

# Kwadratury

**Zadanie 1.** Wiadomo, że

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx = \pi. \quad (1)$$

Powyższą równość można wykorzystać do obliczenia przybliżonej wartości  $\pi$  poprzez całkowanie numeryczne.

- (a) Oblicz wartość powyższej całki, korzystając ze złożonych kwadratur otwartej prostokątów (ang. mid-point rule), trapezów i Simpsona. Można wykorzystać funkcje `integrate.trapz` i `integrate.simps` z biblioteki `scipy`. Na przedziale całkowania rozmieść  $2^m + 1$  równoodległych węzłów. W kolejnych próbach  $m$  wzrasta o 1, tzn. między każde dwa sąsiednie węzły dodawany jest nowy węzeł, a ich zagęszczenie zwiększa się dwukrotnie. Przyjmij zakres wartości  $m$  od 1 do 25.

Dla każdej metody narysuj wykres wartości bezwzględnej błędu względnego w zależności od liczby ewaluacji funkcji podcałkowej,  $n + 1$  (gdzie  $n = 1/h$ , z krokiem  $h$ ). Wyniki przedstaw na wspólnym wykresie, używając skali logarytmicznej na obu osiach.

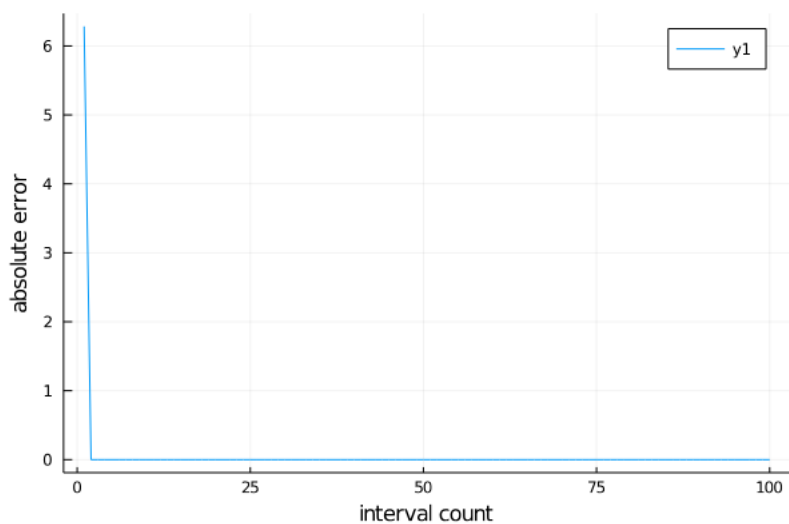
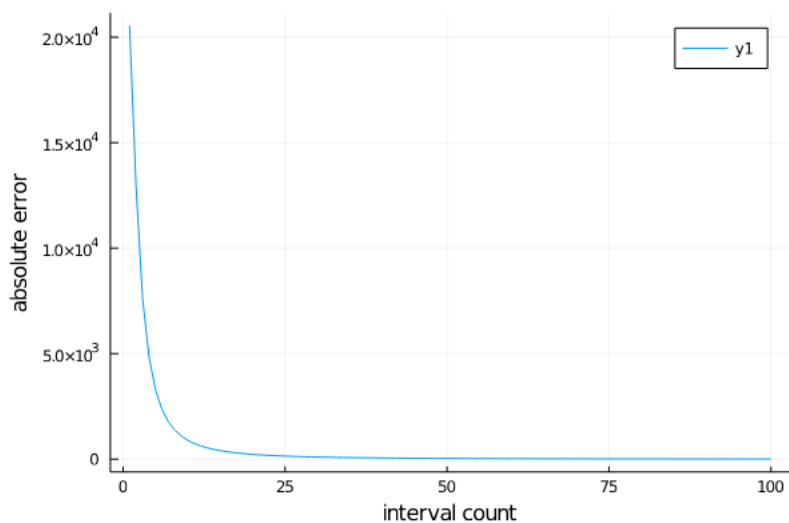
- (b) Czy istnieje pewna wartość, poniżej której zmniejszanie kroku  $h$  nie zmniejsza już błędu kwadratury? Porównaj wartość  $h_{\min}$ , odpowiadającą minimum wartości bezwzględnej błędu względnego, z wartością wyznaczoną w laboratorium 1.
- (c) Dla każdej z użytych metod porównaj empiryczny rząd zbieżności z rzędem zbieżności przewidywanym przez teorię. Aby wyniki miały sens, do obliczenia rzędu empirycznego użyj wartości  $h$  z zakresu, w którym błąd metody przeważa nad błędem numerycznym.

**Zadanie 2.** Oblicz wartość całki

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx \quad (2)$$

metodą Gaussa-Legendre'a. Narysuj wykres wartości bezwzględnej błędu względnego w zależności od liczby ewaluacji funkcji podcałkowej,  $n + 1$ . Przyjmij na tyle duży zakres  $n$ , aby wykryć, kiedy błąd numeryczny zaczyna przeważać nad błędem metody. Postaraj się umiejscowić otrzymane wyniki na wykresie stworzonym w podpunkcie (a).

*Uwaga.* Poniższe wykresy (nie dotyczące obecnych zadań) są przykładem błędnego opracowania wyników. Popołniono następujące błędy:



- Użyto błędu bezwzględnego zamiast błędu względnego.
- Użyto skali liniowej zamiast logarytmicznej w sytuacji, gdy wartości błędu wykazują w pewnym zakresie znaczną zmienność, w innym zakresie prawie nie zmieniają się.
- Źle dobrano zakres zmiennej na osi x. Obecnie nie wiadomo, kiedy błąd całkowity osiąga minimum, a błąd numeryczny (ang. *rounding error*) za-

czyna dominować nad błędem metody (ang. *truncation error*). Przypomnij sobie zadanie 1 z laboratorium 1.

- Różne metody lepiej porównywać na wspólnym wykresie.