

Appunti di Fisica

Daniele Iamartino

12 giugno 2010

Parte I Corpi Rigidi

Definizione di corpo rigido Si dice corpo rigido un sistema di punti materiali in cui le distanze (posizioni relative) tra tutti i punti materiali rimangono costanti durante il moto del sistema (cioè indipendentemente dal **sistema di forze e momento** applicato).

Ci sono due casi elementari di moto per un corpo rigido:

1. Moto traslatorio puro (tutte le particelle compiono traiettorie parallele)
2. Moto rotatorio puro (tutte le particelle compiono traiettorie circolari intorno al medesimo asse di rotazione, con la medesima velocità angolare istantanea)

Primo caso: (figura)

Allora posso descrivere il moto del corpo rigido mediante il solo **centro di massa**.

$$F^{(E)} = M \cdot a_{CM} \quad (\text{in base al teorema del centro di massa})$$

Secondo caso: (figura)

Osservazione: Ogni moto di n Corpo Rigido si potrà scomporre in un moto traslatorio puro e un moto rotatorio pureo (entrambi istantanei).

Moto rotatorio puro (figura)

L'asse di rotazione è fisso. Scelgo i sistemi di riferimento in modo che z coincida con l'asse di rotazione fisso del corpo rigido.

$$V = \omega \times \vec{R} = \omega \cdot d\hat{U}_\theta$$

$$V = \omega \cdot r \cdot \sin\alpha \cdot \hat{U}_\theta$$

$$E_c = \sum_i E_{c_i} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Con il corpo rigido di n punti materiali.

Questo vale per ogni *sistema di punti materiali*. In particolare per il corpo rigido in moto rotatorio vale il vincolo cinematico: $\vec{V}_i = \omega \cdot d_i \cdot \hat{U}_\theta$

Quindi: $E_c = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot \omega^2 \cdot d_i^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{i=1}^n m_i \cdot d_i^2 \right) \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2$, dove I è il momento d'inerzia.

Osservazioni:

- Il momento d'inerzia I dipende dalla massa del corpo rigido e dalla sua geometria.
- Il momento d'inerzia I dipende non solo dal corpo rigido in esame ma anche dall'asse di rotazione (z).
- Il momento d'inerzia I è costante se l'asse di rotazione è fisso, o meglio se è calcolato rispetto ad un asse fisso.
- Il momento d'inerzia I per un corpo rigido continuo è definito da $I = \int \int \int_c (d^2(\vec{r}) \cdot p(\vec{r}) \cdot dV)$ dove $p(\vec{r}) \cdot dV$ è la massa infinitesima.

Sempre valutando il moto rotatorio puro:

$$\vec{L}_o = \sum_{i=1}^n \vec{L}_{o,i} = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times m_i \cdot \vec{v}_i) \text{ nel caso di un corpo rigido discreto,}$$

mentre nel caso di un corpo rigido "continuo" abbiamo la seguente forma: $\vec{L}_o = \int \int \int_c (\vec{r} \times \vec{V}(\vec{r}) \cdot p(\vec{r}) \cdot dV)$

Osservazione: In generale, dato un corpo rigido in rotazione intorno ad un asse fisso (z) con movimento d'inerzia I_z (rispetto all'asse z di rotazione), non è facile stabilire un legame tra \vec{L}_o e I_z . (figura)

$V_1 = V_2 = \omega \cdot d \cdot \sin\alpha$ trovo che \vec{L}_o non è diretto lungo z ma procede intorno a z .

$$\vec{L}_o \cdot \hat{U}_z = L_z = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times m_i \cdot \vec{V}_i) \cdot \hat{U}_z = \sum_{i=1}^n (m_i \cdot d_i^2) \cdot \omega = I_z \cdot \omega$$

Proposizione: $L_{(0)z} = I_z \cdot \omega$ La componente assiale (L_z) del momento angolare di un corpo rigido possiede tre assi particolari detti assi principali d'inerzia (a, b, c). Per i quali se il corpo rigido viene posto in rotazione intorno ad uno di tali assi il momento angolare è parallelo a $\vec{\omega}$, cioè $\vec{L}_{(0)a} = I_a \cdot \vec{\omega}$, $\vec{L}_{(0)b} = I_b \cdot \vec{\omega}$, $\vec{L}_{(0)c} = I_c \cdot \vec{\omega}$.

Osservazione: Se sono presenti assi di simmetria rotazionale in un corpo rigido omogeneo ($p(\vec{r}) = p$ costante), allora tali assi sono assi principali d'inerzia.

$$I_x = \int \int \int_c (y^2 + z^2) \cdot \rho \cdot dV = \rho \cdot \int \int \int_c (y^2 + z^2) \cdot dV$$

$$I_y = \int \int \int_c (x^2 + z^2) \cdot \rho \cdot dV = \rho \cdot \int \int \int_c (x^2 + z^2) \cdot dV$$

$$I_z = \int \int \int_c (x^2 + y^2) \cdot \rho \cdot dV = \rho \cdot \int \int \int_c (x^2 + y^2) \cdot dV$$

Se poi il corpo rigido è sottile nella direzione z posso assumere z e O nelle formule I_x e I_y :

$$I_x = \rho \cdot \int \int \int_c y^2 \cdot dV$$

$$I_y = \rho \cdot \int \int \int_c x^2 \cdot dV$$

$$I_z = I_x + I_y$$

Teorema di Steiner $I_z = I_{z'} + M \cdot a^2$ (figura)

Dimostrazione:

- d = distanza del punto P del corpo rigido da z .
- $d' =$ distanza del punto P del corpo rigido da z' .
- $d^2 = x'^2 + (a + y')^2$
- $I_z = \rho \cdot \iiint_c d^2 \cdot dV = \iiint_c \rho \cdot d' \cdot dV + a^2 \cdot \iiint_c \rho \cdot dV + \iiint_c \rho \cdot 2 \cdot a \cdot y' \cdot dV = I_{z'} + M \cdot a^2 + 2 \cdot a \cdot M \cdot \iiint_c \frac{y' \cdot \rho \cdot V}{M}$
- $r_{CM} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \cdot \frac{m_i}{M}$ (forma discreta)
- $r_{CM} = \iiint_c \vec{r} \cdot \frac{\rho(\vec{r}) \cdot dV}{r}$ (forma continua)

Lezione del 12/05 - saltata

Parte II

Statica dei fluidi

Liquido perfetto Fluido che è:

- Incompattabile e indilatabile (volume costante)
- Privo di attriti interni (viscosità nulla)

Pressione Dato lo sforzo $\phi = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta S} = \frac{d\vec{F}}{dS}$ si definisce pressione lo sforzo normale $p = \frac{d\vec{F}}{dS} \cdot \hat{U}_N$ misurata per il sistema internazionale in *Pascal* $[p] = [F] \cdot [L]^{-2}$

Altre unità di misura sono il *bar*, *atm* e *torr*.

MANCA ROBA

Parte III

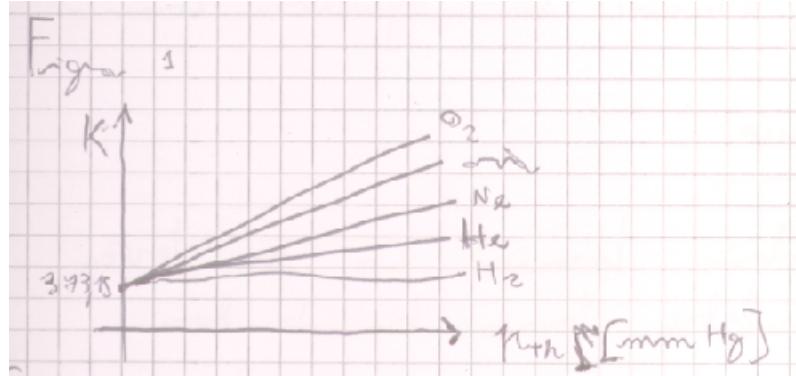
Lezione del 21 Maggio 2010

Temperatura empirica $T = \frac{273.16 K}{p_{tr}} p$

Osservazioni:

- Un buon termometro non deve alterare la temperatura del corpo di cui si desidera misurare la temperatura. Perché ciò accada la massa del mezzo termometrico (gas nel termometro a gas) deve essere molto piccola rispetto a quella del corpo di cui si desidera misurare la temperatura.

- p_{tr} nel termometro a gas dipende dal **tipo di gas**, dal suo **volumne** e anche dalla **massa** del termometro.
- Termometri a gas diversi misurano anche temperature un po' diverse



- Per $p_{tr} \rightarrow 0$ (pur di utilizzare un gas molto rarefatto) ho che la **temperatura** T misurata da un termometro a gas **non dipende né dal tipo di gas né da parametri costruttivi** (volume o massa di gas utilizzato). Questo consente di definire una temperatura cosiddetta "assoluta", indipendente dal sistema termometrico utilizzato per misurarla. Essa è definita come $\lim_{p_{tr} \rightarrow 0} \frac{273.16 K}{p_{tr}} p$

Scale termometriche

Scala Celsius Utilizza due punti fissi: la temperatura t_1 dell'acqua allo **stato solido** e la temperatura t_2 allo **stato gassoso** (tutto considerato ad 1 atm di pressione). $t_1 = 0^\circ C$ e $t_2 = 100^\circ C$, il grado celsius è definito come $\Delta t = \frac{t_2 - t_1}{100}$. Per la conversione: $t(^{\circ}C) = T(K) - 273.15 K$ (15 e non 16)

Scala Fahrenheit Utilizza due punti fissi t_1 e t_2 del corpo umano sano, pari a $t_1 = 96^\circ F$ e la temperatura $t_2 = 0^\circ F$ di solidificazione dell'acqua di mare ad 1 atm di pressione. La legge di conversione è data da $t(^{\circ}F) = 1.8 \cdot t(^{\circ}C) + 32^\circ F$

Fase di un sistema termodinamico Si dice fase di un sistema termodinamico ogni porzione del sistema termodinamico che possiede una composizione chimica e proprietà fisiche uniformi.

Osservazione: in generale in un sistema termodinamico che grandezze termodinamiche necessarie per descrivere lo stato termodinamico del sistema saranno: pressione, volume, temperatura, concentrazione dei componenti ($p, V, T, C_{chimica}, C_{fas}$).

Regola delle fasi (di Gibbs) In un sistema termodinamico con C costituenti chimici e F fasi, i gradi di libertà (numero delle grandezze termodinamiche indipendenti) è $N = C + 2 - F$.

Se ad esempio ho un sistema monocomponente, monofasico ($C = 1$, $F = 1$) dalla regola delle fasi ottengo che $N = 2$. Avrò quindi una equazione di stato che lega le grandezze termodinamiche p, V, T con una funzione del tipo $F(p, V, T) = 0$

Equazione di stato di un gas ideale Come tutte le equazioni di stato è empirica, sperimentale.

Prima legge di Gay-Lussac A volume costante la pressione di un gas è proporzionale alla sua temperatura (in Kelvin). $V = \text{costante} \Rightarrow p = k \cdot T$ con K che dipende dal volume del gas e dal suo numero di *moli*. Il numero di moli $n = \frac{N}{N_A}$ con N numero di particelle e N_A numero di Avogadro ($N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$)

Seconda legge di Gay-Lussac A pressione costante, il volume *molare* (volume di una mole) di un gas è proporzionale alla temperatura (misurata in Kelvin). $p = \text{costante} \Rightarrow v = \left(\frac{V}{n}\right) = k' \cdot T$ con K' che dipende dall'pressione.

