Линейная Алгебра
2 семестр

Фреик Александр Андреевичем

Весна 2020

Это конспект учебника по аналитеческой геометрии от Беклимешева Д. В. для подготовки к весеннему экзамену 1 курса по линейной алгебре.

Оглавление

Глава 1

Матрицы и системы линейных уравнений

1.1 Ранг матрицы. Теоремы о базисном миноре. Теорема о ранге матрицы.

1.2 Системы линейных уравнений. Метод Гаусса. Теорема Кронекера- Капелли. Фундаментальная система решений и общее решение однород- ной системы линейных уравнений. Общее решение неоднородной систе- мы. Теорема Фредгольма.

Глава 2

Линейные пространства

2.1 3 Пункт

2.1.1 Аксиоматика линейного пространства

Определение. Множество $\mathscr{L}$ мы назовем линейным пространством, а его элементы — векторами, если:

1. Задан закон (операция сложения) по которому любым двум элементам x и y из $\mathscr{L}$ сопоставляется элемент, называемый их суммой и обозначаемый
2. Задан закон (операция умножения на число), по которому элементу x из $\mathscr{L}$ и числу α сопоставляется элемент из $\mathscr{L}$, называемый произведением x на a и обозначаемый a x .
3. Для любых элементов x, y и r из для любых чисел α и β выполнены следующие требования (или аксиомы):
    (a) $x + y = y + x$
    (b) $(x + y) + z = x + (y + z)$
    (c) Существует элемент 0 такой что для каждого x из $\mathscr{L}$ выполнено $x + 0 = x$
    (d) Для каждого x существует элемент -x такой, что $x+(-x) = 0$
    (e) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

(f) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta y$

(g) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

(h) $1x = x$

Если в п. 2)мы ограничиваемся вещественными числами, то $\mathscr{L}$ называется вещественным линейным пространством, если же определено умножение на любое комплексное число, то линейное пространство называется комплексным. Вектор -x называется противоположным вектору x. Вектор 0 называется нулевым вектором или нулем.

2.1.2 Линейная зависимость и линейная независимость систем элементов в линейном пространстве.

По аналогии с соответствующими определениями для векторов и для столбцов, веденными в гл. I и V, мы можем определить линейно зависимую и линейно независимую систему векторов в линейном пространстве. Напомним, что линейная комбинация называется тривиальной, если все ее коэффициенты равны нулю.

Defenition 1. *Система векторов называется линейңо зависимой, если существует равная нулю нетривиальная линейная комбинация этих векторов. В противном случае, т. е, когда только тривиальная линейная комбинация векторов равна нулю, система векторов называется линейно независимой.*

О линейно зависимых и линейно независимых системах векторов справедливы те же предложения, что и о таких же системах столбцов.. Мы приведем здесь только формулировки, так как доказательства не отличаются от доказательств предложений о столбцах (см. предложения 2—5 § 1 гл. V).

Предположение 2.1.1. *Система из $k > 1$ векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов* *есть линейная комбинация остальных.*

Предположение 2.1.2. *Если в систему входит нулевой вектор, то она линейно зависима.*

Предположение 2.1.3. *Если в систему входит нулевой вектор, то она линейно зависима.*

Предположение 2.1.4. *Каждая подсистема линейно независимой системы векторов сама линейно независима.*

Предположение 2.1.5. *Если вектор раскладывается по линейно независимой системе векторов, то коэффициенты разложения определены однозначно.*

2.1.3 Базис и размерность.

Defenition 2. *Базисом в линейном пространстве $\mathscr{L}$ мы назовем упорядоченную конечную систему векторов, если:*

- *она линейно независима*
- *каждый вектор из $\mathscr{L}$ раскладывается в линейную комбинацию векторов этой системы.*

В определении сказано, что базис — упорядоченная система век торов. Это означает, что из одного и того же множества векторов можно составить разные базисы, по-разному нумеруя векторы. Коэффициенты линейной комбинации, о которой идет речь в определении базиса, называются компонентами или координатами вектора в данном базисе.
Векторы базиса $e_1, \ldots, e_n$ мы будем записывать в виде строки, а компоненты $\xi_1, \ldots, \xi_n$ вектора в базисе $\boldsymbol{e}$ – в столбец $\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$ который

назовем координатным столбцом вектора.
Разложение вектора по базису:

$$x = \sum \xi^i e_i = \begin{bmatrix} p_1 & e_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{e\xi}$$

Из предложения 2.1.5 непосредственно следует, что компоненты век тора в данном базисе определены однозначно.

