КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК ТА КІБЕРНЕТИКИ

КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

Лабораторна робота №3 з курсу "Чисельні методи математичної фізики":

"Розв'язання задачі теплопровідності"

Студент 4-го курсу
групи ОМ
Чан Ха Ву

Викладач:
к.ф.-м.н., доцент
Риженко А. І.

Київ, 01 січня 2017

1 Постановка задачі

Цегло сферичної форми діаметром $2R = 20$мм, що має початкову температуру $0°C$, вміщено в піч, температура якої дорівнює $300°C$. Визначити, через який час температура в середині цієї цеглини дорівнюватиме $30°C$. Фізичні характеристики цегла мають такі значення:

$$\lambda = 0,77\,\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}};\quad c = 0,83\,\frac{\text{кДж}}{\text{кг}\cdot\text{К}};\quad \rho = 1600\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3};\quad \gamma = 7\,\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\cdot\text{К}}. \tag{1.1}$$

Тут c – питомна щільність, ρ – щільність, λ – коефіцієнт теплопровідності, γ – коефіцієнт тепловіддачі на границі.

2 Хід розв'язку

Процес нагрівання ідеально сферичної цеглини може бути описаний таким диференціальним рівнянням:

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\lambda}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial u}{\partial x}\right),\quad x \in (0, R),\quad t > 0 \tag{2.1}$$

Початкові та крайові умови при параметрах (1.1) запишемо у такому вигляді:

$$\begin{gathered} u(x,t)|_{t=0} = 0 \quad \forall x \in [0, R];\quad x^2\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x\to 0} = 0 \\ \left(\lambda\frac{\partial u}{\partial x} + \gamma(u - u_{\text{env}})\right)\bigg|_{x=R} = 0,\quad \forall t > 0. \end{gathered} \tag{2.2}$$

де $R = 10^{-2}$м, $u_{\text{env}} = 300°C$.

2.1 Зведення до безрозмірного випадку

Перетворимо задачу (2.1), (2.2) таким чином, щоб пропали коефіцієнти теплопровідності, щільності, питомної щільності та тепловіддачі. Введемо безрозмірні змінні

$$v(x,t) = \frac{(u(x,t) - u_{\text{cont}})}{u_{\text{cont}}};\quad \hat{t} = \frac{a^2 t}{R^2},\quad \hat{x} = x/R; \tag{2.3}$$

де $a^2 = \lambda/(c\rho)$; u_{cont} – деяка величина, яка відповідає, наприклад, u_{env}. Переходячі в задачі (2.1), (2.2) до безрозмірних змінних за формулами (2.3), дістаємо таку задачу для функції $v\left(\hat{x}, \hat{t}\right)$:

$$\frac{\partial v}{\partial \hat{t}} = \frac{1}{\hat{x}^2}\frac{\partial}{\partial \hat{x}}\left(\hat{x}^2\frac{\partial v}{\partial \hat{x}}\right),\quad \hat{x} \in (0, 1),\quad t > 0 \tag{2.4}$$

при чому початкові та крайові умови набудуть наступний вигляд:

$$\begin{gathered} v(\hat{x},\hat{t})\Big|_{t=0} = v_0(\hat{x}) \quad \forall \hat{x} \in [0,1]; \\ \left(\frac{\partial v}{\partial \hat{x}} + \hat{\gamma} v\right)\Bigg|_{\hat{x}=1} = 0, \quad \hat{x}^2 \frac{\partial v}{\partial \hat{x}}\Bigg|_{\hat{x}\to 0} = 0. \end{gathered} \tag{2.5}$$

де $v_0(\hat{x}) = (u_0(x) - u_{\text{cont}})/u_{\text{cont}}$; $\hat{\gamma} = \gamma R \lambda$.

2.2 Апроксимізація різницевою схемою

Як показано у [2, с. 185-208], безрозмірна задача теплопровідності у сферичних координатах (2.4), (2.5) за допомогою інтегро-інтерполяційного метода можна апроксимувати такою системою:

$$\Lambda(\overline{t})y = \frac{1}{x^2}\left(x^2 y_{\overline{x}}\right)_x, \quad \overline{x} = x - \frac{h}{2}, \quad \overline{t} = t + \frac{h}{2} \tag{2.6}$$

3 Теоретичні відомості

4 Результат роботи програми

Літератури та посилання

[1] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, *Об однородных разностных схемах*, Журнал вычислительной математики и математической физики, 1961.

[2] А. А. Самарский, *Введение в теорию разностных схем*, Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», М., 1971.

[3] Чан Х. В., *Метод безпосередньої заміни диференціальних похідних частковими на мові Python 3*, 2017. `https://github.com/FalconUA/numerical-analysis/blob/master/s3-2/appointment_s3-2.ipynb`