Khoa Công Nghệ Thông Tin
TS. Nguyễn Văn Hiệu

TOÁN RỜI RẠC

Bài 4: BÀI TOÁN ĐẾM NÂNG CAO

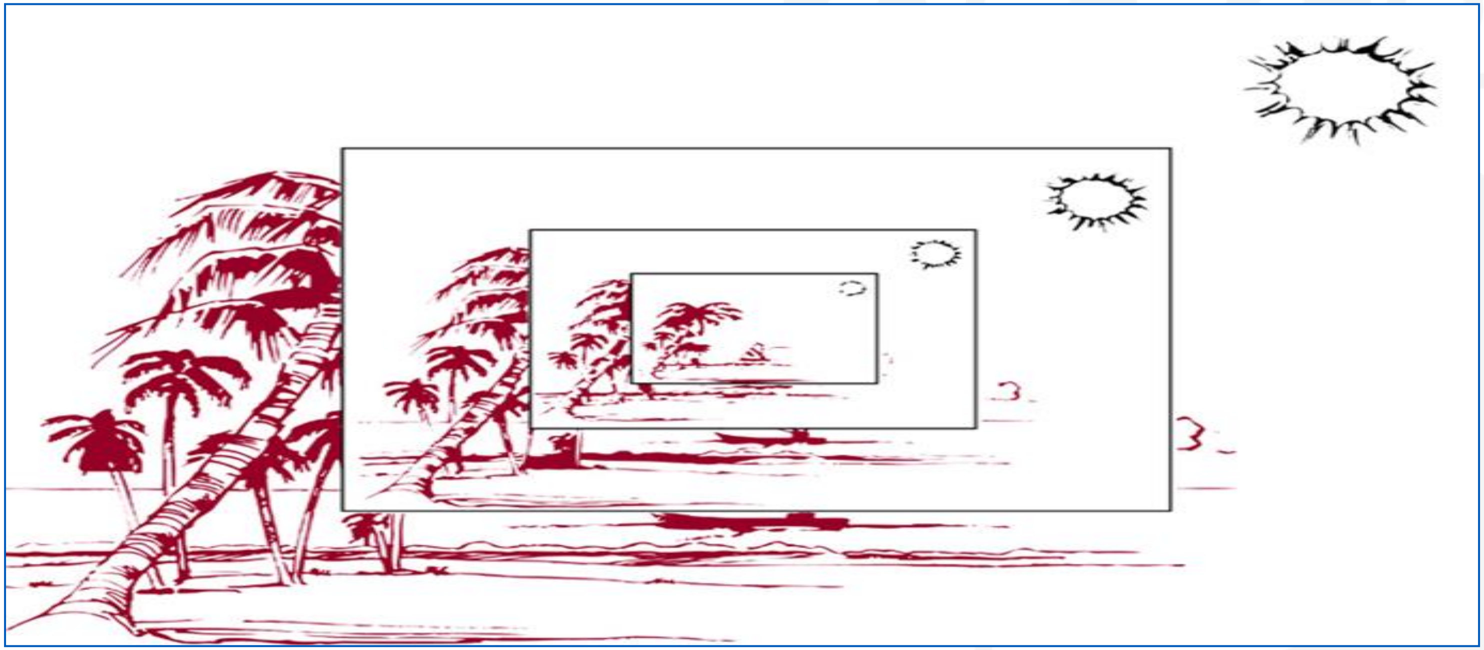
Bài toán đếm cơ bản

- Quy tắc nhân
- Quy tắc cộng
- HV, CH, TH
- Chỉnh hợp lặp
- Tổ hợp lặp
- Nguyên lý bù trừ

