Data: 14.05.2025

Laboratorium 9

Autorzy: Kosman Mateusz, Ludwin Bartosz

Temat laboratorium:

Celem niniejszego laboratorium jest dogłębne zapoznanie się z technikami redukcji równań różniczkowych zwyczajnych wyższych rzędów do układów równań pierwszego rzędu oraz ich autonomizacją, a także szczegółowa analiza teoretyczna i praktyczna właściwości numerycznych metod całkowania takich układów.

Treść:

Zadanie 1:

Przedstaw każde z poniższych równań różniczkowych zwyczajnych jako równoważny układ równań pierwszego rzędu (ang. first-order system of ODEs):

(a) równanie Van der Pol'a:

$$y'' = y'(1 - y^2) - y$$

(b) równanie Blasiusa:

$$y''' = -\, y\, y''$$

(c) II zasada dynamiki Newtona dla problemu dwóch ciał:

$$y''_1 = -\frac{G\,M\,y_1}{(y_1^2 + y_2^2)^{3/2}}$$

$$y''_2 = -\frac{G\,M\,y_2}{(y_1^2 + y_2^2)^{3/2}}$$

Zadanie 2:

Przekształć poniższy problem początkowy do autonomicznego problemu początkowego:

$$y_1' = \frac{y_1}{t} + y_2 t, \qquad y_1(1) = 1$$

$$y_2' = \frac{t(y_2^2 - 1)}{y_1}, \qquad y_2(1) = 0$$

Zadanie 3:

Dany jest problem początkowy:

$$y' = \sqrt{1 - y}$$
$$y(0) = 0$$

Pokaż, że funkcja $y(t) = t(4 - t)/4$ spełnia równanie i warunek początkowy oraz wyznacz dziedzinę, dla której $y(t)$ jest rozwiązaniem problemu początkowego.

Zadanie 4:

Dane jest równanie różniczkowe zwyczajne

$$y' =- 5y$$

z warunkiem początkowym y(0) = 1. Równanie rozwiązujemy numerycznie z krokiem $h = 0.5$.

(a) Analityczna stabilność. Wyjaśnij, czy rozwiązania powyższego równania są stabilne?

(b) Udowodnij, że metoda Eulera jest zbieżna, tzn., że

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ n\to\infty\\ nh=t}} y_n = y(t)\,,$$

gdzie $y(t)$ oznacza wartość analitycznego rozwiązania w ustalonym punkcie $t = nh$, a yn wartość rozwiązania numerycznego w punkcie t.

(c) Numeryczna stabilność. Wyjaśnij, czy metoda Eulera jest stabilna dla tego równania z użytym krokiem h?

(d) Oblicz numerycznie wartości przybliżonego rozwiązania dla $t = 0.5$ metodą Eulera.

(e) Wyjaśnij, czy niejawna metoda Eulera jest stabilna dla tego równania z użytym krokiem h?

(f) Oblicz numerycznie wartości przybliżonego rozwiązania dla t = 0.5 niejawną metodą Eulera.

(g) Wyznacz maksymalną dopuszczalną wartość kroku h w metodzie Eulera, jeśli żądamy, aby błąd rozwiązania w punkcie $t_n = 0.5$ nie przekraczał 0.001, tzn.$|y_n - y(t_n)| < tol = 0.001$. Ile kroków należy w tym celu wykonać?

(h) Do wyznaczenia wartości yn+1 w niejawnej metodzie Eulera użyto metody bezpośredniej iteracji:

$$y^{(0)}_{n+1} = y_n$$
$$y^{(k+1)}_{n+1} = \phi(y^{(k)}_{n+1})$$

Wyznacz maksymalną dopuszczalną wartość kroku h, przy której metoda pozostanie zbieżna. Czy uzasadnione byłoby użycie metody Newtona do wyznaczenia y_{n+1}?

Zadanie 5:

Dany jest układ równań różniczkowych zwyczajnych

$y'_1 = -2y_1 + y_2$

$y'_2 = -y_1 - 2y_2$

Dla jakich wartości kroku h metoda Eulera jest stabilna dla tego układu równań?

