

Laboratorium 8

Autorzy: Kosman Mateusz, Ludwin Bartosz

Temat laboratorium:

Celem niniejszego laboratorium jest analiza skuteczności i ograniczeń metod numerycznych znajdowania miejsc zerowych funkcji nieliniowych. W szczególności badana jest zbieżność metody Newtona oraz różnych schematów iteracyjnych, jak również zastosowanie metody Newtona do rozwiązywania układów równań nieliniowych. Przeprowadzona zostaje analiza teoretyczna warunków zbieżności, a następnie weryfikacja poprzez eksperymenty obliczeniowe. Porównana zostaje także skuteczność alternatywnych metod, takich jak bisekcja, w przypadkach, gdzie klasyczna metoda Newtona zawodzi.

Treść:

Zadanie 1. Dla poniższych funkcji i punktów początkowych metoda Newtona zawodzi. Wyjaśnij dlaczego. Następnie znajdź pierwiastki, modyfikując wywołanie funkcji `scipy.optimize.newton` lub używając innej metody.

(a) $x^3 - 5x$, $x_0 = 1$

(b) $x^3 - 3x + 1$, $x_0 = 1$

(c) $2 - x^5$, $x_0 = 0.01$

(d) $x^4 - 4.29x^2 - 5.29$, $x_0 = 0.8$

Zadanie 2. Dane jest równanie:

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 = 0 \quad (1)$$

Każda z następujących funkcji definiuje równoważny schemat iteracyjny:

$$\phi_1(x) = (x^2 + 2)/3 \quad (2)$$

$$\phi_2(x) = \sqrt{3x - 2} \quad (3)$$

$$\phi_3(x) = 3 - 2/x \quad (4)$$

$$\phi_4(x) = (x^2 - 2)/(2x - 3) \quad (5)$$

(a) Przeanalizuj zbieżność oraz rząd zbieżności schematów iteracyjnych odpowiadających funkcjom $\phi_i(x)$ dla pierwiastka $\alpha = 2$ badając wartość $|\phi_i'(2)|$.

(b) Potwierdź analizę teoretyczną implementując powyższe schematy iteracyjne i weryfikując ich zbieżność (lub brak). Każdy schemat iteracyjny wykonaj przez 10 iteracji.

Wyznacz eksperymentalnie rząd zbieżności każdej metody iteracyjnej ze wzoru

$$r = \frac{\ln \frac{\epsilon_k}{\epsilon_{k+1}}}{\ln \frac{\epsilon_{k-1}}{\epsilon_k}}$$

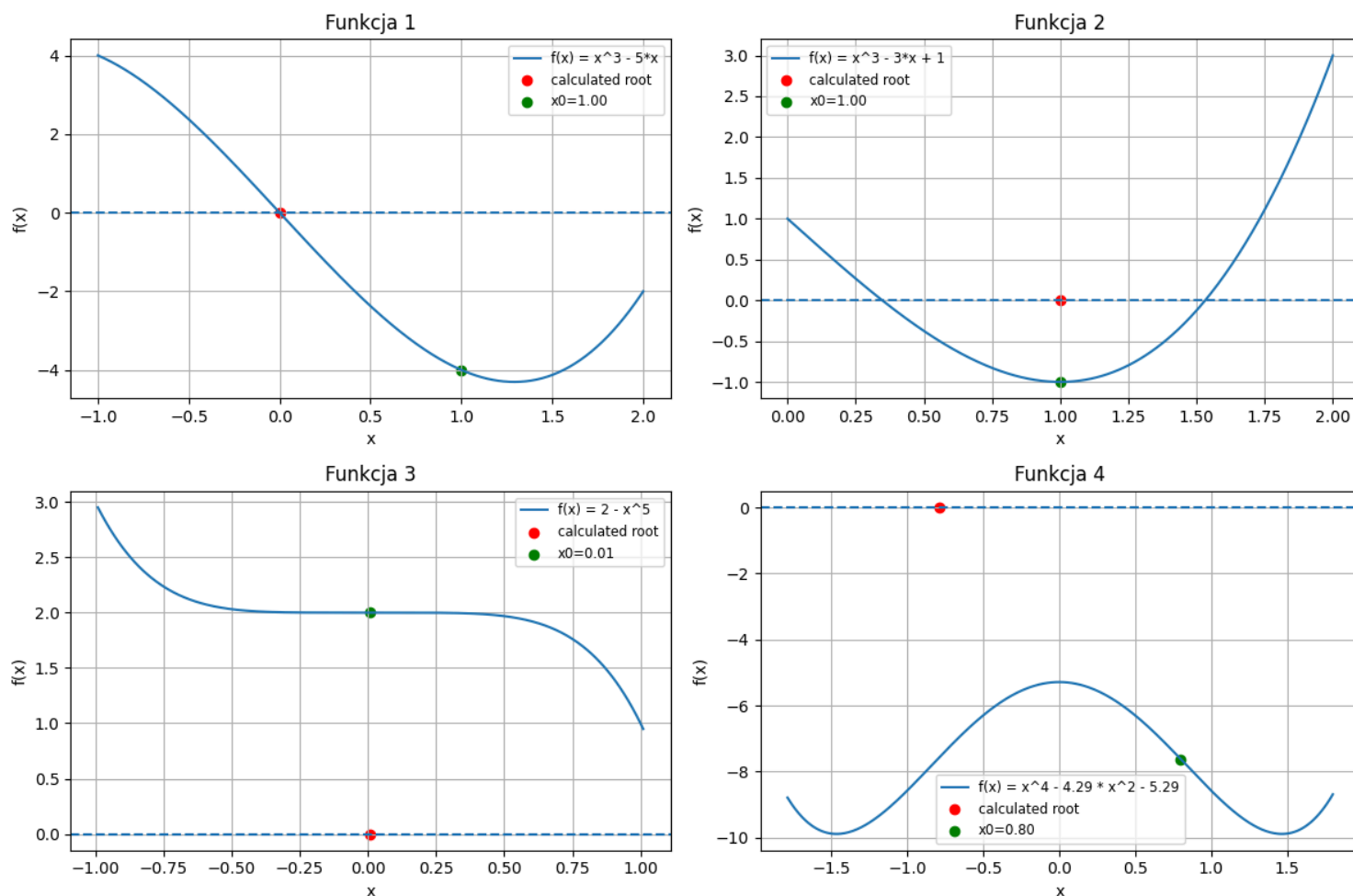
gdzie błąd bezwzględny ϵ_k definiujemy jako $\epsilon_k = |x_k - x_*|$, x_k jest przybliżeniem pierwiastka w k-tej iteracji, a x_* dokładnym położeniem pierwiastka równania.