Legge di Boyle Presa una mole di gas, il prodotto pressione-volume dipende solo dalla temperatura $p \cdot v = f(T)$

Osservazione: Pur di prendere gas a temperatura non troppo bassa e pressione non troppo elevata; k e k' non dipendono dal tipo di gas.

Gas ideale Si definisce quindi gas ideale o gas perfetto un gas che obbedisce sempre alle leggi di *Gay-Lussac* e *Boyle*.

Equazione di stato Dalla prima legge di *Gay-Lussac* (vedi termometro a gas) possiamo scrivere che $T = \frac{p^*}{p_{tr}} \cdot 273.15 K$ dove $p^* = k \cdot T$ e $p_{tr} = k \cdot 273.16 K$. Sia v^* il volume molare del gas alla pressione p^* e temperatura T . Si ha in questo caso che $T = \frac{p^* \cdot v^*}{p_{tr} \cdot v^*} \cdot 273.16 K$. Ma per ipotesi dalla prima legge di *Gay-Lussac* deve essere $v^* = v_{tr}$, in generale quindi scrivo:

$$p^* \cdot v^* \text{ come } p \cdot v$$

$$p_{tr} \cdot v^* \text{ come } (p \cdot v)_{tr}$$

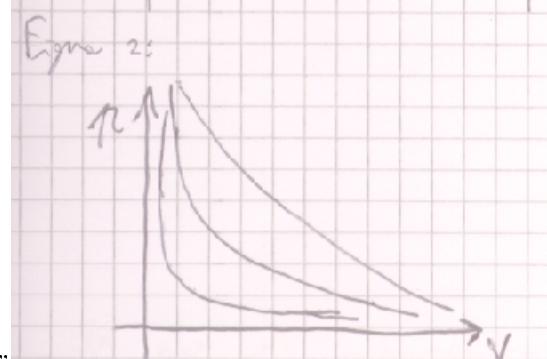
Ricordo poi che $p \cdot v = f(T)$ in base alla legge di *Boyle*, ottengo quindi: $T = \frac{(p \cdot v)_T}{(p \cdot v)_{tr}} \cdot 273.16 K$, e quindi $p \cdot v = \frac{(p \cdot v)_{tr}}{273.16 K} \cdot T$. Ricordando ancora *Boyle* $(p \cdot v)_{tr} = \text{costante}$ e quindi $\frac{(p \cdot v)_{tr}}{273.16 K} = \text{costante} = R = 8.31 \frac{J}{(mol \cdot K)}$ (costante universale dei gas ideali). Se ora considero n moli di gas con $n = \frac{V}{v}$ quindi $V = n \cdot v$ trovo:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

che è l'**equazione di stato del gas prefetto**.

Diagrammi di stato Sono dei grafici che rappresentano l'insieme degli stati di equilibrio assunti dal sistema termodinamico in esame nel corso di un dato processo di trasformazione. Per i gas ideali sono diagrammi del piano: bastano infatti **due** variabili termodinamiche per determinare univocamente lo stato di un gas ideale.

Il piano (p, v) è privilegiato in quanto il prodotto $p \cdot \Delta v$ ha le dimensioni di un



lavoro. Tale piano è detto “*piano di Clapeyron*”

Sappiamo che $p \cdot v$ è costante e anche che $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$, quindi dire che $p \cdot V$ è costante significa dire che T è costante, dunque le iperboli nel piano di *Clapeyron* rappresentano stati di equilibrio a temperatura costante.

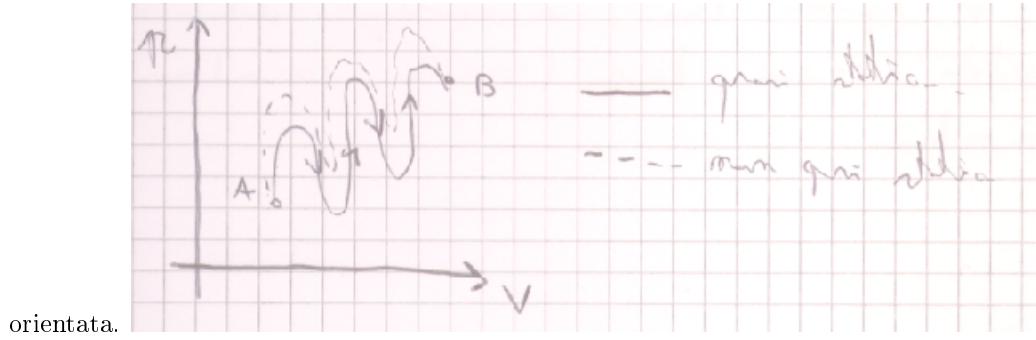
Parte IV

Lezione del 25 Maggio 2010

Trasformazioni quasi statiche Sono trasformazioni ideali costituite da una successione (infinita) di stati di equilibrio (infinitamente vicini l'uno all'altro)

Osservazioni:

- Una trasformazione quasi statica è una trasformazione infinitamente lenta.
- Le trasformazioni quasi statiche possono essere rappresentate in forma matematica attraverso una legge matematica di trasformazione che lega tra loro le grandezze termodinamiche del sistema.
- Nel piano di stato scelto per la rappresentazione del sistema termodinamico con trasformazione quasi statica assume la forma di una curva continua



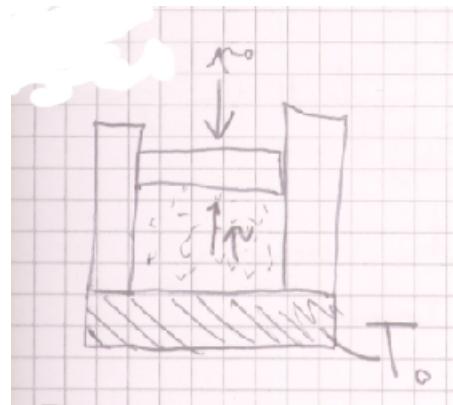
- Trasformazioni non quasi statiche sono trasformazioni che non posso rappresentare attraverso una relazione matematica tra le variabili (o grandezze) termodinamiche del sistema. Le rappresentero nel piano di stato come curve tratteggiate.

Trasformazione quasi statica reversibile È una trasformazione che si compie in assenza di attriti (fenomeni che dissipano l'energia meccanica)

Osservazione: In una trasformazione reversibile, è possibile in ogni punto della trasformazione, invertire la trasformazione stessa cambiando di una quantità infinitesima le cause che sono responsabili della trasformazione stessa.

Condizioni necessarie alla reversibilità

1. Le cause della trasformazione sono infinitesime
2. La trasformazione è infinitamente lenta
3. Il verso della trasformazione può essere invertito cambiando di un infinitesimo le cause della trasformazione



Esempio di trasformazione reversibile

Inizialmente il sistema termodinamico è in equilibrio meccanico (quindi $p = p_e$) ed è in equilibrio termico ($T = T_0$). Essendo un gas vale ovviamente l'equazione di stato del gas (perfetto): $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$.

Dopo la trasformazione avrà una temperatura $T = T_0$, però $p_F = ?$ e $V_F = ?$. Ipotizziamo che $T = T_0$ costante; abbiamo quindi una trasformazione isoterma.

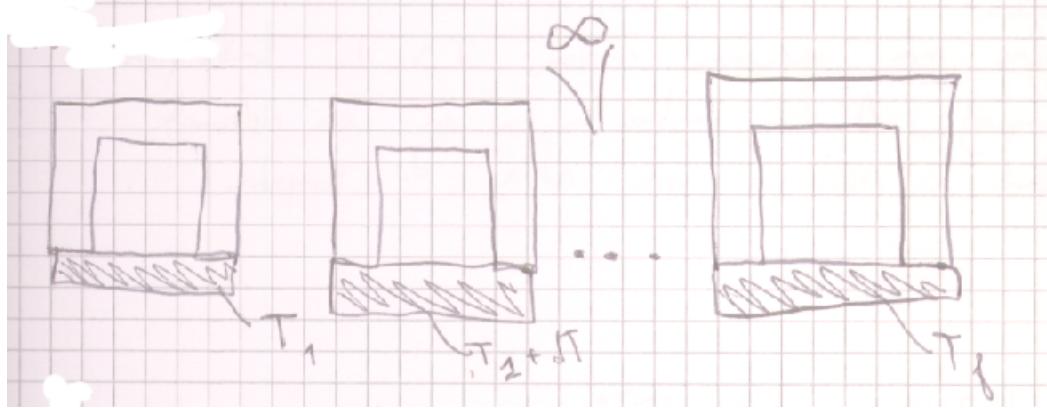
Se aggiungiamo sopra la parete superiore r pesi di massa infinitesima, uno alla volta aspettando che il sistema raggiunga l'equilibrio, avremo che:

$$p_F = p_e + \frac{r \cdot (m \cdot g)}{S} > p_i$$

$$V_F = \frac{n \cdot R \cdot T_0}{p_F} < V_i$$

e l'equazione di stato diventa $p_i \cdot V_i = n \cdot R \cdot T_i$

Esempio di trasformazione reversibile con solo scambio di calore



Cambiando in modo progressivo la temperatura del termostato da T_1 aggiungendo man mano dT fino ad arrivare a T_{finale} . In questo caso la trasformazione è a volume V_0 costante.

Lavoro di un sistema termodinamico

Caso dei sistemi idrostatici Si tratta di sistemi a massa costante e pressione “uniforme” in condizioni di equilibrio.

Sistemi fluidi con estensione verticale limitata o con bassa densità sono dei buoni sistemi idrostatici.

Consideriamo un sistema costituito da un gas in un cilindro che reca un pistone mobile su cui insiste la pressione atmosferica. Supponiamo assenti gli attriti e immaginiamo che per qualche causa non meglio specificata il pistone si sposti di un tratto dx (positivo se corrisponde ad un aumento del volume della camera cilindrica).

Calcoliamo il lavoro fatto dall'ambiente esterno sul sistema. (figura 6)

$$dL_e = -p_e \cdot S \cdot \hat{U}_x \cdot dx \cdot \hat{U}_x = -p_e \cdot S \cdot dx = -p_e \cdot dV$$

dove abbiamo che $-p_e \cdot S \cdot \hat{U}_x$ corrisponde a $\overrightarrow{F^{(E)}}$, mentre $dx \cdot \hat{U}_x$ corrisponde a $d\vec{r}$.

Osservazione: Il lavoro vatto dall'Universo ($STD \cup A$) sarà pari a 0 perché valendo il principio di conservazione dell'energia dell'Universo e essendo $L^U = \Delta E^U = 0$ avremo che $dL_e + dL = dL_U = 0 \Rightarrow \delta L = \delta L_e$.

Concludendo, in qualunque trasferimento di un sistema termodinamico il lavoro compiuto dal sistema è pari al lavoro fatto dall'ambiente esterno cambiato di segno.

Per una trasformazione arbitraria (reversibile o meno), finita di un sistema termodinamico, potrò calcolare il lavoro compiuto dal sistema come:

$$L_{A \rightarrow B} = \int_A^B \delta L_e = \int_A^B p_e(V) \cdot dV$$

Ciò non significa però che $p = p_e$!

