中学数学实验教材

第五册（下）

中学数学实验教材编写组编

1985 年 5 月

前　言

这一套中学数学实验教材，内容的选取原则是精简实用，教材的处理力求深入浅出，顺理成章，尽量作到使人人能懂，到处有用。

本教材适用于重点中学，侧重在满足学生将来从事理工方面学习和工作的需要。

本教材的教学目的是：使学生切实学好从事现代生产、特别是学习现代科学技术所必需的数学基础知识；通过对数学理论、应用、思想和方法的学习，培养学生运算能力，思维能力，空间想象力，从而逐步培养运用数学的思想和方法去分析和解决实际问题的能力；通过数学的教学和学习，培养学生良好的学习习惯，严谨的治学态度和科学的思想方法，逐步形成辩证唯物主义世界观。

根据上述教学目的，本教材精选了传统数学那些普遍实用的最基础的部分，这就是在理论上、应用上和思想方法上都是基本的、长远起作用的通性、通法。比如，代数中的数系运算律，式的运算，解代数方程，待定系数法；几何中的图形的基本概念和主要性质，向量，解析几何；分析中的函数，极限，连续，微分，积分；概率统计以及逻辑、推理论证等知识。对于那些理论和应用上虽有一定作用，但发展余地不大，或没有普遍意义和实用价值，或不必要的重复和过于繁琐的内容，如立体几何中的空间作图，几何体的体积、表面积计算，几何难题，因式分解，对数计算等作了较大的精简或删减。

全套教材共分六册。第一册是代数。在总结小学所学自然数、小数、分数基础上，明确提出运算律，把数扩充到有理数和实数系。灵活运用运算律解一元一次、二次方程，二元、三元一次方程组，然后进一步系统化，引进多项式运算，综合除法，辗转相除，余式定理及其推论，学到根式、分式、部分分式。第二册是几何。由直观几何形象分析归纳出几何基本概念和基本性质，通过集合术语、简易逻辑转入欧氏推理几何，处理直线形，圆、基本轨迹与作图，三角比与解三角形等基本内容。第三册是函数。数形结合引入坐标，研究多项式函数，指数、对数、三角函数，不等式等。第四册是代数。把数扩充到复数系，进一步加强多项式理论，方程式论，讲线性方程组理论，概率（离散的）统计

的初步知识。第五册是几何。引进向量，用向量和初等几何方法综合处理几何问题，坐标化处理直线、圆、锥线，坐标变换与二次曲线讨论，然后讲立体几何，并引进空间向量研究空间解析几何初步知识。第六册是微积分初步。突出逼近法，讲实数完备性，函数，极限，连续，变率与微分，求和与积分。

本教材基本上采取代数、几何、分析分科，初中、高中循环排列的安排体系。教学可按初一、初二代数、几何双科并进，初三学分析，高一、高二代数（包括概率统计）、几何双科并进，高三学微积分的程序来安排。

本教材的处理力求符合历史发展和认识发展的规律，深入浅出，顺理成章。突出由算术到代数，由实验几何到论证几何，由综合几何到解析几何，由常量数学到变量数学等四个重大转折，着力采取措施引导学生合乎规律地实现这些转折，为此，强调数系运算律，集合逻辑，向量和逼近法分别在实现这四个转折中的作用。这样既遵循历史发展的规律，又突出了几个转折关头，缩短了认识过程，有利于学生掌握数学思想发展的脉络，提高数学教学的思想性。

这一套中学数学实验教材是教育部委托北京师范大学、中国科学院数学研究所、人民教育出版社、北京师范学院、北京景山学校等单位组成的领导小组组织“中学数学实验教材编写组”，根据美国加州大学伯克利分校数学系项武义教授的《关于中学实验数学教材的设想》编写的。第一版印出后，由教育部实验研究组和有关省市实验研究组指导在北京景山学校、北京师院附中、上海大同中学、天津南开中学、天津十六中学、广东省实验中学、华南师院附中、长春市实验中学等校试教过两遍，在这个基础上编写组吸收了实验学校老师们的经验和意见，修改成这一版《中学数学实验教材》，正式出版，内部发行，供中学选作实验教材，教师参考书或学生课外读物。在编写和修订过程中，项武义教授曾数次详细修改过原稿，提出过许多宝贵意见。

本教材虽然试用过两遍，但是实验基础仍然很不够，这次修改出版，目的是通过更大范围的实验研究，逐步形成另一套现代化而又适合我国国情的中学数学教科书。在实验过程中，我们热忱希望大家多提意见，以便进一步把它修改好。

中学数学实验教材编写组
一九八一年三月

目 录

第五章　向量的坐标运算　直线与圆

第一节　向量的坐标运算

一、直角坐标系与向量的坐标

在初中，我们已学习了平面直角坐标系，其要点如下：选定一个长度单位，建立两条具有公共原点且互相垂直的数轴（图 5.1），通常一条为水平的数轴，称为横轴或 X 轴，它的正向是由左到右，另一条是和它垂直的轴称为纵轴或 Y 轴，它的正向是从下到上. X 轴、Y 轴总称为坐标轴、坐标轴的交点 O 称为坐标系的原点，这样我们就说在平面上建立了直角坐标系 OXY, 这个平面就叫做坐标平面，在坐标平面上任取一点 P, 过 P 引 X 轴、Y 轴的垂线，设垂足分别是 M、N, 如果 M 在 X 轴上的坐标为 x, N 在 Y 轴上的坐标为 y, 那么我们就说 P 点的坐标是 (x, y), 记作 $P(x, y)$, x 称为横坐标，y 称为纵坐标.

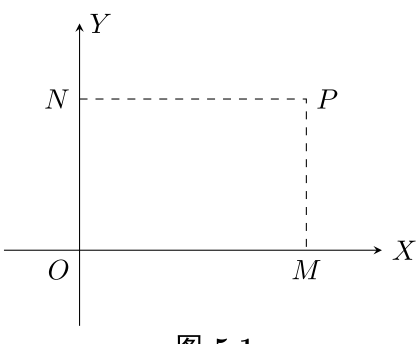


图 5.1

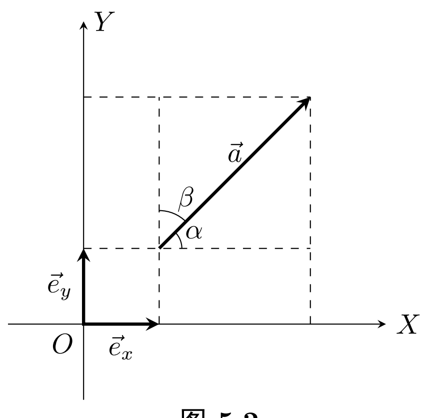


图 5.2

在建立直角坐标系 OXY 的平面上（图 5.2），我们沿 X 轴与 Y 轴的正方向分别取单位向量 $\vec{e}_x$、$\vec{e}_y$, 由共面向量定理可知，对坐标平面上任一向量 $\vec{a}$, 存

在唯一的有序实数偶 (a_x, a_y) 使

$$\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y \tag{5.1}$$

(a_x, a_y) 就叫做 $\vec{a}$ 在直角坐标系 OXY 上的坐标，记作

$$\vec{a} = (a_x, a_y) \tag{5.2}$$

实质上 (5.2) 式是 (5.1) 式的缩写；其中 a_x 叫做 $\vec{a}$ 在 X 轴上的坐标分量，a_y 叫做 $\vec{a}$ 在 Y 轴上的坐标分量.

定理

在坐标平面上，如果 $\vec{a} = (a_x, a_y)$, 则

$$\begin{aligned} a_x &= \vec{e}_x \cdot \vec{a} = |\vec{a}|\cos\langle\vec{e}_x, \vec{a}\rangle \\ a_y &= \vec{e}_y \cdot \vec{a} = |\vec{a}|\cos\langle\vec{e}_y, \vec{a}\rangle \end{aligned} \tag{5.3}$$

证明： 已知 $\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y$，则

$$\begin{aligned} \vec{e}_x \cdot \vec{a} &= \vec{e}_x \cdot (a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y) = a_x\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x + a_y\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y \\ \vec{e}_y \cdot \vec{a} &= \vec{e}_y \cdot (a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y) = a_x\vec{e}_y \cdot \vec{e}_x + a_y\vec{e}_y \cdot \vec{e}_y \end{aligned}$$

由于 $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ 是单位向量，且 $\vec{e}_x \perp \vec{e}_y$, 所以，

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = 1, \qquad \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_x = 0$$

于是得到

$$\begin{aligned} a_x &= \vec{e}_x \cdot \vec{a} = |\vec{a}|\cos\langle\vec{e}_x, \vec{a}\rangle \\ a_y &= \vec{e}_y \cdot \vec{a} = |\vec{a}|\cos\langle\vec{e}_y, \vec{a}\rangle \end{aligned}$$

这个定理说的是，**向量 $\vec{a}$ 在 X 轴和 Y 轴上的坐标分量分别是 $\vec{a}$ 在坐标轴上的垂直投影量**.

显然，$\vec{o} = (0, 0)$, $\vec{e}_x = (1, 0)$, $\vec{e}_y = (0, 1)$. 令 $\langle\vec{e}_x, \vec{a}\rangle = \alpha$, $\langle\vec{e}_y, \vec{a}\rangle = \beta$，$\alpha, \beta$ 一起决定了 $\vec{a}$ 的方向，α, β 叫做 $\vec{a}$ 的**方向角**，$\cos\alpha$, $\cos\beta$ 叫做 $\vec{a}$ 的**方向余弦**，上述定理表达了向量的长度、方向与它的坐标之间的关系，甚为重要，请同学要把它牢牢记住.

如果在坐标平面上（图 5.3），以 O 为起点引 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, 则 A 点的位置被 $\vec{a}$ 所唯一确定，这时，我们称 $\overrightarrow{OA}$ 为点 A 的**位置向量**. 换句话说，A 点的位置

向量也就是确定 A 点相对于原点位置的向量．设 $\overrightarrow{OP} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$，则 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标 (x, y) 也就是 P 点的坐标；反之，P 点的坐标 (x, y) 也就是位置向量 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标．由此可见，给定了原点 O 和两个互相垂直的单位向量 $\vec{e}_x, \vec{e}_y$, 坐标系也就完全确定了，因而，坐标系 OXY 也可用 $[O: \vec{e}_x, \vec{e}_y]$ 来表示，$\vec{e}_x, \vec{e}_y$ 叫做坐标系的**基向量**.

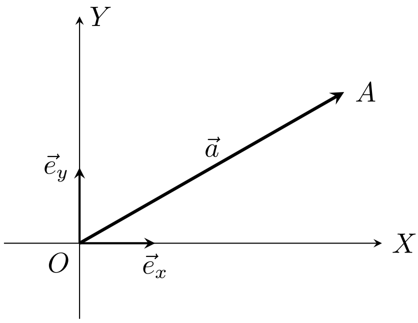


图 5.3

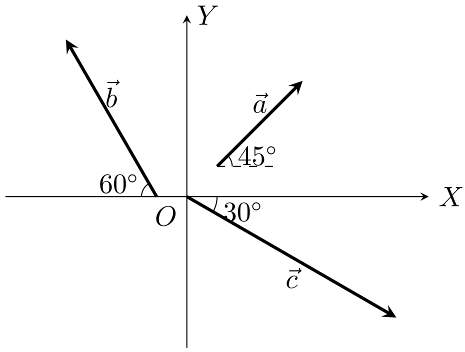


图 5.4

为了方便，在本书中我们约定，当点用大写字母标记时，它相对于原点的位置向量用相应的小写字母来标记，例如 P 点的位置向量记为 $\vec{p}$, A 点的位置向量记为 $\vec{a}$ 等等.

