Data: 26.03.2025

Laboratorium 4

Autorzy: Kosman Mateusz, Ludwin Bartosz

Temat laboratorium:

Celem niniejszego laboratorium jest zbadanie właściwości metod interpolacji numerycznej oraz wpływu rozmieszczenia węzłów interpolacyjnych na precyzję aproksymacji funkcji. W ramach zadania analizujemy generowanie punktów przy użyciu metod Czebyszewa, Legendre'a oraz równomiernego podziału przedziału, a także porównujemy dokładność interpolacji realizowanej przy pomocy wielomianów Lagrange'a (dla węzłów równomiernych i Czebyszewa) oraz kubicznych funkcji sklejanych.

Treść:

Zadanie 1.

Napisz funkcję, która przyjmuje jako parametr wektor punktów x_1,..., x_n, z przedziału [-1,1] i tworzy wykres z punktami x_j na osi odciętych i średnią geometryczną odległości do pozostałych punktów na osi rzędnych. Wyświetl wyniki dla:

- punktów Czebyszewa dla n = 10, 20, 50
- punktów Legendre'a dla n = 10, 20, 50
- punktów równomiernie rozmieszczonych od $x_0 = -1$ do $x_n = 1$ dla $n = 10,\ 20,\ 50.$

Zadanie 2.

Wyznacz wielomiany interpolujące funkcje

$f_1(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ na przedziale [-1,1],

$f_2(x) = exp(cos(x))$ na przedziale [0, 2π] używając:

- wielomianów Lagrange'a z równoodległymi węzłami
- kubicznych funkcji sklejanych z równoodległymi węzłami
- wielomianów Lagrange'a z węzłami Czebyszewa

$$x_j = \theta_j = \frac{2j-1}{2n}\pi,\ 1 \le j \le n. \tag{1}$$

a. Dla funkcji Rungego, $f_1(x)$ z n = 12 węzłami interpolacji przedstaw na wspólnym wykresie funkcję $f_1(x)$ oraz wyznaczone wielomiany interpolacyjne i funkcję sklejaną. W celu stworzenia wykresu wykonaj próbkowanie funkcji $f_1(x)$ i wielomianów interpolacyjnych na 10 razy gęstszym zbiorze (próbkowanie jednostajne w z dla węzłów równoodległych, jednostajne w θ dla węzłów Czebyszewa).
b. Wykonaj interpolację funkcji $f_1(x)$ i $f_2(x)$ z $n = 4, 5, \ldots, 50$ węzłami interpolacji, używając każdej z powyższych trzech metod interpolacji. Ewaluację funkcji, wielomianów interpolacyjnych oraz funkcji sklejanych przeprowadź na zbiorze 500 losowo wybranych punktów z dziedziny funkcji. Stwórz dwa rysunki, jeden dla $f_1(x)$, drugi dla $f_2(x)$. Na każdym rysunku przedstaw razem wykresy normy wektora błędów na tym zbiorze punktów w zależności od liczby węzłów interpolacji, n, dla każdej z trzech metod interpolacji.
Która metoda interpolacji jest najbardziej dokładna, a która najmniej?

Rozwiązanie:

Zadanie 1.

Obliczanie odległości:
Dla każdego punktu $x[i]$ z tablicy obliczana jest wartość bezwzględnej różnicy między $x[i]$ a wszystkimi pozostałymi punktami. Do usunięcia aktualnie rozpatrywanego elementu użyto funkcji $np.delete$, co pozwala na uniknięcie obliczania odległości punktu do samego siebie.

Średnia geometryczna:
Obliczana jest ona jako:

$$\overline{x} = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \tag{2}$$

W tym przypadku pomijamy element względem którego obliczana jest średnia (oznaczymy go indeksem j). Przekształcamy postać do:

$$\overline{x} = exp(\frac{1}{n}\sum_{j \ne i} ln|x_i - x_j|) \tag{3}$$

Co jest równoważne:

$$\overline{x} = exp(mean(ln(|x_i - x_j|))) \tag{4}$$

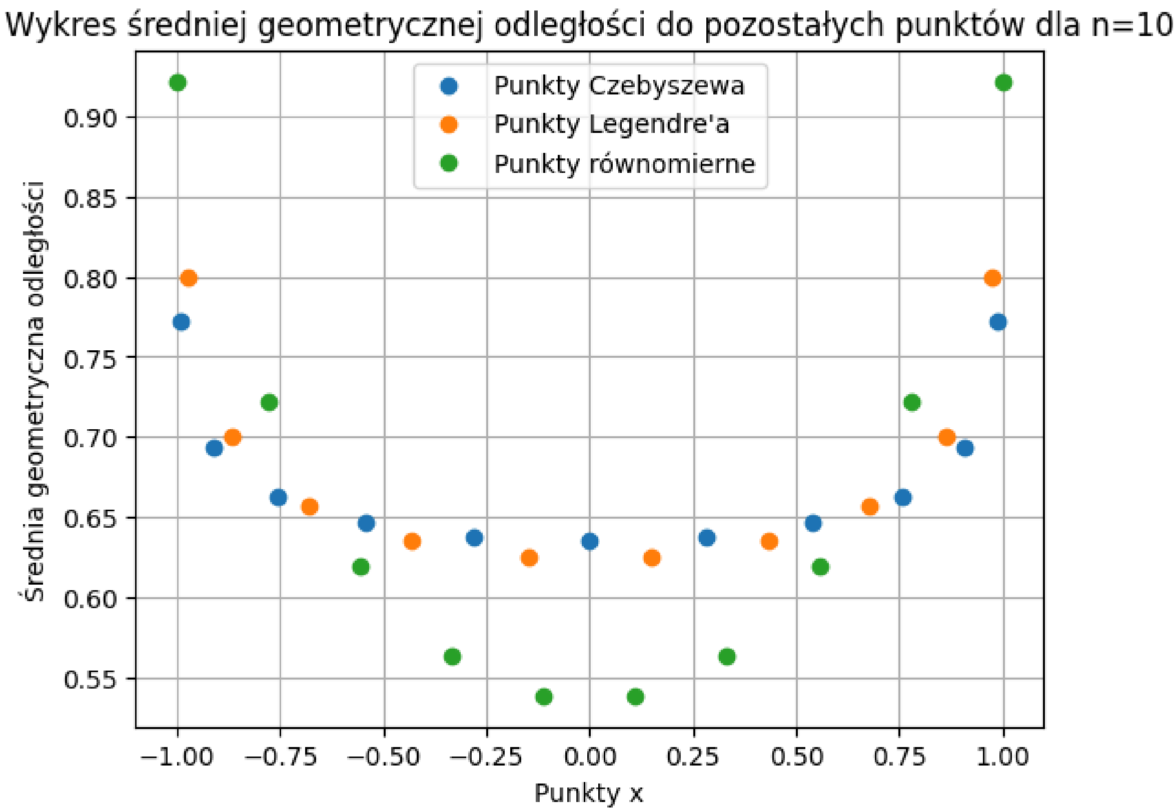
Generowanie punktów:

Punkty Czebyszewa: wykorzystuje wzór[1] $x_i = \ - cos(\frac{(2i+1)}{2n}\pi)$, co zapewnia zagęszczenie punktów przy krańcach przedziału.

Punkty Legendre'a: Wyznaczane jako pierwiastki wielomianu Legendre'a, wykorzystując funkcję $np.polynomial.legendre.legroots$.

