

# Laboratorium 10

Autorzy: Kosman Mateusz, Ludwin Bartosz

## Temat laboratorium:

Celem laboratorium jest analiza dynamiki populacji w modelu drapieżca–ofiara opisanym układem równań różniczkowych Lotki-Volterry. Badana jest skuteczność i dokładność różnych metod numerycznych całkowania układów ODE, w tym metod Eulera (jawnej, niejawnej i półjawnej) oraz metody Rungego–Kutty czwartego rzędu. W dalszej części laboratorium przeprowadzono identyfikację parametrów modelu na podstawie danych rzeczywistych oraz analizę zachowania niezmiennika układu, co pozwala na ocenę stabilności i poprawności przyjętych metod.

## Treść:

Dynamika układu drapieżca-ofiara opisana jest modelem Lotki-Volterry:

$$x' = x(\alpha_1 - \beta_1 y) \quad (1)$$

$$y' = y(-\alpha_2 + \beta_2 x) \quad (2)$$

Znaczenie symboli jest następujące:

$x(t)$  gęstość ofiar (np. liczba zajęcy na jednostkę powierzchni) w zależności od czasu

$y(t)$  gęstość drapieżców (np. liczba rysi na jednostkę powierzchni) w zależności od czasu

$\alpha_1$  współczynnik przyrostu ofiar (np. zajęcy) w izolowanym środowisku

$\alpha_2$  współczynnik ubywania drapieżców (np. rysi) w izolowanym środowisku

$\beta_1$  współczynnik intensywności kontaktów między drapieżcami a ofiarami, kończących się upolowaniem ofiary

$\beta_2$  współczynnik opisujący wpływ obecności ofiar na współczynnik przyrostu drapieżców

Przyjmij wartości początkowe:  $x(0) = 20$ ,  $y(0) = 20$  oraz następujące wartości parametrów:  $\alpha_1 = 1$ ,  $\beta_1 = 0.1$ ,  $\alpha_2 = 0.5$ ,  $\beta_2 = 0.02$ . Całkując od  $t = 0$  do  $t = 80$ , rozwiąż powyższy układ równań:

- jawną metodą Eulera

$$y_{k+1} = y_k + h_k f(t_k, y_k)$$

- niejawną metodą Eulera

$$y_{k+1} = y_k + h_k f(t_{k+1}, y_{k+1})$$

- półjawną metodę Eulera

$$x_{n+1} = x_n + h_n f(x_n, y_{n+1})$$

$$y_{n+1} = x_n + h_n g(x_n, y_{n+1})$$

lub

$$x_{n+1} = x_n + h_n f(x_{n+1}, y_n)$$

$$y_{n+1} = x_n + h_n g(x_{n+1}, y_n)$$

metodą Rungego-Kutty czwartego rzędu (RK4)

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h_k}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \text{ gdzie}$$

$$k_1 = f(t_k, y_k)$$

$$k_2 = f(t_k + h_k/2, y_k + h_k k_1/2)$$

$$k_3 = f(t_k + h_k/2, y_k + h_k k_2/2)$$

$$k_4 = f(t_k + h_k, y_k + h_k k_3)$$

(a) Na wspólnym rysunku narysuj wykresy liczebności obu populacji w zależności od czasu. Na osobnym rysunku narysuj portret fazowy układu, tj. wykres trajektorii punktu  $(x(t), y(t))$  w funkcji czasu. Podaj jego fizyczną interpretację.

(b) Dla jakich warunków początkowych liczebności populacji nie ulegają zmianie? Znajdź punkty stacjonarne powyższego układu, rozwiązując układ równań:

$$x' = x(\alpha_1 - \beta_1 y) \quad (3)$$

$$y' = y(-\alpha_2 + \beta_2 x) \quad (4)$$

(c) Czy zachowany jest niezmiennik:

$$H(x, y) = \beta_2 x + \beta_1 y - \alpha_2 \ln(x) - \alpha_1 \ln(y) \quad (5)$$

Na wspólnym rysunku przedstaw wykresy tego niezmiennika znalezione przez każdą metodę numeryczną.

(d) Wiemy, że na przestrzeni lat populacja rysy i zajęcy kształtowała się wg danych przedstawionych w pliku LynxHare.txt.

