

TOÁN RỜI RẠC

Khoa Công Nghệ Thông Tin TS. Nguyễn Văn Hiệu



· A N



D BACH KHOA

TOÁN RỜI RẠC

Bài 3: BÀI TOÁN LIỆT KÊ

N A N G



Nội dung

- 1. GIỚI THIỆU
- 2. PHƯƠNG PHÁP SINH
- 3. PHƯƠNG PHÁP QUAY LUI

GIỚI THIỆU

Mục đích

Liệt kê tất cả các cấu hình có thể có

Bản chất

- Tìm thuật toán:
 - Dữ liệu vào: cấu hình hiện tại
 - Dữ liệu ra: cấu hình kế tiếp.

GIỚI THIỆU

Nguyên tắc

- Không được lặp cấu hình
- Không được bỏ sót cấu hình

Tiếp cận

Bài toán chưa có cách giải

Mục đích

Giải bài toán bằng liệt kê tất cả cấu hình

Điều kiện

- Xác định được thứ tự cần phải liệt kê
 - Biết được cấu hình đầu tiên
 - Biết được cấu hình cuối cùng
- Xây dựng được thuật toán

Bản chất

```
Method(...) {
    (1) cấu hình ban đầu;
    (2) stop = islastconfigure(...);
    while (top==0) {
        (3) sinh kế_tiếp;
    }
}
```

Chú thích

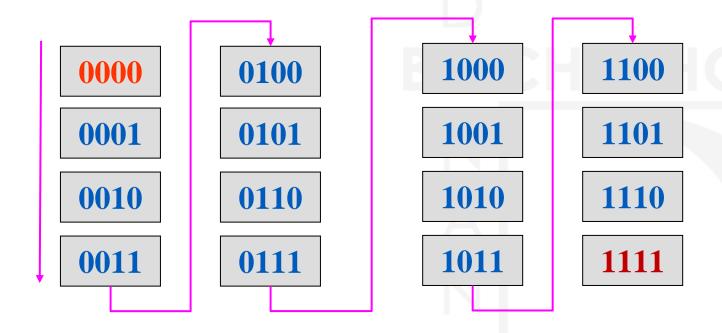
- **(1):**
- **(2)**:
- (3):



- (1)- Bài toán liệt kê chuỗi nhị phân có độ dài n
- Bài toán liệt kê chuỗi nhị phân có độ dài n với số bit 0 bằng số bit 1.
- Bài toán liệt kê chuỗi nhị phân có độ dài n với số bit 0 là số chẵn.



• Bài toán liệt kê chuỗi nhị phân có độ dài n



Bài toán liệt kê chuỗi nhị phân có độ dài n

Xác định thứ tự cần liệt kê

★ Chuỗi nhị phân được biểu diễn:

$$b = (b_1 \ b_2 \ ... \ b_n) \ v \acute{o} i \ b_i \in \{0,1\}$$

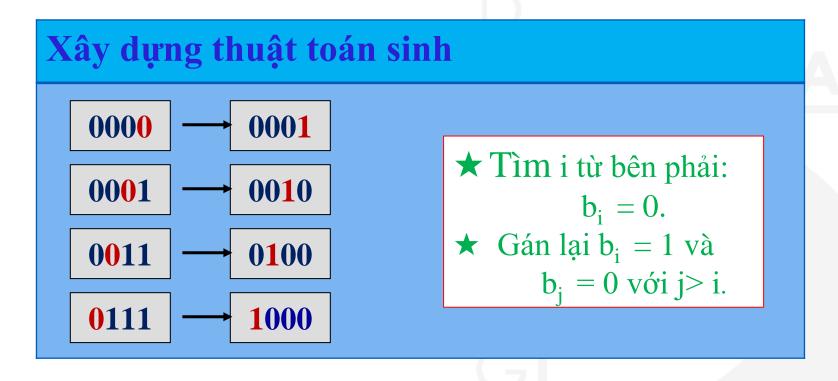
★ Định nghĩa thứ tự "từ điển":