Se poi la trasformazione è reversibile allora ovviamente sarà $p = p_e$ durante tutta la trasformazione e potrò determinare il lavoro compiuto dal sistema come $L = \int_A^B p(V) \cdot dV$ e $p(V)$ si potrà esprimere attraverso l'equazione di stato.

Interpretazione geometrica del lavoro Nel piano di *Clapeyron* il prodotto $p \cdot d \cdot V$ rappresenta l'area sottesa dell'elemento infinitesimo di trasformazione. Quindi: $L = \int_A^B p(V) \cdot dV$ è l'area sottesa dalla trasformazione. (figura 7)

$$L = \oint p(V) \cdot dV \text{ (area tratteggiata)}$$

$L_{A \rightarrow A'}$ (area tratteggiata e area punteggiata)

$L_{A' \rightarrow B=A}$ (- area punteggiata)

Esempio Lavoro del gas ideale in alcune trasformazioni notevoli reversibili. Poichè sono trasformazioni reversibili varrà sempre l'equazione di stato

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

Casi notevoli di trasformazioni reversibili sono:

- $p =$ costante (trasformazione *isobara*) segmento orizzontale nel piano pV
- $V =$ costante (trasformazione *isocora*) segmento verticale nel piano pV
- $T =$ costante (trasformazione *isoterma*) $p \cdot V =$ costante \Rightarrow iperbole nel piano pV

Possiamo calcolare il lavoro in ciascuna trasformazione:

- *Isobara* a $p =$ costante (p_0), $L_{A \rightarrow B} = \int_A^B p(V) \cdot dV = \int_A^B p_0 \cdot dV = p_0 \cdot (V_B - V_A)$

- *Isocora* a $v =$ costante (V_0), $L_{C \rightarrow D} = \int_C^D p(V) \cdot dV = 0$

- *Isoterma* a $T =$ costante (T_0), $L_{E \rightarrow F} = \int_E^F p(V) \cdot dV = \int_E^F \frac{n \cdot R \cdot T_0}{V} \cdot dV = n \cdot R \cdot T \cdot \int_{V_E}^{V_F} \frac{1}{V} \cdot dV = n \cdot R \cdot T_0 \cdot \ln\left(\frac{V_F}{V_E}\right)$

Il calore Definiamo calore quell'ente fisico che due sistemi termodinamici posti in contatto tra loro (attraverso una parete conduttrice) si scambiano per effetto di una diversa temperatura.

Esperimento di Joule Dalla lettura di Δl , noto il calore latente di Fusion e del ghiaccio posso determinare la quantità Q di calore assorbita dal calorimetro di *Bunsen*, cioè a meno del segno la quantità di calore ceduta dal sistema termodinamico in esame (H_2O liquida all'interno del beker ove ruotano le pale del mulinello).

Noto il tratto di caduta delle due masse, h e la velocità diregime di tale caduta, V in base al teorema delle forze vive si determina il lavoro fatto dall'ambiente esterno al sistema terminodimanico

$$\begin{aligned}\Delta E_e &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot M \cdot v^2 \\ L_{FP} &= 2 \cdot M \cdot g \cdot h \\ L_e &= 2 \cdot M \cdot g \cdot h - M \cdot v^2 \\ L &= -L_e = M \cdot v^2 - 2 \cdot M \cdot g \cdot h\end{aligned}$$

Principio di equivalenza In una trasformazione ciclica il rapporto tra L compiuto dal sistema e la quantità di calore Q scambiata dal sistema è una costante universale (indipendente dal tipo di sistema termodinamico e dalla trasformazione compiuta). Tale costante vale $4,186 \frac{J}{Cal} = J$ ove *Cal* è la caloria.

Osservazione: convenzione dei segni sul lavoro e sul calore:

- $L > 0$ se è compiuto dal sistema
- $L < 0$ se è subito dal sistema
- $Q > 0$ se è assorbita dal sistema
- $Q < 0$ se è caduta dal sistema

Convenzione nata nel contesto applicativo delle macchine termiche.

Definizione di capacità termica Si definisce capacità termica media C_m di un sistema il rapporto tra la quantità di calore assorbita e la conseguente variazione di temperatura del sistema stesso.

$$C_m = \frac{Q}{\Delta T}$$

In senso stretto:

$$C = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{Q}{\Delta T} = \frac{\delta Q}{dT}$$

Osservazione: C è in generale funzione di T

Calore specifico $c = \frac{C}{m}$, capacità termica per unità di massa

Caloria Quantità di calore assorbita da 1grammo di acqua distillata per variare la propria temperatura da $14,5^\circ C$ a $15,5^\circ C$

Osservazione: $C_{H_2O} = 1 \frac{Cal}{g \cdot ^\circ C}$ nell'itorno di $15^\circ C$

Calore specifico molare $c_{mol} = \frac{C}{n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\delta Q}{dT}$

Capacità termica del polo di sostanza.

Osservazione: C (e quindi C e C_{mol}) dipendono in generale dalla trasformazione considerata.

Parte V

Lezione del 27 Maggio 2010

Primo principio della termodinamica Preso un sistema chiuso (infiniti scambi di materia con ambiente)

- lavoro meccanico
- calore

Evidenza sperimentale fondamentale La somma di tutte le forme di energia scambiate da un sistema termodinamico chiuso in una qualunque trasformazione dipende solo dagli stati termodinamici iniziale A e finale B della trasformazione.

Energia interna È definito come l'indice di stato fisico di un sistema termodinamico chiuso la funzione U tale che $\Delta U = U_B - U_A = Q - L$, essendo $A \rightarrow B$ la generica trasformazione termodinamica compiuta dal sistema termodinamico quando scambia con l'ambiente una energia $Q - L$.

$Q > 0$ se assorbito dal sistema termodinamico; $Q < 0$ se fatto dal sistema termodinamico.

Osservazione: U dipende solo dallo stato termodinamico in cui si trova il sistema e non da come vi è giunto (quale trasformazione ha compiuto in tale stato), ed è definita a meno di una costante arbitraria.

Enunciato del primo principio della termodinamica In una qualsiasi trasformazione termodinamica di un sistema chiuso, vale la relazione che $Q - L = \Delta U$.

(Sembra essere ciò che è già stato detto per l'energia interna, ma ora è espresso in modo generalizzato!)

Osservazioni:

- Il primo principio della termodinamica non è altro che una riformulazione (particolare) del più generale principio di conservazione dell'energia dell'universo (sistema termodinamico isolato)
- Trasformazione ciclica: $B \equiv A \Rightarrow \Delta U = U_B - U_A = 0$ (essendo U funzione solo dello stato), segue che il primo principio diviene $Q = L$

- Il moto perpetuo di prima specie non è possibile. Infatti se si vuole che una macchina di qualunque tipo compia lavoro, cioè $L \neq 0$, si vuole che possa farlo in eterno e senza assorbire energia, cioè $Q = 0$. Allora basta che esista un ciclo termodinamico che soddisfi $Q = 0, \Delta U = 0$ e $L \neq 0$, che però è **impossibile** (in base al primo principio infatti se $Q = 0$ anche $L = 0$ per la relazione $Q - L = \Delta U$).

Lavoro adiabatico Consideriamo un sistema termodinamico chiuso che compie trasformazione adiabatica ($Q = 0$). Diciamo “lavoro adiabatico” il lavoro compiuto in una trasformazione adiabatica. Sperimentalmente si osserva che il lavoro adiabatico non dipende dalla trasformazione ma solo dagli stati iniziale e finale. Quindi si può introdurre un indice di stato fisico U (funzione solo dello stato termodinamico), tale che $L_{ad} = -\Delta U_{AB} = U_A - U_B$.

Calore È la quantità Q di calore ceduta dall’ambiente ad un sistema termodinamico chiuso in una data trasformazione $A \rightarrow B$ nella quale il sistema termodinamico compia il lavoro L . $Q = L - L_{ad}$ ove L_{ad} è il lavoro compiuto dal sistema termodinamico in una trasformazione adiabatica tra i medesimi stati termodinamici, A e B.

Primo principio termodinamico in forma differenziale $\delta Q - \delta L = dU$

Nota: In un sistema termodinamico monofasico e monocomponente (ex: gas perfetti). Tre variabili termodinamiche: p, V, T e una equazione di stato. $\Rightarrow 2$ variabili indipendenti. $U(p, V), U(V, T), U(p, T)$

Interpretazione microscopica del I principio della termodinamica Per un sistema meccanico di N punti materiali tra loro interagenti è definita una energia propria $U = E_c + E_p^{(int)}$ con la proprietà che $\Delta U = L_{esterno}^{(meccanico)}$ (*convenzione scambiata*). In forma differenziale: $dU = \delta L_{esterno}^{(meccanico)}$.

Si può interpretare U come l’energia interna definita in termodinamica.

Osservazione: $L_{esterno}^{(meccanico)}$ non coincide con il $L_{esterno}$ (termodinamico) dell’ambiente esterno, infatti in un sistema complesso di N punti materiali, il moto di ciascun punto ha due componenti di natura diversa: *moto coerente* e *moto incoerente*.

Esempio: Supponiamo di avere un gas all’interno di un contenitore cilindrico coperto da un coperchio isolante. Quando dall’esterno qualuno preme il coperchio di uno spostamento dl comprimendo il gas sappiamo che il lavoro $dL_e = p_e \cdot S \cdot dl$ (dove S è la superficie del coperchio e p_e è la pressione esercitata dall’esterno).

$$\text{In generale: } \delta L_e = \sum_{i=1}^N \overrightarrow{F_i^{(E)}} \cdot \overrightarrow{dr_{i,co}}, \quad dU = \delta L_e^{(mecc.)} = \delta L_e + \sum_{i=1}^N \overrightarrow{F_i^{(E)}} \cdot \overrightarrow{dr_{i,inc}}$$

$$\text{So che } L_e = -L, \quad dU = \sum_{i=1}^N \overrightarrow{F_i^{(E)}} \cdot \overrightarrow{dr_{i,inc}} - \delta L \Rightarrow \text{Primo principio termodinamico.}$$

Conclusione

1. Il calore è associato al moto incoerente microscopico e precisamente $\delta Q = \sum_{i=1}^N \overrightarrow{F_i^{(E)}} \cdot d\overrightarrow{r_{i,inc}}$
2. L'energia interna (termodinamica) equivale alla energia propria meccanica.
3. Il lavoro termodinamico è associato al moto coerente microscopico e precisando: $\delta L = \sum_{i=1}^N \overrightarrow{F_i^{(E)}} \cdot d\overrightarrow{r_{i,co}}$

Calore molare a volume costante $c_v = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{\delta Q}{\delta T}\right)_v$

In base al primo principio della termodinamica se $V = \text{costante}$ ($p \cdot d \cdot V = \delta L = 0$) ho che $dU = \delta Q$ quindi $c_v = \frac{1}{n} \cdot \frac{dU}{dT}$

Calore molare a pressione costante $c_p = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{\delta Q}{\delta T}\right)_p$

$dQ = dU + p \cdot dV$ del primo principio della termodinamica, e segue che $dQ = (U + pV) = dU + p \cdot dV + V \cdot dp$. Sappiamo però che essendo la pressione costante il termine $V \cdot d \cdot p$ è 0. Chiamiamo il termine $(U + p \cdot V)$ *entalpia* (indicata con H).

$$c_p = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{\delta H}{\delta T}\right)_p$$

Trasformazione generica $dU = \left(\frac{\delta U}{\delta T}\right) \cdot dT + \left(\frac{\delta U}{\delta V}\right) \cdot dV$

Ricordando che per un sistema monofasico e monocomponente, U è funzione di due variabili di stato. In base al primo principio della termodinamica $dU = \delta Q - p \cdot dV$. (Nell'ipotesi di sistema idrostatico, quindi con $\delta L = p \cdot dV$).

$$\left(\frac{\delta U}{\delta T}\right) \cdot dT + \left(\frac{\delta U}{\delta V}\right) \cdot dV = \delta Q - p \cdot dV$$

$$\delta Q = \left(\frac{\delta U}{\delta T}\right) \cdot dT + [p + \left(\frac{\delta U}{\delta V}\right)] \cdot dV \text{ da cui si ricava finalmente:}$$

$$\delta Q = n \cdot c_v \cdot dT + n \cdot \left[p + \frac{\delta U}{\delta V}\right] \cdot \frac{1}{n} \cdot dV$$

Parte VI

Lezione del 28 Maggio 2010

Expansione libera di un gas (ideale) (figura 7)

p_i, V_i, T_i trasferimento non quasi statico, quindi irreversibile. p_F, V_F, T_F .

