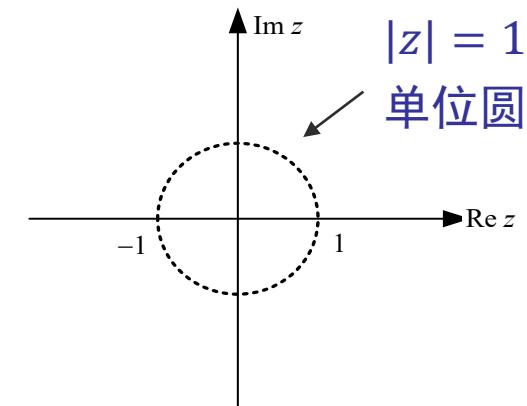
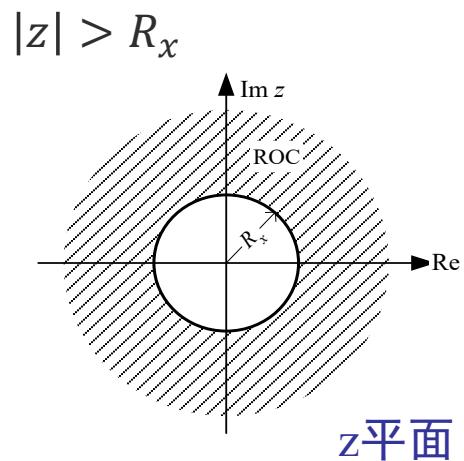
$X(z)$ 也称为 $x[n]$ 的生成函数

- 其中 z 为复数。离散信号的Z变换是 z^{-1} 级数形式
- Z变换过程表示为

$$x[n] \xrightarrow{Z} X(z)$$

- 收敛域 (Region of Convergence, ROC)

- 使上式级数收敛的所有 z 的范围称为 $X(z)$ 的收敛域
- 一般右边序列的收敛域为 z 平面中的一圆外区域



常用单边序列的z变换

- 单位脉冲序列

$$Z\{\delta[n]\} = 1, \quad |z| \geq 0$$

- 单位阶跃序列

$$\begin{aligned} Z\{u[n]\} &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots \\ &= \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad |z| > 1 \end{aligned}$$

单边Z变换及其收敛域

- 斜变序列

$$\mathcal{Z}[x[n]] = \mathcal{Z}[nu[n]] = \sum_{n=0}^{\infty} nz^{-n}$$

- 根据阶跃序列的Z变换

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}}, |z| > 1$$

- 两边对 z^{-1} 求导，有

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(z^{-1})^{n-1} = \frac{1}{(1 - z^{-1})^2}$$

- 因此

$$\mathcal{Z}[nu[n]] = \sum_{n=0}^{\infty} nz^{-n} = \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}, |z| > 1$$

单边Z变换及其收敛域

- 指数序列

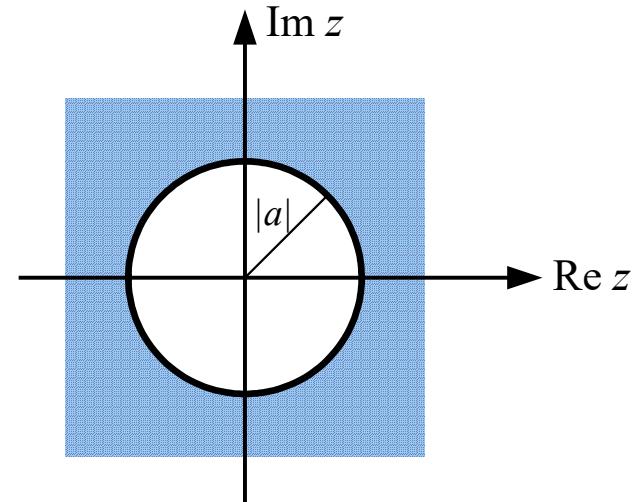
$$x[n] = a^n u[n]$$

- 根据定义

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1 - az^{-1}}, |z| > |a|$$

- 令 $a = e^b$, 当 $|z| > |e^b|$, 有

$$\mathcal{Z}[e^{bn} u[n]] = \frac{z}{z - e^b} = \frac{1}{1 - e^b z^{-1}}$$



单边Z变换及其收敛域

- 由于

$$\mathcal{Z}[a^n u[n]] = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1 - az^{-1}}, |z| > |a|$$

- 两边对 z^{-1} 求导

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a^n (z^{-1})^{n-1} = \frac{a}{(1 - az^{-1})^2}$$

- 因此

$$\mathcal{Z}[na^n u[n]] = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2} = \frac{az}{(z - a)^2}$$

双边Z变换

- 双边Z变换

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

- Z反变换

$$x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{n-1} dz$$

- C 为 $X(z)$ 的收敛域中一闭合曲线 (包围 $X(z)z^{n-1}$ 极点逆时针积分闭合曲线)
- 离散信号可分解为不同频率复指数 z^n 的线性组合

Z变换的发展历程



Abraham de Moivre



Pierre-Simon
Laplace



Witold Hurewicz



John R. Ragazzini Lotfi A. Zadeh



Eliahu I. Jury

法国数学家，
1730年在研究
概率论时引入
生成函数
(Generating
function)，与Z
变换有类似的形式

拉普拉斯1785年使
用形如
 $\int x^s \varphi(x) dx$
的变换对整个微分
方程进行转换和求
解，并研究其性质。
1809年使用该变换
求解空间任意形式
的热扩散求解问题。

美国数学家，
1947年 Witold
Hurewicz
在处理基于雷
达的抽样数据
控制系统中使
用Z变换基本想
法，能够求解
线性、常系数
差分方程。

1952年哥伦比亚大学
Raga**zz**ini和Zadeh命名
为Z变换

1973年，美国
工程师 E. I.
Jury在Z变换基
础上发展出高
级Z变换，能
够处理非抽样
周期上的延迟。

如何描述一个系统

1. Z变换的定义：
复频域分析的推广

2. Z变换的性质：
离散信号的复频域分析

3. Z反变换及其应用：
Z变换求解差分方程

单边Z变换的主要性质

- 已知 $x_1[n] \xrightarrow{Z} X_1(z), |z| > R_{x1}$, $x_2[n] \xrightarrow{Z} X_2(z), |z| > R_{x2}$

