

Laboratorium 10

Autorzy: Kosman Mateusz, Ludwin Bartosz

Temat laboratorium:

Celem laboratorium jest analiza dynamiki populacji w modelu drapieżca–ofiara opisanym układem równań różniczkowych Lotki-Volterry. Badana jest skuteczność i dokładność różnych metod numerycznych całkowania układów ODE, w tym metod Eulera (jawnej, niejawnej i półjawnej) oraz metody Rungego–Kutty czwartego rzędu. W dalszej części laboratorium przeprowadzono identyfikację parametrów modelu na podstawie danych rzeczywistych oraz analizę zachowania niezmiennika układu, co pozwala na ocenę stabilności i poprawności przyjętych metod.

Treść:

Dynamika układu drapieżca-ofiara opisana jest modelem Lotki-Volterry:

$$x' = x(\alpha_1 - \beta_1 y) \quad (1)$$

$$y' = y(-\alpha_2 + \beta_2 x) \quad (2)$$

Znaczenie symboli jest następujące:

$x(t)$ gęstość ofiar (np. liczba zajęcy na jednostkę powierzchni) w zależności od czasu

$y(t)$ gęstość drapieżców (np. liczba rysi na jednostkę powierzchni) w zależności od czasu

α_1 współczynnik przyrostu ofiar (np. zajęcy) w izolowanym środowisku

α_2 współczynnik ubywania drapieżców (np. rysi) w izolowanym środowisku

β_1 współczynnik intensywności kontaktów między drapieżcami a ofiarami, kończących się upolowaniem ofiary

β_2 współczynnik opisujący wpływ obecności ofiar na współczynnik przyrostu drapieżców

Przyjmij wartości początkowe: $x(0) = 20$, $y(0) = 20$ oraz następujące wartości parametrów: $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 0.5$, $\beta_2 = 0.02$. Całkując od $t = 0$ do $t = 80$, rozwiąż powyższy układ równań:

- jawną metodą Eulera

$$y_{k+1} = y_k + h_k f(t_k, y_k)$$

- niejawną metodą Eulera

$$y_{k+1} = y_k + h_k f(t_{k+1}, y_{k+1})$$

- półjawną metodę Eulera

$$x_{n+1} = x_n + h_n f(x_n, y_{n+1})$$

$$y_{n+1} = x_n + h_n g(x_n, y_{n+1})$$

lub

$$x_{n+1} = x_n + h_n f(x_{n+1}, y_n)$$

$$y_{n+1} = x_n + h_n g(x_{n+1}, y_n)$$

metodą Rungego-Kutty czwartego rzędu (RK4)

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h_k}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \text{ gdzie}$$

$$k_1 = f(t_k, y_k)$$

$$k_2 = f(t_k + h_k/2, y_k + h_k k_1/2)$$

$$k_3 = f(t_k + h_k/2, y_k + h_k k_2/2)$$

$$k_4 = f(t_k + h_k, y_k + h_k k_3)$$

(a) Na wspólnym rysunku narysuj wykresy liczebności obu populacji w zależności od czasu. Na osobnym rysunku narysuj portret fazowy układu, tj. wykres trajektorii punktu $(x(t), y(t))$ w funkcji czasu. Podaj jego fizyczną interpretację.

(b) Dla jakich warunków początkowych liczebności populacji nie ulegają zmianie? Znajdź punkty stacjonarne powyższego układu, rozwiązując układ równań:

$$x' = x(\alpha_1 - \beta_1 y) \quad (3)$$

$$y' = y(-\alpha_2 + \beta_2 x) \quad (4)$$

(c) Czy zachowany jest niezmiennik:

$$H(x, y) = \beta_2 x + \beta_1 y - \alpha_2 \ln(x) - \alpha_1 \ln(y) \quad (5)$$

Na wspólnym rysunku przedstaw wykresy tego niezmiennika znalezione przez każdą metodę numeryczną.

(d) Wiemy, że na przestrzeni lat populacja rysy i zajęcy kształtowała się wg danych przedstawionych w pliku LynxHare.txt.