(c) Na wspólnym rysunku przedstaw wykresy błędu względnego każdej metody w zależności od numeru iteracji. Użyj skali logarytmicznej na osi y (pomocna będzie funkcja semilogy). Stwórz drugi rysunek, przedstawiający wykresy błędu względnego tylko dla metod zbieżnych.

Rozwiązanie:

Zadanie 1:

Metoda Newtona dla funkcji zadanych w podpunktach a-d zachowuje się następująco:



Wykres 1

Jak widać tylko dla funkcji 1 (a) udało się obliczyć poprawnie pierwiastek. Dzieje się tak, ponieważ tylko pierwsza funkcja spełniła wszystkie warunki konieczne do zbieżności metody Newtona:

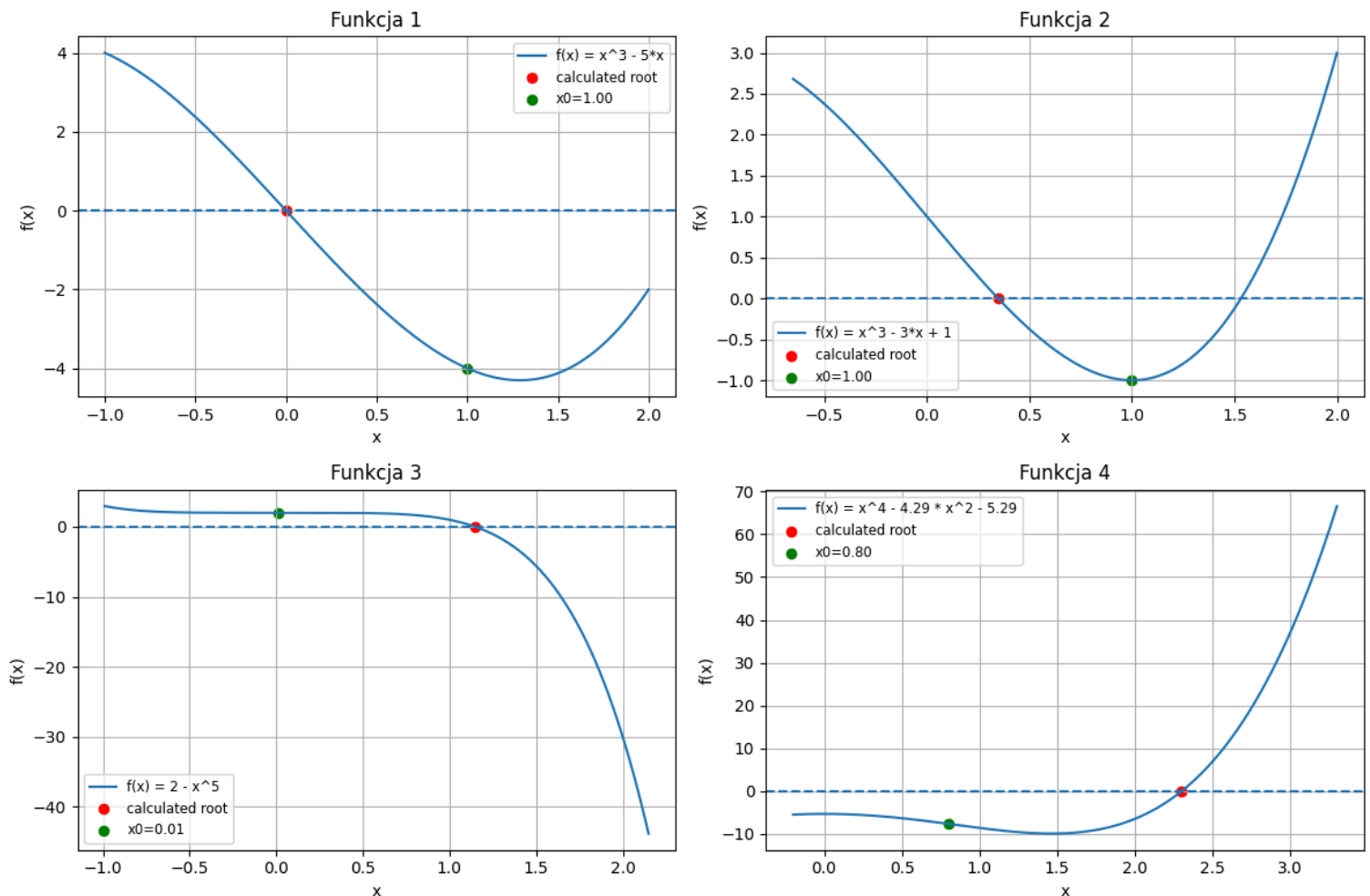
- 1) $f \in C^2[a, b]$,
- 2) f' i f'' nie zmieniają znaku w $[a, b]$,
- 3) $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Dla reszty punktów prawdopodobnie warunek 2) nie został spełniony (w wybranym przedziale przez algorytm prawdopodobnie zmienia się znak pochodnej).

