Исследование модуля Юнга и вычисление его для различных материалов

ЦЕЛИ РАБОТЫ:

- Экспериментально получить модуль Юнга для различных материалов (латунь, дерево, сталь) и сравнить их с табличными данными.
- Исследовать форму прогиба балки под действием постоянной внешней силы, приложенной к ее центру.
- Исследовать зависимость прогиба от положения груза.

Модуль Юнга

Из закона Гука и равновесия балки можно вывести формулу: $$E = \frac{Pl^3}{4ab^3 y_{\max}}.$$

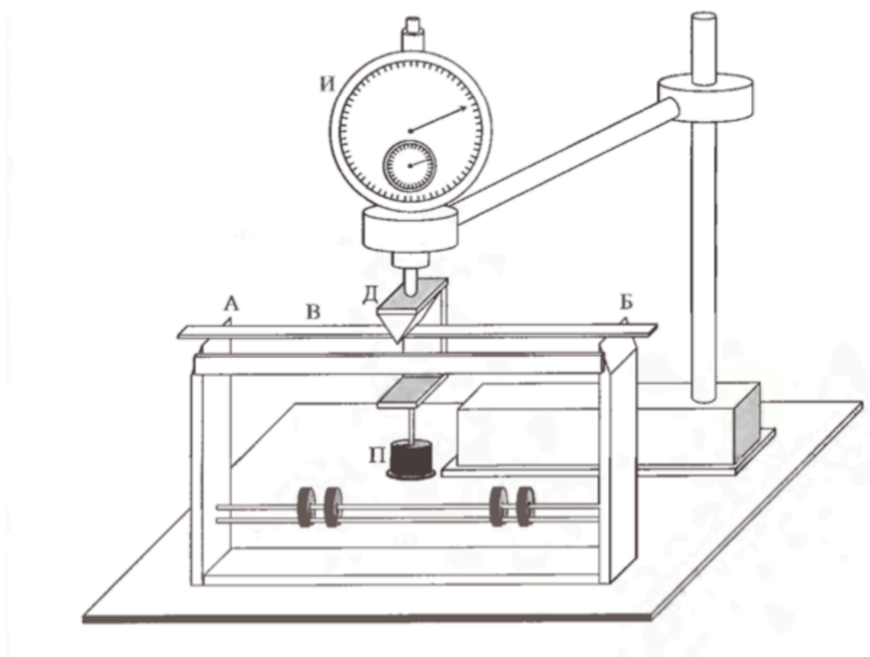
Для Модуля Юнга материала, где a — ширина палки (горизонтальная), а b — ее толщина (вертикальная), P —вес нагрузки в центре, y max —прогиб в центре.
С помощью этой формулы мы и будем вычислять модули юнга материалов. Для этого сначала с помощью штанге циркуля вычислим поперечные размеры балок.

(Более подробно: при выводе этой формулы мы использовали, во первых, предположение что в балке есть поверхность нулевого напряжения в ее центре, и напряжение линейно возрастает при отдалении от центра. После чего мы воспользовались тем, что палка находится в равновесии, и сумма поперечных сил, действующих в сечении балки, равна нулю, а их момент один и тот же относительно любой точки. Так же из-за малости прогиба мы смогли сказать что y'<<1 и поэтому пренебрегли этой производной).

Параметры балок

Ширина, a										**Средняя**	**Случ погр**	**Приб погр**	**Δ**	**∂**
Дерево, cm	1,91	1,93	1,95	1,91	1,91	1,9	1,91	1,91	1,93	**1,918**	0,016	0,010	0,019	**0,010**
Латунь, cm	2,17	2,17	2,17	2,17	2,19	2,18	2,18	2,17	2,18	**2,176**	0,007	0,010	0,012	**0,006**
Сталь, cm	2,12	2,08	2,09	2,12	2,12	2,12	2,14	2,12	2,08	**2,110**	0,021	0,010	0,023	**0,011**
Толщина, b														
Дерево, cm	1,08	1,02	1,08	1,04	1,06	1,02	1,08	1,06	1,04	**1,053**	0,024	0,010	0,026	**0,025**
Латунь, cm	0,37	0,38	0,36	0,38	0,38	0,38	0,39	0,38	0,38	**0,378**	0,008	0,010	0,013	**0,034**
Сталь, cm	0,36	0,36	0,37	0,36	0,36	0,37	0,36	0,38	0,36	**0,364**	0,007	0,010	0,012	**0,034**

В итоге: ширина a
латуни - (1,918±0,019)мм,
стали - (2,176±0,012)мм,
дерева - (1,91±0,023)мм,
Толщина b
латуни - (0,378±0,013)мм,
стали - (0,364±0,012)мм,
дерева - (1,053±0,026)мм.



