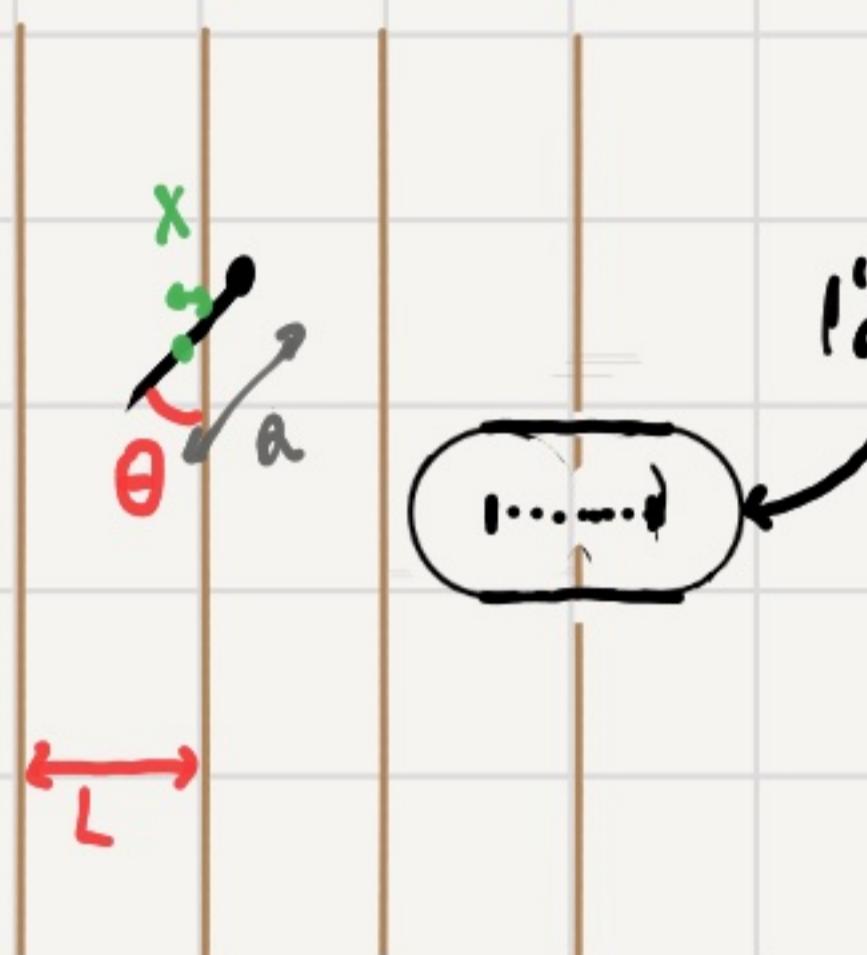


TP03 : SIMULATION ALÉATOIRE

I/ L'aiguille de Buffon



l'aiguille doit planer son extrémité à travers l'ellipse, son centre au fil "...."
l'angle est bien entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$

On suppose que les longueurs $\{ X \sim \mathcal{U}(0,1) \}$
ne sont pas liées $\Rightarrow \theta \sim \mathcal{U}(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
leur distribution est donc uniforme

$$\text{donc } f_X(x) = \frac{1}{L-a} \mathbb{1}_{[0, L]}$$

$$f_\theta(\theta) = \frac{1}{\pi} \mathbb{1}_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$$

$$\text{Notons } p \rightarrow \frac{a}{2} \cos \theta, \quad P(\theta < x) = P\left(\frac{a}{2} \cos \theta < x\right)$$

$$= \int_{-\infty}^x \frac{a}{2} \cos \theta \cdot f_\theta(\theta) d\theta$$

Question 1)

Notons \uparrow la probabilité que l'aiguille coupe la rainure, on note

$$D \begin{cases} 1 \text{ si l'aiguille coupe une droite au hasard (probabilité de } \uparrow) \\ 0 \text{ sinon (probabilité de } 1-\uparrow) \end{cases}$$

c'est clairement une loi de Bernoulli

Si l'expérience n'est pas brisée, réitérer l'expérience D revient à refaire des expériences aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, par la loi forte des grands nombres, on pourra approcher \uparrow en la réitérant un grand nombre de fois.

On remarque que \uparrow dépend de π

Exercice 1

$$\begin{aligned}
 1) \quad \mathbb{P}(D=1) &= \mathbb{P}(X \leq \frac{a}{2} \cos \theta) + \mathbb{P}(X > L - \frac{a}{2} \cos \theta) = \mathbb{P}(X \leq \frac{a}{2} \cos \theta) + 1 - \mathbb{P}(X \leq L - \frac{a}{2} \cos \theta) \\
 &= F_X\left(\frac{a}{2} \cos \theta\right) + 1 - F_X\left(L - \frac{a}{2} \cos \theta\right) = \int_{-\infty}^{\frac{a}{2} \cos \theta} f_X(u) du - \int_{-\infty}^{L - \frac{a}{2} \cos \theta} f_X(u) du + 1 \\
 &= \int_{-\infty}^{\frac{a}{2} \cos \theta} \frac{1}{\pi L} \mathbb{1}_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}(u) \times \mathbb{1}_{[0, L]}(u) du - \int_{-\infty}^{L - \frac{a}{2} \cos \theta} \frac{1}{\pi L} \mathbb{1}_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}(u) \mathbb{1}_{[0, L]}(u) du + 1 = \\
 &= \frac{1}{\pi L} \left(\int_0^{\frac{a}{2} \cos \theta} \mathbb{1}_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}(u) du - \int_0^{L - \frac{a}{2} \cos \theta} \mathbb{1}_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}(u) du \right) + 1 = \frac{1}{\pi L} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{a}{2} \cos \theta du - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (L - \frac{a}{2} \cos \theta) du \right) + 1 \\
 &= \frac{1}{\pi L} \left(\left[\frac{a}{2} \sin(u) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \left[L - \frac{a}{2} \sin(u) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \right) + 1 = \frac{1}{\pi L} \left(a + a \right) + 1 - \frac{L \pi}{2} \\
 &= \frac{2a}{\pi L}
 \end{aligned}$$