$$b = (b_1 b_2 ... b_n) v a *b = (*b_1 *b_2 ... *b_n)$$

chuỗi b được liệt kê trước *b:

$$q(b) < q(*b)$$

• Bài toán liệt kê chuỗi nhị phân có độ dài n





• Bài toán liệt kê chuỗi nhị phân có độ dài n





```
0 #include <stdio.h>
1 int n, stop, count;
2 void Init(char b[]) {
3
  count = 1;
4 int i;
5 for (i=1;i<=n;i++) b[i]='0';</pre>
6 }
7 void Out(char b[]) {
   printf("\n%d:= ",count);
8
  int i:
10 for(i=1;i<=n;i++) printf("%c",b[i]);
11
12 void Next bit string(char b[]) {
13
  int i=n;
14 while (i>=1&&b[i]=='1') b[i--]='0';
15 b[i]='1';
16
```



```
17 int Lastconfigure (char b[]) {
18
    int i:
19 for(i=1;i<=n;i++){ if(b[i]=='0') return 0;}
20 return 1;
21
22 void Genarate (char b[]) {
23
    Init(b); Out(b);
24 stop =Lastconfigure(b);
25 while (stop==0) {
26 count++;
27 Next bit string(b); Out(b);
   stop = Lastconfigure(b);
28
29
    } }
30 main() {
31
    printf("n = "); scanf("%d", &n);
32 char b[n];
33 Genarate(b);
   getch();
34
```



- (2) Bài toán liệt kê các tập con của tập n phần tử
- Bài toán liệt kê tập con k phần tử của tập n phần tử
- Bài toán liệt kê tổ hợp không lặp chập k của tập n phần tử

(2) - Bài toán liệt kê các tập con của tập n phần tử

{ 1,2,3 }
{ 1,2,4 }
{ 1,2,5 }
{ 1,3,4 }
{ 1,3,5 }

{ 1,3,5 }

Bài toán liệt kê các tập con của tập n phần tử

• Ánh xạ tập n phần tử vào tập X:

$$X = \{1,2,...,n\}$$

 Một tập con k phần tử - bộ k thành phần có thứ tự

$$\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3 \ \dots \ \mathbf{a}_k)$$

 $1 \le \mathbf{a}_1 < \mathbf{a}_2 < \dots < \mathbf{a}_k \le \mathbf{n}, \ \mathbf{a}_i \in \mathbf{X}.$

• Bài toán liệt kê các tập con của tập n phần tử

Xác định thứ tự cần liệt kê

★ Tập k phần tử được biểu diễn tập có thứ tự

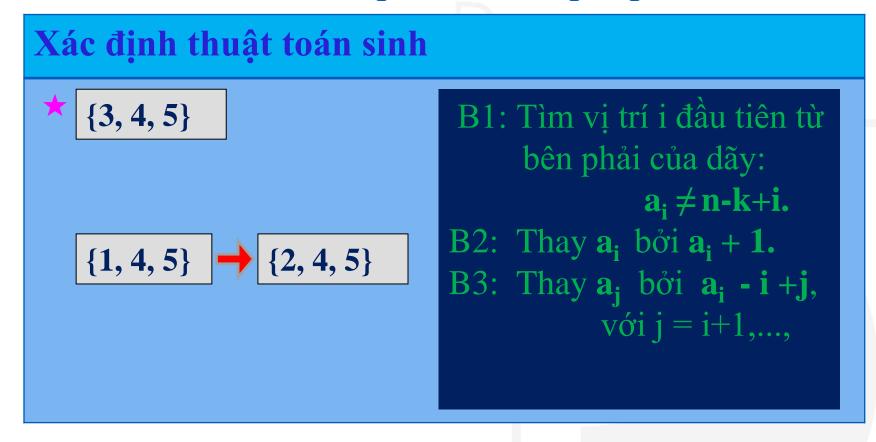
$$b = (b_1 b_2 ... b_n) : b_i \in X$$

 $a = (a_1 a_2 ... a_k) : a_i \in X$

★ Định nghĩa thứ tự từ điển:

$$a = (a_1 \ a_2 \ ... a_k) \ và \ b = (b_1 \ b_2 \ ... \ b_k)$$
 tập a liệt kê trước tập b : tồn tại j
$$a_1 = b_1, ..., a_{i-1} = b_{i-1}, \ \mathbf{a_i} < \ \mathbf{b_i}$$

