Równania różniczkowe zwyczajne – część II

Zadanie 1. Dynamika układu drapieżca-ofiara opisana jest modelem Lotki-Volterry:

$$x' = x(\alpha_1 - \beta_1 y) \tag{1}$$
$$y' = y(-\alpha_2 + \beta_2 x) \tag{2}$$

Znaczenie symboli jest następujące:

$x(t)$	gęstość ofiar (np. liczba zajęcy na jednostkę powierzchni) w zależności od czasu
$y(t)$	gęstość drapieżców (np. liczba rysi na jednostkę powierzchni) w zależności od czasu
α_1	współczynnik przyrostu ofiar (np. zajęcy) w izolowanym środowisku
α_2	współczynnik ubywania drapieżców (np. rysi) w izolowanym środowisku
β_1	współczynnik intensywności kontaktów między drapieżcami a ofiarami, kończących się upolowaniem ofiary
β_2	współczynnik opisujący wpływ obecności ofiar na współczynnik przyrostu drapieżców

Przyjmij wartości początkowe: $x(0) = 20$, $y(0) = 20$ oraz następujące wartości parametrów: $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 0.5$, $\beta_2 = 0.02$. Całkując od $t = 0$ do $t = 80$, rozwiąż powyższy układ równań:

- jawną metodą Eulera

$$y_{k+1} = y_k + h_k f(t_k, y_k)$$

- niejawną metodą Eulera

$$y_{k+1} = y_k + h_k f(t_{k+1}, y_{k+1})$$

- półjawną metodę Eulera

$$x_{n+1} = x_n + h_n f(x_n, y_{n+1})$$
$$y_{n+1} = y_n + h_n g(x_n, y_{n+1})$$

  lub

$$x_{n+1} = x_n + h_n f(x_{n+1}, y_n)$$
$$y_{n+1} = y_n + h_n g(x_{n+1}, y_n)$$

- metodą Rungego-Kutty czwartego rzędu (RK4)

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h_k}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \text{ gdzie}$$

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_k, y_k) \\
k_2 &= f(t_k + h_k/2, y_k + h_k k_1/2) \\
k_3 &= f(t_k + h_k/2, y_k + h_k k_2/2) \\
k_4 &= f(t_k + h_k, y_k + h_k k_3)
\end{aligned}$$

(a) Na wspólnym rysunku narysuj wykresy liczebności obu populacji w zależności od czasu. Na osobnym rysunku narysuj portret fazowy układu, tj. wykres trajektorii punktu $(x(t), y(t))$ w funkcji czasu. Podaj jego fizyczną interpretację.

(b) Dla jakich warunków początkowych liczebności populacji nie ulegają zmianie? Znajdź punkty stacjonarne powyższego układu, rozwiązując układ równań:

$$x' = x(\alpha_1 - \beta_1 y) = 0 \tag{3}$$

$$y' = y(-\alpha_2 + \beta_2 x) = 0 \tag{4}$$

(c) Czy zachowany jest niezmiennik:

$$H(x, y) = \beta_2 x + \beta_1 y - \alpha_2 \ln(x) - \alpha_1 \ln(y) \ . \tag{5}$$

Na wspólnym rysunku przedstaw wykresy tego niezmiennika znalezione przez każdą metodę numeryczną.

(d) Wiemy, że na przestrzeni lat populacja rysi i zajęcy kształtowała się wg danych przedstawionych w pliku `LynxHare.txt`.

Wybierz jedną z powyższych metod numerycznych i oszacuj prawdziwe wartości współczynników $\theta = [\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2]$. W tym celu wykonaj minimalizację funkcji kosztu. Jako funkcję kosztu wykorzystaj sumę kwadratów reszt (ang. *residual sum of squares*):

$$L(\theta) = \sum_{i=0}^{T} (l_i - \hat{l}_i)^2 + (h_i - \hat{h}_i)^2 \ ,$$

gdzie l_i oznacza prawdziwą liczbę rysi, $\hat{l}_i$ oznacza liczbę rysi wyznaczonych metodą numeryczną, a h_i oznacza prawdziwą liczbę zajęcy, $\hat{h}_i$ oznacza liczbę zajęcy wyznaczonych metodą numeryczną, Ponieważ nie znamy gradientu $\nabla_\theta L(\theta)$, do minimalizacji wykorzystaj metodę Neldera-Meada, która nie wymaga informacji o gradiencie.

Powtórz obliczenia, tym razem jako funkcję kosztu wykorzystując:

$$L(\theta) = -\sum_{i=0}^{T} l_i \ln \hat{l}_i - \sum_{i=0}^{T} h_i \ln \hat{h}_i + \sum_{i=0}^{T} \hat{l}_i + \sum_{i=0}^{T} \hat{h}_i \ .$$