d'où le résultat

2)

```

1 ##### TP03 part 1 : Aiguille de Buffon
2
3 ##### données :
4 xp<-seq(-10,10,100)
5 n<-10000
6 nb_p=0
7
8 #longueur de l'aiguille :
9 a<-2
10 #largeur de la latte :
11 L<-4
12
13 #réalisation des tetes et des X
14 Vteta<-runif(n)*pi-(pi/2)
15 VecX<-runif(n)*L
16
17 #simulations
18 for(i in 1:n){
19   V1<-(a/2)*cos(Vteta[i])
20   V2<-L-(a/2)*cos(Vteta[i])
21
22   if(!(VecX[i]>V1&&VecX[i]<V2)){
23     nb_p<-nb_p+1
24   }
25
26 }
27
28 #résultat
29 n/nb_p
30
31
32 #end

```

> n/nb_p
[1] 3.167564

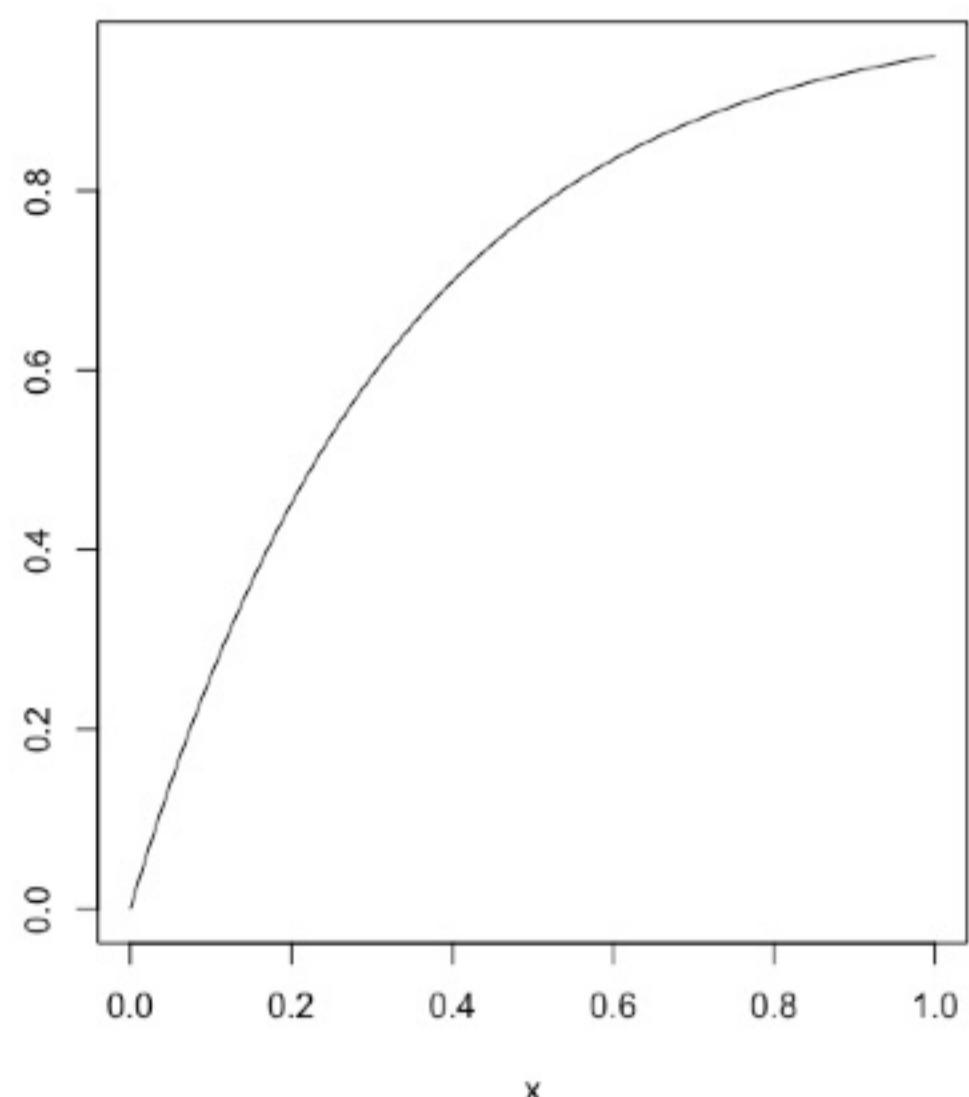
II / Simulation par méthode d'inversion

```

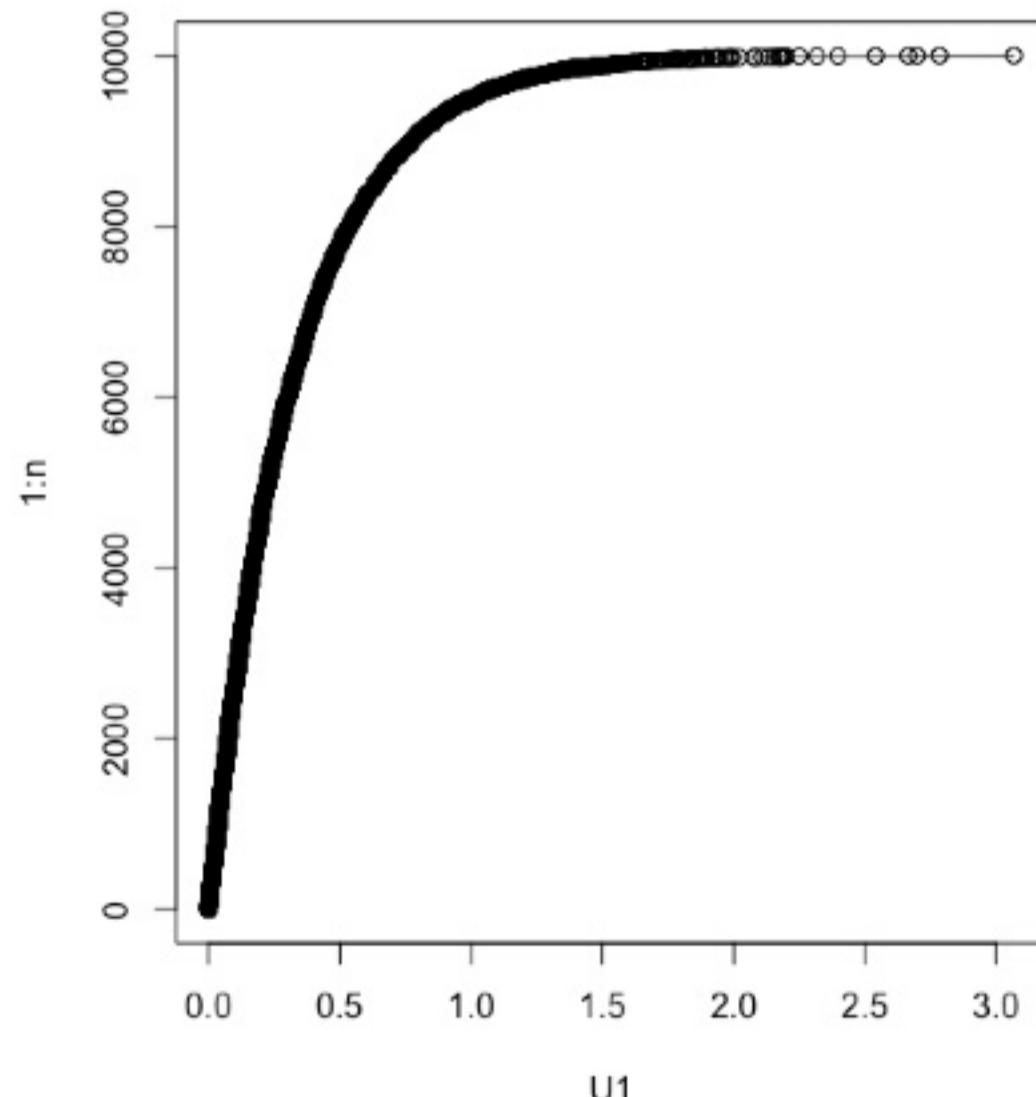
1 ##### TP03 part 2 : simulation par méthode d'inversion
2 ## 1) simulation de loi exponentielle
3
4 #####données
5 lambda<-3
6 n<-10000
7
8 xp<-seq(0,1,length.out=100)
9
10
11 ##exercice1
12 U<-runif(n,0,1)
13
14 InvExpo<- function(x){
15   return(-1/lambda*log(1-x))
16 }
17
18 #simulations
19 U1<-c(InvExpo(U))
20 U1<-sort(U1)
21
22 #affichage
23 par(mfrow=c(1,2))
24 curve(pexp(x,lambda),0,1,main='loi exponentielle')
25 plot(U1,1:n,type='o',main='simulation par méthode d'inversion')
26
27
28 ## 2) simulation d'une loi de Bernoulli
29
30 #####données
31 p2<-0.3
32
33 # définition de Invbernoulli
34 InvBernoulli<- function(x){
35   X<-rep(0,length(x))
36   for(i in 1:length(x)){
37     ifelse((x[i]<(1-p2)),(X[i]<-0),(X[i]<-1))
38   }
39   return(X)
40 }
41
42 ### Simulations
43 W<-c(InvBernoulli(runif(n,0,1)))
44 W<-sort(W)
45
46 par(mfrow=c(1,2))
47 curve(pbinom(x,1,p2),-0.01,1,main='loi bernoulli théorique')
48 plot(W,1:n,type='o')
49
50 #end