Dla każdej funkcji spełnione są natomiast warunki konieczne na zbieżność metody bisekcji, tj.:

- 1) $f \in C[a, b]$
- 2) $f(a) \cdot f(b) < 0$

Po użyciu tej metody otrzymujemy wykres:



Wykres 2

W tym przypadku pierwiastki są wyznaczone z dobrą precyzją dla każdej funkcji. Warto jednak nadmienić że mniej restrykcyjne warunki użycia okupujemy niższym rzędem zbieżności.

Zadanie 2:

a) Pochodne podanych funkcji ϕ_x to odpowiednio:

$$\phi_1'(x) = [(x^2 + 2)/3]' = \frac{2x}{3},$$

$$f'(2) = \frac{4}{3}$$

$$\phi_2'(x) = [\sqrt{3x - 2}]' = \frac{3}{2\sqrt{3x-2}},$$

$$f'(2) = \frac{3}{4}$$

$$\phi_3'(x) = [3 - 2/x]' = \frac{2}{x^2},$$

$$f'(2) = \frac{1}{2}$$

$$\phi_4'(x) = [(x^2 - 2)/(2x - 3)]' = \frac{2(x^2 - 3x + 2)}{(2x - 3)^2},$$

$$f'(2) = 0$$

Funkcje ϕ_2, ϕ_3, ϕ_4 posiadają pochodną w punkcie 2 mniejszą niż 1. Zgodnie z teorią oznacza to, że tylko ϕ_1 nie jest zbieżna.

b) Wyniki schematów iteracyjnych dla danych funkcji od $\phi_1(x)$ do $\phi_4(x)$ wykonanych dla $k \in [1, 10]$ są następujące:

k	$\phi_1(x)$	$\phi_2(x)$	$\phi_3(x)$	$\phi_4(x)$
1	3.667	2.646	2.333	2.333
2	5.148	2.437	2.143	2.067
3	9.501	2.304	2.067	2.004
4	$3.076 \cdot 10^1$	2.217	2.032	2.000
5	$3.160 \cdot 10^2$	2.156	2.016	2.000
6	$3.329 \cdot 10^4$	2.114	2.008	2.000
7	$3.693 \cdot 10^8$	2.084	2.004	2.000
8	$4.547 \cdot 10^{16}$	2.062	2.002	2.000
9	$6.891 \cdot 10^{32}$	2.046	2.001	2.000
10	$1.583 \cdot 10^{65}$	2.034	2.000	2.000

Tabela 1: wartości metody w zależności od numeru iteracji

Wyniki praktyczne potwierdzają teoretyczne przewidywania z poprzedniego podpunktu. Tylko schemat iteracyjny wykorzystujący $\phi_1(x)$ okazał się być rozbieżny.