Nội dung

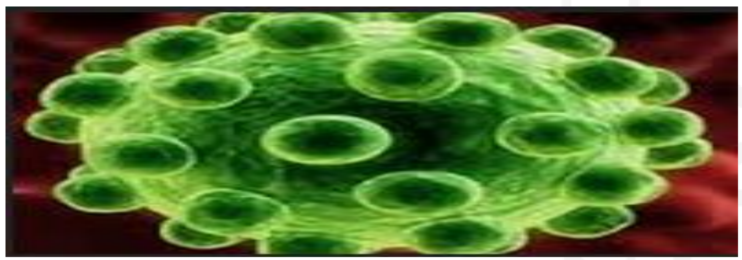
GIỚI THIỆU

- Khó khăn định nghĩa đối tượng một cách tường minh
- Định nghĩa đối tượng qua chính nó



GIỚI THIỆU

- Định nghĩa số đối tượng vi khuẩn tăng lên sau n giờ

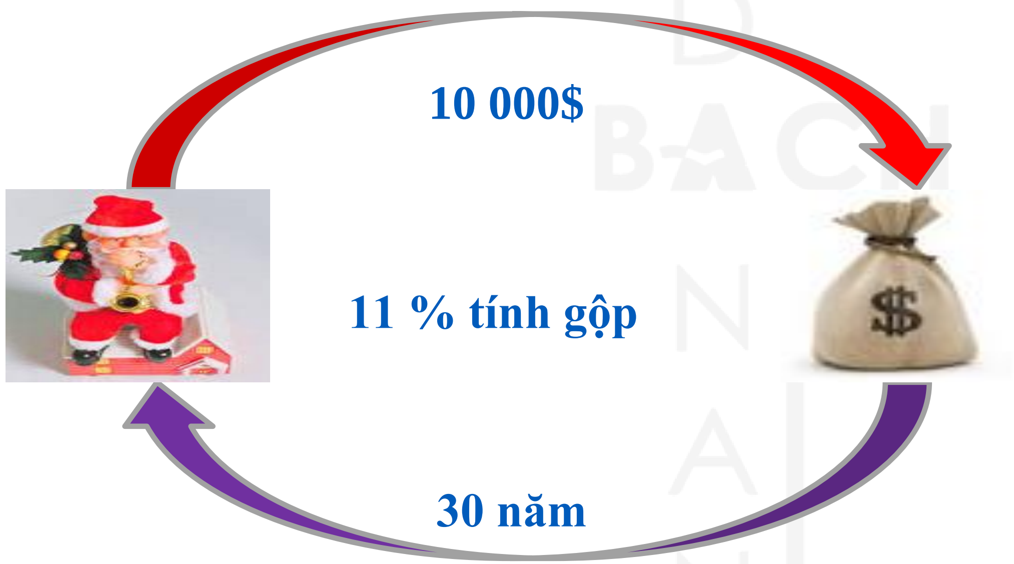


Đưa ra vấn đề phức tạp $\xrightarrow[\text{giải nếu}]{\text{Có thể}}$ phiên bản đơn giản có thể được giải $\xrightarrow[\text{giải nếu}]{\text{Có thể}}$ – – – $\xrightarrow[\text{giải nếu}]{\text{Có thể}}$ phiên bản đơn giản có thể được giải

$a_n = 2a_{n-1}$ $a_{n-1} = 2a_{n-2},$ $a_1 = 2a_0,$ $a_0=5$

GIỚI THIỆU

- Xác định số tiền của ông già có trong ngân hàng sau 30 năm.



GIỚI THIỆU

Xác định một hay nhiều số hạng đầu tiên

+

Xác định số hạng tiếp theo từ số hạng đi trước

⇒ **Đệ quy** dãy số

GIỚI THIỆU

- **Hệ thức truy hồi** của dãy $\{a_n\}$ là công thức biểu diễn a_n qua một hay nhiều số hạng đi trước của dãy.
- **Nghiệm hệ thức truy hồi** của dãy $\{a_n\}$ là dãy $\{b_n\}$ nếu các số hạng thỏa của dãy mãn hệ thức truy hồi.
- **Giải hệ thức truy hồi** của dãy $\{a_n\}$ là đi tìm công thức biểu diễn các số hạng của dãy mà không thông qua các số hạng phía trước.

