ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA

TOÁN RỜI RẠC

Khoa Công Nghệ Thông Tin
TS. Nguyễn Văn Hiệu

Khoa Công Nghệ Thông Tin
TS. Nguyễn Văn Hiệu

TOÁN RỜI RẠC

Bài 2: Bài toán đếm

Nội dung

Nguyên lý cộng

- Nếu A và B là hai tập hợp rời nhau thì

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B)$$

- Nếu { $A_1, A_2, \ldots, A_k$ } là một *phân hoạch* của X thì

$$N(X) = N(A_1) + N(A_2) + \ldots + N(A_k)$$

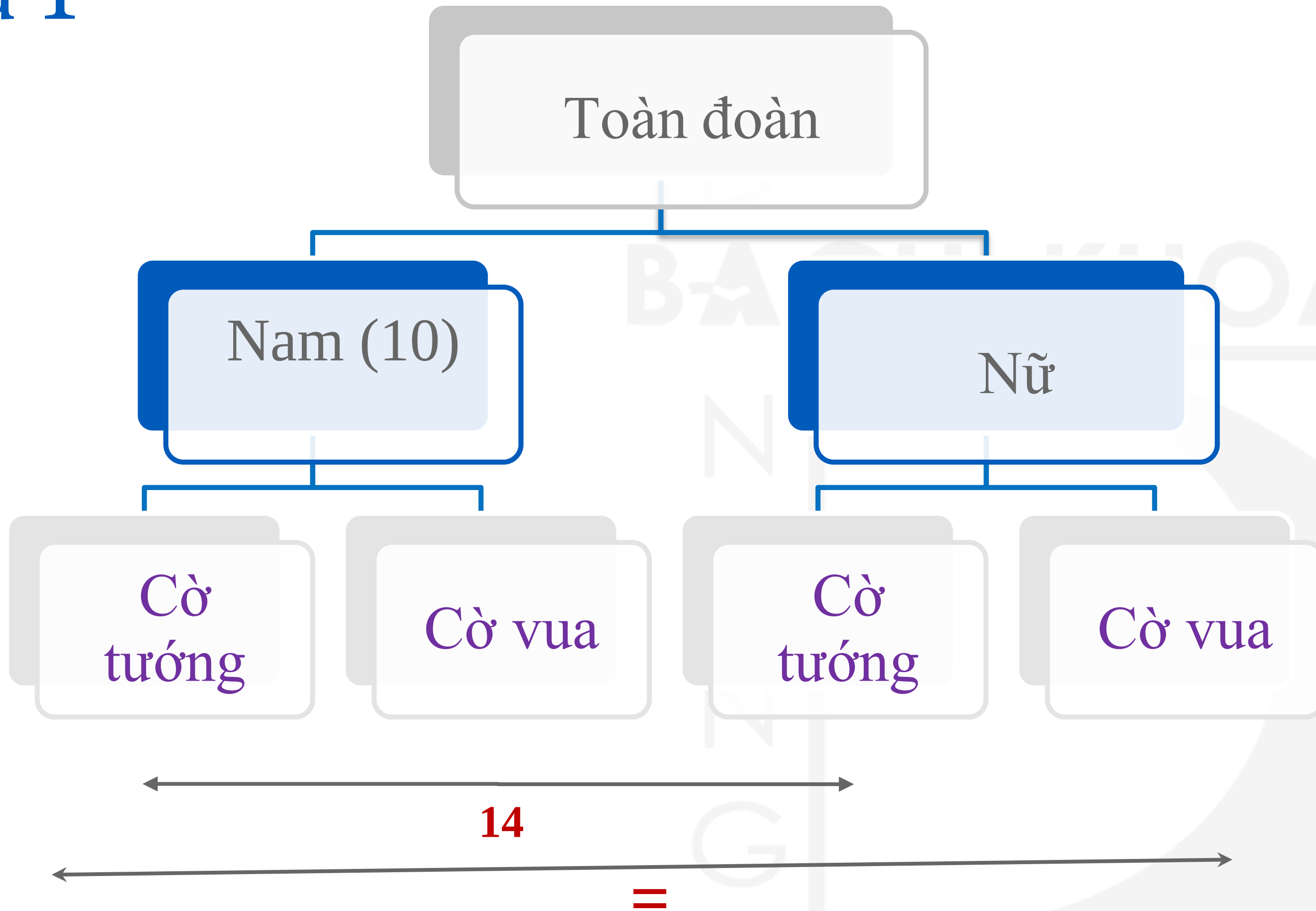
- Nếu A là một tính chất trên X thì

$$N(A) = N(X) - N(\underline{A})$$

Ví dụ 1

- Vào năm 2022 Việt nam cử một đoàn vận động viên tham gia thi đấu cờ tướng và cờ tướng và cờ vua tại thế vận hội Olympic, mỗi vận động viên chỉ được phép thi đấu một nội dung, số nam tham gia có 10 người, số vận động viên thi cờ tướng cả nam lẫn nữ có 14 người, số nữ thi cờ vua bằng số nam thi cờ tướng.
- Hỏi toàn đoàn có bao nhiêu người? (Yêu cầu trực quan)

