

Laboratorium 9

Autorzy: Kosman Mateusz, Ludwin Bartosz

Temat laboratorium:

Celem niniejszego laboratorium jest dogłębne zapoznanie się z technikami redukcji równań różniczkowych zwyczajnych wyższych rzędów do układów równań pierwszego rzędu oraz ich autonomizacją, a także szczegółowa analiza teoretyczna i praktyczna właściwości numerycznych metod całkowania takich układów.

Treść:

Zadanie 1:

Przedstaw każde z poniższych równań różniczkowych zwyczajnych jako równoważny układ równań pierwszego rzędu (ang. first-order system of ODEs):

(a) równanie Van der Pol'a:

$$y'' = y' (1 - y^2) - y$$

(b) równanie Blasiusa:

$$y''' = -y y''$$

(c) II zasada dynamiki Newtona dla problemu dwóch ciał:

$$y''_1 = - \frac{G M y_1}{(y_1^2 + y_2^2)^{3/2}}$$

$$y''_2 = - \frac{G M y_2}{(y_1^2 + y_2^2)^{3/2}}$$

Zadanie 2:

Przekształć poniższy problem początkowy do autonomicznego problemu początkowego:

$$y_1' = \frac{y_1}{t} + y_2 t, \quad y_1(1) = 1$$

$$y_2' = \frac{t(y_2^2 - 1)}{y_1}, \quad y_2(1) = 0$$

Zadanie 3:

Dany jest problem początkowy:

$$\begin{aligned}y' &= \sqrt{1 - y} \\ y(0) &= 0\end{aligned}$$

Pokaż, że funkcja $y(t) = t(4 - t)/4$ spełnia równanie i warunek początkowy oraz wyznacz dziedzinę, dla której $y(t)$ jest rozwiązaniem problemu początkowego.

Zadanie 4:

Dane jest równanie różniczkowe zwyczajne

$$y' = -5y$$

z warunkiem początkowym $y(0) = 1$. Równanie rozwiązujemy numerycznie z krokiem $h = 0.5$.

(a) Analityczna stabilność. Wyjaśnij, czy rozwiązania powyższego równania są stabilne?

(b) Udowodnij, że metoda Eulera jest zbieżna, tzn., że

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty \\ nh = t}} y_n = y(t),$$

gdzie $y(t)$ oznacza wartość analitycznego rozwiązania w ustalonym punkcie $t = nh$, a y_n wartość rozwiązania numerycznego w punkcie t .

(c) Numeryczna stabilność. Wyjaśnij, czy metoda Eulera jest stabilna dla tego równania z użytym krokiem h ?

(d) Oblicz numerycznie wartości przybliżonego rozwiązania dla $t = 0.5$ metodą Eulera.

(e) Wyjaśnij, czy niejawna metoda Eulera jest stabilna dla tego równania z użytym krokiem h ?

(f) Oblicz numerycznie wartości przybliżonego rozwiązania dla $t = 0.5$ niejawną metodą Eulera.

(g) Wyznacz maksymalną dopuszczalną wartość kroku h w metodzie Eulera, jeśli żądamy, aby błąd rozwiązania w punkcie $t_n = 0.5$ nie przekraczał 0.001, tzn. $|y_n - y(t_n)| < tol = 0.001$. Ile kroków należy w tym celu wykonać?

(h) Do wyznaczenia wartości y_{n+1} w niejawnej metodzie Eulera użyto metody bezpośredniej iteracji:

$$\begin{aligned}y_{n+1}^{(0)} &= y_n \\ y_{n+1}^{(k+1)} &= \phi(y_{n+1}^{(k)})\end{aligned}$$

Wyznacz maksymalną dopuszczalną wartość kroku h , przy której metoda pozostanie zbieżna. Czy uzasadnione byłoby użycie metody Newtona do wyznaczenia y_{n+1} ?

Zadanie 5:

Dany jest układ równań różniczkowych zwyczajnych

$$y'_1 = -2y_1 + y_2$$

$$y'_2 = -y_1 - 2y_2$$

Dla jakich wartości kroku h metoda Eulera jest stabilna dla tego układu równań?