• Bài toán liệt kê các tập con của tập n phần tử





• Bài toán liệt kê các tập con của tập n phân tử

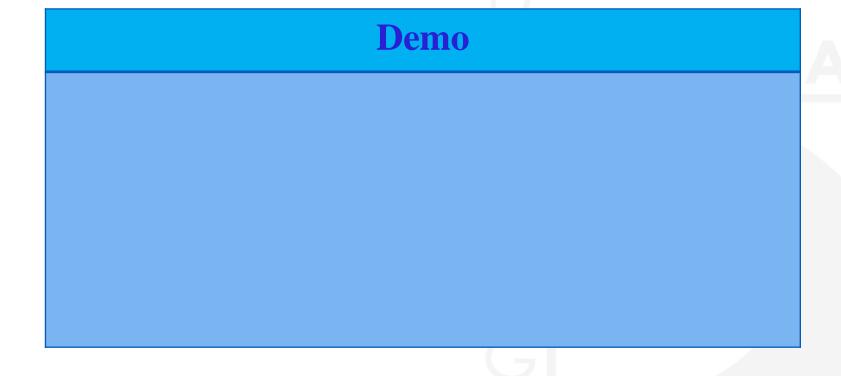
```
Xác định thuật toán sinh
```

```
B1:
i=k;
while (a[i]==n-k+i) i--;
B2:
a[i] = a[i] + 1;
B3:
for (j=i+1; j <= k; j++)
    a[i] = a[i] + i - i;
```

```
B2: Thay a, bởi a, + 1.
```



• Bài toán liệt kê các tập con của tập n phần tử





```
0 #include <stdio.h>
1 int n, stop;
2 void Init(int a[],int k) {
    int i;
3
    for (i=1; i<=k; i++) a [i]=i;
4
5
6 void Out(int a[],int k) {
7
    int i; printf("\n");
    for(i=1;i<=k;i++) printf("%d ",a[i]);</pre>
8
9
10 int lastconfigure(int a[],int k)
11 {
12
    int i;
13 for(i=k;i>=1;i--) if(a[i]!=n-k+i) return 0;
14 return 1;
15
```



```
16 void next combination(int a[], int k) {
17
   int i=k:
  while(i \ge 1 \& a[i] = n-k+i) i--;
18
19 a[i]++;
20 int j;
    for (j=i+1; j<=k; j++) a [j]=a[i]+j-i;
21
22
23 void genarate(int a[],int k) {
    Init(a,k); Out(a,k);
24
25
   stop = lastconfigure(a,k);
26
    while (stop==0) {
27
    next combination(a,k);Out(a,k);
    stop = lastconfigure(a,k);
28
29
30 main() {
31
    int k; printf("pt me n:=");scanf("%d",&n);
32
    printf(" pt con k:="); scanf("%d", &k);
33
    int a[k]; genarate(a,k); getch();
\sim \epsilon
```