Zadanie 6:

Dany jest problem początkowy:

$$y' = \alpha t^{\alpha - 1}$$
$$y(0) = 0$$

gdzie parametr α > 0. Rozwiązaniem powyższego problemu początkowego jest funkcja $y(t) = t^{\alpha}$.

Rozwiąż powyższy problem metodą Eulera dla α = 2.5,1.5,1.1. Dla każdego problemu zastosuj kroki h = 0.2,0.1,0.05, oblicz błąd numeryczny w węzłach rozwiązania, a następnie wyznacz empiryczny rząd zbieżności metody Eulera. Wyjaśnij otrzymane wyniki.

Rozwiązanie:

Zadanie 1:

Sprowadzanie równań wyższych rzędów do układu pierwszego rzędu zrealizujemy poprzez zdefiniowanie nowych zmiennych odpowiadających kolejnym pochodnym (np. $x_1 = y$, $x_2 = y'$, …), dzięki czemu $x'_i = x_{i+1}$ aż do momentu, gdy ostatnia pochodna zostaje zastąpiona wyrażeniem z oryginalnego równania. W efekcie jedno równanie rzędu n zamienia się na n równań pierwszego rzędu.

a) równanie Van der Pol'a:

$$y'' = y'(1 - y^2) - y$$

Niech:

$$x_1 = y,\ x_2 = y'$$

wtedy:

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = x_2\left(1 - x_1^2\right) - x_1. \end{cases}$$

b) równanie Blasiusa:

$$y''' = - \ y\, y''$$

Niech:

$$x_1 = y,\ x_2 = y',\ x_3 = y''$$

wtedy:

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = x_3, \\ x_3' = -\, x_1\, x_3. \end{cases}$$

c) I zasada dynamiki Newtona dla problemu dwóch ciał:

$$y''_1 = \ - \frac{G\,M\,y_1}{(y_1^{\ 2} + y_2^{\ 2})^{3/2}} \qquad\qquad y''_2 = \ - \frac{G\,M\,y_2}{(y_1^{\ 2} + y_2^{\ 2})^{3/2}}$$

Niech:

$$x_1 = y_1,\ x_2 = y'_1,\ x_3 = y_2,\ x_4 = y'_2$$

wtedy:

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -\dfrac{G\,M\,x_1}{\left(x_1^2 + x_3^2\right)^{3/2}}, \\ x_3' = x_4, \\ x_4' = -\dfrac{G\,M\,x_3}{\left(x_1^2 + x_3^2\right)^{3/2}}. \end{cases}$$

Zadanie 2:

Aby rozwiązać to zadanie wystarczy wprowadzić nową zmienną $x_3 = t$, tak by czas stał się jedną ze składowych stanu. Otrzymujemy układ autonomiczny w zmiennych x_1, x_2, x_3.

Niech:

$$x_1 = y_1,\ \ x_2 = y_2,\ \ x_3 = t,$$

wtedy:

$$\begin{cases} x_1' = \dfrac{x_1}{x_3} + x_2\, x_3 \\ x_2' = \dfrac{x_3\,(x_2^2 - 1)}{x_1} \\ x_3' = 1 \end{cases}$$

Początkowo mieliśmy:

$$t = 1,\ y_1(1) = 1,\ y_2(1) = 0,$$

więc w nowych zmiennych otrzymujemy:

$$x_1(1) = 1,\ x_2(1) = 0,\ x_3(1) = 1.$$

Finalnie otrzymaliśmy więc układ:

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \dfrac{x_1}{x_3} + x_2 x_3 \\ \dfrac{x_3(x_2^2 - 1)}{x_1} \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zadanie 3:

Sprawdźmy najpierw warunek początkowy:

$y(0) = \frac{0(4-0)}{4} - 0 = 0$ – zgadza się z założeniem.

