Data: 19.03.2025

Laboratorium 3

Autorzy: Kosman Mateusz, Ludwin Bartosz

Temat laboratorium:

Celem niniejszego zadania jest analiza numeryczna problemu interpolacji wielomianowej na podstawie danych dotyczących populacji Stanów Zjednoczonych. W sprawozdaniu podejmujemy próbę zbadania stabilności numerycznej wyznaczonych wielomianów interpolacyjnych, a także wpływu wyboru funkcji bazowych oraz precyzji danych na końcowe wyniki interpolacji i ekstrapolacji. Zadanie umożliwia ukazanie teoretycznych i praktycznych aspektów metod interpolacyjnych oraz ich zastosowania w analizie danych historycznych.

Treść:

Dla populacji Stanów Zjednoczonych na przestrzeni lat istnieje dokładnie jeden wielomian ósmego stopnia, który interpoluje powyższe dziewięć punktów, natomiast sam wielomian może być reprezentowany na różne sposoby.

a. Dla każdego z czterech zbiorów funkcji bazowych utwórz macierz Vandermonde'a.
b. Oblicz współczynnik uwarunkowania każdej z powyższych macierzy.
c. Używając najlepiej uwarunkowanej bazy wielomianów, znajdź współczynniki wielomianu interpolacyjnego dla danych z zadania. Narysuj wielomian interpolacyjny.
d. Dokonaj ekstrapolacji wielomianu do roku 1990. Porównaj otrzymaną wartość z prawdziwą wartością dla roku 1990, wynoszącą 248 709 873. Ile wynosi błąd względny ekstrapolacji dla roku 1990?
e. Wyznacz wielomian interpolacyjny Lagrange'a na podstawie 9 węzłów interpolacji podanych w zadaniu. Oblicz wartości wielomianu w odstępach
jednorocznych.
f. Wyznacz wielomian interpolacyjny Newtona na podstawie tych samych węzłów interpolacji i oblicz wartości wielomianu w odstępach jednorocznych.
g. Zaokrąglij dane podane w tabeli do jednego miliona. Na podstawie takich danych wyznacz wielomian interpolacyjny ósmego stopnia.

Porównaj wyznaczone współczynniki z współczynnikami obliczonymi w podpunkcie (c). Wyjaśnij otrzymany wynik. Ile wynosi błąd względny ekstrapolacji dla roku 1990 obliczony przy pomocy tak wyznaczonego wielomianu interpolacyjnego?

Rozwiązanie:

Macierz Vandermonde'a

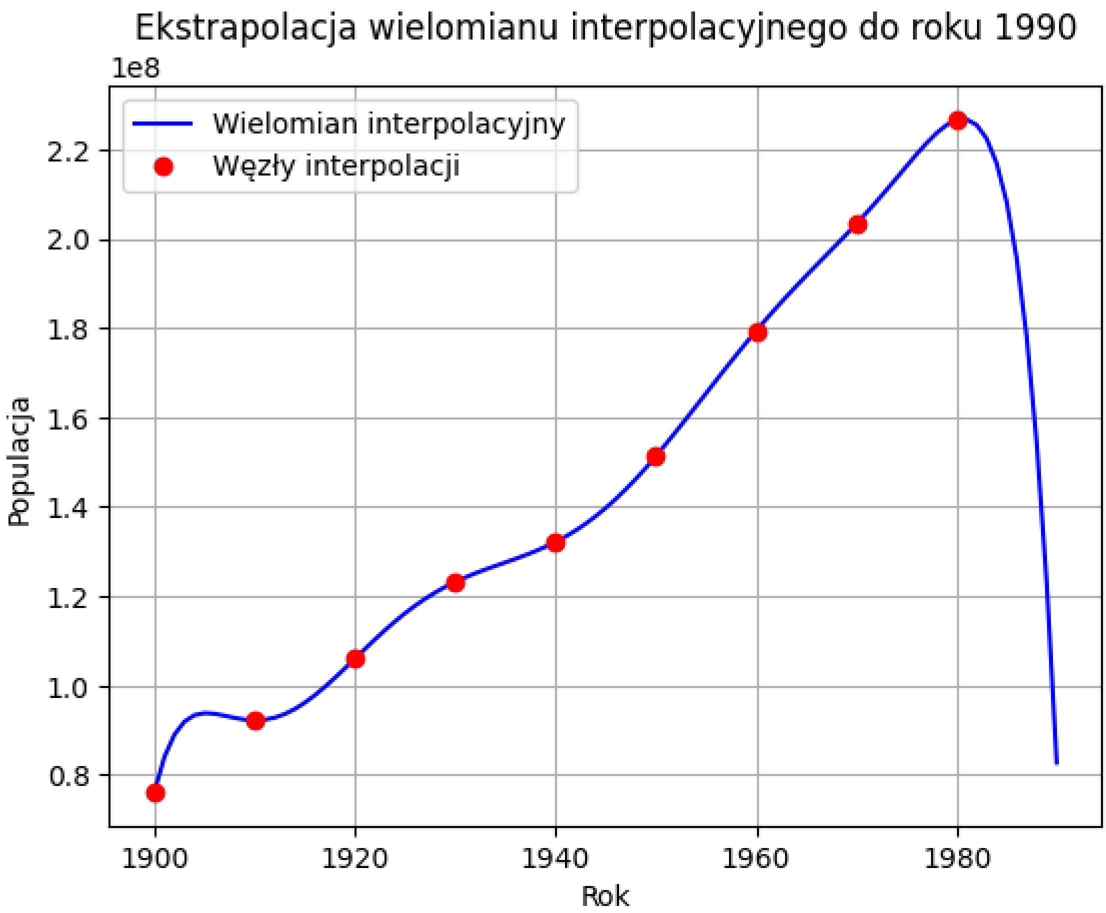
Macierz Vandermonde'a to macierz postaci:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

gdzie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ oznaczają argumenty wielomianu.
Aby wyznaczyć poszczególne macierze dla danej funkcji bazowej za każdą wartość podstawiamy wartość funkcji bazowej dla tego argumentu.
Korzystając następnie z funkcji $numpy.linalg.cond$ obliczamy że najniższy współczynnik uwarunkowania (równy około 1605.44) jest dla funkcji bazowej $\varphi(t) = (\frac{t-1940}{40})^{j-1}$.
Następnie obliczamy współczynniki wielomianu interpolacyjnego rozwiązując równanie:

$$V_{min} \cdot X = Y$$

gdzie V_{min} to najlepiej uwarunkowana macierz Vandermonde'a, X to szukany wektor, a Y to podane wartości populacji USA w konkretnych latach (węzły wielomianu). W tym celu posłużyliśmy się funkcją $np.linalg.solve$.
Następnie używając schematu Hornera obliczamy wartości wielomianu na przedziale $[1900, 1990]$ w odstępach jednorocznych.



Wykres 1

Porównując otrzymany wynik (82749141) z prawdziwym (248709873) dla roku 1990 dostajemy błąd względny na poziomie około 0.67.

Wielomian interpolacyjny Lagrange'a

Zastosujmy teraz wielomian interpolacyjny Lagrange'a. Jest to wielomian, który przechodzi przez zadane punkty (węzły interpolacji) i jest konstruowany jako suma iloczynów funkcji bazowych Lagrange'a, gdzie każda funkcja bazowa odpowiada jednemu punktowi.

