

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ
ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК ТА КІБЕРНЕТИКИ

КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

Лабораторна робота №3 з курсу “Чисельні методи
математичної фізики”:

“Розв’язання задачі теплопровідності”

Студент 4-го курсу
групи ОМ
Чан Ха Ву

Викладач:
к.ф.-м.н., доцент
Риженко А. І.

Київ, 01 січня 2017

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Цегло сферичної форми діаметром $2R = 20\text{мм}$, що має початкову температуру 0°C , вміщено в піч, температура якої дорівнює 300°C . Визначити, через який час температура в середині цієї цеглини дорівнюватиме 30°C . Фізичні характеристики цегла мають такі значення:

$$\lambda = 0,77 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}; \quad c = 0,83 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}; \quad \rho = 1600 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \quad \gamma = 7 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}. \quad (1.1)$$

Тут c – питома щільність, ρ – щільність, λ – коефіцієнт теплопровідності, γ – коефіцієнт тепловіддачі на границі.

2 ХІД РОЗВ’ЯЗКУ

Процес нагрівання ідеально сферичної цеглини може бути описаний таким диференціальним рівнянням:

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\lambda}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad x \in (0, R), \quad t > 0 \quad (2.1)$$

Початкові та крайові умови при параметрах (1.1) запишемо у такому вигляді:

$$\begin{aligned} u(x, t)|_{t=0} &= 0 \quad \forall x \in [0, R]; \quad x^2 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x \rightarrow 0} = 0 \\ \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma(u - u_{\text{env}}) \right) \Big|_{x=R} &= 0, \quad \forall t > 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

де $R = 10^{-2}\text{м}$, $u_{\text{env}} = 300^\circ\text{C}$.

2.1 ЗВЕДЕННЯ ДО БЕЗРОЗМІРНОГО ВИПАДКУ

Перетворимо задачу (2.1), (2.2) таким чином, щоб пропали коефіцієнти теплопровідності, щільності, питомної щільності та тепловіддачі. Введемо безрозмірні змінні

$$v(x, t) = \frac{(u(x, t) - u_{\text{cont}})}{u_{\text{cont}}}; \quad \hat{t} = \frac{a^2 t}{R^2}, \quad \hat{x} = x/R; \quad (2.3)$$

де $a^2 = \lambda/(c\rho)$; u_{cont} – деяка величина, яка відповідає, наприклад, u_{env} . Переходячі в задачі (2.1), (2.2) до безрозмірних змінних за формулами (2.3), дістаємо таку задачу для функції $v(\hat{x}, \hat{t})$:

$$\frac{\partial v}{\partial \hat{t}} = \frac{1}{\hat{x}^2} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left(\hat{x}^2 \frac{\partial v}{\partial \hat{x}} \right), \quad \hat{x} \in (0, 1), \quad \hat{t} > 0 \quad (2.4)$$

при чому початкові та крайові умови набудуть наступний вигляд:

$$\begin{aligned} v(\hat{x}, \hat{t})|_{t=0} &= v_0(\hat{x}) \quad \forall \hat{x} \in [0, 1]; \\ \left(\frac{\partial v}{\partial \hat{x}} + \hat{\gamma} v \right) \Big|_{\hat{x}=1} &= 0, \quad \hat{x}^2 \frac{\partial v}{\partial \hat{x}} \Big|_{\hat{x} \rightarrow 0} = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

де $v_0(\hat{x}) = (u_0(x) - u_{\text{cont}})/u_{\text{cont}}$; $\hat{\gamma} = \gamma R \lambda$.

2.2 АПРОКСИМІЗАЦІЯ РІЗНИЦЕВОЮ СХЕМОЮ

Як показано у [1, с. 185-208], безрозмірна задача теплопровідності у сферичних координатах (2.4), (2.5) за допомогою інтегро-інтерполяційного метода можна апроксимувати такою системою:

$$\Lambda(\bar{t})y = \frac{1}{x^2} (x^2 y_{\bar{x}})_x, \quad \bar{x} = x - \frac{h}{2}, \quad \bar{t} = t + \frac{h}{2} \quad (2.6)$$

Отже, рівняння та крайові умови можна записати таким чином:

$$\begin{cases} y_t = \Lambda(\bar{t})y, & 0 < x = ih < 1, \quad t = j\tau > 0 \\ y(x, 0) = u_0(x), & y(1, t) = u_{\text{cont}} \\ y^{(\sigma)} = \sigma \hat{y} + (1 - \sigma)y \end{cases} \quad (2.7)$$

Маємо:

$$\begin{cases} y_{t,i}^j = \sigma \frac{1}{x_i^2} \left(x_{i-\frac{1}{2}}^2 y_{\bar{x}}^{j+1} \right)_{x,i} + (1 - \sigma) \left(x_{i-\frac{1}{2}}^2 y_{\bar{x}}^j \right) \\ \sigma y_{x,0}^{j+1} + (1 - \sigma)y_{x,0}^j = \frac{h}{2 \cdot 3} y_{t,0}^j \\ -\sigma y_{x,N}^{j+1} - (1 - \sigma)y_{x,N}^j = \hat{\gamma} (\sigma y_N^{j+1} + (1 - \sigma)y_N^j) + \frac{h}{2} y_{t,N}^j \end{cases} \quad (2.8)$$

Побудуємо тридіагональну систему рівнянь для $j + 1$ шару

$$\begin{cases} d_0 y_0^{j+1} + c_0 y_1^{j+1} = f_0 \\ l_i y_{i-1}^{j+1} + d_i y_i^{j+1} + u_i y_{i+1}^{j+1} = f_i \\ l_N y_{N-1}^{j+1} + d_N y_N^{j+1} = f_N \end{cases} \quad (2.9)$$