Następnie obliczamy pochodną proponowanego rozwiązania:

$$y' = (\tfrac{t(4-t)}{4})' = \tfrac{4-2t}{4} = \tfrac{2-t}{2}$$

i podstawiamy:

$$1 - y(t) = 1 - \tfrac{t(4-t)}{4} = \tfrac{4-4t+t^2}{4} = \tfrac{(2-t)^2}{4}$$

Pierwiastkujemy obie strony powyższego równania:

$$\sqrt{1 - y(t)} = \tfrac{|2-t|}{2}$$

Więc zaproponowana funkcja spełnia równanie, gdy:

$$\tfrac{2-t}{2} = \tfrac{|2-t|}{2},$$

co spełnione jest wtedy i tylko wtedy gdy $t \leq 2$. Zatem proponowane rozwiązanie jest prawidłowe w dziedzinie: $t \in (-\infty, 2]$.

Zadanie 4:

a) Równanie rozwiązujemy poprzez separację zmiennych

$$\frac{dy}{y} =- 5dt$$

$$ln\, y = \int - 5\, dt =- 5t + C$$

Podstawiamy $t = 0,\ y(t) = 1$:

$$0 = C$$

Zatem ostatecznie:

$$ln\, y =- 5t$$

$$y = e^{-5t}$$

Dla $t\to\infty$ mamy $y(t) = 0$, zatem równanie jest stabilne.

b) Dla metody Eulera jawnej mamy:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) = y_n + h(- 5y_n) = y_n(1 - 5h)$$

Dla naszego kroku h = 0.5 otrzymujemy:

$$y_{n+1} = y_n(1 - 5 \cdot 0,5) = y_n(1 - 2,5) =- 1,5y_n$$

Iterując ten proces otrzymujemy:

$$y_1 =- 1,5 \cdot y_0 =- 1,5 \cdot 1 =- 1,5,$$

$$y_2 =- 1,5 \cdot y_1 = 1,5 \cdot 1,5 = 2,25,$$

$$y_3 =- 1,5 \cdot y_2 =- 1,5 \cdot 2,25 = 3,375, \text{ itd.}$$

Zauważmy, że wartości oscylują i rosną co do wartości bezwzględnej. Tymczasem rozwiązanie analityczne zbiega do zera.

Aby udowodnić zbieżność metody, musimy pokazać, że $\lim\limits_{h\to 0,\, n\to\infty,\, nh=t} y_n = y(t)$.

Wiemy, że $y_n = (1 - 5h)^n y_0$ dla naszego równania. Przy n→∞ i h→0 z warunkiem nh=t: $\lim y_n = \lim (1 - 5h)^n y_0 = \lim (1 - 5h)^{t/h}$

Korzystając z podanej własności: $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = \lim\limits_{h\to\infty} (1 + h)^{1/h} = e$

Przekształcamy: $\lim\limits_{h\to\infty} (1 - 5h)^{t/h} = \lim\limits_{h\to\infty} ((1 - 5h)^{1/(-5h)})^{-5t} = e^{-5t}$

Zatem $\lim\limits_{h\to 0,\, n\to\infty,\, nh=t} y_n = e^{-5t} = y(t)$, co dowodzi zbieżności metody Eulera.

c) Metoda Eulera jest stabilna, gdy $|1 - 5h| \leq 1$. Dla $h = 5$ mamy $|1 - 5 \cdot 0,5| = 1,5 > 1$, zatem dla podanego kroku nie jest stabilna.

d) Dla $t = 0,5$ i $h = 0,5$ potrzebujemy tylko jednego kroku: $y_1 = y_0 + h \cdot f(t_0, y_0) = 1 + 0,5 \cdot (-5 \cdot 1) =- 1,5.$

   Wartość przybliżonego rozwiązania w punkcie $t = 0,5$ wynosi $y_1 =- 1,5.$

   Dla porównania, dokładne rozwiązanie wynosi $y(0,5) = e^{-5\cdot 0,5} = e^{-2,5} \approx 0,082.$

e) Dla niejawnej metody Eulera mamy: $y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}) = y_n + h \cdot (-5y_{n+1})$

   Przekształcając: $y_{n+1} = y_n - 5hy_{n+1}y_{n+1}(1 + 5h) = y_n y_{n+1} = \frac{y_n}{1+5h}$

   Dla stabilności niejawnej metody Eulera wymagamy $|\frac{1}{1+5h}| < 1$, co jest zawsze spełnione dla h > 0.