Zdefiniujmy $l_j(x)$ jako (nazywaną funkcją bazową Lagrange'a):

$$l_j(x) = \Pi_{0\leq m\leq k,\, m\neq j} \frac{x-x_m}{x_j-x_m}$$

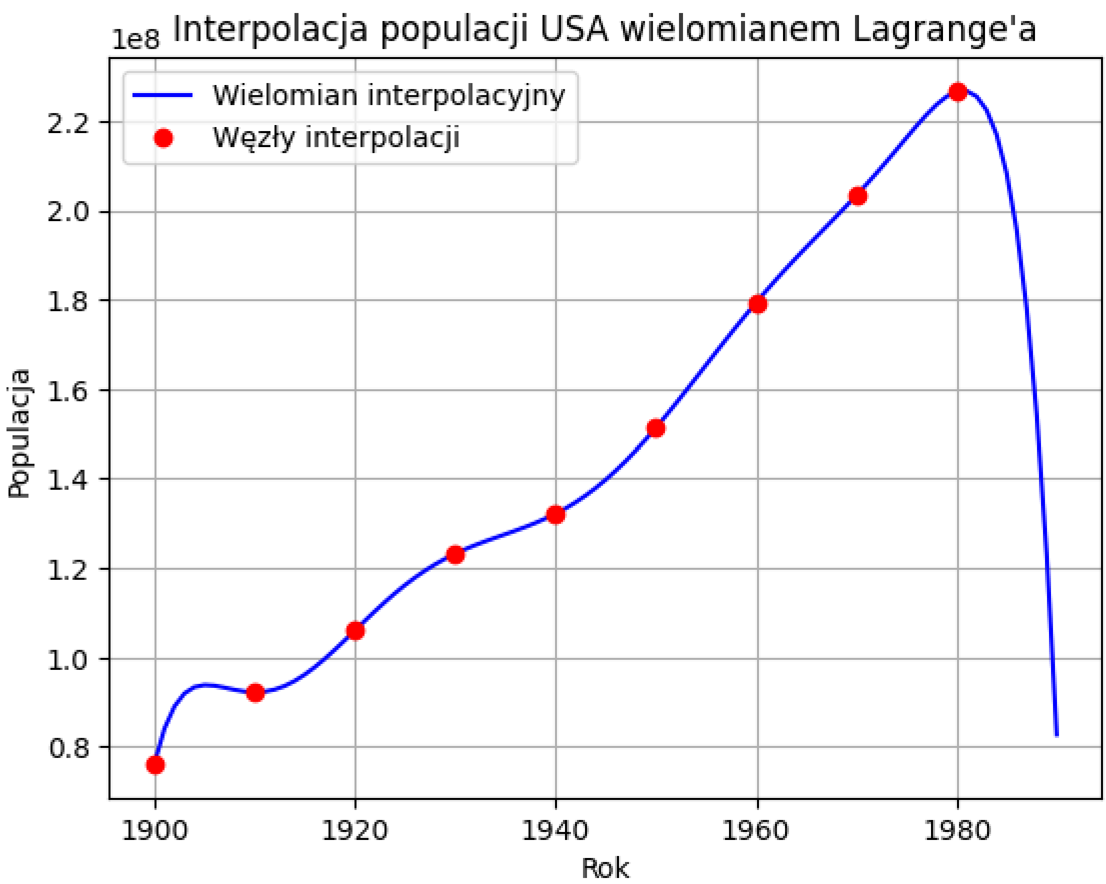
Oznaczmy X oraz X_j jako:

$$X = \{x_m \,|\, 0 \leq m \leq k\},\ X_j = \{x \,|\, x \in X \wedge x \neq x_j\}$$

Widać, że funkcja $l_j(x)$ przyjmuje wartość 0 dla $x \in X_j$ oraz wartość 1 dla $x = x_j$ dla danego j. Stąd ma ona ciekawą własność z perspektywy interpolacji wielomianów. Zauważmy, że $y_j \cdot l_j(x)$ przyjmuje wartość y_j dla $x = x_j$ oraz 0 dla $x \in X_j$. Pozwala to zdefiniować $L(x)$ jako sumę:

$$L(x) = \sum_{j=0}^{k} y_j l_j(x)$$

Wzór jest prawidłowy, ponieważ w przedstawionej sumie dla każdego $x \in X$ tylko jeden składnik jest niezerowy, a wiadomo, że dla każdego $x_j \in X$ niezerowy składnik przyjmuje wartość y_j. Można łatwo wykazać, że $L(x)$ jest wielomianem stopnia k.



