

Laboratorium 6

Autorzy: Kosman Mateusz, Ludwin Bartosz

Temat laboratorium:

Celem niniejszego zadania jest kompleksowa analiza skuteczności

numerycznych metod całkowania przy wykorzystaniu całki $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx = \pi$

jako narzędzia do przybliżenia wartości liczby π . W ramach sprawozdania porównamy wyniki uzyskane metodami złożonych kwadratur otwartych (metoda punktów środkowych, metoda trapezów oraz metoda Simpsona) z kwadraturą Gaussa-Legendre'a. Analizie poddano zarówno dokładność przybliżeń (poprzez wyznaczanie błędów względnych) jak i empiryczne rzędy zbieżności, określając granice poprawności numerycznej wynikającą z błędu maszynowego.

Treść:

Zadanie 1. Wiadomo, że

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx = \pi \quad (1)$$

Powyższą równość można wykorzystać do obliczenia przybliżonej wartości π poprzez całkowanie numeryczne.

- Oblicz wartość powyższej całki, korzystając ze złożonych kwadratur otwartej prostokątów (ang. mid-point rule), trapezów i Simpsona. Na przedziale całkowania rozmieść $2^m + 1$ równoodległych węzłów. Przyjmij zakres wartości m od 1 do 25. Dla każdej metody narysuj wykres wartości bezwzględnej błędu względnego w zależności od liczby ewaluacji funkcji podcałkowej. Wyniki przedstaw na wspólnym wykresie, używając skali logarytmicznej na obu osiach.
- Czy istnieje pewna wartość, poniżej której zmniejszanie kroku h nie zmniejsza już błędu kwadratury? Porównaj wartość h_{min} , odpowiadającą minimum wartości bezwzględnej błędu względnego, z wartością wyznaczoną w laboratorium 1.
- Dla każdej z użytych metod porównaj empiryczny rząd zbieżności z rzędem zbieżności przewidywanym przez teorię.

Zadanie 2. Oblicz wartość całki

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx = \pi \quad (2)$$

metodą Gaussa-Legendre'a. Narysuj wykres wartości bezwzględnej błędu względnego w zależności od liczby ewaluacji funkcji podcałkowej. Przyjmij na tyle duży zakres n , aby wykryć, kiedy błąd numeryczny zaczyna przeważać nad błędem metody. Postaraj się umiejscowić otrzymane wyniki na wykresie stworzonym w podpunkcie (a).

Rozwiązanie:

Zadanie 1:

Aby wykonać to zadanie najpierw generujemy przedział zawierający $2^m + 1$ równomiernie rozmieszczonych węzłów za pomocą funkcji *make_points(m)*, a następnie stosujemy na nim złożone kwadratury:

Prostokątów: $M(f) = (b - a)f(\frac{a+b}{2})$,

Trapezów: $T(f) = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)]$,

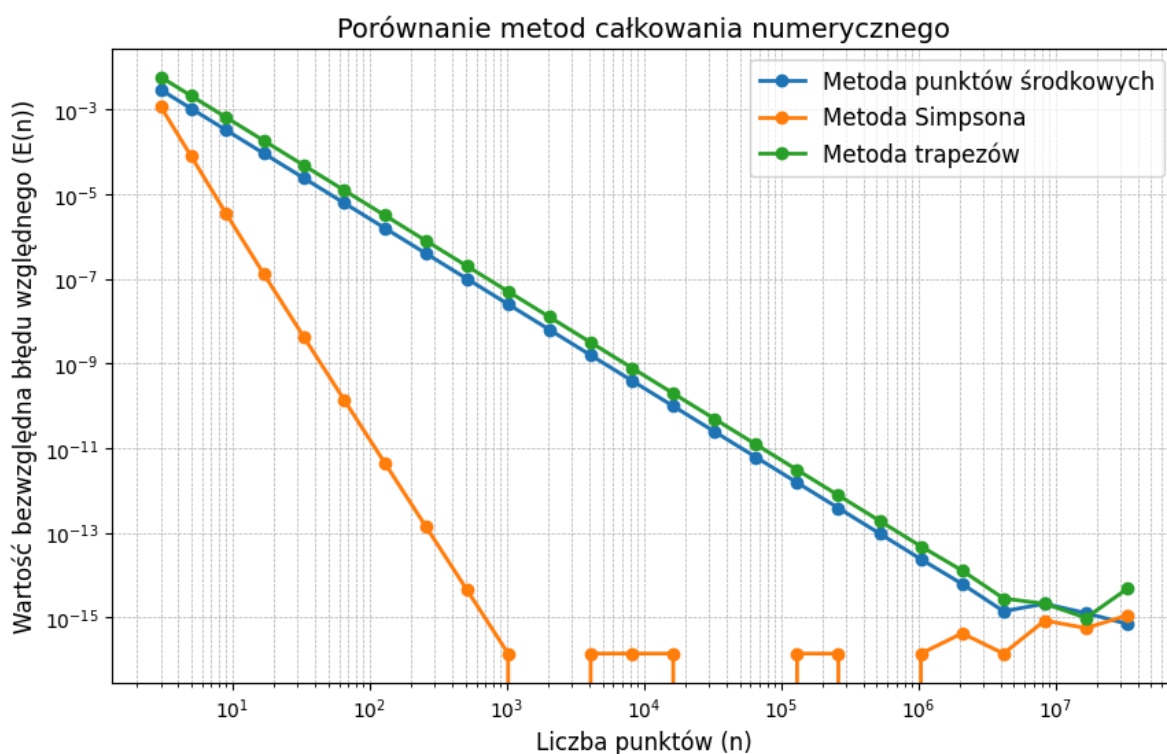
Simpsona: $S(f) = \frac{b-a}{6} [f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)]$,