Wyznamy teraz eksperymentalnie rząd zbieżności każdej metody iteracyjnej. W tym celu posłużymy się równaniem:

$$r = \frac{\ln \frac{\epsilon_k}{\epsilon_{k+1}}}{\ln \frac{\epsilon_{k-1}}{\epsilon_k}} \quad 6)$$

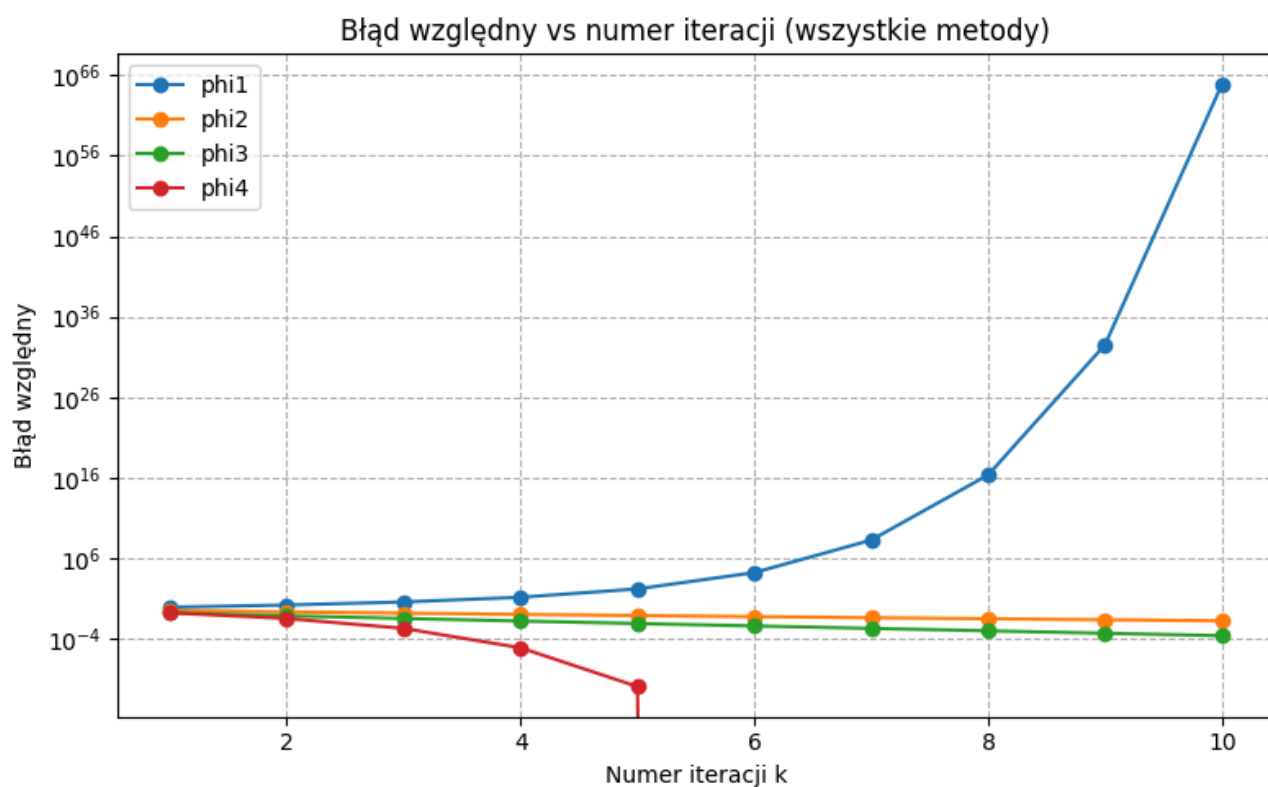
Wykonanie obliczeń daje nam wyniki:

k	$\phi_1(x)$	$\phi_2(x)$	$\phi_3(x)$	$\phi_4(x)$
3	1.365	0.923	0.899	1.760
4	1.548	0.943	0.952	1.959
5	1.779	0.958	0.977	1.999
6	1.951	0.969	0.989	NaN
7	1.997	0.977	0.994	NaN
8	2.000	0.983	0.997	NaN
9	2.000	0.987	0.999	NaN
10	2.000	0.990	0.999	NaN