Wybierz jedną z powyższych metod numerycznych i oszacuj prawdziwe wartości współczynników $\theta = [\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2]$. W tym celu wykonaj minimalizację funkcji kosztu. Jako funkcję kosztu wykorzystaj sumę kwadratów reszt (ang. residual sum of squares):

$$L(\theta) = \sum_{i=0}^T (l_i - \hat{l}_i)^2 + (h_i - \hat{h}_i)^2$$

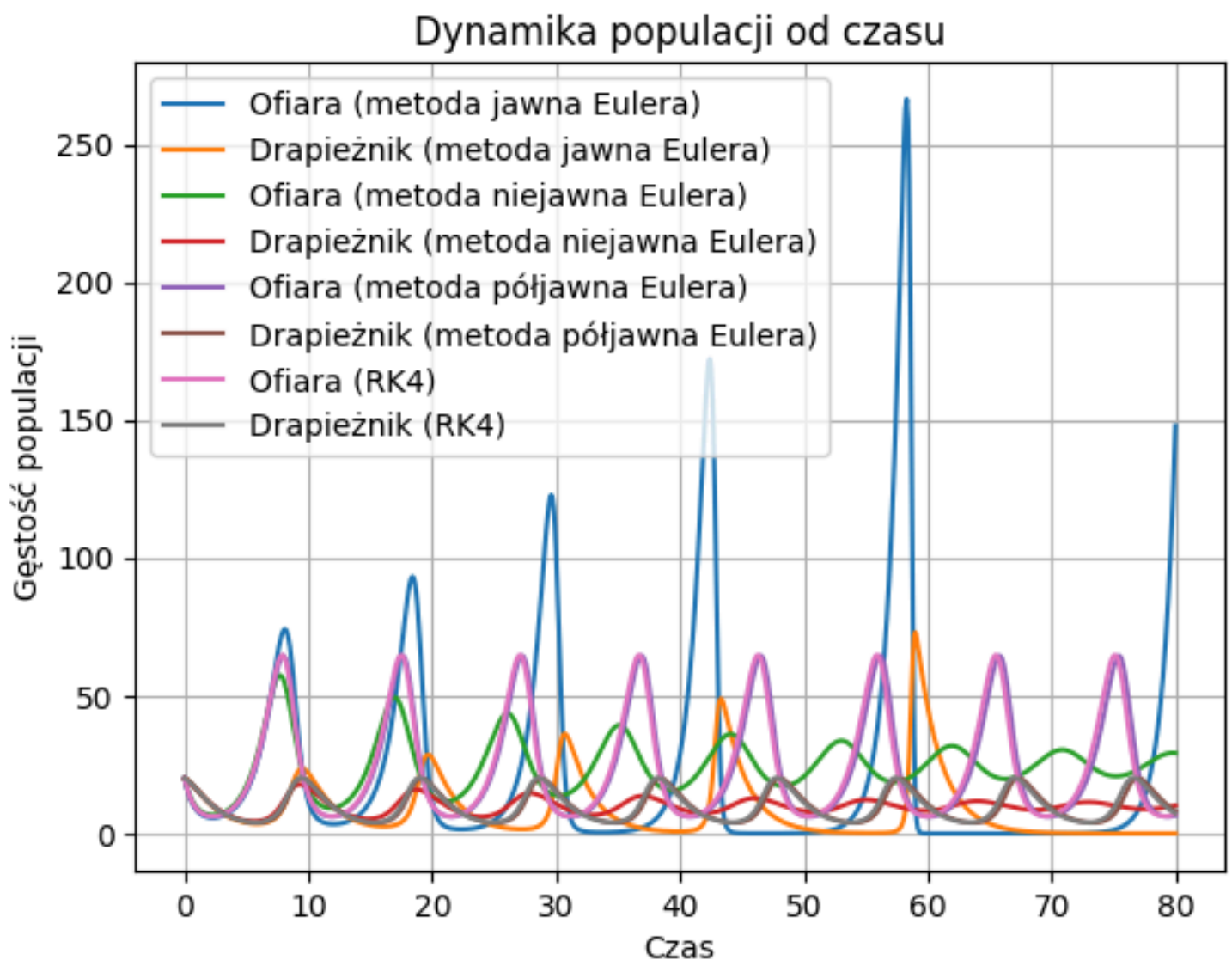
gdzie l_i oznacza prawdziwą liczbę rysi, \hat{l}_i oznacza liczbę rysi wyznaczonych metodą numeryczną, a h_i oznacza prawdziwą liczbę zajęcy, \hat{h}_i oznacza liczbę zajęcy wyznaczonych metodą numeryczną. Ponieważ nie znamy gradientu $\nabla_{\theta} L(\theta)$, do minimalizacji wykorzystaj metodę Nelder-Meada, która nie wymaga informacji o gradiencie.