Zadanie 6:

Dany jest problem początkowy:

$$y' = \alpha t^{\alpha-1}$$

$$y(0) = 0$$

gdzie parametr $\alpha > 0$. Rozwiązaniem powyższego problemu początkowego jest funkcja $y(t) = t^\alpha$.

Rozwiąż powyższy problem metodą Eulera dla $\alpha = 2.5, 1.5, 1.1$. Dla każdego problemu zastosuj kroki $h = 0.2, 0.1, 0.05$, oblicz błąd numeryczny w węzłach rozwiązania, a następnie wyznacz empiryczny rząd zbieżności metody Eulera. Wyjaśnij otrzymane wyniki.

Rozwiązanie:

Zadanie 1:

Sprowadzanie równań wyższych rzędów do układu pierwszego rzędu zrealizujemy poprzez zdefiniowanie nowych zmiennych odpowiadających kolejnym pochodnym (np. $x_1 = y$, $x_2 = y'$, ...), dzięki czemu $x'_i = x_{i+1}$ aż do momentu, gdy ostatnia pochodna zostaje zastąpiona wyrażeniem z oryginalnego równania. W efekcie jedno równanie rzędu n zamienia się na n równań pierwszego rzędu.

a) równanie Van der Pol'a:

$$y'' = y'(1 - y^2) - y$$

Niech:

$$x_1 = y, x_2 = y'$$

wtedy:

$$\begin{cases} x'_1 = x_2, \\ x'_2 = x_2(1 - x_1^2) - x_1. \end{cases}$$

b) równanie Blasiusa:

$$y''' = -y y''$$

Niech:

$$x_1 = y, x_2 = y', x_3 = y''$$

wtedy:

$$\begin{cases} x'_1 = x_2, \\ x'_2 = x_3, \\ x'_3 = -x_1 x_3. \end{cases}$$

c) I zasada dynamiki Newtona dla problemu dwóch ciał:

$$y''_1 = -\frac{G M y_1}{(y_1^2 + y_2^2)^{3/2}} \quad y''_2 = -\frac{G M y_2}{(y_1^2 + y_2^2)^{3/2}}$$

Niech:

$$x_1 = y_1, x_2 = y'_1, x_3 = y_2, x_4 = y'_2$$

wtedy:

$$\begin{cases} x'_1 = x_2, \\ x'_2 = -\frac{G M x_1}{(x_1^2 + x_3^2)^{3/2}}, \\ x'_3 = x_4, \\ x'_4 = -\frac{G M x_3}{(x_1^2 + x_3^2)^{3/2}}. \end{cases}$$

Zadanie 2:

Aby rozwiązać to zadanie wystarczy wprowadzić nową zmienną $x_3 = t$, tak by czas stał się jedną ze składowych stanu. Otrzymujemy układ autonomiczny w zmiennych x_1, x_2, x_3 .

Niech:

$$x_1 = y_1, x_2 = y_2, x_3 = t,$$

wtedy:

$$\begin{cases} x'_1 = \frac{x_1}{x_3} + x_2 x_3 \\ x'_2 = \frac{x_3 (x_2^2 - 1)}{x_1} \\ x'_3 = 1 \end{cases}$$

Początkowo mieliśmy:

$$t = 1, y_1(1) = 1, y_2(1) = 0,$$

wiec w nowych zmiennych otrzymujemy:

$$x_1(1) = 1, x_2(1) = 0, x_3(1) = 1.$$

Finalnie otrzymaliśmy więc układ:

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{x_3} + x_2 x_3 \\ \frac{x_3 (x_2^2 - 1)}{x_1} \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zadanie 3:

