КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК ТА КІБЕРНЕТИКИ

КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

Лабораторна робота №2 з курсу "Чисельні методи математичної фізики":

"Розв'язання граничної задачі методом безпосередньої заміни диференціальних похідних частковими"

Студент 4-го курсу
групи ОМ
Чан Ха Ву

Викладач:
к.ф.-м.н., доцент
Риженко А. І.

Київ, 01 січня 2017

1 Постановка задачі

Методом безпосередньої заміни диференціальних похідних частковими знайти розв'язок граничної задачі для звичайного диференціального рівняння другого порядку

$$-\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) + p(x)\frac{du}{dx} + q(x)u = f(x), \quad a < x < b \tag{1.1}$$

з наступними крайовими умовами третього роду

$$\begin{aligned} -k(x)\frac{d}{dx}u(x) + \alpha_1 u(x) = \mu_1(x), \quad x = a \\ k(x)\frac{d}{dx}u(x) + \alpha_2 u(x) = \mu_2(x), \quad x = b \end{aligned} \tag{1.2}$$

де $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$. Треба побудувати графік для наближеного розв'язку та апроксимизації. Порівняти з точним (аналітичним) розв'язком.

2 Точний розв'язок

При наступному вигляді функції k, p та q:

$$\begin{aligned} k(x) = k_1 cos(k_2 x) + k_3, \quad p(x) = p_1 sin(p_2 x) + p_3, \quad q(x) = q_1 cos(q_2 x) + q_3, \\ k(x) > 0, \quad p(x) > 0, \quad q(x) > 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Нехай функція f набуває наступний вигляд:

$$\begin{aligned} f(x) = k_1 k_2 m_1 m_2 \cos(m_2 x)\sin(k_2 x) + m_1 m_2^2 \left(k_1 \cos(k_2 x) + k_3\right)\sin(m_2 x) + \\ + p_1 m_1 m_2 \cos(m_2 x)\sin(p_2 x) + p_3 m_1 m_2 \cos(m_2 x) \end{aligned} \tag{2.2}$$

та нехай коефіцієнти μ_1, μ_2 дорівнюють

$$\begin{aligned} \mu_1 = k(x)\frac{d}{dx}\left(m_1 sin(m_2 x) + m_3 cos(m_4 x) + m_5\right)(a) - \\ -\alpha_1\left(m_1 sin(m_2 a) + m_3 cos(m_4 a) + m_5\right) \\ \mu_2 = -k(x)\frac{d}{dx}\left(m_1 sin(m_2 x) + m_3 cos(m_4 x) + m_5\right)(b) - \\ -\alpha_2\left(m_1 sin(m_2 b) + m_3 cos(m_4 b) + m_5\right) \end{aligned} \tag{2.3}$$

У такому випадку, точний (аналітичний) розв'язок задачі (1.1) набуває наступний вигляд:

$$u(x) = m_1 sin(m_2 x) + m_3 cos(m_4 x) + m_5 \tag{2.4}$$

3 Теоретичні відомості

На відрізку $[a, b]$ введемо рівномірну сітку $\overline{\omega}_h = \{x_i = a + ih, i = 0, 1, \ldots, n\}$ з шагом $h = (b - a)/n$. Назвемо цю сітку основною. Розв'язок задачі (1.1) з крайовими умовами (1.2), функціональні коефіцієнти та крайові значення яких набувають вигляд (2.1), (2.2) та (2.3), будемо щукати у вигляді сіткової функції $y_i = y(x_i)$, заданої на точках сітки $\overline{\omega}_h$.