Ví dụ 1



Ví dụ 2

- Tính giá trị của s:

```
s = 0;
for( i = 0; i <10 ; i ++)   s += 1;
for( j = 0; j < 20; j++)    s += 1;
for (k = 0; k <30; k++)  s += 1;
```

Ví dụ 2

s = ?

for(i = 0; i <10 ; i ++)
s += 1;

for(j = 0**;** j < 20; j++)
s += 1;

for (k = 0**;** k <30; k++)
s += 1;

ĐS: 60

Nguyên lý nhân

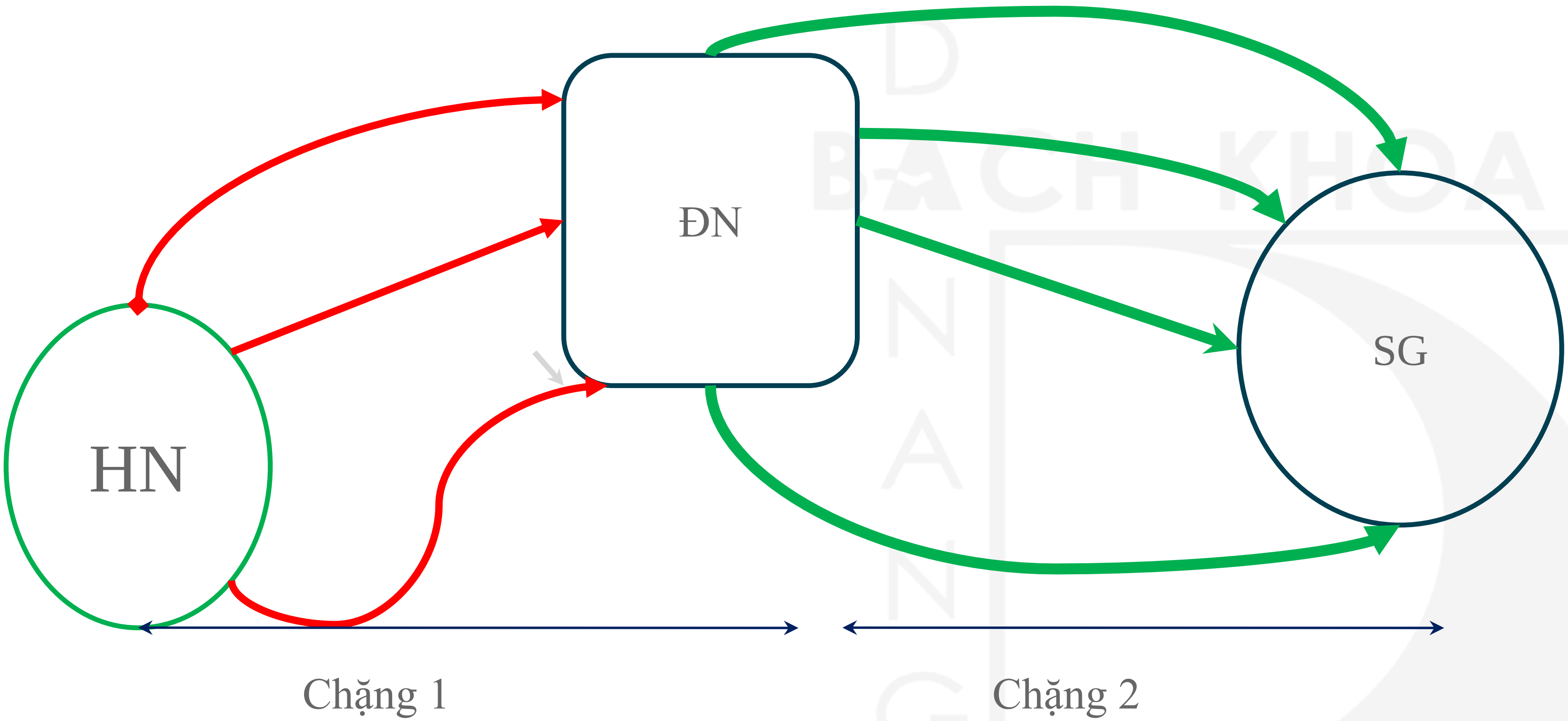
- Thủ tục có 2 công việc nối tiếp nhau (a_1, a_2), để hoàn thành công việc a_1 có n_1 cách. Ứng với mỗi cách thực hiện a_1 có n_2 cách thực hiện công việc a_2.
- Để hoàn thành thủ tục nêu trên có $n_1 . n_2$ cách.
- Hệ quả: Thủ tục có k công việc nối tiếp nhau, thì

$$N(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k) = N(A_1) . N(A_2) . \ldots . N(A_k)$$