GIỚI THIỆU

- *Cho dãy* $a_n = 3n$ với mọi n nguyên không âm, **có là lời giải của hệ thức truy hồi** $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ với $n = 2, 3, 4, \ldots$hay không?
  - Giả sử $a_n = 3n$ với mọi n, $n \geq 2$;
  - $2a_{n-1} - a_{n-2}$ = ______________________

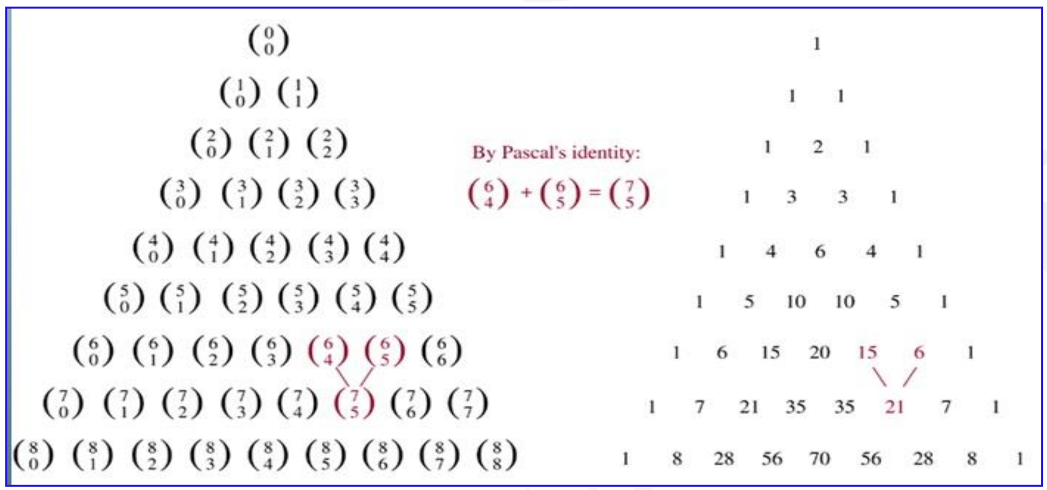
- Cho dãy $a_n = 5$ với mọi n nguyên không âm, **có là lời giải của hệ thức truy hồi** $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ với $n = 2, 3, 4, \ldots$hay không?
  - 2*an*-1 – *an*-2 = ______________________

MÔ HÌNH HÓA

- Tổ hợp C(n,k), $k \le n$,
- Bài toán tháp Hà nội,
- Bài toán họ nhà thỏ.

MÔ HÌNH HÓA

- Tổ hợp C(n,k), $k \le n$.
- Ứng dụng



- Xây dựng

$$C^k_n = C^{k-1}_{n-1} + C^{k-1}_n, \quad C^0_n = C^n_n = 1.$$

MÔ HÌNH HÓA

- Tổ hợp C(n,k), $k \leq n$.

$$C^k_n = C^{k-1}_{n-1} + C^k_{n-1},\quad C^0_n = C^n_n = 1.$$

- Cố định a trong n phần tử
- Chia cách chọn tập con k phần tử của tập n phần tử thành 2 lớp:
  - **Lớp chứa a:** C^{k-1}_{n-1}
  - **Lớp không chứa a:** C^k_{n-1}
- Nguyên lý cộng:

$$C^k_n = C^{k-1}_{n-1} + C^k_{n-1},$$

```
int c(int m,int n){
        if(m==0) return 1;
        else if(m==n) return 1;
        else return (c(m-1,n-
1)+c(m,n-1));
  }
```

