КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ
ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК ТА КІБЕРНЕТИКИ

КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

Лабораторна робота №1 з курсу "Чисельні методи математичної фізики":

"Розв'язання граничної задачі методом Бубнова-Галеркіна та методом найменших квадратів"

Студент 4-го курсу
групи ОМ
Чан Ха Ву

Викладач:
к.ф.-м.н., доцент
Риженко А. І.

Київ, 23 грудня 2016

1 Постановка задачі

Методом Бубнова-Галеркіна та методом найменших квадратів знайти розв'язок граничної задачі для звичайного диференціального рівняння другого порядку

$$-\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) + p(x)\frac{du}{dx} + q(x)u = f(x), \quad a < x < b \tag{1.1}$$

з наступними умовами

$$\begin{aligned} -k(x)\frac{d}{dx}u(x) + \alpha_1 u(x) = \mu_1(x), \quad x = a \\ k(x)\frac{d}{dx}u(x) + \alpha_2 u(x) = \mu_2(x), \quad x = b \end{aligned} \tag{1.2}$$

де $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$. Треба побудувати графік для наближеного розв'язку та апроксимизації. Порівняти з точним (аналітичним) розв'язком.

2 Точний розв'язок

При наступному вигляді функції k, p та q:

$$\begin{aligned} k(x) = k_1 cos(k_2 x) + k_3, \quad k(x) > 0 \\ p(x) = p_1 sin(p_2 x) + p_3, \quad p(x) > 0 \\ q(x) = q_1 cos(q_2 x) + q_3, \quad q(x) > 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Нехай функція f набуває наступний вигляд:

$$\begin{multline} f(x) = k_1 k_2 m_1 m_2 \cos(m_2 x)\sin(k_2 x) + \\ + m_1 m_2^2 \left(k_1 \cos(k_2 x) + k_3\right)\sin(m_2 x) + p_1 m_1 m_2 \cos(m_2 x)\sin(p_2 x) + \\ + p_3 m_1 m_2 \cos(m_2 x) \end{multline} \tag{2.2}$$

та нехай коефіцієнти μ_1, μ_2 дорівнюють

$$\begin{aligned} \mu_1 = k(x)\frac{d}{dx}\left(m_1 sin(m_2 x) + m_3 cos(m_4 x) + m_5\right)(a) - \\ -\alpha_1\left(m_1 sin(m_2 a) + m_3 cos(m_4 a) + m_5\right) \\ \mu_2 = -k(x)\frac{d}{dx}\left(m_1 sin(m_2 x) + m_3 cos(m_4 x) + m_5\right)(b) - \\ -\alpha_2\left(m_1 sin(m_2 b) + m_3 cos(m_4 b) + m_5\right) \end{aligned} \tag{2.3}$$

У такому випадку, точний (аналітичний) розв'язок задачі 1.1 набуває наступний вигляд:

$$u(x) = m_1 sin(m_2 x) + m_3 cos(m_4 x) + m_5 \tag{2.4}$$

3 Теоретичні відомості

Нехай задано рівняння

$$Lu = f \tag{3.1}$$

де $L : H \to H$ – лінійний диференціальний оператор на певному гільбертовому просторі H, $f \in H$, u – невідома функція. При чому додається однородні граничні крайові умови:

$$\begin{aligned} \alpha_1 u(a) - \alpha_2 u'(a) = 0, \quad |\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0, \quad \alpha_1\alpha_2 \geq 0 \\ \beta_1 u(b) - \beta_2 u'(b) = 0, \quad |\beta_1| + |\beta_2| \neq 0, \quad \beta_1\beta_2 \geq 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

При використанні будь-якого з проекційних методів обирається лінійно-незалежна система функції $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots \phi_n(x)$, яку будемо називати координатами, і приблизьний розв'язок щукається у вигляді лінійної комбінації цих функцій

$$y^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i(x). \tag{3.3}$$

Коефіцієнти розкладу c_i є розв'язком лінійної системи

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} c_j = f_i, \quad i = 1, 2, \dots n \tag{3.4}$$

Спосіб побудови матриці $G = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ та вектора $F = (f_1, f_2 \dots, f_n)'$ залежить від обраного проекційного методу.

3.1 Метод найменших квадратів

Очевидно що розв'язок y^* крайової задачі 3.2 для рівняння 3.1 також мінімізує функціонал

$$\omega(u) = \|Lu - f\|^2 = (Lu - f, Lu - f) \tag{3.5}$$

заданому на множині $D(L)$. В методі найменших квадратів, пощук коефіцієнтів c_i у приблизьному розв'язку 3.3 зводиться до розв'язку матричного рівняння:

$$\sum_{i=j}^{n} c_j (L\phi_i, L\phi_j) = (f, L\phi_i), \quad i = 1, 2, \dots n \tag{3.6}$$

3.2 Метод Бубнова-Галеркіна

В методі найменших квадратів, коефіцієнти c_i у приблизьному розв'язку 3.3 щукається за допомогою системи:

$$\sum_{i=j}^{n} c_j(\phi_i, L\phi_j) = (f, \phi_i), \quad i = 1, 2, \ldots n \tag{3.7}$$

Цю систему можна трактувати як умова ортогональності в L_2 нев'язки $Lu_n - f$ всім функціям координатної системи.