Sprawdźmy najpierw warunek początkowy:

$$y(0) = \frac{0(4-0)}{4} - 0 = 0 - \text{zgadza się z założeniem.}$$

Następnie obliczamy pochodną proponowanego rozwiązania:

$$y' = \left(\frac{t(4-t)}{4} \right)' = \frac{4-2t}{4} = \frac{2-t}{2}$$

i podstawiamy:

$$1 - y(t) = 1 - \frac{t(4-t)}{4} = \frac{4-4t+t^2}{4} = \frac{(2-t)^2}{4}$$

Pierwiastkujemy obie strony powyższego równania:

$$\sqrt{1 - y(t)} = \frac{|2-t|}{2}$$

Więc zaproponowana funkcja spełnia równanie, gdy:

$$\frac{2-t}{2} = \frac{|2-t|}{2},$$

co spełnione jest wtedy i tylko wtedy gdy $t \leq 2$. Zatem proponowane rozwiązanie jest prawidłowe w dziedzinie: $t \in (-\infty, 2]$.

Zadanie 4:

a) Równanie rozwiązujemy poprzez separację zmiennych

$$\frac{dy}{y} = -5dt$$

$$\ln y = \int -5 dt = -5t + C$$

Podstawiamy $t = 0$, $y(t) = 1$:

$$0 = C$$

Zatem ostatecznie:

$$\ln y = -5t$$

$$y = e^{-5t}$$

Dla $t \rightarrow \infty$ mamy $y(t) = 0$, zatem równanie jest stabilne.

b) Dla metody Eulera jawnej mamy:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) = y_n + h(-5y_n) = y_n(1 - 5h)$$

Dla naszego kroku $h = 0.5$ otrzymujemy:

$$y_{n+1} = y_n(1 - 5 \cdot 0,5) = y_n(1 - 2,5) = -1,5y_n$$

Iterując ten proces otrzymujemy:

$$y_1 = -1,5 \cdot y_0 = -1,5 \cdot 1 = -1,5,$$

$$y_2 = -1,5 \cdot y_1 = 1,5 \cdot 1,5 = 2,25,$$

$$y_3 = -1,5 \cdot y_2 = -1,5 \cdot 2,25 = 3,375, \text{ itd.}$$

Zauważmy, że wartości oscylują i rosną co do wartości bezwzględnej. Tymczasem rozwiązanie analityczne zbiega do zera.

Aby udowodnić zbieżność metody, musimy pokazać, że

$$\lim_{h \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, nh=t} y_n = y(t).$$

Wiemy, że $y_n = (1 - 5h)^n y_0$ dla naszego równania. Przy $n \rightarrow \infty$ i $h \rightarrow 0$ z

$$\text{warunkiem } nh=t: \lim y_n = \lim (1 - 5h)^n y_0 = \lim (1 - 5h)^{t/h}$$

$$\text{Korzystając z podanej własności: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{1/h} = e$$

$$\text{Przekształcamy: } \lim_{h \rightarrow 0} (1 - 5h)^{t/h} = \lim_{h \rightarrow 0} ((1 - 5h)^{1/(-5h)})^{-5t} = e^{-5t}$$

Zatem $\lim_{h \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, nh=t} y_n = e^{-5t} = y(t)$, co dowodzi zbieżności metody Eulera.

c) Metoda Eulera jest stabilna, gdy $|1 - 5h| \leq 1$. Dla $h = 0,5$ mamy $|1 - 5 \cdot 0,5| = 1,5 > 1$, zatem dla podanego kroku nie jest stabilna.

d) Dla $t = 0,5$ i $h = 0,5$ potrzebujemy tylko jednego kroku:
 $y_1 = y_0 + h \cdot f(t_0, y_0) = 1 + 0,5 \cdot (-5 \cdot 1) = -1,5$.

Wartość przybliżonego rozwiązania w punkcie $t = 0,5$ wynosi
 $y_1 = -1,5$.

