Homework3: Recursion

I. Lập và giải công thức đệ quy xác định độ phức tạp thuật toán

1.

a) $x(n) = \begin{cases} 2x(n-3) \text{ for } n > 1 \\ x(1) = 1 \end{cases}$

$x(n) = 2x(n-3) = 2(2x(n-6)) = 2^2x(n-6) = ... = 2^k x(n-3k) = 2^{[n/3]}x(n-3[n/3])$

Vì $X(1) = 1 \approx X(0) \approx X(2) \rightarrow O(2^{[n/3]}) \rightarrow O(2^n)$

b) $x(n) = \begin{cases} x(n-2) - 2 \text{ for } n > 1 \\ x(1) = 0 \end{cases}$

$x(n) = x(n-2) - 2 = x(n-4) - 2 - 2 = x(n-6) - 3 \times 2 = ... = x(n-2k) - k \times 2$ Vì $X(1) = 1 \approx X(0) \rightarrow O(-2 \times [n/2]) \rightarrow O(n)$

c) $x(n) = \begin{cases} 2x(n-2) - n \text{ for } n > 0 \\ x(0) = 0 \end{cases}$

$x(n) = 2x(n-2) - n = 2(2x(n-4) - n) - n = 2^2x(n-4) - (n+2n) = n^3x(n-6)$ Vì
$-(n + 2n + 3n) = ... = 2^k \times x(n-2k) - (2^k - 1) \times n = 2^{[n/2]}x(n-2[n/2]) - (2^{[n/2]} - 1) \times n$
$X(0) = 0 \approx X(1) \rightarrow O(2^{[n/2]} \times n) \rightarrow O(2^n \times n)$

2.

Thuật toán F(n) sử dụng phương pháp đệ quy để tính giá trị nhị phân của số thập phân n. Các bước của thuật toán như sau:

- Nếu n = 0, trả về 0
- Nếu n = 1, trả về 1
- Gọi đệ quy F(n/2) để tính giá trị nhị phân của n/2
  - Nếu n chẵn, trả về kết quả của F(n/2) + str(F(0))
  - Nếu n lẻ, trả về kết quả của F(n/2) + str(F(1))

$$F(n) = \begin{cases} 0 \text{ if } n = 0 \\ 1 \text{ if } n = 1 \\ F(n-1) + str(n\%2) \end{cases}$$

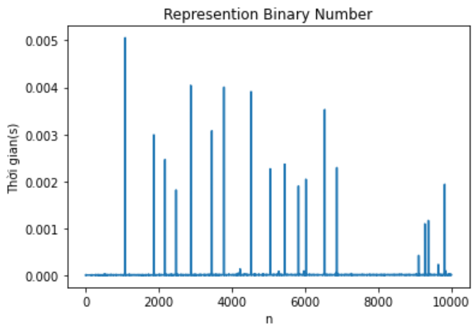
II. Lập trình đệ quy

```
import math
import time
import matplotlib.pyplot as plt
import random
import numpy as np


def countTime(func, arr):
    start = time.time()
    func(arr)
    end = time.time()
    return end - start
```

1. In biểu diễn nhị phân của số nguyên

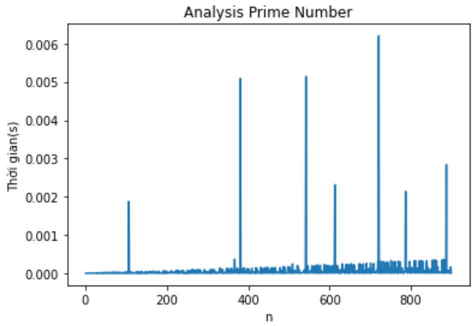
```
def representBinary(x):
    if x == 0:
        return '0'
    elif x == 1:
        return '1'
    else:
        return representBinary(x//2) + str(x%2)


def printRepresentation():
    numbers = []
    times = []
    for i in range(1,10000):
        numbers.append(i)
        time = countTime(representBinary, i)
        times.append(time)
    plt.plot(numbers, times )
    plt.xlabel('n')
    plt.ylabel('Thời gian(s)')
    plt.title("Represention Binary Number")
    plt.show()


printRepresentation()
```

```
printRepresentation()
```



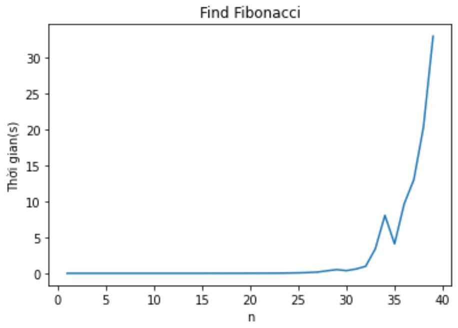
2. Phân tích số nguyên thành tích các thừa số nguyên tố

```
def analysis_prime_number(n, i = 2):
    if n < i:
      if n > 1:
        return [n]
      else:
        return []
    else:
      if n % i == 0:
        count = 0
        while n%i == 0:
            n //= i
            count += 1
        return [i]*count + analysis_prime_number(n , i + 1)
      else:
        return analysis_prime_number(n, i + 1)


def printAnalysisPrimeNumber():
    numbers = []
    times = []
    for i in range(1,900):
        numbers.append(i)
        time = countTime(analysis_prime_number, i)
        times.append(time)
    plt.plot(numbers, times )
    plt.xlabel('n')
    plt.ylabel('Thời gian(s)')
    plt.title("Analysis Prime Number")
    plt.show()

printAnalysisPrimeNumber()
```