Sperimentalmente si trova sempre che $T_F \simeq T_i$ con $T_F \rightarrow T_i$ quanto più il gas \rightarrow gas ideale.

Il primo principio della termodinamica dice che varrà sempre $\delta Q - \delta L = dU$. Il nostro sistema è isolato non scambia alcuna forma di energia. $\delta Q = 0$ (celle

di materiale isolante termico, *adiatermana*) e $\delta L = 0$ (celle sono indeformabili: $\Delta V_e = 0$ e $L_e = 0 \Rightarrow L = -L_e = 0$).

Quindi $dU = 0$, U è costante nella espansione libera del gas ideale. Poichè $p_F \neq p_i$ e $V_F \neq V_i$ e $T_F = T_i$ il fatto che U non vari implica che U del gas ideale non può dipendere né da p né da V ma solo da T .

Concludendo: Per un gas ideale abbiamo che $U = U(T)$

Calore molare a volume costante di un gas ideale

- Caso **monoatomico**: $C_V = \frac{3}{2} \cdot R$; si trova sperimentalmente per un gas ideale monoatomico (He, Ne, Ar, Kv).
- $dU = n \cdot c_v \cdot dT \Rightarrow dU = n \cdot \frac{3}{2} \cdot R \cdot dT \Rightarrow U(T) = \frac{3}{2} \cdot n \cdot R \cdot T + U_0$
- Caso **biatomico**: $C_V = \frac{5}{2} \cdot R$; si trova sperimentalmente per un gas ideale biatomico (H_2, N_2, O_2 , con $T > 100K$)
- Caso **triatomico** (e multiaatomico): $C_V = \frac{7}{2} \cdot R$; si trova sperimentalmente per un gas ideale triatomico o multiaatomico. (CH_4 a T elevata e bassa pressione)

Gas ideale monoatomico $C_V = \frac{3}{2} \cdot R$; $U = \frac{3}{2} \cdot n \cdot R \cdot T + U_0$ (dove U_0 a costante arbitraria)

$H = U + p \cdot V = \frac{3}{2} \cdot n \cdot R \cdot T + U_0 + n \cdot R \cdot T = \frac{5}{2} \cdot n \cdot R \cdot T + U_0$ (dove $p \cdot V$ è l'equazione di stato)

$H = U + p \cdot V$
 $c_p = \frac{1}{n} \cdot \frac{dH}{dT} = \frac{1}{n} \cdot \frac{dU}{dT} + \frac{1}{n} \cdot \frac{d(p \cdot V)}{dT} = c_v + \frac{1}{n} \cdot \frac{n \cdot R \cdot dT}{dT} = c_v + R$
 $c_p = \frac{1}{n} \cdot \frac{dH}{dT} = \frac{5}{2} \cdot R = c_v + R$ cioè $c_p = c_v + R$, che è detta **Relazione di Mayer** per ogni gas ideale (mono-, bi- o multi- atomico).

Osservazioni:

- c_p è sempre maggiore di c_v ; in effetti a parità di dT (e quindi di dU) in una trasformazione a pressione costante a δQ corrisponde $dU + \delta L$, mentre in una trasformazione a volume costante δQ corrisponde solo dU , quindi $(\delta Q)_p > (\delta Q)_v \Rightarrow c_p > c_v$
- $\frac{c_p}{c_v} = \gamma$, costante per ogni gas ideale assegnato alla tipologia (mono, bi, multiaatomica)

Trasformazioni adiabatiche ($\delta Q = 0$) $dQ = dU + dL = 0$ (dal primo principio della termodinamica).

Considerando un gas ideale $dU = n \cdot c_v \cdot dT$, avremo $n \cdot c_v \cdot dT = -p \cdot dV$ se considero trasformazioni reversibili in cui posso dire che $\delta L = p \cdot dV$. Per il gas ideale vale l'equazione di stato: $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$, quindi $n \cdot c_v \cdot dT = -\frac{n \cdot R \cdot T}{V} \cdot dV$

$$\int_{T_0}^T \frac{dT}{T} = \int_{V_0}^V -\frac{R}{c_v} \cdot \frac{dV}{V}$$

da cui $\ln(T) = -\frac{R}{c_v} \cdot \ln(V) + \text{costante}$

Possiamo quindi dire che

$$\gamma - 1 = \left(\frac{c_p}{c_v} - \frac{c_v}{c_v} \right) = \frac{R}{c_v}$$

$$\ln(T) = -\ln(V^{(\gamma-1)}) + \text{costante}$$

$$\ln(T \cdot V^{(\gamma-1)}) = \text{costante}$$

$$T \cdot V^{(\gamma-1)} = \text{costante} \quad (\text{dove la costante è } T_0 \cdot V_0^{(\gamma-1)})$$

L'ultima equazione scritta è l'equazione di trasformazione adiabatica di un gas ideale. $T \cdot V^{\gamma-1} = T_0 \cdot V_0^{(\gamma-1)}$

Nel piano di Clapeyron come si scrive l'equazione di una trasformazione adiabatica di un gas ideale? Sostituisco a $T = \frac{p \cdot V}{n \cdot R}$ (equazione di stato), $\frac{p \cdot V^\gamma}{n \cdot R} = \frac{p_0 \cdot V_0^\gamma}{n \cdot R} = \text{costante}$; da cui si ottiene finalmente: $p \cdot V^\gamma = p_0 \cdot V_0^\gamma = \text{costante}$

Confronto tra adiabatica e isoterma reversibili di un gas perfetto

- Adiabatica: $p \cdot V^\gamma = p_0 \cdot V_0^\gamma$

- Isoterma: $p \cdot V = p_0 \cdot V_0$ ($p \cdot V = n \cdot R \cdot T$ equazione di stato, condizione isotermità $T = \text{costante} = T_0, p \cdot V = \text{costante} = p_0 \cdot V_0$)

Nell'intorno di $p_0 \cdot V_0$ è più ripida la adiabatica o l'isoterma?

$$p = \frac{p_0 \cdot V_0^\gamma}{V^\gamma} = p_0 \cdot V_0^\gamma \cdot V^{-\gamma}$$

$$p = \frac{p_0 \cdot V_0}{V} = p_0 \cdot V_0 \cdot V^{-1}$$

da cui seguono le due relative equazioni

$$\frac{dp}{dV}|_{p_0, V_0} = p_0 \cdot V_0^\gamma \cdot (-\gamma) \cdot V^{-\gamma-1}|_{p_0, V_0} = p_0 \cdot V_0^\gamma \cdot (-\gamma) \cdot V_0^{-\gamma-1} = -\gamma \cdot \left(\frac{p_0}{v_0} \right)$$

$$\frac{dp}{dV}|_{p_0, V_0} = p_0 \cdot V_0 \cdot (-1) \cdot V^{-2}|_{p_0, V_0} = p_0 \cdot V_0 \cdot (-1) \cdot V_0^{-2} = - \left(\frac{p_0}{v_0} \right)$$

Lavoro di un gas ideale in una trasformazione adiabatica reversibile

$\delta L = p \cdot dV ; L = \int_{V_i}^{V_F} p \cdot dV$; ricordando il primo principio della termodinamica ($\delta Q = dU + \delta L$). Se la trasformazione è adiabatica abbiamo che $\delta Q = 0 \Rightarrow \delta L = -dU$

$$L = \int_{T_i}^{T_F} -dU(T) = -n \cdot c_v \cdot \int_{T_i}^{T_F} dT = -n \cdot c_v \cdot (T_F - T_i) = -\Delta U$$

$$T_F = \frac{p_F \cdot V_F}{n \cdot R}$$

$$T_i = \frac{p_i \cdot V_i}{n \cdot R}$$

$$L = n \cdot c_v \cdot \left(\frac{p_i \cdot V_i}{n \cdot R} - \frac{p_F \cdot V_F}{n \cdot R} \right) = \frac{p_i \cdot V_i - p_F \cdot V_F}{\gamma - 1} \quad \left(\frac{c_v}{R} = \frac{1}{\gamma - 1} \right) \quad \text{infatti} \quad \frac{R}{c_v} = \frac{c_p}{c_v} - \frac{c_v}{c_v} = \gamma - 1$$

Trasformazione politropica Trasformazione λ reversibile che ha la seguente proprietà: $c_\lambda = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_\lambda = c_\lambda$ (costante indipendente dalle variabili termodinamiche del sistema)

Ex. Gas ideale monoatmosferico

- $c_v = \frac{3}{2} \cdot R ; c_{\text{isoterma}} = \infty \quad (dT = 0)$

- $c_p = \frac{5}{2} \cdot R ; c_{\text{adiabatica}} = 0 \quad (\delta Q = 0)$

- Le trasformazioni isocore, isobare, isoterme e adiabatiche sono politropiche.

