Równania różniczkowe zwyczajne – część I

Zadanie 1. Przedstaw każde z poniższych równań różniczkowych zwyczajnych jako równoważny układ równań pierwszego rzędu (ang. *first-order system of ODEs*):

(a) równanie Van der Pol'a:

$y'' = y'(1 - y^2) - y.$

(b) równanie Blasiusa:

$y''' = -yy''.$

(c) II zasada dynamiki Newtona dla problemu dwóch ciał:

$$y_1'' = -GMy_1/(y_1^2 + y_2^2)^{3/2}, \tag{1}$$
$$y_2'' = -GMy_2/(y_1^2 + y_2^2)^{3/2}. \tag{2}$$

Zadanie 2. Przekształć poniższy problem początkowy do autonomicznego problemu początkowego:

$$y_1' = y_1/t + y_2 t$$
$$y_2' = t(y_2^2 - 1)/y_1$$

$$y_1(1) = 1$$
$$y_2(1) = 0$$

Zadanie 3. Dany jest problem początkowy:

$$y' = \sqrt{1 - y}$$
$$y(0) = 0$$

Pokaż, że funkcja $y(t) = t(4 - t)/4$ spełnia równanie i warunek początkowy oraz wyznacz dziedzinę, dla której $y(t)$ jest rozwiązaniem problemu początkowego.

Zadanie 4. Dane jest równanie różniczkowe zwyczajne

$$y' = -5y$$

z warunkiem początkowym $y(0) = 1$. Równanie rozwiązujemy numerycznie z krokiem $h = 0.5$.

(a) Analityczna stabilność. Wyjaśnij, czy rozwiązania powyższego równania są stabilne?

(b) Udowodnij, że metoda Euler'a jest zbieżna, tzn., że

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ n\to\infty\\ nh=t}} y_n = y(t)\,,$$

gdzie $y(t)$ oznacza wartość analitycznego rozwiązania w ustalonym punkcie $t = nh$, a y_n wartość rozwiązania numerycznego w punkcie t.

Wykorzystaj fakt, że $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = \lim_{h\to 0}(1 + h)^{\frac{1}{h}} = e$.

(c) Numeryczna stabilność. Wyjaśnij, czy metoda Euler'a jest stabilna dla tego równania z użytym krokiem h?

(d) Oblicz numerycznie wartości przybliżonego rozwiązania dla $t = 0.5$ metodą Euler'a.

(e) Wyjaśnij, czy niejawna metoda Euler'a jest stabilna dla tego równania z użytym krokiem h?

(f) Oblicz numerycznie wartości przybliżonego rozwiązania dla $t = 0.5$ niejawną metodą Euler'a.

(g) Wyznacz maksymalną dopuszczalną wartość kroku h w metodzie Eulera, jeśli żądamy, aby błąd rozwiązania w punkcie $t_n = 0.5$ nie przekraczał 0.001, tzn. $|y_n - y(t_n)| < tol = 0.001$. Ile kroków należy w tym celu wykonać?

(h) Do wyznaczenia wartości y_{n+1} w niejawnej metodzie Euler'a użyto metody bezpośredniej iteracji:

$$\begin{aligned} y_{n+1}^{(0)} &= y_n \\ y_{n+1}^{(k+1)} &= \phi\big(y_{n+1}^{(k)}\big) \end{aligned}$$

Wyznacz maksymalną dopuszczalną wartość kroku h, przy której metoda pozostanie zbieżna. Czy uzasadnione byłoby użycie metody Newtona do wyznaczenia y_{n+1}?

Zadanie 5. Dany jest układ równań różniczkowych zwyczajnych

$$\begin{aligned} y_1' &= -2y_1 + y_2 \\ y_2' &= -y_1 - 2y_2 \end{aligned}$$

Dla jakich wartości kroku h metoda Euler'a jest stabilna dla tego układu równań?

Zadanie 6. Dany jest problem początkowy:

$$\begin{aligned} y' &= \alpha t^{\alpha-1} \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

gdzie parametr $\alpha > 0$. Rozwiązaniem powyższego problemu początkowego jest funkcja $y(t) = t^{\alpha}$.

Rozwiąż powyższy problem metodą Eulera dla $\alpha = 2.5, 1.5, 1.1$. Dla każdego problemu zastosuj kroki $h = 0.2, 0.1, 0.05$, oblicz błąd numeryczny w węzłach rozwiązania, a następnie wyznacz empiryczny rząd zbieżności metody Eulera. Wyjaśnij otrzymane wyniki.