MÔ HÌNH HÓA

- Bài toán tháp Hà nội
  - Cho n cái đĩa có kích thước khác nhau được 3 cái cọc A, B, C.
  - n đĩa được xếp trên cọc A;
  - Đĩ được bố trí theo thứ tự kích thước giảm dần từ dưới lên trên.
  - Mục đích: **xếp được tất cả đĩa lên cọc C**
- Game online(7 phút):

https://webgamesonline.com/towers-of-hanoi/index.php

MÔ HÌNH HÓA

- Bài toán tháp Hà nội

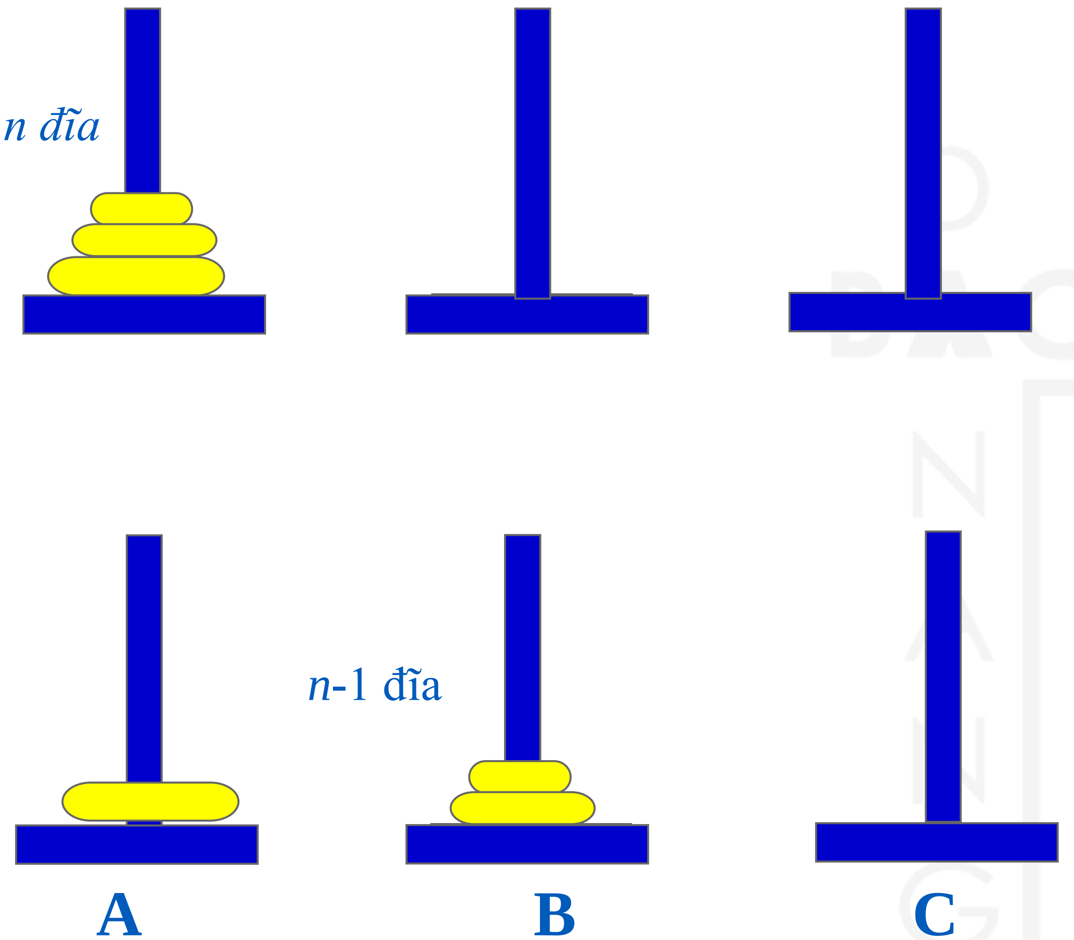
Quy tắc chơi

- Mỗi lần chuyển chỉ được chuyển 1 đĩa và chỉ được xếp đĩa nhỏ lên trên đĩa lớn hơn.
- Mỗi đĩa có thể chuyển từ cột này sang cọc khác;
- Trong quá trình chuyển được phép sử dụng cọc B làm trung gian.