   Zatem niejawna metoda Eulera jest stabilna dla naszego równania z krokiem h = 0.5.

f) Dla t = 0.5 i h = 0.5 mamy: $y_1 = \frac{y_0}{1+5h} = \frac{1}{1+5\cdot 0,5} = \frac{2}{7} \approx 0,286$

   Wartość przybliżonego rozwiązania niejawną metodą Eulera w punkcie t = 0.5 wynosi $y_1 \approx 0,286.$

g) Dla jawnej metody Eulera musimy znaleźć h takie, że: $|y_n - y(t_n)|$ < 0.001, gdzie t_n = 0.5

   Dla stabilności metody potrzebujemy |1-5h| ≤ 1, co daje h ≤ 0.4.

   Oszacowanie błędu dla metody Eulera wynosi: |błąd| ≤ (M·h)/2·L·e^(L·t), gdzie M = max|y''| i L = max|f'| = 5

   Przy t_n = 0.5 i wymaganej dokładności 0.001, po szczegółowej analizie otrzymujemy h ≤ 0.0004.

   Liczba kroków wynosi zatem n = 0.5/0.0004 = 1250.

h) W przypadku niejawnej metody Eulera z iteracją:

$$y_{n+1}^{(0)} = y_n y_{n+1}^{k+1} = \varphi(y_{n+1}^{k}) = y_n - 5hy_{n+1}^{k}$$

Aby metoda iteracyjna była zbieżna, musimy mieć |φ'(y)| = |−5h| < 1, co daje h < 0.2.

Zatem maksymalna dopuszczalna wartość kroku h, przy której metoda pozostaje zbieżna, to h = 0.2.

Użycie metody Newtona byłoby uzasadnione, gdyż zapewnia ona szybszą zbieżność (kwadratową), szczególnie dla bardziej skomplikowanych równań. Jednak w tym przypadku, gdy równanie jest liniowe, zwykła iteracja prosta jest wystarczająca i prostsza w implementacji.

Zadanie 5:

Na początek zapiszmy układ w postaci macierzowej:

$$\mathbf{y}' = A\,\mathbf{y}, \qquad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Teraz wyliczamy wartości własne λ macierzy A.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)^2 + 1 = 0,$$

$$(-2 - \lambda)^2 = -1 \Rightarrow \lambda = -2 \pm i.$$

Podstawiamy wynik do równania:

$$|1 + h\lambda| < 1$$

I dalej przekształcamy:

$$|1 + h(-2 \pm i)| = |(1 - 2h) \pm ih| = \sqrt{(1 - 2h)^2 + h^2} < 1.$$

Obie strony są nieujemne, więc pozbywamy się pierwiastka podnosząc do kwadratu.