Ví dụ 3

- Số hành trình có thể đi từ Hà Nội đến Sài Gòn ?
  - Từ Hà nội đền Đà nẵng có 3 cách:
    - Máy bay;
    - Ô tô;
    - Tàu hỏa;
  - Từ Đà nẵng đến Sài gòn có 4 cách:
    - Máy bay;
    - Ô tô ;
    - Tàu hỏa;
    - Tàu thủy.;

Ví dụ 3



Ví dụ 4

- Tính giá trị của S:

```
S = 0;
for( i = 0; i <10 ; i ++)
    for( j = 0 ; j <20 ; j++)
        for (k= 0 ; k <30; k++) S += 1;
```

Ví dụ 4

```
for( S=0, i = 0; i <10 ; i ++)
    for( j = 0; j < 20 ; j ++)
        for(k= 0; k < 30 ; k ++)
            S+=1
```

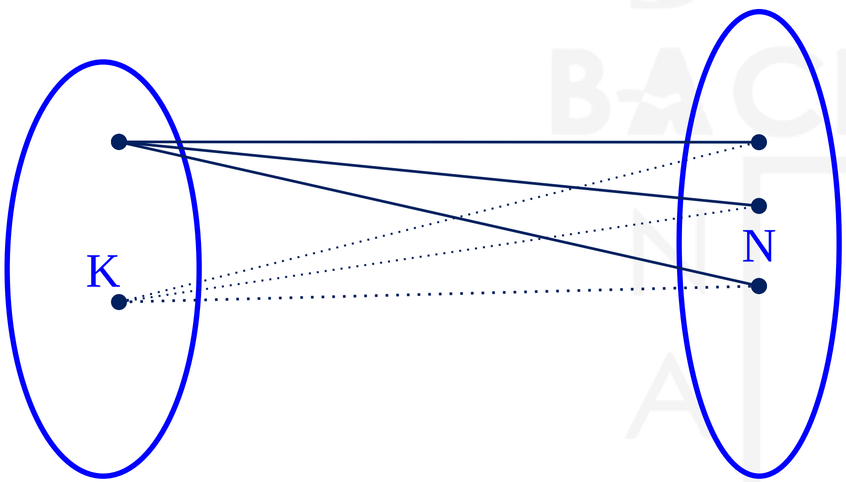
ĐS: 6000

Chỉnh hợp lặp

- Một chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử là một bộ ***có thứ tự*** gồm k phần từ lấy từ n phần tử, trong đó các phần tử *có thể lặp.*
- Số tất cả chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử là: n^k
- Đếm số chỉnh hợp lặp chập 2 của tập X (tập 3 phân tử)
    - X = {a, b, c}

Ví dụ 5

- Đếm số hàm số được xây dựng từ tập k phần tử vào tập n phần tử



f = (f1, f2, …, fk).
fi có n giá trị.
DS: **n mũ k**

Ví dụ 5

- Đếm số tập con của một tập gồm n phần tử?

X = {x1,x2,…,xn},
Tập con A thuộc X: b =(b1,b2,…,bn)

Chỉnh hợp không lặp

- Một chỉnh hợp không lặp chập k của n phần tử là một bộ có thứ tự gồm k phần tử lấy từ n phần tử, trong đó các phần tử không được lặp.
- Số chỉnh hợp không lặp chập k không lặp của n phần tử:

  n*(n-1)*....(n-k+1), với k <=n

- Đếm số chỉnh hợp lặp 2 từ tập 3 phần tử
  - X = {a, b, c}

Tổ hợp

- Tổ hợp- " tổ hợp không lặp"
- Một tổ hợp chập k của n phần tử là một bộ không có thứ tự gồm k thành phần khác nhau lấy từ tập n phần tử.
- Số tổ hợp chập k của n phần tử là C(k, n)