Dla porównania, dokładne rozwiązanie wynosi
 $y(0,5) = e^{-5 \cdot 0,5} = e^{-2,5} \approx 0,082$.

e) Dla niejawnej metody Eulera mamy:
 $y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}) = y_n + h \cdot (-5y_{n+1})$

$$\text{Przekształcając: } y_{n+1} = y_n - 5hy_{n+1}(1 + 5h) = y_n y_{n+1} = \frac{y_n}{1+5h}$$

Dla stabilności niejawnej metody Eulera wymagamy $|\frac{1}{1+5h}| < 1$, co jest zawsze spełnione dla $h > 0$.

Zatem niejawna metoda Eulera jest stabilna dla naszego równania z krokiem $h = 0.5$.

f) Dla $t = 0.5$ i $h = 0.5$ mamy: $y_1 = \frac{y_0}{1+5h} = \frac{1}{1+5 \cdot 0,5} = \frac{2}{7} \approx 0,286$

Wartość przybliżonego rozwiązania niejawną metodą Eulera w punkcie $t = 0.5$ wynosi $y_1 \approx 0,286$.

g) Dla jawnej metody Eulera musimy znaleźć h takie, że:

$$|y_n - y(t_n)| < 0.001, \text{ gdzie } t_n = 0.5$$

Dla stabilności metody potrzebujemy $|1-5h| < 1$, co daje $h < 0.4$, czyli
 $h_{max} = 0.4$.

$$|y_n - y(t_n)| = |y_n - e^{-5t_n}| = |y_n - e^{-2.5}| < 0.001$$

Spełnienie podanej nierówności wyznaczamy empirycznie sprawdzając po kolei każdą możliwą liczbę kroków.

Wyznaczone w ten sposób liczba kroków n wynosi 257.

h) W przypadku niejawnej metody Eulera z iteracją:

$$y_{n+1}^{(0)} = y_n y_{n+1}^{k+1} = \varphi(y_{n+1}^k) = y_n - 5h y_{n+1}^k$$

Aby metoda iteracyjna była zbieżna, musimy mieć $|\varphi'(y)| = |-5h| < 1$, co daje $h < 0.2$.

Zatem maksymalna dopuszczalna wartość kroku h , przy której metoda pozostaje zbieżna, to $h = 0.2$.

Użycie metody Newtona byłoby uzasadnione, gdyż zapewnia ona szybszą zbieżność (kwadratową), szczególnie dla bardziej skomplikowanych równań. Jednak w tym przypadku, gdy równanie jest liniowe, zwykła iteracja prosta jest wystarczająca i prostsza w implementacji. Należy jednak przy tym zachować krok $h < 0.2$.

Zadanie 5:

Na początek zapiszmy układ w postaci macierzowej:

$$\mathbf{y}' = A \mathbf{y}, \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Teraz wyliczamy wartości własne λ macierzy A .

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 1 \\ -1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = (-2 - \lambda)^2 + 1 = 0,$$

$$(-2 - \lambda)^2 = -1 \Rightarrow \lambda = -2 \pm i.$$

Podstawiamy wynik do równania:

$$|1 + h\lambda| < 1$$

I dalej przekształcamy:

$$|1 + h(-2 \pm i)| = |(1 - 2h) \pm ih| = \sqrt{(1 - 2h)^2 + h^2} < 1.$$

Obie strony są nieujemne, więc pozbywamy się pierwiastka podnosząc do kwadratu.

$$\begin{aligned} (1 - 2h)^2 + h^2 &< 1, \\ 1 - 4h + 4h^2 + h^2 &< 1, \\ 5h^2 - 4h &< 0, \end{aligned}$$