- 线性特性

$$ax_1[n] + bx_2[n] \xrightarrow{Z} aX_1(z) + bX_2(z)$$

$$|z| > \max(R_{x1}, R_{x2})$$

单边Z变换的主要性质

$$Z[e^{bn}u[n]] = \frac{z}{z - e^b} = \frac{1}{1 - e^b z^{-1}}$$

求 $\sin(\omega_0 n)u[n]$ 和 $\cos(\omega_0 n)u[n]$ 的z变换及收敛域

- 由于

$$Z\{e^{j\omega_0 n}u[n]\} = \frac{1}{1 - e^{j\omega_0}z^{-1}}, |z| > 1$$

- 根据欧拉公式，利用线性特性

$$\cos(\omega_0 n)u[n] \longleftrightarrow \frac{1 - \cos \omega_0 z^{-1}}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}, \quad |z| > 1$$

$$\sin(\omega_0 n)u[n] \longleftrightarrow \frac{\sin \omega_0 z^{-1}}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}, \quad |z| > 1$$

单边Z变换的主要性质

- 已知 $x[n] \xrightarrow{Z} X(z), |z| > R_x$

- 位移特性

- 因果序列的位移

$$x[n - k]u[n - k] \xrightarrow{Z} z^{-k}X(z), |z| > R_x$$

- 非因果序列的位移

$$Z\{x[n + k]u[n]\} = z^k \left[X(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x[n]z^{-n} \right], |z| > R_x$$

$$Z\{x[n - k]u[n]\} = z^{-k} \left[X(z) + \sum_{n=-k}^{-1} x[n]z^{-n} \right], |z| > R_x$$

单边Z变换的主要性质

求 $R_N[n] = u[n] - u[n - N]$ 的Z变换及收敛域

$$u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad |z| > 1$$

- 利用因果序列的**位移特性和线性特性**, 可得

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{z^{-N}}{1 - z^{-1}} = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}}$$

- 由于 $R_N[n]$ 为有限长序列, 故其收敛域为 $|z| > 0$
- 线性加权后序列Z变换的ROC可能比原序列Z变换的ROC大

单边Z变换的主要性质

- 已知 $x[n] \xrightarrow{Z} X(z), |z| > R_x$

- 指数加权特性

$$a^n x[n] \xrightarrow{Z} X\left(\frac{z}{a}\right), \quad \text{ROC} = |a|R_x$$

单边Z变换的主要性质

求 $a^n \sin(\omega_0 n) u[n]$ 的Z变换及收敛域

$$\sin(\omega_0 n) u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{\sin \omega_0 z^{-1}}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}, |z| > 1$$

- 利用Z变换的指数加权特性，可得

$$a^n \sin(\omega_0 n) u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{\sin \omega_0 (z/\alpha)^{-1}}{1 - 2(z/\alpha)^{-1} \cos \omega_0 + (z/\alpha)^{-2}}$$

$$= \frac{\alpha \sin \omega_0 z^{-1}}{\alpha^2 - 2\alpha z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}, |z| > |\alpha|$$

单边Z变换的主要性质

- 已知 $x[n] \xrightarrow{z} X(z), |z| > R_x$
- z 域微分特性

$$nx[n] \xrightarrow{z} -z \frac{dX(z)}{dz}, \text{ROC} = R_x$$

单边Z变换的主要性质

求 $x[n] = (n + 1)a^n u[n]$ 的z变换及收敛域

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

- 利用z域微分特性，可得

$$Z\{\textcolor{red}{n}a^n u[n]\} = -z \frac{d}{dz} \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}, \quad |z| > |a|$$

- 利用z变换的线性特性，可得

$$(n + 1)a^n u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{(1 - az^{-1})^2}, \quad |z| > |a|$$

单边Z变换的主要性质

- 已知 $x_1[n] \xrightarrow{Z} X_1(z), |z| > R_{x_1}$, $x_2[n] \xrightarrow{Z} X_2(z), |z| > R_{x_2}$
- 序列卷积

$$x_1[k] * x_2[k] \xrightarrow{Z} X_1(z)X_2(z)$$

$$|z| \in R_{x_1} \cap R_{x_2}$$

单边Z变换的主要性质

- 已知 $x[n] \xrightarrow{z} X(z), |z| > R_x$

- 初值与终值定理

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

若 $(z - 1)X(z)$ 的收敛域包含单位圆，则

$$x[\infty] = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)X(z)$$

单边Z变换的主要性质

$$Z\{x[n+k]u[n]\} = z^k \left[X(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x[n]z^{-n} \right], |z| > R_x$$

已知 $X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$, $|z| > |a|$ 求 $x[0]$, $x[1]$ 和 $x[\infty]$

- 根据初值定理

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{1-az^{-1}} = 1$$

- 根据位移特性有

$$x[n+1]u[n] \xleftrightarrow{z} z\{X(z) - x[0]\}$$

- 对上式应用初值定理, 即得

$$x[1] = \lim_{z \rightarrow \infty} z\{X(z) - x[0]\} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{a}{1-az^{-1}} = a$$

- 当 $|a| < 1$ 时, $(z-1)X(z)$ 的收敛域包含单位圆, 由终值定理, 有

$$x[\infty] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{1-az^{-1}} = 0$$