Tổ hợp

- Tính chất đối xứng

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

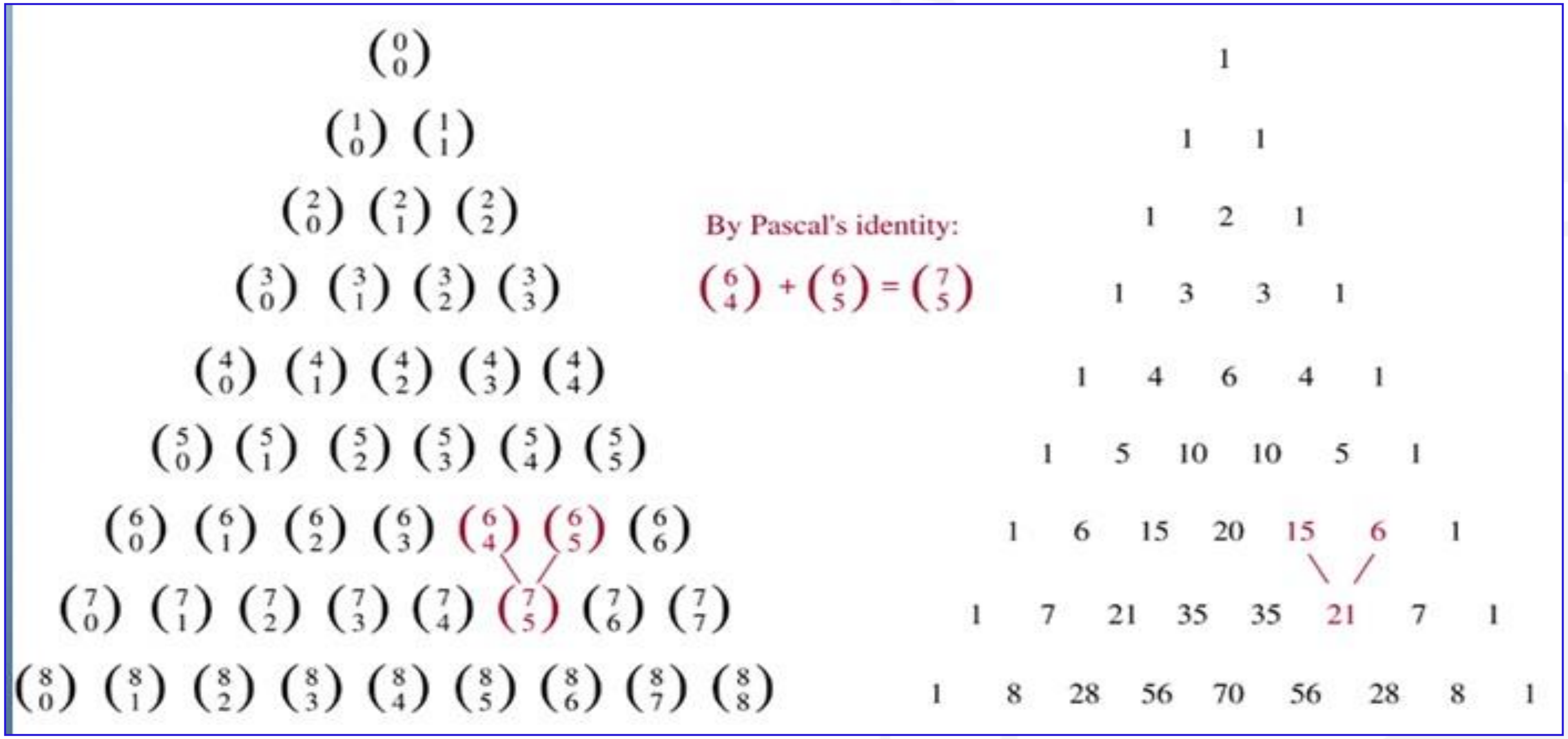
- Tính xác định điều kiện đầu

$$C_n^0 = C_n^n = 1$$

- Tính đệ quy

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k, n > k > 0$$

Tổ hợp


By Pascal's identity:
$\binom{6}{4} + \binom{6}{5} = \binom{7}{5}$
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

Hoán vị lặp

- *Cho n phần tử trong đó*
  - *có n_1 phần tử **như nhau** thuộc loại 1,*
  - *có n_2 phần tử **như nhau** thuộc loại 2,*
  - *……………………………………….. ,*
  - *có n_k phần tử **như nhau** thuộc lại k.*
- *Một cách sắp xếp n phần tử trên gọi là **một hoán vị lặp**.*
- Tổng số hoán vị lặp của n phần

$$C(n,n_1)\cdot C(n-n_1,n_2)\cdot\ldots\cdot C(n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1},n_k)=\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}$$

Ví dụ 6

SUCCESS

- 3 S
- 2 C
- 1 U
- 1 E

7!

- C(7,3)- chọn 3 vị trí cho kí tự S, còn lại 4 vị trí
- C(4,2) – chọn 2 vị trí cho ký tự C, còn 2 vị trí
- C(2,1)- chọn 1 vị trí cho ký tự U, còn lại 1 vị trí
- C(1,1)- chọn 1 vị trí cho ký tự S

$$C(7,3)\cdot C(4,2)\cdot C(2,1)\cdot C(1,1)=\frac{7!}{3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!}=420$$

Tổ hợp lặp

- Hãy đếm cách mua mâm ngũ quả từ 3 loại: Cam, Quýt và Xoài
- Phân tích
  - Mỗi loại cam, quýt và xoài có nhiều hơn 5 quả
  - Hai quả cùng một loại thì không phân biệt được
- Đếm (7 phút): C| Q| X

C	Q	X
5	0	0
...	...	...