де коефіцієнти обчислюється наступним чином:

$$\begin{aligned}
d_0 &= \frac{-\sigma}{h} - \frac{h}{2 \cdot 3\tau}, \quad u_0 = \frac{\sigma}{h}, \quad f_0 = -(1-\sigma) \frac{y_1^j - y_0^j}{h} - \frac{h}{2 \cdot 3} \frac{y_0^j}{\tau} \\
l_i &= \frac{-\sigma x_{i-\frac{1}{2}}^2}{h^2 x_i^2}, \quad d_i = \frac{1}{\tau} + \frac{\sigma (x_{i-\frac{1}{2}}^2 + x_{i+\frac{1}{2}}^2)}{h^2 x_i^2}, \quad u_i = \frac{-\sigma x_{i+\frac{1}{2}}^2}{h^2 x_i^2} \\
f_i &= \frac{y_i^j}{\tau} + (1-\sigma) \frac{1}{x_i^2} \left(\frac{x_{i+\frac{1}{2}}^2 y_{i+1}^j - (x_{i-\frac{1}{2}}^2 + x_{i+\frac{1}{2}}^2) y_i^j + x_{i-\frac{1}{2}}^2 y_{i-1}^j}{h^2} \right) \\
l_N &= -\frac{\sigma}{h}, \quad d_N = \frac{\sigma}{h} + \hat{\gamma}\sigma + \frac{h}{2\tau} \\
f_N &= -(1-\sigma) \left(\frac{y_N^j - y_{N-1}^j}{h} + \hat{\gamma} y_N^j \right) + \frac{h}{2\tau} y_N^j
\end{aligned} \tag{2.10}$$

3 ПРАКТИЧНА ЧАСТИНА

Для розв'язання тридіагональної системи (2.10) будемо використовувати метод прогонки, який працює за $O(n)$, де n – розмір матриці. Розв'язок системи шукається у вигляді

$$y_i = s_i + y_{i+1} + t_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \tag{3.1}$$

Коефіцієнти s_i та t_i шукається наступним чином. З системи (2.10) можна побачити, що

$$s_0 = \frac{C_0}{B_0}, \quad t_0 = \frac{-G_0}{B_0}. \tag{3.2}$$

Підставимо y_{i-1} у i -му рівнянні системи:

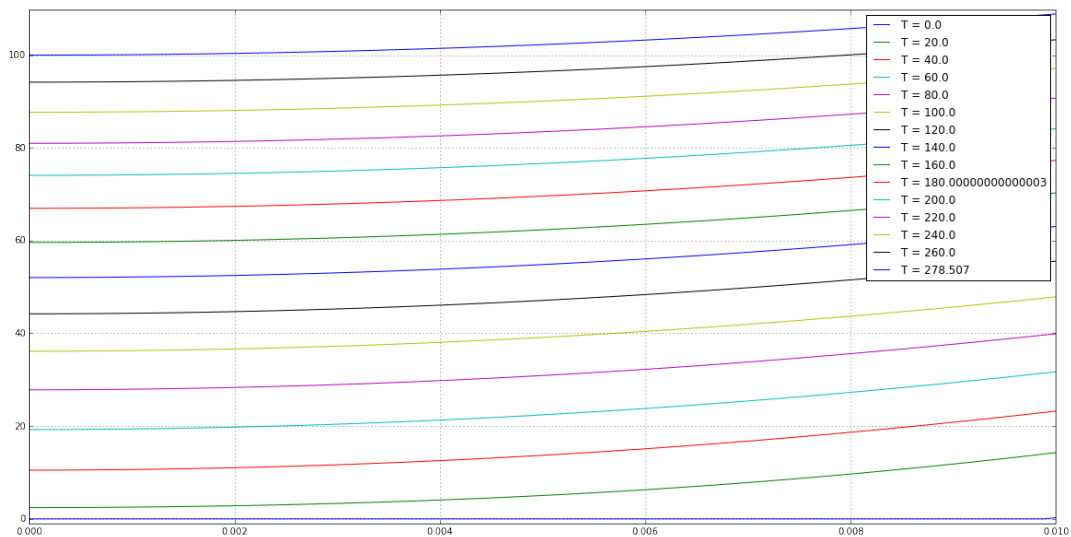
$$A_i (s_{i-1} y_i + t_{i-1}) - B_i y_i + C_i y_{i+1} = G_i, \tag{3.3}$$

отримаємо рекурентну формулу:

$$s_i = \frac{C_i}{B_i - A_i s_{i-1}}, \quad t_i = \frac{A_i t_{i-1} - G_i}{B_i - A_i s_{i-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{3.4}$$

У n -му рівнянні системи (2.10) $C_n = 0$, отже, $s_n = 0$, значить з (3.1) випливає що $y_n = t_n$. По формулі (3.1) знаходимо остальні коефіцієнти.

4 РЕЗУЛЬТАТ РОБОТИ ПРОГРАМИ



Мал. 4.1: $u(t)$ при фіксованому t .

ЛІТЕРАТУРИ ТА ПОСИЛАННЯ

- [1] А. А. Самарский, *Введение в теорию разностных схем*, Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», М., 1971.
- [2] Чан Х. В., *Метод безпосередньої заміни диференціальних похідних частковими на мові Python 3*, 2017. https://github.com/FalconUA/numerical-analysis/blob/master/s3-3/appointment_s3-3.ipynb