Powtórz obliczenia, tym razem jako funkcję kosztu wykorzystując:

$$L(\theta) = - \sum_{i=0}^T l_i \ln \hat{l}_i - \sum_{i=0}^T (\ln \hat{h}_i + \sum_{i=0}^T \hat{l}_i + \sum_{i=0}^T \hat{h}_i$$

Rozwiązanie:

Podpunkt a)



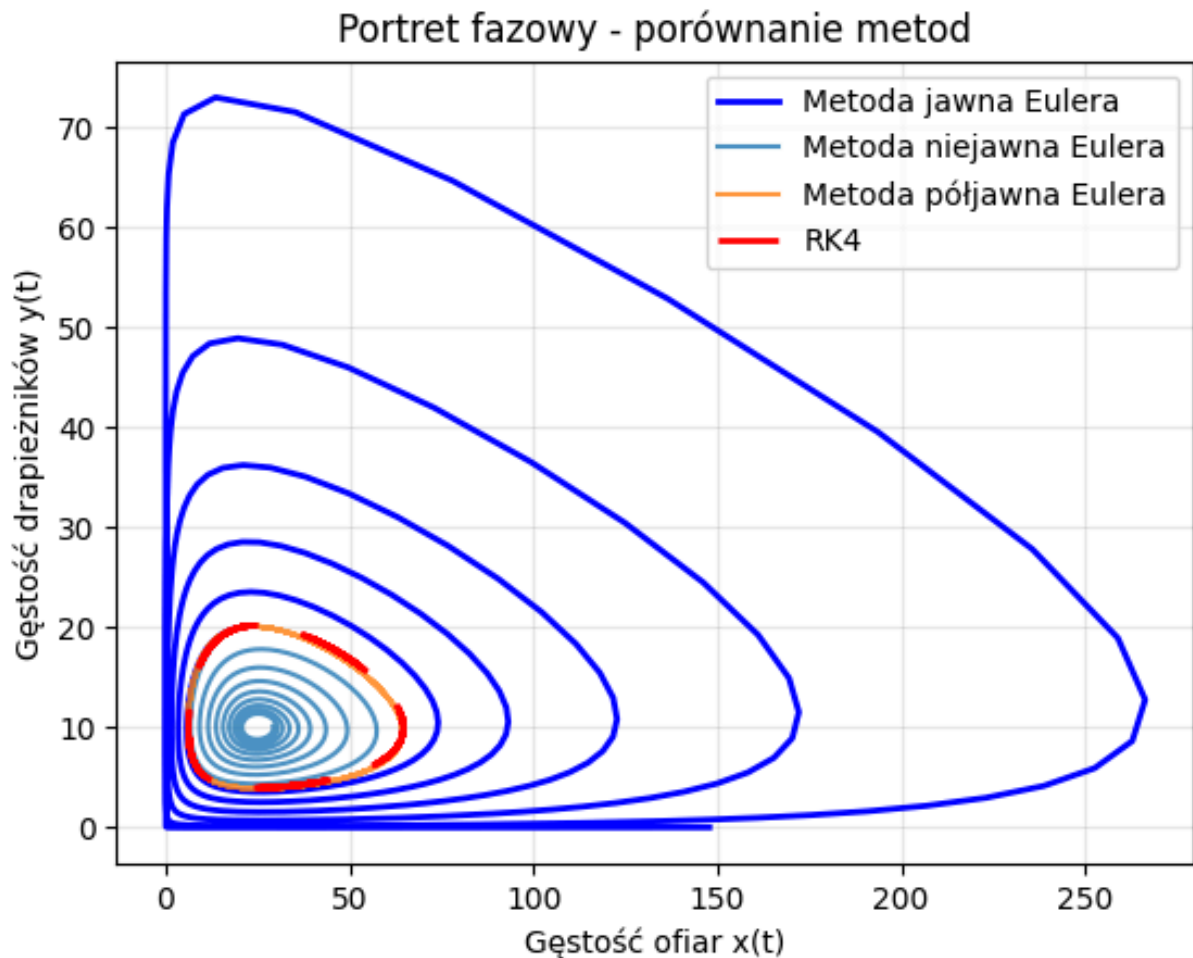
Wykres 1

Metoda jawna Eulera charakteryzuje się niską dokładnością i dużą niestabilnością numeryczną, zwłaszcza przy dłuższych przedziałach czasu lub większych krokach całkowania. Już przy umiarkowanej długości symulacji (do $t=80$) pojawiają się znaczne odchylenia.

Metoda niejawna Eulera jest znacznie bardziej stabilna. Pozwala ona na uniknięcie eksplozji błędów i zachowuje poprawną strukturę oscylacyjną populacji.

Metoda półjawna Eulera stanowi kompromis między dwoma powyższymi. Zakłada ona obliczenie jednego z równań w sposób niejawny (w tym przypadku dla drapieżników), co poprawia stabilność względem wersji jawnej, przy jednoczesnym zmniejszeniu kosztu obliczeniowego względem pełnej wersji niejawnej.

Najlepsze rezultaty, zarówno pod względem dokładności, jak i stabilności, daje metoda Rungego–Kutty czwartego rzędu (RK4). Dzięki czterem punktom próbkowania w każdym kroku metoda ta bardzo dobrze odwzorowuje okresowy charakter zmian populacji, bez znaczącej kumulacji błędów nawet przy dłuższej symulacji.



Wykres 2

(linia odpowiedzialna za RK4 jest przerywana aby było widać poniższą reprezentującą metodę półjawną Eulera)

Trajektoria w przestrzeni fazowej wyraźnie ukazuje zamkniętą orbitę. Pokazuje to naprzemienny wzrost i spadek obu populacji: wzrost liczby ofiar sprzyja przyrostowi drapieżników, a ten z kolei prowadzi do spadku liczby ofiar, co w dalszym czasie ogranicza też liczebność drapieżników, i cykl się powtarza.

Podpunkt b)