(3) - Bài toán liệt kê hoán vị không lặp của tập n phần tử

(3) - Bài toán liệt kê hoán vị không lặp của tập n phần tử

(3) - Bài toán liệt kê hoán vị không lặp của tập n

phần tử

{1,2,3,4}

 $\{1,2,4,3\}$

 $\{1,3,2,4\}$

{1,3,4,2}

{1,4,2,3}

{1,4,3,2}

{2,1,3,4}

{2,1,4,3}

{2,3,1,4}

{2,3,4,1}

{2,4,1,3}

{2,4,3,1}

{3,1,2,4}

{3,1,4,2}

 ${3,2,1,4}$

{3,2,4,1}

{3,4,1,2}

{3,4,2,1}

 ${4,1,2,3}$

 ${4,1,3,2}$

{4,2,1,3}

{4,2,3,1}

 ${4,3,1,2}$

{4,3,2,1}

(3) - Bài toán liệt kê hoán vị không lặp của tập n phần tử

Xác định thứ tự cần liệt kê

★ Một hoán hoán vị của X - bộ có thứ tự:

$$a = (a_1 \ a_2 \ ... \ a_n): \ a_i \in X, \ a_p \neq a_q, p \neq q.$$

★ Định nghĩa thứ tự từ điển:

$$a = (a_1 \ a_2 \ ... a_k) \ va \ b = (b_1 \ b_2 \ ... \ b_k)$$

tập a liệt kê trước tập b: tồn tại j

$$a_1 = b_1, ..., a_{j-1} = b_{j-1}, a_j < b_j$$

(3) - Bài toán liệt kê hoán vị không lặp của tập n phần tử



(3) - Bài toán liệt kê hoán vị không lặp của tập n phần tử

```
B1: int j = n-1;
                                    B1: Tìm Right -> Left, j đầu
     while (a[j]>a[j+1])j--;
                                    tiên:
B2 int k = n;
     while(a[j] >= a[k])k--;
B3: int temp = a[j];
                                    B2: Tìm Right -> Left, k đầu
    a[j] = a[k]; a[k] = temp;
                                    tiên:
B4: int l = j+1; int r = n;
                                                  a_k > a_i
    while(l<r) {
                                    B3: hoán vị a<sub>i</sub> và a<sub>k</sub>
    int temp = a[1];
                                    B4: Lật ngược đoạn a_{i+1} đến a_n
     a[1] = a[r]; [r] = temp;
     1++; r--;
```

 Bài toán liệt kê hoán vị không lặp của tập n phần tử

Demo	

```
0 #include <stdio.h>
1 int n, stop, count=1;
2 void Init(int a[]) {
3 int i;
4 for (i=1; i<=n; i++) a[i]=i;</pre>
5
6 void Out(int a[]) {
   printf("\n%d: ",count);
  count++;
  int i;
  for(i=1;i<=n;i++) printf("%d",a[i]);
10
11
12 int isLastconfigure(int a[]) {
   int i;
13
    for(i=1;i<=n-1;i++) if(a[i]<a[i+1]) return 0;
14
15
  return 1;
```



```
17 void nextconfigure (int a[]) {
    int j = n-1;
18
    while(j \ge 1 \& \& a[j] \ge a[j+1]) j--;
19
20
    int k = n:
21 while(a[j]>a[k])k--;
22
    int temp = a[j];
23
    a[j] = a[k];
24
    a[k] = temp;
    int 1 = j+1; int r = n;
25
26
    while(1<r) {
27
      int temp = a[1];
28
      a[1] = a[r];
29
      a[r] = temp;
30
      1++; r--;
31
32
```



```
33 void genarate(int a[]) {
    Init(a); Out(a);
34
   stop = isLastconfigure(a);
35
36 while (stop==0) {
      nextconfigure(a); Out(a);
37
      stop = isLastconfiqure(a);
38
39
40
41 main() {
   printf("pt hoan vi n:= ");scanf("%d",&n);
42
43 int a[n];
44      qenarate(a);
45 getch();
46
```