Wykres 2

Analizując otrzymany wynik można zaobserwować że otrzymaliśmy bardzo podobny wielomian do tego powyżej. Odczytując ekstrapolowaną wartość dla roku 1990 zauważamy że wartość jest równa wartości otrzymanej w metodzie wyżej (82749141), zatem również błędy względne obu sposobów są takie same.

Wielomian interpolacyjny Newtona

Wykorzystajmy teraz wielomian Newtona. Jest to sposób który pozwala na stopniowe dodawanie kolejnych węzłów interpolacji dzięki zastosowaniu podzielonych różnic. Wielomian interpolacyjny Newtona konstruujemy wyznaczając współczynniki następującego wielomianu:

$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)$

Można zaobserwować, że dla $x \in \{x_0,..., x_j\}$ wielomian $f(x)$ przyjmuje wartość zależną tylko od pierwszych $j + 1$ składników, np.:

$$f(x_0) = a_0$$

$$f(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0)$$

Stąd można wyznaczać współczynniki a_i iterując się rosnąco po wartości i. Robimy to wykorzystując metodę podzielonych różnic. Definiujemy:

$$f[x_k] = f(x_k),$$

$$f[x_k, x_{k-1}, ..., x_1, x_0] = \frac{f[x_k, x_{k-1}, ..., x_2, x_1] - f[x_{k-1}, x_{k-2}, ..., x_1, x_0]}{x_k - x_0}$$

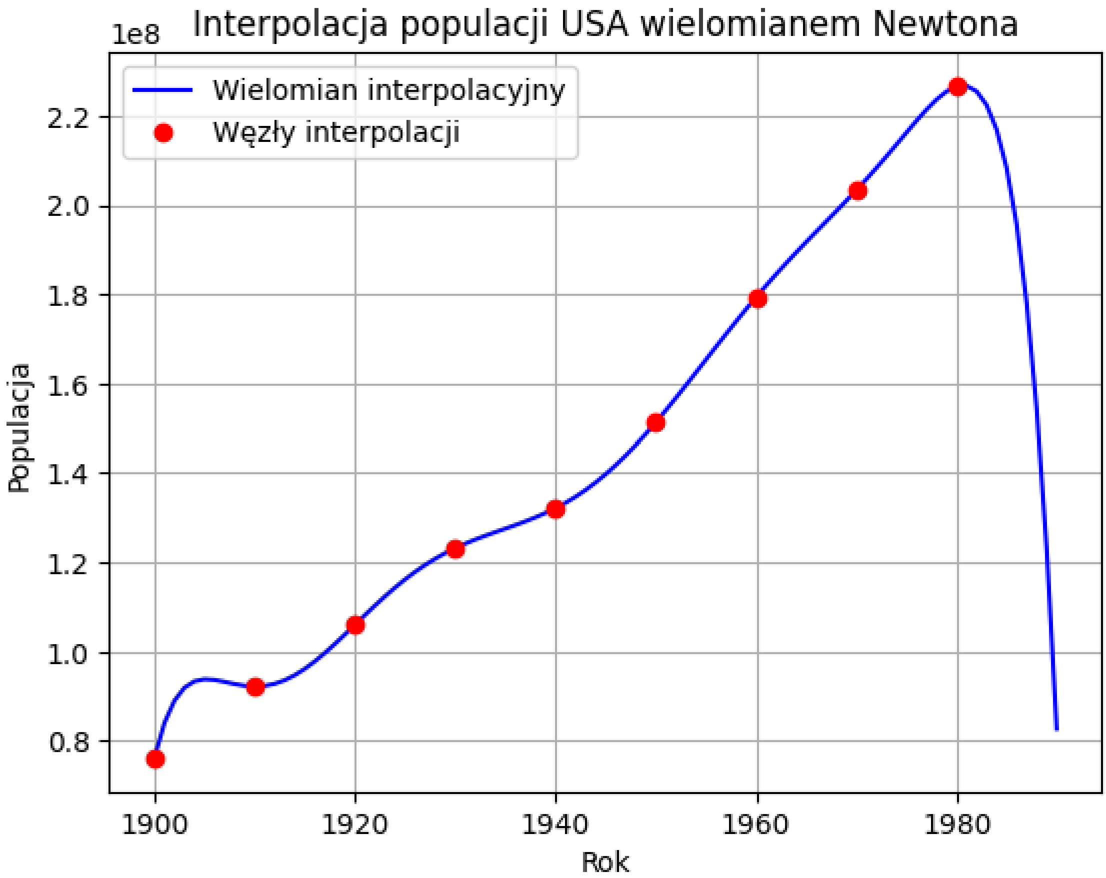
Widać, że:

$$a_k = f[x_k, x_{k-1}, ..., x_1, x_0]$$

Wykorzystujemy podane funkcje do wyznaczania wartości współczynników analogicznie do sposobu przedstawionego na ilustracji:

$$\begin{array}{llllll}
x_0 & y_0 & & & & \\
 & & f[x_1, x_0] & & & \\
x_1 & y_1 & & f[x_2, x_1, x_0] & & \\
 & & f[x_2, x_1] & & f[x_3, x_2, x_1, x_0] & \\
x_2 & y_2 & & f[x_3, x_2, x_1] & & f[x_4, x_3, x_2, x_1, x_0] \\
 & & f[x_3, x_2] & & f[x_4, x_3, x_2, x_1] & \\
x_3 & y_3 & & f[x_4, x_3, x_2] & & \\
 & & f[x_4, x_3] & & & \\
x_4 & y_4 & & & &
\end{array}$$

Wynikiem przeprowadzenia operacji jest wielomian:

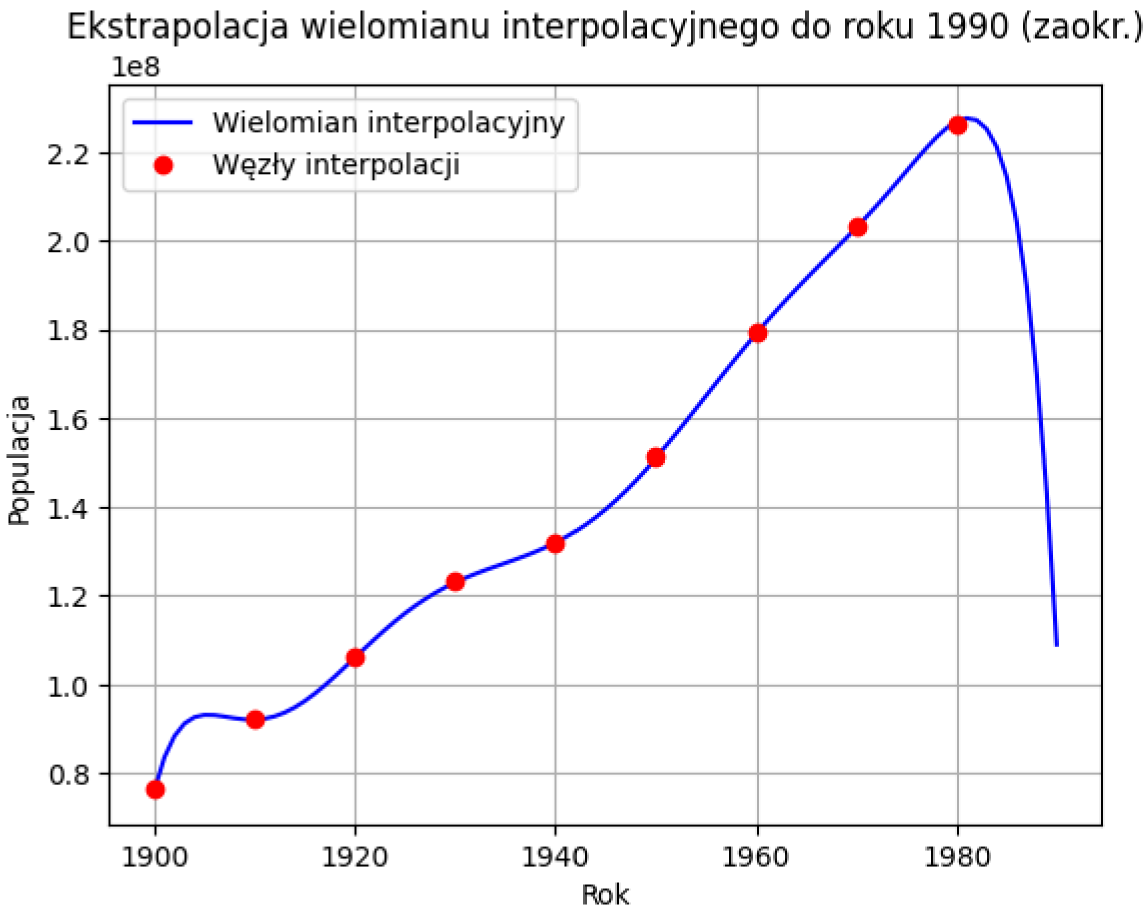


Wykres 3

Tutaj także można dostrzec podobieństwo do powyższych dwóch wykresów. Potwierdza to wartość wielomianu dla roku 1990, która ponownie wynosi 82749141. Ponownie oznacza to tą samą wartość błędu względnego (0.67).

Macierz Vandermonde'a z zaokrągleniem

Podobnie jak w sekcji *Macierz Vandermonde'a* wybieramy funkcję $\varphi(t) = (\frac{t-1940}{40})^{j-1}$ o najniższym współczynniku uwarunkowania.



Wykres 4

Porównując otrzymany wynik (109000000) z prawdziwym (249000000) dla roku 1990 dostajemy błąd względny na poziomie około 0.56. Można zauważyć, że błąd względny dla zaokrąglonych wartości jest mniejszy niż dla niezaokrąglonych; przyczyną tego jest fakt, iż w rozkładzie wartości zaokrąglonych na liczby pierwsze występuje 2^6, co zmniejsza utratę precyzji przy pracy z tymi wartościami.

Wnioski:

- Na poziomie ogólnym, interpolacja wielomianowa stanowi potężne narzędzie do interpolacji danych wewnątrz zadanego przedziału. Jednakże, jej zastosowanie przy ekstrapolacji poza zbiorem znanych węzłów wiąże się z niedokładnymi wynikami.

- Analiza różnych metod interpolacji, takich jak te oparte na macierzy Vandermonde'a, metodzie Lagrange'a oraz metodzie Newtona, wykazuje, że chociaż wszystkie podejścia generują ten sam wielomian interpolacyjny (ponieważ istnieje dokładnie jeden wielomian stopnia n który przechodzi przez n+1 punktów) w obrębie przedziału danych, to różnią się one zarówno pod względem efektywności obliczeniowej, jak i stabilności numerycznej. Metody Lagrange'a i Newtona, operujące w czasie $O(n^2)$, okazują się bardziej wydajne niż podejście oparte na rozwiązywaniu układu równań metodą macierzy Vandermonde'a, której złożoność wynosi $O(n^3)$.

- Na bardziej szczegółowym poziomie, metoda Lagrange'a ujawnia pewne wady, takie jak astabilność numeryczna oraz konieczność przeprowadzenia pełnych obliczeń przy dodaniu kolejnego węzła, co wpływa na jej praktyczność. Pomimo tych ograniczeń, wszystkie badane metody wykazują zbliżoną utratę precyzji.

- Dodatkowo, wyniki sprawozdania podkreślają, że zarówno wybór odpowiedniej bazy funkcji, jak i precyzja danych wejściowych (np. poprzez ich zaokrąglanie) mają kluczowy wpływ na wskaźnik uwarunkowania macierzy oraz ostateczną dokładność interpolacji. Odpowiednie przekształcenie zmiennej znacząco poprawia stabilność obliczeń i zmniejsza błędy przy ekstrapolacji.

Źródła:

- Prezentacje z MS Teams (zespół MOwNiT 2025)
- pythonnumericalmethods.studentorg.berkeley.edu