Exercices de programmation

February 3, 2017

1 Vu en classe

Dans cet exerice, le but est de résoudre le même modèle que celui vu lors du cours mais en utilisant une méthode d'interpolation linéraire pour trouver la fonction valeur. Pour rappel, nous cherchons à résoudre :

$$\max \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \beta V\left(t+1, w_{t+1}\right)$$

s.c.

$$w_{t+1} = R\left(w_t + y_t - c_t\right)$$

$$w_{t+1} \geq 0$$

pour chaque $t \in [T, T-1, ..., 1, 0]$ en commençant par la dernière période (T) et en revenant en arrière dans le temps.

L'algorithme que nous avons vu ensemble était le suivant :

1. pour chaque $t \in [T, T-1, ..., 1, 0]$
2. pour chaque $w_t \in [\tilde{w}_0, ..., \tilde{w}_{nw}]$ (nw est le nombre de points sur la grille)
3. nous choisissons $w_{t+1}^{\star} \in [\tilde{w}_0, ..., \tilde{w}_{nw}]$ tel que

$$w_{t+1}^{\star} = \arg\max_{w_{t+1}} \frac{\left(w_t + y_t - \frac{w_{t+1}}{R}\right)^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \beta V\left(t+1, w_{t+1}\right)$$

   et

$$w_{t+1}^{\star} \geq 0$$

4. ce qui nous permet de trouver la fonction valeur et la règle de décision relative à la consommation $c\left(t, w_t\right)$

$$V\left(t, w_t\right) = \frac{\left(w_t + y_t - \frac{w_{t+1}^{\star}}{R}\right)^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \beta V\left(t+1, w_{t+1}^{\star}\right)$$

$$c\left(t, w_t\right) = w_t + y_t - \frac{w^{\star}_{t+1}}{R}$$

Vérifiez que vous comprenez bien que l'algorithme ci-dessus correspond au code que nous avons écrit en classe. Ce sera nécessaire pour bien comprendre comment écrire le code pour résoudre le modèle avec une méthode d'interpolation.

2 Autre méthode

On peut cependant utiliser un autre algorithme pour résoudre ce problème.

1. pour chaque $t \in [T, T-1, ..., 1, 0]$
2. pour chaque $w_t \in [\tilde{w}_0, ..., \tilde{w}_{nw-1}]$ (nw est le nombre de points sur la grille)
3. nous choisissons $c^{\star}_t \in [\tilde{c}_0, ..., \tilde{c}_{nc-1}]$ (nc est le nombre de points sur la grille de la consommation) tel que

$$c^{\star}_t = \arg\max_{c_t} \frac{\left(c_t\right)^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \beta V\left(t+1, R\left(w_t + y_t - c_t\right)\right)$$

   et

$$R\left(w_t + y_t - c_t\right) \geq 0$$

4. ce qui nous permet de trouver la fonction valeur et la règle de décision relative à la consommation $c\left(t, w_t\right)$

$$V\left(t, w_t\right) = \frac{\left(c^{\star}_t\right)^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \beta V\left(t+1, R\left(w_t + y_t - c^{\star}_t\right)\right)$$

$$c\left(t, w_t\right) = c^{\star}_t$$

Comme vous pouvez le voir, la différence ici se présente au niveau de l'étape 3. Auparavant, pour un w_t donné, nous faisions varier w_{t+1} (ce qui faisait varier c_t), nous calculions à chaque fois $\frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \beta V\left(t+1, w_{t+1}\right)$ et prenions le maximum.