例 5.1　向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 的方向与绝对值如图 5.4 所示，求 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 的坐标.

解：设 $\vec{a} = (a_x, a_y)$, $\vec{b} = (b_x, b_y)$, $\vec{c} = (c_x, c_y)$, 因此：

$$a_x = \vec{e}_x \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cos\langle\vec{e}_x, \vec{a}\rangle = 2\cos 45° = \sqrt{2}$$
$$a_y = |\vec{a}| \cos\langle\vec{e}_y, \vec{a}\rangle = 2\cos 45° = \sqrt{2}$$

$\therefore \quad \vec{a} = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$

$$b_x = |\vec{b}| \cos\left\langle\vec{e}_x, \vec{b}\right\rangle = 3\cos(180° - 60°) = -3\cos 60° = -\frac{3}{2}$$
$$b_y = |\vec{b}| \cos\left\langle\vec{e}_y, \vec{b}\right\rangle = 3\cos(90° - 60°) = 3\cos 30° = \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

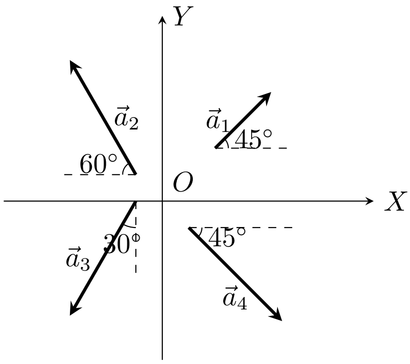
$\therefore \quad \vec{b} = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$

$$c_x = |\vec{c}| \cos\langle\vec{e}_x, \vec{c}\rangle = 4\cos 30° = 2\sqrt{3}$$
$$c_y = |\vec{c}| \cos\langle\vec{e}_y, \vec{c}\rangle = 4\cos(30° + 90°) = -4\sin 30° = -2$$

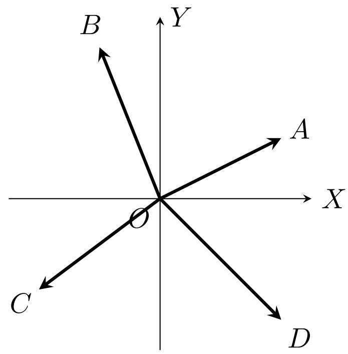
$\therefore \quad \vec{c} = \left(2\sqrt{3}, -2\right)$

练习

1. 求图中向量的坐标.
2. 已知 $A(4,2)$, $B(-2,5)$, $C(-4,-3)$, $D(4,-4)$. 试用基向量 $\vec{e}_x,\vec{e}_y$ 表示它们相对于原点的位置向量.
3. 已知 $\overrightarrow{OA}=(3,-1)$, $\overrightarrow{OB}=(2,3)$. 试写出 A、B 两点的坐标.



第 1 题



第 2 题

二、用向量坐标进行向量运算

已知向量 $\vec{a}=(a_x,a_y)$, $\vec{b}=(b_x,b_y)$，则

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_x\vec{e}_x+a_y\vec{e}_y)+(b_x\vec{e}_x+b_y\vec{e}_y)=(a_x+b_x)\vec{e}_x+(a_y+b_y)\vec{e}_y$$

即

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_x,a_y)+(b_x,b_y)=(a_x+b_x,a_y+b_y)$$

同样可证：

$$\vec{a}-\vec{b}=(a_x,a_y)-(b_x,b_y)=(a_x-b_x,a_y-b_y)$$

这就是说**向量的和与差的坐标等于各向量相应坐标的和与差**.

已知 $\vec{a}=(a_x,a_y)$ 和一实数 λ，则

$$\lambda a=\lambda(a_x\vec{e}_x+a_y\vec{e}_y)=\lambda a_x\vec{e}_x+\lambda a_y\vec{e}_y$$

即：$\lambda\vec{a}=\lambda(a_x,a_y)=(\lambda a_x,\lambda a_y)$.

这就是说**向量倍积的坐标等于该向量相应的坐标与倍数的乘积**.

已知 $\vec{a}=(a_x,a_y)$, $\vec{b}=(b_x,b_y)$, 则

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}&=(a_x\vec{e}_x+a_y\vec{e}_y)\cdot(b_x\vec{e}_x+b_y\vec{e}_y)\\&=a_xb_x\vec{e}_x\cdot\vec{e}_x+a_xb_y\vec{e}_y\cdot\vec{e}_x+a_yb_x\vec{e}_y\vec{e}_x+a_yb_y\vec{e}_y\cdot\vec{e}_y\end{aligned}$$

由于 $\vec{e}_x\cdot\vec{e}_x=\vec{e}_y\cdot\vec{e}_y=1$, $\vec{e}_x\cdot\vec{e}_y=\vec{e}_y\cdot\vec{e}_x=0$，所以

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_x,a_y)\cdot(b_x,b_y)=a_xb_x+a_yb_y$$

这就是说**两个向量内积的坐标等于两向量相应坐标的乘积的和.**

例 5.2　已知 $\vec{a}=(5,-3)$, $\vec{b}=(3,2)$.
求 $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $3\vec{a}+2\vec{b}$.

解:

$$\begin{aligned}\vec{a}+\vec{b}&=(5,-3)+(3,2)=(8,-1)\\\vec{a}-\vec{b}&=(5,-3)-(3,2)=(2,-5)\\\vec{a}\cdot\vec{b}&=(5,-3)\cdot(3,2)=5\times3+(-3)\times2=9\\3\vec{a}+2\vec{b}&=3(5,-3)+2(3,2)=(15,-9)+(6,4)=(21,-5)\end{aligned}$$

例 5.3　已知 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$. 求 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标（图 5.5）.

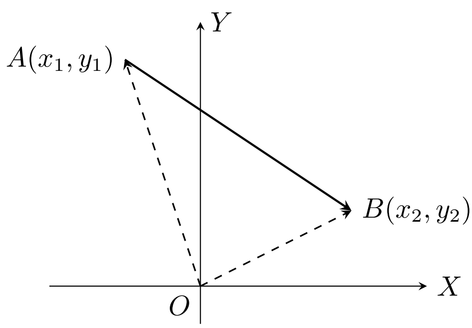


图 5.5

解:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}&=(x_2,y_2)-(x_1,y_1)\\&=(x_2-x_1,y_2-y_1)\end{aligned}$$

由例 5.2 我们可得到如下运算法则:

一个向量的坐标等于表示此向量的有向线段的终点的坐标减去起点的坐标.

例 5.4 已知 $A(3,4)$, $B(-2,7)$. 求 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$; 它们的坐标之间有什么关系?

解:

$$\overrightarrow{AB} = (-2-3, 7-4) = (-5,3)$$
$$\overrightarrow{BA} = (3-(-2), 4-7) = (5,-3).$$

显然它们的相应的坐标分量是互为相反数. 实际上

$$\overrightarrow{BA} = (-1)\overrightarrow{AB} = (-1)(-5,3) = (5,-3)$$

例 5.5 已知三个向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$，且 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = r$. $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle = \langle\vec{b},\vec{c}\rangle = \langle\vec{c},\vec{a}\rangle = 120^\circ$ (图 5.6)，求证：$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{0}$.

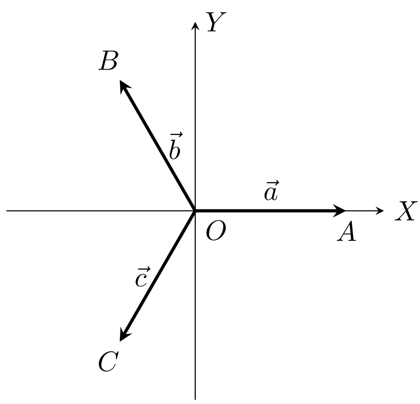


图 5.6

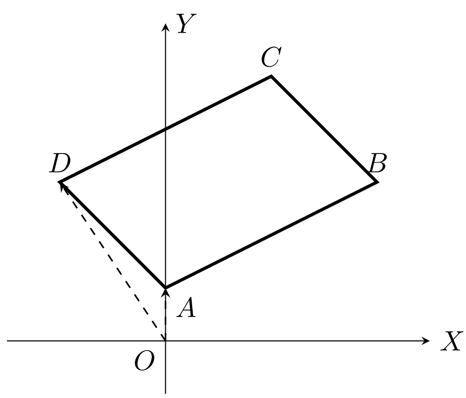


图 5.7

证明：设 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, 以 $\overrightarrow{OA}$ 的方向作为 X 轴的正方向建立坐

标系 $[O:\ \vec{e}_x, \vec{e}_y]$ 则

$$\overrightarrow{OA} = (r, 0)$$
$$\overrightarrow{OB} = \left(|\vec{b}|\cos 120^\circ, |\vec{b}|\cos 30^\circ\right) = \left(-\frac{r}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}r\right)$$
$$\overrightarrow{OC} = (|\vec{c}|\cos 120^\circ, |\vec{c}|\cos 150^\circ) = \left(-\frac{r}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)$$
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} &= (r, 0) + \left(-\frac{r}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}r\right) + \left(-\frac{r}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}r\right) \\ &= \left(r - \frac{r}{2} - \frac{r}{2}, 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (0, 0)\end{aligned}$$

$\therefore\quad \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}.$

例 5.6　已知 $\varDelta$ $ABCD$, $A(0,1)$、$B(4,3)$、$C(2,5)$ 求顶点 D 的坐标（图 5.7）.

解：

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} \\ &= (0,1) + (2,5) - (4,3) = (-2,3)\end{aligned}$$

所以 D 的坐标是 $(-2,3)$.

练习

1. 已知 $\vec{a} = (-5,3)$, $\vec{b} = (7,-2)$. 求 $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $4\vec{a}-7\vec{b}$ 的坐标.
2. 已知 $\vec{a} = (2,-1)$, $\vec{b} = (-1,1)$. 求 $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$ 的坐标，并画图验证.
3. 已知 $\vec{a} = (1,2)$, $\vec{b} = (3,1)$. 试以 O 为起点画有向线段，分别表示 $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $2\vec{a}-3\vec{b}$.
4. 已知 $\vec{a} = (1,2)$, $\vec{b} = (-2,3)$. 求

   (a) $\vec{a}\cdot\vec{b}$,　　(c) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$,

   (b) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$,　　(d) $(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$.

5. 已知 $\vec{a} = (\sqrt{2},-1)$, $\vec{b} = (-\sqrt{3},3)$. 求

(a) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ (b) $(4\vec{a}-\vec{b})\cdot(4\vec{a}+\vec{b})$ (c) $(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})$

6. 已知 $\square ABCD$ 的三个顶点 $A(0,0)$, $B(3,1)$, $C(4,3)$. 试求顶点 D 的坐标.

7. 已知 O 是正六边形 $ABCDEF$ 的中心，用向量坐标运算证明：

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\vec{0}$$

三、垂直与平行向量的坐标关系

已知 $\vec{a}$、$\vec{b}\,(\vec{b}\neq\vec{0})$ 平行的充要条件是存在一个实数 λ 使等式

$$\vec{a}=\lambda\vec{b}$$

成立．如果 $\vec{a}=(a_x,a_y)$, $\vec{b}=(b_x,b_y)$, 那么上面的充要条件用坐标表示，可写为：

$$(a_x,a_y)=(\lambda b_x,\lambda b_y)$$

即：

$$\begin{cases} a_x=\lambda b_x \\ a_y=\lambda b_y \end{cases}$$

由上式消去 λ, 上述条件又可写为：

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}=0$$

或：$a_x:b_x=a_y:b_y$.

上述结论可叙述为如下定理.

定理

两个向量平行的一个充分必要条件是它们相应的坐标分量成比例.