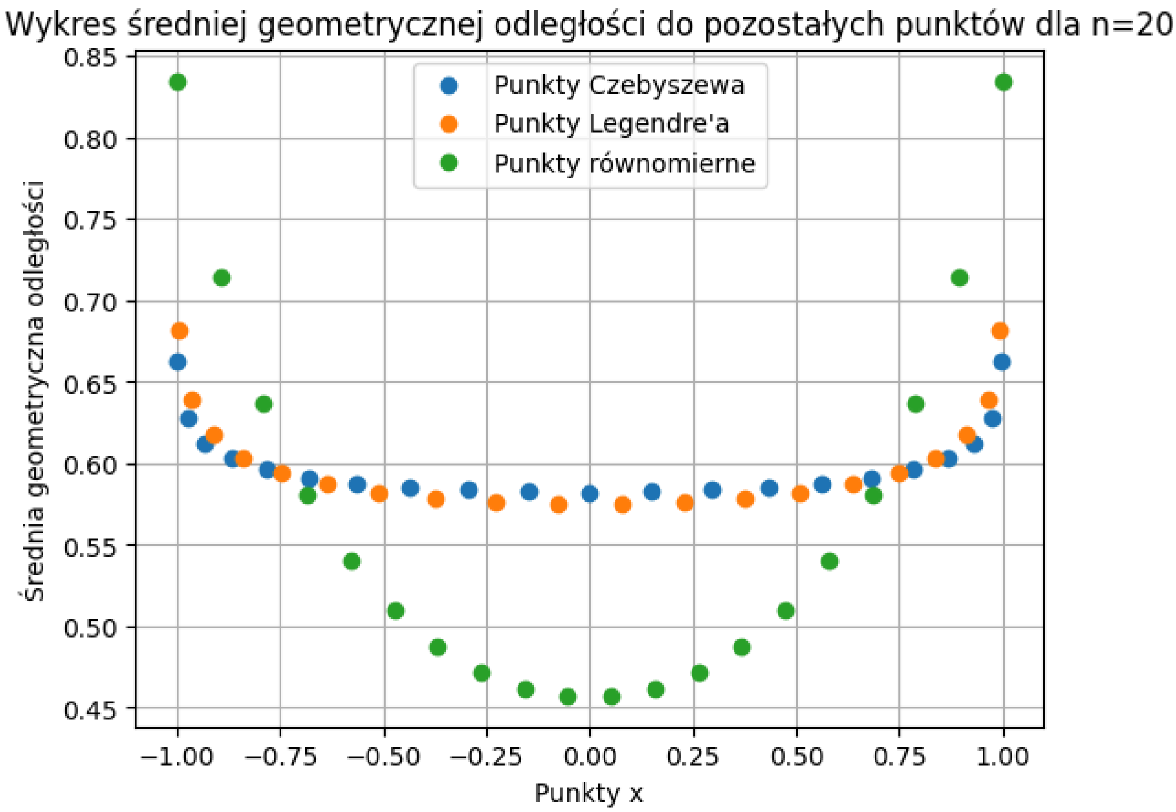
Punkty równomiernie rozmieszczone: wygenerowane przez $np.linspace(-\ 1,\ 1,\ n)$, co daje równomierny podział przedziału na n punktów.

Wyniki:

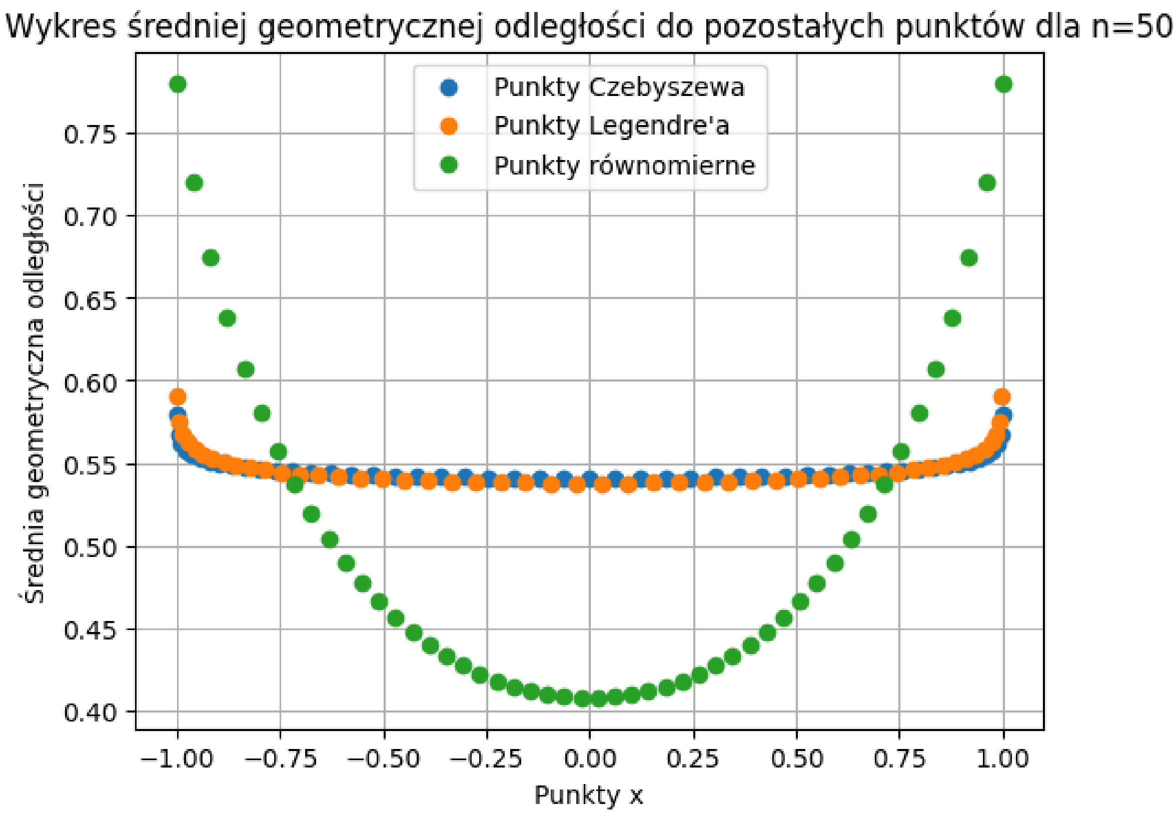


Wykres 1

[1] Wzór jest poprawny w przedziale [-1,1]