```

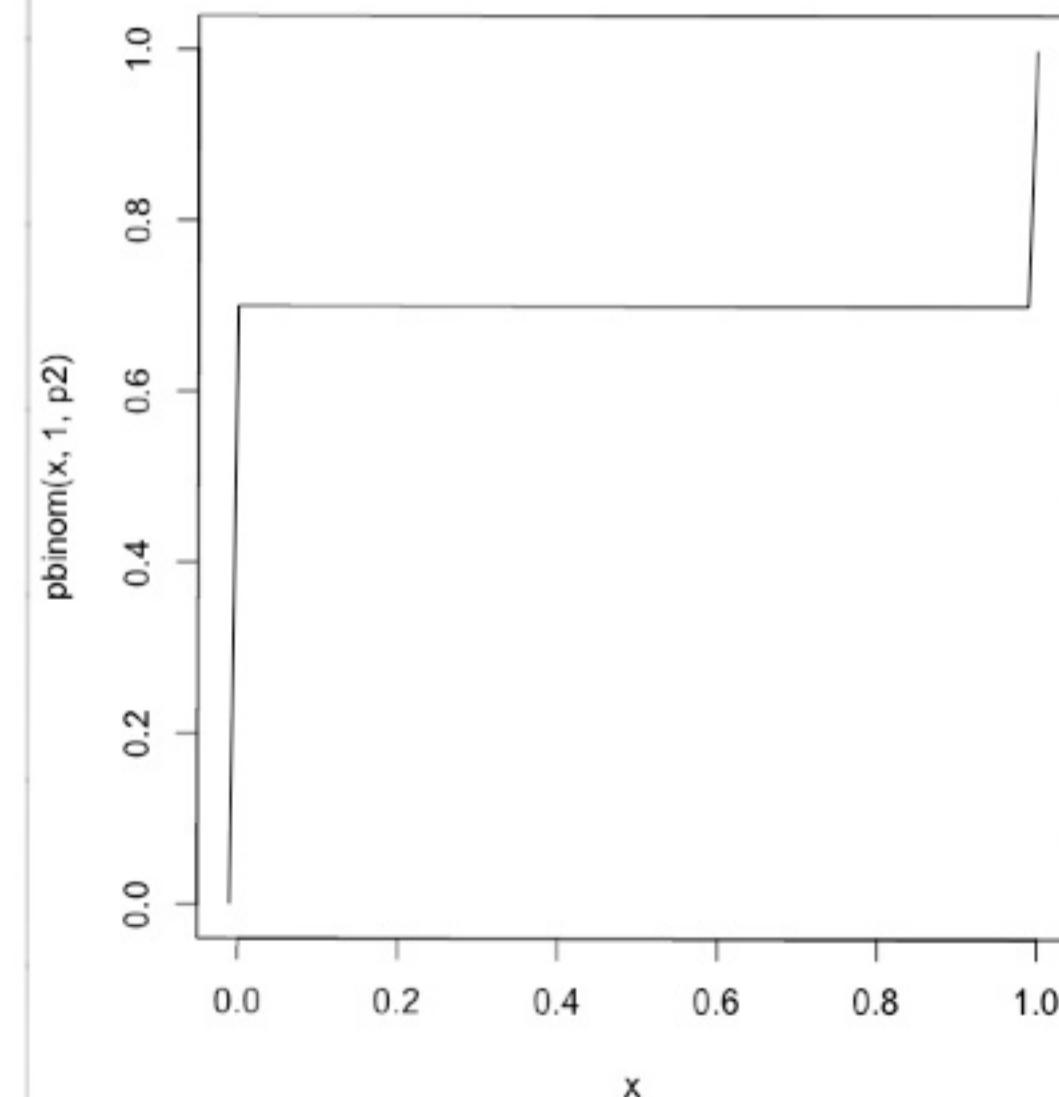
loi exponentielle



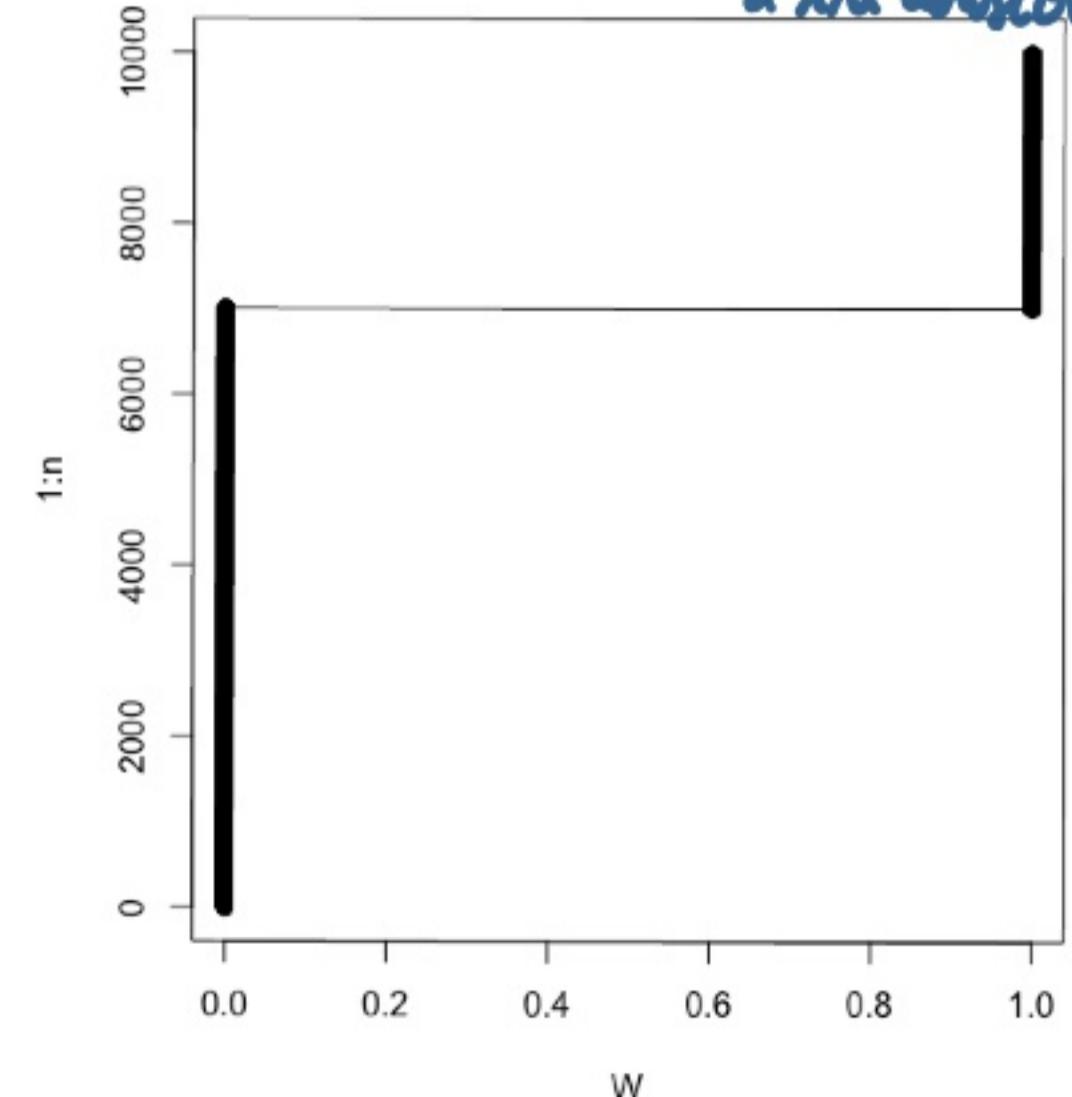
simulation par méthode d'inversion



loi bernoulli théorique



simulation par méthode d'inversion



III / Méthode de Box Muller pour la simulation de variables gaussiennes

Exercice 2

1) On doit montrer que $(X_1, X_2) \sim N(0, I_2)$, Soit que $f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\right)$

• Posons $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{2}y \cos(2\pi x) \\ \sqrt{2}y \sin(2\pi x) \end{pmatrix}$$

• On a donc que $(X_1, X_2) = \varphi(U, V) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}V \cos(2\pi U) \\ \sqrt{2}V \sin(2\pi V) \end{pmatrix}$

• On calcule la jacobienne de φ : $J_\varphi = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2\pi}V \sin(2\pi U) & \frac{\sqrt{2} \cos(2\pi U)}{2\sqrt{V}} \\ 2\sqrt{2\pi}V \cos(2\pi U) & \frac{\sqrt{2} \sin(2\pi U)}{2\sqrt{V}} \end{pmatrix}$

$$\text{et } \det(J_\varphi(U, V)) = -\frac{2\sqrt{2\pi}V\sqrt{2}}{2\sqrt{V}} \sin^2(2\pi V) - \frac{2\sqrt{2\pi}V\sqrt{2}}{2\sqrt{V}} \cos^2(2\pi V)$$

$$= -2\pi (\sin^2(2\pi V) + \cos^2(2\pi V))$$

$= -2\pi \neq 0$

On détermine ensuite $\varphi^{-1}(u, v) \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \sqrt{2}y \cos(2\pi x) = u \\ \sqrt{2}y \sin(2\pi x) = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y \cos^2(2\pi x) = u^2 \\ 2y \sin^2(2\pi x) = v^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y (\cos^2(2\pi x) + \sin^2(2\pi x)) = u^2 + v^2 \\ 2y \sin^2(2\pi x) = v^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{u^2 + v^2}{2} \\ 2y \sin^2(2\pi x) = v^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{u^2 + v^2}{2} \\ (u^2 + v^2) \sin^2(2\pi x) = v^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{u^2 + v^2}{2} \\ (u^2 + v^2) \left(\frac{1 - \cos(4\pi x)}{2} \right) = v^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{u^2 + v^2}{2} \\ \frac{-(u^2 + v^2) \cos(4\pi x)}{2} = v^2 - \frac{u^2 + v^2}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{u^2 + v^2}{2} \\ \cos(4\pi x) = -\frac{2v^2 - u^2 - v^2}{u^2 + v^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{u^2 + v^2}{2} \\ \cos(4\pi x) = \frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{u^2 + v^2}{2} \\ 4\pi x = \arccos\left(\frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{u^2 + v^2}{2} \\ x = \frac{1}{4\pi} \arccos\left(\frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2}\right) \end{cases}$$

Et on sait que \bullet $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ donc $f_U(u) = \frac{1}{1-0} \mathbb{1}_{[0,1]}(u)$ $\forall u \in \mathbb{R}$

\bullet $V \sim \mathcal{E}(1)$ donc $f_V(v) = \exp(-v) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(v)$ $\forall v \in \mathbb{R}$

\bullet U, V indépendantes, donc $f_{U,V}(u,v) = f_U(u) \times f_V(v)$

Et donc, en appliquant la Proposition 2, on obtient

$$f_{X_1, X_2}(x, y) = \frac{f_{U,V}(t^{-1}(x, y))}{|\det(J_{t^{-1}}(x, y))|}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \times \mathbb{1}_{[0,1]} \left(\frac{1}{4\pi} \arccos \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) \right) \times \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+} \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right) \times \exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{2} \right)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$ $= 1$ $\underbrace{\hspace{10em}}$ $= 1$

$$= \frac{1}{2\pi} \exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{2} \right)$$