推论

如果 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ 是坐标平面上三个不同的点，那么 A、B、C 三点共线的一个充要条件是

$$\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}=\frac{y_2-y_1}{y_3-y_1}$$

或者用三阶行列式写为

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

证明：因为

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1), \qquad \overrightarrow{AC} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1)$$

由于 A、B、C 三点共线的充要条件是 $\overrightarrow{AB} \mathbin{//} \overrightarrow{AC}$，所以，由上述定理便得到

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1}$$

即：$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ 从行列式计算法则容易证明：

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

我们已知

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

如果 $\vec{a} = (a_x, a_y)$、$\vec{b} = (b_x, b_y)$, 那么上述条件用坐标表示可写为

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Longleftrightarrow \quad a_x b_x + a_y b_y = 0$$

这也可写为如下定理：

定理

两个向量垂直的充要条件是它们相应坐标的乘积的和等于零.

例 5.7　已知 $\vec{a} = (3, y)$, $\vec{b} = (6, 4)$ 且 $\vec{a} \mathbin{//} \vec{b}$. 求 y 值.

解：因为 $\vec{a} \mathbin{//} \vec{b}$，所以

$$\frac{6}{3} = \frac{4}{y}$$

解之得 $y = 2$.

例 5.8 已知 $A(1,1)$, $B(3,5)$, $C(-2,-5)$. 问：A、B、C 三点是否共线.

解： 因为 $\overrightarrow{AB}=(2,4)$, $\overrightarrow{AC}=(-3,-6)$, 且

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = -12+12=0$$

所以 A、B、C 三点共线.

例 5.9 已知 $\vec{a}=(3,2)$, $\vec{b}=(-6,9)$. 求证 $\vec{a}\perp\vec{b}$.

解： 因为

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times(-6)+2\times 9=-18+18=0$$

所以 $\vec{a}\perp\vec{b}$.

例 5.10 已知 $A(1,2)$, $B(2,3)$, $C(-2,5)$. 求证 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

解： 因为

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= (2,3)-(1,2)=(1,1)\\
\overrightarrow{AC} &= (-2,5)-(1,2)=(-3,3)\\
\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= 1\times(-3)+1\times 3=0
\end{aligned}$$

所以 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$, 即 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

练习

1. 试问下列向量是否平行.
   (a) $\vec{a}=\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$, $\quad\vec{b}=(-2,-3)$
   (b) $\vec{p}=(0.5,4)$, $\quad\vec{q}=(-8,64)$
   (c) $\vec{c}=(2,3)$, $\quad\vec{d}=(3,4)$
2. 已知 $\vec{a}=\left(\frac{3}{5},-5\right)$, $\vec{b}=(3,y)$, 且 $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$, 求 y.
3. 向量 $\vec{a}=(5,7)$ 与 $\vec{b}=(10,14)$ 是否共线.
4. 已知 $\vec{a}=(1,3)$, $\vec{b}=(2,5)$, 求证 $\vec{a},\vec{b}$ 线性无关.
5. 已知 $\vec{a}=(-3,2)$, $\vec{b}=(4,6)$. 求证 $\vec{a}\perp\vec{b}$, 并作图验证.
6. 已知 $A(7,5)$, $B(2,3)$, $C(6,-7)$. 求证 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

四、有向线段定比分点的坐标

已知点 P 按定比 μ 分割有向线段 P_1P_2(图 5.8). 即

$$\overrightarrow{P_1P} = \mu\overrightarrow{PP_2}$$
$$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_1} = \mu\left(\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP}\right)$$

所以

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{1+\mu}\overrightarrow{OP_1} + \frac{\mu}{1+\mu}\overrightarrow{OP_2}$$

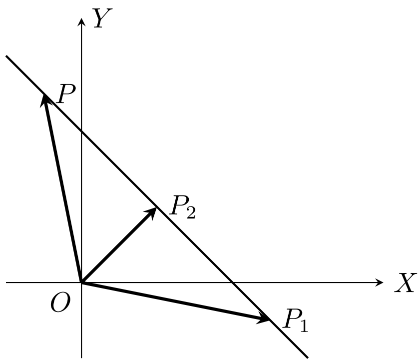


图 5.8

如果 $\overrightarrow{OP_1} = (x_1, y_1)$，$\overrightarrow{OP_2} = (x_2, y_2)$, $\overrightarrow{OP} = (x, y)$，那么上式用坐标表示即可写为

$$(x, y) = \left(\frac{x_1 + \mu x_2}{1+\mu},\ \frac{y_1 + \mu y_2}{1+\mu}\right)$$

即：

$$x = \frac{x_1 + \mu x_2}{1+\mu}, \qquad y = \frac{y_1 + \mu y_2}{1+\mu}$$

这就是求有向线段定比分点的计算公式.

当 $\mu = 1$ 时，P 点是线段 $\overline{P_1P_2}$ 的中点. 这时 P 点的坐标是

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

这就是求线段中点的坐标的计算公式，通常叫做**中点公式**.

例 5.11　已知 $A(1,3)$, $B(4,-2)$. 点 P 按定比 $\dfrac{1}{2}$ 分割 $\overrightarrow{AB}$, 求 P 点的坐标（图 5.9）.

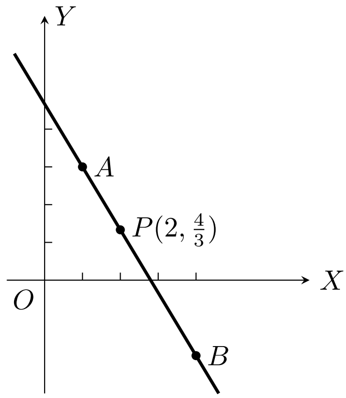


图 5.9

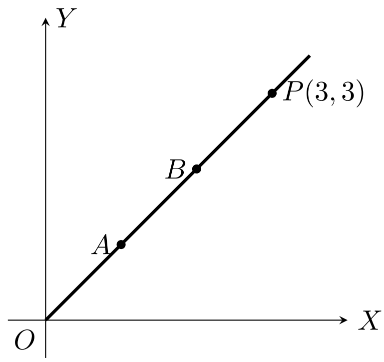


图 5.10

解： 因 $\mu=\dfrac{1}{2}$, 由求定比分点坐标计算公式得：

$$x=\frac{1+\dfrac{1}{2}\times 4}{1+\dfrac{1}{2}}=2, \qquad y=\frac{3+\dfrac{1}{2}\times(-2)}{1+\dfrac{1}{2}}=\frac{4}{3}$$

所以 $P\left(2,\dfrac{4}{3}\right)$.

例 5.12 已知 $A(1,1)$, $B(2,2)$, 点 P 按定比 $-\dfrac{1}{2}$ 分割 $\overrightarrow{BA}$, 求 P 点的坐标（图 5.10）.

解： 因 $\mu=-\dfrac{1}{2}$, 由求定比分点坐标计算公式得：

$$x=\frac{2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times 1}{1+\left(-\dfrac{1}{2}\right)}=3, \qquad y=\frac{2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times 1}{1+\left(-\dfrac{1}{2}\right)}=3$$

所以 $P(3,3)$.

在使用定比分点公式时，请同学们注意有向线段的起点和终点，以避免出错.

练习

1. 已知：

(a) $A(3,5)$, $B(-3,7)$

(b) $A(4,-1)$, $B(-5,-6)$

(c) $A(a+b,c+d)$, $B(a-b,c-d)$

试求 $\overrightarrow{AB}$ 的中点的坐标.

2. 已知 $P(0,2)$, $Q(2,-1)$, 点 M 按定比 $\dfrac{1}{2}$ 分割 $\overrightarrow{PQ}$, 点 N 按定比 3 分割 $\overrightarrow{QP}$, 求 M、N 两点的坐标.

3. 已知 $M_1(-1,6)$, $M_2(4,3)$, 求 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 三等分点的坐标.

4. 已知 $A_1(x_1,y_1)$, $A_2(x_2,y_2)$, $A_3(x_3,y_3)$ 是 $\triangle A_1A_2A_3$ 的三个顶点，求 $\triangle A_1A_2A_3$ 的重心的坐标.

5. 已知 $A(1,2)$, $B(3,4)$, $|\overrightarrow{AP}|=2|\overrightarrow{AB}|$，求 P 点的坐标.

6. 已知点 $B(-4,1)$ 到点 $A(2,-2)$ 的距离是它到点 $C(x,y)$ 的距离的一半，求 $C(x,y)$.

7. 已知 $\square\ ABCD$ 的相邻两顶点 $A(1,1)$, $B(3,2)$ 和它的对角线交点 $K(2,3)$, 求其余两个顶点的坐标.

五、向量的长度公式

如果已知 $\vec{a}=(a_x,a_y)$, 则

$$|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}=a_x^2+a_y^2$$

所以

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2} \tag{5.4}$$

(5.4) 式就是求 $\vec{a}$ 的**长度的计算公式**.

如果已知两点 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ (图 5.11)，则

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \tag{5.5}$$

显然 A、B 两点间的距离就是 $|\overrightarrow{AB}|$，所以 (5.5) 式是求两点间的**距离公式**. 它可叙述如下：

两点间的距离等于两点相应坐标差的平方和的算术平方根.

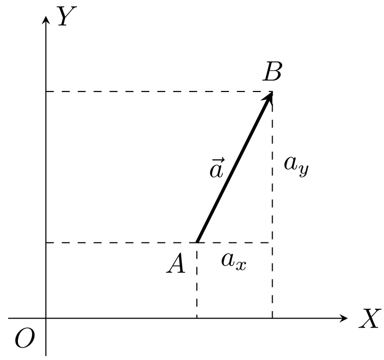


图 5.11

如果 $\vec{a}_0$ 是 $\vec{a}$ 的单位向量，$\vec{a}=(a_x,a_y)$, 那么，

$$\vec{a}_0=\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}=\frac{1}{\sqrt{a_x^2+a_y^2}}(a_x,a_y)$$

即

$$\vec{a}_0=\left(\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2}},\ \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2}}\right) \tag{5.6}$$

它是由已知向量的坐标，求它的单位向量的坐标的计算公式.

例 5.13 已知 $A(3,6)$, $B(-2,3)$. 求 A、B 间距离.

解： 因 $\overrightarrow{AB}=(-5,-3)$, 所以

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-5)^2+(-3)^2}=\sqrt{34}$$

例 5.14 已知 $\vec{a}=(3,4)$, 求 $\vec{a}_0$ 的坐标.

解： 因为 $|\vec{a}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$, 所以

$$\vec{a}_0=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$$

例 5.15 已知 $A(1,2)$, $B(3,4)$, $C(5,0)$. 求证：$\triangle ABC$ 是等腰三角形.

证明：

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(3-1)^2+(4-2)^2} = \sqrt{8}$$
$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(5-1)^2+(0-2)^2} = \sqrt{20}$$
$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(5-3)^2+(0-4)^2} = \sqrt{20}$$

由此得 $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}$, 所以 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

练习

1. 已知 $A(0,0)$, $B(3,4)$, $C(0,5)$, 求 $\triangle ABC$ 各边的长.
2. 已知 $A(3,8)$, $B(-11,3)$, $C(-8,-2)$. 求证 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.
3. 已知 $A(-1,2)$, $B(3,5)$, $C(1,7)$, $D(-3,4)$, 求证 $ABCD$ 是平行四边形，且求其对角线的长度.
4. 已知 $\vec{a} = (1,1)$, $\vec{b} = (-2,5)$, 求 $\vec{a}_0$, $\vec{b}_0$.
5. 已知 $|\vec{a}| = 5$, 且 $\vec{a}_0 = \left(\dfrac{2}{\sqrt{13}}, \dfrac{3}{\sqrt{13}}\right)$，求 $\vec{a}$ 的坐标.
6. 用坐标法证明：如果 M 是 $\triangle ABC$ 的 $\overline{BC}$ 边上的中点，求证：$\overline{AB}^2 + \overline{A}^2 = 2\overline{A}^2 + 2\overline{BM}^2$.