ĐS: 21

Tổ hợp lặp

5 quả biểu diễn: 5 ngôi sao
3 loại biểu diễn: 2 vách ngăn

$$C(3-1+5,5)=C(3-1+5,3-1)$$

Tổ hợp lặp

- Cho n loại, mỗi loại có không ít hơn k phần tử:
  - Một tổ hợp lặp chập k từ n loại – một bộ không có thứ tự k phần tử lấy từ n loại (các phần tử có thể lặp, k >n)
  - Số tổ hợp lặp chập k của n loại:

$$C(n+k-1,n-1)=C(n+k-1,k)$$

Ví dụ 7

- Đếm số cách chọn 5 tờ tiền từ 7 két đựng tiền (5.000đ, 10.000đ, 20.000đ, 50.000đ, 100.000đ, 200.000đ, 500.000đ).
- Phân tích:
  - Thứ tự các tờ tiền được chọn là không quan trọng;
  - Tờ tiền cùng loại là không phân biệt;
  - Mỗi két có ít nhất 5 tờ (giả sử két nhiều tiền :))

Ví dụ 7

- 10000đ
- 20000đ
- 50000đ
- 100000đ
- 200000đ
- 500000đ
- 5000đ

Ví dụ 8

- Đếm số nghiệm **nguyên không âm** của phương trình:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 15,\ x_1 \geq 0\ ,\ x_2 \geq 0\ ,\ x_3 \geq 0.$$

Ví dụ 8

Loại 1

$x1 \leq 15$

Loại 2

$x2 \leq 15$

Loại 3

$x3 \leq 15$

C(3+15−1, 15) = C(3+15−1, 2) = *136*

Bài tập

- Đếm số nghiệm nguyên không âm của phương trình/ bất phương trình
  - *Ví dụ 9.1:*

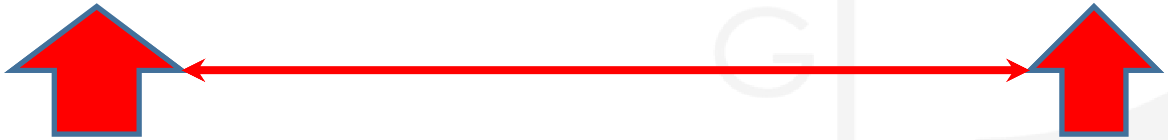
    $x_1 + x_2 + x_3 = 12$ với $x_1 \geq 1$, $x_2 \geq -2$, $x_3 \geq 3$.
  - *Ví dụ 9.2:*

    $x_1 + x_2 + x_3 \leq 12$ với $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$.
  - *Ví dụ 9.3:*

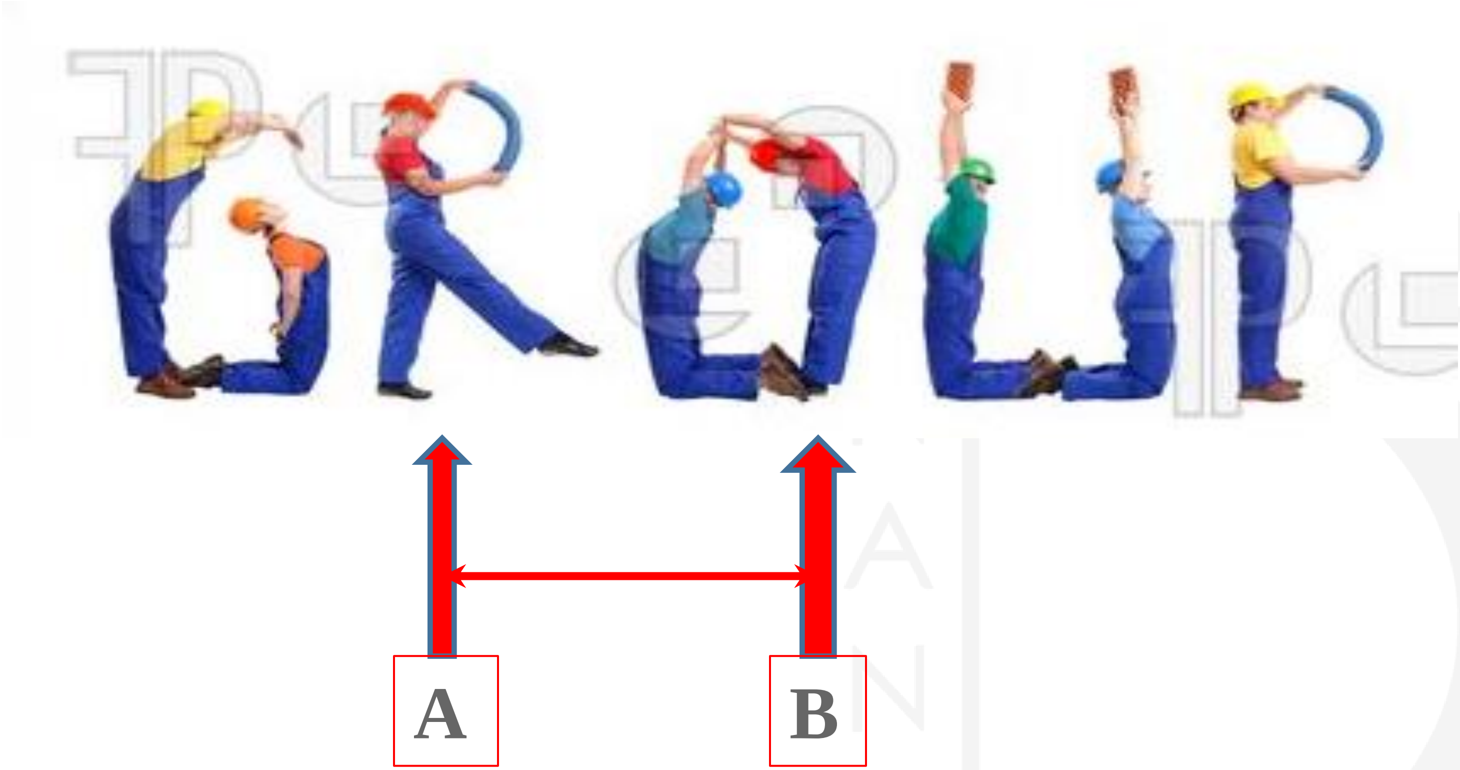
    $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ với $3 \geq x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$.