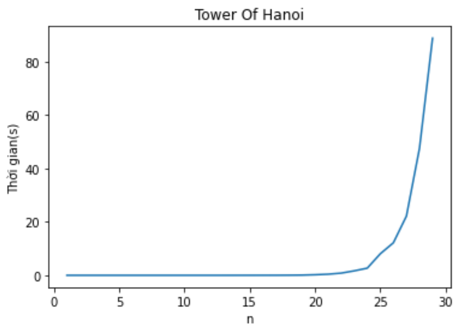

```
def findFibonacci(n):
    if n == 0:
        return 0
    elif n == 1:
        return 1
    else:
        return findFibonacci(n-1) + findFibonacci(n-2)


def printFindFibonacci():
    numbers = []
    times = []
    for i in range(1,40):
        numbers.append(i)
        time = countTime(findFibonacci, i)
        times.append(time)
    plt.plot(numbers, times)
    plt.xlabel('n')
    plt.ylabel('Thời gian(s)')
    plt.title('Find Fibonacci')
    plt.show()
```

```
printFindFibonacci()
```



4. Bài toán tháp Hà Nội

```
def towerOfHanoi(n,from_rod='a', to_rod='b', aux_rod='C'):
    if n == 1:
        return 1
    else:
        return towerOfHanoi(n-1,from_rod,aux_rod,to_rod) + towerOfHanoi(n-1,to_rod,from_rod,aux_rod) + 1


def printTowerOfHanoi():
    numbers = []
    times = []
    for i in range(1,30):
        numbers.append(i)
        time = countTime(towerOfHanoi, i)
        times.append(time)
    plt.plot(numbers, times)
    plt.xlabel('n')
    plt.ylabel('Thời gian(s)')
    plt.title('Tower Of Hanoi')
    plt.show()


printTowerOfHanoi()
```



III. Đặt bài toán, thiết kế, phân tích và triển khai thuật toán

Bài toán xếp balo: Có n đồ vật, mỗi vật có trọng lượng P_i và giá trị $V_i(i = 1..n)$. Có một chiếc balo có thể chứa trọng lượng tối đa là M. Hãy xác định tổng giá trị lớn nhất của các vật có thể đưa vào balo. Chỉ ra một cách cho các vật vào balo.

Xây dựng thuật toán:

- Tạo bảng DP để lưu giá trị của các trường hợp
- Dùng vòng lặp để duyệt qua từng món hàng:
  - Vòng lặp để duyệt qua khối lượng từng món hàng
    - Gọi $f(i, j)$ là tổng giá trị lớn nhất của cái túi khi xét từ vật 1 đến vật i trong túi là túi có giới hạn là j
    - Nếu i hoặc $M \leq 0$ thì không có cách xếp nào $\rightarrow f(0, j) = 0, f(i, 0) = 0$
    - Nếu $V_i > M$ thì bỏ qua vật $n \rightarrow f(i, M) = f(i-1, M)$
    - Nếu $V_i \leq M$ ta có 2 trường hợp:
      - Nếu không lấy $i \rightarrow f(i, M) = f(i-1, M)$
      - Nếu lấy $i \rightarrow f(i, M) = V_i + f(i-1, M-P_i)$
  - $\rightarrow \begin{cases} f(0, j) = 0 \\ f(i, 0) = 0 \\ f(i, j) = max(f(i-1, j), V_i + f(i-1, M-P_i)) \end{cases}$

Ta có:

$f(i, j) = max(f(i-1, j), V_i + f(i-1, M-P_i)) \leq max(2f(i-1, j))$

$\rightarrow f(i,j) \leq max(2(max(2f(i-2,j))$

$\rightarrow f(i,j) \approx O(1)$ vì các giá trị của $f(i-1,j)$ đã được tính là lưu lại

Độ phức tạp của thuật toán xếp balo sẽ phụ thuộc vào số lượng của các vật và giới hạn của túi $\rightarrow O(nM)$ trong đó n là số lượng vật, M là giới hạn của túi.

Thực hiện thuật toán:

```
def proceduce_bag(p,v,m):
    n = len(p)
    dp = [[0 for i in range(m+1)] for j in range(n+1)]
    chosen = [[False for _ in range(m+1)] for _ in range(n+1)]
    for i in range(1,n+1):
        for j in range(1,m+1):
            if p[i-1] <=  j:
                if p[i-1] + dp[i-1][j-p[i-1]] > dp[i-1][j]:
                    dp[i][j] = v[i-1] + dp[i-1][j-p[i-1]]
                    chosen[i][j] = True
                else:
                    dp[i][j] = dp[i-1][j]
            else:
                dp[i][j] = dp[i-1][j]
    i, j = n, M
    chosen_items = []
    while i > 0 and j > 0:
        if chosen[i][j]:
            chosen_items.append(i)
            j -= p[i-1]
        i -= 1
    chosen_items.reverse()
    return dp[n][M], chosen_items



M = 10
P = [6,3,5,4,6]
W = [2,2,6,5,4]
a,b = proceduce_bag(P,W,M)
print(a,b)
```

```
11 [3, 4]
```

✓ 0 giây hoàn thành lúc 21:57