

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ  
ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК ТА КІБЕРНЕТИКИ

КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

---

**Лабораторна робота №2 з курсу “Чисельні методи  
математичної фізики”:**

**“Розв’язання граничної задачі методом  
безпосередньої заміни диференціальних похідних  
частковими”**

---

*Студент 4-го курсу  
групи ОМ  
Чан Ха Ву*

*Викладач:  
к.ф.-м.н., доцент  
Риженко А. І.*

Київ, 01 січня 2017

# 1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Методом безпосередньої заміни диференціальних похідних частковими знайти розв'язок граничної задачі для звичайного диференціального рівняння другого порядку

$$-\frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{du}{dx} \right) + p(x) \frac{du}{dx} + q(x)u = f(x), \quad a < x < b \quad (1.1)$$

з наступними крайовими умовами третього роду

$$\begin{aligned} -k(x) \frac{d}{dx} u(x) + \alpha_1 u(x) &= \mu_1(x), \quad x = a \\ k(x) \frac{d}{dx} u(x) + \alpha_2 u(x) &= \mu_2(x), \quad x = b \end{aligned} \quad (1.2)$$

де  $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$ . Треба побудувати графік для наближеного розв'язку та апроксимізації. Порівняти з точним (аналітичним) розв'язком.

# 2 ТОЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК

При наступному вигляді функції  $k, p$  та  $q$ :

$$\begin{aligned} k(x) &= k_1 \cos(k_2 x) + k_3, \quad p(x) = p_1 \sin(p_2 x) + p_3, \quad q(x) = q_1 \cos(q_2 x) + q_3, \\ k(x) &> 0, \quad p(x) > 0, \quad q(x) > 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Нехай функція  $f$  набуває наступний вигляд:

$$\begin{aligned} f(x) &= k_1 k_2 m_1 m_2 \cos(m_2 x) \sin(k_2 x) + m_1 m_2^2 (k_1 \cos(k_2 x) + k_3) \sin(m_2 x) + \\ &+ p_1 m_1 m_2 \cos(m_2 x) \sin(p_2 x) + p_3 m_1 m_2 \cos(m_2 x) \end{aligned} \quad (2.2)$$

та нехай коефіцієнти  $\mu_1, \mu_2$  дорівнюють

$$\begin{aligned} \mu_1 &= k(x) \frac{d}{dx} (m_1 \sin(m_2 x) + m_3 \cos(m_4 x) + m_5) (a) - \\ &\quad - \alpha_1 (m_1 \sin(m_2 a) + m_3 \cos(m_4 a) + m_5) \\ \mu_2 &= -k(x) \frac{d}{dx} (m_1 \sin(m_2 x) + m_3 \cos(m_4 x) + m_5) (b) - \\ &\quad - \alpha_2 (m_1 \sin(m_2 b) + m_3 \cos(m_4 b) + m_5) \end{aligned} \quad (2.3)$$

У такому випадку, точний (аналітичний) розв'язок задачі (1.1) набуває наступний вигляд:

$$u(x) = m_1 \sin(m_2 x) + m_3 \cos(m_4 x) + m_5 \quad (2.4)$$

### 3 ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

На відрізку  $[a, b]$  введемо рівномірну сітку  $\bar{\omega}_h = \{x_i = a + ih, i = 0, 1, \dots, n\}$  з шагом  $h = (b - a)/n$ . Назвемо цю сітку основною. Розв'язок задачі (1.1) з крайовими умовами (1.2), функціональні коефіцієнти та крайові значення яких набувають вигляд (2.1), (2.2) та (2.3), будемо шукати у вигляді сіткової функції  $y_i = y(x_i)$ , заданої на точках сітки  $\bar{\omega}_h$ .

#### 3.1 АПРОКСИМАЦІЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ РІЗНИЦЕВИМ

Позначимо через  $k_i, p_i, q_i, f_i$  значення функції  $k(x), p(x), q(x), f(x)$  у точках  $x_i$  однорідної сітки  $\bar{\omega}_h$ . Замінімо похідні в рівняння (1.1) скінченно-різницеви виразами:

$$(k_{i+\frac{1}{2}} y_{\bar{x},i})_{x,i} + p_i y_{\bar{x}} + q_i y_i = f_i \quad (3.1)$$

або, у розгорнутому вигляді

$$- \left( k_{i+\frac{1}{2}} \frac{y_{i+1} - y_i}{h^2} - k_{i-\frac{1}{2}} \frac{y_i - y_{i-1}}{h^2} \right) + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i \quad (3.2)$$

де  $k_{i+\frac{1}{2}} = k(x_i + \frac{h}{2})$  та  $i = 1, 2, \dots, n-1$ . Перегрупуємо коефіцієнти при змінних  $y_0, y_1, \dots, y_n$  та запишемо рівняння (3.2) у вигляді:

$$A_i y_{i-1} + B_i y_i + C_i y_{i+1} = G_i, i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.3)$$

звідси

$$A_i = -k_{i+\frac{1}{2}} - \frac{h}{2} p_i, \quad B_i = k_{i+\frac{1}{2}} + k_{i-\frac{1}{2}} + h^2 q_i, \quad C_i = -k_{i+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} p_i. \quad (3.4)$$

Нескладно переконатись, що така різницева схема апроксимує задачу (1.1) з похибкою другого порядку  $O(h^2)$ . Також, можна показати що схема збігається до точного розв'язку у класі гладких функції коефіцієнтів, при якому  $k(x) > k_0 \geq 0$  та  $q(x) > 0$ . Ідея для доведення цього факту можна знайти у [2, с. 106–108].

#### 3.2 АПРОКСИМАЦІЯ КРАЙОВИХ УМОВ

Помітимо, що у рівнянні (3.4) не вистачає два відношення для пошуку розв'язку  $y_i = y(x_i)$ . Ці відношення можна задати, апроксимуючи крайові умови (1.2). Розглянемо дві різницеві схеми для цих умов.

##### 3.2.1 АПРОКСИМАЦІЯ КРАЙОВИХ УМОВ З ПЕРШИМ ПОРЯДКОМ

Явна схема апроксимування умов (1.2) виглядає наступним чином:

$$-k_0 y_{x,0} + \alpha_1 y_0 = \mu_1, \quad k_n y_{\bar{x},n} + \alpha_2 y_n = \mu_2 \quad (3.5)$$

або, у розгорнутому вигляді

$$-k_0 \frac{y_1 - y_0}{h} + \alpha_1 y_0 = \mu_1, \quad k_n \frac{y_n - y_{n-1}}{h} + \alpha_2 y_n = \mu_2 \quad (3.6)$$

Використані скінченно-різницеві відношення для апроксимації похідних (3.5) забезпечує нам тільки перший порядок апроксимації відносно шага  $h$  рівномірної сітки  $\bar{\omega}_h$ . Відповідно, загальний порядок апроксимації диференціальної задачі (1.1), (1.2) за допомогою різницевих схем (3.2), (3.6) – перший, тобто  $O(h)$ .

Запишемо (3.6) у вигляді:

$$-B_0 y_0 + C_0 y_1 = G_0, \quad A_n y_{n-1} - B_n y_n = G_n. \quad (3.7)$$

Отже, об'єднуючи (3.3) та (3.7) отримуємо лінійну систему рівнянь у вигляді:

$$\begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ G_{n-1} \\ G_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_0 & C_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ A_1 & B_1 & C_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & B_2 & C_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & A_{n-1} & B_{n-1} & C_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_n & B_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

