Линейная Алгебра
2 семестр

Фреик Александр Андреевич

Весна 2020

Это конспект учебника по аналитеческой геометрии от Беклимешева Д. В. для подготовки к весеннему экзамену 1 курса по линейной алгебре.
P.S. Он не пустой, промотайте вниз, пожалйста =)

Оглавление

Глава 1

Матрицы и системы линейных уравнений

1.1 1 Пункт

1.1.1 Ранг матрицы

1.1.2 Теоремы о базисном миноре

1.1.3 Теорема о ранге матрицы

1.2 2 Пункт

1.2.1 Системы линейных уравнений

1.2.2 Метод Гаусса

1.2.3 Теорема Кронекера-Капелли

1.2.4 Фундаментальная система решений и общее решение однородной системы линейных уравнений

1.2.5 Общее решение неоднородной системы

1.2.6 Теорема Фредгольма

Глава 2

Линейные пространства

2.1 3 Пункт

2.1.1 Аксиоматика линейного пространства

Определение. Множество $\mathscr{L}$ мы назовем линейным пространством, а его элементы — векторами, если:

1. Задан закон (операция сложения) по которому любым двум элементам x и y из $\mathscr{L}$ сопоставляется элемент, называемый их суммой и обозначаемый
2. Задан закон (операция умножения на число), по которому элементу x из $\mathscr{L}$ и числу α сопоставляется элемент из $\mathscr{L}$, называемый произведением x на a и обозначаемый a x .
3. Для любых элементов x, y и г из для любых чисел α и β выполнены следующие требования (или аксиомы):
   (a) $x + y = y + x$
   (b) $(x + y) + z = x + (y + z)$
   (c) Существует элемент 0 такой что для каждого x из $\mathscr{L}$ выполнено $x + 0 = x$
   (d) Для каждого x существует элемент -x такой, что $x+(-x) = 0$
   (e) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
   (f) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta y$

(g) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

(h) $1x = x$

Если в п. 2)мы ограничиваемся вещественными числами, то $\mathscr{L}$ называется вещественным линейным пространством, если же определено умножение на любое комплексное число, то линейное пространство называется комплексным. Вектор -x называется противоположным вектору x. Вектор 0 называется нулевым вектором или нулем.

2.1.2 Линейная зависимость и линейная независимость систем элементов в линейном пространстве.

По аналогии с соответствующими определениями для векторов и для столбцов, веденными в гл. I и V, мы можем определить линейно зависимую и линейно независимую систему векторов в линейном пространстве. Напомним, что линейная комбинация называется тривиальной, если все ее коэффициенты равны нулю.

Defenition 1. *Система векторов называется линейцо зависимой, если существует равная нулю нетривиальная линейная комбинация этих векторов. В противном случае, т. е, когда только тривиальная линейная комбинация векторов равна нулю, система векторов называется линейно независимой.*

О линейно зависимых и линейно независимых системах векторов справедливы те же предложения, что и о таких же системах столбцов.. Мы приведем здесь только формулировки, так как доказательства не отличаются от доказательств предложений о столбцах (см. предложения 2—5 § 1 гл. V).

Предположение 2.1.1. *Система из $k > 1$ векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов есть линейная комбинация остальных.*

Предположение 2.1.2. *Если в систему входит нулевой вектор, то она линейно зависима.*

Предположение 2.1.3. *Если в систему входит нулевой вектор, то она линейно зависима.*

Предположение 2.1.4. *Каждая подсистема линейно независимой системы векторов сама линейно независима.*

Предположение 2.1.5. *Если вектор раскладывается по линейно независимой системе векторов, то коэффициенты разложения определены однозначно.*

2.1.3 Базис и размерность.

Defenition 2. *Базисом в линейном пространстве $\mathscr{L}$ мы назовем упорядоченную конечную систему векторов, если:*

- *она линейно независима*
- *каждый вектор из $\mathscr{L}$ раскладывается в линейную комбинацию векторов этой системы.*

В определении сказано, что базис — упорядоченная система век торов. Это означает, что из одного и того же множества векторов можно составить разные базисы, по-разному нумеруя векторы. Коэффициенты линейной комбинации, о которой идет речь в определении базиса, называются компонентами или координатами вектора в данном базисе.
Векторы базиса $e_1, \dots, e_n$ мы будем записывать в виде строки, а компоненты $\xi_1, \dots, \xi_n$ вектора в базисе $\boldsymbol{e}$ – в столбец $\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$ который назовем координатным столбцом вектора.