Mục đích :

- xếp toàn bộ đĩa lên cọc C, sao cho số lần dịch chuyển đĩa ít nhất

MÔ HÌNH HÓA



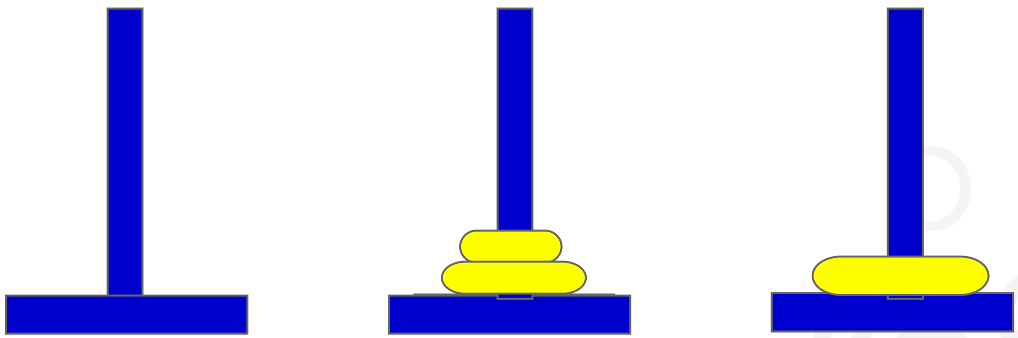
Vị trí trung gian trên tháp Hà Nội

Gọi H_n :
Số lần
chuyển *n* đĩa

Chuyển *n*-1 đĩa
ở phần trên sang cọc B

H_{n-1} số lần
chuyển n-1 đĩa

MÔ HÌNH HÓA



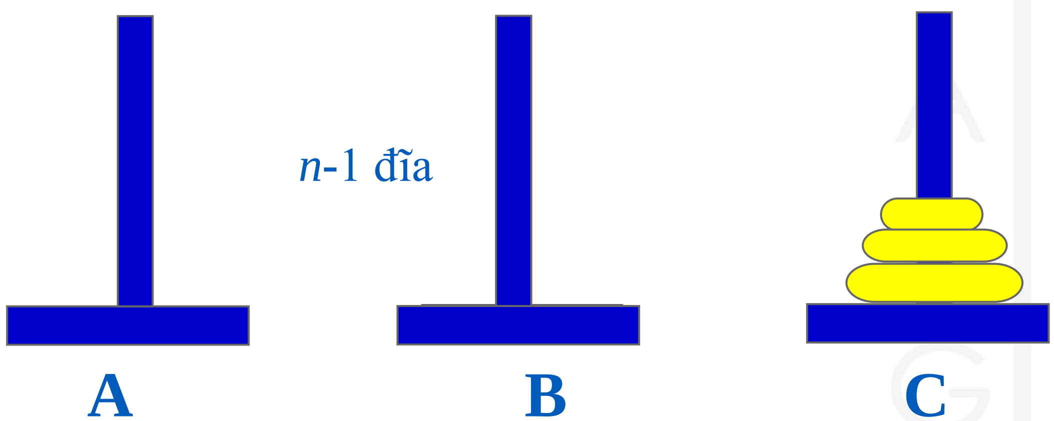
Vị trí trung gian trên tháp Hà Nội

Chuyển đĩa lớn nhất sang cọc C

1 lần chuyển

Chuyển phần trên n-1 đĩa sang cọc C

H_{n-1} lần chuyển



Vị trí cuối cùng trên tháp Hà Nội

MÔ HÌNH HÓA

$$H_n = 2H_{n-1} + 1,\ \mathrm{n} \geq 2; \quad H_1 = 1$$

Chuyển *n*-1 đĩa phần trên sang cọc B → Chuyển đĩa lớn nhất sang cọc C → Chuyển *n*-1 đĩa phần trên sang cọc C