### 3.2.2 АПРОКСИМАЦІЯ КРАЙОВИХ УМОВ З ДРУГИМ ПОРЯДКОМ

Побудуємо різницеву схему для апроксимації крайових умов (1.2) без підвищення щільності сітки  $\bar{\omega}_h$  (тобто без зменшення шагу  $h$ ). Розглянемо таку схему:

$$\begin{aligned} -k_0 \frac{y_{\frac{1}{2}} - y_{-\frac{1}{2}}}{h} + \alpha_1 \frac{y_{\frac{1}{2}} + y_{-\frac{1}{2}}}{2} &= \mu_1, \\ k_n \frac{y_{n+\frac{1}{2}} - y_{n-\frac{1}{2}}}{h} + \alpha_1 \frac{y_{n+\frac{1}{2}} + y_{n-\frac{1}{2}}}{2} &= \mu_2. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Можна розглянути цю схему як різницева схема на розширенній сітці  $\bar{\omega}'_h = \{x = x_i, x_i = a - \frac{h}{2} + ih, i = 0, 1, \dots, n+1\}$ . Назвемо цю сітку усувною, а сітку у попередньому пункті – основною. Отже, на такій сітці крайові умови матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} -k_{\frac{1}{2}} \frac{y_1 - y_0}{h} + \alpha_1 \frac{y_1 + y_0}{2} &= \mu_1, \\ k_{n+1-\frac{1}{2}} \frac{y_{n+1} - y_n}{h} + \alpha_2 \frac{y_{n+1} + y_n}{2} &= \mu_2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Легко довести, що така схема має другий порядок апроксимації, тобто  $O(h^2)$ . Ідея для доведення цього факту можна знайти у [2, с. 148–149].

## 4 ПРАКТИЧНА ЧАСТИНА

Для розв'язання тридіагональної системи (3.8) будемо використовувати метод прогонки, який працює за  $O(n)$ , де  $n$  – розмір матриці. Розв'язок системи шукається у вигляді

$$y_i = s_i + y_{i+1} + t_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (4.1)$$

Коефіцієнти  $s_i$  та  $t_i$  шукається наступним чином. З системи (3.8) можна побачити, що

$$s_0 = \frac{C_0}{B_0}, \quad t_0 = \frac{-G_0}{B_0}. \quad (4.2)$$

Підставимо  $y_{i-1}$  у  $i$ -му рівнянні системи:

$$A_i(s_{i-1}y_i + t_{i-1}) - B_iy_i + C_iy_{i+1} = G_i, \quad (4.3)$$

отримаємо рекурентну формулу:

$$s_i = \frac{C_i}{B_i - A_i s_{i-1}}, \quad t_i = \frac{A_i t_{i-1} - G_i}{B_i - A_i s_{i-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.4)$$

У  $n$ -му рівнянні системи (3.8)  $C_n = 0$ , отже,  $s_n = 0$ , значить з (4.1) випливає що  $y_n = t_n$ . По формулі (4.1) знаходимо остальні коефіцієнти.

## 5 РЕЗУЛЬТАТ РОБОТИ ПРОГРАМИ

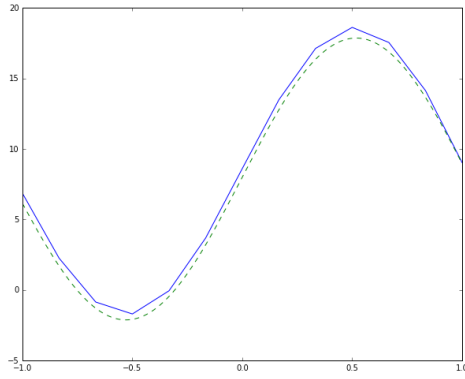
Надалі колір для функцій: зелений – точний розв'язок, маджента(пурпурний) - чисельний розв'язок. На (Мал. 5.1) можна побачити, що навіть при малих значеннях  $n$ , метод заміни диференціальних похідних частковими дає дуже гарні результати апроксимації.

Наведемо приклад, де чисельний розв'язок методом безпосередньої заміни диференціальних похідних частковими не збігається до точного розв'язку.