Q&A

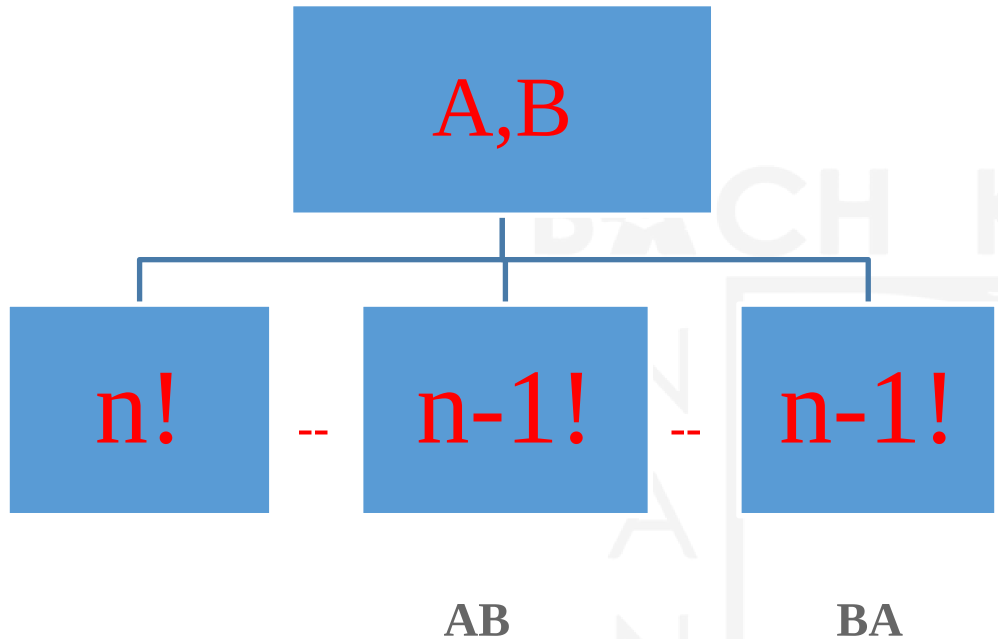
Bài toán không ưu nhau



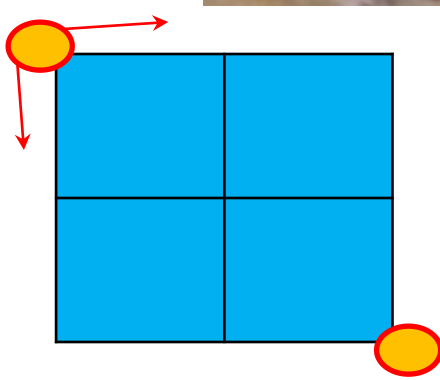
Bài toán không ưa nhau



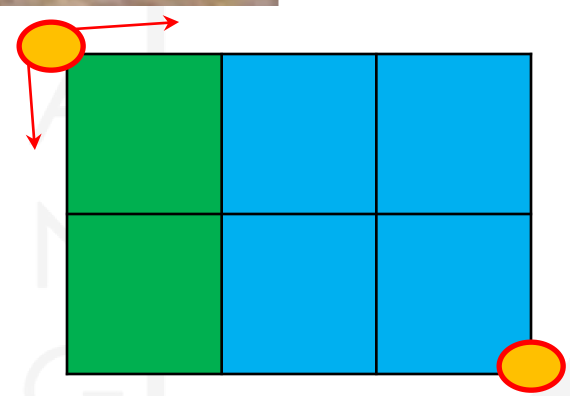
Bài toán không ưa nhau



Bài toán kiến tha mồi

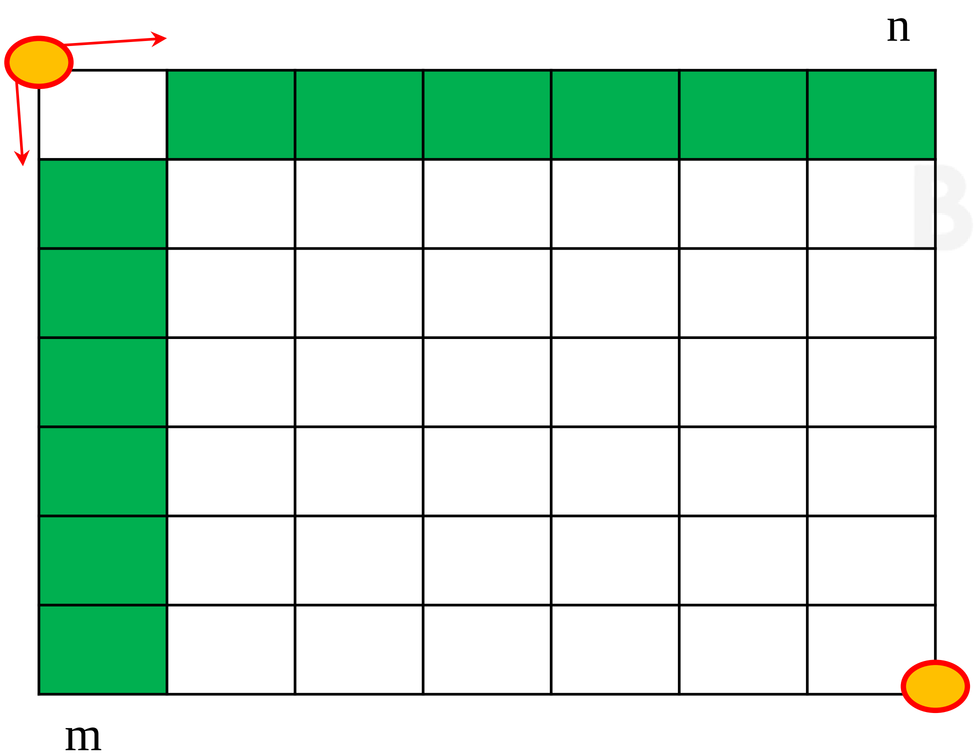


(2 x 2)



(2 x 3)

Bài toán kiến tha mồi

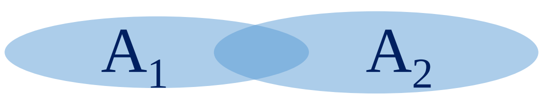


Bài toán "Nên hay không nên:)"

