III

Bài toán chia thưởng: Có m p.thưởng được thưởng cho n học sinh có xếp hạng theo thứ tự 1→n

Có bao nhiêu cách chia các phần thưởng thì

1). h/s giỏi hơn có số phần thưởng ≥ bạn kém hơn

2. m p.thưởng phải chia cho các học sinh

(*) Phân tích bài toán

Yêu cầu: Bài toán y/c tìm số cách chia m phần thưởng cho n học sinh giỏi đã sao cho thoả mãn 2 điều kiện

(i) yêu cầu h/s xếp hạng cao phải nhận được số p.thưởng ≥ số phần thưởng học sinh hạng thấp hơn

(ii) Tổng số phần thưởng phải chia hết dư

(*) Xây dựng thuật toán

Giả sử $f(m,n)$ là số cách chia m phần thưởng cho n học sinh thoả mãn 2 điều kiện (i), (ii)

N: đối tượng đã được sắp xếp 1, 2, ... n

S_i: số phần thưởng mà i nhận được

$$S_i >= 0$$

$$S_1 >= S_2 = \ldots >= S_n$$

$$S_1 + S_2 + \ldots + S_n = m$$

(*) 1 Nếu $m=0$ or $n=0$, $f(m,n)=0$

$m=1$ or $n=1$, $f(m,n)=1$

$m<n$, $f(n,n) = f(m,n)$

Nếu $m >= n$, $f(m,n) = f(m-n, n) + f(m, n-1)$

+, Học sinh cuối cùng 0 có phần

$\to f(m, n-1)$

+ Học sinh cuối cùng có ít nhất 1

$f(m-n, n)$

$\to m \geq n \to f(m,n) = f(m, n-1) + f(m-n, n)$

④ Chứng minh tính đúng của thuật toán

- Chứng minh thuật toán thoả mãn 2 điều kiện

(i): Với m phần thưởng và n học sinh giỏi, thuật toán chỉ chia phần thưởng cho các h/s xếp hạng cao hơn

(ii): Thuật toán chỉ chia m cho n học sinh giỏi

Trong trường hợp $m<n$: học sinh xếp cuối sẽ luôn 0 nhận được gì cả trong mọi cách chia.

Vậy $n > m$ thì $f(m,n) = f(m,m)$

Trong trường hợp $m >= n$: số vật chia (phần thưởng) lớn hơn hoặc bằng số học sinh (đối tượng) ta sẽ chia làm 2 nhóm

- Học sinh cuối 0 có phần thưởng

$f(m, n-1)$

- Học sinh cuối cùng có ít nhất 1

$\to f(m-n, n)$

Vậy Trong cả 2 trường hợp, tổng số phần thưởng đều chia hết cho n, $\to$ điều kiện (i) thỏa

Thứ ngày

→ Thuật toán thu yêu cầu đề bài

* Độ phức tạp của thuật toán

Độ phức tạp của thuật toán $f(m,n)$ là $O(m \cdot n)$.
Vì thuật toán có thể tạo ra $m \times n$ lời gọi đệ quy.