Przypadek 1: $x = 0$ lub $y = 0$

Punkt $(0, 0)$ - wymieranie obu populacji

Przypadek 2: $\alpha_1 - \beta_1 y = 0$ i $-\alpha_2 + \beta_2 x = 0$

$\alpha_1 - \beta_1 y = 0 \rightarrow y = \alpha_1 / \beta_1 = 1.0 / 0.1 = 10.0$

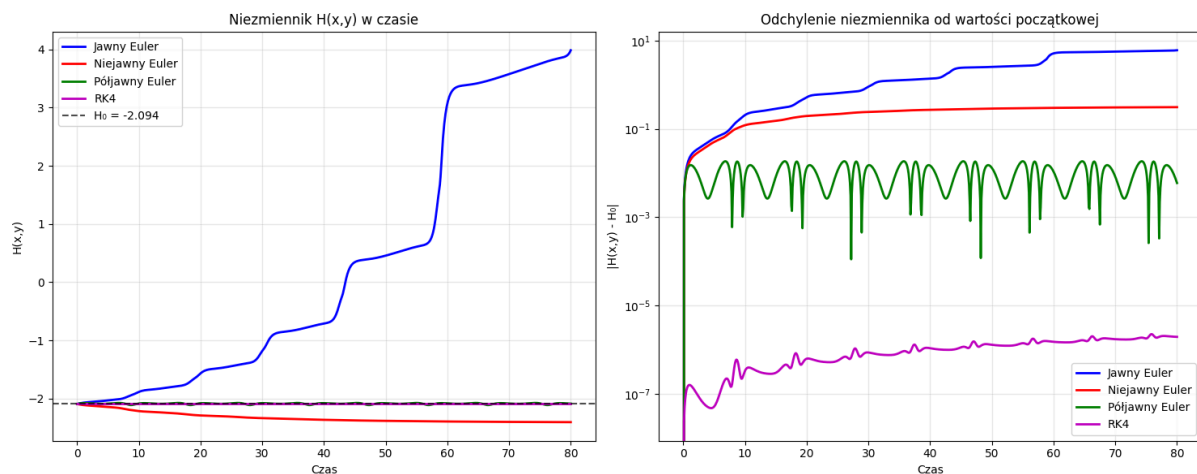
$-\alpha_2 + \beta_2 x = 0 \rightarrow x = \alpha_2 / \beta_2 = 0.5 / 0.02 = 25.0$

Punkt równowagi: $(25.0, 10.0)$

W punkcie równowagi populacje nie ulegają zmianie.

Jest to centrum układu - punkt wokół którego oscylują trajektorie.

Podpunkt c)



Wykres 3