Дальше вычислим чему равно отношение P/y max. Согласно теории, это отношение постоянно для малых прогибов балки.
Проверим данный факт, сняв с помощью установки, изображенной на рисунке, зависимость y max от P. Данные приведены в таблице:

Прогибы в центре

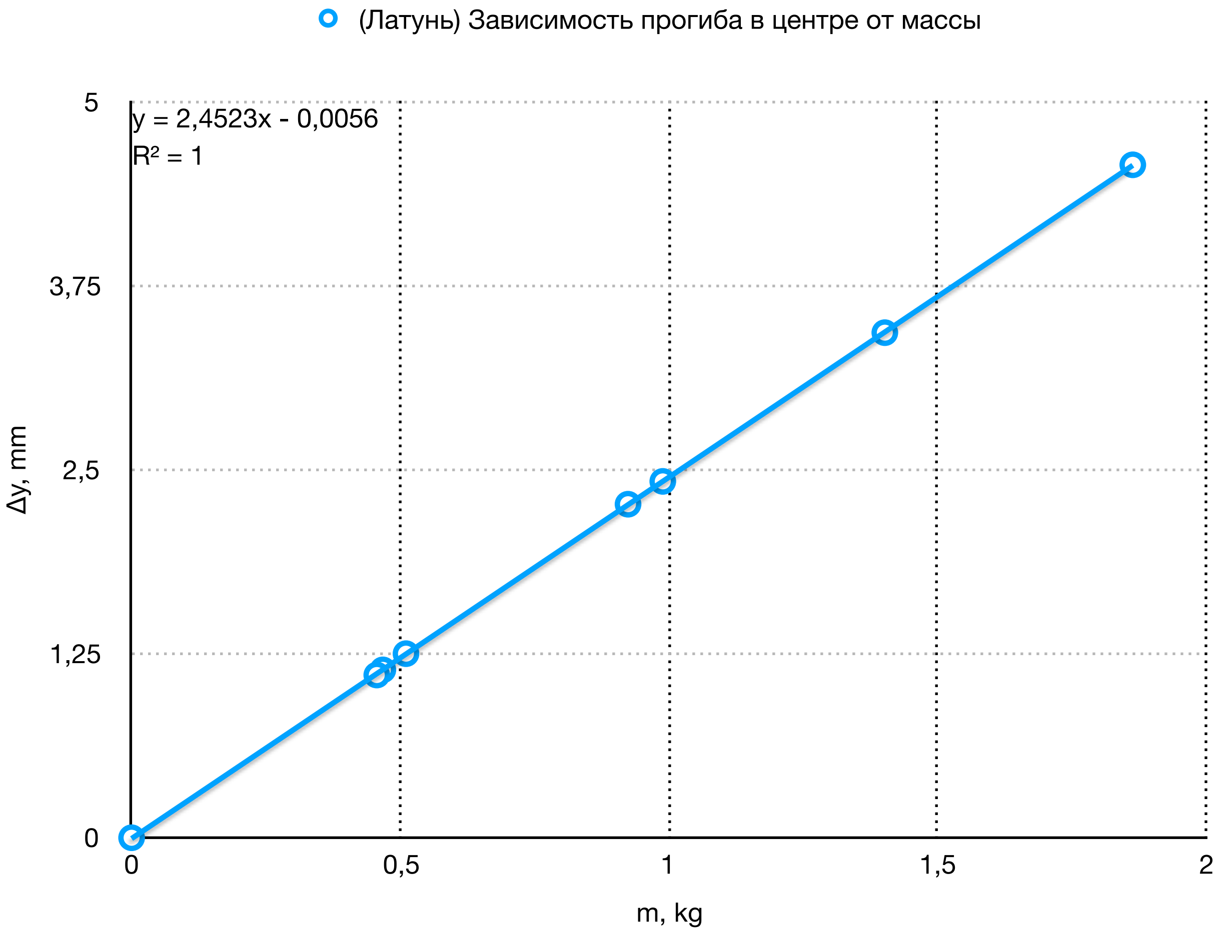
m1	**m2**	**m3**	**m4**	**m5**		**L лат, м**	**Lсталь, м**	**Lдер, м**		**L**	**∂L**										
0,4679	0,4566	0,4782	0,4618	0,5110		0,654	0,622	0,661		0,505	0,0020										
		Латунь					**Сталь**					**Дерево плашмя**					**Дерево ребро**				
		y0=	4,75		2,13	0,060	yo=	10,05				yo=	10,00	9,97			yo=	12	11,95		
	m, kg	y, mm		Средн y, mm	Δy, mm	погр, mm	y, mm		Средн y, mm	Δy, mm	погр, mm	y up, mm	Y down, mm	Δy up, mm	Δy down, mm	погр, mm	y up, mm	Y down, mm	Δy up, mm	Δy down, mm	погр, mm
0	0	4,75	4,75	4,75	0	0,01	10,05	10,05	10,05	0	0,01	10,00	9,97	0,00	0,03	0,01	12	11,95	0	0,05	0,01
1	0,4679	3,61	3,61	3,61	1,14	0,01	9,41	9,41	9,41	0,64	0,01	9,42	9,40	0,58	0,60	0,01	11,82	11,77	0,18	0,23	0,01
2	0,4566	3,645	3,645	3,645	1,105	0,01	9,42	9,42	9,42	0,63	0,01										
5	0,5110	3,5	3,5	3,5	1,25	0,01	9,35	9,35	9,35	0,7	0,01										
12	0,9245	2,49	2,48	2,485	2,265	0,01	8,77	8,77	8,77	1,28	0,01	8,87	8,83	1,13	1,17	0,01	11,63	11,59	0,37	0,41	0,01
35	0,9892	2,33	2,33	2,33	2,42	0,01	8,69	8,69	8,69	1,36	0,01										
123	1,4027	1,32	1,32	1,32	3,43	0,01	8,12	8,12	8,12	1,93	0,01	8,29	8,26	1,71	1,74	0,01	11,45	11,42	0,55	0,58	0,01
1234	1,8645	0,18	0,18	0,18	4,57	0,01	7,47	7,47	7,47	2,58	0,01	7,71	7,74	2,29	2,26	0,01	11,27	11,25	0,73	0,75	0,01
12345	2,3755						6,765	6,765	6,765	3,285	0,01	7,11	7,11	2,89	2,89	0,01	10,97	10,97	1,03	1,03	0,01