Разложение вектора по базису:

$$x = \sum \xi^i e_i = \begin{bmatrix} p_1 & e_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{e\xi}$$

Из предложения 2.1.5 непосредственно следует, что компоненты век тора в данном базисе определены однозначно.

Предположение 2.1.6. *Координатный столбец суммы векторов ра вен сумме их координатных столбцов. Координатный столбец произ ведения вектора на число равен произведению координатного столбца данного вектора на это число.*

Доказательство. Для доказательства просто перемножим строку базиса с координатными столбцами и воспользуемся свойствами матриц. □

Предположение 2.1.7. *Векторы линейно зависимы тогда и только тогда, когда линейно зависимы их координатные столбцы.*

Предположение 2.1.8. *Если в линейном пространстве существует базис из n векторов, то любая система из $m > n$ векторов линейно зависима.*

Доказательство. Предположим, что в пространстве существует базис $e_1, \ldots, e_n$, и рассмотрим систему векторов $f_i, \ldots, f_m$, причем m > n. Каждый из векторов $f_i, \ldots, f_m$ мы разложим по базису и составим матрицу из их координатных столбцов. Это матрица размеров m x n, и ранг ее не превосходит n. Поэтому столбцы матрицы линейно зависимы, а значит, линейно зависимы и векторы $f_i, \ldots, f_m$ □

Theorem 1. *Если в линейном пространстве есть базис из n век торов, то и любой другой базис состоит из n векторов.*

Defenition 3. *Линейное пространство, в котором существует базис из n векторов, называется n-мерным, а число n - размерностью пространства. Размерность пространства $\mathscr{L}$ обозначается $dim\mathscr{L}$*

В нулевом пространстве нет базиса, так как система из одно го нулевого вектора линейно зависима. Размерность нулевого пространства по определению считаем равной нулю. Может случиться, что каково бы ни было натуральное число m, в пространстве найдется m линейно независимых векторов. Такое пространство называется бесконечномерным. Базиса в нем не существует: если бы был базис из n векторов, то любая система из n + 1 векторов была бы линейно зависимой по предложению 2.1.8.

Example. Линейное пространство функций от одной переменной t, определенных и непрерывных на отрезке [0, 1] является бесконечномерным. Чтобы это проверить, достаточно доказать, что при любом m в нем существует линейно независимая система из m векторов. Зададимся произвольным числом m. Векторы нашего пространства - функции $t_0 = 1, t, t^2, \dots, t^{m-1}$ – линейно независимы. Действительно, равенство нулю линейной комбинации этих векторов означает, что многочлен $\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots + \alpha_{m-1} t^{m-1}$ В n-мерном пространстве каждая упорядоченная линейно независимая система из n векторов есть базис.

Предположение 2.1.9. *Если в линейном пространстве существует базис из n векторов, то любая система из $m > n$ векторов линейно зависима.*

Доказательство. Очевидно. □

Предположение 2.1.10. *В n-мерном пространстве каждую упорядоченную линейно независимую систему из $k < n$ векторов можно дополнить до базиса.*

Доказательство. Очевидно. □

2.2 4 Пункт

2.2.1 Матрица перехода от одного базиса к другому

Замена базиса. Если в п-мерном пространстве даны два ба зиса $e_1, \ldots, e_n$ и $e'_1, \ldots, e'_n$, то мы можем разложить каждый вектор второго базиса по первому базису:

$$e'_i = \sum \sigma_i^j e_j \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.1}$$

Компоненты σ_i^j; можно записать в виде квадратной матрицы

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \ldots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \ldots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \ldots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}$$

Столбцы этой матрицы – координатные столбцы векторов $e'_1, \ldots, e'_n$ в базисе $\boldsymbol{e}$. Поэтому столбцы линейно независимы, и $detS \neq 0$.