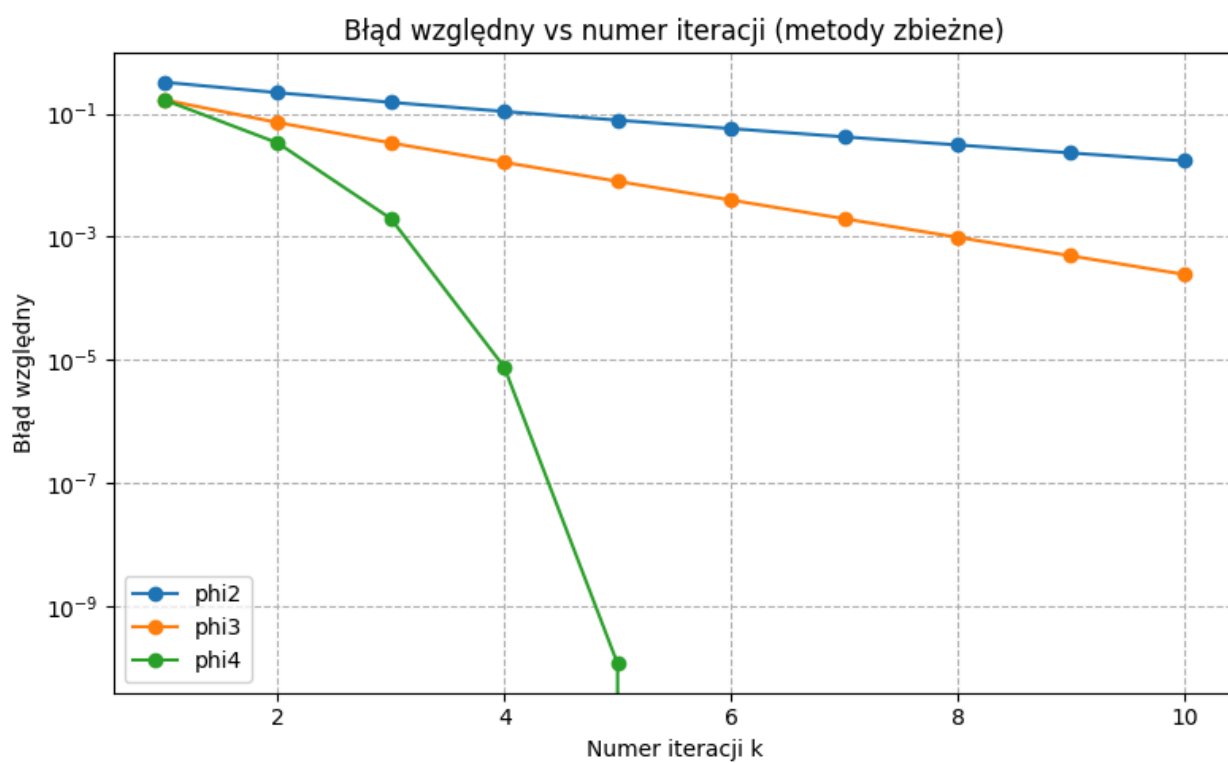
Jak widać wyniki dla funkcji $\phi_2(x)$ oraz $\phi_3(x)$ zbiegają do 1, co oznacza że te metody są liniowe. $\phi_1(x)$ i $\phi_4(x)$ zbiegają natomiast do 2, co oznacza że mamy do czynienia z metodami kwadratowymi.

Warto również dodać, że wyniki rzędu zbieżności zaczęliśmy od $k = 3$ ponieważ do obliczenia go potrzebujemy poprzednich 2 wartości, oraz wartości NaN w ostatniej kolumnie są skutkiem osiągnięcia dokładnej wartości 2 przez metodę iteracyjną. Następstwem tego jest niemożliwość skorzystania ze wzoru 6) ze względu na dzielenie przez 0.

c)



Wykres 3



Wykres 4

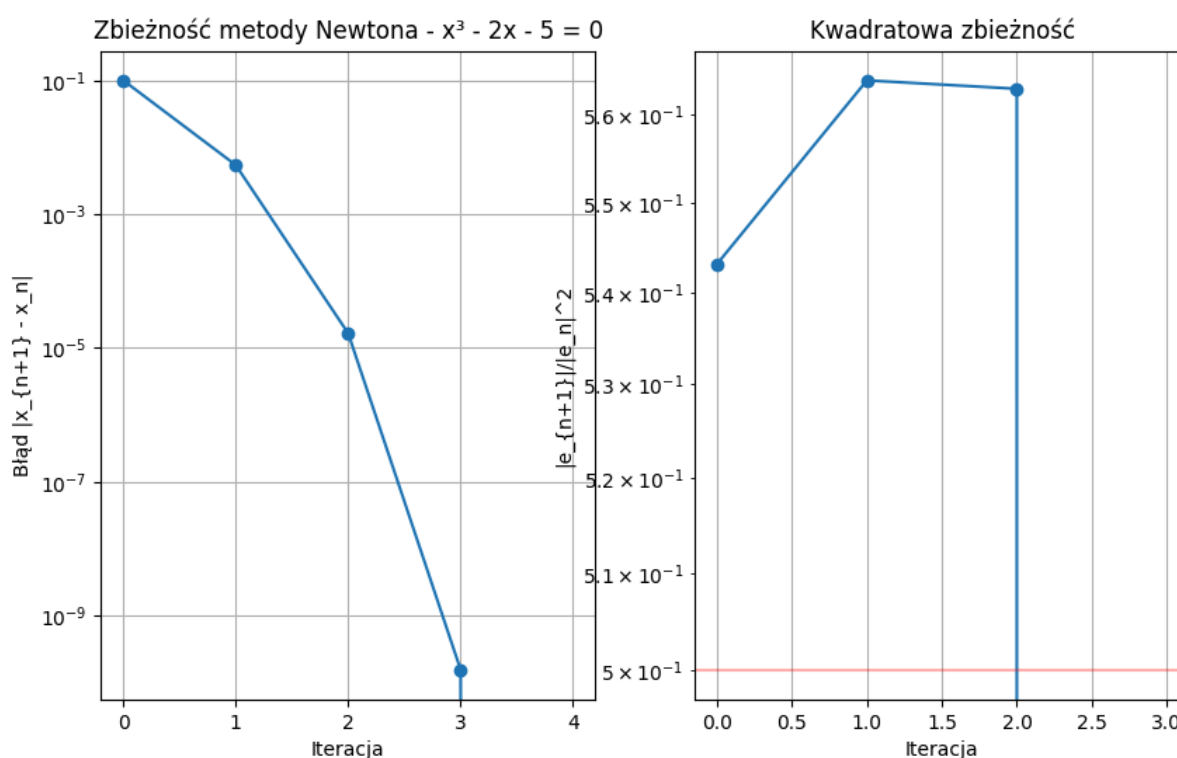
Na wykresach widać wyraźną różnicę w zbieżności między $\phi_2(x)$ oraz $\phi_3(x)$, a $\phi_4(x)$. Można również zaobserwować, że $\phi_3(x)$ zbiega szybciej (choć dalej liniowo) niż $\phi_2(x)$, co nie zostało wykryte przez wyliczony rząd zbieżności.