Per una trasformazione qualsiasi in un sistema termodinamico chiuso (monofatico, monocomponente) $\delta Q = n \cdot c_v(T, \dots) \cdot dT + [p + \frac{\delta U}{\delta V}] \cdot dV$

Per il gas ideale vale $U = U(T)$ e c_v è costante (indipendente da tutte le variabili termodinamiche) $\delta Q = n \cdot c_v \cdot dT + p \cdot dV$; $c_\lambda = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_\lambda = c_v + \frac{p}{n} \cdot \frac{dV}{dT} \Rightarrow c_\lambda - c_v = \frac{1}{n} \cdot p \cdot \frac{dV}{dT}$
 $p \cdot dV = d(p \cdot V) - V \cdot dp = d(n \cdot R \cdot T) - V \cdot dp$ (dove $p \cdot V$ è l'equazione di stato)

$$c_\lambda - c_v = \frac{1}{n} \cdot n \cdot R \cdot \frac{dT}{dT} - \frac{1}{n} \cdot V \cdot \frac{dp}{dT}$$

$$c_\lambda - (c_v + R) = -\frac{1}{n} \cdot V \cdot \frac{dp}{dT}$$

$$c_\lambda - c_p = -\frac{1}{n} \cdot V \cdot \frac{dp}{dT}$$

$$\frac{c_\lambda - c_p}{c_\lambda - c_v} = -\frac{V \cdot \frac{dp}{dT}}{p \cdot \frac{dV}{dT}}$$

Se però per definizione di politropica c_λ è indipendente da p, V, T e sapendo che c_v e c_p sono costanti allora anche $\frac{c_\lambda - c_p}{c_\lambda - c_v}$ è costante e viene detta *indice della politropica* $x = \frac{c_\lambda - c_p}{c_\lambda - c_v}$

Essendo x anche uguale a $-\frac{V \cdot \frac{dp}{dT}}{p \cdot \frac{dV}{dT}}$ ricavo l'equazione differenziale di una generica trasformazione politropica di un gas ideale $-\frac{V \cdot \frac{dp}{dT}}{p \cdot \frac{dV}{dT}} = x$; $\int \frac{dp}{p} = \int -x \cdot \frac{dV}{V}$ e quindi $\ln(p) + \text{costante} = -\ln(V^x) + \text{costante2}$

$$\ln(p \cdot V^x) = \text{costante2} \Rightarrow p \cdot V^x = \text{costante} = p_0 \cdot V_0^x$$

Osservazioni:

- $x = \gamma = \frac{c_p}{c_v}$ ritrovo la adiabatica ($p \cdot V^\gamma = \text{costante}$) (c_{ad})
- $x = 0$ ritrovo la isobara ($p = \text{costante}$) (c_p)
- $x = \infty$ ritrovo la isocora ($V = \text{costante}$) (c_v)
- $x = 1$ ritrovo la isoterma ($p \cdot V = \text{costante}$) (c_{iso})

Come "esercizio" si provi a calcolare il lavoro lungo una generica politropica (se è generico)

Parte VII

Lezione del 3 Giugno 2010

Supponendo $\Delta U = 0$ (trasformazione ciclica)

$Q = L$ (Primo principio della termodinamica).

- L si trasforma tutto in Q (è vero)
- Q si trasforma tutto in L (è falso sperimentalmente)

Sperimentalmente, nonostante il primo principio della termodinamica non lo vietи, si trova che **non è possibile trasformare tutto il calore in lavoro**. In altre parole è pur vero che $Q = L$, ma Q è sempre fatto di due parti: un calore assorbito e un calore ceduto dal sistema: $Q = Q_{assorbito} - Q_{ceduto}$ con $Q_{ceduto} \neq 0$, quindi $Q < Q_{assorbito}$.

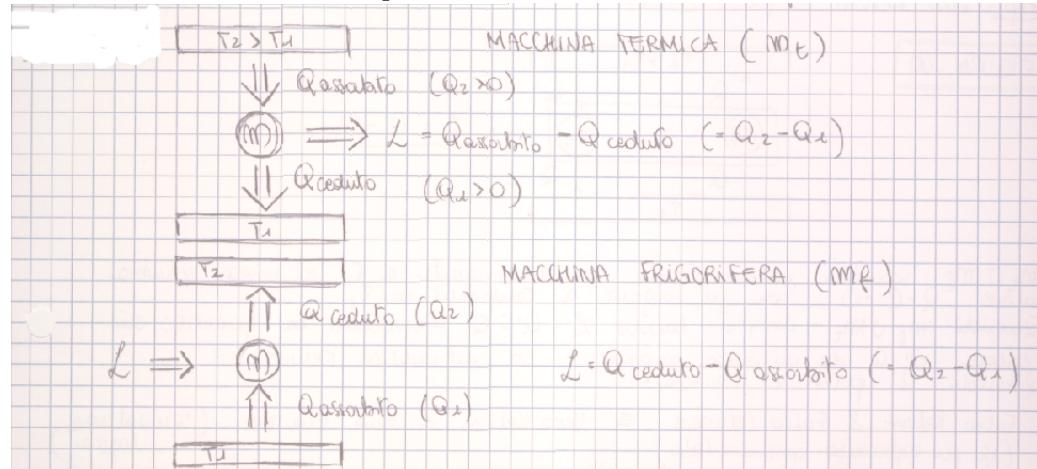
Definizione di Macchina Termica Dispositivo che operando ciclicamente è in grado di produrre lavoro scambiando calore con delle sorgenti termiche. Definiamo $Q_{assorbito} = \sum_{i=1}^n Q_{i,assorbito}$ essendo $Q_{i,assorbito}$ il calore assorbito dal sistema termodinamico della macchina dalla sorgente a temperatura T_i . $Q_{ceduto} = \sum_{i=1}^n Q_{i,ceduto}$, essendo $Q_{i,ceduto}$ il calore ceduto dal sistema termodinamico della macchina alla sorgente a temperatura T_i

Osservazione: Poiché la macchina termina opera ciclicamente $\Delta U = 0$. Quindi per il primo principio della termodinamica $L = Q = Q_{assorbito} - Q_{ceduto}$

Definizione di rendimento di una macchina termica Si indica con $\eta = \frac{L}{Q_{assorbito}} = \frac{Q_{assorbito} - Q_{ceduto}}{Q_{assorbito}} = 1 - \frac{Q_{ceduto}}{Q_{assorbito}}$. Segue che ovviamente η dipende da:

- tipo di sistema termodinamico che compie il ciclo della macchina
- tipo di ciclo della macchina termica
- temperatura delle sorgenti di calore

Esempio macchina termica Figura:



$$L = Q_{assorbito} - Q_{ceduto}$$

$$\eta = \frac{L}{Q_2} = 1 - \frac{Q_1}{Q_2}$$

Esempio macchina frigorifera Il rendimento di una macchina frigorifera si esprime così: $F = \frac{Q_1}{L} = \frac{Q_1}{Q_2 - Q_1}$

Il secondo principio della termodinamica

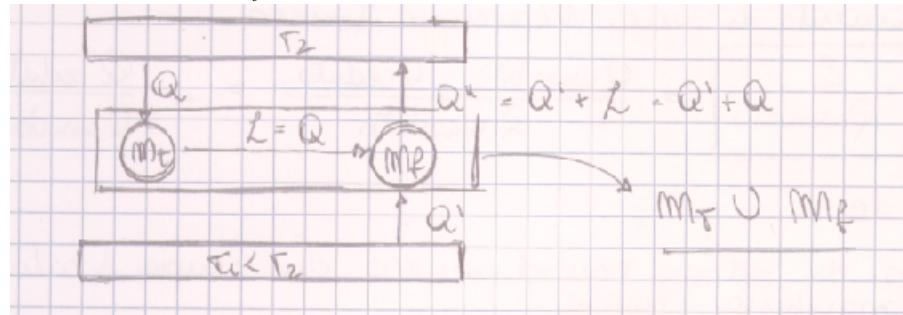
Prima formulazione di Kelvin Secondo *Lord Kelvin* (1851) è impossibile realizzare una macchina termica che funzionando ciclicamente possa trasformare in lavoro tutto il calore assorbito da un'unica sorgente (sorgente a temperatura uniforme).

Seconda formulazione di Kelvin È impossibile realizzare una trasformazione termodinamica il cui unico risultato sia di trasformare completamente il calore assorbito in lavoro.

Enunciato di Clausius (1850) È impossibile il passaggio spontaneo (senza fare lavoro) di calore da un corpo freddo a un corpo caldo per *differenza finita* di temperature.

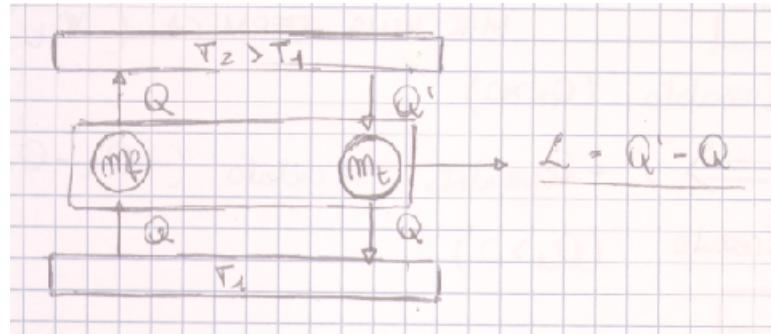
Equivalenza tra gli enunciati di Kelvin e Clausius Ipotesi: ***Falso Kelvin e Vero Clausius***

Se è falso Kelvin $\exists m_t \Rightarrow$



La macchina $m_t \cup m_f$ assorbe la quantità di calore Q' da sorgente T_1 e cede la quantità di calore $Q'' - Q = Q'$ dalla sorgente T_2 senza “*subire*” lavoro, quindi spontaneamente. Quindi $m_t \cup m_f$ viola *Clausius*, ma ciò contraddice l’ipotesi. **Quindi l’ipotesi è assurda.**

Ipotizziamo ora invece che sia ***Falso Clausius e Vero Kelvin***.



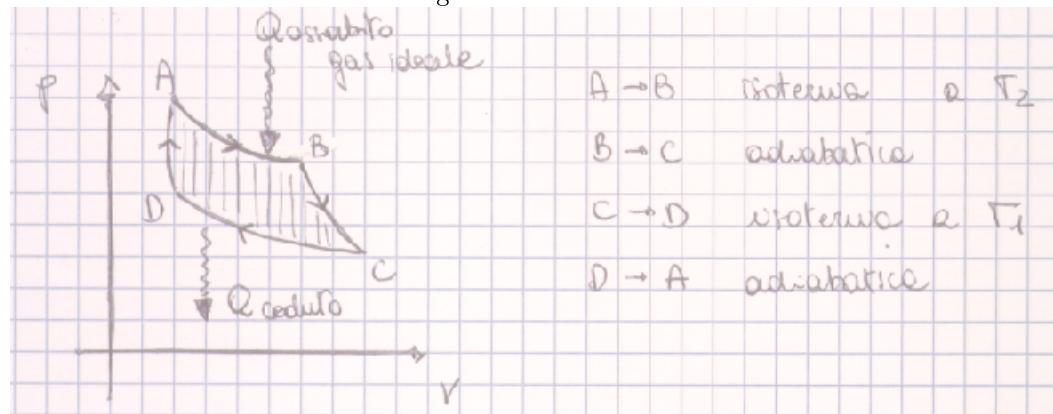
$m_f \cup m_t$ scambia calore $Q' - Q$ con la sorgente a T_2 e invece scambia calore $Q' - Q = 0$ con la sorgente a temperatura T_1 . Quindi $m_f \cup m_t$ compie lavoro $L = Q' - Q$ assorbendo la quantità di calore $Q' - Q$ da una unica sorgente e ciò contraddice Kelvin. Segue che quindi l'**ipotesi è assurda**.

Abbiamo quindi questo simpatico schema:

- Falso Kelvin e Vero Clausius → Falso
- Vero Kelvin e Falso Clausius → Falso
- Falso Kelvin e Falso Clausius → Vera? No, per evidenza sperimentale.
- Vero Kelvin e Vero Clausius → VERA

Moto perpetuo di seconda specie Il secondo principio della termodinamica nega il moto perpetuo di seconda specie (realizzare un sistema che si muova indefinitamente assorbendo energia da una unica sorgente).