Z变换的性质

Z变换性质	内容
线性特性	$ax_1[n] + bx_2[n] \xleftrightarrow{Z} aX_1(z) + bX_2(z), z > \max(R_{x1}, R_{x2})$
因果序列位移特性	$x[n-k]u[n-k] \xleftrightarrow{Z} z^{-k}X(z), z > R_x$
非因果序列的位移	$Z\{x[n-k]u[n]\} = z^{-k} \left[X(z) + \sum_{n=-k}^{-1} x[n]z^{-n} \right], z > R_x$
指数加权特性	$a^n x[n] \xleftrightarrow{Z} X\left(\frac{z}{a}\right), \text{ROC} = a R_x$
z 域微分特性	$nx[n] \xleftrightarrow{Z} -z \frac{dX(z)}{dz}, \text{ROC} = R_x$
序列卷积	$x_1[k] * x_2[k] \xleftrightarrow{Z} X_1(z)X_2(z), z \in R_{x_1} \cap R_{x_2}$
初值与终值定理	$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z), x[\infty] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z)$

Z变换与拉普拉斯变换性质对比

Z变换性质	内容	拉普拉斯变换性质	内容
线性特性	$ax_1[n] + bx_2[n] \xrightarrow{Z} aX_1(z) + bX_2(z)$	线性特性	$a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} a_1X_1(s) + a_2X_2(s)$
因果序列位移特性	$x[n-k]u[n-k] \xrightarrow{Z} z^{-k}X(z)$	时移特性	$x(t-t_0)u(t-t_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-st_0}X(s)$
非因果序列的位移	$Z\{x[n-k]u[n]\} \\ = z^{-k} \left[X(z) + \sum_{n=-k}^{-1} x[n]z^{-n} \right]$	展缩特性 (尺度变换)	$x(at) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right)$
指数加权特性	$a^n x[n] \xrightarrow{Z} X\left(\frac{z}{a}\right)$	指数加权特性	$e^{-\lambda t}x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s+\lambda)$
z 域微分特性	$nx[n] \xrightarrow{Z} -z \frac{dX(z)}{dz}$	s 域微分	$-tx(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{dX(s)}{ds}$
序列卷积	$x_1[k] * x_2[k] \xrightarrow{Z} X_1(z)X_2(z)$	卷积特性 乘积特性	$x_1(t) * x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X_1(s)X_2(s) \\ x_1(t)x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{2\pi j} [X_1(s) * X_2(s)]$
初/终值定理	$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z), \quad x[\infty] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z)$	初/终值定理	$x(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s), \quad x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$
		微/积分特性	$\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}} sX(s) - x(0_-), \\ \int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{X(s)}{s} + \frac{x^{-1}(0_-)}{s}$

如何描述一个系统

1. Z变换的定义：
复频域分析的推广

2. Z变换的性质：
离散信号的复频域分析

3. Z反变换及其应用：
Z变换求解差分方程

单边Z反变换

- 单边Z反变换的定义

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{k-1} dz$$

- C 为 $X(z)$ 的ROC中的一闭合曲线

- 计算方法：

- 幂级数展开和长除法
- 留数计算法
- 部分分式展开

常见信号的Z变换

信号	形式1	形式2
$\delta[n]$	1	1
$u[n]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$\frac{z}{z - 1}$
$nu[n]$	$\frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$	$\frac{z}{(z - 1)^2}$
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$\frac{z}{z - a}$
$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$\frac{az}{(z - a)^2}$
$\cos(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{1 - \cos \omega_0 z^{-1}}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$	$\frac{z(z - \cos \omega_0)}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}$
$\sin(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{\sin \omega_0 z^{-1}}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$	$\frac{z \cdot \sin \omega_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}$
$\alpha^n \sin(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{\alpha \sin \omega_0 z^{-1}}{1 - 2\alpha z^{-1} \cos \omega_0 + \alpha^2 z^{-2}}$	$\frac{\alpha \sin \omega_0 z^2}{z^2 - 2\alpha z \cos \omega_0 + \alpha^2}$

单边Z反变换

- 部分分式法：将Z变换结果表示为

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}}$$

- 考虑 $m < n$, 分母多项式无重根

$$X(z) = \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{1 - p_i z^{-1}}$$

- 各部分分式的系数为

$$r_i = (1 - p_i z^{-1}) X(z) \Big|_{z=p_i}$$

单边Z反变换

- 部分分式法：将Z变换结果表示为

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}}$$

- $m < n$, 分母多项式在 $z = u$ 处有 l 阶重极点

$$X(z) = \sum_{i=1}^{n-l} \frac{r_i}{1 - p_i z^{-1}} + \sum_{i=0}^{l-1} \frac{q_i}{(1 - uz^{-1})^{l-i}}$$

$$q_i = \frac{1}{(-u)^i i!} \frac{d^i}{dz^i} \left[(1 - uz^{-1})^l X(z) \right] \Big|_{z=u}, \quad i = 0, \dots, l-1$$

单边Z反变换

- 部分分式法：将Z变换结果表示为

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}}$$

- 考虑 $m \geq n$

根据前两种情况处理

$$X(z) = \sum_{i=1}^{m-n} k_i z^{-i} + \frac{B_1(z^{-1})}{A(z^{-1})}$$

多项式

单边Z反变换

已知 $X(z) = \frac{z^2}{z^2 + a^2} = \frac{1}{1 + a^2 z^{-2}}$, $|z| > a$, 求 $x[n]$

- 根据 $X(z)$ 有一对共轭复根, 由于

$$\sin(\omega_0 n)u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{\sin \omega_0 z^{-1}}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$$

- 可得

$$\sin[\omega_0(n+1)]u[n+1] \xleftrightarrow{Z} \frac{\sin \omega_0}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$$

单边Z反变换

已知 $X(z) = \frac{z^2}{z^2 + a^2} = \frac{1}{1 + a^2 z^{-2}}$, $|z| > a$, 求 $x[n]$