Zadanie 3:

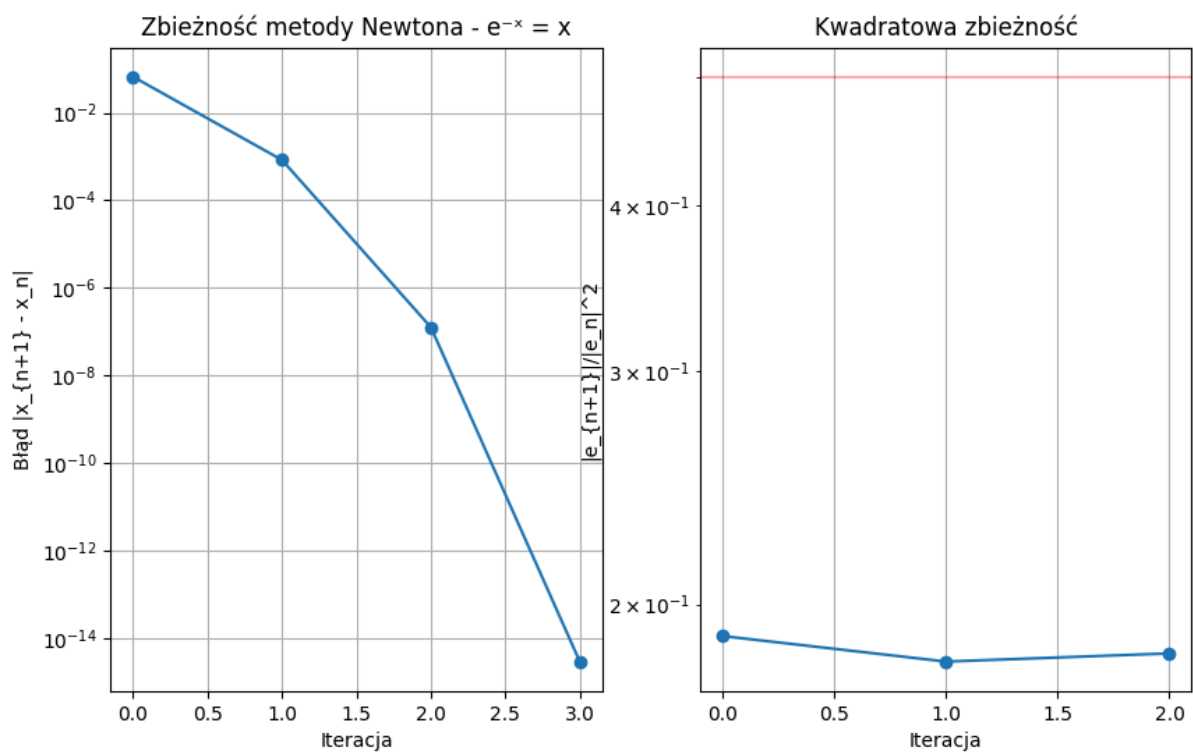
W tym zadaniu wykorzystujemy metodę Newtona do znajdowania aproksymacji miejsc zerowych wybranych funkcji. Metodę Newtona wykonujemy w iteracjach wyrażonych wzorem:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \text{ dla } n \geq 0,$$