Désormais, pour un w_t donné, nous faisons varier c_t (ce qui fait varier w_{t+1}) - et non plus w_{t+1} directement - et nous calculons à chaque fois $\frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \beta V\left(t+1, w_{t+1}\right)$ et prenons le maximum. Ce petit changement amène une difficulté supplémentaire. Celle-ci apparaît quand nous devons calculer pour chacun des c_t de notre grille de consommation $[\tilde{c}_0, ..., \tilde{c}_{nc-1}]$:

$$\frac{\left(c_t\right)^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \beta V\left(t+1, R\left(w_t + y_t - c_t\right)\right)$$

En effet, $V\left(t+1, w_{t+1}\right)$ est seulement connue aux points $w_{t+1} \in [\tilde{w}_0, ..., \tilde{w}_{nw-1}]$, or il est peu probable que quand nous faisons notre boucle à travers $[\tilde{c}_0, ..., \tilde{c}_{nc-1}]$, pour un w_t donné, $w_{t+1} = R\left(w_t + y_t - c_t\right) \in [\tilde{w}_0, ..., \tilde{w}_{nw-1}]$. Pour trouver $V\left(t+1, R\left(w_t + y_t - c_t\right)\right)$, il va donc falloir utiliser une méthode d'interpolation. Nous allons utiliser une méthode d'interpolation linéaire comme vue en classe.

3 Exercice

Votre travail est de résoudre le modèle vu en classe en utilisant l'algorithme de la partie 2. Ci-dessous, vous trouvez une version un peu plus détaillée de l'algorithme pour vous aider.

1. pour chaque $t \in [T, T-1, ..., 1, 0]$
2. pour chaque $w_t \in [\tilde{w}_0, ..., \tilde{w}_{nw-1}]$ (nw est le nombre de points sur la grille)
3. pour chaque $c_t \in [\tilde{c}_0, ..., \tilde{c}_{nc-1}]$ (nc est le nombre de points sur la grille de la consommation) :
   (a) calculer $w_{t+1} = R\left(w_t + y_t - c_t\right)$
   (b) vérifier si $w_{t+1} \geq 0$, si c'est le cas :
      i. si $w_{t+1} \leq \tilde{w}_{nw-1}$: trouver $\tilde{w}_i$ et $\tilde{w}_{i+1}$ ($i \in [0, nw-2]$) tel que $\tilde{w}_i \leq w_{t+1} \leq \tilde{w}_{i+1}$:
         A. calculer les paramètres de l'équation de la droite passant par les points $\left(\tilde{w}_i, V\left(t+1, \tilde{w}_i\right)\right)$ et $\left(\tilde{w}_{i+1}, V\left(t+1, \tilde{w}_{i+1}\right)\right)$
         B. Utiliser ces paramètres pour obtenir une approximation de $V\left(t+1, R\left(w_t + y_t - c_t\right)\right)$
         C. calculer $\frac{(c_t)^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \beta V\left(t+1, R\left(w_t + y_t - c_t\right)\right)$ et regarder si la valeur trouvée est plus grande que le maximum trouvé auparavant, si oui mettre à jour la value function.
      ii. si $w_{t+1} > \tilde{w}_{nw-1}$, on va extrapoler. Dans ce cas :
         A. calculer les paramètres de l'équation de la droite passant par les points $\left(\tilde{w}_{nw-2}, V\left(t+1, \tilde{w}_{nw-2}\right)\right)$ et $\left(\tilde{w}_{nw-1}, V\left(t+1, \tilde{w}_{nw-1}\right)\right)$
         B. Utiliser ces paramètres pour obtenir une approximation de $V\left(t+1, R\left(w_t + y_t - c_t\right)\right)$
         C. calculer $\frac{(c_t)^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \beta V\left(t+1, R\left(w_t + y_t - c_t\right)\right)$ et regarder si la valeur trouvée est plus grande que le maximum trouvé auparavant, si oui mettre à jour la value function.
4. ce qui nous permet de trouver la fonction valeur et la règle de décision relative à la consommation $c\left(t, w_t\right)$

$$V\left(t, w_t\right) = \frac{\left(c_t^{\star}\right)^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \beta V\left(t+1, R\left(w_t + y_t - c_t^{\star}\right)\right)$$

$$c\left(t, w_t\right) = c_t^{\star}$$

Utiliser les mêmes paramètres que dans le code vu en classe que je vous ai envoyé et la même grille de richesse mais avec 30 points. Définissez votre grille de consommation comme $np.linspace(np.max(y)/20, np.max(y) * 10, 100)$. Bon courage !