Analiza błędów

Zadanie 1. Oblicz przybliżoną wartość pochodnej funkcji, używając wzoru

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad . \tag{1}$$

Sprawdź działanie programu dla funkcji $\tan(x)$ oraz $x = 1$. Wyznacz błąd, porównując otrzymaną wartość numerycznej pochodnej z prawdziwą wartością. Pomocna będzie tożsamość $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$.
Na wspólnym rysunku przedstaw wykresy wartości bezwględnej błędu metody, błędu numerycznego oraz błędu obliczeniowego $E(h)$ w zależności od h dla $h = 10^{-k}$, $k = 0, \ldots, 16$. Użyj skali logarytmicznej na obu osiach. Czy wykres wartości bezwględnej błędu obliczeniowego posiada minimum?
Porównaj wyznaczoną wartość $h_{\min}$ z wartością otrzymaną ze wzoru

$$h_{\min} \approx 2\sqrt{\epsilon_{\mathrm{mach}}/M}, \text{ gdzie } M \approx |f''(x)| \quad . \tag{2}$$

Powtórz ćwiczenie używając wzoru różnic centralnych

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \quad . \tag{3}$$

Porównaj wyznaczoną wartość $h_{\min}$ z wartością otrzymaną ze wzoru

$$h_{\min} \approx \sqrt[3]{3\epsilon_{\mathrm{mach}}/M}, \text{ gdzie } M \approx |f'''(x)| \quad . \tag{4}$$

Porównaj wyznaczoną empirycznie wartość błędu obliczeniowego $E(h_{\min})$, z jakim wyznaczone zostało $f'(x)$, przy zastosowaniu wzorów (1) oraz (3). Która metoda jest dokładniejsza?

Zadanie 2. Napisz program obliczający sumę n liczb zmiennoprzecinkowych pojednyczej precyzji, losowo rozłożonych w przedziale [0,1] wg rozkładu jednostajnego. Użyj wyłącznie zmiennych pojedynczej precyzji, chyba, że wskazano inaczej. Sumę oblicz według każdego z poniższych sposobów:

(a) Zsumuj liczby według kolejności, w której zostały wygenerowane. Użyj akumulatora podwójnej precyzji do przechowywania akumulowanej sumy.

(b) Zsumuj liczby według kolejności, w której zostały wygenerowane. Użyj akumulatora pojedynczej precyzji do przechowywania akumulowanej sumy.

(c) Użyj algorytmu Kahana sumowania z kompensacją, sumując liczby w kolejności, w której zostały wygenerowane. Użyj akumulatora pojedynczej precyzji do przechowywania akumulowanej sumy.

```
sum = 0.0
err = 0.0
for i=1 to n
    y = x[i] - err
    temp = sum + y
    err = (temp-sum) - y
    sum = temp
```

(d) Zsumuj liczby w porządku rosnącym, od liczb o najmniejszej wartości bezwzględnej do liczb o największej wartości bezwzględnej.

(e) Zsumuj liczby w porządku malejącym, od liczb o największej wartości bezwzględnej do liczb o najmniejszej wartości bezwzględnej.

Narysuj wykres błędu względnego w zależności od $n = 10^k$, $k = 4, \ldots, 8$. Jako prawdziwą wartość sumy przyjmij wartość `np.fsum(x)`.

Zadanie 3. Przepisz poniższe wyrażenia, tak aby uniknąć zjawiska kancelacji dla wskazanych argumentów.

(a) $\sqrt{x+1} - 1$, $x \approx 0$

(b) $x^2 - y^2$, $x \approx y$

(c) $1 - \cos x$, $x \approx 0$

(d) $\cos^2 x - \sin^2 x$, $x \approx \pi/4$

(e) $\ln x - 1$, $x \approx e$

(f) $e^x - e^{-x}$, $x \approx 0$ (*Wskazówka.* Użyj rozwinięcia w szereg Taylora).

Zadanie 4. Efektywność η kolektora słonecznego dana jest wzorem:

$$\eta = K \frac{QT_d}{I}\,, \tag{5}$$

gdzie K jest stałą znaną z dużą dokładnością, Q – objętość przepływu, T_{d} – różnica temperatur, I – natężenia promieniowania. Dokładność, z jaką można zmierzyć Q, T_{d}, I zależy od konstrukcji kolektora. Na podstawie (5) wyliczono, że sprawność kolektora S1 wynosi 0.76, a sprawność kolektora S2 wynosi 0.70. Wielkości Q, T_{d}, I zmierzono z następującym błędem:

Kolektor	S1	S2
Q	1.5%	0.5%
T_{d}	1.0%	1.0%
I	3.6%	2.0%

Czy na podstawie powyższych danych możemy być pewni, że S1 ma większą sprawność niż S2? Odpowiedź szczegółowo uzasadnij.