Defenition 4. *Матрицу, j-й столбец которой есть координатный столбец вектора e_j в базисе е, мы назовем матрицей перехода от базиса е к базису ′.*

Равенство 2.1 можно переписать в матричных обозначениях:

$$\begin{bmatrix} e'_1 & \ldots & e'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & \ldots & e_n \end{bmatrix} S$$

или

$$\boldsymbol{e'} = \boldsymbol{e}S \tag{2.2}$$

Пусть в линейном пространстве даны три базиса и s and T матрицы перехода от 1 ко 2му и 2го к 3му

$$\boldsymbol{e''} = \boldsymbol{e}ST \tag{2.3}$$

Предположение 2.2.1. *Пусть задан базисе. Каждая матрица S с $detS \neq 0$ есть матрица перехода от е к некоторому базису е'.*

Доказательство. Очевидно. □

2.2.2 Изменение координат при изменении базиса в линейном пространстве.

Связь компонент одного и того же векторах в двух разных базисах. Пусть $x = \boldsymbol{e\xi} = \boldsymbol{e'\xi'} = \boldsymbol{eS\xi'}$. Итак, мы имеем разложение векторах по базису е в двух видах, и в силу единственности координатного столбца получаем:

$$\boldsymbol{\xi} = S\boldsymbol{\xi'} \tag{2.4}$$

2.2.3 Координатное представление векторов линейного пространства и операций с ними.

Нужно сказать про координатные столбцы и операции над ними будут как обычные операции над матрицами. (В "обычном"векторном пространстве)

2.2.4 Ориентация пространства

Понятие ориентации прямой, плоскости и пространства в §4 гл. 1 основывалось на разделении всех базисов на два класса. Произведем это разделение для вещественных линейных пространств любой размерности.

Фиксируем некоторый базис е0 и обозначим через $\mathscr{E}_+(e_0)$ множество всех таких базисов е, что $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}_0 S, detS > 0$. Остальные базисы отнесем к классу $\mathscr{E}_-(e_0)$. Ясно, что для $\boldsymbol{e'} \in \mathscr{E}_+(e_0)$ выполнено $\boldsymbol{e'} = \boldsymbol{e}_0 T, detT > 0$.

Предположение 2.2.2. *Классы базисов $\mathscr{E}_+(e_0)$ и $\mathscr{E}_-(e_0)$ не зависят от выбора исходного базиса е0.*

Доказательство. Очевидно. т.к. $detST = detS * detT$ □

Defenition 5. *Вещественное линейное пространство называется ориентированным, если из двух классов базисов $\mathscr{E}_+(e_0)$ и $\mathscr{E}_-(e_0)$ указан один. Базисы выбранного класса называются положительно ориентированными.*

2.2.5 Теорема об изоморфизме.

Пока пропускаю

2.3 5 Пункт

2.3.1 Подпространства и способы их задания в линейном пространстве.

Defenition 6. *Непустое подмножество $\mathscr{L}'$ векторов линейного пространства $\mathscr{L}$ называется линейным подпространством, если:*

- *сумма любых векторов из $\mathscr{L}'$ принадлежит $\mathscr{L}'$*
- *произведение каждого вектора из $\mathscr{L}'$ на любое число также принадлежит $\mathscr{L}'$*

Подпространство является линейным пространством.

Defenition 7. *Пусть дано некоторое множество $\mathscr{P}$ векторов в линей ном пространстве $\mathscr{L}$. Линейной оболочкой $\mathscr{L}$ множества $\mathscr{P}$ называется множество $\mathscr{L}'$ всех линейных комбинаций векторов множества $\mathscr{P}$.*

В частности, если $\mathscr{P}$ - конечное множество векторов, мы имеем

Предположение 2.3.1. *Размерность линейной оболочки множества из m векторов не превосходит m.*

Доказательство. Очевидно. □

Предположение 2.3.2. *Пусть $\mathscr{L}'$ – подпространство n-мерного пространства $\mathscr{L}$. Тогда $dim\mathscr{L}' \leq n$. Если $dim\mathscr{L}' = n$, то $\mathscr{L}$ совпадает с $\mathscr{L}'$.*