Wybierz jedną z powyższych metod numerycznych i oszacuj prawdziwe wartości współczynników  $\theta = [\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2]$ . W tym celu wykonaj minimalizację funkcji kosztu. Jako funkcję kosztu wykorzystaj sumę kwadratów reszt (ang. residual sum of squares):

$$L(\theta) = \sum_{i=0}^T (l_i - \hat{l}_i)^2 + (h_i - \hat{h}_i)^2$$

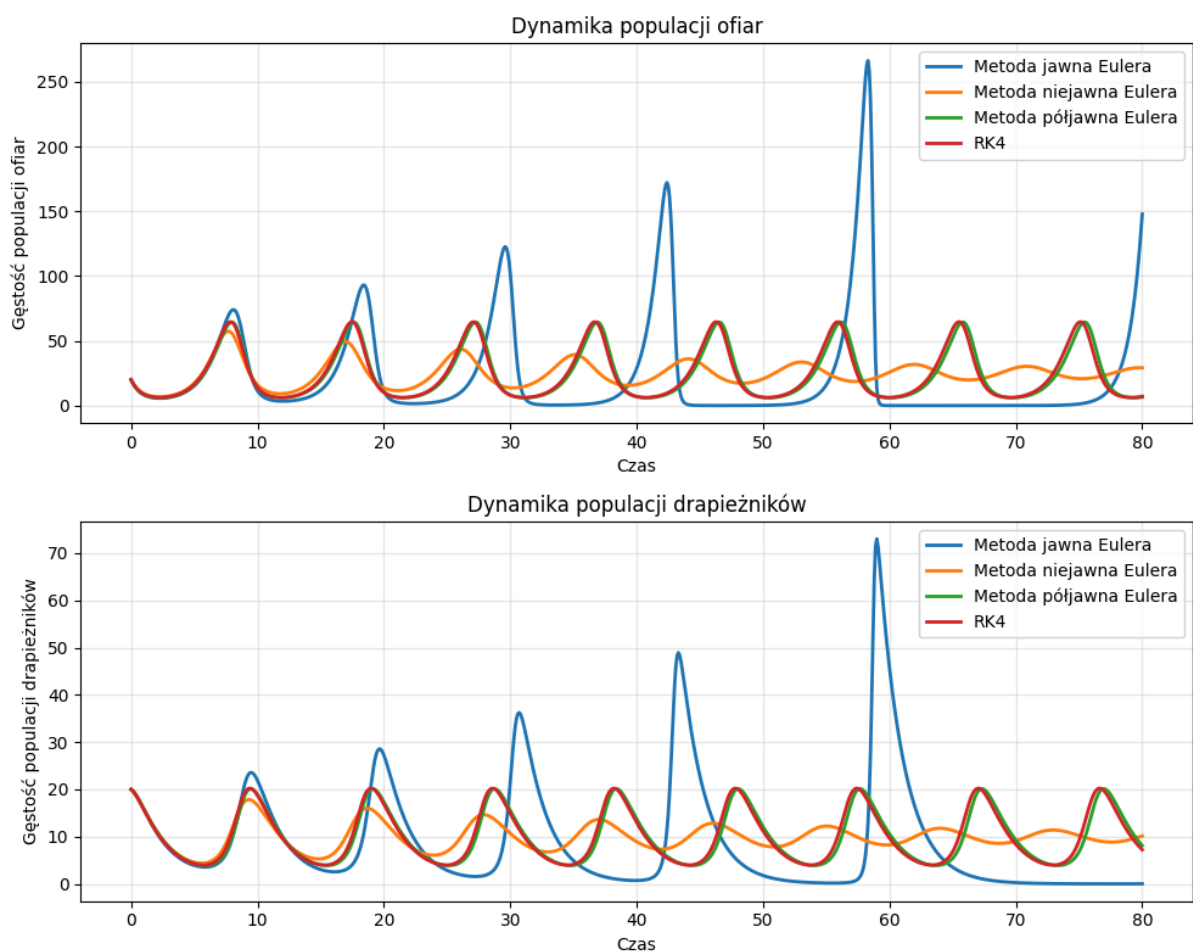
gdzie  $l_i$  oznacza prawdziwą liczbę rysi,  $\hat{l}_i$  oznacza liczbę rysi wyznaczonych metodą numeryczną, a  $h_i$  oznacza prawdziwą liczbę zajęcy,  $\hat{h}_i$  oznacza liczbę zajęcy wyznaczonych metodą numeryczną. Ponieważ nie znamy gradientu  $\nabla_{\theta} L(\theta)$ , do minimalizacji wykorzystaj metodę Nelder-Meada, która nie wymaga informacji o gradiencie.