dla funkcji $f(x) = \frac{4}{1+x^2}$.

Na koniec obliczamy błąd względny każdej metody dla danego m .

Procedurę tę powtarzamy dla m z zakresu od 1 do 25.

Wyniki obliczeń przedstawiono na wykresie:



Wykres 1

Analizując wykres że metody punktów środkowych i trapezów dają bardzo podobne rezultaty, przy czym systematycznie lepiej wypada metoda punktów środkowych. Dodatkowo, dalsze podziały przedziału po przekroczeniu bariery około $n = 6 \cdot 10^6$ punktów nie zmniejszają błędu kwadratury (przeważa błąd numeryczny). Najszybciej błąd względny minimalizuje się jednak dla metody Simpsona, gdzie już przy $n = 10^3$ wynik jest równy reprezentacji liczby π w języku Python (na wykresie wynik osiąga tylko około 10^{-18} , jednak w kodzie odczytujemy że realną wartością jest 0). Odchylenia metod dla większych wartości m wynikają z błędu maszynowego (ϵ_{mach}).

Metoda	Minimalny błąd względny	m dla którego minimalny błąd został osiągnięty	h_{min} (h dla którego minimalny błąd został osiągnięty)
Prostokątów	$7.068 \cdot 10^{-16}$	25	$2.98 \cdot 10^{-8}$
Trapezów	$9.895 \cdot 10^{-16}$	24	$5.96 \cdot 10^{-8}$
Simpsona	0	11	$4.88 \cdot 10^{-4}$

Tabela 1

Uzyskane przez nas wartości h_{min} w przypadku kwadratury prostokątów i trapezów są niższe, a w przypadku metody Simpsona rezultat jest większy od tej wyznaczonej w laboratorium 1 ($2.52 \cdot 10^{-6}$).

Porównamy teraz empiryczne i teoretyczne rzędy zbieżności danych metod. Korzystając ze wzoru:

$$\log E(h) \approx \log C + p \cdot \log h \quad (2)$$

oraz funkcji *polyfit* z biblioteki *numpy* wyliczamy odpowiednie wartości p . Bierzemy pod uwagę tylko ten przedział, gdzie błąd metody przeważa nad błędem numerycznym. Otrzymujemy:

Rząd zbieżności:	Metoda prostokątów	Metoda Simpsona	Metoda trapezów
Empiryczny	1.92	4.83	1.96
Teoretyczny	2	4	2

Dla kwadratur prostokąta oraz trapezu wartości są zgodne z wartościami teoretycznymi. Dla metody simpsona wartość 4.83 jest większa od teoretycznej, która wynosi 4.

Zadanie 2:

W tym zadaniu do przybliżenia wartości całki podanej w treści zadania wykorzystujemy kwadraturę Gaussa-Legendre'a. Dla całki w zakresie $[-1, 1]$ przybliżenie przyjmuje następującą postać:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$$

gdzie:

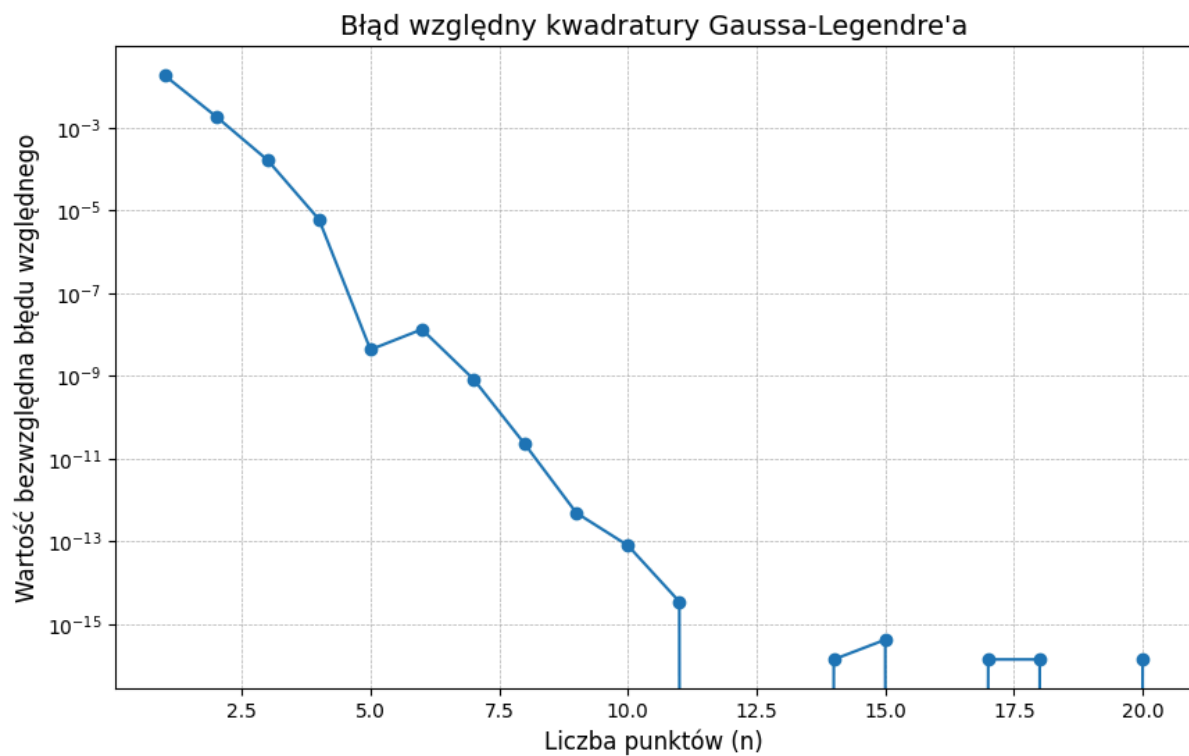
- n jest liczbą wykorzystywanych próbek,
- w_i jest i -tą wagą kwadratury,
- x_i jest i -tym pierwiastkiem wielomianu Legendre'a rzędu n .

Jako że całka funkcji f jest na przedziale $[0, 1]$ wykonujemy zmianę dziedziny zgodnie z podanym wzorem¹:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n w_i f\left(\frac{b-a}{2} z_i + \frac{a+b}{2}\right)$$

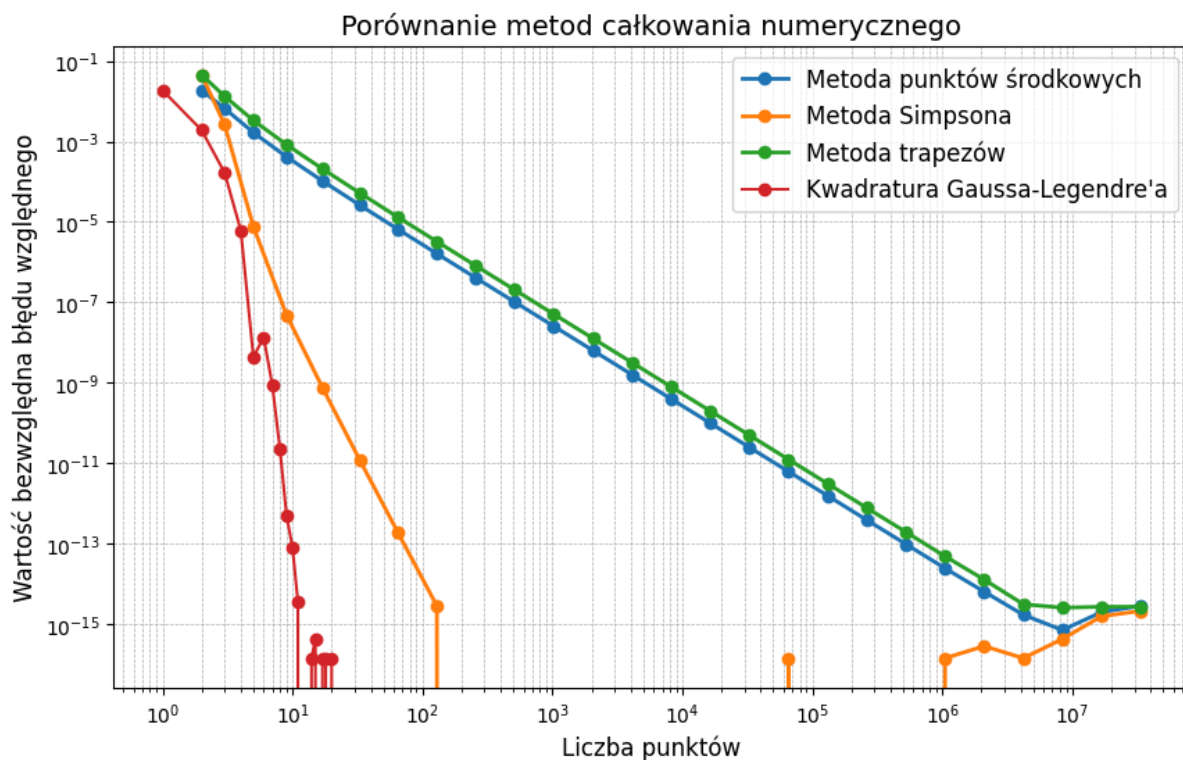
¹ https://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian_quadrature#Change_of_interval

