

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА  
ФАКУЛЬТЕТ КІБЕРНЕТИКИ  
КАФЕДРА ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ МАТЕМАТИКИ

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №2  
З НАВЧАЛЬНОГО КУРСУ "МЕТОДИ ОБЧИСЛЕНЬ"  
**"Моделювання руху легкого точкового тіла в  
системі вихрів на площині"**

Виконав:  
студент III курсу бакалаври  
ЧАН ХА ВУ

Прийняв:  
ЧЕРНІЙ ДМИТРО ІВАНОВИЧ

Київ 2016

## 1 Опис методу

У лабораторній роботі описується поведінка легкого точкового тіла, що перебуває у векторному полі швидкостей, індукованих вихрями. При цьому при обчисленні положення тіла використати формулу трапецій.

## 2 Постановка задачі

Дослідити рух легкого тіла на площині, яке перебуває у векторному полі швидкостей, що спричинене вихрями, рівномірно розташованими на осі  $Ox$  і симетрично відносно центру координат.

## 3 Математична модель та алгоритми

Точкове тіло перебуває у векторному полі швидкостей, індукованому вихрями. Вважаючи його нескінченно легким, будемо знехтувати інерцією. Вектор швидкості у кожній точці поля обчислюється за формулою:

$$\vec{V}(x, y) = \sum_{m=1}^M \vec{V}_m(x, y),$$

де  $\vec{V}_m(x, y)$  – вектор швидкості, викликаний  $m$ -м вихрею. Цей вектор обчислюється наступним чином:

$$\vec{V}_m = (u_m(x, y), v_m(x, y)).$$

Значення  $u_m(x, y)$  та  $v_m(x, y)$  виражаються через координати точки та координати вихрей:

$$u_m(x, y) = \frac{\Gamma_m}{2\pi} \cdot \frac{Y_m - y}{R_m^2}$$
$$v_m(x, y) = \frac{\Gamma_m}{2\pi} \cdot \frac{x - X_m}{R_m^2}$$

Де  $R_m$  – відстань між точкою поля та  $m$ -м вихрею, що обчислюється за формулою:

$$R_m = \sqrt{(x - X_m)^2 + (y - Y_m)^2}.$$

### 3.1 Метод Ейлера

На кожному кроці моделювання будемо обчислювати координати точкового тіла наступним чином:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + \frac{\Delta_t}{2}(u(x_n, y_n) + u(x_{n-1}, y_{n-1})) \\y_{n+1} &= y_n + \frac{\Delta_t}{2}(v(x_n, y_n) + v(x_{n-1}, y_{n-1}))\end{aligned}$$

де  $\Delta_t = 0.005$ ,  $(x_n, y_n)$  – координати тіла,  $(u, v)$  – проекції вектора швидкості на вісі  $Ox$  та  $Oy$  відповідно, тобто  $v = (u, v)$ .

## 4 Комп'ютерне моделювання

Нехай червоні точки позначають центри вихрів, зелена крива – слід траєкторії руху точкового тіла. У векторному полі знаходяться 5 вихрей з координатами:

$$r_1 = (-1.0, -1.0)$$

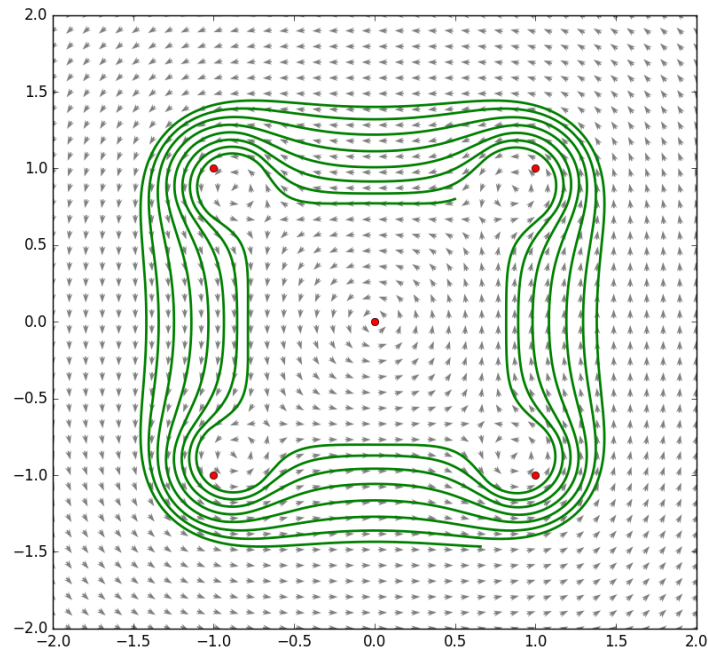
$$r_2 = (-1.0, 1.0)$$

$$r_3 = (1.0, -1.0)$$

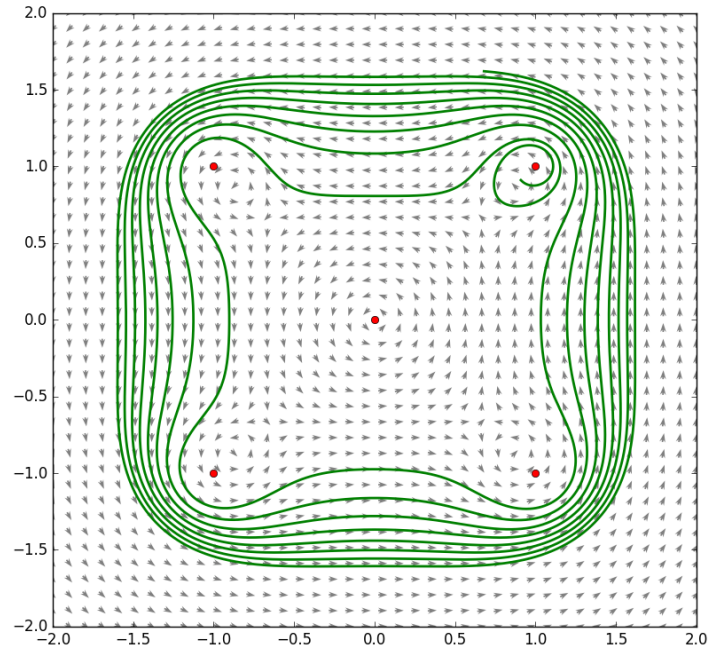
$$r_4 = (1.0, 1.0)$$

$$r_5 = (0.0, 0.0)$$

та інтенсивностями  $\Gamma_m = \Gamma = \frac{1}{5}$ , де  $m \in \{1, 2, \dots, 5\}$ . На (Мал. 1) показано результат моделювання.



Мал. 1: Моделювання для  $t \in [0 \dots 100]$   
інтенсивність вихрей:  $\Gamma_m = \Gamma = \frac{1}{5}$   
початкова координата:  $v_0 = (u_0, v_0) = (0.5, 0.8)$



Мал. 2: Моделювання для  $t \in [0 \dots 100]$   
інтенсивність вихрей:  $\Gamma_m = \Gamma = \frac{1}{5}$   
початкова координата:  $v_0 = (u_0, v_0) = (0.91, 0.91)$

На (Мал. 2) показано результат моделювання для іншої початкової точки, ближчої до крайнього вихру.

## 5 Висновки

Було досліджено поведінку легкого точкового тіла в системі вихрів на площині для заданих випадків розподілу їх інтенсивностей. При цьому розглянуто різні кількості вихрів та різні щільності їх розміщення. Вихрі розташовані по точкам  $(-1, -1)$ ,  $(-1, 1)$ ,  $(1, -1)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(0, 0)$ . Незначне відхилення моделювання можна компенсувати припущенням, що у точкового тіла є мала інерція.