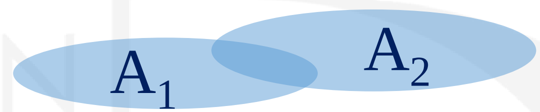
Nguyên lý bù trừ

- A_1và A_2 hai tập hữu hạn, $A_1 \cap A_2 \neq \odot$

$$N(A_1 \cup A_2) = N(A_1) + N(A_2) - N(A_1 \cap A_2)$$



$N_1 = N(A_1) + N(A_2)$



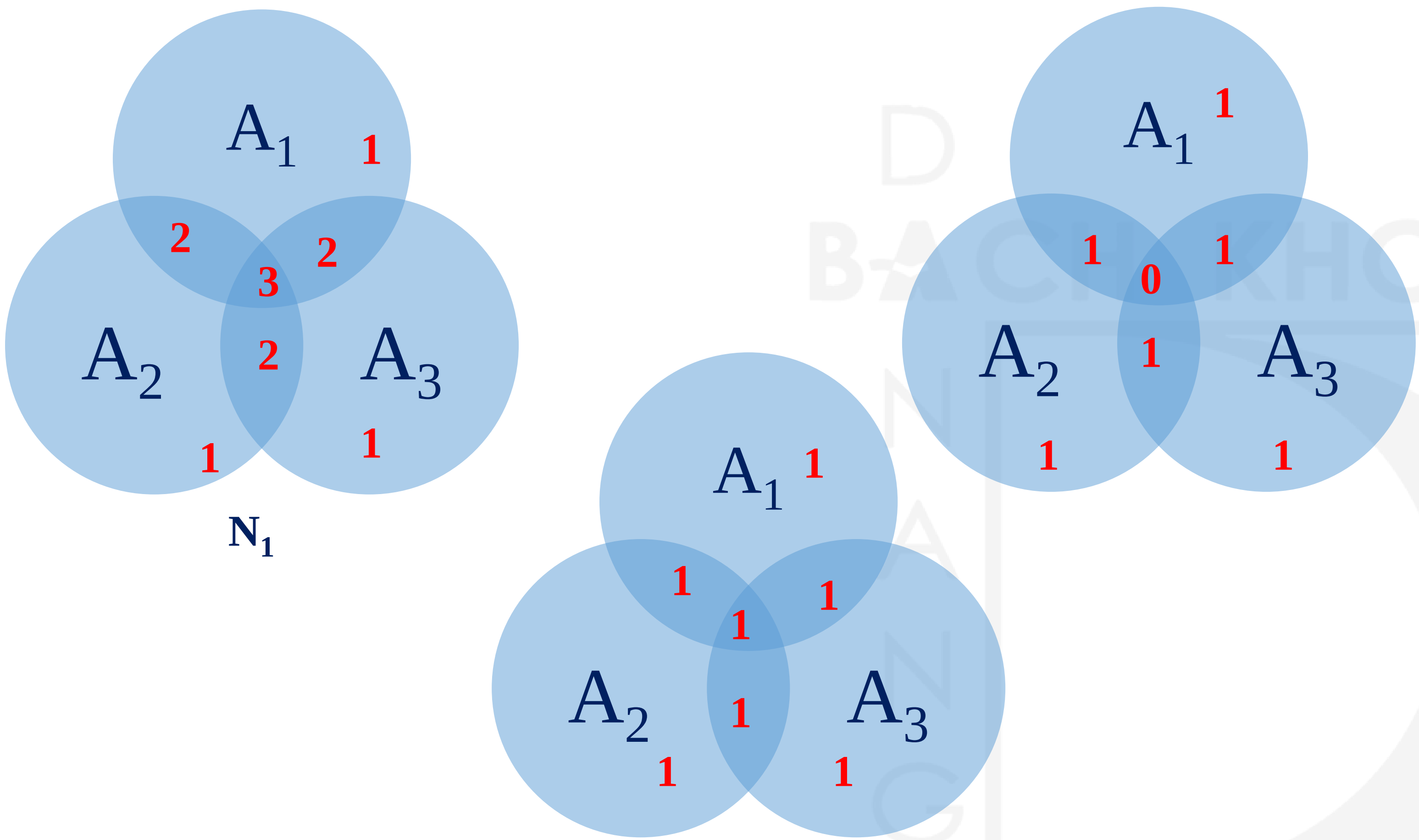
$N(A_1) + N(A_2) - N(A_1 \cap A_2)$

- Tổng quát: khi $A_i \cap A_j \neq \odot$ mọi i, j

$$N(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = N_1 - N_2 + \ldots + (-1)^{n-1} N_n$$

  - N_k là tổng phần tử của tất cả các giao của k tập lấy từ n tập.

Nguyên lý bù trừ



Nguyên lý bù trừ

Đếm số trên X={1,2,…50} không chia hết cho bất kỳ 2, 3, 4 ?

A_i = { x € X: x % i ==0 } i=2,3,4.

$A_2 \cup A_3 \cup A_4$ là tập chia hết ít nhất 1 trong 3 số

$N(X) - N(A_2 \cup A_3 \cup A_4) = N - (N_1 - N_2 + N_3)$

Nguyên lý bù trừ

- $N = 50$ số.
- $N_1 = N(A_2) + N(A_3) + N(A_4)$
  $= [50/2] + [50/3] + [50/4] = 25 + 16 + 12 = 53.$
- $N_2 = N(A_2 \cap A_3) + N(A_3 \cap A_4) + N(A_2 \cap A_4)$
  $= [50/6] + [50/12] + [50/4] = 8 + 4 + 12 = 24.$
- $N_3 = N(A_2 \cap A_3 \cap A_4)$
