КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК ТА КІБЕРНЕТИКИ

КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

Лабораторна робота №3 з курсу "Числельні методи математичної фізики":

"Розв'язання задачі теплопровідності"

Студент 4-го курсу
групи ОМ
Чан Ха Ву

Викладач:
к.ф.-м.н., доцент
Риженко А. І.

Київ, 01 січня 2017

1 Постановка задачі

Цегло сферичної форми діаметром $2R = 20$мм, що має початкову температуру $0°C$, вміщено в піч, температура якої дорівнює $300°C$. Визначити, через який час температура в середині цієї цеглини дорівнюватиме $30°C$. Фізичні характеристики цегла мають такі значення:

$$\lambda = 0,77\,\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{K}}; \quad c = 0,83\,\frac{\text{кДж}}{\text{кг}\cdot\text{K}}; \quad \rho = 1600\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \quad \gamma = 7\,\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\cdot\text{K}}. \tag{1.1}$$

Тут c – питомна щільність, ρ – щільність, λ – коефіцієнт теплопровідності, γ – коефіцієнт тепловіддачі на границі.

2 Хід розв'язку

Процес нагрівання ідеально сферичної цеглини може бути описаний таким диференціальним рівнянням:

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\lambda}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad x \in (0, R), \quad t > 0 \tag{2.1}$$

Початкові та крайові умови при параметрах (1.1) запишемо у такому вигляді:

$$\begin{gathered} u(x,t)|_{t=0} = 0 \quad \forall x \in [0, R]; \quad x^2\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x\to 0} = 0 \\ \left(\lambda\frac{\partial u}{\partial x} + \gamma(u - u_{\text{env}})\right)\bigg|_{x=R} = 0, \quad \forall t > 0. \end{gathered} \tag{2.2}$$

де $R = 10^{-2}$м, $u_{\text{env}} = 300°C$.

2.1 Зведення до безрозмірного випадку

Перетворимо задачу (2.1), (2.2) таким чином, щоб пропали коефіцієнти теплопровідності, щільності, питомної щільності та тепловіддачі. Введемо безрозмірні змінні

$$v(x,t) = \frac{(u(x,t) - u_{\text{cont}})}{u_{\text{cont}}}; \quad \hat{t} = \frac{a^2 t}{R^2}, \quad \hat{x} = x/R; \tag{2.3}$$

де $a^2 = \lambda/(c\rho)$; u_{cont} – деяка величина, яка відповідає, наприклад, u_{env}. Переходячі в задачі (2.1), (2.2) до безрозмірних змінних за формулами (2.3), дістаємо таку задачу для функції $v\left(\hat{x}, \hat{t}\right)$:

$$\frac{\partial v}{\partial \hat{t}} = \frac{1}{\hat{x}^2}\frac{\partial}{\partial \hat{x}}\left(\hat{x}^2\frac{\partial v}{\partial \hat{x}}\right), \quad \hat{x} \in (0, 1), \quad t > 0 \tag{2.4}$$

при чому початкові та крайові умови набудуть наступний вигляд:

$$v(\hat{x},\hat{t})\Big|_{t=0} = v_0(\hat{x}) \quad \forall \hat{x} \in [0,1];$$
$$\left(\frac{\partial v}{\partial \hat{x}} + \hat{\gamma} v\right)\Bigg|_{\hat{x}=1} = 0, \quad \hat{x}^2 \frac{\partial v}{\partial \hat{x}}\Bigg|_{\hat{x}\to 0} = 0. \tag{2.5}$$

де $v_0(\hat{x}) = (u_0(x) - u_{\text{cont}})/u_{\text{cont}}$; $\hat{\gamma} = \gamma R \lambda$.

2.2 Апроксимізація різницевою схемою

Введемо сітку $\overline{\omega}_{h,t} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_t$, де $\overline{\omega}_h = \left\{x_i = ih, h = \frac{1}{N}, i = 0, 1, \ldots N\right\}$. При чому для кожного фіксованого τ, $\overline{\omega}_t = \left\{t_j = j\tau, j = 0, 1, \ldots M\right\}$.

Надалі для зручності будемо вважати, що наше рівняння має вигляд (змінені лише назви змінних):

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \frac{\partial U}{\partial x}\right) \tag{2.6}$$

Введемо заміну

$$W = x\frac{\partial U}{\partial x} \tag{2.7}$$

Далі помножимо обидві частини на x, і проінтегруємо наше початкове рівняння на проміжку $x \in [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ і поділимо обидві частини на h:

$$\frac{1}{h}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} x\frac{\partial U}{\partial t}\,dx = \frac{1}{h}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial W}{\partial x}\,dx \tag{2.8}$$

Використовуючи теорему про середнє значення, винесемо $\frac{\partial U}{\partial t}$ за межі першої частини інтегралу і праву частину, враховуючи $w_i = w(x_i)$. Отримаємо

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} \times \frac{1}{h}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i-\frac{1}{2}}} x\,dx = \frac{1}{h}\left(w_{i+\frac{1}{2}} - w_{i-\frac{1}{2}}\right) \tag{2.9}$$