Macchina reversibile di Carnot Figura:



$A \rightarrow B$ isoterma a T_2 : gas ideale $\Delta U = 0$, $L = Q$ (per il primo principio della termodinamica)

$$L_{A \rightarrow B} = n \cdot R \cdot T_2 \cdot \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right) > 0, \text{ essendo } V_B > V_A \text{ (espansione)}, \text{ allora}$$

$$Q_{AB} = L_{AB} > 0 \text{ quindi } Q_{AB} = Q_{assorbita}$$

$B \rightarrow C$: adiabatica $Q_{BC} = 0 \Rightarrow L_{BC} = -\Delta U_{BC}$ (per il primo principio della termodinamica)

$L_{BC} = -n \cdot c_v \cdot (T_1 - T_2) > 0$ che è coerente con il fatto che $V_C > V_B$ (espansione)

$C \rightarrow D$: isoterma a T_1 (gas ideale) $\Delta U_{CD} = 0 \Rightarrow L_{CD} = n \cdot R \cdot T_1 \cdot \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) < 0$ essendo $V_D < V_C$ (compressione) allora $Q_{CD} = L_{CD} < 0$, quindi $Q_{CD} = -Q_{ceduta}$

$D \rightarrow A$: Adiabatica. $Q_{DA} = 0 \Rightarrow L_{DA} = -\Delta U_{DA} = -n \cdot c_v \cdot (T_2 - T_1) < 0$, coerente con l'essere $V_A < V_D$ (compressione)

Abbiamo ora che: $L = L_{AB} + L_{BC} + L_{CD} + L_{DA} = n \cdot R \cdot T_2 \cdot \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) - n \cdot R \cdot T_1 \cdot \ln\left(\frac{V_C}{V_D}\right) + L_{BC} + L_{DA}$ (dove $L_{BC} + L_{DA} = 0$). Esprimiamo il rendimento così:

$$\eta = 1 - \frac{Q_{ced}}{Q_{ass}} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \cdot \frac{\ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right)}{\ln\left(\frac{V_A}{V_D}\right)}$$

$$T_2 \cdot V_B^{\gamma-1} = T_1 \cdot V_C^{\gamma-1}$$

e anche

$$T_A \cdot V_A^{\gamma-1} = T_D \cdot V_D^{\gamma-1}$$

$$T_2 \cdot V_A^{\gamma-1} = T_1 \cdot V_D^{\gamma-1}$$

e otteniamo

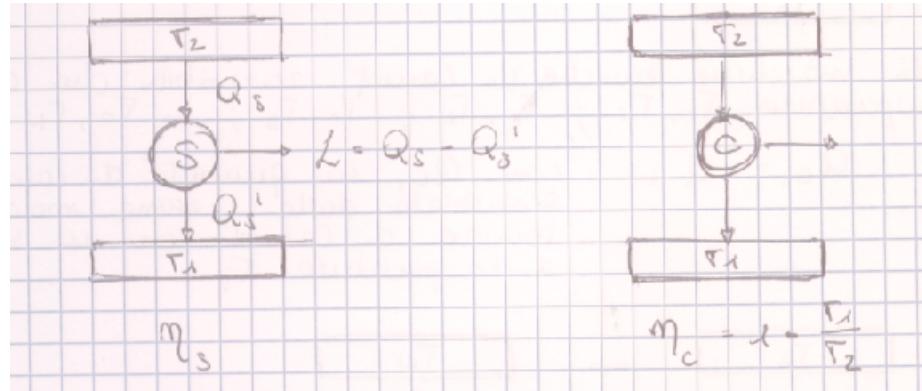
$\left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_C}{V_D}\right)^{\gamma-1}$ cioè $\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}$ da cui si deduce che il rapporto tra i logaritmi della formula precedente è pari a 1. Da questo segue quindi $\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}$.

Parte VIII

Lezione del 4 Giugno 2010

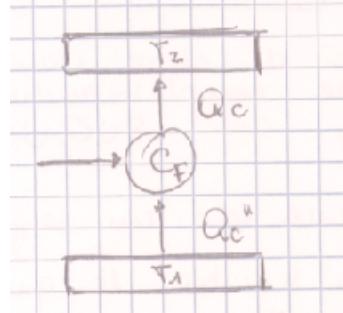
Secondo teorema di Carnot La macchina reversibile di Carnot che opera tra le temperature T_1 e T_2 è la macchina termica dotata del più alto rendimento tra tutte le macchine termiche che operano tra le medesime temperature estreme T_1 e T_2 .

Dimostrazione (prima parte) Caso particolare di macchine che operano tra due sole sorgenti a temperatura T_1 e T_2 .



Supponiamo per assurdo che $\eta_S > \eta_C$. Esisterà sempre una macchina frigorifera di Carnot che opera tra T_1 e T_2 e quindi se la alimento con il lavoro compiuto dalla macchina termica S avrà che $Q_C = L + Q'_C \Rightarrow Q_C - Q'_C = L$. Per S valeva $Q_S - Q'_S = L$,

$$\begin{aligned} Q_C - Q'_C &= Q_S - Q'_S \\ Q'_C - Q'_S &= Q_C - Q_S \end{aligned}$$



Allora la macchina termica $S \cup C_F$ compie il trasporto di una quantità di calore $Q_C - Q_S$ da una sorgente fredda a una calda senza lavoro. Cioè $S \cup C_F$ viola il secondo principio della termodinamica (Clausius). Quindi la negazione della tesi è assurda.

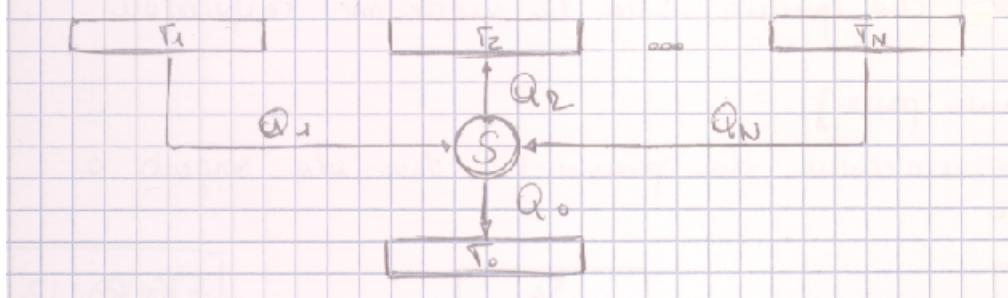
Troviamo quindi $\eta_S \leq \eta_C = 1 - \frac{T_1}{T_2}$. Operando tra due sole sorgenti S è o la macchina di Carnot C o C_{irr} . Se $S = C$ allora ovviamente $\eta_S = \eta_C$. Altrimenti se S è irreversibile varrà $\eta_S < \eta_C$.

Secondo teorema di Clausius In ogni trasformazione ciclica di un sistema termodinamico, la somma di tutti i rapporti tra le quantità di calore scambiate e le corrispondenti temperature assolute delle sorgenti di calore è minore o uguale a 0.

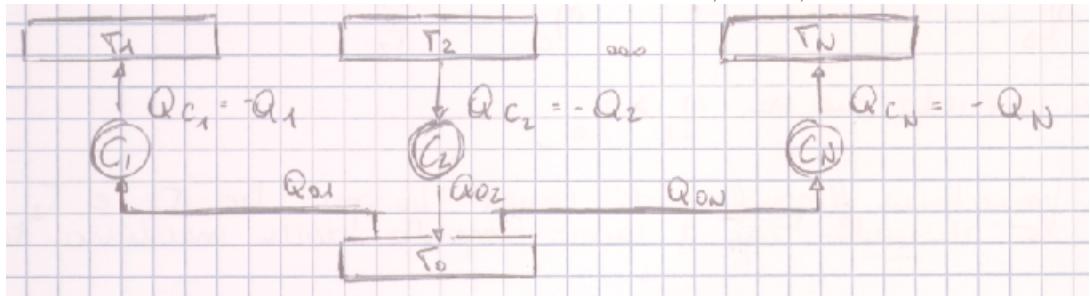
$$\oint \frac{dQ}{T} \leq 0 \text{ (anche se in realtà la forma originale è } \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{T_i} \leq 0 \text{)}$$

(=per cicli reversibili e <per cicli irreversibili)

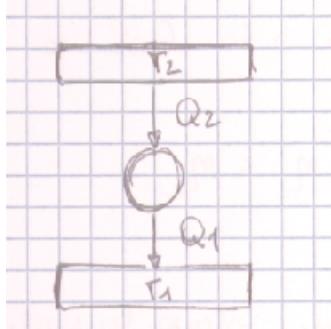
Dimostrazione Consideriamo una macchina termica che opera scambiando calore con $N + 1$ sorgenti a temperatura rispettivamente $T_0 < T_1 < T_2 < \dots < T_N$.



Costruisco un sistema di macchine termiche di Carnot che operino tra le coppie di temperature $T_0, T_1; T_0, T_2; T_0, T_3; \dots T_0, T_N$ e tali che sia $Q_C = -Q_i$ con $Q_{C,i}$ la quantità di calore scambiata dalla i-esima macchina termica di Carnot con la sorgente a temperatura T_i . (Avremo che $L_i = \eta_{C,i} \cdot Q_{ass,i}$)



Detta $Q_{0,i}$ la quantità di calore scambiato dal C_i con T_0 , posso determinare la quantità di calore complessivamente scambiata dalla macchina termica, unione di C_i e S , cioè $S \cup C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_N$ scambia calore solo con sorgente a temperatura T_0 per costruzione (delle C_i). Con esse scambia la quantità di calore $Q = Q_0 + \sum_{i=1}^N Q_{0,i}$. Tuttavia sappiamo dalla teoria della macchina termica di Carnot ideale, che vale la relazione $\frac{Q_1}{Q_2} = -\frac{T_1}{T_2}$.



Quindi posso scrivere che $\frac{Q_{0,i}}{Q_{C,i}} = \frac{T_0}{T_i} \Rightarrow Q_{0,i} = -T_0 \cdot \frac{Q_{c,i}}{T_i} = T_0 \cdot \frac{Q_i}{T_i}$ e

$$\text{quindi: } Q = Q_0 + T_0 \cdot \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{T_i} \Rightarrow \frac{Q}{T_0} = \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{T_i}.$$

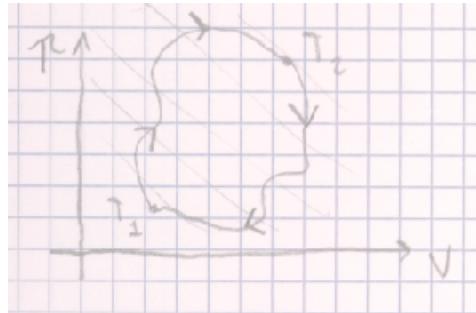
T_0 è positiva (T assoluta!)

Osserviamo che Q non può essere positivo, altrimenti vorrebbe dire che $S \cup C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_N$ viola il scondo principio della termodinamica (*Kelvin*).

Quindi $Q \leq 0$, quindi $\sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$. Nel caso generalissimo di ∞ sorgenti la sommatoria diviene un integrale e si ha $\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0$

Osservazione: Se S è reversibile abbiamo $\sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{T_i} \geq 0 \wedge \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{T_i} \leq 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{T_i} = 0$.

Seconda parte dimostrazione teorema di Carnot Caso generale di una macchina termica S che scambia calore con una infinità di sorgenti con temperature comprese tra T_1 e T_2 (temperature esterne).