Wykres 2



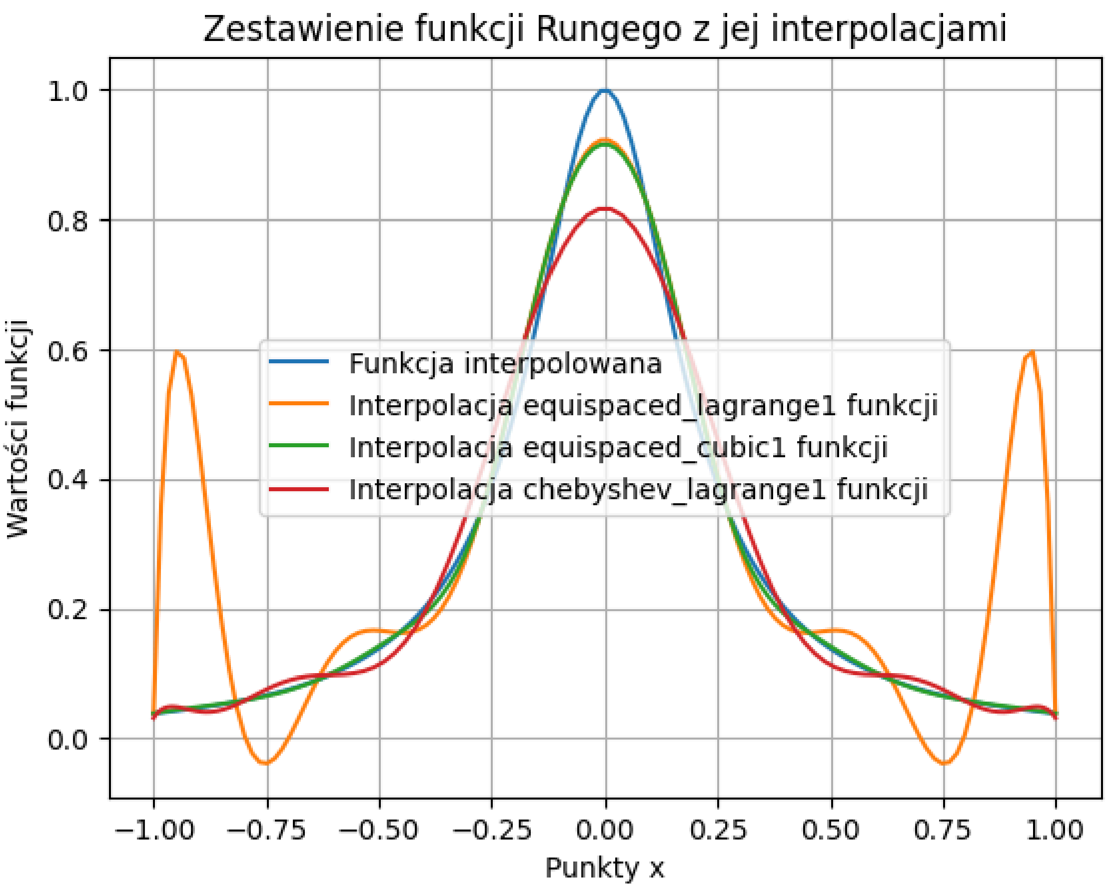
Wykres 3

Zadanie 2.

W zadaniu interpolowane są podane w treści funkcje f_1 (zwana funkcją Rungego), f_2 z wykorzystaniem:

- wielomianów Lagrange'a z równoodległymi węzłami
- kubicznych funkcji sklejanych z równoodległymi węzłami
- wielomianów Lagrange'a z węzłami Czebyszewa

Do wyznaczania wielomianów Lagrange'a używamy funkcji *scipy.interpolate.lagrange*, a do kubicznych funkcji sklejanych klasy *scipy.interpolate.CubicSpline*; obie dostępne są w ramach biblioteki *scipy*. W podpunkcie a) tworzymy wykres funkcji Rungego oraz jej interpolacji.



Wykres 4. Zestawienie funkcji Rungego z jej interpolacjami

W podpunkcie b) należało wyznaczyć normy wektorów błędów dla każdej z podanych trzech metod interpolacji dla liczby węzłów interpolacji $n = 4, 5, ..., 50$.

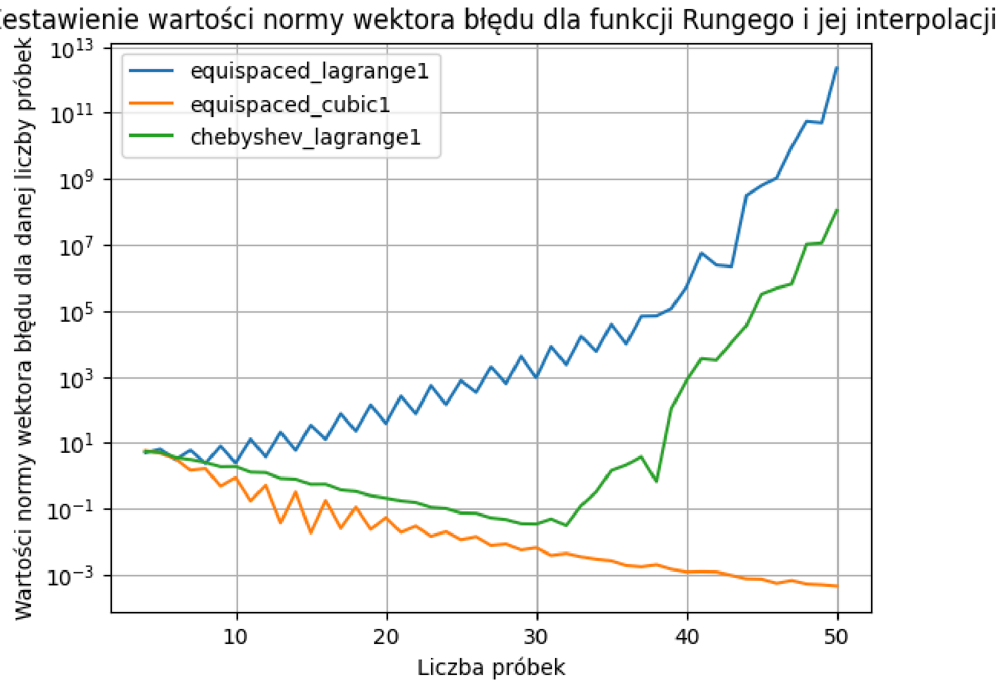
Wektor błędu definiujemy jako:

$$\vec{E} = [f(x_0) - f_{in.}(x_0), f(x_1) - f_{in.}(x_1), ..., f(x_n) - f_{in.}(x_n)]$$