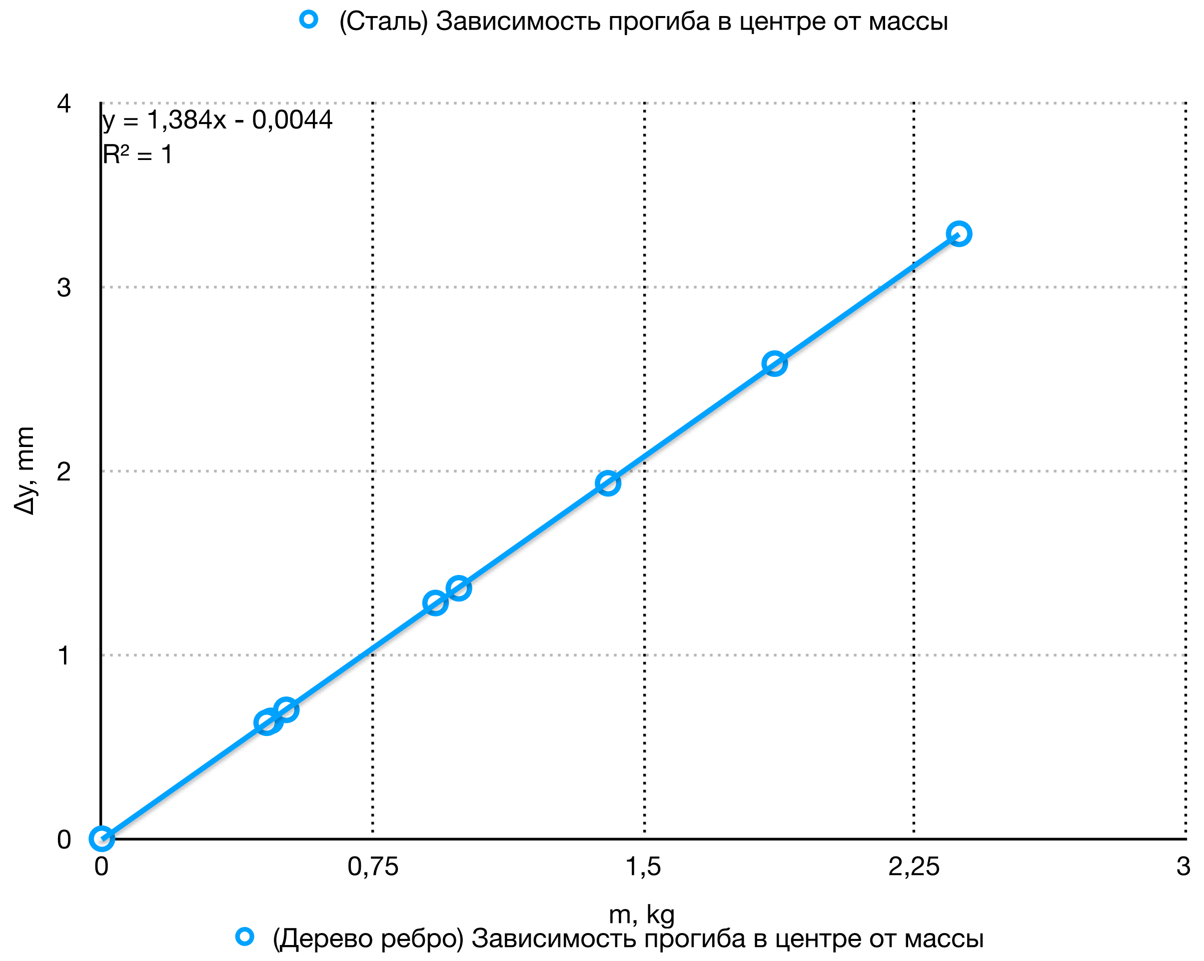
Еще проверим на сколько зависит прогиб в центре от точности положения груза. Сместим груз на 2 мм вправо от центра балки и измерим стрелу прогиба, Δy = 2,13mm для нагрузки от 2х грузов 1 и 2, что отличается от прежнего значения Δy = 2,265mm на 6%, что является достаточно большой погрешностью, но все равно сложно точно оценить разницу так как точность всего 0,01мм.