Sia γ ciclo reversibile dal teorema di Clausius sarà $\oint \frac{\delta Q}{T} = 0$

$$\int_{\gamma, \delta Q > 0} \frac{\delta Q}{T} + \int_{\gamma, \delta Q < 0} \frac{|\delta Q|}{T} = 0$$

$$\int_{\gamma, \delta Q > 0} \frac{\delta Q}{T} < \int_{\gamma, \delta Q < 0} \frac{|\delta Q|}{T}$$

$$\int_{\gamma, \delta Q > 0} \frac{\delta Q}{T} > \int_{\gamma, \delta Q > 0} \frac{|\delta Q|}{T_2} = \frac{Q_{assorbito}}{T_2} \text{ con } (T_2 > T \text{ in ogni tratto del ciclo})$$

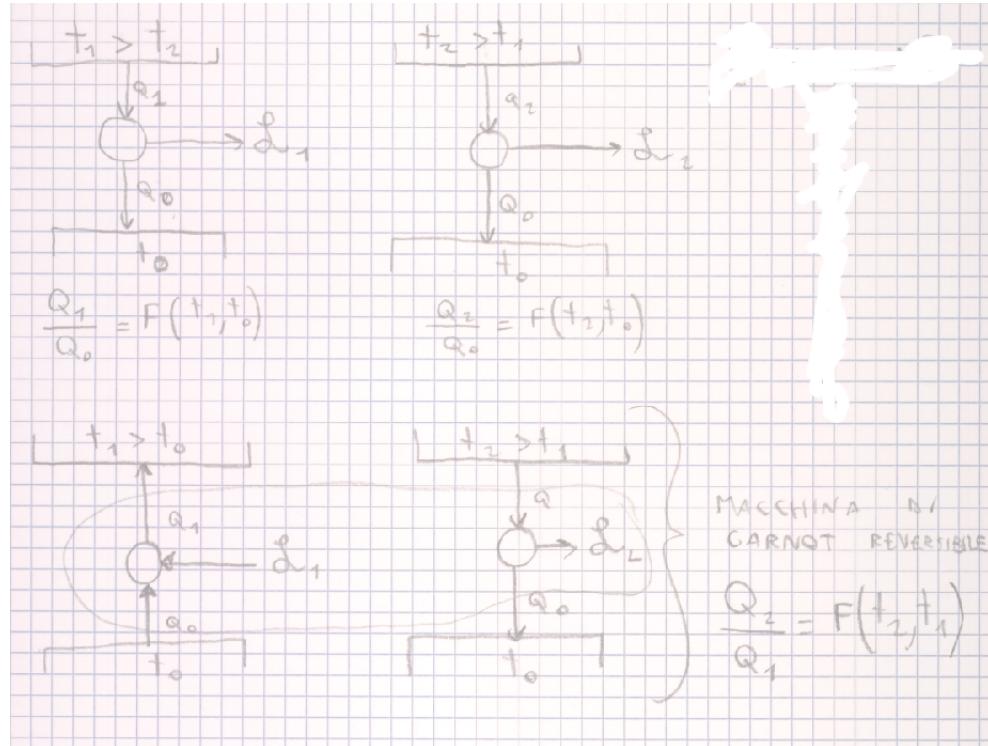
$$\int_{\gamma, \delta Q > 0} \frac{|\delta Q|}{T} > \int_{\gamma, \delta Q > 0} \frac{|\delta Q|}{T_1} = \frac{Q_{ceduto}}{T_1}$$

$$\frac{Q_{assorbito}}{T_2} < \frac{Q_{ceduto}}{T_1} \Rightarrow \frac{Q_{ceduto}}{Q_{assorbito}} > \frac{T_1}{T_2}$$

$$\eta_S = 1 - \frac{Q_{ceduto}}{Q_{assorbito}} < 1 - \frac{T_1}{T_2} = \eta_C$$

Sappiamo che in una macchina termica di Carnot a gas ideale il rapporto $\frac{Q_2}{Q_1} = -\frac{T_2}{T_1} = F(T_1, T_2)$

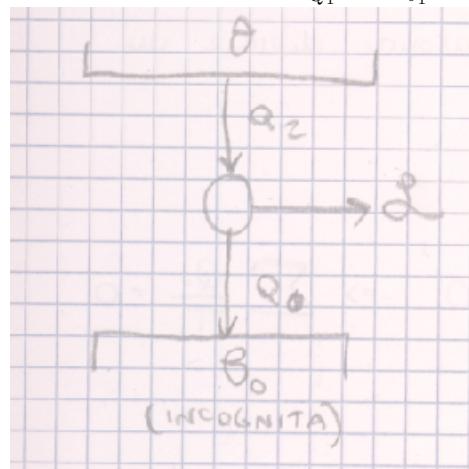
Inoltre il primo teorema di Carnot dice che il rendimento di una macchina termica di Carnot reversibile ideale è indipendente dalla natura del sistema termodinamico che compie il ciclo. Quindi il rapporto $\frac{Q_2}{Q_1} = F(t_1, t_2)$ (con t_1 e t_2 le temperature empiriche delle sorgenti con cui opera la macchina termica di Carnot ideale). Allora F è una **Funzione universale** (di Carnot) che dipende solo dalle temperature delle sorgenti.



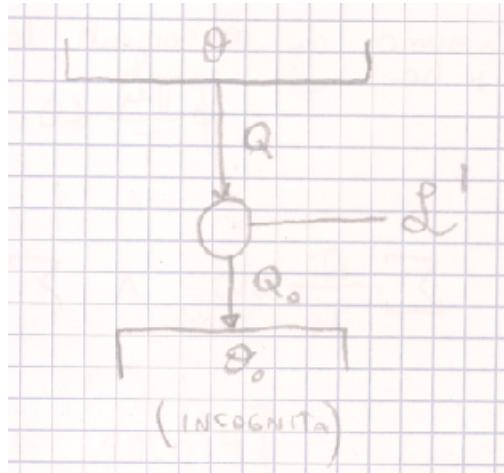
$$F(t_2, t_1) = \frac{F(t_2, t_0)}{F(t_1, t_0)}$$

indipendentemente da t_0 possibile solo se $f(t, t_0) = k \cdot \theta(t)$

θ rappresenta la temperatura della sorgente più calda con cui la macchina ha scambiato calore. Tale temperatura essendo figlia della Funzione universale di Carnot è ancora più assoluta della temperatura del gas ideale e viene detta temperatura termodinamica $\frac{Q_2}{Q_1} = -\frac{\theta_2}{\theta_1}$



$$\frac{Q_r}{Q_0} = -\frac{\theta_r}{\theta_0}$$



$$\frac{Q}{Q_r} = \frac{\theta}{\theta_r} \Rightarrow \theta = \frac{\theta_r}{Q_r} \cdot Q$$

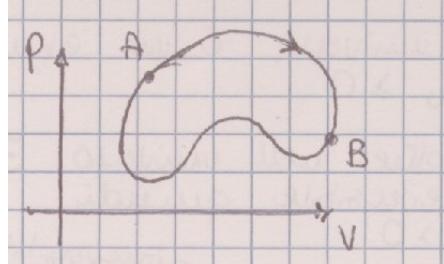
La temperatura termodinamica è proporzionale alla temperatura del gas ideale..

Caso particolare di macchina termica di Carnot a gas ideale reversibile So che $\frac{Q_2}{Q_1} = -\frac{T_2}{T_1}$ e posso scrivere che $T = \frac{T_r}{Q_r} \cdot Q$
Pur di prendere $\theta_r = T_r = 273.16 K$ allora $\theta \equiv T$

Parte IX

Lezione del 8 Giugno 2010

Entropia Considero un ciclo reversibile



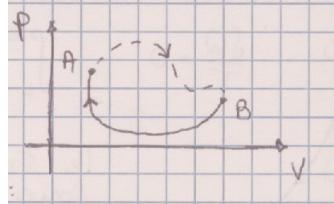
Su di essa individuo due punti corrispondenti a due stati A e B . Il teorema di *Clausius* afferma che $\oint \frac{\delta Q}{T} = \int_A^B \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{\Gamma_1} + \int_A^B \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{\Gamma_2} = 0$

$$\int_A^B \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{\Gamma_1} - \int_A^B \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{\Gamma_2} = 0 \text{ da cui segue che } \int_A^B \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{\Gamma_1} = \int_A^B \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{\Gamma_2}$$

$$\int_A^B \frac{\delta Q}{T} = S(B) - S(A)$$

Definiamo quindi **Entropia** (secondo *Clausius*) l'indice di stato fisico (funzione di stato) S , tale che $S(B) - S(A) = \int_A^B \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{rev}$

Considero ora un ciclo irreversibile costituito da una trasformazione irreversibile da A a B e una trasformazione reversibile da B ad A .



Il teorema di *Clausius* afferma che $\oint \frac{\delta Q}{T} < 0$

$$\int_A^B \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{irr} - \int_A^B \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{rev} < 0$$

$$\int_A^B \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{rev} > \int_A^B \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{irr}$$

$$S(B) - S(A) > \int_A^B \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{irr}$$

Osservazioni:

- Per una trasformazione da A a B vale la relazione $\Delta S = S(B) - S(A) \geq \int_A^B \frac{\delta Q}{T}$. Dove l'uguale vale se la trasformazione è reversibile e il “ $>$ ” vale se la trasformazione è irreversibile.
- In generale per un sistema termodinamico vale $\Delta S \geq \int_A^B \frac{\delta Q}{T}$. Supponiamo di considerare un sistema termodinamico isolato termicamente ($\delta Q = 0$). Allora $\Delta S \geq 0$.

Definizione di universo termodinamico Si dice universo termodinamico di un sistema il sistema termodinamico del sistema in esame e il suo ambiente esterno.

Osservazione: Un universo termodinamico è unsistema isolato, quindi in particolare è anche termicamente isolato.

Ad esempio: L'universo astronomico.

Altro esempio: Nell'esperimento di Joule il calorimetro insieme al sistema di acqua.

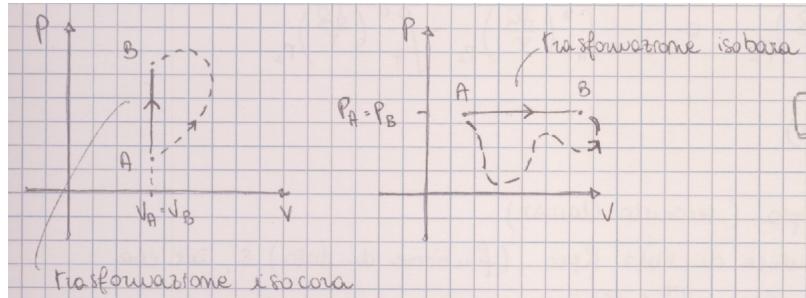
Principio di accrescimento dell'entropia L'entropia dell'universo non può mai diminuire e anzi aumenta sempre

Dimostrazione: L'universo è un esempio di universo termodinamico, quindi $\Delta S_U \geq 0$. Inoltre nell'universo esiste almeno una trasformazione irreversibile, quindi $\Delta S > 0$.

$$\Delta S_U = \Delta S + \Delta S_e \geq 0$$

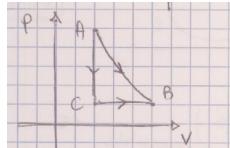
Se nella formula abbiamo > 0 allora è irreversibile, se $= 0$ è reversibile.