Nội dung

- 1. GIỚI THIỆU
- 2. PHƯƠNG PHÁP SINH
- 3. PHƯƠNG PHÁP QUAY LUI



PHƯƠNG PHÁP QUAY LUI

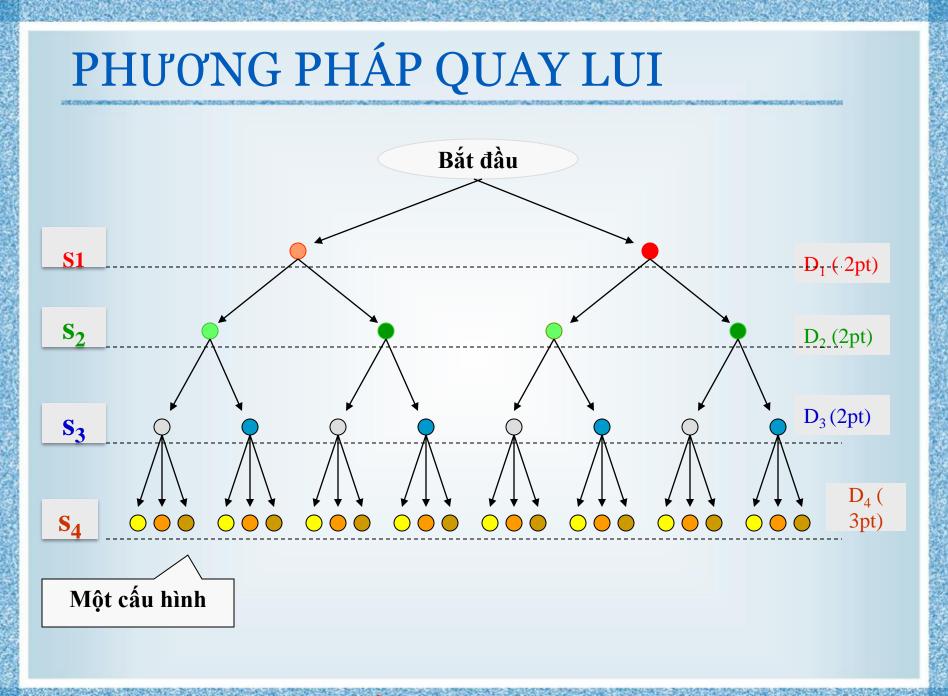
- Mục đích dùng để liệt kê tất cả các câu hình có thể có
- Các khái niệm liên quan: Backtracking Поиск с возвратом-Quay lui
- Phương pháp quay lui dùng để giải bài toán mà nghiệm của bài toán là cấu hình hoặc một loạt cấu hình:
 - Tính chất P: xác định cấu hình
 - Tính chất Q: xác định tính dừng
- Tầm quan trọng của phương pháp:
 - Bài toán mã đi tuần
 - Bài toán xếp hậu
 - Bài toán mê cung
 - Bài toán người giao hàng

PHƯƠNG PHÁP QUAY LUI

```
void try (i, n){
    (1) \forall j \in D_i
    (2) if (< chấp nhận j>){
      s_i = j;
      (3) if (i==n)
         <ghi cấu hình>
     (4) else try (i+1, n);
```

```
\star S = S_1 \dots S_n
```

- ★ (1)- Duyệt tất mọi j đề cử cho s_i.
- \star (2) chấp nhận j thì $s_i = j$,
- ★ (3)- ghi cấu hình
- ★ (4)- xác định thành phần s_{i+1}