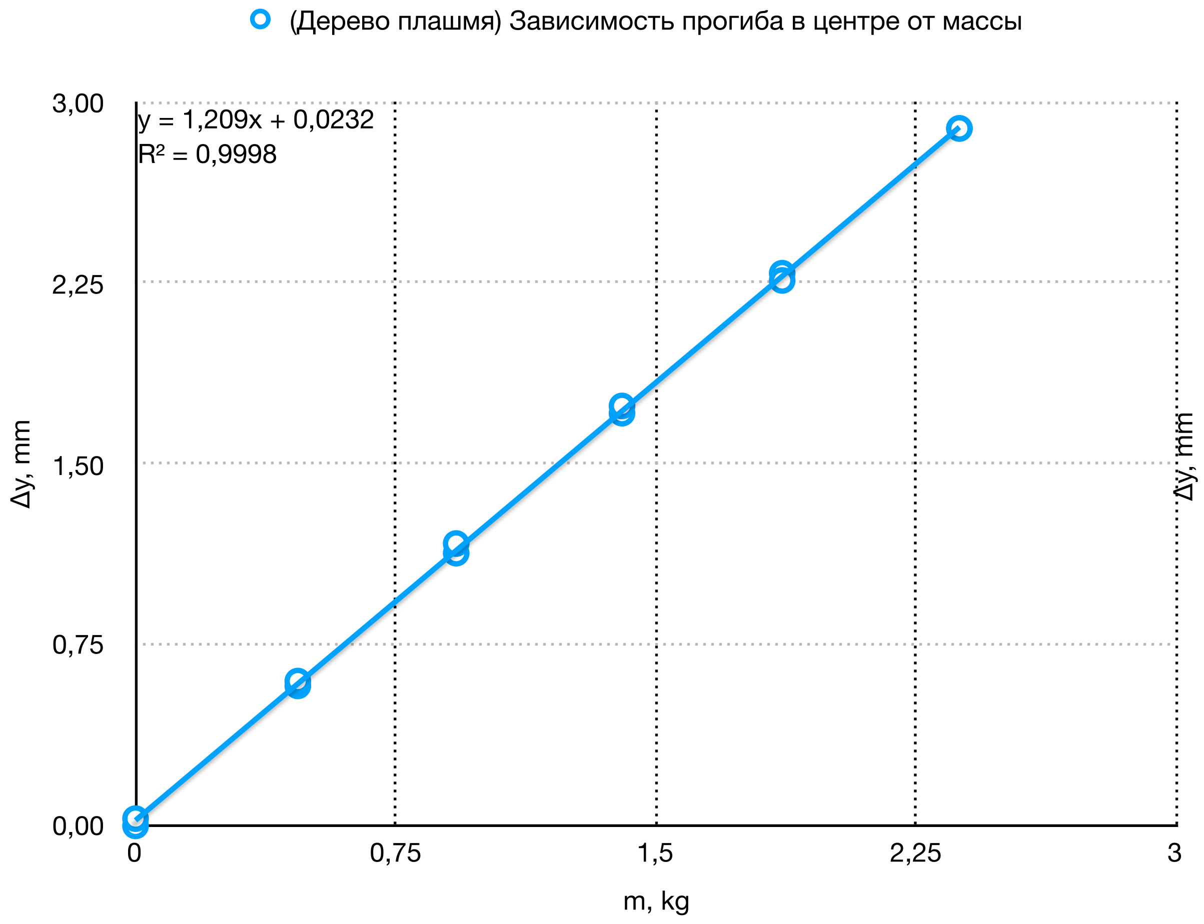
$$k = \frac{\langle xy \rangle}{\langle x^2 \rangle},$$

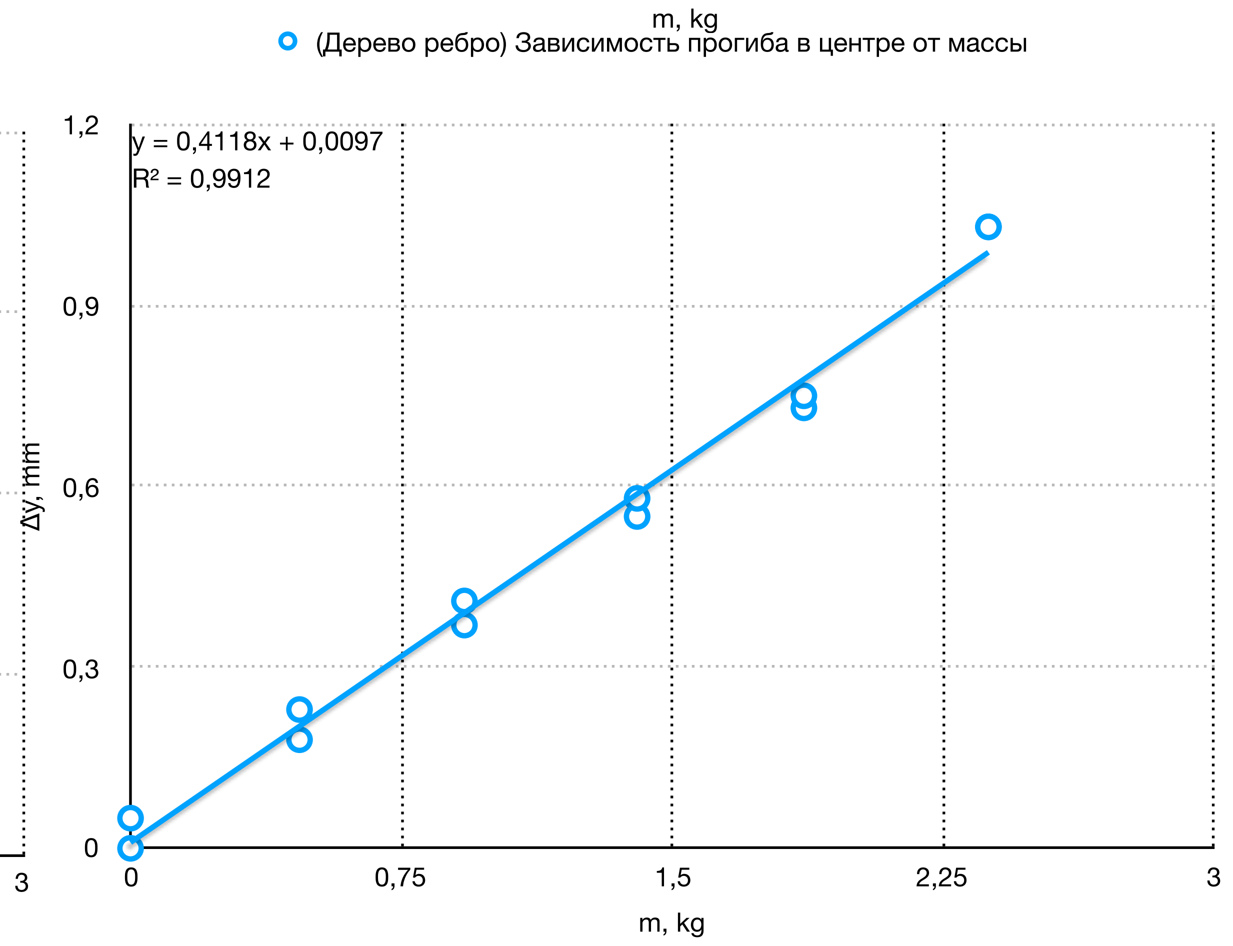
$$\sigma_k \approx \sqrt{\frac{\langle x^2 \rangle \langle y^2 \rangle - \langle xy \rangle^2}{n \langle x^2 \rangle^2}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\langle y^2 \rangle}{\langle x^2 \rangle} - k^2}.$$