$$h(5h - 4) < 0$$

$$0 < h < \frac{4}{5}.$$

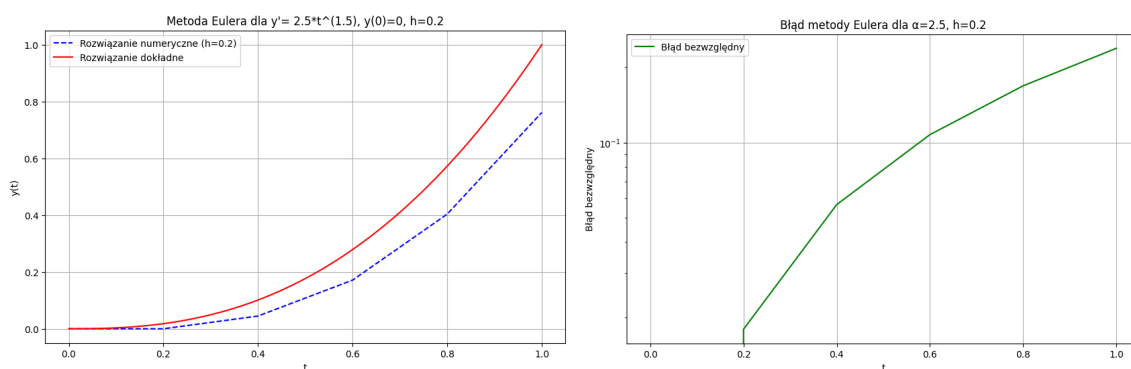
Zatem metoda Eulera jest stabilna dla kroku $h \in (0, \frac{4}{5})$.

Zadanie 6:

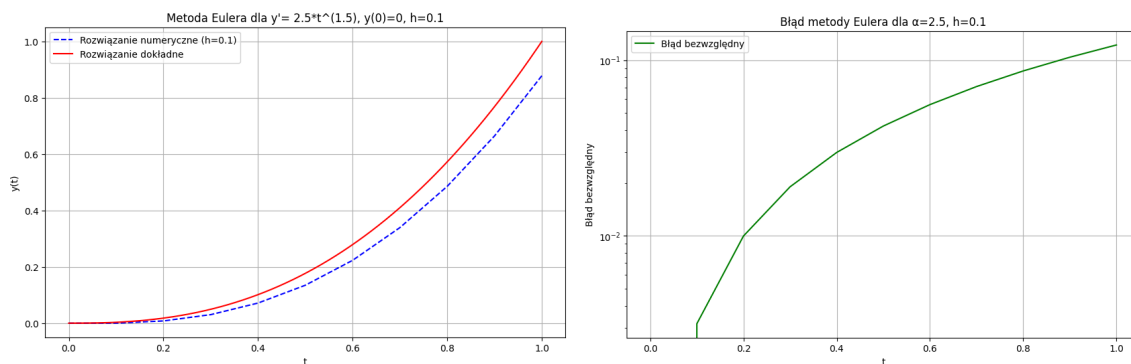
Dany jest problem początkowy: $y' = \alpha t^{\alpha-1} y(0) = 0$, gdzie parametr $\alpha > 0$.

Rozwiązaniem analitycznym tego problemu jest funkcja $y(t) = t^\alpha$.

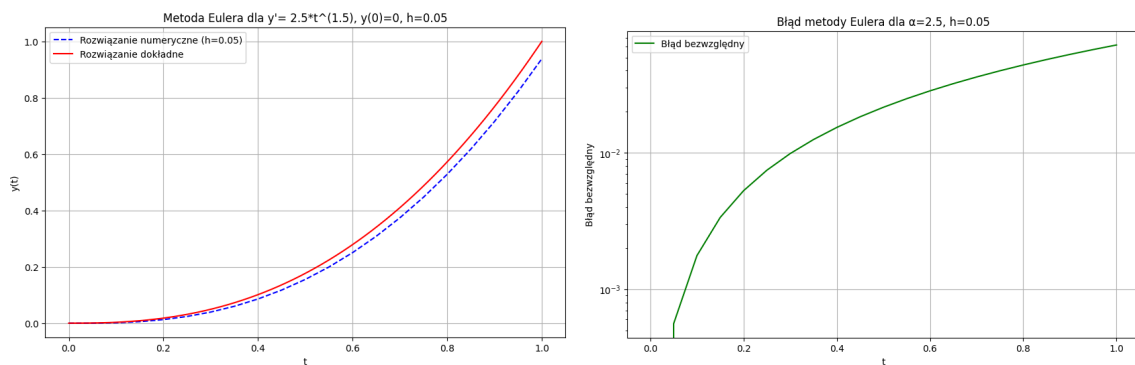
Dla metody Eulera mamy wzór: $y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_n, y_n) = y_n + h \cdot \alpha t_n^{\alpha-1}$,
gdzie $t_n = nh$ oraz $y_0 = 0$.