On en déduit que $(X_1, X_2) \sim \mathcal{N}(0, I_2)$

2)

```
#### TP03 part 3 : Méthode de Box Muller

## Exercice 2 question 2
## données
n<-10000

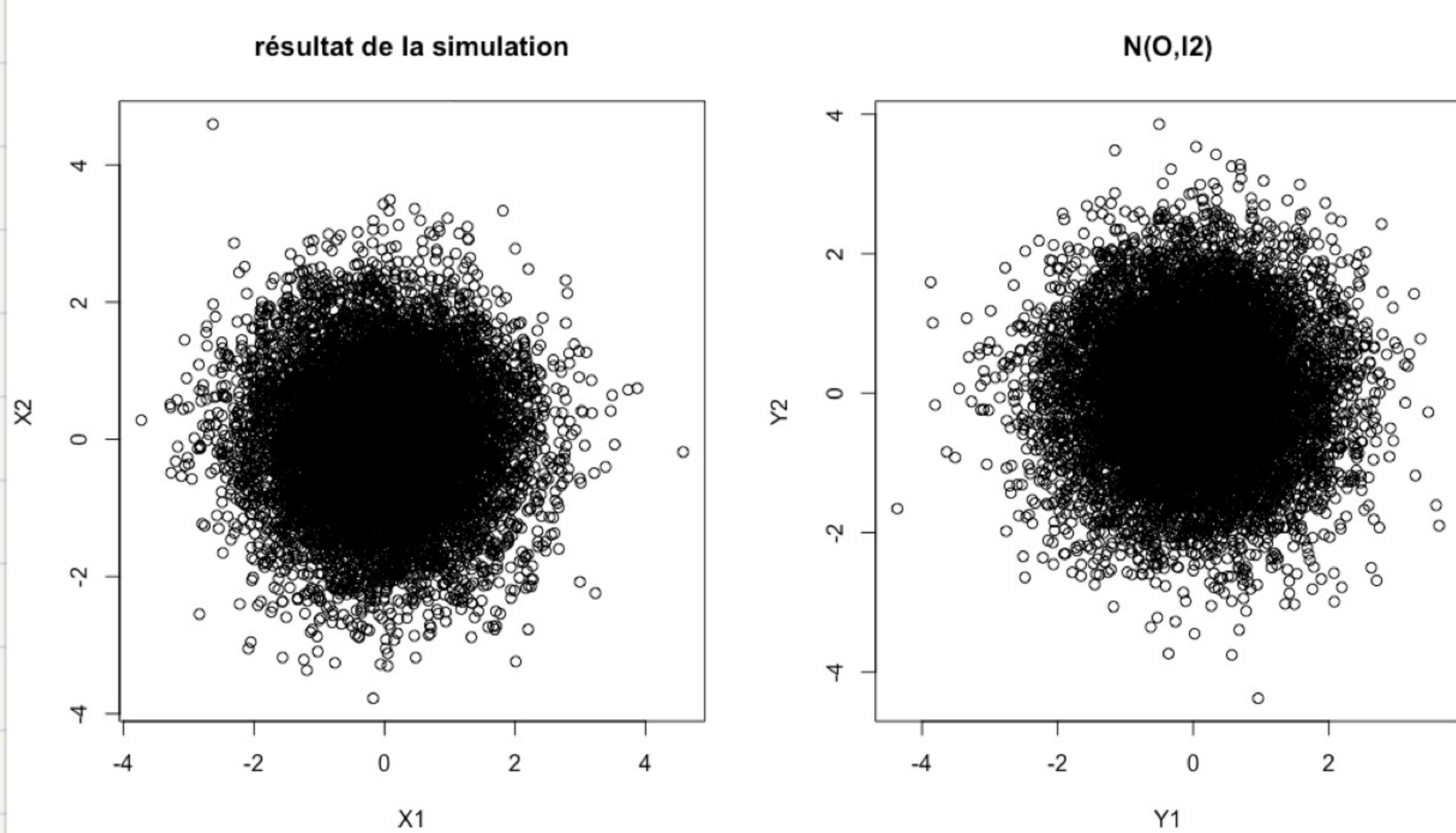
X1<-function(x){
  return( sqrt(2*rexp(x,1))*cos(2*pi*runif(x,0,1)))
}
X2<-function(x){
  return(sqrt(2*rexp(x,1))*sin(2*pi*runif(x,0,1)))
}

X2(n); X1(n)

Y1<-rnorm(n)
Y2<-rnorm(n)

par(mfrow=c(1,2))
plot(X1(n),X2(n),xlab="X1",ylab="X2",
     main="résultat de la simulation")
plot(Y1,Y2,main="N(0,I2)")

#end
```



Exercice 3

Considérons $(V, V) \leftrightarrow (\mathbb{P}(\alpha, \beta), \mathbb{P}(\beta, \alpha))$

soit $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(u, v) \mapsto \left(\frac{u}{u+v}, u+v \right)$

On remarque que, on pose $\begin{cases} y = \frac{u}{u+v} \\ z = u+v \end{cases}$

ou

$$\begin{cases} y = \frac{u}{z} \\ z = u+v \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} u = \frac{y}{z} \\ v = z - y \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} u = \frac{y}{z} \\ v = z - \frac{y}{z} \end{cases}$$

donc $g^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $y, z \mapsto \left(\frac{y}{z}, z - \frac{y}{z} \right)$

$$\text{et } \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{z} & -\frac{1}{z^2} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{z^2}$$

$$\det(J_g(u, v)) = \frac{1}{(u+v)^2} \begin{vmatrix} u & -u \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{u+v}{(u+v)^2} = \frac{1}{u+v}$$

On a alors $(y, z) = g(V, V)$

$$\text{et } \forall y, z \in \mathbb{R}_+^2, \quad f_{Y, Z}(y, z) = f_{V, V}(g^{-1}(y, z)) \quad / \quad \det(J_g(g^{-1}(y, z))) \quad \mathbb{1}_{g(\mathbb{R}^2)}(y, z)$$

$$= \frac{f_{V, V}\left(\frac{y}{z}, z - \frac{y}{z}\right)}{\left|\frac{1}{z} + z - \frac{y}{z}\right|} = z f_{V, V}\left(\frac{y}{z}, z - \frac{y}{z}\right) \mathbb{1}_{[0, 1]}(y) = z f_V\left(\frac{y}{z}\right) \times f_V\left(z - \frac{y}{z}\right)$$

indépendance
de V et V

$$= z f_V\left(\frac{y}{z}\right) \times f_V\left(z - \frac{y}{z}\right) = z \times \frac{\theta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{y^{\alpha-1}}{z} \exp\left(-\theta \frac{y}{z}\right) \times \frac{\theta^\beta}{\Gamma(\beta)} \left(z - \frac{y}{z}\right)^{\beta-1} \exp\left(-\theta \left(z - \frac{y}{z}\right)\right)$$

$$= z \left(\frac{y}{z}\right)^{\alpha-1} \left(z - \frac{y}{z}\right)^{\beta-1} \frac{\theta^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \exp(-\theta z)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \times z \left(\frac{y}{z}\right)^{\alpha-1} \left(z - \frac{y}{z}\right)^{\beta-1} \times \theta^{\alpha+\beta} \exp(-\theta z)$$