4 Практична частина

Маємо неоднорідні краєві умови. Тому розв'язок будемо шукати у вигляді $u = v + \psi$, де $\psi = cx + d$. Функція ψ буде задовольняти неоднорідним крайовим умовам, тому функція v вже буде задовольнати однорідним крайовим умовам. Для знаходження коефіцієнтів c, d підставимо функцію ψ в крайові умови і розв'яжемо систему з двох рівнянь.

$$\begin{aligned} -k(a)\psi'(a) + \alpha_1\psi(a) &= \mu_1 \\ k(b)\psi'(b) + \alpha_2\psi(b) &= \mu_2 \end{aligned}$$

Звідси отримуємо:

$$\begin{aligned} c &= \frac{-(\alpha_2\mu_1 - \alpha_1\mu_2)}{\alpha_2\alpha_1(b-a) + \alpha_2 k(a) + alpha_1 k(b)} \\ d &= \frac{(-a\alpha_1\mu_2 + b\alpha_2\mu_1 + k(a)\mu_2 + \mu_1 k(b)}{\alpha_2\alpha_1(b-a) + \alpha_2 k(a) + alpha_1 k(b)} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Після цього перераховуємо функцію f для того, щоб знайти вигляд рівняння для v:

$$f_1(x) = f(x) - (-(k\psi')' + p(x)\psi' + q(x)\psi) \tag{4.2}$$

Задамо систему функцій ϕ для методу колокації у вигляді

$$\phi_i(x) = \begin{cases} (x-a)^2(x-A), & i = 1 \\ (x-b)^2(x-B), & i = 2 \\ (x-a)^{i-1}(x-b)^2 & i = 3, \ldots n \end{cases} \tag{4.3}$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів A та B підставимо ці функції у вже однорідні крайові умови. Треба розв'язати таку систему рівнянь:

$$\begin{aligned} -k(a)\phi_2'(a) + \alpha_1\phi_2(a) &= \mu_1 \\ k(b)\phi_1'(b) + \alpha_2\phi_1(b) &= \mu_2 \end{aligned} \tag{4.4}$$

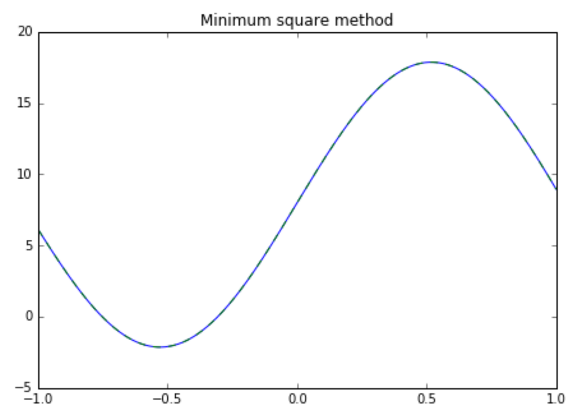
Звідси

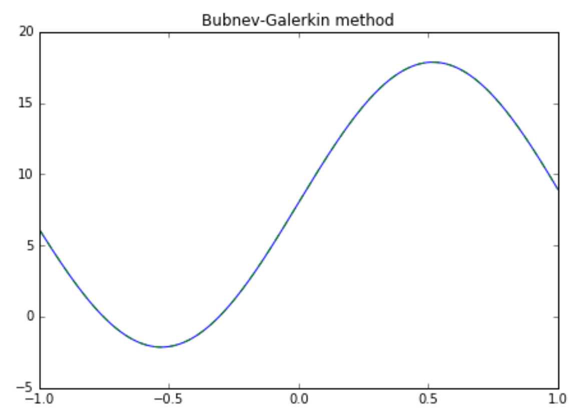
$$\begin{aligned} A &= \frac{-k(b)(a-b)(a-3b) - \alpha_2(b-a)^2 b}{2k(b)(a-b) - \alpha_2(b-a)^2} \\ B &= \frac{k(a)(b-a)(b-3a) - \alpha_1(a-b)^2 a}{-2k(a)(b-a)2 - \alpha_1(a-b)^2} \end{aligned} \tag{4.5}$$

Така система функції задовольняє однорідним крайовим умовам 1.2, а значить, чисельний розв'язок для v у вигляді 3.3 теж буде задовольняти цим умовам.

5 Результат роботи програми

Надалі колір для функцій: зелений – точний розв'язок, маджента(пурпурний) - чисельний розв'язок.





n	a	b	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	k_1	k_2	k_3	p_1	p_2	p_3	q_1	q_2	q_3
10	-1	1	10	3	1	1	7	1	2	1	4	1	3	1	2	1

Список литературы

[1] Чан Х. В., *Метод Бубнова-Галеркіна та Найменших квадратів на мові Python 3*, 2016. `https://github.com/FalconUA/numerical-analysis/blob/master/s3-1/appointment_s3-1.ipynb`