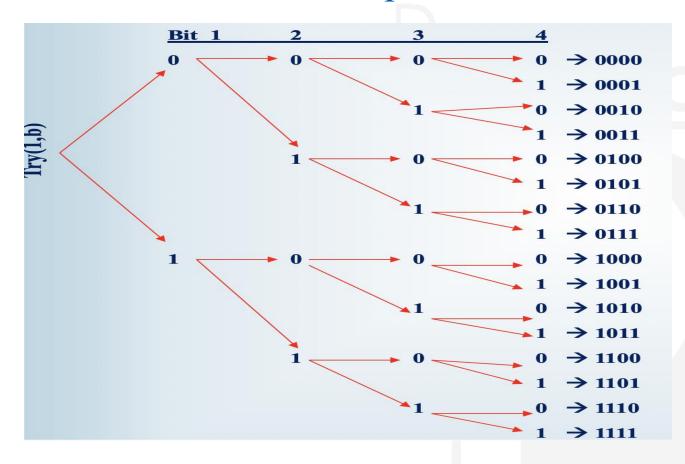




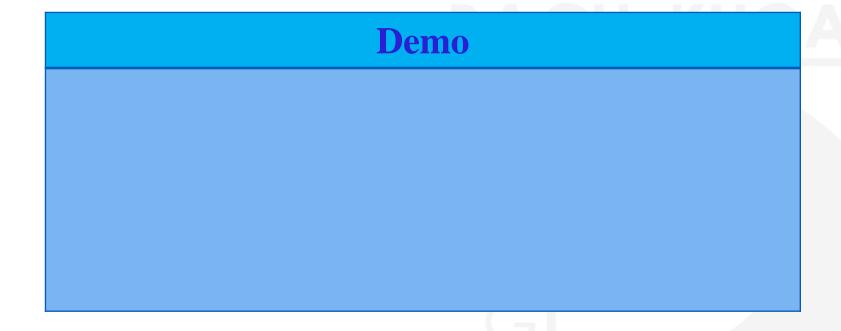
• Bài toán liệt kê chuỗi nhị phân có độ dài n

```
void Try(int i, char b[]){
 char j;
 for(j='0'; j<='1'; j++)
 //P – bỏ qua kiệm tra
  b[i]=i;
  if(i==n) Out(b);
  else Try(i+1,b);
```

• Bài toán liệt kê chuỗi nhị phân có độ dài n



• Bài toán liệt kê chuỗi nhị phân có độ dài n





```
@ #include <stdio.h>
1 int n, count=1;
2 void Out(char b[]) {
3 printf("\n%d:\t",count);
4 int i; count++;
5
    for (i=1; i<=n; i++) putchar (b[i]);
6
7 void Try(int i, char b[]) {
    char j;
8
    for (j='0'; j<='1'; j++) {
10 b[i]=i;
11
      if(i==n) Out(b);
12
     else Try(i+1,b);
13 }}
14 main() {
15
   printf("nhap n = "); scanf("%d", &n);
16
  char b[n]; printf("xau nhi phan %d bit",n);
   Try(1,b); getch();
17
40
```



Bài toán liệt kê hoán vị không lặp của tập gồm
 n phần tử

```
void Try(int i,int b[],int s[]){
 int j;
 for(j=1;j<=n;j++)
  if(b[j]==1){
   s[i]=j;
   b[j]=0;
   if(i==n) Out(s);
   else Try(i+1,b,s);
   b[j]=1;
```



```
# include <stdio.h>
1 int n, count=1;
2 void Init(int b[]) {
3 int j;
    for (j=1; j \le n; j++) b[j]=1;
5 }
6 void Out(int s[]) {
    printf("\n %d:\t",count);
   int i;
    for (i=1; i <= n; i++) printf ("%d", s[i]);
10 count++;
11 }
```

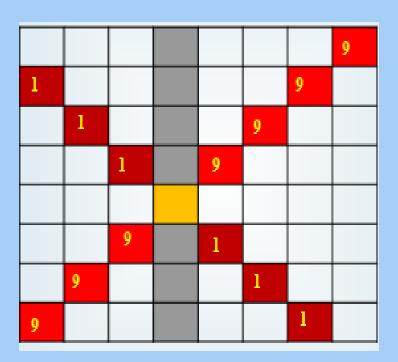


```
12 void Try(int i,int b[],int s[]) {
13
    int j;
14
    for (j=1; j<=n; j++) {
15
      if(b[j]==1){
16
         s[i]=j;
        b[i]=0;
17
        if(i==n) Out(s);
18
19
        else Try(i+1,b,s);
        b[j]=1;
20
21
22 }
23 main() {
    printf("pt hoan vi n:= "); scanf("%d", &n);
24
25 int b[n],s[n];
26
  Init(b); Try(1,b,s);
   getch();
27
```

 Bài toán liệt kê cách xếp n con hậu lên bàn cờ nxn, sao cho các con hậu không thể ăn được nhau.