3.1 Апроксимація диференціального рівняння різницевим

Позначимо через k_i, p_i, q_i, f_i значення функції $k(x), p(x), q(x), f(x)$ у точках x_i однорідної сітки $\overline{\omega}_h$. Замінимо похідні в рівняння (1.1) скінченно-різницевими виразами:

$$(k_{i+\frac{1}{2}} y_{\overline{x},i})_{x,i} + p_i y_{\overset{\circ}{x}} + q_i y_i = f_i \tag{3.1}$$

або, у розгорнутому вигляді

$$-\left(k_{i+\frac{1}{2}} \frac{y_{i+1} - y_i}{h^2} - k_{i-\frac{1}{2}} \frac{y_i - y_{i-1}}{h^2}\right) + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i \tag{3.2}$$

де $k_{i+\frac{1}{2}} = k(x_i + \frac{h}{2})$ та $i = 1, 2, \ldots n - 1$. Перегруппуємо коєфіцієнти при змінних $y_0, y_1, \ldots y_n$ та запишемо рівняння (3.2) у вигляді:

$$A_i y_{i-1} + B_i y_i + Ci y_{i+1} = G_i, i = 1, 2, \ldots n. \tag{3.3}$$

звідси

$$A_i = -k_{i+\frac{1}{2}} - \frac{h}{2} p_i, \quad B_i = k_{i+\frac{1}{2}} + k_{i-\frac{1}{2}} + h^2 q_i, \quad C_i = -k_{i+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} p_i. \tag{3.4}$$

Нескладно переконатись, що така різницева схема апроксимує задачу (1.1) з похибкою другого порядку $O(h^2)$. Також, можна показати що схема збігається до точного розв'язку у класі гладких функції коефіцієнтів, при якому $k(x) > k_0 \geq 0$ та $q(x) > 0$. Ідея для доведення цього факту можна знайти у [2, с. 106–108].

3.2 Апроксимація крайових умов

Помітимо, що у рівнянні (3.4) не вистачає два відношення для пощуку розв'язку $y_i = y(x_i)$. Ці відношення можна задати, апроксимуючи крайові умови (1.2). Розглянемо дві різницеві схеми для цих умов.

Явна схема апроксимування умов (1.2) виглядає наступним чином:

$$-k_0 y_{x,0} + \alpha_1 y_0 = \mu_1, \quad k_n y_{\overline{x},n} + \alpha_2 y_n = \mu_2 \tag{3.5}$$

або, у розгорнутому вигляді

$$-k_0\frac{y_1-y_0}{h}+\alpha_1 y_0=\mu_1,\quad k_n\frac{y_n-y_{n-1}}{h}+\alpha_2 y_n=\mu_2 \tag{3.6}$$

Використані скінченно-різницеві відношення для апроксимації похідних (3.5) забеспечує нам тільки перший порядок апроксимації відносно шага h рівномірної сітки $\overline{\omega}_h$. Відповідно, загальний порядок апроксимації диференціальної задачі (1.1), (1.2) за допомогою різницевих схем (3.2), (3.6) – перший, тобто $O(h)$.

Запишемо (3.6) у вигляді:

$$-B_0 y_0+C_0 y_1=G_0,\quad A_n y_{n-1}-B_n y_n=G_n. \tag{3.7}$$

Отже, об'єднуючи (3.3) та (3.7) отримуємо лінійну систему рівнянь у вигляді:

$$\begin{bmatrix} G_0\\ G_1\\ g2\\ \vdots\\ G_{n-1}\\ G_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B_0 & C_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ A_1 & B_1 & C_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & A_2 & B_2 & C_2 & \dots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & A_{n-1} & B_{n-1} & C_{n-1}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_n & B_n \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} y_0\\ y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_{n-1}\\ y_n \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