Доказательство. Очевидно. □

Предположение 2.3.3. *Пусть $\mathscr{L}'$ – подпространство n-мерного пространства $\mathscr{L}$. Если базис $e_1, \ldots, e_k$ в $\mathscr{L}'$ дополнить до базиса $e_1, \ldots, e_k, \ldots, e_n$ в $\mathscr{L}$, то в таком базисе все векторы из $\mathscr{L}$ и только они будут иметь компоненты $\xi^{k+1} = \ldots = \xi^n = 0$.*

Доказательство. Очевидно. □

Предположение 2.3.4. *Пусть в n – мерном пространстве $\mathscr{L}$ выбран базис. Тогда координатные столбцы векторов, принадлежащих k-мерному подпространству $\mathscr{L}'$ $(k < n)$, удовлетворяют* *однородной систе ме линейных уравнений ранга n - k.*

$$\xi^j = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^j \xi'^i = 0 \qquad (j = k+1, \ldots, n)$$

Доказательство. Действительно, при замене базиса старые компоненты выражаются через новые по формулам 2.2, и в новом базисе система уравнений примет такой вид. □

2.3.2 Сумма и пересечение подпространств

Рассмотрим два подпространства $\mathscr{L}'$ и $\mathscr{L}''$ линейного пространства $\mathscr{L}$

Defenition 8. *Будем называть суммой подпространств $\mathscr{L}'$ и $\mathscr{L}''$ и обозначать $\mathscr{L}'+\mathscr{L}''$ линейную оболочку их объединения $\mathscr{L}'\cup\mathscr{L}''$.*

Пусть размерности подпространств $\mathscr{L}'$ и $\mathscr{L}''$ равны k и l. Выберем в этих подпространствах базисы $e_1, \ldots, e_k$ и $f_1, \ldots, f_l$. Каждый вектор из $\mathscr{L}'$ и $\mathscr{L}''$ раскладывается по векторам $e_1, \ldots, e_k, f_1, \ldots, f_l$, и мы по лучим базис в $\mathscr{L}' + \mathscr{L}''$, если удалим из этой системы все векторы, которые линейно выражаются через остальные. Сделать это можно, например, так:
Выберем какой-либо базис в $\mathscr{L}$ и составим матрицу из координатных столбцов всех векторов $e_1, \ldots, e_k, f_1, \ldots, f_l$. Те векторы, координатые столбцы которых - базисные столбцы этой матрицы, составляют базис в $\mathscr{L}' + \mathscr{L}''$.

Defenition 9. *Назовем пересечением подпространств $\mathscr{L}'$ и $\mathscr{L}''$ и обозначим $\mathscr{L}'\cap\mathscr{L}''$ множество векторов, которые принадлежат обоим подпространствам.*

Пересечение $\mathscr{L}'$ и $\mathscr{L}''$ есть подпространство.
Для суммы s $>$ 2 пространств

$$dim2(\mathscr{L} + \ldots + \mathscr{L}) \leq dim\mathscr{L} + \ldots + dim\mathscr{L}$$

2.3.3 Прямая сумма

Defenition 10. *Сумма подпространств $\mathscr{L} + \ldots + \mathscr{L}$ называется прямой суммой, если ее размерность равна сумме размерностей* *этих подпространств, т. е. имеет максимальное из возможных значений.*

Если надо подчеркнуть в обозначении, что сумма прямая, то используют знак $\oplus$.

Прибавление нулевого подпространства не меняет ни размерность суммы, ни сумму размерностей. Но ниже мы будем считать подпро странства ненулевыми, чтобы избежать оговорок, вызванных несу ществованием базиса в нулевом подпространстве.

Предположение 2.3.5. *Для того чтобы сумма $\mathscr{L}'$ подпространств $\mathscr{L} + \ldots + \mathscr{L}$ была прямой суммой, необходимо и достаточно выполнение любого из следующих четырех свойств:*

1. *любая система из $m \leq s$ ненулевых векторов, принадлежащих различным подпространствам $\mathscr{L}^i (= 1, ..., s)$, линейно независима*
2. *каждый вектор $x \in \mathscr{L}'$ однозначно раскладывается в сумму $x_1 + ... + x_8$, где $x_i \in \mathscr{L}^i \qquad i(= 1, ..., s)$*
3. *пересечение каждого из подпространств $\mathscr{L}^i$ с суммой остальных есть нулевое подпространство*
4. *объдинение базисов подпространств $\mathscr{L}^i$ (i = 1, ..., s) есть базис в $\mathscr{L}'$*

Доказательство. стр 169 Опр -> 1 от противного: Допустим, что нашлась линейно зависимая система ненулевых векторов таких, что никакие два из них не лежат в одном и том же подпространстве. Дополним каждый из этих векторов до базиса в его подпространстве, а в тех подпространствах, из которых в системе векторов нет, выберем базис произвольно. Объединение этих базисовл.з. система.