Як показано у [1, с. 185-208], безрозмірна задача теплопровідності у сферичних координатах (2.4), (2.5) за допомогою інтегро-інтерполяційного метода можна апроксимувати такою системою:

$$\Lambda(\bar{t})y = \frac{1}{x^2}\left(x^2 y_{\overline{x}}\right)_x, \quad \overline{x} = x - \frac{h}{2}, \quad \bar{t} = t + \frac{h}{2} \tag{2.10}$$

Отже, рівняння та крайові умови можна записати таким чином:

$$
\begin{cases}
y_t = \Lambda(\bar{t})y, \quad 0 < x = ih < 1, \quad t = j\tau > 0 \\
y(x,0) = u_0(x), \quad y(1,t) = u_{\text{cont}} \\
y^{(\sigma)} = \sigma\hat{y} + (1-\sigma)y
\end{cases} \tag{2.11}
$$

Маємо:

$$
\begin{cases}
y^j_{t,i} = \sigma \frac{1}{x_i^2} \left(x^2_{i-\frac{1}{2}} y^{j+1}_{\bar{x}} \right)_{x,i} + (1-\sigma) \left(x^2_{i-\frac{1}{2}} y^j_{\bar{x}} \right) \\
\\
\sigma y^{j+1}_{x,0} + (1-\sigma) y^j_{x,0} = \frac{h}{2\cdot 3} y^j_{t,0} \\
\\
-\sigma y^{j+1}_{x,N} - (1-\sigma) y^j_{x,N} = \hat{\gamma} \left(\sigma y^{j+1}_N + (1-\sigma) y^j_N \right) + \frac{h}{2} y^j_{t,N}
\end{cases} \tag{2.12}
$$

Побудуємо тридіагональну систему рівнянь для $j+1$ шару

$$
\begin{cases}
d_0 y_0^{j+1} + c_0 y_1^{j+1} = f_0 \\
\\
l_i y^{j+1}_{i-1} + d_i y^{j+1}_i + u_i y^{j+1}_{i+1} = f_i \\
\\
l_N y^{j+1}_{N-1} + d_N y^{j+1}_N = f_N
\end{cases} \tag{2.13}
$$

де коефіцієнти обчислюється наступним чином:

$$
\begin{aligned}
d_0 = \frac{-\sigma}{h} - \frac{h}{2\cdot 3\tau}, \quad u_0 = \frac{\sigma}{h}, \quad f_0 = -(1-\sigma)\frac{y_1^j - y_0^j}{h} - \frac{h}{2\cdot 3}\frac{y_0^j}{\tau} \\
l_i = \frac{-\sigma x^2_{i-\frac{1}{2}}}{h^2 x_i^2}, \quad d_i = \frac{1}{\tau} + \frac{\sigma\left(x^2_{i-\frac{1}{2}} + x^2_{i+\frac{1}{2}}\right)}{h^2 x_i^2}, \quad u_i = \frac{-\sigma x^2_{i+\frac{1}{2}}}{h^2 x_i^2} \\
f_i = \frac{y_i^j}{\tau} + (1-\sigma)\frac{1}{x_i^2}\left(\frac{x^2_{i+\frac{1}{2}} y^j_{i+1} - \left(x^2_{i-\frac{1}{2}} + x^2_{1+\frac{1}{2}}\right) y_i^j + x^2_{i-\frac{1}{2}} y^j_{i-1}}{h^2} \right) \\
l_N = -\frac{\sigma}{h}, \quad d_N = \frac{\sigma}{h} + \hat{\gamma}\sigma + \frac{h}{2\tau} \\
f_N = -(1-\sigma)\left(\frac{y_N^j - y^j_{N-1}}{h} + \hat{\gamma} y_N^j \right) + \frac{h}{2\tau} y_N^j
\end{aligned} \tag{2.14}
$$

Для нульового шару при $j = 0$ розв'язок задачі теплопровідності збігається з початковими умовами.

3 Практична частина

Для розв'язання тридіагональної системи (2.14) будемо використовувати метод прогонки, який працює за $O(n)$, де n – розмір матриці. Розв'язок системи щукається у вигляді

$$y_i = s_i + y_{i+1} + t_i, \quad i = 0, 1, \dots n-1. \tag{3.1}$$

Коефіцієнти s_i та t_i щукається наступним чином. З системи (2.14) можна побачити, що

$$s_0 = \frac{C_0}{B_0}, \quad t_0 = \frac{-G_0}{B_0}. \tag{3.2}$$

Підставимо y_{i-1} у i-му рівнянні системи:

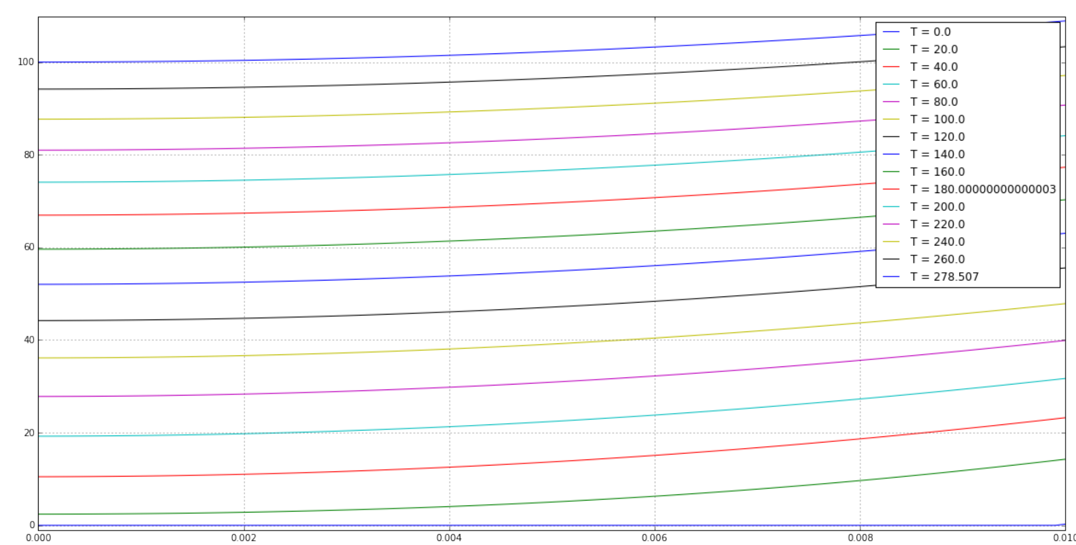
$$A_i \left(s_{i-1} y_i + t_{i-1}\right) - B_i y_i + C_i y_{i+1} = G_i, \tag{3.3}$$

отримаємо рекурентну формулу:

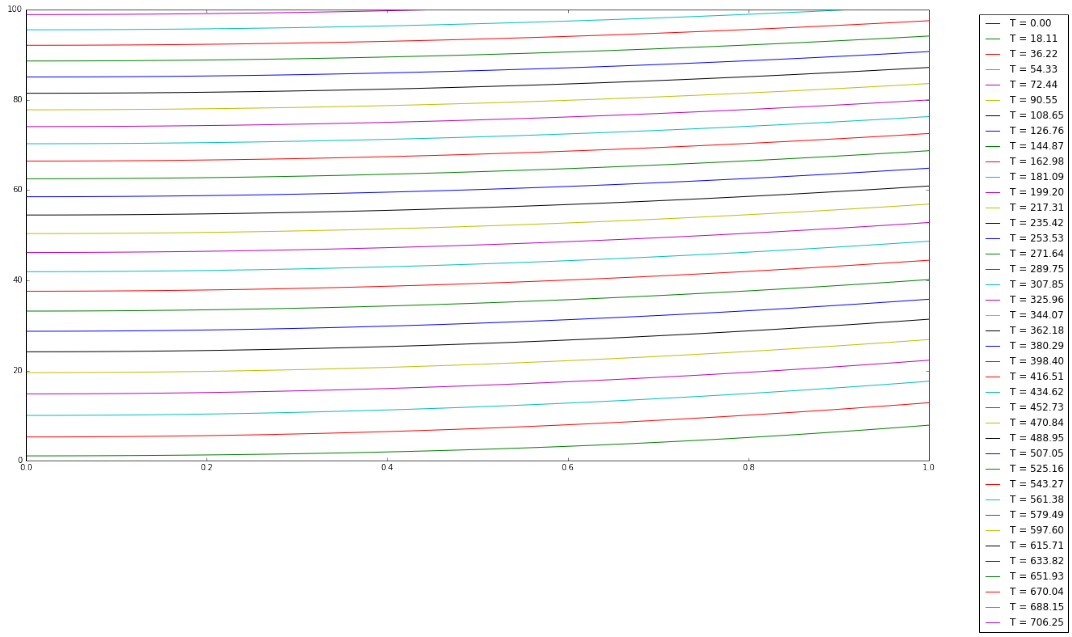
$$s_i = \frac{C_i}{B_i - A_i s_{i-1}}, \quad t_i = \frac{A_i t_{i-1} - G_i}{B_i - A_i s_{i-1}}, \quad i = 1, 2, \dots n. \tag{3.4}$$

У n-му рівнянні системи (2.14) $C_n = 0$, отже, $s_n = 0$, значить з (3.1) випливає що $y_n = t_n$. По формулі (3.1) знаходимо остальні коефіцієнти.

4 Результат роботи програми



Мал. 4.1: $u(t)$ *при фіксованому* t.



Мал. 4.2: $u(t)$ *при фіксованому* t.

Літератури та посилання

[1] А. А. Самарский, *Введение в теорию разностных схем*, Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», М., 1971.

[2] Чан Х. В., *Метод безпосередньої заміни диференціальних похідних частковими на мові Python 3*, 2017. `https://github.com/FalconUA/numerical-analysis/blob/master/s3-3/appointment_s3-3.ipynb`