Powtórz obliczenia, tym razem jako funkcję kosztu wykorzystując:

$$L(\theta) = - \sum_{i=0}^T l_i \ln \hat{l}_i - \sum_{i=0}^T (\ln \hat{h}_i + \sum_{i=0}^T \hat{l}_i + \sum_{i=0}^T \hat{h}_i$$

## Rozwiązanie:

### Podpunkt a)



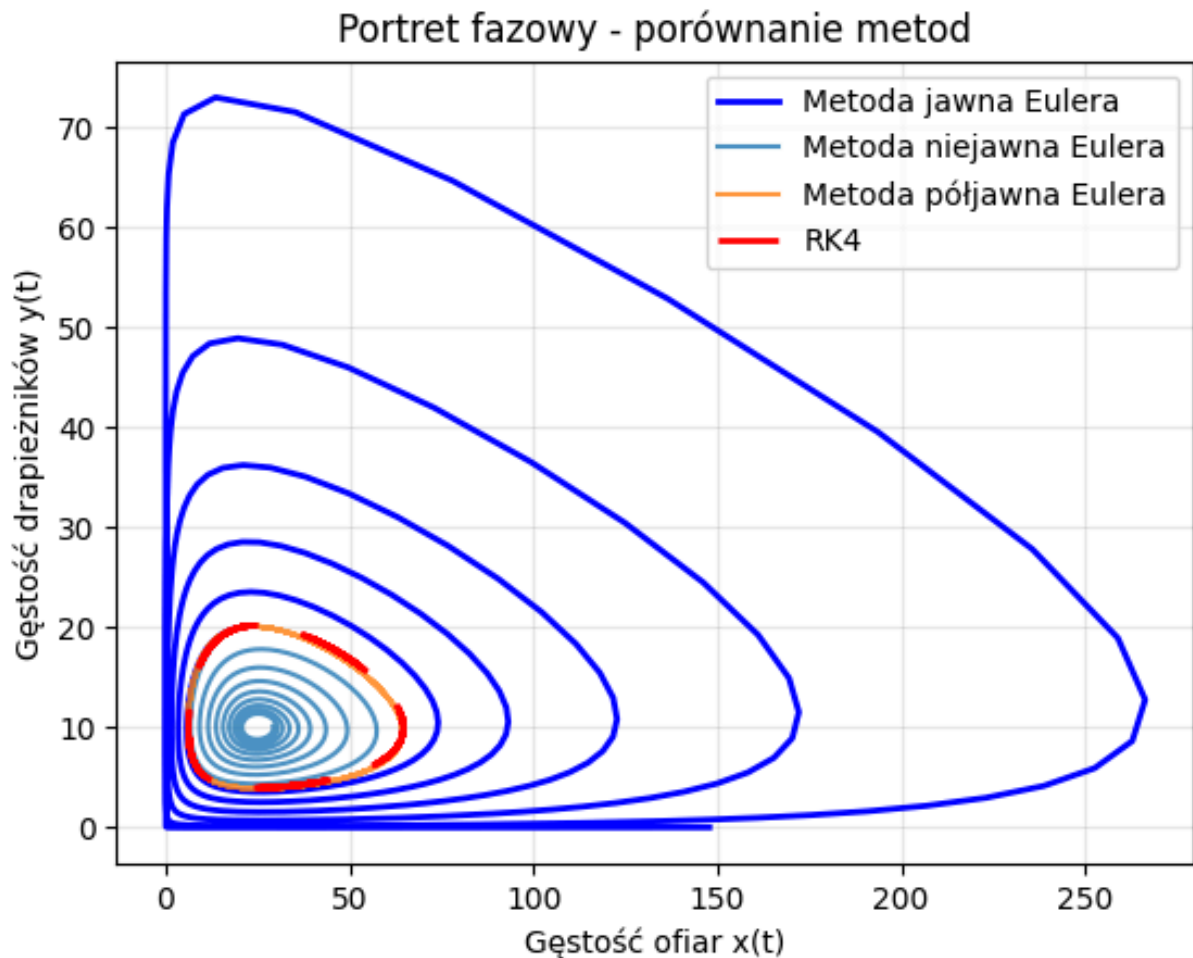
Wykres 1

Metoda jawna Eulera charakteryzuje się niską dokładnością i dużą niestabilnością numeryczną, zwłaszcza przy dłuższych przedziałach czasu lub większych krokach całkowania. Już przy umiarkowanej długości symulacji (do  $t=80$ ) pojawiają się znaczne odchylenia.