Побудуємо різницеву схему для апроксимації крайових умов (1.2) без підвищення щільності сітки $\overline{\omega}_h$ (тобто без зменшення шагу h). Розглянему таку схему:

$$\begin{aligned} -k_{\frac{1}{2}}\frac{y_{\frac{1}{2}}-y_{-\frac{1}{2}}}{h}+\alpha_1\frac{y_{\frac{1}{2}}-y_{-\frac{1}{2}}}{2}&=\mu_1,\\ k_{n-\frac{1}{2}}\frac{y_{n+\frac{1}{2}}-y_{n-\frac{1}{2}}}{h}+\alpha_1\frac{y_{n+\frac{1}{2}}-y_{n-\frac{1}{2}}}{2}&=\mu_2. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Можна розглянути цю схему як різницева схема на розширенній сітки $\bar{\omega}'_h=\{x=x_i, x_i=a-\frac{h}{2}+ih, i=0,1,\dots n+1\}$. Легко довести, що така схема має другий порядок апроксимації, тобто $O(h^2)$. Ідея для доведення цього факту можна знайти у [2, с. 148–149].

4 Практична частина

Для розв'язання тридіагональної системи (3.8) будемо використовувати метод прогонки, який працює за $O(n)$, де n – розмір матриці. Розв'язок системи щукається у вигляді

$$y_i=s_i+y_{i+1}+t_i,\quad i=0,1,\dots n-1. \tag{4.1}$$

Коефіцієнти s_i та t_i щукається наступним чином. З системи (3.8) можна побачити, що

$$s_0 = \frac{C_0}{B_0}, \quad t_0 = \frac{-G_0}{B_0}. \tag{4.2}$$

Підставимо y_{i-1} у i-му рівнянні системи:

$$A_i \left(s_{i-1} y_i + t_{i-1}\right) - B_i y_i + C_i y_{i+1} = G_i, \tag{4.3}$$

отримаємо рекурентну формулу:

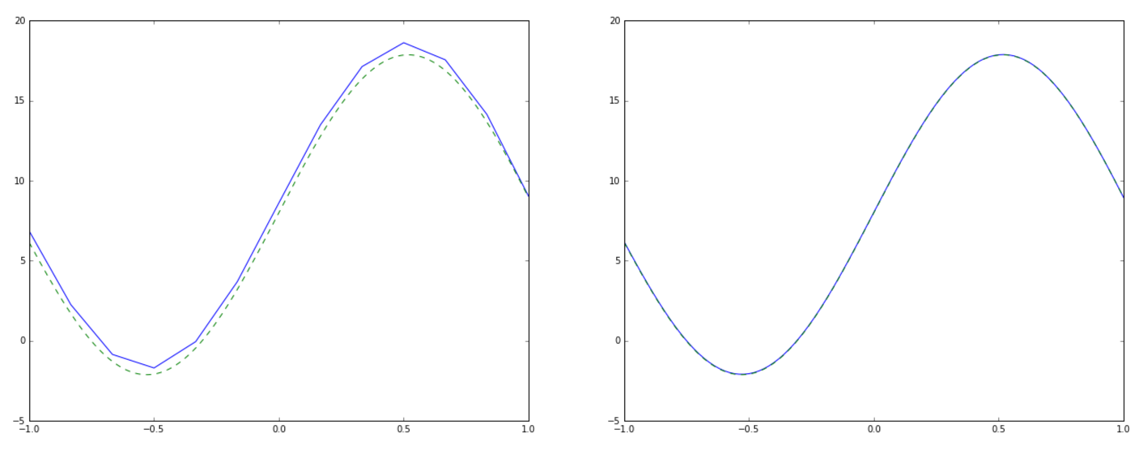
$$s_i = \frac{C_i}{B_i - A_i s_{i-1}}, \quad t_i = \frac{A_i t_{i-1} - G_i}{B_i - A_i s_{i-1}}, \quad i = 1, 2, \ldots n. \tag{4.4}$$

У n-му рівнянні системи (3.8) $C_n = 0$, отже, $s_n = 0$, значить з (4.1) випливає що $y_n = t_n$. По формулі (4.1) знаходимо остальні коефіцієнти.

