

Interpolacja

Zadanie 1. Populacja Stanów Zjednoczonych na przestrzeni lat przedstawiała się następująco:

Rok	Populacja
1900	76 212 168
1910	92 228 496
1920	106 021 537
1930	123 202 624
1940	132 164 569
1950	151 325 798
1960	179 323 175
1970	203 302 031
1980	226 542 199

Istnieje dokładnie jeden wielomian ósmego stopnia, który interpoluje powyższe dziewięć punktów, natomiast sam wielomian może być reprezentowany na różne sposoby. Rozważamy następujące zbiory funkcji bazowych $\phi_j(t)$, $j = 1, \dots, 9$:

$$\phi_j(t) = t^{j-1} \tag{1}$$

$$\phi_j(t) = (t - 1900)^{j-1} \tag{2}$$

$$\phi_j(t) = (t - 1940)^{j-1} \tag{3}$$

$$\phi_j(t) = ((t - 1940)/40)^{j-1} \tag{4}$$

- (a) Dla każdego z czterech zbiorów funkcji bazowych utwórz macierz Vandermonde'a.
- (b) Oblicz współczynnik uwarunkowania każdej z powyższych macierzy, używając funkcji `numpy.linalg.cond`.
- (c) Używając najlepiej uwarunkowanej bazy wielomianów, znajdź współczynniki wielomianu interpolacyjnego dla danych z zadania. Narysuj wielomian interpolacyjny. W tym celu użyj schematu Hornera i oblicz na przedziale $[1900, 1990]$ wartości wielomianu w odstępach jednorocznych. Na wykresie umieść także węzły interpolacji.

- (d) Dokonaj ekstrapolacji wielomianu do roku 1990. Porównaj otrzymaną wartość z prawdziwą wartością dla roku 1990, wynoszącą 248 709 873. Ile wynosi błąd względny ekstrapolacji dla roku 1990?
- (e) Wyznacz wielomian interpolacyjny Lagrange'a na podstawie 9 węzłów interpolacji podanych w zadaniu. Oblicz wartości wielomianu w odstępach jednorocznych.
- (f) Wyznacz wielomian interpolacyjny Newtona na podstawie tych samych węzłów interpolacji i oblicz wartości wielomianu w odstępach jednorocznych.
- (g) Zaokrąglaj dane podane w tabeli do jednego miliona. Na podstawie takich danych wyznacz wielomian interpolacyjny ósmego stopnia, używając najlepiej uwarunkowanej bazy z podpunktu (c). Porównaj wyznaczone współczynniki z współczynnikami obliczonymi w podpunkcie (c). Wyjaśnij otrzymany wynik. Ile wynosi błąd względny ekstrapolacji dla roku 1990 obliczony przy pomocy tak wyznaczonego wielomianu interpolacyjnego?