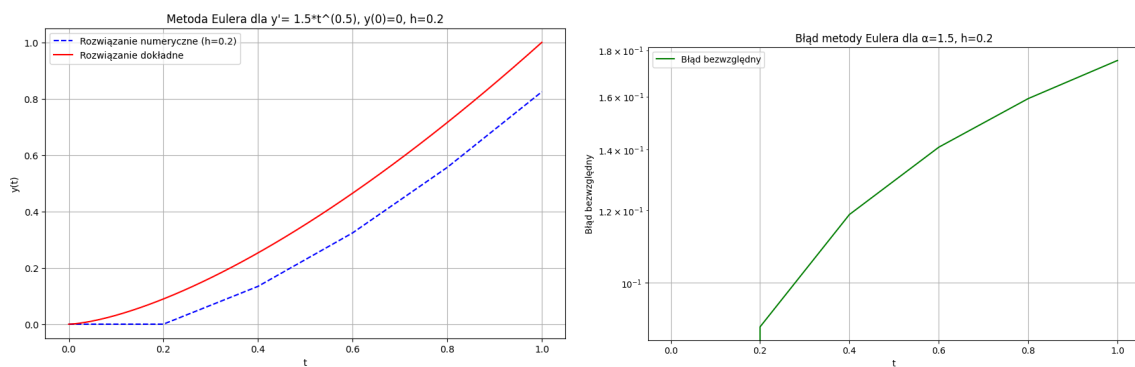
Wykres 1: Błąd metody Eulera dla $\alpha = 2, 5$, $h = 0, 2$



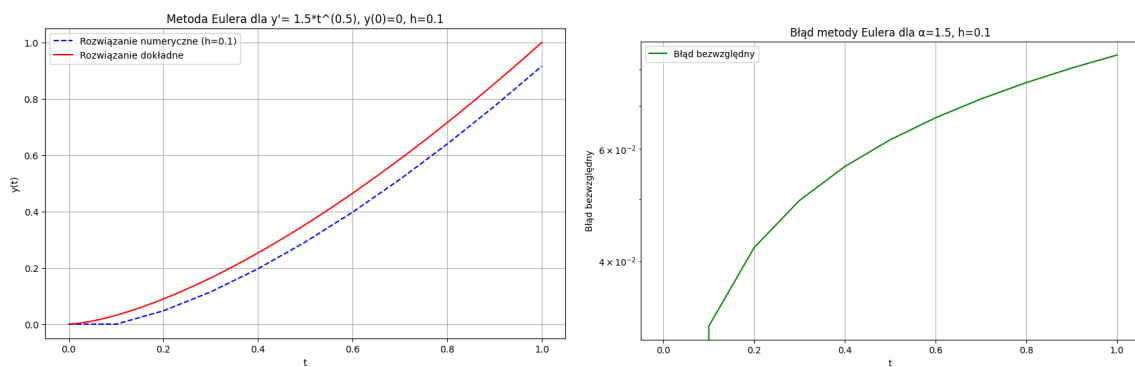
Wykres 2: Błąd metody Eulera dla $\alpha = 2, 5$, $h = 0, 1$