5 Результат роботи програми

Надалі колір для функцій: зелений – точний розв'язок, маджента(пурпурний) - чисельний розв'язок.

a	b	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	k_1	k_2	k_3	p_1	p_2	p_3	q_1	q_2	q_3	α_1	α_2
-1	1	10	3	1	1	7	1	2	1	4	1	3	1	2	1	1	1

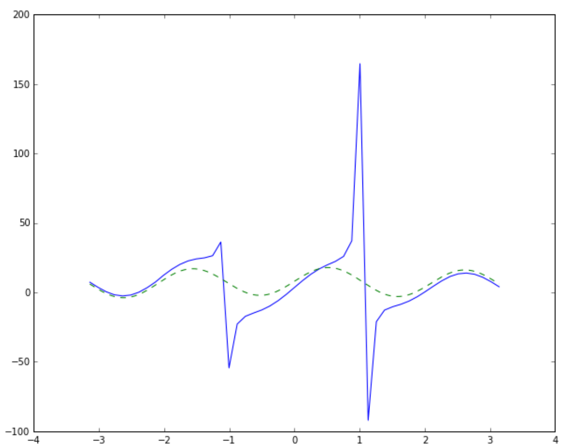


(a) *При $n = 12$* (b) *При $n = 100$*

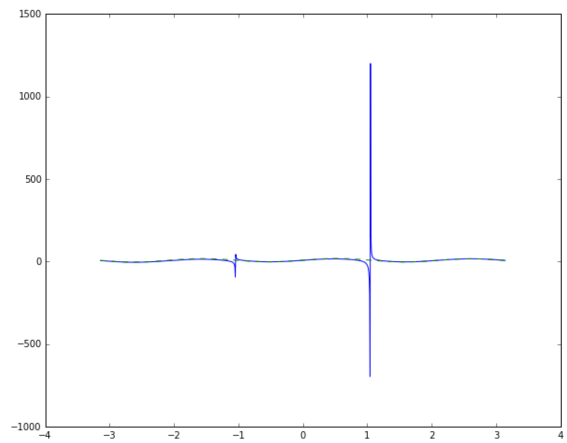
Мал. 5.1: *Результат роботи програми [3] при параметрах, наведених у таблиці. Зеленим пунктиром зображено точний розв'язок, а пурпурною лінією – чисельний розв'язок. Можна побачити, що навіть при малих значеннях n, метод дає дуже гарні результати апроксимації.*

Наведемо приклад, де чисельний роз'язок методом безпосередньої заміни диференціальних похідних частковими не збігається до точного розв'язку.

a	b	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	k_1	k_2	k_3	p_1	p_2	p_3	q_1	q_2	q_3	α_1	α_2
$-\pi$	π	10	3	1	1	7	2	2	1	4	1	1	1	2	1	1	1



(a) *При* $n = 12$



(b) *При* $n = 100$

Мал. 5.2: *Результат роботи програми [3] при параметрах, наведених у таблиці. Зеленим пунктиром зображено точний розв'язок, а пурпурною лінією – чисельний розв'язок. Можна побачити, що у цьому випадку чим менше шаг* h *однорідної сітки* $\overline{\omega}_h$, *тим більше похибка апроксимації.*

У результаті, зображеної на (мал. 5.2) можна побачити, що різницеві схеми (3.2) та (3.6) не збігається до розв'язку (2.4) задачі (1.1). Це можна пояснити тим, що, як зазначено у пункті 3.1, розв'язок збігається тільки коли $k(x) > 0$ та $q(x) \geq 0$. У нашому прикладі, при $k_1 = 2$ та $k_3 = 1$, функція k може приймати значення менше нуля, а отже, не задовольняє умовам збіжності.

Літератури та посилання

[1] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, *Об однородных разностных схемах*, Журнал вычислительной математики и математической физики, 1961.

[2] А. А. Самарский, *Введение в теорию разностных схем*, Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», М., 1971.

[3] Чан Х. В., *Метод безпосередньої заміни диференціальних похідних частковими на мові Python 3*, 2017. `https://github.com/FalconUA/numerical-analysis/blob/master/s3-2/appointment_s3-2.ipynb`