По снятым точкам построим графики y max(m).
Из графиков видно, что зависимость, как и предсказывала теория, — прямая проходящая через ноль, вычислим по МНК угол наклона графика и случайные погрешности:









Итоговые Данные

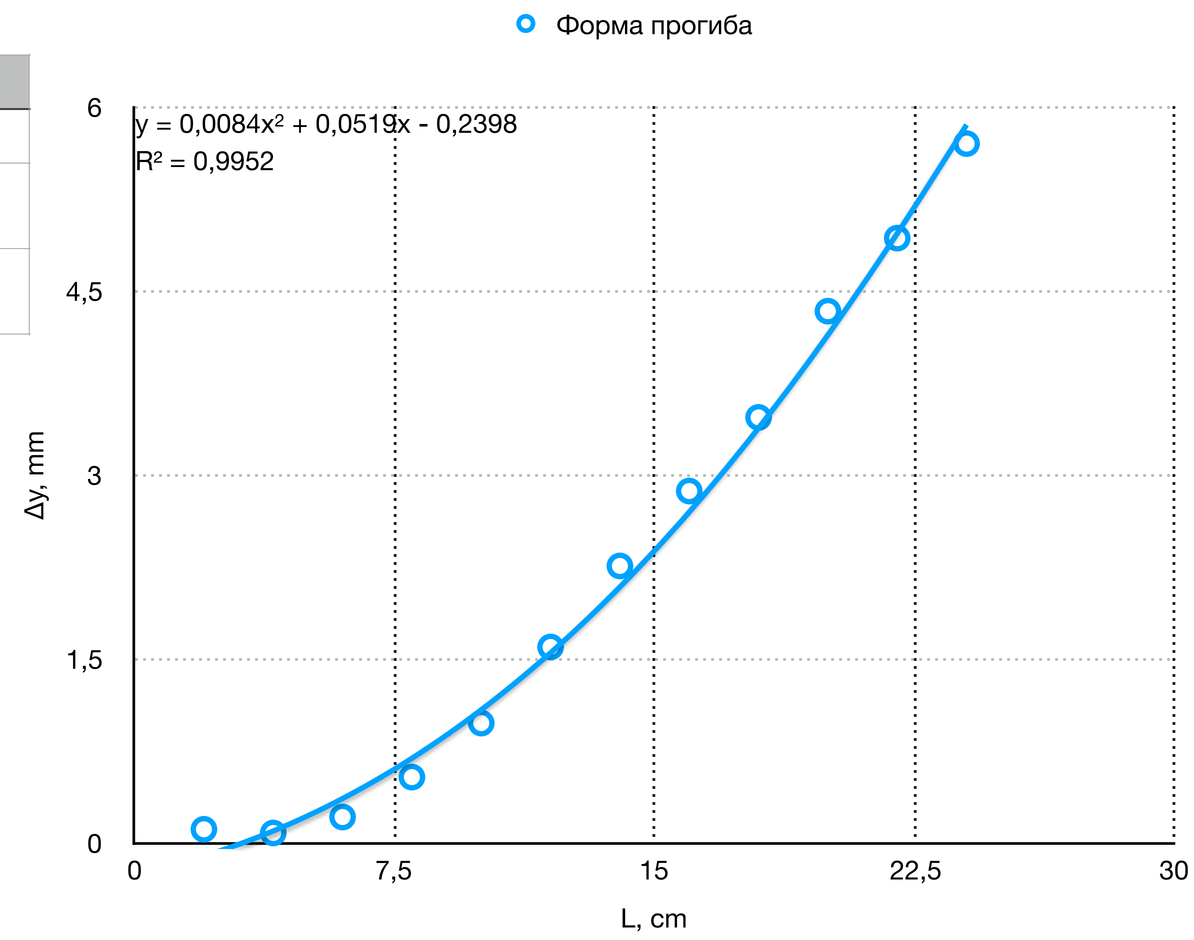
	k, m/kg	∂k случ	∂k приб	∂k	E, N/m^2	E табл, N/m^2	∂E	ΔE, 10^10 N/m^2
Латунь	0,0024523	0,00000	0,00405	0,00405	**1,097E+11**	(0,97-1,12)*10^11	0,119	1,306
Сталь	0,001384	0,00002	0,0063	0,00630	**2,232E+11**	(2,0-2,1)*10^11	0,125	2,792
Дерево плашмя	0,001384	0,00024	0,00695	0,00695	**1,017E+10**	1,3 (Дуб)	0,098	0,100
Дерево Ребро	0,0004118	0,00012	0,02005	0,02005	**1,031E+10**	0,9 (Сосна)	0,080	0,083