六、两向量的夹角计算公式

已知 $\vec{a} = (a_x, a_y)$, $\vec{b} = (b_x, b_y)$, 则

$$\cos\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|}$$

但 $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_xb_x + a_yb_y$, $\quad |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2+a_y^2}$, $\quad \left|\vec{b}\right| = \sqrt{b_x^2+b_y^2}$，所以

$$\cos\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = \frac{a_xb_x + a_yb_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2}} \tag{5.7}$$

(5.7) 式是求两个向量夹角的**余弦的计算公式**. 由两个向量夹角的余弦，我们就可求出这两个向量的夹角.

设 $\langle \vec{e}_x, \vec{a} \rangle = \alpha$, $\langle \vec{e}_y, \vec{a} \rangle = \beta$，已知

$$a_x = |\vec{a}|\cos\alpha, \qquad a_y = |\vec{a}|\cos\beta$$

则

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{a_x}{|\vec{a}|} = \dfrac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} \\ \cos\beta = \dfrac{a_y}{|\vec{a}|} = \dfrac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} \end{cases} \tag{5.8}$$

但由 (5.6) 式知

$$\vec{a}_0 = \left(\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}, \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} \right)$$

所以：$\vec{a}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta)$. 这就是说 $(\cos\alpha, \cos\beta)$ 就是 $\vec{a}$ 的单位向量的坐标.

容易验证 $\cos\alpha$, $\cos\beta$ 之间满足关系

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1 \tag{5.9}$$

(5.8)、(5.9) 是两个重要的公式，它们把向量的坐标与向量的长度、方向联系起来.

例 5.16 已知 $A(\sqrt{3}, 1)$, $B(0, 1)$, $c\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, 求 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 之间的夹角.

解：因为 $\overrightarrow{AB} = (-\sqrt{3}, 0)$, $\overrightarrow{AC} = \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, 所以

$$\cos\left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right\rangle = \frac{-\sqrt{3} \times \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + 0 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 0^2}\sqrt{\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

因此，

$$\left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right\rangle = \frac{\pi}{6}$$

例 5.17 求向量 $\vec{a} = (2, -1)$ 的方向余弦和 $\vec{a}_0$ 的坐标.

解：因为 $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$，所以

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \qquad \cos\beta = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

$$\vec{a}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

练习

1. 求下列 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角的余弦.

   (a) $\vec{a}=(1,-2)$, $\quad\vec{b}=(5,3)$

   (b) $\vec{a}=(-3,4)$, $\quad\vec{b}=(2,-1)$

2. 求下列向量的单位向量的坐标.

   (a) $\vec{a}=(2,3)$

   (b) $\vec{b}=(5,13)$

   (c) $\vec{c}=(2,0)$

   (d) $\vec{d}=(1,1)$

3. 已知 $\overrightarrow{OA}=(-1,3)$, $\overrightarrow{OB}=(0,4)$, 求 $\overrightarrow{OA}$ 在 $\overrightarrow{OB}$ 上的垂直投影分量，$\overrightarrow{OB}$ 在 $\overrightarrow{OA}$ 上的垂直投影分量.

4. 已知 $A(2,-1)$, $B(1,-3)$, $C(3,-4)$, 计算 $\triangle ABC$ 的三内角的余弦.

七、两向量方向差的正弦、正切公式

由于我们规定两个向量的夹角取值范围是 $[0,\pi]$，所以在坐标平面上知道 $\langle\vec{e}_x,\vec{a}\rangle$ 和 $\langle\vec{e}_y,\vec{a}\rangle$ 这两个角 $\vec{a}$ 的方向唯一确定了，其实在坐标平面上只需要知道其中一个角就够了.

在坐标系 $[O:\ \vec{e}_x,\vec{e}_y]$ 中（图 5.12），已知非零向量 $\vec{a}=(a_x,a_y)$, 作 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, 这时射线 OA 的方向被以 OX 为始边、OA 为终边的旋转角 φ 所唯一确定，于是 $\vec{a}$ 的方向也被 φ 所唯一确定. φ 角通常叫做向量 $\vec{a}$ 的**方向角**. 由三角学可知，φ 有无穷多值，因此平面上同一个方向可以和无穷多个角相对应. 如果约定 φ 在 $[0,2\pi]$ 内取值，一个向量的方向角就被唯一确定了.

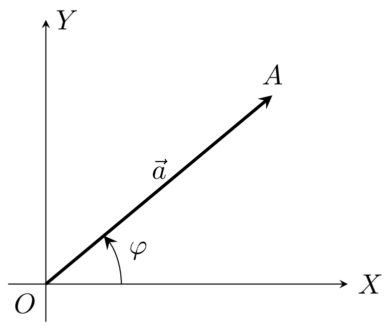


图 5.12

我们曾规定 $\langle \vec{e}_x, \vec{a}\rangle = \alpha$, $\langle \vec{e}_y, \vec{a}\rangle = \beta$ 的取值范围是 $[0, \pi]$. 因此上述定义的角 φ 和角 α 并不一致．但我们知道

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \qquad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}$$

由三角函数的定义，我们又知

$$\cos\varphi = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \qquad \sin\varphi = \frac{a_y}{|\vec{a}|}$$

所以不论 φ 取何值，都有关系式

$$\cos\varphi = \cos\alpha, \qquad \sin\varphi = \cos\beta$$

因此一个向量的方向余弦，用它的方向角可表示为 $\cos\varphi, \sin\varphi$. 任给一单位向量 $\vec{e}$, 若方向角为 φ, 则

$$\vec{e} = (\cos\varphi,\ \sin\varphi)$$

在 (5.10) 式两边相除可得

$$\tan\varphi = \frac{a_y}{a_x}$$

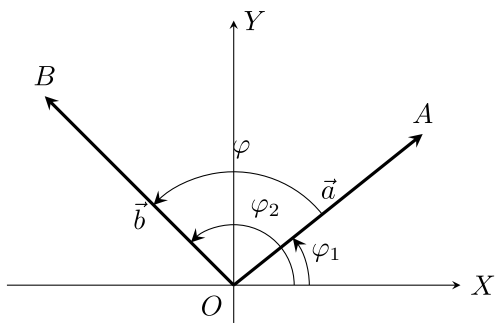


图 5.13

已知 $\vec{a} = (a_x, a_y)$, $\vec{b} = (b_x, b_y)$, 作 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ (图 5.13), 设 $\vec{a}$ 的方向角为 φ_1, $\vec{b}$ 的方向角为 φ_2, 我们把 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 的方向差 φ 定义为 $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$，这就是说 φ 是射线 OA 到射线 OB 之间的旋转角，也可说 φ 是 $\vec{a}$ 到 $\vec{b}$ 的旋转角．容易证明，对任意两个向量 $\vec{a}, \vec{b}$, 有

$$\cos\varphi = \cos\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle$$

由三角公式有

$$\sin\varphi = \sin(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin\varphi_2\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2\sin\varphi_1$$

但

$$\sin\varphi_2=\frac{b_y}{|\vec{b}|},\quad \cos\varphi_2=\frac{b_x}{|\vec{b}|},\quad \sin\varphi_1=\frac{a_y}{|\vec{a}|},\quad \cos\varphi_1=\frac{a_x}{|\vec{a}|}$$

所以

$$\sin\varphi=\frac{a_xb_y-a_yb_x}{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|} \tag{5.10}$$

又知

$$\cos\varphi=\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=\frac{a_xb_x+a_yb_y}{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|}$$

两式相除又可得

$$\tan\varphi=\frac{a_xb_y-a_yb_x}{a_xb_x+a_yb_y}$$

为了便于记忆，(5.10)、(5.11) 两式还可用行列式写出：

$$\sin\varphi=\frac{\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}}{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|},\qquad \tan\varphi=\frac{\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}}{\vec{a}\cdot\vec{b}}$$

例 5.18　已知 $\vec{a}=(2,-2)$, 求 $\vec{a}$ 的方向角 φ.

解：因为 $\sin\varphi=\dfrac{-2}{\sqrt{2^2+(-2)^2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，所以，$\varphi=-45°$ 或 $\varphi=-135°$, 又因 $\cos\varphi$ 的值为正（$\cos\varphi$ 与 $\vec{a}$ 的横坐标同号），所以 $\varphi=-45°$.

例 5.19　已知 $\vec{a}=(\sqrt{3},0)$, $\vec{b}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$, 求 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的方向差 φ.

解：因为 $|\vec{a}|=\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2}=1$ 所以

$$\cos\varphi=\frac{a_xb_x+a_yb_y}{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|}=\frac{\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+0\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}\cdot 1}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

于是 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$, 或 $\varphi=-\dfrac{11}{6}\pi$. 又因为

$$\sin\varphi=\frac{a_xb_y-a_yb_x}{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|}=\frac{\sqrt{3}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)+0\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}\cdot 1}=-\frac{1}{2}$$

所以：$\varphi=-\dfrac{11}{6}\pi$.

由例 5.19 可知，如果我们要求两向量的夹角，只用余弦公式就可以了，如果要计算两向量的方向差，除用余弦公式外，还要用正弦公式或正切公式.

例 5.20 已知 $\vec{a}=(a_x,a_y)$, 求与 $\vec{a}$ 垂直的单位向量 $\vec{n}_0$ 的坐标.

解： 设 $\vec{n}_0=(\cos\varphi,\sin\varphi)$，由于 $\vec{n}_0\perp\vec{a}$, 所以

$$a_x\cos\alpha+a_y\sin\alpha=0$$

即：$\dfrac{\cos\alpha}{-a_y}=\dfrac{\sin\alpha}{a_x}$.

由此可见，向量 $\vec{n}_0$ 与向量 $(-a_y,a_x)$ 平行．于是存在数 λ, 使

$$\cos\varphi=\lambda(-a_y),\qquad\sin\varphi=\lambda a_x$$

由于 $\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1$, 因此可求得

$$\lambda=\pm\frac{1}{\sqrt{a_x^2+a_y^2}}=\pm\frac{1}{|\vec{a}|}$$

所以

$$\begin{aligned}\cos\varphi&=\pm\frac{1}{|\vec{a}|}\times(-a_y)=\mp\frac{a_y}{|\vec{a}|}\\ \sin\varphi&=\pm\frac{a_x}{|\vec{a}|}\end{aligned}$$

于是可得：

$$\vec{n}_0=\left(-\frac{a_y}{|\vec{a}|},\ \frac{a_x}{|\vec{a}|}\right)\quad\text{或}\quad\vec{n}_0=\left(\frac{a_y}{|\vec{a}|},\ -\frac{a_x}{|\vec{a}|}\right)$$

求一个向量的垂直向量的坐标，是我们经常要碰到的问题，我们在例 5.20 的基础上，再作些说明：

由于 $\vec{n}_0\perp\vec{a}$, 因此对任意实数 k

$$k\vec{n}_0\perp\vec{a}$$

特别当 $k=\pm|\vec{a}|$ 时，向量 $\vec{n}_1=(-a_y,a_x)$, $\vec{n}_2=(a_y,-a_x)$ 都与 $\vec{a}$ 垂直，且与 $\vec{a}$ 的长度相等．例如 $\vec{a}=(3,4)$, 则 $\vec{n}_1=(-4,3)$, $\vec{n}_2=(4,-3)$ 都垂直于 $\vec{a}$ (图 5.14).