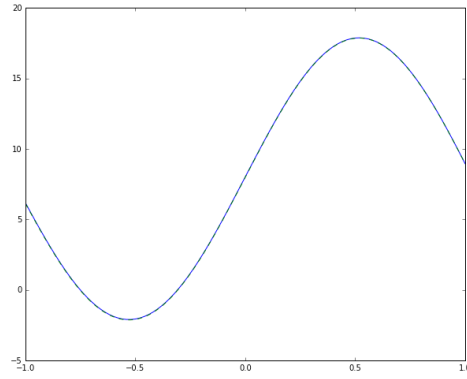
У результаті, зображеної на (мал. 5.2) можна побачити, що різниці схеми (3.2) та (3.6) не збігається до розв'язку (2.4) задачі (1.1). Це можна пояснити тим, що, як зазначено у пункті 3.1, розв'язок збігається тільки коли  $k(x) > 0$  та  $q(x) \geq 0$ . У нашому прикладі, при  $k_1 = 2$  та  $k_3 = 1$ , функція  $k$  може приймати значення менше нуля, а отже, не задовольняє умовам збіжності.

Слід зазначити, що результати у (Мал. 5.1) були отримані за допомогою схеми апроксимізації, що описаний у пункті 3.2.1, тобто має перший порядок апроксимізації. У (Мал. 5.3) наведено порівняння результатів, що використовують схему у пункті 3.2.1 та у пункті 3.2.2, що має порядок  $O(h^2)$ .

| a  | b | $m_1$ | $m_2$ | $m_3$ | $m_4$ | $m_5$ | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $q_1$ | $q_2$ | $q_3$ | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ |
|----|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------------|------------|
| -1 | 1 | 10    | 3     | 1     | 1     | 7     | 1     | 2     | 1     | 4     | 1     | 3     | 1     | 2     | 1     | 1          | 1          |



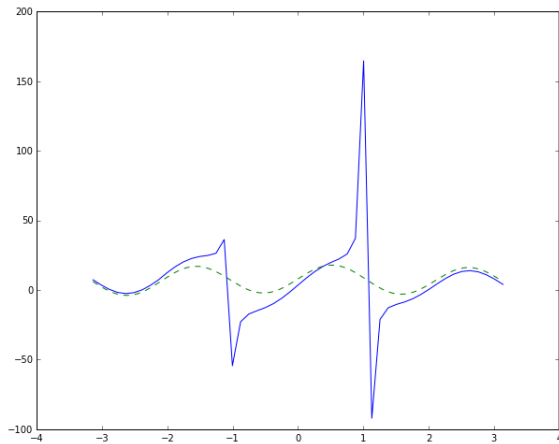
(a) При  $n = 12$



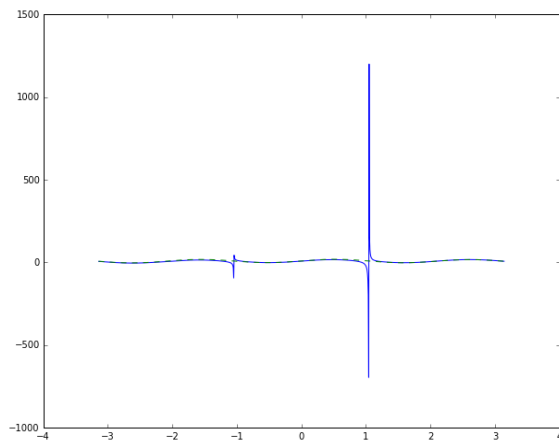
(b) При  $n = 100$

Мал. 5.1: Результат роботи програми [3] при параметрах, наведених у таблиці. Зеленим пунктиром зображено точний розв'язок, а пурпурною лінією – чисельний розв'язок.

| a      | b     | $m_1$ | $m_2$ | $m_3$ | $m_4$ | $m_5$ | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $q_1$ | $q_2$ | $q_3$ | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------------|------------|
| $-\pi$ | $\pi$ | 10    | 3     | 1     | 1     | 7     | 2     | 2     | 1     | 4     | 1     | 1     | 1     | 2     | 1     | 1          | 1          |