On a que $f_{y,z}(y, z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \times z \left(\frac{y}{z}\right)^{\alpha-1} \left(z - \frac{y}{z}\right)^{\beta-1} \times \theta^{\alpha+\beta} \exp(-\theta z)$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \times z \left(\frac{y}{z}\right)^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{\beta-1} \binom{\beta-1}{k} \left(-\frac{y}{z}\right)^{\beta-1-k} z^k \times \theta^{\alpha+\beta} \exp(-\theta z)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \times z \left(\frac{y}{z}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{z}\right)^{\beta-1} \sum_{k=0}^{\beta-1} \binom{\beta-1}{k} (-y)^{\beta-1-k} \cdot 1 \times \theta^{\alpha+\beta} \exp(-\theta z)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \times z \left(\frac{y}{z}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{z}\right)^{\beta-1} (1-y)^{\beta-1} \times \theta^{\alpha+\beta} \exp(-\theta z) \quad (1)$$

et on a $f_y(y) = \int_{R_f} f_{y,z}(y, z) dz = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} y^{\alpha-1} (1-y)^{\beta-1} \int_{R_f} z^{\alpha+\beta-1} \theta^{\alpha+\beta} \exp(-\theta z) dz$

changement de variable : $t = \theta z$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} y^{\alpha-1} (1-y)^{\beta-1} \int_{R_f} z^{\alpha+\beta-1} \theta^{\alpha+\beta} \exp(-t) \frac{dt}{\theta}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} y^{\alpha-1} (1-y)^{\beta-1} \underbrace{\int_{R_f} t^{\alpha+\beta-1} \exp(-t) dt}_{= \Gamma(\alpha+\beta)}$$

$$= \boxed{\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} y^{\alpha-1} (1-y)^{\beta-1}}$$

d'où le résultat

$$2) \quad Z = U + V, \quad \text{et} \quad U \sim \Gamma(\alpha, \theta) \quad V \sim \Gamma(\beta, \theta)$$

Alors par la transformée de Laplace:

$$T_Z = T_{U+V} = e^{-t(U+V)} = E(e^{-tU}) E(e^{-tV})$$

$$\text{ma } T_U = E(e^{-tU}) = \int_{R_t} e^{-tu} \frac{\theta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} u^{\alpha-1} e^{-\theta u} du = \frac{\theta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_{R_t} u^{\alpha-1} e^{-(t+\theta)u} du$$

$$= \frac{\theta^\alpha}{\Gamma(\alpha) (t+\theta)^\alpha} \int_{R_t} \tilde{u}^{\alpha-1} e^{-\tilde{u}} d\tilde{u} = \left(\frac{\theta}{t+\theta} \right)^\alpha$$

↑
On pose $\tilde{u} = (t+\theta)u$

on reconnaît $\Gamma(\alpha)$

$$\text{Donc } T_Z = \left(\frac{\theta}{t+\theta} \right)^{\alpha+\beta}, \quad \text{on en déduit que } Z \sim \Gamma(\alpha+\beta, \theta)$$

$$3) \quad Y, Z \text{ seraient indépendantes si } \int_Y(y) \times \int_Z(z) = \int_{Y,Z}(y,z)$$

$$\text{On a } Z \sim \Gamma(\alpha+\beta, \theta) \quad \text{et} \quad f_Y(y) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} y^{\alpha-1} (1-y)^{\beta-1}$$

$$\text{Donc } \int_Z(z) = \frac{\theta^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)} z^{\alpha+\beta-1} \exp(-\theta z)$$