令 φ_1 是 $\vec{n}_1$ 与 $\vec{a}$ 的方向差，φ_2 是 $\vec{n}_2$ 与 $\vec{a}$ 的方向差，则

$$\sin\varphi_1=\frac{\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ -a_y & a_x\end{vmatrix}}{|\vec{a}|\,|\vec{a}|}=\frac{a_x^2+a_y^2}{|\vec{a}|^2}=1$$

$$\sin\varphi_2=\frac{\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ a_y & -a_x\end{vmatrix}}{|\vec{a}|\,|\vec{a}|}=\frac{-(a_x^2+a_y^2)}{|\vec{a}|^2}=-1$$

所以向量 $\vec{n}_1$ 可看作向量 $\vec{a}$ 按逆时针方向旋转 90° 所生成的向量，$\vec{n}_2$ 可看作 $\vec{a}$ 按顺时针方向旋转 90° 所生成的向量.

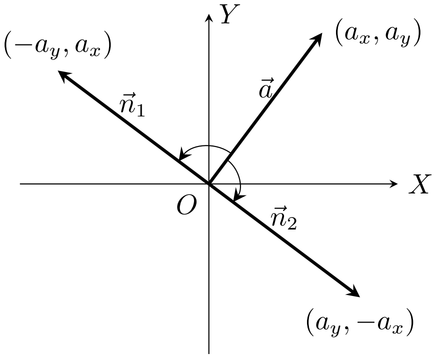


图 5.14

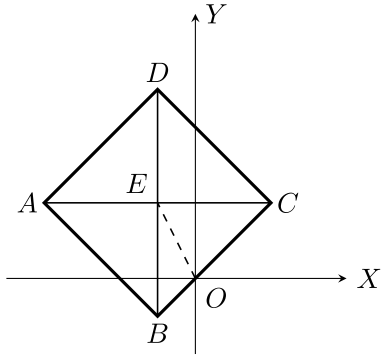


图 5.15

例 5.21　已知正方形 $ABCD$, 有 $A(-2,1)$, $C(1,1)$. 求顶点 B 和 D 的坐标（图 5.15）.

解：设对角线 $\overline{AC}$ 与 $\overline{BD}$ 相交于 E 点，则 E 点的坐标

$$x_E=\frac{1+(-2)}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$y_E=\frac{1+1}{2}=1$$

$$\overrightarrow{EA}=\left(-2-\left(-\frac{1}{2}\right),\ 1-1\right)=\left(-1\frac{1}{2},\ 0\right)$$

由于 $\overrightarrow{EB}\perp\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{ED}\perp\overrightarrow{EA}$, 且 $|\overrightarrow{ED}|=|\overrightarrow{EB}|=|\overrightarrow{EA}|$, 所以

$$\overrightarrow{EB}=\left(0,-1\frac{1}{2}\right),\qquad \overrightarrow{ED}=\left(9,1\frac{1}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{EB}=\left(-\frac{1}{2},1\right)+\left(0,-1\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{ED}=\left(-\frac{1}{2},1\right)+\left(0,1\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2},2\frac{1}{2}\right)$$

所以 $B\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$，$D\left(-\frac{1}{2},2\frac{1}{2}\right)$

例 5.22 证明三角公式 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.

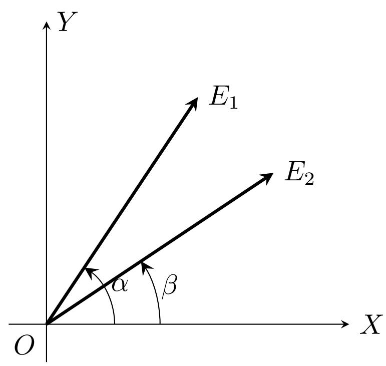


图 5.16

证明：在坐标平面上（图 5.16），设 $\overrightarrow{OE_1}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$, $\overrightarrow{OE_2}=(\cos\beta,\sin\beta)$, 则

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\left\langle\overrightarrow{OE_1},\overrightarrow{OE_2}\right\rangle=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

练习

1. 已知 $\vec{a}=(-2,2)$, 求 $\vec{a}$ 的方向角 φ.
2. 已知 $\vec{R}=(\sqrt{3},-1)$, 求 R 的方向角 φ.
3. 已知 $\vec{a}=(-\sqrt{3},0)$, $\vec{b}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$, 求 $\vec{a}$ 到 $\vec{b}$ 的旋转角.
4. 已知 $\vec{a}=(2,3)$, 求与 $\vec{a}$ 垂直且与 $\vec{a}$ 等长的两个向量.
5. 用向量夹角公式求证 $\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha$, $\cos(90^\circ+\alpha)=-\sin\alpha$.
6. 已知 $\vec{a}=(-4,3)$, 设 $\vec{a}$ 到 $\vec{b}_0$ 的旋转角为 $\frac{\pi}{2}$, 求 $\vec{b}_0$ 的坐标.

八、面积的计算公式

已知 $\square ABCD$ 的两个邻边向量 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$（图 5.17），$\vec{a}$ 到 $\vec{b}$ 的旋转角为 φ, 则 $\square ABCD$ 的面积

$$S=|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\sin\varphi$$

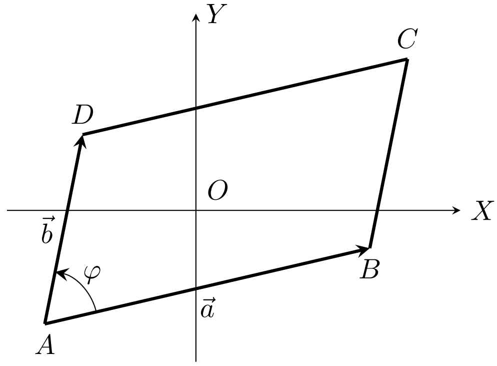


图 5.17

若 $\vec{a}=(a_x,a_y)$, $\vec{b}=(b_x,b_y)$，则

$$S=|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\sin\varphi=|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\frac{a_xb_y-a_yb_x}{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|}=a_xb_y-a_yb_x$$

或

$$S=\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\tag{5.11}$$

(5.11) 式是由平行四边形的两个邻边向量计算它的面积的公式．这个公式不但给出了平行四边形面积的计算方法，而且给出了二阶行列式的一个几何意义．

由 (5.11) 式计算面积时，可得正值，也可得负值，这是因为 φ 取的是旋转角，当 $\varphi>0$ 时，$S>0$；当 $\varphi<0$, $S<0$；$\varphi=0$ 时 $S=0$. 为使得面积只取正值，公式 (5.11) 可改写为

$$S=|a_xb_y-a_yb_x|\tag{5.12}$$

若已知 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$, 则

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1),\qquad \overrightarrow{AC}=(x_3-x_1,y_3-y_1)$$

由公式 (5.11) 容易求得 $\triangle ABC$ 的面积

$$S_\triangle = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \tag{5.13}$$

或

$$S_\triangle = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

若面积只取正号，则

$$S_\triangle = \frac{1}{2}\left|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right|$$

例 5.23 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点的坐标分别为 $A(3,2)$, $B(-5,4)$, $C(-6,-3)$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

解： 因 $\overrightarrow{AB} = (-8, 2)$, $\overrightarrow{AC} = (-9, -5)$，由 (5.13) 式得

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -8 & 2 \\ -9 & -5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(40 + 18) = 29$$

练习

1. 已知

   (a) $\vec{a} = (3, -4)$, $\quad \vec{b} = (2, -7)$;

   (b) $\vec{a} = (-5, -6)$, $\quad \vec{b} = (4, -9)$.

   求由 $\vec{a}, \vec{b}$ 作邻边向量张成的平行四边形的面积.

2. 已知 $A(2,3)$, $B(-7,5)$, $C(3,-5)$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

3. 已知 $A(-10,-8)$, $B(9,-3)$, $C(2,11)$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

4. 说明 $\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x & b_y \\ a_x & a_y \end{vmatrix}$ 的几何意义.

5. 说明 $\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ a_x + b_x & a_y + b_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ x & b_y \end{vmatrix}$ 的几何意义.

习题 5.1

1. 在 X 轴上的点，它的纵坐标都等于什么？在 Y 轴上的点，它的横坐标都等于什么？

2. 在坐标平面上，已知边长为 a 的正方形 $ABCD$, A 与原点重合，$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ 的方向分别与 X 轴和 Y 轴的正方向一致，求四个顶点的坐标.

3. 分别求点 (a,b) 关于 X 轴、Y 轴的对称点的坐标.

4. 已知 $|\overrightarrow{OA}|=7$、$|\overrightarrow{OB}|=6$, 点 A 在第四象限，点 B 在第二象限，且 $\left\langle\overrightarrow{OA},\vec{e}_x\right\rangle=45^\circ$, $\left\langle\overrightarrow{OB},\vec{e}_y\right\rangle=30^\circ$. 求 A 点、B 点的坐标.

5. $\square$ $ABCD$ 中的 $\overrightarrow{AB}=8$, $\overrightarrow{AD}=5$, $\angle A=60^\circ$，如果取 A 作原点，X 轴正方向与 $\overrightarrow{AB}$ 同向，C 点所在的象限为第一象限，求它各顶点的坐标.

6. 已知

   (a) $A(-3,4)$,　$B(2,-5)$;　　(b) $A(2,-1)$,　$B(-4,3)$

   求 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标.

7. 已知 $|\vec{a}|=12$, $\langle\vec{e}_x,\vec{a}\rangle=30^\circ$, $\langle\vec{e}_y,\vec{a}\rangle=120^\circ$, 求 $\vec{a}$ 的坐标.

8. 建立坐标系 $[O:\ \vec{e}_x,\vec{e}_y]$, 画出下列各向量.

   (a) $\vec{e}_x=(1,0)$
   (b) $\vec{e}_y=(0,1)$
   (c) $\vec{a}=(-1,1)$
   (d) $\vec{b}=(0,2)$
   (e) $\vec{c}=(-2,0)$
   (f) $\vec{d}=(0,-2)$
   (g) $\vec{f}=(-1,-3)$

9. 问平行于 X 轴的向量与平行于 Y 轴的向量的坐标各有什么特点.

10. 证明 A,B,C 三点共线.

    (a) $A(2,1)$,　$B(0,5)$,　$C(4,-3)$
    (b) $A(-1,0)$,　$B(1,-2)$,　$C(3,-4)$

11. 已知 $\square$ $ABCD$, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ 相交于 P, 且 $A(-1,2)$, $B(3,0)$, $P(0,2)$, 求 B,C 两顶点的坐标.

12. 求证 $\vec{m}=(-2,3)$, $\vec{n}=(2,-3)$ 与 $\vec{a}=(3,2)$ 垂直并作图验证.

13. 已知 $\vec{a}=(2,-1)$, $\vec{b}=(-1,1)$, 求 $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\left(3\vec{a}-2\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+4\vec{b}\right)$.

14. 已知 $\vec{a}=(1,2)$, $\vec{b}=(3,1)$. 在坐标平面上画出 $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{a}-3\vec{b}$.

15. 已知 $A(1,3)$, $B(2,-1)$, $C(4,k)$, 问 k 为何值时，$\triangle ABC$ 是等腰三角形.

16. 已知 $A(1,1)$, $B(2,-1)$. 如果 $\triangle ABC$ 是等边三角形，且 A,B,C 按逆时针顺序排列，求顶点 C 的坐标.

17. 已知 $|\vec{a}|=2$, $\vec{b}=(\sqrt{3},1)$, $\vec{a}$ 到 $\vec{b}$ 的旋转角为 60°, 求 $\vec{a}$ 的坐标.