Niezmiennik $H(x,y) = \beta_2 x + \beta_1 y - \alpha_2 \ln(x) - \alpha_1 \ln(y)$

Wartość początkowa $H_0 = -2.093598$

Odchylenia niezmiennika na końcu symulacji ($t=80.0$):

Jawny Euler: $|\Delta H| = 6.078585$

Niejawny Euler: $|\Delta H| = 0.312027$

Półjawny Euler: $|\Delta H| = 0.005963$

RK4: $|\Delta H| = 0.000002$

Wnioski:

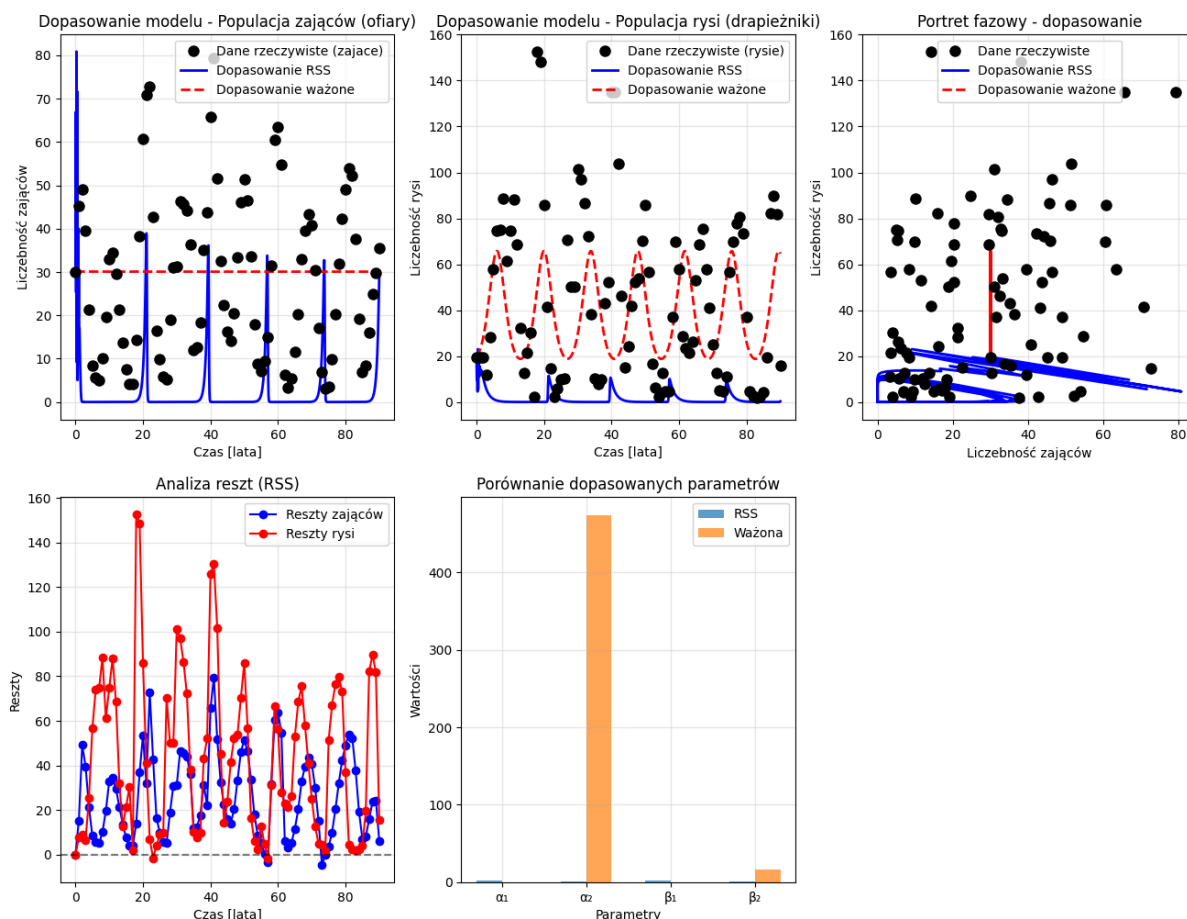
- RK4 najlepiej zachowuje niezmiennik (najmniejszy błąd)
- Jawny Euler wprowadza największe błędy
- Niezmiennik reprezentuje 'energię' układu Hamiltona