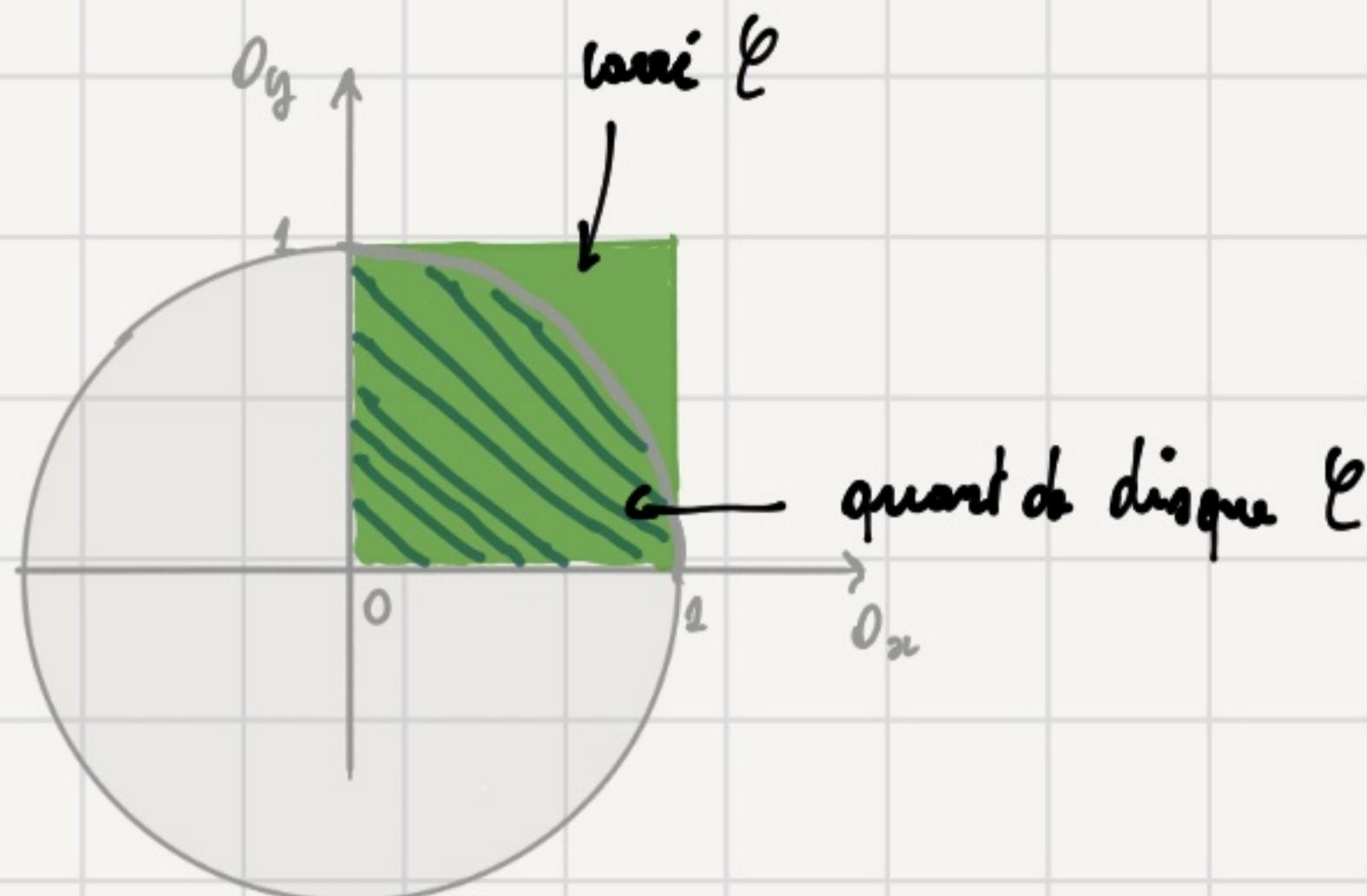
$$\text{et } \int_Z(z) \times f_Y(y) = \frac{\theta^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} z^{\alpha+\beta-1} y^{\alpha-1} (1-y)^{\beta-1} \exp(-\theta z)$$

$$(1) = \int_{Y,Z}(y,z)$$

d'où l'indépendance

IV Méthode de Monte - Carlo

Exercice 4



Soit M le point (x, y) dans le carré E , supposons que sa place dans le carré est sans biais. Alors $Y \sim U[0,1]$ "place de y sur l'axe O_y "
 $X \sim U[0,1]$ "place de x sur l'axe O_x "
d'où $M = (X, Y)$ "place de M dans carré E "

TP03 part 4 : Méthode de Monte-Carlo

exercice 4 : simulation de pi par méthode de Monte Carlo

`n<-10000`

```
k<-0
for(i in 1:n){
  y<-runif(1,0,1)
  x<-runif(1,0,1)
  if(x^2+y^2<=1){
    k=k+1
  }
}
```

```
pi<-4*k/n
print(pi)
```

```
#end
```

```
> pi<-4*k/n
> print(pi)
[1] 3.1632
```

V Simulation par méthode du rejet

Exercice 5

$$\begin{aligned}
 1. \quad \mathbb{P}(U \leq \frac{1}{f}) &= \mathbb{P}\left(U \leq \frac{1}{\frac{f(x)}{g(x)}}\right) = \mathbb{P}\left(U \leq \frac{f(x)}{c g(x)}\right) \\
 &= \mathbb{E}_U\left(\frac{1}{c} \frac{f(x)}{g(x)}\right) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{c} \frac{f(x)}{g(x)} \times \frac{1}{1-0} \mathbb{I}_{[0,1]}(u) du = \frac{1}{c} \int_0^1 \frac{f(x)}{g(x)} du \\
 &= \frac{1}{c} \int_0^1 1 du = \frac{1}{c}
 \end{aligned}$$

on applique l'algorithme

$$\begin{aligned}
 2. \quad \mathbb{P}\left(X \in B \mid U < \frac{1}{f}\right) &= \frac{\mathbb{P}(X \in B \cap U < \frac{1}{f})}{\mathbb{P}(U < \frac{1}{f})} = \\
 &\frac{\mathbb{P}(X \in B) \times \mathbb{P}(U < \frac{1}{f})}{\mathbb{P}(U < \frac{1}{f})} = \mathbb{P}(X \in B) = \int_B f(x) dx
 \end{aligned}$$

↑
 U, X indépendants
 d'où le résultat

Exercice 6

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2} \mathbb{1}_{[-1,1]}$$

posons g densité de $\mathcal{U}([-1,1])$

$$g(x) = \frac{1}{1+1} \mathbb{1}_{[-1,1]} = \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[-1,1]}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2} \mathbb{1}_{[-1,1]}}{\frac{1}{2} \mathbb{1}_{[-1,1]}} = \frac{4}{\pi} \sqrt{1-x^2} \mathbb{1}_{[-1,1]}$$

$$x^2 < 1, \quad 1 > 1-x^2 > 0$$

on prend $c = \frac{4}{\pi}$

TP03 part 5 : Méthode du Rejet

```
## exercice 6 : simulation de X par méthode de rejet
```

```
## données
```

```
n<-100000
```

```
f<-function(x){
  if(abs(x)<=1){
    return((2/pi)*sqrt(1-x^2))
  }
}
```

```
g<-function(x){
  return(dunif(x,-1,1))
}
```

```
c<-4/pi
```

```
## algorithme
U<-runif(n,0,1)
X<-g(U)
T<-c*(g(X)/f(X))
while(U*T>=1){
  U<-runif(n,0,1)
  X<-g(U)
  T<-c*(g(X)/f(X))
}
```