18. 已知 $A(2,3)$, $B(-1,0)$, C 点在 $\overline{AB}$ 的垂直平分线上，且和 $\overline{AB}$ 的距离是 $\overline{AB}$ 长的一半，求 C 点的坐标.

19. 已知正方形 $ABCD$, $A(0,-1)$, $B(-2,1)$, A、B、C、D 四点

    (a) 按顺时针顺序排列；　　(b) 按逆时针顺序排列.

    求 C 点的坐标.

20. 已知正六边形 $ABCDEF$, A、B、C、D、E、F 成逆时针方向排列，$A(1,1)$, $B(-2,3)$, 求顶点 C、D、E、F 的坐标.

21. 计算由下列各对向量张成的平行四边形的面积.

    (a) $\vec{a}=(3,-2)$, $\vec{b}=(5,1)$
    (b) $\vec{a}=(1,2)$, $\vec{b}=(-1,2)$
    (c) $\vec{a}=(-2,3)$, $\vec{b}=(-3,4)$

第二节 直线方程

一个关于 x、y 的二元方程总可写为

$$F(x,y)=0 \tag{5.14}$$

的形式. 例如 $x+y-3=0$, $y-x^2=0$, $x^2+2xy-y^2-3=0$ 等. 设满足方程 (5.14) 的所有实数偶 (x,y) 的集合用 A 表示，则 A 可描述为

$$A=\{(x,y)|F(x,y)=0\}$$

对 A 中的每一个有序实数偶 (x,y), 在坐标平面上，唯一确定了一个点 $P(x,y)$. 这样，A 中的所有元素就对应着平面上的一个点集 B. B 可描述为

$$B=\{P(x,y)|F(x,y)=0\}$$

点集 B 叫做方程 $F(x,y)=0$ 的图象或轨迹，而 $F(x,y)=0$ 又叫做轨迹方程．例如：方程 $y-x=0$ 的所有解集

$$\{(x,y)|y-x=0\}$$

对应着坐标平面上点的轨迹

$$\{P(x,y)|y-x=0\}$$

是第 1、第 3 象限的角平分线．方程 $y-x^2=0$ 的解集

$$\{(x,y)|y-x^2=0\}$$

所对应的点轨迹

$$\{P(x,y)|y-x^2=0\}$$

是坐标平面上一条抛物线.

如果我们要确定某个点集是某个二元方程 $F(x,y)=0$ 的轨迹，或方程 $F(x,y)=0$ 是某个点集的方程，显然必须证明以下两条.

1. $(x,y)\in A \quad\Rightarrow\quad P(x,y)\in B$

2. $P(x,y)\in B \quad\Rightarrow\quad (x,y)\in A$

第一条保证满足方程 $F(x,y)=0$ 的实数偶所对应的点一定在轨迹 B 上，第二条保证在轨迹 B 上的点的坐标一定满足方程 $F(x,y)=0$.

设 $A=\{P(x,y)|F(x,y)=0\}$, $B=\{P(x,y)|G(x,y)=0\}$. A,B 是两个轨迹．由定义可知，求 $A\cap B$, 即求 A 与 B 的交集，与求联立方程

$$\begin{cases}F(x,y)=0\\ G(x,y)=0\end{cases}$$

的解集，在解析几何中是同一件事.

这一节我们首先研究直线方程.

一、直线的各种方程

（一）点法向式

已知 $P_0(x_0, y_0)$, $\vec{n} = (a, b)$，且 $\vec{n} \neq \vec{0}$ 过 P_0 作直线 $\ell \perp \vec{n}$. 求 ℓ 的方程（图 5.18）.

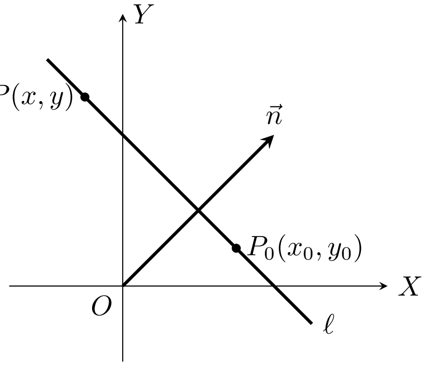


图 5.18

设 $P(x, y)$ 是一个动点，则 $P \in \ell$ 的充要条件是

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

也可写为

$$\vec{n} \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}) = 0$$

用坐标表示，上述向量方程变为

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \tag{5.15}$$

或

$$ax + by + c = 0$$

其中 $c = -(ax_0 + by_0)$. (5.15) 式是通过点 $P_0(x_0, y_0)$ 且与已知向量 $\vec{n}$ 垂直的直线方程，$\vec{n}$ 叫做直线 ℓ 的**法向量**. 通常 (5.15) 式称为直线的**点法向式方程**.

特殊情况：当 $\vec{n} \mathbin{//} \vec{e}_x$ 时，$a \neq 0$, $b = 0$, 直线 ℓ 垂直于 X 轴（图 5.19），方程 (5.15) 变为

$$x - x_0 = 0$$

即：$x = x_0$

当 $\vec{n} \mathbin{//} \vec{e}_y$ 时，$a = 0$, $b \neq 0$, 直线 ℓ 垂直于 Y 轴（图 5.20），方程 (5.15) 变为

$$y = y_0$$

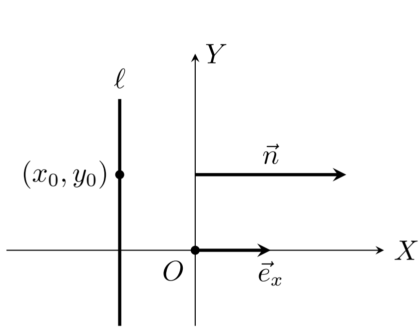


图 5.19

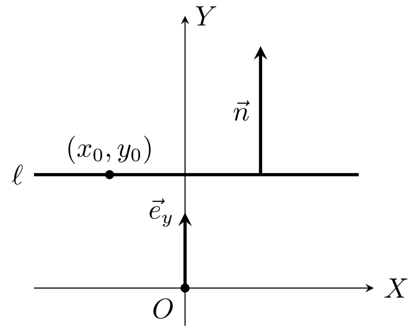


图 5.20

例如，通过 $(2,1)$ 且垂直于 X 轴的方程是 $x=2$, 通过 $(3,4)$ 且垂直于 Y 轴的方程是 $y=4$. 显然 X 轴的方程是 $y=0$, Y 轴的方程是 $x=0$.

例 5.24 求通过点 $P_0(3,2)$, 且垂直于 $\vec{n}(3,-4)$ 的直线方程式.

解：由点法向式方程有

$$3(x-3)+(-4)(y-2)=0$$

整理得

$$3x-4y-1=0$$

例 5.25 已知 $P_1(-1,2)$, $P_2(3,4)$, $P_3(-2,5)$. 求通过点 P_1 且垂直于直线 P_2P_3 的直线方程.

解：因为 $\overrightarrow{P_2P_3}=(-5,1)$, 所以通过点 $P_1(-1,2)$ 且垂直于 $\overrightarrow{P_2P_3}$ 的直线方程为

$$-5\cdot(x+1)+1\cdot(y-2)=0$$

整理得

$$5x-y+7=0$$

（二）点方向式

已知点 $P_0(x_0,y_0)$ 和 $\vec{\mu}=(a,b)$, 且 $a\neq 0, \vec{b}\neq 0$（即 $\vec{\mu}$ 和两条坐标轴都不平行），过 P_0 作直线 $\ell \mathbin{/\!/} \vec{\mu}$, 求直线 ℓ 的方程（图 5.21）.

设 $P(x,y)$ 是一动点，则 $P\in\ell$ 的充要条件是 $\overrightarrow{P_0P} \mathbin{/\!/} \vec{\mu}$.

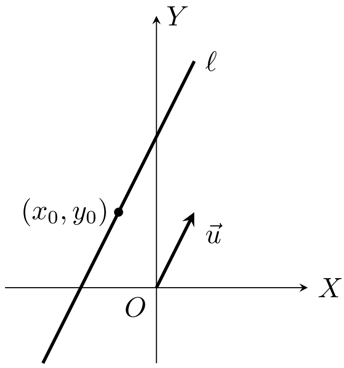


图 5.21

我们知道 $\overrightarrow{P_0P}$ 与 $\vec{\mu}$ 平行的充要条件是它们的坐标成比例，即

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b} \tag{5.16}$$

因此 (5.16) 式也是动点 $P(x,y)$ 在直线 ℓ 上的充要条件. 所以 (5.16) 式是直线 ℓ 的方程. 通常我们把 (5.16) 叫做直线 ℓ 的**点方向式方程**，$\vec{\mu}$ 叫做直线 ℓ 的**方向向量**.

例 5.26 求通过点 $P_0(-2,3)$ 且平行于 $\vec{\mu}=(2,3)$ 的直线 ℓ 的方程.

解： 由点方向式方程可得 ℓ 的方程为

$$\frac{x-(-2)}{2}=\frac{y-3}{3}$$

整理得

$$3x-2y+12=0$$

例 5.27 已知点 $A(4,6)$, $B(-3,2)$, $C(4,-5)$, 求通过点 A 且平行于直线 BC 的直线方程.

解： 因 $\overrightarrow{BC}=(4-(-3),-5-2)=(7,-7)$, 所以所求直线方程为

$$\frac{x-4}{7}=\frac{y-6}{-7}$$

整理得

$$x+y-10=0$$

（三）两点式

已知两个不同的点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, 求直线 P_1P_2 的方程（图 5.22）.

因为

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

$\overrightarrow{P_1P_2}$ 取作所求直线的方向向量，据点方向式方程可得直线 P_1P_2 的方程为

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \tag{5.17}$$

(5.17) 式通常叫做**直线方程的两点式**.

例 5.28 求通过 $P_1(-4, 2)$, $P_2(1, -3)$ 的直线方程.

解： 由于 $\overrightarrow{P_1P_2} = (1 - (-4), -3 - 2) = (5, -5)$, 所以直线 P_1P_2 的方程为

$$\frac{x - (-4)}{5} = \frac{y - 2}{-5}$$

整理得

$$x + y + 2 = 0$$

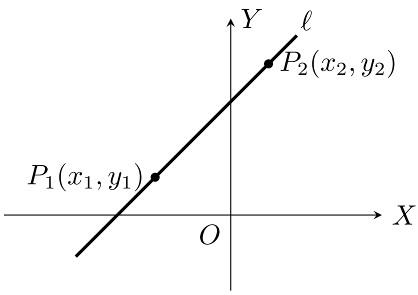


图 5.22

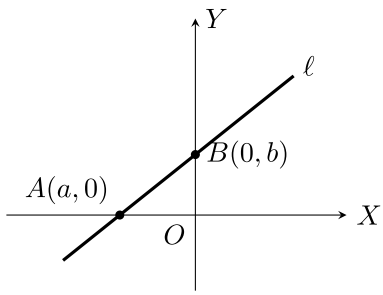


图 5.23

例 5.29 已知直线 ℓ 与 X 轴、Y 轴分别相交于点 $A(a, 0)$、点 $B(0, b)$, 且假定 $a \neq 0$, $b \neq 0$, 求直线 ℓ 的方程（图 5.23）.

解： 因 $\overrightarrow{AB} = (-a, b)$, 由两点式可得

$$\frac{x - a}{-a} = \frac{y - b}{b}$$

整理得

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \tag{5.18}$$

由例 5.29 求得的方程 (5.18) 通常叫做直线的**截距式**，a 叫做 ℓ 在 X 轴上的截距，b 叫做 ℓ 在 Y 轴上的截距.