- 由于

$$X(z) = \frac{1}{1 + (z/a)^{-2}}$$

- 针对 $X_1(z) = \frac{1}{1+z^{-2}}$, 可得

$$x_1[n] = \sin\left[\frac{\pi}{2}(n+1)\right]u[n+1]$$

- 由指数加权性质

$$x[n] = a^n \sin\left[\frac{\pi}{2}(n+1)\right]u[n+1]$$

单边Z反变换

$$Z\{u[n]\} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

已知 $X(z) = \frac{2z^2 - 0.5z}{z^2 - 0.5z - 0.5}$ $|z| > 1$, 求 $x[n]$

$$a^n x[n] \xleftrightarrow{Z} X\left(\frac{z}{a}\right),$$

- 将 $X(z)$ 化为 z 的负幂, 可得

$$X(z) = \frac{2 - 0.5z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1} - 0.5z^{-2}} = \frac{A}{1 - z^{-1}} + \frac{B}{1 + 0.5z^{-1}}$$

- 可求得

$$A = (1 - z^{-1})X(z) \Big|_{z=1} = \frac{2 - 0.5z^{-1}}{1 + 0.5z^{-1}} \Big|_{z=1} = 1$$

$$B = (1 + 0.5z^{-1})X(z) \Big|_{z=-0.5} = \frac{2 - 0.5z^{-1}}{1 - z^{-1}} \Big|_{z=-0.5} = 1$$

- 将 $X(z)$ 进行 Z 反变换, 可得

$$x[n] = Z^{-1}\{X(z)\} = u[n] + (-0.5)^n u[n]$$

单边Z反变换

$$(n+1)a^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{(1-az^{-1})^2}, |z| > |a|$$

$$Z\{u[n]\} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

已知 $X(z) = \frac{2}{(1-2z^{-1})^2(1-4z^{-1})}$, $|z| > 4$, 求 $x[n]$

▪ 由于

$$X(z) = \frac{A}{(1-2z^{-1})^2} + \frac{B}{1-2z^{-1}} + \frac{C}{1-4z^{-1}}$$

▪ 可求得

$$A = (1-2z^{-1})^2 X(z) \Big|_{z=2} = \frac{2}{1-4z^{-1}} = -2$$

$$B = \frac{1}{(-2)} \frac{d[X(z)(1-2z^{-1})^2]}{dz^{-1}} \Big|_{z=2} = \frac{1}{-2} \frac{d}{dz^{-1}} \frac{2}{1-4z^{-1}} \Big|_{z=2} = -4$$

$$C = (1-4z^{-1}) X(z) \Big|_{z=4} = 8$$

进行Z反变换, 得

$$x[n] = [-2(n+1)2^n - 4 \cdot 2^n + 8 \cdot 4^n]u[n]$$

$$a^n x[n] \xleftrightarrow{z} X\left(\frac{z}{a}\right),$$

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-az^{-1}},$$

$$Z\{\textcolor{red}{n}a^n u[n]\} = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$$

$$Z[nu[n]] = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

单边Z反变换 (另一种分解方式)

已知 $X(z) = \frac{2}{(1-2z^{-1})^2(1-4z^{-1})}$, $|z| > 4$, 求 $x[n]$

- 可转化为

$$X(z) = \frac{2z^3}{(z-2)^2(z-4)}$$

- 针对 $\frac{X(z)}{z}$ 进行分解

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A}{(z-2)^2} + \frac{B}{z-2} + \frac{C}{z-4}$$

- 可求得

$$C = (z-4) \frac{X(z)}{z} \Big|_{z=4} = 8$$

单边Z反变换 (另一种分解方式)

已知 $X(z) = \frac{2}{(1-2z^{-1})^2(1-4z^{-1})}$, $|z| > 4$, 求 $x[n]$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A}{(z-2)^2} + \frac{B}{z-2} + \frac{C}{z-4}$$