$$H_{n-1} + 1 + H_{n-1}$$

MÔ HÌNH HÓA

- Bài toán tháp Hà nội

Chuyển *n*-1 đĩa phần trên sang cọc B

Chuyển đĩa lớn nhất sang cọc C

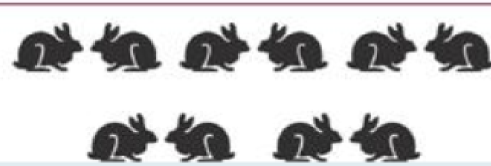
Chuyển *n*-1 đĩa phần trên sang cọc C

$$H_{n-1} + 1 + H_{n-1}$$

```
void Tower(char a, char b, char c, int n)
{
    if(n==1) Move(a,c);
    else
        {
            TowerofHN(a,c,b, n-1);
            TowerofHN(a,b,c,1);
            TowerofHN(b,a,c,n-1);
        }
}
```

MÔ HÌNH HÓA

- Bài toán họ nhà thỏ.

Đôi tái tạo (từ hai tháng tuổi)	Đôi thỏ con (dưới hai tháng tuổi)	Tháng	Đôi tái tạo	Đôi thỏ con	Tổng
		1	0	1	1
		2	0	1	1
		3	1	1	2
		4	1	2	3
		5	2	3	5
		6	3	5	8

MÔ HÌNH HÓA

- Bài toán họ nhà thỏ.

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 3$$

Số đôi thỏ sau n-1 tháng

+

số đôi thỏ mới sinh

=

Số đôi thỏ trên đảo sau *n* tháng

số đôi thỏ sau n-2 tháng

HỆ THỨC TRUY HỒI

- Hệ thức truy hồi **tuyến tính thuần nhất bậc k hệ số hằng:**

$$\boldsymbol{a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}}$$

$c_k \neq 0$; $c_1, \ldots, c_k$ - hằng số,

- Hệ thức truy hồi bậc k cần k điều kiện:

$$a_0 = I_0 ,\ a_1 = I_1 , \ldots, a_{k-1} = I_{k-1}$$

để xác định duy nhất một dãy $\{a_n\}$

HỆ THỨC TRUY HỒI

- Hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất có hệ số hằng
  - $P_n = (1.11) P_{n-1}$
  - $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$
  - $a_n = a_{n-5}$
- Hệ thức truy hồi không tuyến tính, không thuần nhất, không hệ số hằng
  - $H_n = 2H_{n-1} + 1$
  - $B_n = nB_{n-1}$
  - $a_n = a_{n-1} + a^2_{n-2}$

HỆ THỨC TRUY HỒI

- Giải hệ thức truy hồi
  - Tìm công thức tổng quát cho số hạng a_n
  - Số hạng a_n không phải tính qua k phần tử trước nó.
- Phương pháp giải:
  - Phương pháp thế
  - Phương pháp phương trình đặc trưng

PHƯƠNG PHÁP THẾ

- Dùng để giải hệ thức truy hồi bậc 1
- Các bước giải:
    - Thay a_n bởi a_{n-1}
    - Thay a_{n-1} bởi a_{n-2}
    - ---
    - Thay a_0 bởi I_0
- Tính được công thức trực tiếp cho a_n
- Chứng minh tính đúng đắn (sử dụng quy nạp)

PHƯƠNG PHÁP THẾ

- Bài toán tháp Hà nội với H_n là số lần chuyển đĩa ít nhất:

  $H_n = 2H_{n-1} + 1$, $n \geq 1$, với $H_1 = 1$

- Phương pháp thế

$$
\begin{aligned}
H_n &= 2H_{n-1} + 1 \\
&= 2(2H_{n-2} + 1) + 1 = 2^2 H_{n-2} + 2 + 1 \\
&= 2^2(2H_{n-3} + 1) + 2 + 1 = 2^3 H_{n-3} + 2^2 + 2 + 1 \\
&\ldots \\
&= 2^{n-1} H_1 + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \ldots + 2 + 1 \\
&= 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \ldots + 2 + 1 \\
&= 2^n - 1
\end{aligned}
$$

Chứng minh

PHƯƠNG PHÁP PHƯƠNG TRÌNH ĐẶC TRƯNG

- Giải hệ thức truy hồi bậc 2 tuyến tính thuần nhất hệ số hằng.