练习

1. 求通过 $P_0(3,-2)$ 且垂直于 $\vec{\mu}=(-4,5)$ 的直线方程.
2. 已知 $A(-5,6)$, $B(-1,-4)$, $C(3,2)$, 求 $\triangle ABC$ 的三条高线方程.
3. 已知 $A(-3,2)$, $B(1,-4)$. 求 $\overline{AB}$ 的垂直平分线的方程.
4. 已知 $|\overrightarrow{OM}|=3$, $\overrightarrow{OM}$ 的方向角是 $30°$, 直线 ℓ 垂直 $\overrightarrow{OM}$ 于 M 点，试求 ℓ 的方程.
5. 求通过 $P_0(3,-5)$ 且平行于 $\vec{\mu}=(1,2)$ 的直线的方程.
6. 已知 $\triangle ABC$, 且 $A(3,-4)$, $B(-6,-7)$, $C(-4,8)$. 分别过 A、B、C 三点作对边的平行线 a、b、c. 求这三条直线的方程.
7. 求通过 $A(-3,2)$, $B(4,-7)$ 的直线方程.
8. 已知 $P_1(-1,3)$, $P_2(3,-4)$, $P_3(-1,-2)$，某点 A 满足 $\overrightarrow{P_2A}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{P_2P_3}$. 求直线 P_1A 的方程.
9. 直线 ℓ 与 X 轴相交于 $(-1,0)$, 与 Y 轴相交于 $(0,3)$. 求直线 ℓ 的方程.

二、直线与二元一次方程

在上一小节中，我们看到直线方程都是二元一次方程. 但反过来要问是否每一个二元一次方程的图象都是直线呢？答案是肯定的.

定理

每个二元一次方程所确定的图象都是一条直线.

证明： 任给一个二元一次方程 $ax+by+c=0$, 其中 a、b 不同时为零，设 (x_0,y_0) 是方程的一个解，于是

$$ax_0+by_0+c=0$$

两式相减可得

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$$

建立一个直角坐标系 $[O: \vec{e}_x, \vec{e}_y]$, 取 $P_0(x_0, y_0)$ 和 $\vec{n}=(a, b)$, 显然上述方程就是通过 P_0 且垂直于 $\vec{n}$ 的直线方程. 这就证明了每个二元一次方程都可确定一条直线.

推论 1

已知直线 ℓ: $ax+by+c=0$, 以 x、y 系数为坐标的向量 (a, b) 是直线 ℓ 的法向量.

推论 2

方程

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \tag{5.19}$$

$$a_2x+b_2y+c_2=0 \tag{5.20}$$

表示同一条直线的充要条件是存在一实数 λ，使

$$a_2=\lambda a_1, \qquad b_2=\lambda b_1, \qquad c_2=\lambda c_1$$

证明： 必要性：如果 (5.19)、(5.20) 两式表示同一条直线，则对直线上任一点 (x_0, y_0) 有

$$a_1x_0+b_1y_0+c_1=0 \tag{5.21}$$

$$a_2x_0+b_2y_0+c_2=0 \tag{5.22}$$

(5.19) − (5.21), (5.20) − (5.22) 得

$$a_1(x-x_0)+b_1(y-y_0)=0$$

$$a_2(x-x_0)+b_2(y-y_0)=0$$

由于 (a_1, b_1), (a_2, b_2) 都是同一条直线的法向量，所以它们平行，即存在一实数 λ 使

$$a_2=\lambda a_1, \qquad b_2=\lambda b_1 \tag{5.23}$$

由 (5.21)、(5.22)、(5.23) 就可得到

$$c_2=\lambda c_1$$

充分性：设存在一实数 λ, 使 $a_2=\lambda a_1$, $b_2=\lambda b_1$, $c_2=\lambda c_1$, 则

$$a_2x+b_2y+c_2=\lambda(a_1x+b_1y+c_1)=0$$

显然，(5.19)、(5.20) 两式表示的是同一条直线.

显然，当 $t\neq 0$ 时，方程 $ax+by+c=0$ 与 $t(ax+by+c)=0$ 是同一条直线的方程．这也就是说，同一直线的方程之间可以相差一个非零的常数因子.

在解析几何中，有时我们要讨论一条有向直线 ℓ： $ax+by+c=0$. 通常我们根据直线 ℓ 的法向量 (a,b) 来规定直线 ℓ 的方向．方法是这样：**把法向量按顺时针旋转 90° 后的方向作为直线 ℓ 的方向**（图 5.24）.

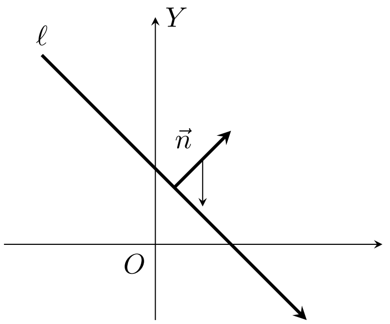


图 5.24

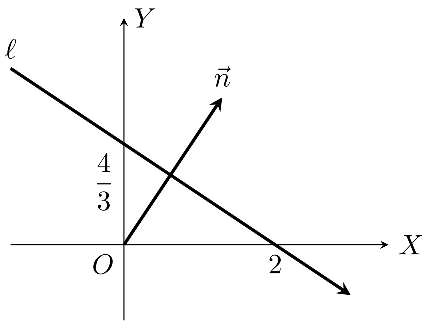


图 5.25

例 5.30　已知直线 ℓ： $2x+3y-4=0$ 在坐标平面上，出直线 ℓ 和它的法向量，并标出直线的方向.

解：如图 5.25 所示，$\vec{n}$ 是 ℓ 的法向量，箭头指出了直线 ℓ 的方向.

例 5.31　求通过点 $P_0(-2,5)$ 且平行于 ℓ： $4x-3y+9=0$ 的直线方程.

解：由题意，可取 ℓ 的法向量 $\vec{n}=(4,-3)$ 作为所求直线的法向量，由点法向式，可得所求的直线方程为

$$4(x+2)+(-3)(y-5)=0$$

整理得

$$4x-3y+23=0$$

例 5.32　求通过点 $P_0(3,-4)$ 且垂直于 ℓ： $3x+7y-6=0$ 的直线方程.

解：由题意，可取 ℓ 的法向量 $\vec{n}=(3,7)$ 作为所求直线的方向向量，由点方向式可得所求直线方程为

$$\frac{x-3}{3}=\frac{y+4}{7}$$

整理得

$$7x-3y-33=0$$

例 5.33 已知点 $P(2,1)$ 和直线 ℓ：$2x-3y+6=0$，且 $PM\perp\ell$ 于 M 点，求 M 点的坐标（图 5.26）.

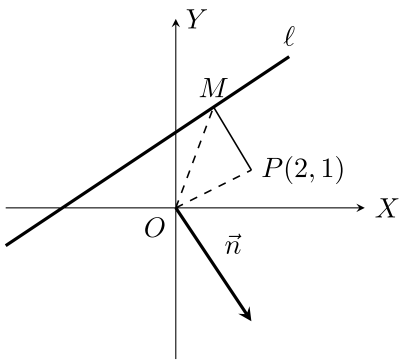


图 5.26

解：由于 $\vec{n}=(2,-3)$ 是直线 ℓ 的一个法向量，所以 $\vec{n}\parallel\overrightarrow{PM}$，于是存在一实数 t, 使

$$\overrightarrow{PM}=t\vec{n}$$

此即

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+t\vec{n}$$

设 $\overrightarrow{OM}=(x_0,y_0)$, 又知 $\overrightarrow{OP}=(2,1)$, $\vec{n}=(2,-3)$, 于是有

$$(x_0,y_0)=(2,1)+t(2,-3)=(2+2t,1-3t)$$

即

$$x_0=2+2t,\qquad y_0=1-3t$$

由于 $M_0\in\ell$, 所以代入 ℓ 的方程可得

$$2(2+2t)-3(1-3t)+6=0$$

解之得 $t=-\frac{7}{13}$. 所以可求得 M 的坐标是

$$x_0=2+2\left(\frac{7}{13}\right)=\frac{12}{13},\qquad y_0=1-3\left(-\frac{7}{13}\right)=\frac{34}{13}$$

即：$M\left(\frac{12}{13},\frac{34}{13}\right)$

练习

1. 求通过 $P_0(5,-2)$ 且平行于直线 $3x-y+1=0$ 的直线方程.
2. 求通过 $P_0(-2,1)$ 且垂直于直线 $3x-y+1=0$ 的直线方程.
3. 求通过点 $A(0,2)$ 且平行于 $\ell:\ 4x-3y+12=0$ 的直线方程.
4. 在坐标平面上作出如下各直线，画出它们的法向量，并标出直线的方向.
   (a) $\ell_1:\ 2x+y-3=0$
   (b) $\ell_2:\ 3x-4y+5=0$
   (c) $\ell_3:\ -x+y+2=0$
5. 求出直线 $\ell:\ 5x-3y+14=0$ 的所有单位法向量.
6. 已知 $\ell:\ 3x-4y+2=0$. 求 ℓ 的法向量，使它的系数向量为单位法向量且常数项为负数.
7. 已知点 $P(3,1)$, M 和直线 $\ell:\ x+y-2=0$, 且 $\overline{PM}\perp\ell$ 于 M 点，求 M 点的坐标，并求 P 点到 ℓ 的距离.
8. 在练习 7 中，求 P 点关于 ℓ 的轴对称点 P' 的坐标.

三、直线的斜率

已知两个不同的点 $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$, 则直线 P_1P_2 的方程可写为:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

这个方程又可改写为如下形式

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

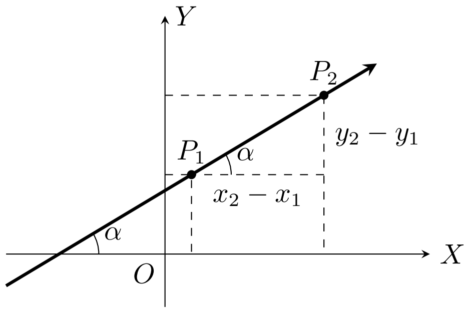


图 5.27

由相似形定理，我们容易证明，不论 P_1、P_2 在直线上的位置如何（图 5.27），上面方程中 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ 始终是个定值．容易看出，如果我们设 ℓ 向上的方向与 X 轴正向的夹角为 α （$0 \le \alpha \le \pi$），则

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \tan\alpha$$

定值 $\tan\alpha$ 叫做直线 ℓ 的**斜率**，α 叫做直线的**倾角**．令 $\tan\alpha = k$，则两点式方程就可写为

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

上述方程叫做直线 ℓ 的**点斜式**．这个方程还可变形为

$$y = kx + m$$

其中 $m = y_1 - kx_1$. 令 $x = 0$, 则 $y = m$, 这就是说直线：$y = kx + m$ 与 Y 轴相交于点 $(0, m)$. 因此，m 为直线在 Y 轴上的截距，上式通常称做直线的**斜截式**.

已知直线 ℓ： $ax + by + c = 0$, 令 (x_1, y_1), (x_2, y_2) 是 ℓ 上任意两个不同的点，则

$$ax_1 + by_1 + c = 0 \tag{5.24}$$

$$ax_2 + by_2 + c = 0 \tag{5.25}$$

(5.24) − (5.25) 得：

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0$$

当 $b \neq 0$ 可得

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = -\frac{a}{b}$$

上式说明，**由方程 $ax + by + c = 0$ 解出 y, 则 x 的系数就是直线 ℓ 的斜率 k, 常数项即为 ℓ 在 Y 轴上的截距.**

例 5.34　求直线 ℓ：$4x-3y+7=0$ 的斜率及在 Y 轴上的截距.

解：由已知方程解出 y, 得

$$y=\frac{4}{3}x+\frac{7}{3}$$

所以 ℓ 的斜率是 $\frac{4}{3}$，在 Y 轴上的截距是 $\frac{7}{3}$.