Podpunkt d)

Wykresy jakości dopasowania

W tym podpunkcie szacujemy prawdziwe wartości współczynników $\theta = [\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2]$ modelu Lotki-Volterry i analizujemy dopasowanie modelu.

Dopasowania dokonujemy metodą Nelder-Meada.



Wykres 4

Analiza jakości dopasowania

Współczynnik determinacji R^2 :

- Populacja zająć: -1.9257
- Populacja rysie: -1.5033

Błąd średniokwadratowy (RMSE):

- Populacja zająć: 32.09
- Populacja rysie: 57.23

Średni błąd bezwzględny (MAE):

- Populacja zająć: 26.13

- Populacja rysie: 44.10

Interpretacja biologiczna parametrów:

- $\alpha_1 = 1.7236$ - tempo wzrostu zająćów bez drapieżników
- $\alpha_2 = 0.6990$ - tempo wymierania rysie bez ofiar
- $\beta_1 = 1.7293$ - wpływ rysie na śmiertelność zająćów
- $\beta_2 = 0.4290$ - wpływ zająćów na rozród rysie

Punkt równowagi dla dopasowanych parametrów:

- Zające: 1.6
- Rysie: 1.0

Wnioski:

- Model Lotki–Volterry trafnie odtwarza cykliczną dynamikę populacji drapieżca–ofiara, co potwierdzają zamknięte orbity w portrecie fazowym.
- Metoda jawna Eulera jest niestabilna i kumuluje błędy, uniemożliwiając jej użycie do długich symulacji. Niejawna i półjawna Euler oferują lepszą stabilność, przy czym półjawna stanowi kompromis między dokładnością a kosztem obliczeniowym uzyskując większą stabilność.
- Rungego–Kutty 4. rzędu (RK4) daje najwyższą dokładność i najwierniej zachowuje niezmiennik układu.
- Punkt stacjonarny $(x,y)=(25,10)$ oznacza stabilne współistnienie obu gatunków wokół jednej wartości równowagi.
- Estymacja parametrów metodą Neldera–Meada na podstawie danych LynxHare dostarczyła sensownych wartości, lecz ujemne R^2 wskazują na ograniczoną trafność modelu w tej formie, co sugeruje potrzebę uwzględnienia dodatkowych czynników (np. środowiskowych).

Źródła:

- Prezentacje z MS Teams (zespół MOwNiT 2025)
- pythonnumericalmethods.studentorg.berkeley.edu
- https://en.wikipedia.org/wiki/Lotka%E2%80%93Volterra_equations