В итоге, наклон графика k для латуни - 0,0024523м/кг ∂ = 0,41%, стали - 0,001384м/кг ∂ = 0,63%, дерева плашмя-0,001384м/кг ∂ = 0,70%, и для дерева на ребре — 0,0004118м/кг ∂ = 2%.
Случайная погрешность оказалась ничтожно мала по сравнению с общей, основной вклад в погрешность внесла погрешность измерения микрометром, составляющая 0,01 мм.
Теперь данных уже достаточно для вычисления модуля Юнга материала, вот что получилось:
латуни -(1,097±0,13)*10^10 Па,
стали - (2,23±0,13)*10^10 Па,
дерева плашмя- (1,02±0,1)*10^10 Па,
дерева на ребре — (1,03±0,083)*10^10 Па такой же как и для дерева плашмя в пределах погрешности.
Модуль Юнга дерева оказался похожим на модуль у дуба и сосны.
Полученные данные сходятся с табличными в пределах погрешности. Они получились довольно большими из-за плохой точности в измерении поперечных размеров балок.

Форма прогиба

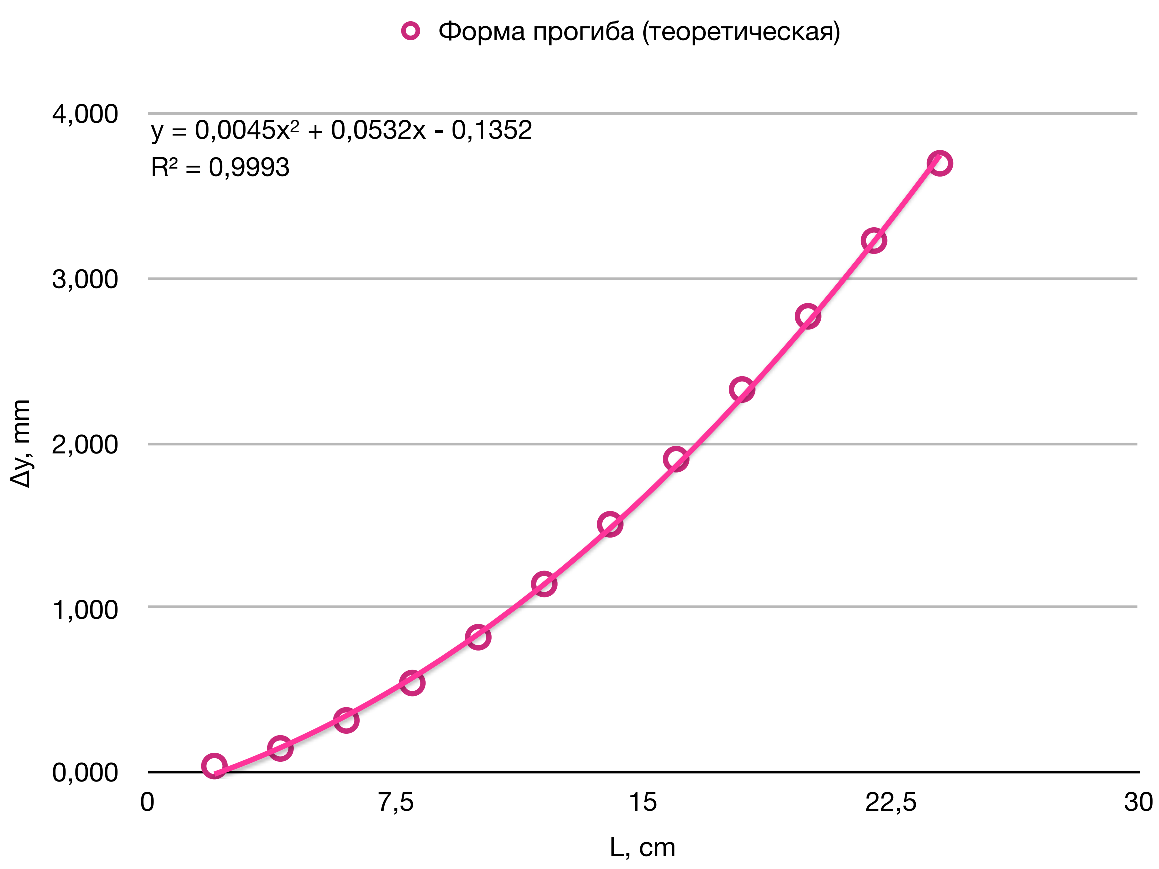
Форма прогиба, груз в центре

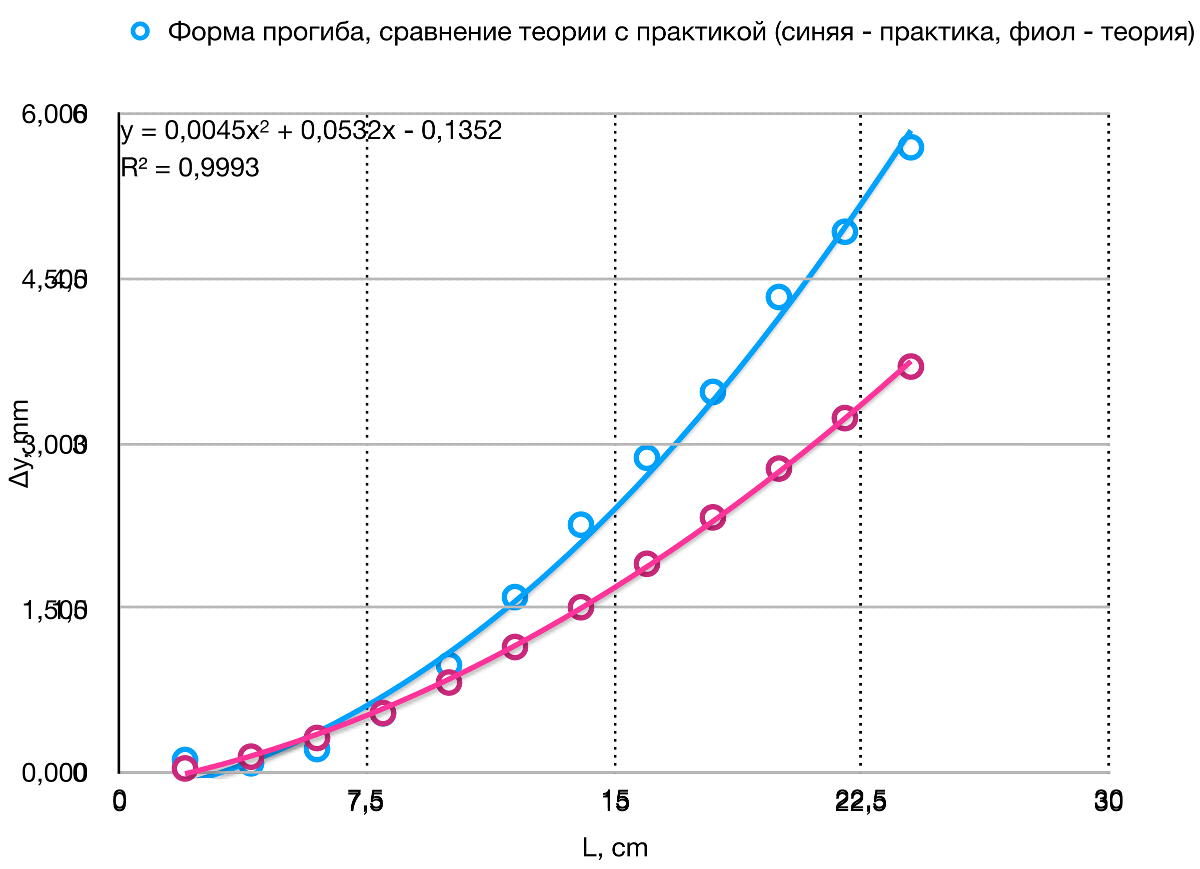
yo,	3,26											
L, cm	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
y, mm	3,375	3,345	3,475	3,80	4,24	4,86	5,52	6,13	6,73	7,595	8,19	8,96
Δy, mm	0,115	0,085	0,215	0,54	0,98	1,6	2,26	2,87	3,47	4,335	4,93	5,7



Форма прогиба, груз в центре, теоретическая зависимость

F=	14,08	4ab^3=	4,7E-09	L =	0,505	E =	9,700E+10	yo=	3,99			
L, cm	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Δy, mm	0,038	0,146	0,316	0,543	0,821	1,145	1,507	1,903	2,327	2,771	3,232	3,701





Проведем дополнительное исследование формы прогиба палки под действием постоянной силы в центре. Для этого подвесим груз в центр и будем, смещая микрометр, измерять прогиб для разных расстояний L от центра балки. Сняв эту зависимость, построим ее график и сравним с графиком теоретическим, его можно построить по формуле:

$$y = \frac{Px}{48EI}(3l^2 - 4x^2).$$

где I — момент инерции поперечного сечения балки относительно оси проходящей через среднюю линию балки. I = a*b^3/12