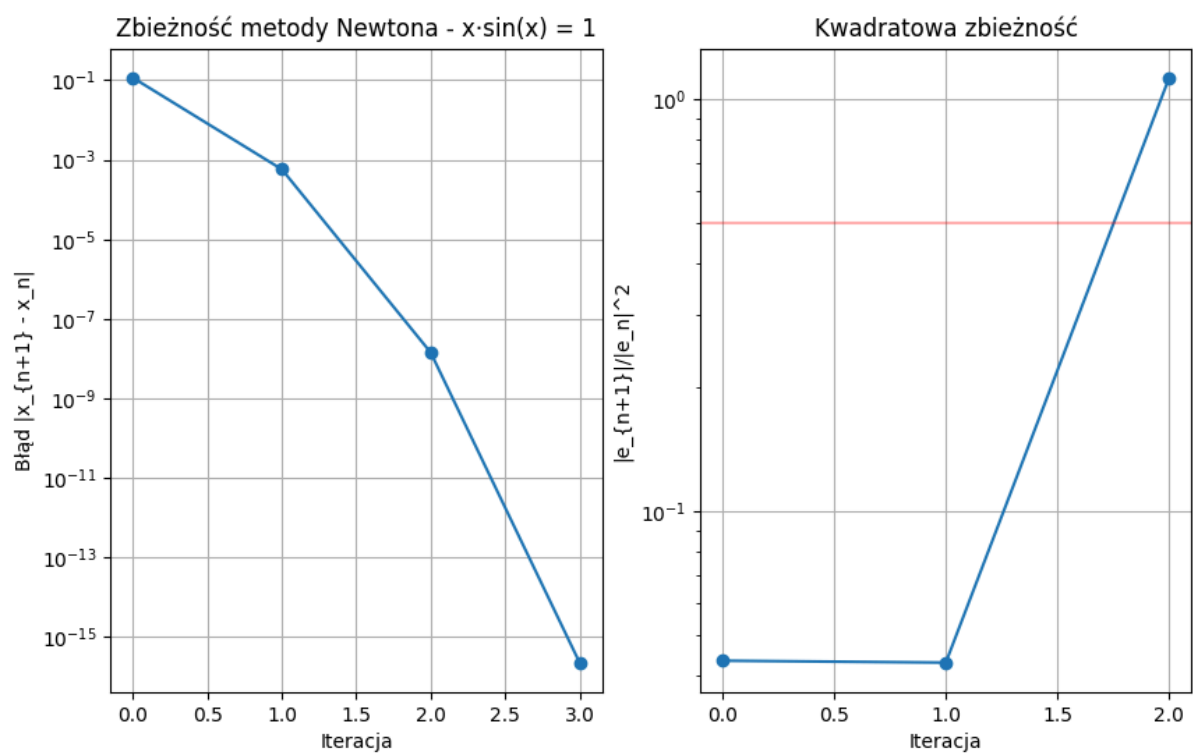
z pewną początkową wartością x_0 będącą początkową aproksymacją wartości miejsca zerowego. Dla podanych równań wyznaczamy schematy iteracji przedstawiające różnicę między wartościami kolejnych iteracji.



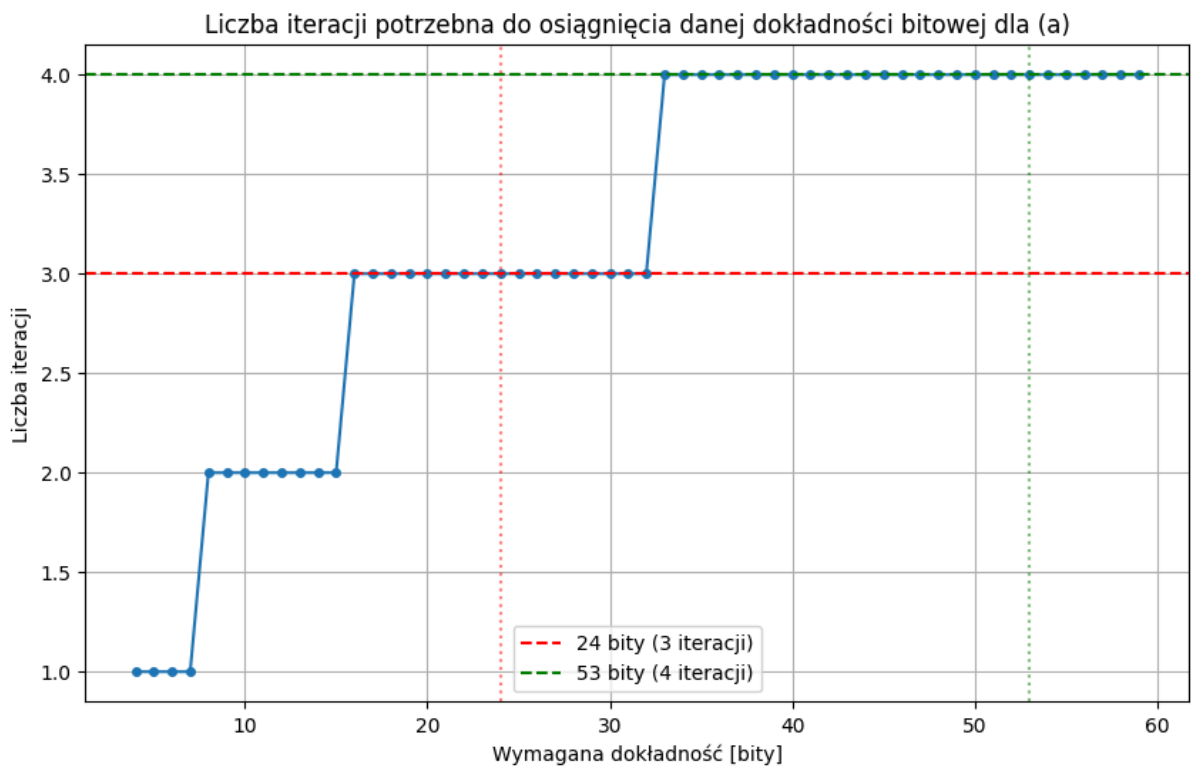
Wykres 5 - Zbieżność metody Newtona dla równania (a)