Minh họa

Bài toán xếp hậu



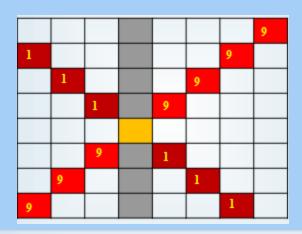
- ✓ Đánh số cột từ 1.. 8
- ✓ Đánh số hàng từ 1.. 8
- ✓ Biểu diễn cách xếp:

$$\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_8$$

- ✓ x_i được xếp ở hàng i
- $\checkmark D = \{1,...,8\}$
 - $\mathbf{x_i} = \mathbf{j}$: Hậu thứ i được xếp vào cột j
- ✓ j được chấp nhận nếu ô(i,j) được tự do

Minh họa

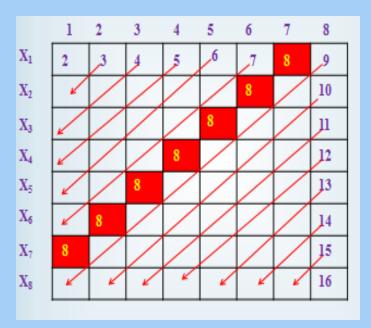
- ✓ Ô (i,j) được tự do
 - ✓ Quản lý cột
 - ✓ Quản lý đường chéo thuận
 - Quản lý đường chéo nghịch



Quản lý cột

Minh họa

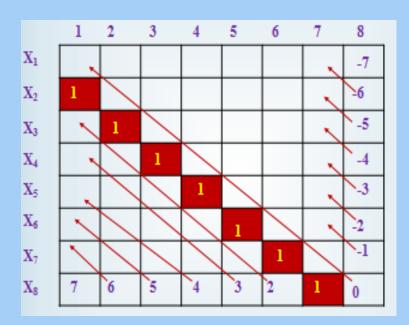
✓ Quản lý đường chéo thuận



Quản lý đường chéo thuận

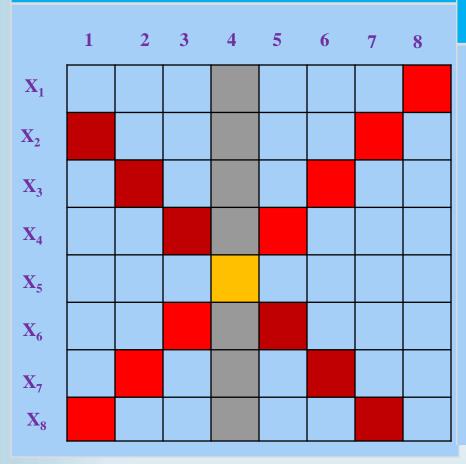
Minh họa

✓ Quản lý đường chéo nghịch



Quản lý đường chéo nghịch





Điều kiện để đặt hậu tại vị trí ô vàng

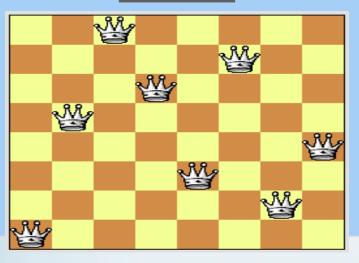
```
0 #include<stdio.h>
1 int a[100],b[100],c[100],x[100];
2 int count;
3 int init(int n) {
   int i;
  for (i=1; i<=n; i++) a[i]=1;
   for (i=2; i<=2*n; i++) b[i]=1;
    for (i=1-n; i<=n-1; i++) c[i]=1;
9 int kq(int n) {
   int i;
10
    for (i=1; i<=n; i++) printf("%3d", x[i]);
11
12 printf("\n");
13
```

```
14 int try(int i,int n) {
    int j;
15
    for (j=1; j \le n; j++) {
16
       if(a[j]&&b[i+j]&&c[i-j]){
17
         x[i]=j;
18
         a[j]=0;
19
         b[i+j]=0;
20
         c[i-j]=0;
21
         if(i==n) { kq(i); count++; }
22
           else try(i+1,n);
23
         a[j]=1;
24
         b[i+j]=1;
25
         c[i-j]=1;
26
27
```

```
33 int main() {
34    int n;
35    printf(" n= ");
36    scanf("%d", &n);
37    init(n);
38    try(1,n);
39    printf("%d", count);
40    getch();
41 }
```