Metoda niejawna Eulera jest znacznie bardziej stabilna. Pozwala ona na uniknięcie eksplozji błędów i zachowuje poprawną strukturę oscylacyjną populacji.

Metoda półjawna Eulera stanowi kompromis między dwoma powyższymi. Zakłada ona obliczenie jednego z równań w sposób niejawny (w tym przypadku dla drapieżników), co poprawia stabilność względem wersji jawnej, przy jednoczesnym zmniejszeniu kosztu obliczeniowego względem pełnej wersji niejawnej.

Najlepsze rezultaty pod względem dokładności daje metoda Rungego–Kutty czwartego rzędu (RK4). Dzięki czterem punktom próbkowania w każdym kroku metoda ta bardzo dobrze odwzorowuje okresowy charakter zmian populacji, bez znaczącej kumulacji błędów nawet przy dłuższej symulacji.



Wykres 2

(linia odpowiedzialna za RK4 jest przerywana aby było widać poniższą reprezentującą metodę półjawną Eulera)

Trajektoria w przestrzeni fazowej wyraźnie ukazuje zamkniętą orbitę. Pokazuje to naprzemienny wzrost i spadek obu populacji: wzrost liczby ofiar sprzyja przyrostowi drapieżników, a ten z kolei prowadzi do spadku liczby ofiar, co w dalszym czasie ogranicza też liczebność drapieżników, i cykl się powtarza.

## Podpunkt b)

Przypadek 1:  $x = 0$  lub  $y = 0$

Punkt  $(0, 0)$  - wymieranie obu populacji

Przypadek 2:  $\alpha_1 - \beta_1 y = 0$  i  $-\alpha_2 + \beta_2 x = 0$

$\alpha_1 - \beta_1 y = 0 \rightarrow y = \alpha_1 / \beta_1 = 1.0 / 0.1 = 10.0$

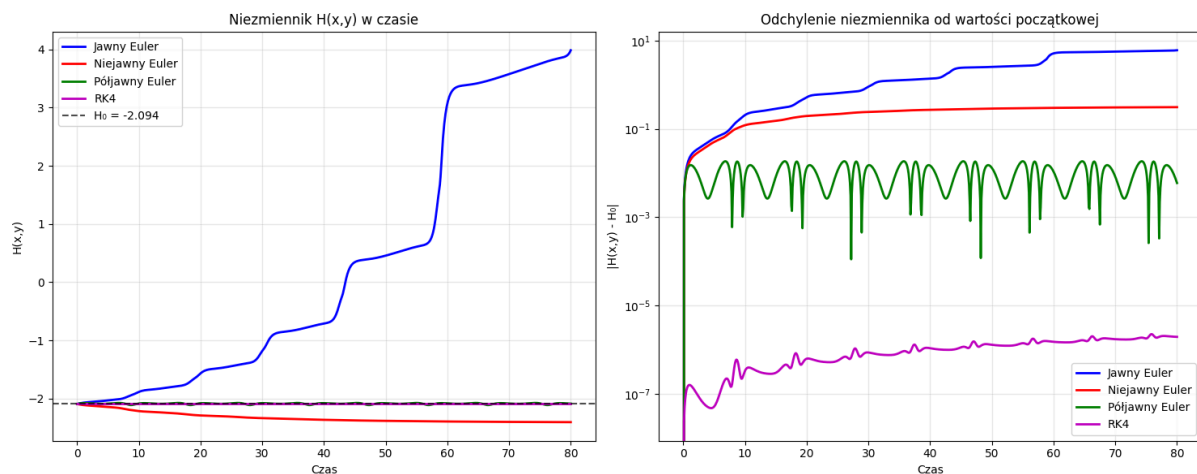
$-\alpha_2 + \beta_2 x = 0 \rightarrow x = \alpha_2 / \beta_2 = 0.5 / 0.02 = 25.0$

Punkt równowagi:  $(25.0, 10.0)$

W punkcie równowagi populacje nie ulegają zmianie.