Wykres 6 - Zbieżność metody Newtona dla równania (b)



Wykres 7 - Zbieżność metody Newtona dla równania (c)



Wykres 8 - Liczba iteracji potrzebna do osiągnięcia danej dokładności bitowej dla (a)

Dla podpunktu (a) wystarczą 3 iteracje do osiągnięcia dokładności 24-bitowej oraz 4 iteracje do osiągnięcia dokładności 53-bitowej.

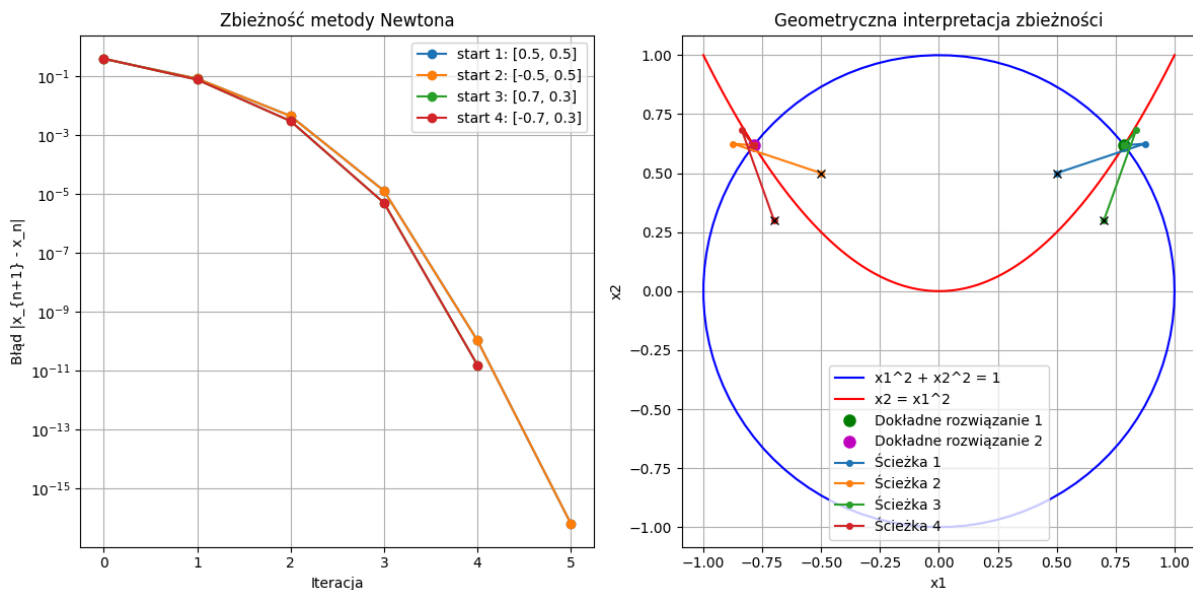
Zadanie 4:

W tym zadaniu rozwiązujemy układ równań nieliniowych korzystając z metody Newtona:

$$x_1^2 + x_2^2 = 1,$$

$$x_1^2 + x_2 = 0.$$

Uzyskane wartości porównujemy ze znanymi nam prawdziwymi wartościami rozwiązań.



Wykres 9 - Zbieżność metody Newtona i jej geometryczna interpretacja

Maksymalny otrzymany błąd względny był rzędu $\sim 10^{-16}$.

Wnioski:

- Metoda Newtona w praktyce wymaga zastosowania zaledwie kilku iteracji dla osiągnięcia dokładności rzędu pojemności 64-bitowej zmiennej zmiennoprzecinkowej
- Metoda Newtona jest bardzo efektywna (zbieżność kwadratowa) w klasycznych przypadkach spełniających założenia (ciągłość drugiej pochodnej, jednorodny znak pochodnych, odległość od punktu startowego), lecz zawodzi, gdy te warunki są naruszone – wówczas pomocne okazują się metody o niższym rzędzie zbieżności, np. bisekcja.
- Różnice w tempie spadku błędu mogą nie zostać wychwycone tylko poprzez rząd zbieżności - metody z tym samym rzędem zbieżności również mogą różnić się skutecznością minimalizowania błędu.

Źródła:

- Prezentacje z MS Teams (zespół MOwNiT 2025)
- pythonnumericalmethods.studentorg.berkeley.edu