■ 可求得

$$A = (z-2)^2 \frac{X(z)}{z} \Big|_{z=2} = -4$$

$$B = \frac{d}{dz} (z-2)^2 \frac{X(z)}{z} \Big|_{z=2} = -6$$

■ 因此

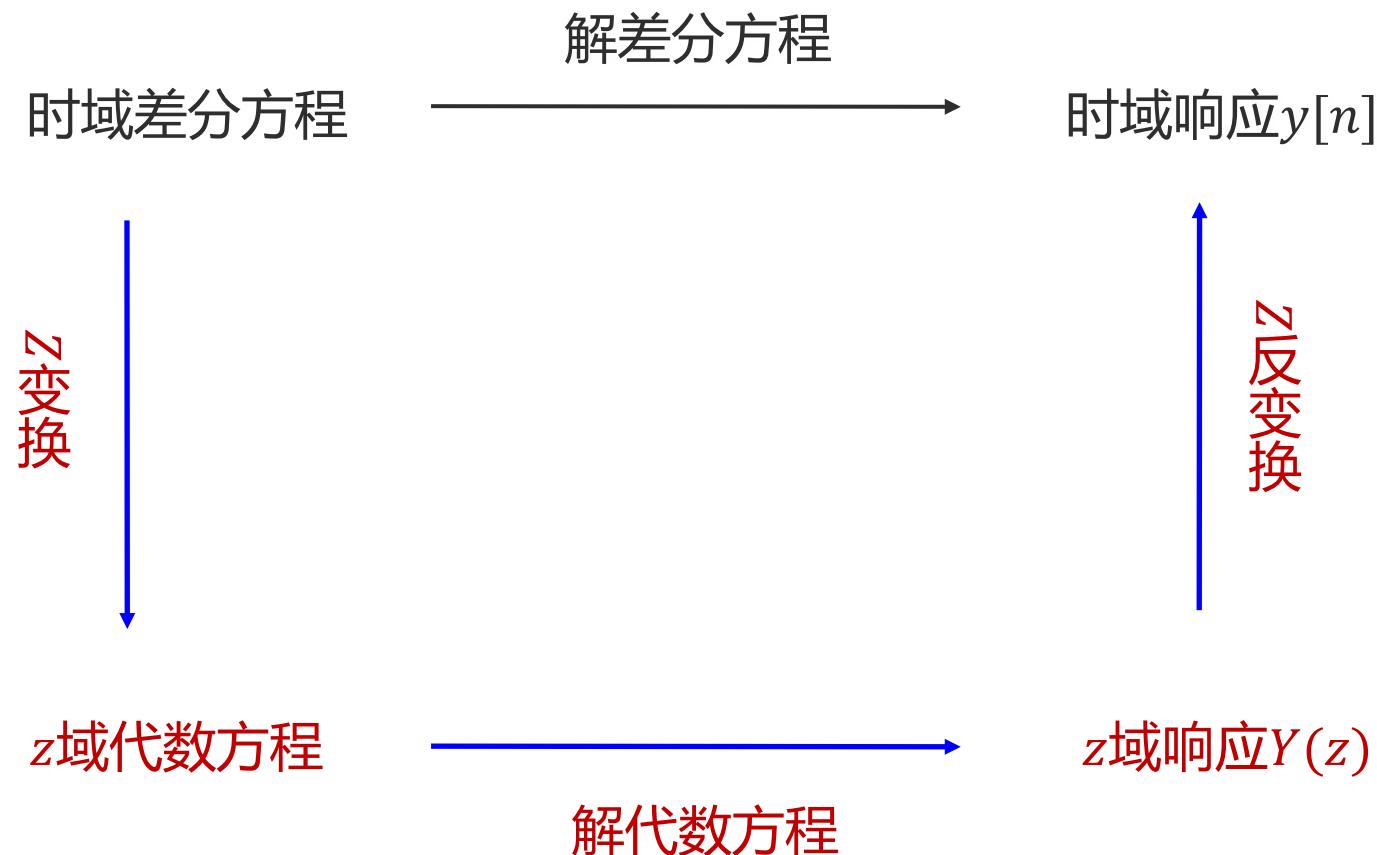
$$X(z) = \frac{-4z}{(z-2)^2} + \frac{-6z}{z-2} + \frac{8z}{z-4}$$

$$-2 \cdot n2^n u[n] \quad -6 \cdot 2^n u[n] \quad 8 \cdot 4^n u[n]$$

$\delta[n]$	1
$u[n]$	$\frac{z}{z-1}$
$nu[n]$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
$a^n u[n]$	$\frac{z}{z-a}$
$na^n u[n]$	$\frac{az}{(z-a)^2}$

离散时间系统响应的z域分析

- 使用Z变换求解差分方程



二阶系统响应的z域求解

$$x[n-k]u[n-k] \xrightarrow{Z} z^{-k}X(z)$$

$$Z\{x[n-k]u[n]\} = z^{-k} \left[X(z) + \sum_{n=-k}^{-1} x[n]z^{-n} \right]$$

- 针对差分方程，已知初始状态为 $y[-1], y[-2]$ ，求解

$$y[n] + a_1y[n-1] + a_2y[n-2] = b_0x[n] + b_1x[n-1], \quad n \geq 0$$

- 对差分方程两边做Z变换，利用

$$Z\{y[n-1]u[n]\} = z^{-1}Y(z) + y[-1]$$

$$Z\{y[n-2]u[n]\} = z^{-2}Y(z) + y[-1]z^{-1} + y[-2]$$

- 可得

$$\begin{aligned} Y(z) + a_1z^{-1}Y(z) + a_1y[-1] + a_2z^{-2}Y(z) + a_2y[-2] + a_2y[-1]z^{-1} \\ = b_0X(z) + b_1z^{-1}X(z) \end{aligned}$$

二阶系统响应的z域求解

- 整理 $Y(z)$ 可得

$$Y(z) = \frac{-a_1y[-1] - a_2y[-2] - a_2y[-1]z^{-1}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}} + \frac{b_0 + b_1z^{-1}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}} X(z)$$

- 因此有

$$Y_{zi}(z) = -\frac{a_1y[-1] + a_2y[-2] + a_2y[-1]z^{-1}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}$$

$$Y_{zs}(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}} X(z)$$

综合可得 $y[n] = Z^{-1}\{Y_{zi}(z) + Y_{zs}(z)\}$

二阶系统响应的z域求解

某离散LTI系统满足 $y[n] - 4y[n-1] + 4y[n-2] = 4x[n]$, 已知 $y[-1] = 0$, $y[-2] = 2$, $x[n] = (-3)^n u[n]$, 求 $y_{zi}[n], y_{zs}[n], y[n]$.

- 将差分方程两边进行单边Z变换得

$$\begin{aligned} Y(z) - 4\{z^{-1}Y(z) - y[-1]\} \\ + 4\{z^{-2}Y(z) + z^{-1}y[-1] + y[-2]\} = 4X(z) \end{aligned}$$

- 求解此代数方程可得系统完全响应的z域表示式

$$Y(z) = \frac{4y[-1] - 4z^{-1}y[-1] - 4y[-2]}{1 - 4z^{-1} + 4z^{-2}} + \frac{4X(z)}{1 - 4z^{-1} + 4z^{-2}}$$

$Y_{zi}(z)$

二阶系统响应的z域求解

某离散LTI系统满足 $y[n] - 4y[n-1] + 4y[n-2] = 4x[n]$, 已知 $y[-1] = 0$, $y[-2] = 2$, $x[n] = (-3)^n u[n]$, 由z域求 $y_{zi}[n], y_{zs}[n], y[n]$.

