POLYTECH LYON

5 mars 2024
MAM3A

Feuille de TD

Convergences et estimateurs

Exercice 1 Soit (X_n) une suite de v.a. indépendantes dont la loi est définie pour tout $n > 1$ et tout $\alpha > 0$ par :

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X_n = \frac{1}{n}) & = & 1 - \frac{1}{n^\alpha} \\ \mathbb{P}(X_n = n) & = & \frac{1}{n^\alpha} \end{cases}$$

En revenant aux définitions :

1. Étudier la convergence en loi de (X_n).
2. Étudier la convergence en probabilité de (X_n).
3. Étudier la convergence en moyenne quadratique de (X_n).

Exercice 2 On considère une urne contenant deux boules blanches et 4 boules noires, dans laquelle on effectue n tirages avec remise. A chaque tirage (pour $1 \leq i \leq n$) on associe une v.a. :

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la boule tirée est blanche} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.

1. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev, montrer que la variable aléatoire $\bar{X}_n$ converge en probabilité vers une variable aléatoire que l'on précisera.
2. Déterminer le nombre minimum n_0 de tirages nécessaires pour que

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_{n_0} - \frac{1}{3}| \geq 0.02) \leq 0.01.$$

3. En utilisant une loi approchée de $\bar{X}_n$, déterminer une autre valeur n_0' répondant à la question précédente. Comparer n_0 et n_0'.

Exercice 3 Soit (X_n) une suite de v.a. indépendantes, de même loi de densité pour $\theta > 0$

$$f(x) = e^{-(x-\theta)}\mathbb{1}_{[\theta,+\infty[}(x).$$

1. Calculer la fonction de répartition et la densité de la va : $X_{(1)} = \inf_{1\leq i\leq n} X_i$.
2. Montrer que $X_{(1)}$ converge en probabilité vers θ.
3. Montrer qu'elle converge également en moyenne quadratique.
4. Quelle est la loi de la variable $Z_n = \sqrt{n}(X_{(1)} - \theta)$?

Exercice 4 Soit X une v.a.réelle à valeurs dans $I = \{0, 1 \dots, a-1\}$, où $a \geq 2$ est un entier. Pour tout $k \in I$, on pose $\mathbb{P}(X = k) = p_k > 0$. On considère une suite X_n de v.a. indépendantes de même loi que X. On note Y_{nk} la fréquence relative des événements $\{X_i = k\}$ pour $i = 1, \dots n$, i.e. $Y_{nk} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{X_i = k\}}$.

1. Quelle est la loi de Y_{nk} ? Calculer l'espérance et la variance de Y_{nk}.
2. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, on a : $\mathbb{P}(|Y_{nk} - \mathbb{E}(Y_{nk})| > \epsilon) \leq \frac{1}{4n\epsilon^2}$.
3. En déduire la convergence en loi de la suite (Y_{nk}) vers p_k quand n tend vers $+\infty$.
4. A-t-on convergence en moyenne quadratique ?
5. On suppose maintenant que pour tout k dans I, on a $p_k = 1/a$.
   On considère : $X_{(n)} = \sup_{1\leq i\leq n} X_i$.
   (a) Déterminer la loi de la va $X_{(n)}$.
   (b) Montrer que $X_{(n)}$ converge en loi vers $a - 1$.

Exercice 5. Soit $(\mathbb{R}_+^n, \{Q_\theta^{\otimes n}\}_{\theta>0})$ un modèle statistique tel que pour chaque $\theta > 0$, Q_θ est la loi sur $\mathbb{R}_+$ de densité

$$f_\theta(x) = \frac{1}{2\sqrt{x\theta}}\mathbb{1}_{]0,\theta]}(x).$$

Le paramètre d'intérêt est le paramètre de ce modèle. Dans la suite, on note $(X_1, \cdots, X_n) \sim Q_\theta^{\otimes n}$ et $\hat{\theta}_1 = \max_{1\leq i\leq n} X_i$.

1. Calculer la fonction de répartition de $\hat{\theta}_1$ et en déduire sa densité.
2. Montrer que $\hat{\theta}_1$ est biaisé, mais asymptotiquement sans biais.
3. Calculer l'espérance de X_1 et en déduire un autre estimateur $\hat{\theta}_2$ de θ, qui est sans biais.
4. Déterminer les risques quadratiques de $\hat{\theta}_1$ et $\hat{\theta}_2$. Lequel est préférable? Sont-ils consistants?
5. Trouver les lois limites des estimateurs $\hat{\theta}_1$ et $\hat{\theta}_2$.

Exercice 6. On considère le modèle statistique $(\mathbb{R}^n, \{\mathcal{N}(0,\theta^2)^{\otimes n}\}_{\theta>0})$. Le paramètre d'intérêt est le paramètre du modèle.

1. Calculer le moment d'ordre 1 de la variable aléatoire $|Z|$, si Z suit la loi $\mathcal{N}(0,\theta^2)$. En déduire un estimateur $\hat{\theta}_1$ par insertion. Montrer que $\hat{\theta}_1$ est consistant.
2. Construire un autre estimateur $\hat{\theta}_2$ par la méthode des moments. Montrer qu'il est consistant.
3. Les estimateurs $\hat{\theta}_1$ et $\hat{\theta}_2$ sont-ils biaisés?
4. Calculer la loi limite et la vitesse de $\hat{\theta}_1$ et $\hat{\theta}_2$. De ce point de vue, lequel de ces deux estimateurs est le plus performant?

Exercice 7. Soit $(\mathbb{R}^n, \{Q_\theta^{\otimes n}\}_{\theta\in]-1,1[})$ un modèle statistique tel que, pour chaque $\theta \in]-1,1[$, Q_θ désigne la loi sur $\mathbb{R}$ de densité

$$\frac{1}{2}(1+\theta x)\mathbb{1}_{]-1,1[}(x).$$

1. Construire un estimateur $\hat{\theta}$ de θ en utilisant la méthode des moments.
2. Calculer son biais et son risque quadratique moyen.
3. Soit $\alpha \in]0,1[$. Déterminer la loi limite de $\hat{\theta}$, puis en déduire un intervalle de confiance asymptotique pour θ au niveau de confiance $(1-\alpha)$.