Ciò è compatibile con il verificarsi in taluni casi di una variazione negativa di S .



Entropia: Trasformazioni reversibili

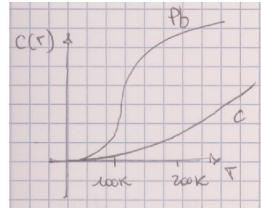
- Trasformazione **adiabatica**: $\delta Q = 0 \Rightarrow \frac{\delta Q}{T} = 0 \Rightarrow \int_A^B \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{rev} =$



$S(B) - S(A) = 0$. Le trasformazioni adiabatiche reversibili sono **trasformazioni isoentropiche**.

- Trasformazione **isotermica**: $T = costante$, quindi posso scrivere $S(B) - S(A) = \int_A^B \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{rev} = \frac{1}{T} \cdot \int_A^B (\delta Q)_{rev}$ dove sappiamo che $Q_{A \rightarrow B}$. Dal primo principio della termodinamica otteniamo che $L_{A \rightarrow B} = Q_{A \rightarrow B} - \Delta U \Rightarrow L_{A \rightarrow B} = T \cdot S(B) - T \cdot S(A) - U(B) + U(A) = -\Delta F$ con $F = U - T \cdot S$ che viene detta "energia libera".
- Trasformazione **isotermica** di un **gas perfetto**: $\Delta U = 0$ e $L_{A \rightarrow B} = T \cdot \Delta S$
- Cambiamento di stato: $\Delta S = \int_A^B \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{rev} = \frac{1}{T} \cdot \int_A^B (\delta Q)_{rev} = \frac{m \cdot \lambda}{T}$ con λ calore latente di fusione/vaporizzazione/solidificazione/liquefazione.
- Trasformazione generica di gas perfetto: $\delta Q = n \cdot c_v \cdot dT + p \cdot dV$ dove sappiamo che $n \cdot c_v \cdot dT = dU$ e $p \cdot dV = \delta L$. Da questo otteniamo che $S = \left(\frac{\delta Q}{T} \right) = \frac{n \cdot c_v \cdot dT}{T} + \frac{p \cdot dV}{T} = n \cdot c_v \cdot \frac{dT}{T} + n \cdot R \cdot \frac{dV}{V}$. $\Delta S = \int_A^B \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{rev} = \int_A^B n \cdot c_v \cdot \frac{dT}{T} + \int_A^B n \cdot R \cdot \frac{dV}{V} \Rightarrow \Delta S = n \cdot c_v \cdot \ln \left(\frac{T_B}{T_A} \right) + n \cdot c_v \cdot \frac{R}{c_v} \cdot \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right) = n \cdot c_v \cdot \left[\ln \left(\frac{T_B}{T_A} \right) + (\gamma - 1) \cdot \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right) \right] = n \cdot c_v \cdot \left[\ln \left(\frac{T_B \cdot V_B^{\gamma-1}}{T_A \cdot V_A^{\gamma-1}} \right) \right]$. *Osservazione:* $S = n \cdot c_v \cdot \ln (T \cdot V^{\gamma-1}) + costante$ comprendo di nuovo che le **adiabatiche reversibili sono isoentropiche**.
- Solidi e liquidi: Ipotizziamo non avvengano cambiamenti distato. $\delta Q = \delta L + dU$ (dove δL è 0 per l'incomprimibilità). $\delta Q = C \cdot dT$ con C la capacità termica. $\Delta S = \int_A^B C \cdot \frac{dT}{T} = C \cdot \int_A^B \frac{dT}{T} = C \cdot \ln \left(\frac{T_B}{T_A} \right)$ se C è

indipendente da T (abbastanza vero ma non sempre). $S = C \cdot \ln(T) + \text{costante}$. Se $T \rightarrow 0K$ e $S \rightarrow -\infty$. In realtà $C = C(T)$ e a basse temperature la dipendenza di C da T è forte e fa sì che $\lim_{T \rightarrow 0} S(T)$ finita.

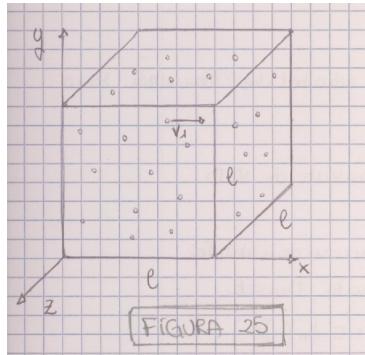


Entropia: Trasformazioni irreversibili

- Trasformazione **isoterma (o monoterma) irreversibile**: $S(B) - S(A) > \int_A^B \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{irr} = \int_A^B (\delta Q)_{irr}$. $\int_A^B (\delta Q)_{irr} = Q_{A \rightarrow B} = L_{A \rightarrow B} + U(B) - U(A)$. $L_{A \rightarrow B} < [U(A) - T \cdot S(A)] - [U(B) - T \cdot S(B)] = -\Delta F$
- Trasformazione **adiabatica irreversibile**: $S(B) - S(A) > \int_A^B \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{irr} = 0$

Modello di gas ideale (cinetico)

- Basato sui seguenti fondamenti:
1. Le molecole sono tutte uguali (ugual massa) e hanno volume trascurabile.
Sono presenti in numero elevatissimo.
 2. Le molecole non interagiscono tra loro se non per urti perfettamente elasticici.
 3. Le molecole sono assumibili a sferette rigide



$$\vec{V}_1 = V_{1x} \cdot \hat{U}_x + V_{1y} \cdot \hat{U}_y + V_{1z} \cdot \hat{U}_z$$

$$\Delta p_{1x} = p'_{1x} - p_{1x} = -2 \cdot m \cdot v_{1x}$$

$$\Delta t = \frac{2 \cdot l}{V_{1x}}$$

$$\frac{\Delta p_{1x}}{\Delta t} = \frac{-2 \cdot m \cdot V_{1x}^2}{2l} = -\frac{m \cdot V_{1x}^2}{l}$$

$$\begin{aligned}
F_{1x} &= -\frac{\Delta p_{1x}}{\Delta t} = \frac{m \cdot V_{1x}^2}{l} \\
F_x &= \sum_{i=1}^N F_{ix} = \frac{N \cdot m}{l} \cdot \frac{(V_{1x}^2 + V_{2x}^2 + \dots + V_{Nx}^2)}{N} = \frac{N \cdot m}{l} \cdot V_{qm,x}^2 \text{ con } V_{qm,x}^2 = \sum_{i=1}^N \frac{V_{i,x}^2}{N} \\
&= \frac{m}{l} \cdot V_{qm,x}^2 \\
p_x &= \frac{F_x}{l^2} = \frac{m}{l^3} \cdot V_{qm,x}^2 = p \cdot V_{qm,x}^2 \\
p_y &= p \cdot V_{qm,y}^2 \\
p_z &= p \cdot V_{qm,z}^2
\end{aligned}$$

Da cui otteniamo:

$$\begin{aligned}
V_{qm,x}^2 &= V_{qm,y}^2 = V_{qm,z}^2 \\
V_{qm}^2 &= V_{qm,x}^2 + V_{qm,y}^2 + V_{qm,z}^2 \\
V_{qm,x}^2 &= V_{qm,y}^2 = V_{qm,z}^2 = \frac{1}{3} \cdot V_{qm}^2
\end{aligned}$$

Da cui finalmente:

$$p = \frac{1}{3} \cdot p \cdot V_{qm}^2 \text{ isotropicamente.}$$

$$\begin{aligned}
U \text{ gas ideale} &\text{ è solo energia cinetica delle sue molecole } (E_{p,i} = 0): U = \\
&\frac{1}{2} \cdot m \cdot V_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot V_2^2 + \dots + \frac{1}{2} \cdot m \cdot V_N^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot N \cdot \frac{V_1^2 + V_2^2 + \dots + V_N^2}{N} = \frac{1}{2} \cdot N \cdot m \cdot V_{qm}^2 \\
&= \frac{1}{2} \cdot m \cdot V_{qm}^2 \text{ con } V_{qm}^2 = \sum_{i=1}^N \frac{V_i^2}{N}
\end{aligned}$$

Mettendo a sistema le seguenti due equazioni:

$$p = \frac{1}{3} \cdot \frac{m}{V} \cdot V_{qm}^2$$

$$U = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V_{qm}^2$$

si ottiene: $p \cdot V = \frac{2}{3} \cdot U$ a cui aggiungiamo l'equazione di stato del gas ideale $(p \cdot V = n \cdot R \cdot T)$ e otteniamo definitivamente: $U = \frac{3}{2} \cdot n \cdot R \cdot T$.

$$U = \frac{3}{2} \cdot n \cdot R \cdot T \text{ e } U = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V_{qm}^2$$

$$T = \frac{M}{3R} \cdot V_{qm}^2 \text{ (temperatura cinetica), con } M = \frac{m}{n} \text{ (massa molare del gas)}$$

L'energia interna totale del gas è $U = \frac{3}{2} \cdot n \cdot R \cdot T$

$$U_{mol} = \frac{U}{N} = \frac{3}{2} \cdot \frac{N}{N_A} \cdot \frac{R}{N} \cdot T = \frac{3}{2} \cdot \frac{R}{N_A} \cdot T = \frac{3}{2} \cdot k \cdot T \text{ dove } k \text{ è la costante di Boltzman } k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$$

L'ipotesi statistica di Boltzman: principio di equipartizione dell'energia Ad ogni grado di libertà di un sistema fisico microscopico corrisponde la quantità di energia $\frac{1}{2} \cdot k \cdot T$, con T la temperatura assoluta del sistema.

- Gas ideale **monoatomico**: Gradi di libertà (*GDL*) = 3, le coordinate $x, y, z \Rightarrow U_{mol} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot k \cdot T = \frac{3}{2} \cdot k \cdot T$
- Gas ideale **biatomico**: Ha 5 gradi di libertà: coordinate x, y, z di un atomo della coppia, più due coordinate angolari per individuare il secondo atomo: $\Rightarrow U_{mol} = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot k \cdot T = \frac{5}{2} \cdot k \cdot T$
- Gas ideale **triatomico o poliatomico**: Ha 6 gradi di libertà: coordinate x, y, z di un atomod della molecola, più due coordinate angolari di un secondo atomo, più una coordinata angolare che individua la posizione angolare rispetto all'asse formato dai primi due. $U_{mol} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot k \cdot T$ di un secondo atomo = $3 \cdot k \cdot T + 1$ coordinata angolare.

$$\begin{aligned}
C_v &= \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_v = (\text{utilizzando il primo principio della termodinamica}) = \frac{1}{n} \cdot \\
&\left(\frac{dU}{dT} \right) = \frac{1}{n} \cdot N \cdot \left(\frac{dU_{mol}}{dT} \right) = \frac{1}{n} \cdot N \cdot F \cdot \frac{1}{2} \cdot k \text{ con } F \text{ numero di gradi di libertà.} \\
k &= \frac{R}{N_A}, n = \frac{N}{N_A} \\
&= \frac{N_A}{N} \cdot N \cdot F \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{N_A} = F \cdot \frac{1}{2} \cdot R
\end{aligned}$$

... E vissero tutti felici e contenti!