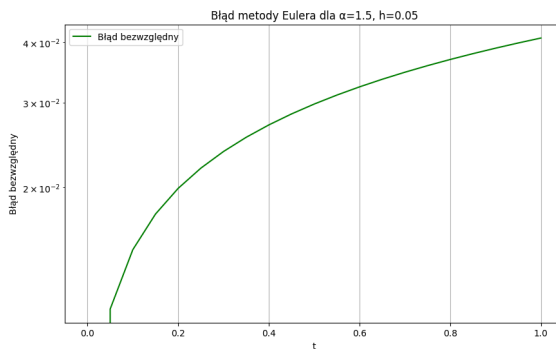
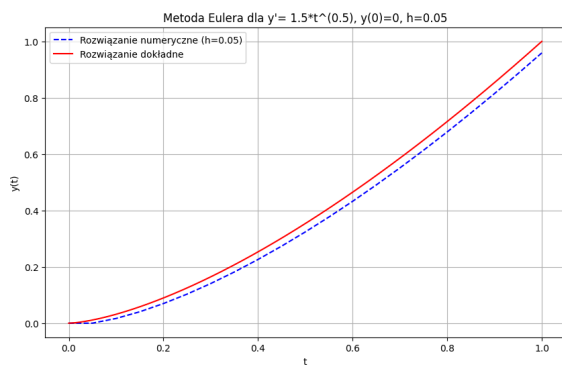
Wykres 3: Błąd metody Eulera dla $\alpha = 2,5$, $h = 0,05$



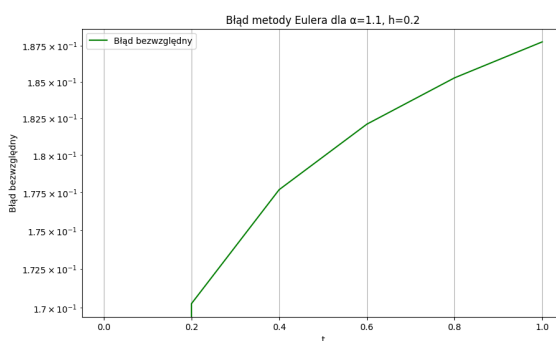
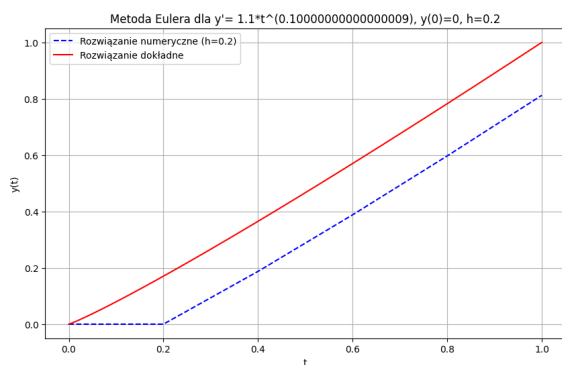
Wykres 4: Błąd metody Eulera dla $\alpha = 1,5$, $h = 0,2$



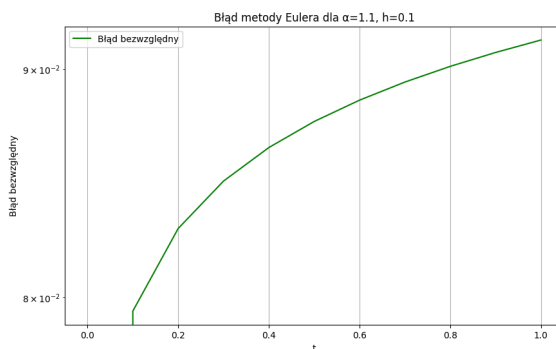
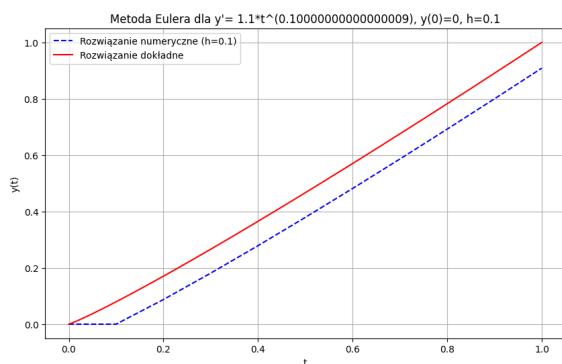
Wykres 5: Błąd metody Eulera dla $\alpha = 1,5$, $h = 0,1$