- 化简 $Y_{zi}(z)$:

$$Y_{zi}(z) = \frac{4y[-1] - 4z^{-1}y[-1] - 4y[-2]}{1 - 4z^{-1} + 4z^{-2}} = \frac{-8}{(1 - 2z^{-1})^2}$$

- 可得

$$y_{zi}[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{Y_{zi}(z)\} = -8n(2)^n - 8(2)^n, \quad n \geq 0$$

首先使用 $8n2^n$ 的 Z 变换, 再使用移位性质消去分子上的 z^{-1}

$$\mathcal{Z}\{\textcolor{red}{n}a^n u[n]\} = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$$

二阶系统响应的z域求解

某离散LTI系统满足 $y[n] - 4y[n-1] + 4y[n-2] = 4x[n]$, 已知 $y[-1] = 0$, $y[-2] = 2$, $x[n] = (-3)^n u[n]$, 由z域求 $y_{zi}[n], y_{zs}[n], y[n]$.

▪ 化简 $Y_{zs}(z)$:

$$Y_{zs}(z) = \frac{4}{1 - 4z^{-1} + 4z^{-2}} \frac{1}{1 + 3z^{-1}} = \frac{1.6}{(1 - 2z^{-1})^2} + \frac{0.96}{1 - 2z^{-1}} + \frac{1.44}{1 + 3z^{-1}}$$

▪ 可得

$$y_{zs}[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{Y_{zs}(z)\} = [1.6(n+1)(2)^n + 0.96(2)^n + 1.44(-3)^n]u[n]$$

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n] = -6.4n(2)^n - 5.44(2)^n + 1.44(-3)^n, n \geq 0$$

二阶系统响应的z域求解

已知一LTI离散系统满足差分方程

$$\begin{cases} 2y[n+2] + 3y[n+1] + y[n] = x[n+2] + x[n+1] - x[n] & n \geq 0 \\ y[-1] = 2, y[-2] = -1, x[n] = u[n] \end{cases}$$

由z域求系统零输入响应，零状态响应和完全响应

- 令 $n = n - 2$

$$2y[n] + 3y[n-1] + y[n-2] = x[n] + x[n-1] - x[n-2]$$

- 对差分方程两边做Z变换

$$\begin{aligned} 2Y(z) + 3(z^{-1}Y(z) + y[-1]) + (z^{-2}Y(z) + y[-1]z^{-1} + y[-2]) \\ = (1 + z^{-1} - z^{-2})X(z) \end{aligned}$$

可得

$$Y(z) = -\frac{3y[-1] + y[-1]z^{-1} + y[-2]}{2 + 3z^{-1} + z^{-2}} + \frac{1 + z^{-1} - z^{-2}}{2 + 3z^{-1} + z^{-2}}X(z)$$

二阶系统响应的z域求解

已知一LTI离散系统满足差分方程

$$\begin{cases} 2y[n+2] + 3y[n+1] + y[n] = x[n+2] + x[n+1] - x[n] & n \geq 0 \\ y[-1] = 2, y[-2] = -1, x[n] = u[n] \end{cases}$$

由z域求系统零输入响应，零状态响应和完全响应

- 零输入响应为

$$Y_{zi}(z) = -\frac{3y[-1] + y[-1]z^{-1} + y[-2]}{2 + 3z^{-1} + z^{-2}} = -\frac{5 + 2z^{-1}}{2 + 3z^{-1} + z^{-2}}$$

$$= \frac{-3}{1 + z^{-1}} + \frac{0.5}{1 + 0.5z^{-1}}$$

- 因此

$$y_{zi}[n] = Z^{-1}\{Y_{zi}(z)\} = 3(-1)^{n+1} - (-0.5)^{n+1}, n \geq 0$$

二阶系统响应的z域求解

已知一LTI离散系统满足差分方程

$$\begin{cases} 2y[n+2] + 3y[n+1] + y[n] = x[n+2] + x[n+1] - x[n] & n \geq 0 \\ y[-1] = 2, y[-2] = -1, x[n] = u[n] \end{cases}$$

由z域求系统零输入响应，零状态响应和完全响应

- 由于

$$u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

- 零状态响应为

$$Y_{ZS}(z) = \frac{(1 + z^{-1} - z^{-2})}{2 + 3z^{-1} + z^{-2}} \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{1/6}{1 - z^{-1}} + \frac{-0.5}{1 + z^{-1}} + \frac{5/6}{1 + 0.5z^{-1}}$$

- 因此

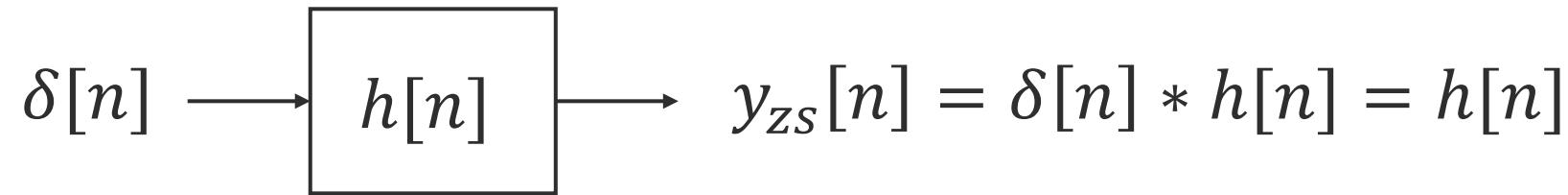
$$y_{ZS}[n] = Z^{-1}\{Y_{ZS}(z)\} = \{1/6 - 0.5(-1)^n + (5/6)(-0.5)^n\}u[n]$$

系统函数

- 系统在零状态条件下，输出的Z变换与输入的Z变换之比，记为 $H(z)$

$$H(z) = \frac{\mathcal{Z}\{y_{zs}[n]\}}{\mathcal{Z}\{x[n]\}} = \frac{Y_{zs}(z)}{X(z)}$$