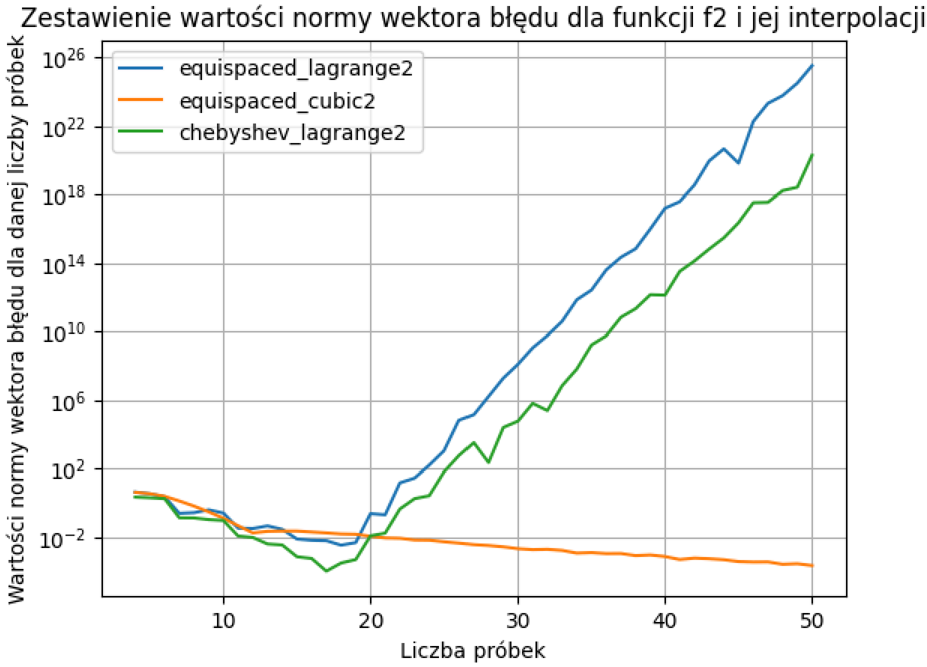
Stąd norma (euklidesowa) wektora błędu wynosi:

$$|\vec{E}| = \sqrt{(f(x_0) - f_{in.}(x_0))^2 + (f(x_1) - f_{in.}(x_1))^2 + \dots + (f(x_n) - f_{in.}(x_n))^2}$$

Korzystając z tego wzoru wyznaczyliśmy normy wektorów błędu dla f_1 oraz f_2 przedstawione na wykresach:



Wykres 5. Zestawienie wartości normy wektora błędu dla funkcji Rungego i jej interpolacji



Wykres 6. Zestawienie wartości normy wektora błędu dla funkcji f_2 i jej interpolacji

Na podstawie wykresów można stwierdzić, że najbardziej dokładna spośród rozważonych metod interpolacji jest ta używająca kubicznych funkcji składanych z równoodległymi węzłami. Jedynym wyjątkiem jest interpolacja funkcji f_2, gdzie dla $n \leq 20$ pozostałe metody dają zbliżony lub mniejszy błąd; ten jednak rośnie wykładniczo dla większych n.

Wnioski:

- Korzystanie z interpolacji funkcjami sklejanymi daje dokładniejsze wyniki niż interpolacja wielomianami Lagrange'a; dla małej liczby węzłów można rozważyć interpolację Lagrange'a, jednak w ogólności otrzymane z jej wykorzystaniem wyniki mają znacznie większy błąd (przykład: interpolacja Lagrange'a daje $\sim 10^{20}$ razy większy błąd niż interpolacja funkcjami sklejanymi dla interpolacji f_2 przy $n = 50$ - wykres 4.),
- Metoda rozmieszczenia węzłów mają kluczowy wpływ na uzyskane wyniki, gdyż odpowiednia selekcja minimalizuje ryzyko pojawienia się efektu Rungego, przekładając się na bardziej wiarygodne przybliżenia. Wyniki pokazały że punkty Czebyszewa są najlepsze w tym celu (średnie geometryczne odległości do pozostałych punktów są najbardziej zbliżone do siebie).

Źródła:

- Prezentacje z MS Teams (zespół MOwNiT 2025)
- pythonnumericalmethods.studentorg.berkeley.edu