КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК ТА КІБЕРНЕТИКИ

КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

Лабораторна робота №1 з курсу "Чисельні методи математичної фізики":

"Розв'язання граничної задачі методом безпосередньої заміни диференціальних похідних частковими"

Студент 4-го курсу
групи ОМ
Чан Ха Ву

Викладач:
к.ф.-м.н., доцент
Риженко А. І.

Київ, 01 січня 2017

1 Постановка задачі

Методом безпосередньої заміни диференціальних похідних частковими знайти розв'язок граничної задачі для звичайного диференціального рівняння другого порядку

$$-\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) + p(x)\frac{du}{dx} + q(x)u = f(x), \quad a < x < b \tag{1.1}$$

з наступними крайовими умовами третього роду

$$\begin{aligned} -k(x)\frac{d}{dx}u(x) + \alpha_1 u(x) = \mu_1(x), \quad x = a \\ k(x)\frac{d}{dx}u(x) + \alpha_2 u(x) = \mu_2(x), \quad x = b \end{aligned} \tag{1.2}$$

де $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$. Треба побудувати графік для наближеного розв'язку та апроксимизації. Порівняти з точним (аналітичним) розв'язком.

2 Точний розв'язок

При наступному вигляді функції k, p та q:

$$\begin{aligned} k(x) = k_1 cos(k_2 x) + k_3, \quad k(x) > 0 \\ p(x) = p_1 sin(p_2 x) + p_3, \quad p(x) > 0 \\ q(x) = q_1 cos(q_2 x) + q_3, \quad q(x) > 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Нехай функція f набуває наступний вигляд:

$$\begin{aligned} f(x) = k_1 k_2 m_1 m_2 \cos(m_2 x)\sin(k_2 x) + m_1 m_2^2 \left(k_1\cos(k_2 x) + k_3\right)\sin(m_2 x) + \\ + p_1 m_1 m_2 \cos(m_2 x)\sin(p_2 x) + p_3 m_1 m_2 \cos(m_2 x) \end{aligned} \tag{2.2}$$

та нехай коефіцієнти μ_1, μ_2 дорівнюють

$$\begin{aligned} \mu_1 = k(x)\frac{d}{dx}\left(m_1 sin(m_2 x) + m_3 cos(m_4 x) + m_5\right)(a) - \\ -\alpha_1\left(m_1 sin(m_2 a) + m_3 cos(m_4 a) + m_5\right) \\ \mu_2 = -k(x)\frac{d}{dx}\left(m_1 sin(m_2 x) + m_3 cos(m_4 x) + m_5\right)(b) - \\ -\alpha_2\left(m_1 sin(m_2 b) + m_3 cos(m_4 b) + m_5\right) \end{aligned} \tag{2.3}$$

У такому випадку, точний (аналітичний) розв'язок задачі (1.1) набуває наступний вигляд:

$$u(x) = m_1 sin(m_2 x) + m_3 cos(m_4 x) + m_5 \tag{2.4}$$

3 Теоретичні відомості

На відрізку $[a,b]$ введемо рівномірну сітку $\overline{\omega}_h = \{x_i = a + ih, i = 0, 1, \dots, n\}$ з шагом $h = (b-a)/n$. Назвемо цю сітку основною. Розв'язок задачі (1.1) з крайовими умовами (1.2), функціональні коєфіцієнти та крайові значення яких набувають вигляд (2.1), (2.2) та (2.3), будемо щукати у вигляді сіткової функції $y_i = y(x_i)$, заданої на точках сітки $\overline{\omega}_h$.

3.1 Апроксимація диференціального рівняння різницевим

Позначимо через k_i, p_i, q_i, f_i значення функції $k(x), p(x), q(x), f(x)$ у точках x_i однорідної сітки $\overline{\omega}_h$. Замінимо похідні в рівняння (1.1) скінченно-різницевими виразами:

$$(k_{i+\frac{1}{2}} y_{\overline{x},i})_{x,i} + p_i y_{\overset{\circ}{x}} + q_i y_i = f_i \tag{3.1}$$

або, у розгорнутому вигляді

$$-\left(k_{i+\frac{1}{2}} \frac{y_{i+1} - y_i}{h^2} - k_{i-\frac{1}{2}} \frac{y_i - y_{i-1}}{h^2}\right) + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i \tag{3.2}$$

де $k_{i+\frac{1}{2}} = k(x_i + \frac{h}{2})$ та $i = 1, 2, \dots n-1$. Перегруппуємо коєфіцієнти при змінних $y_0, y_1, \dots y_n$ та запишемо рівняння (3.2) у вигляді:

$$A_i y_{i-1} + B_i y_i + Ci y_{i+1} = G_i, i = 1, 2, \dots n. \tag{3.3}$$

звідси

$$A_i = -k_{i+\frac{1}{2}} - \frac{h}{2} p_i, \quad B_i = k_{i+\frac{1}{2}} + k_{i-\frac{1}{2}} + h^2 q_i, \quad C_i = -k_{i+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} p_i. \tag{3.4}$$

Нескладно переконатись, що така різницева схема апроксимує задачу (1.1) з похибкою другого порядку $O(h^2)$. Також, можна показати що схема збігається до точного розв'язку у класі гладких функції коефіцієнтів. Ідея для доведення цього факту можна знайти у [2, с. 106–108].

3.2 Апроксимація крайових умов

Помітимо, що у рівнянні (3.4) не вистачає два відношення для пощуку розв'язку $y_i = y(x_i)$. Ці відношення можна задати, апроксимуючи крайові умови (1.2). Розглянемо дві різницеві схеми для цих умов.

Явна схема апроксимування умов (1.2) виглядає наступним чином:

$$\begin{aligned} -k_0 y_{x,0} + \alpha_1 y_0 &= \mu_1 \\ k_n y_{\overline{x},n} + \alpha_2 y_n &= \mu_2 \end{aligned} \tag{3.5}$$

або, у розгорнутому вигляді

$$
\begin{aligned}
-k_0\frac{y_1-y_0}{h}+\alpha_1 y_0=\mu_1\\
k_n\frac{y_n-y_{n-1}}{h}+\alpha_2 y_n=\mu_2
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Використані скінченно-різницеві відношення для апроксимації похідних (3.5) забезпечує нам тільки перший порядок апроксимації відносно шага h рівномірної сітки $\overline{\omega}_h$. Відповідно, загальний порядок апроксимації диференціальної задачі (1.1), (1.2) за допомогою різницевих схем (3.2), (3.6) – перший, тобто $O(h)$.

Літератури та посилання

[1] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, *Об однородных разностных схемах*, Журнал вычислительной математики и математической физики, 1961.

[2] А. А. Самарский, *Введение в теорию разностных схем*, Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», М., 1971.