Предположение 2.1.6. *Координатный столбец суммы векторов ра вен сумме их координатных столбцов. Координатный столбец произ ведения вектора на число равен произведению координатного столбца данного вектора на это число.*

Доказательство. Для доказательства просто перемножим строку базиса с координатными столбцами и воспользуемся свойствами матриц. □

Предположение 2.1.7. *Векторы линейно зависимы тогда и только тогда, когда линейно зависимы их координатные столбцы.*

Предположение 2.1.8. *Если в линейном пространстве существует базис из n векторов, то любая система из $m > n$ векторов линейно зависима.*

Доказательство. Предположим, что в пространстве существует базис $e_1, \ldots, e_n$, и рассмотрим систему векторов $f_i, \ldots, f_m$, причем m > n. Каждый из векторов $f_i, \ldots, f_m$ мы разложим по базису и составим матрицу из их координатных столбцов. Это матрица размеров m x n, и ранг ее не превосходит n. Поэтому столбцы матрицы линейно зависимы, а значит, линейно зависимы и векторы $f_i, \ldots, f_m$ □

Theorem 1. *Если в линейном пространстве есть базис из n век торов, то и любой другой базис состоит из n векторов.*

Defenition 3. *Линейное пространство, в котором существует базис из n векторов, называется n-мерным, а число n - размерностью пространства. Размерность пространства $\mathscr{L}$ обозначается $dim\mathscr{L}$*

В нулевом пространстве нет базиса, так как система из одно го нулевого вектора линейно зависима. Размерность нулевого пространства по определению считаем равной нулю. Может случиться, что каково бы ни было натуральное число m, в пространстве найдется m линейно независимых векторов. Такое пространство называется бесконечномерным. Базиса в нем не существует: если бы был базис из n векторов, то любая система из n + 1 векторов была бы линейно зависимой по предложению 2.1.8.

Example. Линейное пространство функций от одной переменной t, определенных и непрерывных на отрезке [0, 1] является бесконечномерным. Чтобы это проверить, достаточно доказать, что при любом m в нем существует линейно независимая система из m векторов. Зададимся произвольным числом m. Векторы нашего пространства - функции $t_0 = 1, t, t^2, \ldots, t^{m-1}$ – линейно независимы. Действительно, равенство нулю линейной комбинации этих векторов означает, что многочлен $\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots + \alpha_{m-1} t^{m-1}$ В n-мерном пространстве каждая упорядоченная линейно независимая система из n векторов есть базис.

Предположение 2.1.9. *Если в линейном пространстве существует базис из n векторов, то любая система из $m > n$ векторов линейно зависима.*

Доказательство. Очевидно. □

Предположение 2.1.10. *В n-мерном пространстве каждую упорядоченную линейно независимую систему из $k < n$ векторов можно дополнить до базиса.*

Доказательство. Очевидно. □

2.2 4 Пункт

2.2.1 Координатное представление векторов линейного пространства и операций с ними.

2.2.2 Теорема об изоморфизме. Матрица перехода от одного базиса к другому.

2.2.3 Теорема об изоморфизме. Матрица перехода от одного базиса к другому.

2.2.4 Изменение координат при изменении базиса в линейном пространстве.

2.3 Подпространства и способы их задания в линейном пространстве. Сумма и пересечение подпространств. Формула размерности суммы подпространств. Прямая сумма.

2.4 Линейные отображения линейных пространств и линейные преобразования линейного пространства. Ядро и образ линейного отображения. Операции над линейными преобразованиями. Обратное преобразование. Линейное пространство линейных отображений (преобразований).

2.5 Матрицы линейного отображения и линейного преобразования для конечномерных пространств. Операции над линейными преобразованиями в матричной форме. Изменение матрицы линейного отображения (пре- образования) при замене базисов. Изоморфизм пространства линейных отображений и пространства матриц.

2.6 Инвариантные подпространства линейных преобразований. Собственные векторы и собственные значения. Собственные подпространства. Линейная независимость собственных векторов, принадлежащих различным собственным значениям.

Глава 3

33rr

paisugvpabrva pads gae adg. b fdb

3.1 Ранг матрицы. Теоремы о базисном миноре. Теорема о ранге матрицы.

[aufpiabf

3.1.1 lahgo iourbg

bpaib psd ps sipdf bd