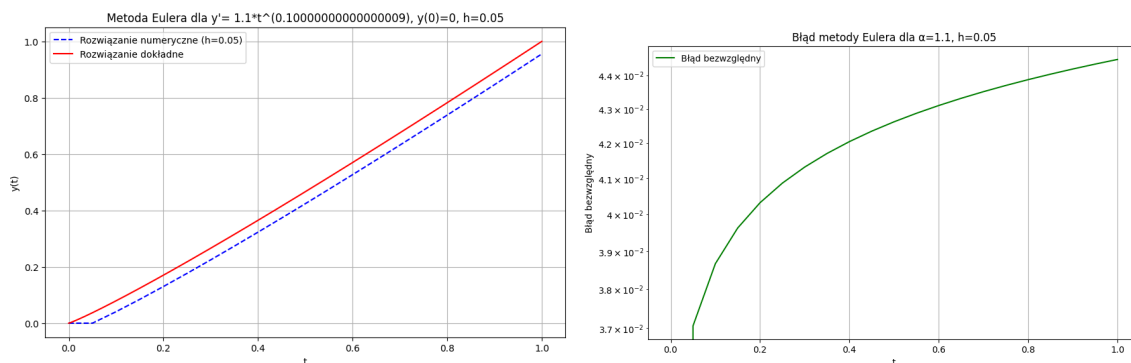
Wykres 6: Błąd metody Eulera dla $\alpha = 1, 5$, $h = 0, 05$



Wykres 7: Błąd metody Eulera dla $\alpha = 1, 1$, $h = 0, 2$



Wykres 8: Błąd metody Eulera dla $\alpha = 1, 1$, $h = 0, 1$



Wykres 9: Błąd metody Eulera dla $\alpha = 1, 1$, $h = 0, 05$

Dla określenia empirycznego rzędu zbieżności metody Eulera, stosujemy

wzór: $p \approx \log_2\left(\frac{e_h}{e_{h/2}}\right)$,

gdzie e_h i $e_{h/2}$ to błędy dla kroków h i $\frac{h}{2}$.

Dla $\alpha = 2, 5$:

- Dla $h = 0.2$ i $h = 0.1$: $p \approx 0, 37$
- Dla $h = 0.1$ i $h = 0.05$: $p \approx 0, 47$

Dla $\alpha = 1, 5$:

- Dla $h = 0.2$ i $h = 0.1$: $p \approx 0, 10$
- Dla $h = 0.1$ i $h = 0.05$: $p \approx 0, 10$

Dla $\alpha = 1, 1$:

- Dla $h = 0.2$ i $h = 0.1$: $p \approx 0, 75$
- Dla $h = 0.1$ i $h = 0.05$: $p \approx 0, 90$

Obserwacje:

- Dla $\alpha = 2, 5$ i $\alpha = 1, 5$ obserwujemy większe błędy niż dla $\alpha = 1, 1$.
- Im większa wartość α , tym większa nieliniowość rozwiązania, co prowadzi do większych błędów w metodzie Eulera.
- Zmniejszanie kroku poprawia dokładność, ale z różną efektywnością w zależności od α

- Najlepszą poprawę dokładności przy zmniejszaniu kroku obserwujemy dla $\alpha = 1, 1$

Wnioski:

- Redukcja do układów pierwszego rzędu i autonomizacja upraszczają analizę oraz implementację metod numerycznych.
- Jawna metoda Eulera bywa niestabilna przy zbyt dużym kroku; niejawna Eulerowa jest bezwarunkowo stabilna, lecz wymaga iteracyjnego rozwiązania implicitnego.
- Warunki stabilności dla układów wielowymiarowych wyznaczają dopuszczalny zakres kroku na podstawie spektrum macierzy.
- Empiryczny rząd zbieżności metody Eulera potwierdza jej pierwszy rząd, ale dokładność zależy od gładkości i nieliniowości problemu.

Źródła:

- Prezentacje z MS Teams (zespół MOwNiT 2025)
- pythonnumericalmethods.studentorg.berkeley.edu
- https://pl.wikipedia.org/wiki/Metoda_Eulera