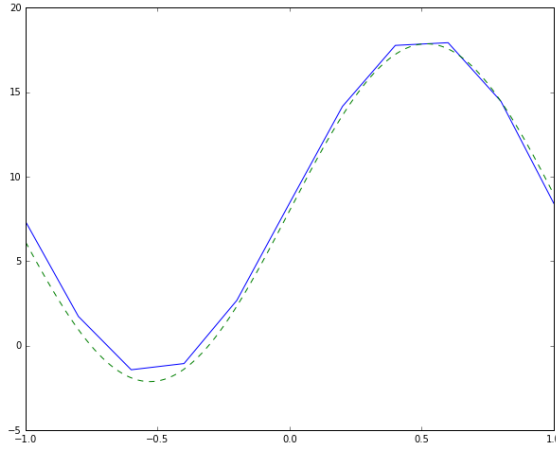
(a) При  $n = 12$



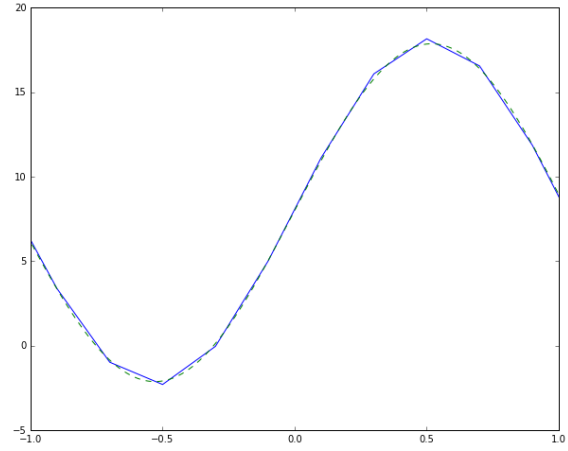
(b) При  $n = 100$

Мал. 5.2: Результат роботи програми [3] при параметрах, наведених у таблиці. Зеленим пунктиром зображено точний розв'язок, а пурпурною лінією – чисельний розв'язок. Можна побачити, що у цьому випадку чим менше шаг  $h$  однорідної сітки  $\bar{\omega}_h$ , тим більше похибка апроксимації.

| a  | b | $m_1$ | $m_2$ | $m_3$ | $m_4$ | $m_5$ | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $q_1$ | $q_2$ | $q_3$ | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ |
|----|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------------|------------|
| -1 | 1 | 10    | 3     | 1     | 1     | 7     | 1     | 2     | 2     | 4     | 1     | 1     | 1     | 2     | 1     | 1          | 1          |



(a)  $O(h)$  При  $n = 10$



(b)  $O(h^2)$  При  $n = 10$

Мал. 5.3: Результат роботи програми [3] при параметрах, наведених у таблиці. Зеленим пунктиром зображено точний розв'язок, а пурпурною лінією – чисельний розв'язок. у (a) показано результат, при якому було використано схема у пункті 3.2.1, а у (b) показано результат, при якому була використана схема у пункті 3.2.2. Бачимо, що при однакових значеннях  $n$ , схема у пункті 3.2.2 краще апроксимує задачу.

## ЛІТЕРАТУРИ ТА ПОСИЛАННЯ

- [1] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, *Об однородных разностных схемах*, Журнал вычислительной математики и математической физики, 1961.
- [2] А. А. Самарский, *Введение в теорию разностных схем*, Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», М., 1971.
- [3] Чан Х. В., *Метод безпосередньої заміни диференціальних похідних частковими на мові Python 3*, 2017. [https://github.com/FalconUA/numerical-analysis/blob/master/s3-2/appointment\\_s3-2.ipynb](https://github.com/FalconUA/numerical-analysis/blob/master/s3-2/appointment_s3-2.ipynb)