  $= [50/12] = 4.$
- Kết quả:
  $50 – (53 – 24 + 4) = 17$ số.

Nguyên lý bù trừ

Xác suất để không một lá thư bỏ trúng địa chỉ. Cho n lá thư và n phong bì ghi sẵn địa chỉ. Bỏ ngẫu nhiên các lá thư vào phong bì.

X – là tập hợp tất cả các cách bỏ thư.

A_k – là tính chất lá thư thứ k bỏ đúng địa chỉ.

Nguyên lý bù trừ

Xác suất để không một lá thư bỏ trúng địa chỉ. Cho n lá thư và n phong bì ghi sẵn địa chỉ. Bỏ ngẫu nhiên các lá thư vào phong bì.

X – tập hợp tất cả các cách bỏ thư.

A_k – tính chất lá thư thứ k bỏ đúng địa chỉ.

Nguyên lý bù trừ

- N_k - số cách bỏ n lá thư sao cho có k lá thư đúng địa chỉ.

  $$N_k = C^k_n (n-k)! = n!/k!$$

- Số cách bỏ để không lá thư nào đúng địa chỉ

  $$n! - (n!/1! – n!/2! + \ldots +(-1)^{n-1} n!/n!)$$

  $$= n!(1 - 1/1! +1/2! + \ldots +(-1)^{n-1}/n!)$$

- Kết quả xác suất:

  $$1 - 1/1! +1/2! + \ldots +(-1)^{n-1}/n!$$

Tóm lại

- Nguyên lý cộng
- Nguyên lý nhân
- Chỉnh hợp lặp
- Chỉnh hợp không lặp
- Tổ hợp
- Hoán vị lặp
- Tổ hợp lặp
- Nguyên lý bù trừ

Cảm Ơn!