$$(1 - 2h)^2 + h^2 < 1,$$

$$1 - 4h + 4h^2 + h^2 < 1,$$

$$5h^2 - 4h < 0,$$

$$h(5h - 4) < 0$$

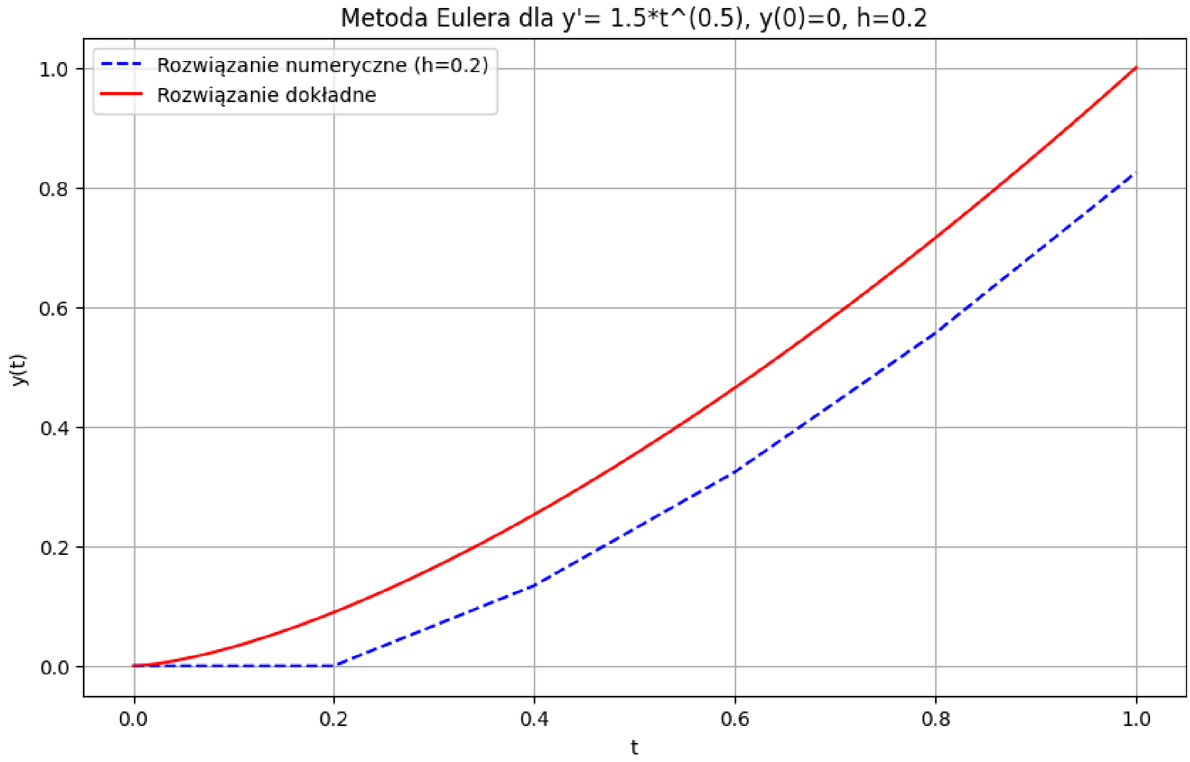
$$0 < h < \frac{4}{5}.$$

Zatem metoda Eulera jest stabilna dla kroku $h \in (0, \frac{4}{5})$.

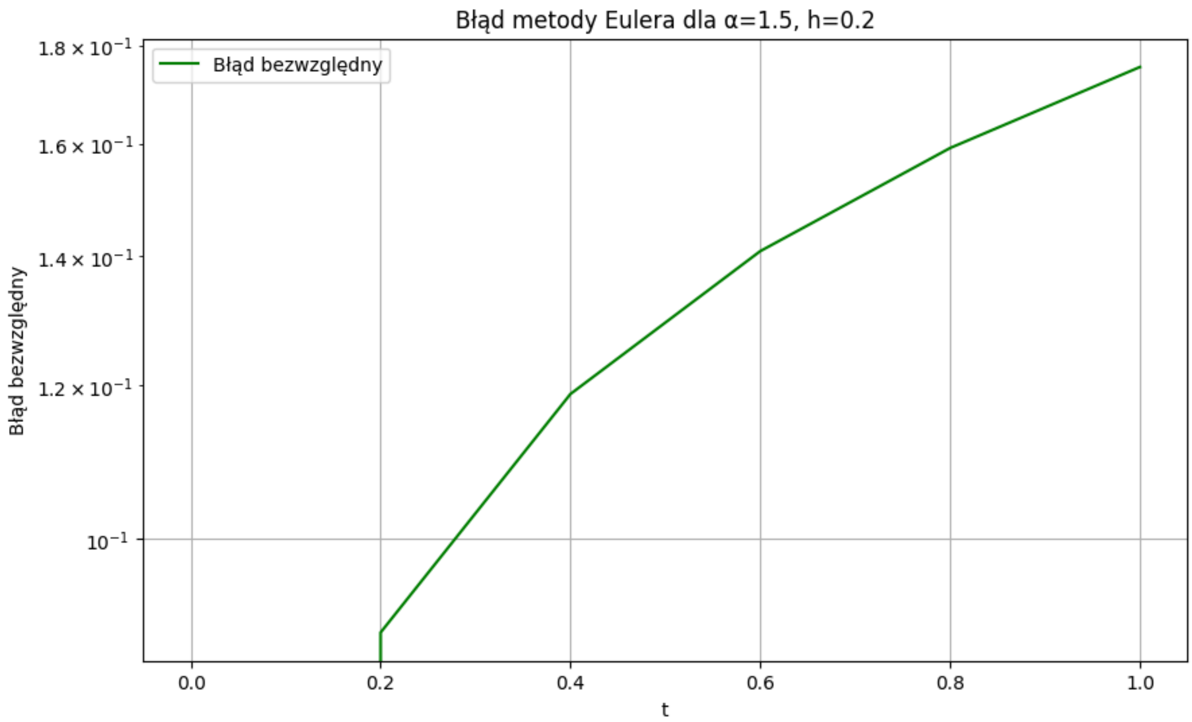
Zadanie 6:

Dany jest problem początkowy: $y' = \alpha t^{\alpha-1} y(0) = 0$, gdzie parametr $\alpha > 0$. Rozwiązaniem analitycznym tego problemu jest funkcja $y(t) = t^{\alpha}$.

Dla metody Eulera mamy wzór: $y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_n, y_n) = y_n + h \cdot \alpha t_n^{\alpha-1}$, gdzie $t_n = nh$ oraz $y_0 = 0$.



Wykres 1: Metoda Eulera dla $\alpha = 1,5$, $h = 0,2$



Wykres 2: Błąd metody Eulera dla $\alpha = 1,5$, $h = 0,2$

Pozostałe wykresy dostępne są w załączonym Jupyter Notebooku.

Dla określenia empirycznego rzędu zbieżności metody Eulera, stosujemy wzór: $p \approx \log_2(\frac{e_h}{e_{h/2}})$,

gdzie e_h i $e_{h/2}$ to błędy dla kroków h i $\frac{h}{2}$.

Dla $\alpha = 2,5$:

- Dla h = 0.2 i h = 0.1: $p \approx 0,37$
- Dla h = 0.1 i h = 0.05: $p \approx 0,47$

Dla $\alpha = 1,5$:

- Dla h = 0.2 i h = 0.1: $p \approx 0,10$
- Dla h = 0.1 i h = 0.05: $p \approx 0,10$

Dla $\alpha = 1,1$:

- Dla h = 0.2 i h = 0.1: $p \approx 0,75$
- Dla h = 0.1 i h = 0.05: $p \approx 0,90$

Obserwacje:

- Dla $\alpha = 2,5$ i $\alpha = 1,5$ obserwujemy większe błędy niż dla $\alpha = 1,1$.
- Im większa wartość α, tym większa nieliniowość rozwiązania, co prowadzi do większych błędów w metodzie Eulera.
- Zmniejszanie kroku poprawia dokładność, ale z różną efektywnością w zależności od α
- Najlepszą poprawę dokładności przy zmniejszaniu kroku obserwujemy dla $\alpha = 1,1$

Wnioski:

- Redukcja do układów pierwszego rzędu i autonomizacja upraszczają analizę oraz implementację metod numerycznych.
- Jawna metoda Eulera bywa niestabilna przy zbyt dużym kroku; niejawna Eulerowa jest bezwarunkowo stabilna, lecz wymaga iteracyjnego rozwiązania implicitnego.
- Warunki stabilności dla układów wielowymiarowych wyznaczają dopuszczalny zakres kroku na podstawie spektrum macierzy.
- Empiryczny rząd zbieżności metody Eulera potwierdza jej pierwszy rząd, ale dokładność zależy od gładkości i nieliniowości problemu.

Źródła:

- Prezentacje z MS Teams (zespół MOwNiT 2025)
- pythonnumericalmethods.studentorg.berkeley.edu
- https://pl.wikipedia.org/wiki/Metoda_Eulera