1 -> 2 от противного. Допустим, что б) не выполнено и некоторый вектор x представлен как сумма xi и yi. Тогда (x1 - y1) + ... + (xs - ys) = 0, и каждая разность так же явдяется вектором соответствуюзего пространства => Если хоть одна из разностей отлична от нуля, мы получаем противоречие со свойством а). 2->3 так же от противного 3->4 так же от противного □

Легко видеть, что при сложении подпространств можно произвольно расставлять и убирать скобки.

Предположение 2.3.6. *Для любого подпространства $\mathscr{L}'$ пространства $\mathscr{L}$ найдется такое подпространство $\mathscr{L}''$, что $\mathscr{L} = \mathscr{L}' \oplus \mathscr{L}''$*

Доказательство. Выберем базис e1 , ..., ek подпространства' и дополним его до базиса пространства векторами ek+1, ..., en, Линейную оболочку ek+l, ..., en обозначим через ". Из предложения 5 видно, что $\mathscr{L} = \mathscr{L}' \oplus \mathscr{L}''$ □

2.3.4 Формула размерности суммы подпространств

Theorem 2. *Размерность суммы двух подпространств равна сумме их размерностей минус размерность их пересечения.*

Доказательство. Если сумма прямая, утверждение справедливо: размерность равна сумме размерностей, а пересечение нулевое.
Иначе $\mathscr{L}^2 = \mathscr{M} \oplus (\mathscr{L}^1 \cap \mathscr{L}^2) => \mathscr{L}^1 + \mathscr{L}^2 = \mathscr{M} + \mathscr{L}^1 = \mathscr{M} \oplus \mathscr{L}^1$
because $z \in (\mathscr{M} \cap \mathscr{L}^1) => since \mathscr{M} \subset \mathscr{L}^2$
$z \in (\mathscr{L}^2 \cap \mathscr{L}^1) \cap \mathscr{M} = 0$ □

2.4 6 Пункт

2.4.1 Линейные отображения линейных пространств и линейные преобразования линейного пространства.

Пусть $\mathscr{L}$ и $\overline{\mathscr{L}}$- два линейных пространства, оба вещественные или оба комплексные. Под отображением A пространства $\mathscr{L}$ в пространство $\overline{\mathscr{L}}$ понимается закон, по которому каждому вектору из $\mathscr{L}$ сопоставлен единственный вектор из $\overline{\mathscr{L}}$

Defenition 11. *Отображение $A : \mathscr{L} \to \overline{\mathscr{L}}$ называется линейным, если для любых векторов x и y из и $\mathscr{L}$ любого числа α выполнены равенства*

$$A(x+y) = A(x) + A(y), \qquad A(\alpha x) = \alpha A(x) \tag{2.5}$$

Линейное отображение мы будем называть линейным преобразованием, если пространства $\mathscr{L}$ и $\overline{\mathscr{L}}$ совпадают.

Предположение 2.4.1. *При линейном отображении $A : L \to \overline{L}$ и линейное подпространство переходит в линейное подпространство причем*

Доказательство. □

2.4.2 Ядро и образ линейного отображения.

2.4.3 Операции над линейными преобразованиями

2.4.4 Ядро и образ линейного отображения.

2.4.5 Обратное преобразование

2.4.6 Линейное пространство линейных отображений (преобразований)

2.5 Матрицы линейного отображения и линейного преобразования для конечномерных пространств. Операции над линейными преобразованиями в матричной форме. Изменение матрицы линейного отображения (пре- образования) при замене базисов. Изоморфизм пространства линейных отображений и пространства матриц.

2.6 Инвариантные подпространства линейных преобразований. Собственные векторы и собственные значения. Собственные подпространства. Линейная независимость собственных векторов, принадлежащих различным собственным значениям.