Result



Chương trình

Source Code

$$x = (3 6 4 2 8 5 7 1)$$

- Liệt kê tổ hợp chập k của n phần tử
- K = 3, n = 4
 - -123
 - -124
 - -134
 - -234
- j = s[i-1]+1...n-k+I
- s[0] = 0

Chương trình

```
void Try(int i, int n, int k, int s[]){
                         for(int j = 1; j \le n; j++){
                         if(j >= s[i-1]+1 && j <= n-k+i){
                             s[i] = j;
Bấm để thêm nội dung
                             if(i==k) Out(n,k,s);
                             else Try(i+1,n,k,s);
                     void TH(int n, int k, int s[]){
                         if(k>=0\&\&k<=n)s[0] = 0;
                         Try(1,n,k,s);
```

- Liệt kê chỉnh hợp chập k của n phần tử
- K = 2, n = 3
 - -12
 - 13
 - -21
 - 23
 - **-** 31
 - -32
- c[1] = 1, c[2] = 1, c[3] = 1

Chương trình

```
void Try(int i, int n, int k, int s[], int c[]){
    for(int j = 1; j <= n; j++){
    if(c[j] == 1){
        s[i] = i:
        c[j] = 0;
        if(i==k) Out(n,k,s);
        else Try(i+1,n,k,s,c);
        c[j] = 1;
void TH(int n, int k, int s[], int c[]){
    Test(c,n);
    if(k)=0&&k<=n)s[0] = 0;
   Try(1,n,k,s,c);
```

Tóm lại

- ☐ Kỹ thuật sinh:
 - (1) Xác định trạng thái đầu của bài toán.
 - (2) Xác định trạng thái kết thúc.
 - (3) Xác định một thứ tự cho các trạng thái.
 - (4) Tìm giải thuật đi từ trạng thái này sang trạng thái khác.
- ☐ Kỹ thuật quay lui:
 - (1) Tại 1 thời điểm, chỉ xét thành phần thứ i của cấu hình
 - (2) Với mọi trị j trong miền trị của thành phần này
 - 2.1- Nếu chọn được 1 trị hợp lệ thì

Gán
$$x_i = j$$

Xử lý cấu hình ở thành phần thứ i+1

Nếu i=0 thì bài toán không có lời giải.

Bài Tập

- 1. Liệt kê nghiệm nguyên của pt $x_1 + x_2 + x_3 = 15$ với $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$.
- 2. Liệt kê số chuỗi có độ dài 3 ký tự xyz với $x \in \{a,b,c\}, y \in \{d,e\}, z \in \{m,n,t\}$
- 3. Viết lại các bài mẫu về giải thuật quay lui nhưng ghi kết quả lên file.

Bài Tập

Cấu hình ban đầu: trị đầu tiên của mỗi miền trị

Cách sinh:Lấy trị kế tiếp của mỗi miền trị theo cơ chế vòng tròn

Cấu hình cuối: trị cuối cùng của mỗi miền trị

X Y Za d m a d n a d t a e m a e n a e t b d m n d n $\mathbf{b} \mathbf{d} \mathbf{t}$ b e m b e n b e t c d m c d n c d tc e m

c e n

c e t

Dùng thứ tự từ điển để so sánh:

adm < adn



• WHAT NEXT?