Jest to centrum układu - punkt wokół którego oscylują trajektorie.

## Podpunkt c)



Wykres 3

Niezmiennik  $H(x,y) = \beta_2 x + \beta_1 y - \alpha_2 \ln(x) - \alpha_1 \ln(y)$

Wartość początkowa  $H_0 = -2.093598$

Odchylenia niezmiennika na końcu symulacji ( $t=80.0$ ):

Jawny Euler:  $|\Delta H| = 6.078585$

Niejawny Euler:  $|\Delta H| = 0.312027$

Półjawny Euler:  $|\Delta H| = 0.005963$

RK4:  $|\Delta H| = 0.000002$

Wnioski:

- RK4 najlepiej zachowuje niezmiennik (najmniejszy błąd)
- Jawny Euler wprowadza największe błędy
- Niezmiennik reprezentuje 'energię' układu Hamiltona

## Podpunkt d)

### Wykresy jakości dopasowania

W tym podpunkcie szacujemy prawdziwe wartości współczynników  $\theta = [\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2]$  modelu Lotki-Volterra i analizujemy dopasowanie modelu.

Współczynniki  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  wyznaczamy korzystając z funkcji `scipy.optimize.minimize` wykorzystując metodę Nelder-Meada do minimalizacji funkcji kosztu.

Współczynnik determinacji liczymy według wzoru:

$$R^2 := \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

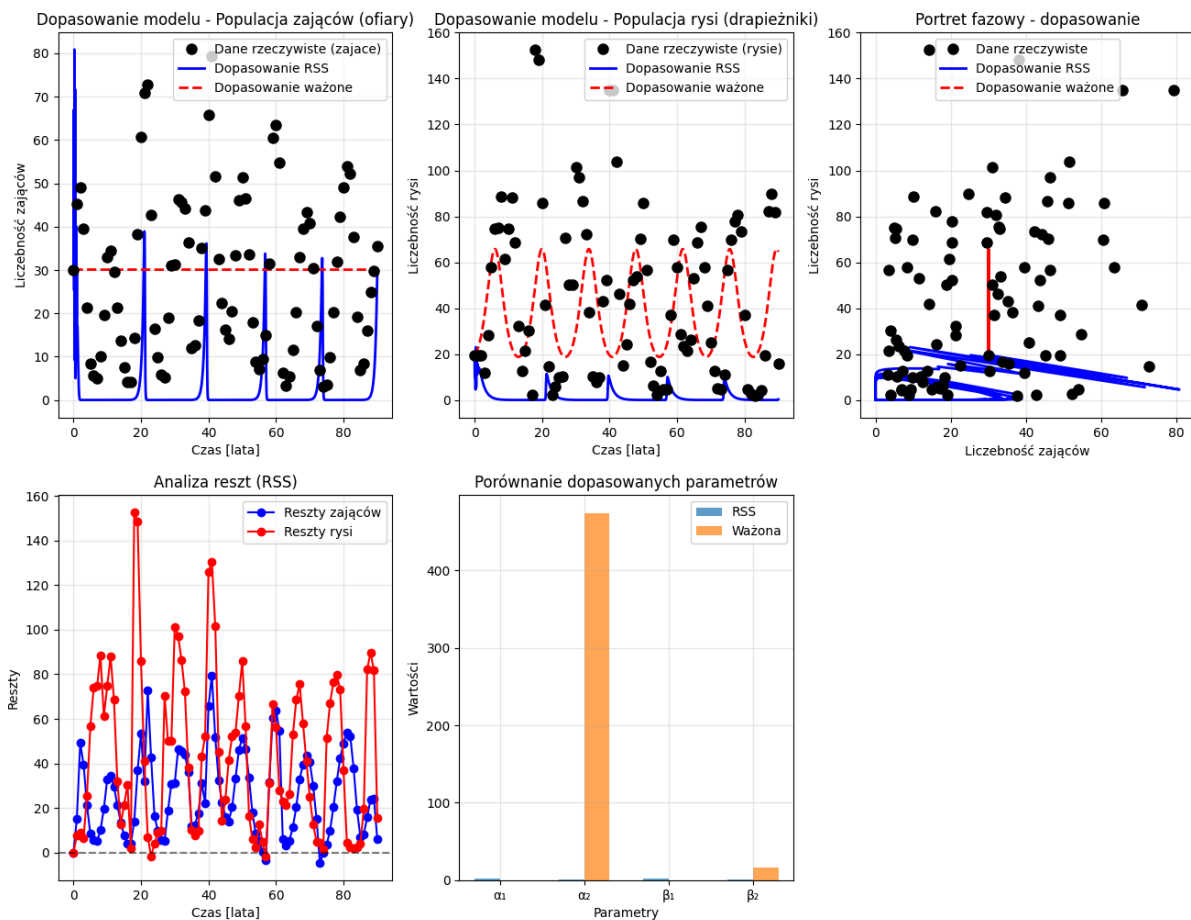
gdzie:

$y_i$  –  $i$ -ta obserwacja zmiennej  $y$ ,

$\hat{y}_i$  – wartość teoretyczna **zmiennej objaśnianej** (na podstawie modelu),

$\bar{y}$  – **średnia arytmetyczna** empirycznych wartości zmiennej objaśnianej.

Współczynnik determinacji jest miarą jakości dopasowania modelu będącą liczbą z zakresu  $(-\infty, 1]$ . Dla idealnego dopasowania przyjmuje wartość 1, wraz ze spadkiem jakości modelu współczynnik determinacji maleje. Dla wartości ujemnych współczynnika uzyskany model jest gorszy niż model otrzymany metodą najmniejszych kwadratów.



Wykres 4

## Analiza jakości dopasowania

Współczynnik determinacji  $R^2$ :

- Populacja zająców: -1.9257
- Populacja rysie: -1.5033

Współczynnik determinacji jest ujemny, co oznacza, że otrzymany wynik jest dopasowany do danych gorzej niż z wykorzystaniem metody najmniejszych kwadratów.

Błąd średniokwadratowy (RMSE):

- Populacja zająców: 32.09
- Populacja rysie: 57.23

Średni błąd bezwzględny (MAE):

- Populacja zająców: 26.13
- Populacja rysie: 44.10

Interpretacja biologiczna parametrów:



- $\alpha_1 = 1.7236$  - tempo wzrostu zająców bez drapieżników
- $\alpha_2 = 0.6990$  - tempo wymierania rysi bez ofiar
- $\beta_1 = 1.7293$  - wpływ rysi na śmiertelność zająców
- $\beta_2 = 0.4290$  - wpływ zająców na rozród rysi

Punkt równowagi dla dopasowanych parametrów:

- Zające: 1.6
- Rysie: 1.0

## Wnioski:

- Model Lotki–Volterry trafnie odtwarza cykliczną dynamikę populacji drapieżca–ofiara, co potwierdzają zamknięte orbity w portrecie fazowym.
- Metoda jawna Eulera jest niestabilna i kumuluje błędy, uniemożliwiając jej użycie do długich symulacji. Niejawna i półjawna Euler oferują lepszą stabilność, przy czym półjawna stanowi kompromis między dokładnością a kosztem obliczeniowym uzyskując większą stabilność.
- Rungego–Kutty 4. rzędu (RK4) daje najwyższą dokładność i najwierniej zachowuje niezmiennik układu.
- Punkt stacjonarny  $(x,y)=(25,10)$  oznacza stabilne współistnienie obu gatunków wokół jednej wartości równowagi.
- Estymacja parametrów metodą Neldera–Meada na podstawie danych LynxHare dostarczyła sensownych wartości, lecz ujemne  $R^2$  wskazują na ograniczoną trafność modelu w tej formie, co sugeruje potrzebę uwzględnienia dodatkowych czynników (np. środowiskowych).

## Źródła:

- Prezentacje z MS Teams (zespół MOwNiT 2025)
- [pythonnumericalmethods.studentorg.berkeley.edu](https://pythonnumericalmethods.studentorg.berkeley.edu)
- [https://en.wikipedia.org/wiki/Lotka%E2%80%93Volterra\\_equations](https://en.wikipedia.org/wiki/Lotka%E2%80%93Volterra_equations)