Wagi kwadratury oraz pierwiastki wielomianu Legendre'a wyznaczamy funkcją `numpy.polynomial.legendre.leggauss`.



Wykres 2 - Błąd względny kwadratury Gaussa-Legendre'a

Zgodnie z wykresem 2, dla błędu względnego kwadratury Gaussa-Legendre'a błąd numeryczny zaczyna przeważać nad błędem metody dla $n > 11$.



Wykres 3 - Porównanie metod całkowania numerycznego (z kw. G-L)

Z wykresu 3 widać, że wartość bezwzględna błędu względnego dla kwadratury Gaussa-Legendre'a zmniejsza się szybciej niż dla pozostałych wymienionych metod całkowania numerycznego.

Wnioski:

- Porównanie metod klasycznych:**

Metody punktów środkowych oraz trapezów dają błędy względne porównywalnego rzędu, jednak systematycznie metoda punktów środkowych osiąga lepsze rezultaty. Najmniejszy błąd względny uzyskano przy użyciu metody Simpsona, która ze względu na wyższą dokładność (rzęd zbieżności równy 4) znacznie zdominowała pod względem błędu w porównaniu z metodami o rzędzie zbieżności równym 2.

- Wpływ błędu numerycznego:**

Dalsze zmniejszanie kroku h (przy zwiększaniu liczby węzłów) po osiągnięciu pewnego progu, tj. gdy liczba ewaluacji funkcji przekracza określoną wartość, nie prowadzi do zmniejszenia błędu – dominuje tutaj błąd numeryczny wynikający z ograniczeń reprezentacji zmiennoprzecinkowej. Dla metod prostokątów i trapezów osiągnięto

minimum błędu przy mniejszych wartościach h niż te teoretycznie oczekiwane, co wynika z precyzyjnych ograniczeń maszynowych.

- **Empiryczne rzędy zbieżności:**

Obliczenia empiryczne wykazały, że metody prostokątów i trapezów osiągają rzędy zbieżności bardzo zbliżone do teoretycznych (odpowiednio 1,92 i 1,96 w porównaniu do teoretycznego rzędu 2). Natomiast dla metody Simpsona zauważono nieco wyższy empiryczny rząd zbieżności (około 4,83) niż oczekiwany teoretycznie (4), co może być związane z efektem błędów zaokrągleń lub szczegółami implementacyjnymi wykorzystywanej metody.

- **Kwadratura Gaussa-Legendre'a:**

Metoda Gaussa-Legendre'a okazała się najbardziej skuteczna spośród testowanych metod, wykazując najszybszą redukcję błędu względnego przy stosunkowo niewielkiej liczbie ewaluacji funkcji. Wykresy pokazały, że dla tej metody błąd numeryczny zaczyna dominować dopiero przy stosunkowo wysokich wartościach n , co potwierdza jej przewagę nad tradycyjnymi metodami opartymi na równomiernym podziale przedziału.

Źródła:

- Prezentacje z MS Teams (zespół MOwNiT 2025)
- pythonnumericalmethods.studentorg.berkeley.edu
- https://en.wikipedia.org/wiki/Gauss%E2%80%93Legendre_quadrature
- https://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian_quadrature#Change_of_interval