- $H(z)$ 与 $h[n]$ 的关系



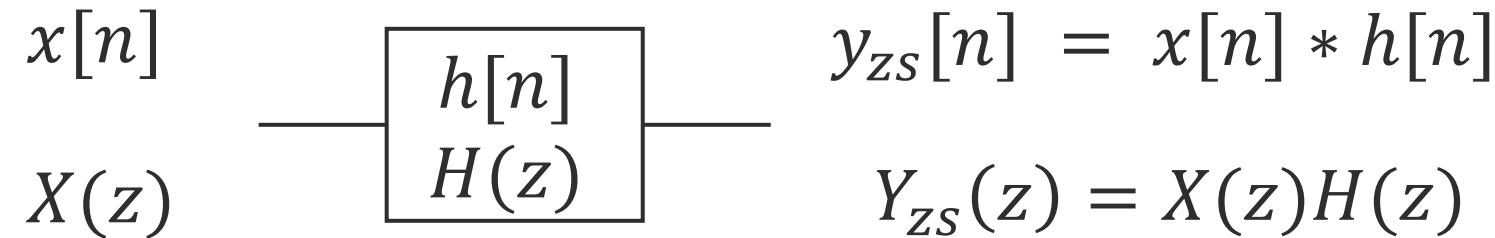
- 因此

$$H(z) = \frac{\mathcal{Z}\{y_{zs}[n]\}}{\mathcal{Z}\{\delta[n]\}} = \frac{\mathcal{Z}\{h[n]\}}{1} = \mathcal{Z}\{h[n]\}$$

有 $H(z) = \mathcal{Z}\{h[n]\}$, $h[n] = \mathcal{Z}^{-1}[H(z)]$

系统函数

- 求零状态响应



- 求 $H(z)$ 的方法

- 由系统的单位脉冲响应求解: $H(z) = Z\{h[n]\}$

- 由定义

- 由系统的差分方程写出 $H(z)$

系统函数

求单位延时器 $y[n] = x[n - 1]$ 的系统函数 $H(z)$ 。

- 设

$$x[n] \xrightarrow{z} X(z)$$

- 利用 z 变换的位移特性，有

$$x[n - 1] \xrightarrow{z} z^{-1}X(z)$$

- 根据系统函数的定义，可得

$$H(z) = \frac{Y_{ZS}(z)}{X(z)} = \frac{z^{-1}X(z)}{X(z)} = z^{-1}$$

- 即单位延时器的系统函数 $H(z)$ 为 z^{-1}

系统函数

- 离散系统使用差分方程

$$y[n] - ay[n-1] = bx[n]$$

描述，求系统函数 $H(z)$ 和 $h[n]$

- 两边同时做Z变换

$$Y(z) - az^{-1}Y(z) - ay[-1] = bX(z)$$

即

$$Y(z) = \frac{b}{1 - az^{-1}} X(z) + \frac{ay[-1]}{1 - az^{-1}}$$

零状态下 $y[-1] = 0$,

$$H(z) = \frac{b}{1 - az^{-1}}, \quad h[n] = ba^n u[n]$$

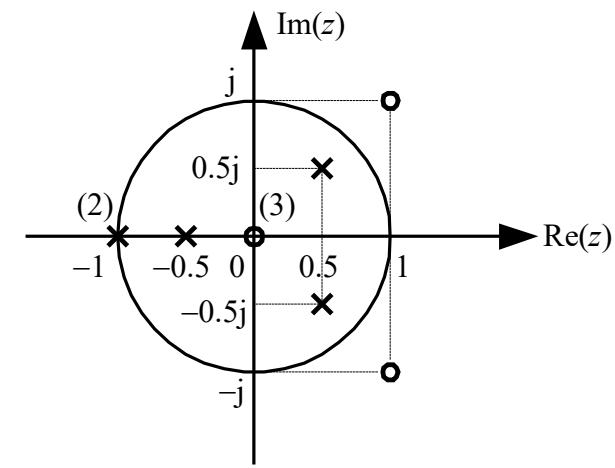
系统函数的零极点分布

- 系统函数可以表达为零极点增益形式，即

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = K \frac{(z - r_1)(z - r_2) \cdots (z - r_m)}{(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)}$$

- $D(z) = 0$ 的根是 $H(z)$ 的极点，在 z 平面用 \times 表示。
- $N(z) = 0$ 的根是 $H(z)$ 的零点，在 z 平面用 \circ 表示

$$H(z) = \frac{z^3(z - 1 - j)(z - 1 + j)}{(z + 0.5)(z + 1)^2(z - 0.5 - j0.5)(z - 0.5 + j0.5)}$$



零极点与时域特性

- 由系统函数 $H(z)$ 的零极点分布，可将 $H(z)$ 展开成部分分式，对每个部分分式取Z反变换可得 $h[n]$ 。
- 系统的时域特性主要取决于系统的**极点**
- 如 $H(z)$ 为单极点时，有