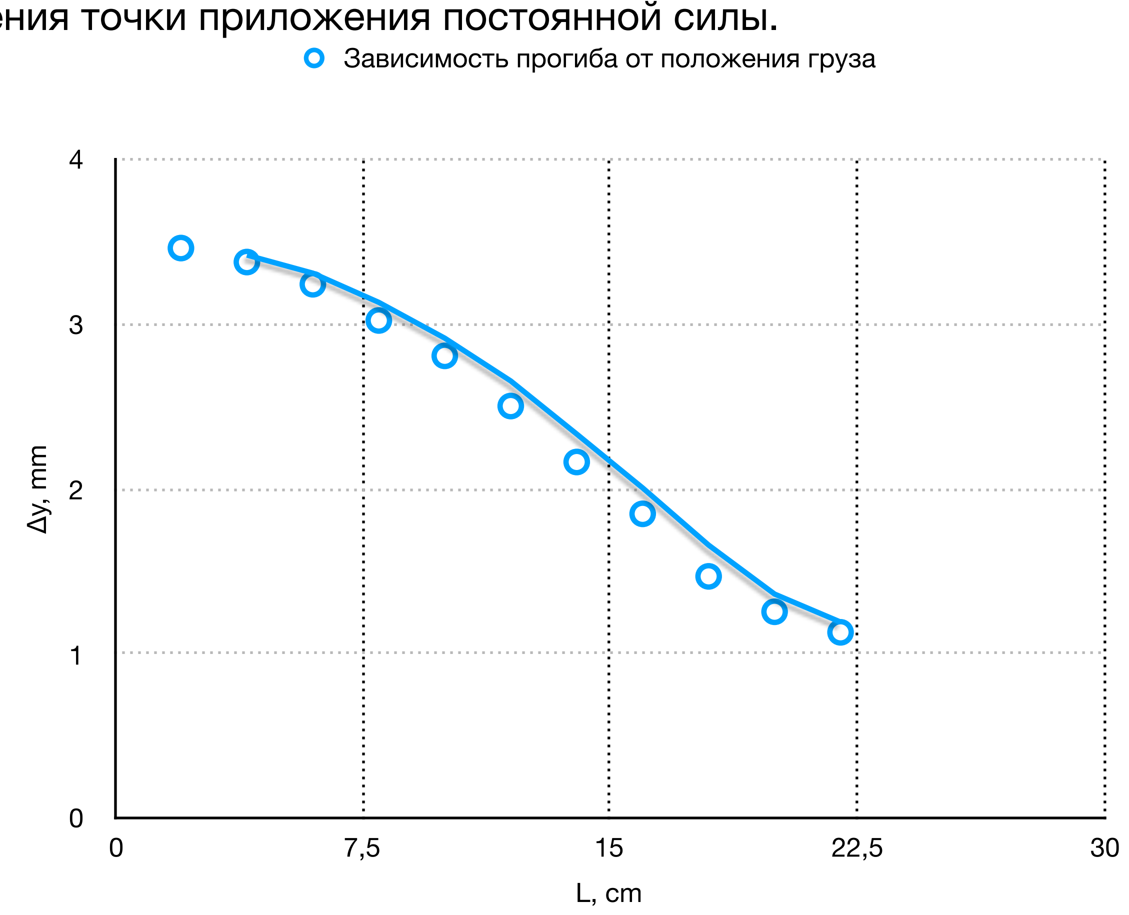
При малых L, как видно из коэффициентов разложения функций при L^1, коэффициенты практически совпадают: 0,0532 для теоретической и 0,00519 для практической, но дальше при больших расстояниях L график практической зависимости растет быстрее, по нашему предположению, это вряд ли происходит из-за того что прогиб стержня недостаточно малый, расхождение слишком велико, хотя точки в предыдущих графиках довольно точно ложились на прямую. Скорее всего такое явление происходит из-за того что давление микрометра оказывает свое влияние на прогиб (при большой амплитуде он давит ощутимо) и тем самым сам является источником прогиба, из-за чего прогиб увеличивался.

Зависимость прогиба от положения груза

Будем двигать уже точку приложения силы, оставляя микрометр на месте в центре стержня. Сняв точки, построим график зависимость стрелы прогиба, расположенной в центре, от положения точки приложения постоянной силы.

Зависимость прогиба в центре от положения груза

L, cm	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
y, mm	2,40	2,49	2,64	2,875	3,11	3,435	3,785	4,13	4,53	4,945	5,37
yo	5,865	5,87	5,885	5,90	5,92	5,94	5,95	5,98	6,00	6,20	6,50
Δy	3,465	3,38	3,245	3,025	2,81	2,505	2,165	1,85	1,47	1,255	1,13



Исследуем график зависимости прогиба балки от положения груза. При увеличении расстояния от груза до центра балки, прогиб уменьшается, потому что отдаляется точка приложения силы тяжести груза.
Проанализируем поведение графика при L -> 25,025 см = Lo/2, то есть половине длины балки. Если бы мы после того как он достиг этого значения убрали груз, Δy должен был бы стать равным нулю, так как состояние балки вернулось бы к тому, при котором мы настраивали ноль микрометра. Но если продолжить прикладывать силу в точку, расположенную за точкой опоры, то это скажется на прогибе балки под собственным весом, груз будет стремиться «выгнуть» ее в другую сторону, то есть сделать выпуклой вверх. Поэтому при L > Lo/2 значения Δy станут отрицательными.

ВЫВОД

Был вычислен модуль Юнга латуни -(1,097±0,13)*10^10 Па, стали - (2,23±0,13)*10^10 Па, дерева(1,02±0,1)*10^10 Па с точностью порядка 10%. Полученные значения сошлись с табличными в пределах погрешности. Так же был получен экспериментальный график зависимости прогиба от расстояния, сошедшийся с теоретическим при малых смещениях в окрестности центра балки.

Таблица 1

	0	0		
	0,4679	0,4679		
	0,9245	0,9245		
	1,4027	1,4027		
	1,8645	1,8645		
	2,3755	2,3755		