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} \,,\; n \geq 2 \qquad (1)$$

c_1, c_2- *hằng số*, $c_2 \neq 0$.

***Phương trình đặc trưng*:**

$$r^2 = c_1 r + c_2 \qquad (2)$$

r - *hằng số.*

PHƯƠNG PHÁP PHƯƠNG TRÌNH ĐẶC TRƯNG

- **Nếu (2)** có *hai nghiệm thực phân biệt* r_1, r_2 và có hai điều kiện đầu $a_0 = I_0$,$a_1 = I_1$, thì tồn tại duy nhất hằng số d_1 , d_2:

  $$\mathbf{a_n = d_1 r^n{}_1 + d_2 r^n{}_2}$$

  là **nghiệm của (1)**

- **Nếu (2)** có *nghiệm thực kép* r_1, và có hai điều kiện đầu $a_1 = I_0$,$a_1 = I_1$ thì tồn tại duy nhất hằng số d_1 , d_2:

  $$\mathbf{a_n = (d_1 + d_2 n) r^n{}_1}$$

  là **nghiệm của (1)**

PHƯƠNG PHÁP PHƯƠNG TRÌNH ĐẶC TRƯNG

- **Cần chứng minh:**
  - $a_n = d_1 r^n{}_1 + d_2 r^n{}_2$ là nghiệm của (1)
  - tồn tại d_1 d_2 duy nhất không ?
- **Chứng minh:**
  - $c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} = d_1 r^n{}_1 + d_2 r^n{}_2$ với mọi $n \geq 2$
  - $\begin{cases} I_0 = d_1 + d_2 \\ I_1 = d_1 r_1 + d_2 r_2 \end{cases}$ Suy ra d_1 d_2 duy nhất

PHƯƠNG PHÁP PHƯƠNG TRÌNH ĐẶC TRƯNG

- Bài toán họ nhà thỏ có hệ thức truy hồi

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \; n \geq 2; \; a_0 = 1, \; a_1 = 1$$

Giải:

Bước 1: Tìm nghiệm tổng quát

Bước 2: Tìm hệ số hằng

Bước 3: Nghiệm của hệ thức truy hồi

PHƯƠNG PHÁP PHƯƠNG TRÌNH ĐẶC TRƯNG

Bước 1: Tìm nghiệm tổng quát

- Phương trình đặc trưng: $\mathbf{r^2 = r + 1}$
- Nghiệm của pt đặc trưng: $\mathbf{r_1 = (1+\sqrt{5})/2}$, $\mathbf{r_2 = (1-\sqrt{5})/2}$
- Nghiệm tổng quát: $\mathbf{a_n = d_1((1+\sqrt{5})/2)^n + d_2\,((1+\sqrt{5})/2)^n}$

Bước 2: Tìm hằng số $\mathbf{d_1}$ **và** $\mathbf{d_2}$ **:**

- Sử dụng điều kiện đầu:

$$\begin{cases} 1 = d_1 + d_2 \\ 1 = d_1\,(1+\sqrt{5})/2 + d_2\,(1+\sqrt{5})/2 \end{cases}$$

PHƯƠNG PHÁP PHƯƠNG TRÌNH ĐẶC TRƯNG

Bước 2 (t.):

$d_1 = (1+\sqrt{5}) / 2\sqrt{5}$

$d_2 = -(1-\sqrt{5}) / 2\sqrt{5}$

Bước 3: Nghiệm của hệ thức truy hồi

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}, n \geq 0$$

PHƯƠNG PHÁP PHƯƠNG TRÌNH ĐẶC TRƯNG

Giải hệ thức truy hồi sau:

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}, \; a_0 = 1, \; a_1 = 6.$$