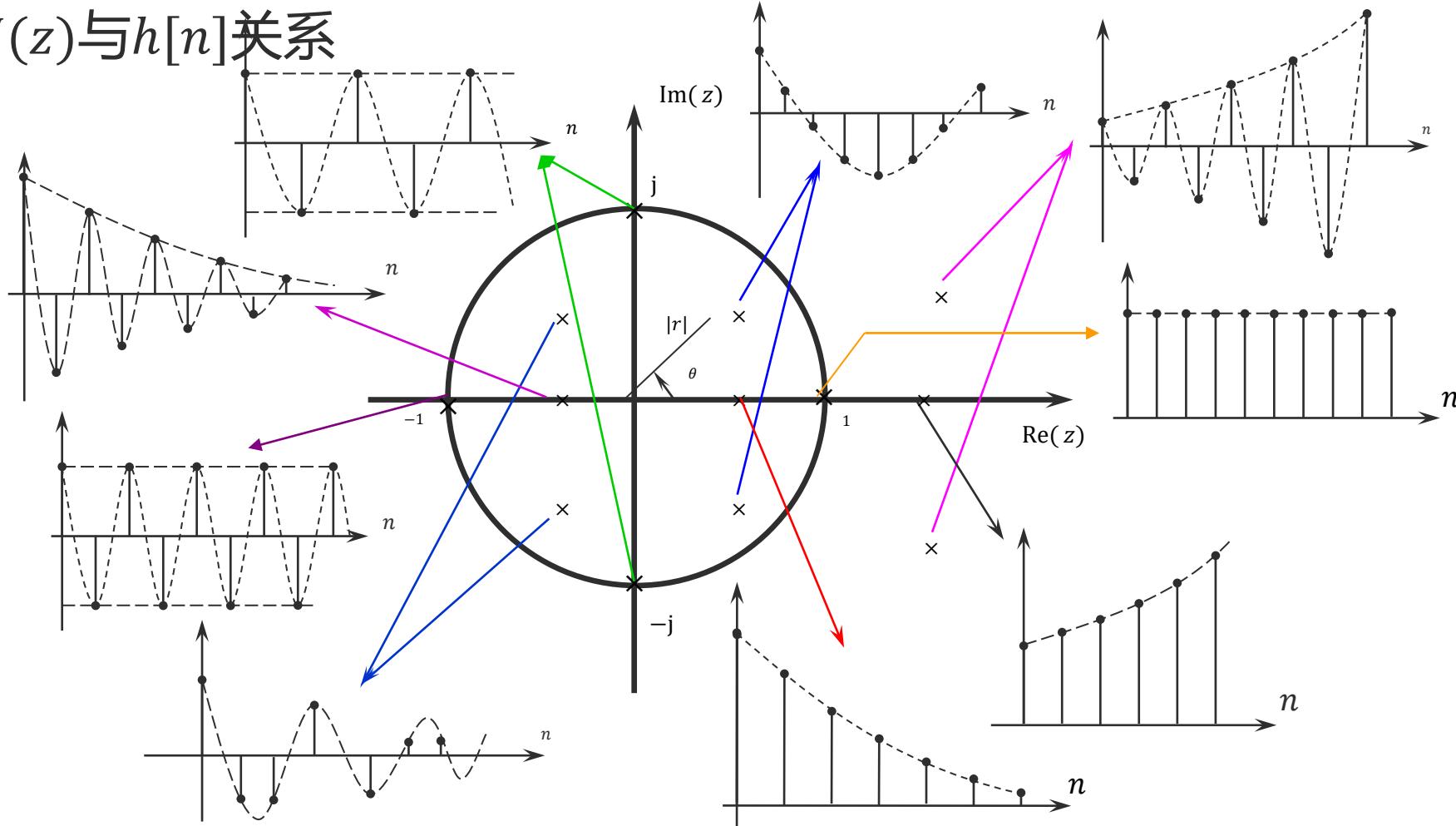
$$H(z) = K \frac{(z - r_1)(z - r_2) \cdots (z - r_m)}{(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_k)} = \sum_{i=1}^k \frac{A_i}{z - z_i}$$

$$h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} = \sum_{i=1}^k A_i (z_i)^{n-1} u[n-1]$$

零极点与时域特性

$H(z)$ 的极点，在 z 平面用 \times 表示
 $H(z)$ 的零点，在 z 平面用 \circ 表示

■ 离散系统 $H(z)$ 与 $h[n]$ 关系



离散系统的稳定性

- 离散LTI系统稳定的充要条件是

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

- 由 $H(z)$ 判断系统的稳定性：
 - $H(z)$ 的收敛域包含单位圆则系统稳定
 - 因果系统的极点全在单位圆内则该系统稳定

离散系统的稳定性

判断下面因果LTI离散系统的稳定性

$$H(z) = \frac{1}{(1 - 0.5z^{-1})(1 - 1.5z^{-1})}$$

- 从收敛域看
 - 该因果系统的收敛域为 $|z| > 1.5$
 - 收敛域不包含单位圆，故系统不稳定

- 从极点看
 - 系统的极点为 $z_1 = 0.5, z_2 = 1.5$
 - 极点 $z_2 = 1.5$ 在单位圆外，故系统不稳定。

离散系统的稳定性

- 离散系统对应的差分方程为

$$y[n] + 0.2y[n - 1] - 0.24y[n - 2] = x[n] + x[n - 1]$$

求 $H(z)$, $h[n]$, 判断此因果系统是否稳定, 当 $x[n] = u[n]$ 时的零状态响应

- 两边进行Z变换

$$Y(z) + 0.2z^{-1}Y(z) - 0.24z^{-2}Y(z) = X(z) + z^{-1}X(z)$$

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 + 0.2z^{-1} - 0.24z^{-2}} = \frac{z(z + 1)}{(z - 0.4)(z + 0.6)}$$

- 极点为0.4和-0.6, 在单位圆内, 收敛域为 $|z| > 0.6$, 为稳定的因果系统

离散系统的稳定性

- 离散系统对应的差分方程为

$$y[n] + 0.2y[n - 1] - 0.24y[n - 2] = x[n] + x[n - 1]$$

求 $H(z)$, $h[n]$, 判断此因果系统是否稳定, 当 $x[n] = u[n]$ 时的零状态响应

- 分解

$$H(z) = \frac{z(z + 1)}{(z - 0.4)(z + 0.6)} = \frac{1.4}{(1 - 0.4z^{-1})} - \frac{0.4}{(1 + 0.6z^{-1})}$$

- 进行Z反变换

$$h[n] = (1.4(0.4)^n - 0.4(-0.6)^n)u[n]$$

离散系统的稳定性

- 离散系统对应的差分方程为

$$y[n] + 0.2y[n - 1] - 0.24y[n - 2] = x[n] + x[n - 1]$$

求 $H(z), h[n]$, 判断此因果系统是否稳定, 当 $x[n] = u[n]$ 时的零状态响应

- 若 $x[n] = u[n]$, $X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$, 则

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 + 0.2z^{-1} - 0.24z^{-2}} \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

- 进行Z反变换

$$y[n] = (2.08 - 0.93(0.4)^n - 0.15(-0.6)^n)u[n]$$