Homework 3

I. Lập và giải công thức đệ quy xác định độ phức tạp thuật toán.

1.

a)

$$
\begin{aligned}
x(n) &= 2x(n-3) \text{ for } n > 1,\ x(1) = 1 \\
&= 2^2x(n-6) \\
&= 2^3x(n-9) \\
&= \ldots \\
&= 2^{(n-1)/3}\ x(n - 3((n - 1)/3)) \\
&= 2^{(n-1)/3}(1) = 2^{(n-1)/3}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow x(n) = O(2^{n/3})$

b)

$$
\begin{aligned}
x(n) &= x(n-2) - 2 \text{ for } n > 1,\ x(1) = 0 \\
&= x(n-4) - 2 - 2 \\
&= x(n-6) - 2 - 2 - 2 \\
&= \ldots \\
&= x(n - 2(n - 1/2)) - 2 * (n - 1/2) \\
&= x(1) - n = 0 - n
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow x(n) = O(n)$

2.

2.4.2

Setup: $F(n) = F(n/2) + 1$ if $n > 1$, $F(0) = 1$, $F(1) = 1$

$a = 1, b = 2, d = 0 \Rightarrow a = b^d$

$\Rightarrow F(n) = O(\log n)$

II. Lập trình đệ quy *(Trong file đính kèm)*

III. Đặt bài toán, thiết kế, phân tích và triển khai thuật toán

Bài toán:

Bài toán chia thưởng: Có m phần thưởng được thưởng cho n học sinh giỏi có xếp hạng theo thứ tự từ 1 đến n. Hỏi có bao nhiêu cách chia các phần thưởng thoả mãn các điều kiện sau: (i) Học sinh giỏi hơn có số phần thưởng không ít hơn bạn kém hơn; (ii) m phần thưởng phải chia hết cho các học sinh.

- **Phân tích bài toán**:
  - Nếu m = 0, hoặc n = 1, số cách chia là 1.
  - Nếu m < n, số cách chia bằng số cách chia m phần thưởng cho nngười.
  - Nếu m >= n, số cách chia bằng tổng của 2 trường hợp:
    - Chia i phần thưởng cho j – 1 người.
    - Chia i – j phần thưởng cho j người.
- **Xây dựng thuật toán:**
  - T(m, n) = $\begin{cases} 1\ if\ m = 0\ or\ n = 1 \\ T(m,m)\ if\ m < n \\ T(m, n - 1) + T(m - n,\ n)\ if\ m >= n \end{cases}$
- **Chứng minh tính đúng của thuật toán**
  - Trường hợp cơ sở:

    Khi m = 0 hoặc n = 1, số cách chia phần thưởng là 1, tức là T(m,n) = 1. Điều này đúng vì khi không có phần thưởng để chia (m = 0) hoặc chỉ có 1 người (n = 1), không có cách nào để chia phần thưởng.

  - Trường hợp giả sử:

    Giả sử định lý đúng với giá trị m' < m và n' < n, tức là T(m', n') được tính đúng theo công thức đã cho.

  - Trường hợp quy nạp:
    - Khi m >= n, số cách chia phần thưởng được chia thành 2 trường hợp:
      - Trường hợp 1: Người cuối cùng không nhận phần thưởng. Khi đó, ta phải chia m phần thưởng cho n - 1 người còn lại, tức là T(m, n-1).
      - Trường hợp 2: Người cuối cùng nhận phần thưởng. Khi đó, ta phải chia m - n phần thưởng cho n người còn lại, tức là T(m-n, n). Do đó, số cách chia phần thưởng là T(m, n) = T(m,n-1) + T(m-n,n).
    - Khi m < n, tất cả các người đều nhận được phần thưởng, và mỗi người nhận được một phần thưởng. Do đó, số cách chia phần thưởng là T(m, m).

=> Vậy ta đã chứng minh tính đúng của thuật toán bằng phương pháp quy nạp.

- **Độ phức tạp của thuật toán**
  - $T(m, n) = T(m, n-1) + T(m - n, n)$ *(m >= n)*
  - $T(m, m) = T(m, m-1) + T(0, m)$ (m < n)

$T(m, n) = T(m, n-2) + T(m-n, n-1) + T(m-2n, n)$ *(m >= 2n)*

$= T(m, n-3) + T(m-n, n-2) + T(m-2n, n-1) + T(m-3n, n)$ *(m >= 3n)*

$= ...$

$= T(m, 1) + T(m-n, 2) + ... + T(m-(m-n)n, m-n) + T(m-(m-n)n, m-n+1)$

(m >= (m – n)n)

$= O(mn)$

$T(m, m) = T(m, m-1) + T(0, m)$

$= T(m, m-2) + T(m-m, m-1) + T(0, m-1) + T(0, m)$

$= T(m, m-3) + T(m-m, m-2) + T(0, m-2) + T(m-2m, m-1) + T(0, m-1) + T(0, m)$

$= ...$

$= T(m, 1) + T(m-m, 2) + ... + T(m-(m-1)m, m-1) + T(0, m-1+1) + ... + T(0, m-1) + T(0, m)$

$= O(m)$

=> Độ phức tạp của thuật toán là O(mn)

- **Chương trình mô tả** *(trong file đính kèm)*