PHƯƠNG PHÁP PHƯƠNG TRÌNH ĐẶC TRƯNG

– **Bước 1:** Tìm nghiệm tổng quát
  - Phương trình đặc trưng: $r^2 = 6r - 9$
  - pt đặc trưng có nghiệm kép: $r_1 = r_2 = 3$
  - Nghiệm tổng quát: $a_n = (d_1 + d_2 n)\, 3^n$

– **Bước 2**: Tìm hằng số **d_1 và d_2**
  - Sử dụng điều kiện đầu:

$$\begin{cases} 1 = d_1 \\ 6 = (d_1 + d_2)\, 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} d_1 = 1 \\ d_2 = 1 \end{cases}$$

– **Bước** 3: Nghiệm của hệ thức truy hồi

$$a_n = (1 + n)\, 3^n, \quad n \geq 0$$

PHƯƠNG PHÁP PHƯƠNG TRÌNH ĐẶC TRƯNG

❖ Hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc k:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} \qquad (*)$$

trong đó, $c_1, c_2, \ldots, c_k$ - hằng số, $c_k \neq 0$.

❖ Phương trình đặc trưng:

$$r^k = c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + \ldots + c_k \qquad (**)$$

PHƯƠNG PHÁP PHƯƠNG TRÌNH ĐẶC TRƯNG

❖ **Người ta chứng minh được kết quả sau:**

❖ Nếu (*) có nghiệm thực phân biệt $r_1, r_2, \ldots, r_k$, thì (**) có nghiệm tổng quát sau:

$$a_n = d_1 \cdot r_1^n + d_2 \cdot r_2^n + \ldots + d_k \cdot r_k^n$$

❖ Nếu (*) có t nghiệm thực phân biệt $r_1, r_2, \ldots, r_t$ tương ứng với các tính bội $m_1, m_2, \ldots, m_t$, thì (**) có nghiệm tổng quát:

$$a_n = (d_{10} + d_{11}n + \ldots + d_{1m_1-1}n^{m_1-1}) \cdot r_1^n + \ldots$$

$$+ (d_{t0} + d_{t1}n + \ldots + d_{tm_t-1}n^{m_t-1}) \cdot r_t^n$$

PHƯƠNG PHÁP PHƯƠNG TRÌNH ĐẶC TRƯNG

Giải hệ thức truy hồi sau:

$$a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3},$$

$$a_0 = 1,$$

$$a_1 = -2,$$

$$a_2 = -1.$$

PHƯƠNG PHÁP PHƯƠNG TRÌNH ĐẶC TRƯNG

Bước 1: Tìm nghiệm tổng quát

- Phương trình đặc trưng**:** $\mathbf{r^3 = - 3r^2 - 3r - 1}$
- Nghiệm của pt đặc trưng: $\mathbf{r_1 = r_2 = r_3} = -1$
- Nghiệm tổng quát: $\mathbf{a_n = (d_{10} + d_{11}\, n + d_{12}\, n^2)(-1)^n}$

Bước 2: Tìm hằng số d_{10}, d_{11} và d_{12}

- Sử dụng điều kiện đầu:

$$\begin{cases} 1 = d_{10}\,, \\ \mathbf{-2} = (d_{10} + d_{11} + d_{12})(-1)\,, \\ \mathbf{-1} = d_{10} + d_{11}2 + d_{12}\,4 \end{cases}$$

PHƯƠNG PHÁP PHƯƠNG TRÌNH ĐẶC TRƯNG

Bước 2 (t.):

$d_{10} = 1$

$d_{11} = 3$

$d_{12} = -2$

Bước 3: Nghiệm của hệ thức truy hồi

$$a_n = (1 + 3n - 2n^2)(-1)^n, \; n \geq 0$$

BÀI TẬP

1. $\mathbf{a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}}$ **,**

   $\mathbf{a_0 = 2, a_1 = 5, a_2 = 15.}$

- ĐS: $a_n = 1 - 2^n + 2.3^n$.

- WHAT NEXT?