

## Rozwiązywanie równań nieliniowych

**Zadanie 1.** Dla poniższych funkcji i punktów początkowych metoda Newtona zawodzi. Wyjaśnij dlaczego. Następnie znajdź pierwiastki, modyfikując wywołanie funkcji `scipy.optimize.newton` lub używając innej metody.

- (a)  $f(x) = x^3 - 5x$ ,  $x_0 = 1$
- (b)  $f(x) = x^3 - 3x + 1$ ,  $x_0 = 1$
- (c)  $f(x) = 2 - x^5$ ,  $x_0 = 0.01$
- (d)  $f(x) = x^4 - 4.29x^2 - 5.29$ ,  $x_0 = 0.8$

**Zadanie 2.** Dane jest równanie:

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 = 0 \quad (1)$$

Każda z następujących funkcji definiuje równoważny schemat iteracyjny:

$$\phi_1(x) = (x^2 + 2)/3, \quad (2)$$

$$\phi_2(x) = \sqrt{3x - 2}, \quad (3)$$

$$\phi_3(x) = 3 - 2/x, \quad (4)$$

$$\phi_4(x) = (x^2 - 2)/(2x - 3). \quad (5)$$

- (a) Przeanalizuj zbieżność oraz rząd zbieżności schematów iteracyjnych odpowiadających funkcjom  $\phi_i(x)$  dla pierwiastka  $\alpha = 2$  badając wartość  $|\phi'_i(2)|$ .
- (b) Potwierdź analizę teoretyczną implementując powyższe schematy iteracyjne i weryfikując ich zbieżność (lub brak). Każdy schemat iteracyjny wykonaj przez 10 iteracji.

Wyznacz eksperymentalnie rząd zbieżności każdej metody iteracyjnej ze wzoru

$$r = \frac{\ln \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_{k+1}}}{\ln \frac{\varepsilon_{k-1}}{\varepsilon_k}} \quad (6)$$

gdzie błąd bezwzględny  $\varepsilon_k$  definiujemy jako  $\varepsilon_k = |x_k - x_*|$ ,  $x_k$  jest przybliżeniem pierwiastka w  $k$ -tej iteracji, a  $x_*$  dokładnym położeniem pierwiastka równania.

- (c) Na wspólnym rysunku przedstaw wykresy błędu względnego każdej metody w zależności od numeru iteracji. Użyj skali logarytmicznej na osi y (pomocna będzie funkcja `semilogy`).

Stwórz drugi rysunek, przedstawiający wykresy błędu względnego tylko dla metod zbieżnych.

**Zadanie 3.** Napisz schemat iteracji wg metody Newtona dla każdego z następujących równań nieliniowych:

(a)  $x^3 - 2x - 5 = 0$

(b)  $e^{-x} = x$

(c)  $x \sin(x) = 1$ .

Jeśli  $x_0$  jest przybliżeniem pierwiastka z dokładnością 4 bitów, ile iteracji należy wykonać aby osiągnąć:

- 24-bitową dokładność
- 53-bitową dokładność?

**Zadanie 4.** Napisz schemat iteracji wg metody Newtona dla następującego układu równań nieliniowych:

$$\begin{aligned}x_1^2 + x_2^2 &= 1 \\ x_1^2 - x_2 &= 0.\end{aligned}$$

Korzystając z faktu, że dokładne rozwiązanie powyższego układu równań to:

$$x_1 = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}} \quad (7a)$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} \quad (7b)$$

oblicz błąd względny rozwiązania znalezionej metodą Newtona.