例 5.35　已知直线上的一点 $P_1(2,3)$, 且倾角 $\alpha=\frac{\pi}{3}$, 求此直线的方程.

解：由于 $k=\tan\alpha=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$, 因此所求的直线方程为：

$$y-3=\sqrt{3}(x-2)$$

练习

1. 求出下列方程所表示直线的斜率.

   (a) $3x+4y-12=0$

   (b) $x+y-2=0$

   (c) $4x-5y+12=0$

   (d) $x-y+3=0$

2. 求满足下列条件的方程.

   (a) 通过点 $A(1,2)$ 且 $k=5$

   (b) 通过点 $P(-1,2)$ 且 $k=2$

   (c) 通过原点 O 且斜率为 h

   (d) $k=3$、Y 轴上的截距是 5

   (e) $k=4$、X 轴上的截距是 -3

   (f) 已知 ℓ：$x-\sqrt{3}y=0$, 过原点且 k 是直线 ℓ 的斜率的 2 倍.

3. 求下列各直线的方程.

   (a) 通过点 $P(3,2)$, 且 $\alpha=45°$

   (b) 通过点 $P(-1,2)$, 且 $\alpha=120°$

   (c) 通过点 $P(1,-1)$, 且 $\alpha=0°$

四、直线的法线式及其应用

已知直线 ℓ(图 5.28), 从原点 O 作 ℓ 的垂线,其垂足为 M, 设 $\vec{e}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 为 $\overrightarrow{OM}$ 的单位向量，再设原点 O 到 ℓ 的距离为 p, 则

$$\overrightarrow{OM}=p\vec{e}=(p\cos\alpha,p\sin\alpha)$$

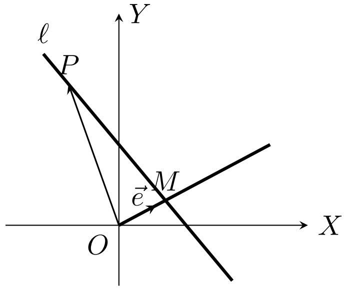


图 5.28

M 点的坐标为 $(p\cos\alpha,p\sin\alpha)$. 因此，由直线方程的点法向式可得 ℓ 的方程为

$$(x-p\cos\alpha)\cos\alpha+(y-p\sin\alpha)\sin\alpha=0$$

即

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$$

这就是与原点距离为 p 且垂直于向量 $\vec{e}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 的直线方程. 通常我们把这种形式的方程叫做 ℓ 的**法线式**. 一条直线的法线式是唯一确定的. 这种方程的主要特点是 x、y 的系数向量是单位法向量，且常数项的值为负数.

如果给定方程 $ax+by+c=0$, 我们可把它化为法线式

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$$

由于它们之间仅相差一个常数因子 λ, 即

$$\cos\alpha=\lambda a,\qquad \sin\alpha=\lambda b,\qquad -p=\lambda c$$

所以

$$(\lambda a)^2+(\lambda b)^2=1\quad\Rightarrow\quad\lambda=\frac{1}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

这时方程可化为

$$\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}x+\frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}y+\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}=0$$

由于法线式方程要求常数项一定是个负数，所以只要取根号前的符号使 $\dfrac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} < 0$ 即可．因此，当 $c > 0$ 时根号前负号；当 $c < 0$ 时根号前取正号．

在法线式方程中，当 $p = 0$ 时，直线通过原点，这时一般式方程中 $c = 0$，于是方程变为

$$ax + by = 0$$

在这情形下，我们如何选取因子 $\dfrac{1}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ 的符号呢？我们约定符号按如下规则选取：

选取符号使直线的单位法向量 $\left(\dfrac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}, \dfrac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ 的方向总是指向第 1、第 2 象限，其中 Y 轴的单位法向量取 $\vec{e}_x = (1, 0)$.

例 5.36 化以下直线方程为法线式.

1. $3x + 4y - 7 = 0$
2. $4x - 3y = 0$

解：

1. 取 $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{3^2+4^2}} = \dfrac{1}{5}$, 则已知方程的法线式为
$$\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{7}{5} = 0$$
2. 取直线的单位法向量 $\left(\dfrac{4}{\pm\sqrt{3^2+4^2}}, \dfrac{-3}{\pm\sqrt{3^2+4^2}}\right)$，使它的方向指向第 1、第 2 象限，于是根号前需取负号．直线的法线式为
$$-\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y = 0$$

下面我们来研究法线式左边二元一次多项式的几何意义.

已知直线 ℓ 的法线式为

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$$

当点 $P(x, y)$ 在直线上，显然它的坐标满足 ℓ 的法线式方程.

当点 $P(x, y)$ 不在直线 ℓ 上，我们来看多项式 $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p$ 的几何意义是什么.

作 ℓ 的法线 OM, M 为垂足（图 5.29），再过点 P 作 OM 的垂线，垂足为点 N. 因为 $\overrightarrow{OM}$ 的单位向量 $\vec{e} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, $\overrightarrow{OP} = (x, y)$, 所以

$$\begin{aligned} x\cos\alpha + y\sin\alpha - p &= \overrightarrow{OP}\cdot\vec{e} - p \\ &= \overrightarrow{OP}\cdot\vec{e} - \overrightarrow{OM}\cdot\vec{e} = \overrightarrow{MP}\cdot\vec{e} = MN \end{aligned}$$

MN 可能取负值，但不论取正值还是取负值，它的绝对值是 P 点到直线 ℓ 的距离．如果用 d 表示 P 到 ℓ 的距离，则

$$d = |x\cos\alpha + y\sin\alpha - p|$$

这就是说，平面上任一点 $P(x,y)$ 的坐标代入已知直线的法线式的左边的多项式的绝对值就是 P 点到已知直线的距离．

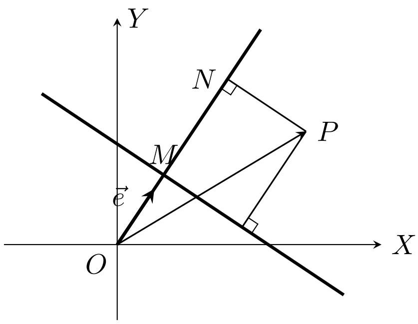


图 5.29

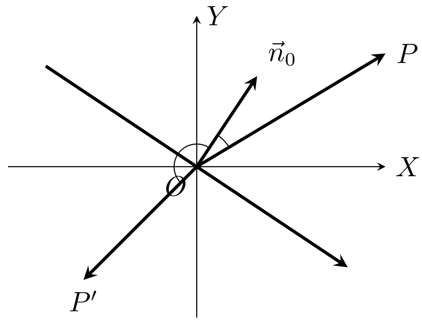


图 5.30

如果 $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p$ 不取绝对值，则求出的值是个带符号的数

$$\delta = x\cos\alpha + y\sin\alpha - p$$

由图 5.29 容易看出，当 P 点与原点位于直线的异侧，则 $\delta > 0$, 当 P 点与原点位于 ℓ 的同侧，则 $\delta < 0$. 若 ℓ 通过原点（图 5.30），则 $p = 0$. 这时 $\delta = \overrightarrow{OP}\cdot\vec{n}_0$，$\vec{n}_0$ 为直线法线式的系数向量，于是 P 点在法线式方程的系数向量所指向的那一侧 δ 为正；反之 δ 为负．

如果已知直线 ℓ：$ax + by + c = 0$. 那么它的法线式为

$$\frac{ax+by+c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} = 0$$

根号前符号的选取按上述规定．所以 P 点到 ℓ 的距离

$$d = \left|\frac{ax+by+c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}\right| = \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

例 5.37 求点 $P(4,3)$ 到直线 ℓ：$4x + 3y + 10 = 0$ 的距离．

解： 直线 ℓ 的法线式为

$$\frac{4x+3y+10}{-\sqrt{3^2+4^2}} = 0$$

即为

$$-\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - 2 = 0$$

所以

$$d=\left|-\frac{4}{5}\times 4+\left(-\frac{3}{5}\right)\times 3-2\right|=7$$

例 5.38 求点 $P(3,1)$ 到直线 $\ell:\ x-y+3=0$ 的距离.

解:

$$d=\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|3-1+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

练习

1. 求下列各点到给出的直线的距离 d.

   (a) $P(-2,3)$, $\ell:\ 8x+15y-24=0$

   (b) $P(-1,7)$, $\ell:\ 6x-8y+5=0$

   (c) $P(2,3)$, $\ell:\ -3x+7y-1=0$

2. 求下列各点到给出直线 ℓ 的距离，并判断 P 点与原点 O 是在 ℓ 的同侧还是不同侧.

   (a) $P(3,2)$, $\ell:\ x-y+2=0$

   (b) $P(-1,4)$, $\ell:\ x-y+2=0$

3. 已知动点 $P(x,y)$ 到直线 $5x+2y+17=0$ 的距离是 3, 求动点 P 的轨迹方程.

4. 求证两条平行线 $ax+by+c_1=0$, $ax+by+c_2=0$ 的距离是

$$d=\frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

   并求 $4x-3y-1=0$ 到 $4x-3y+5=0$ 的距离.

五、两条直线的位置关系

如果已知两条直线

$$\ell_1: a_1x+b_1y+c_1=0$$

$$\ell_2: a_2x+b_2y+c_2=0$$

那么 $\vec{n}_1=(a_1,b_1)$, $\vec{n}_2=(a_2,b_2)$ 分别是 ℓ_1, ℓ_2 的法向量.

我们由

$$\begin{aligned}\ell_1 \,/\!/\, \ell_2 \quad &\Longleftrightarrow \quad \vec{n}_1 \,/\!/\, \vec{n}_2\\ \ell_1\perp\ell_2 \quad &\Longleftrightarrow \quad \vec{n}_1\perp\vec{n}_2\end{aligned}$$

就可得

$$\begin{aligned}\ell_1 \,/\!/\, \ell_2 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\\ \ell_1\perp\ell_2 \quad &\Longleftrightarrow \quad a_1a_2+b_1b_2=0\end{aligned}$$

如果两条直线的方程给出的是斜截式，即

$$\begin{aligned}\ell_1 : y=k_1x+b_1\\ \ell_2 : y=k_2x+b_2\end{aligned}$$

那么我们由上面垂直与平行的充要条件就可得到：

$$\begin{aligned}\ell_1 \,/\!/\, \ell_2 \quad &\Longleftrightarrow \quad k_1=k_2\\ \ell_1\perp\ell_2 \quad &\Longleftrightarrow \quad k_1\cdot k_2=-1\end{aligned}$$

下面我们来讨论如何求两条直线的**交点**和**交角**.

求 ℓ_1、ℓ_2 的交点问题就是求二元一次方程组

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\ a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}$$

的解的问题.

给定两条直线（图 5.31）：

$$\begin{aligned}\ell_1 : a_1x+b_1y+c_1=0\\ \ell_2 : a_2x+b_2y+c_2=0\end{aligned}$$

从 ℓ_1 旋转到 ℓ_2 所经过的绝对值不超过 π 的角有两个，如图 5.31 所示的 θ_1、θ_2. 故

$$\theta_1-\theta_2=\pm\pi, \qquad \tan\theta_1=\tan(\theta_2\pm\pi)=\tan\theta_2$$

如果取 ℓ_1 的法向量 $\vec{n}_1=(a_1,b_1)$, ℓ_2 的法向量 $\vec{n}_2=(a_2,b_2)$, 则从 $\vec{n}_1$ 方向转到 $\vec{n}_2$ 方向的绝对值小于 π 的角 θ 等于 θ_1 或 θ_2, 因此有

$$\tan\theta_1=\tan\theta_2=\tan\theta$$

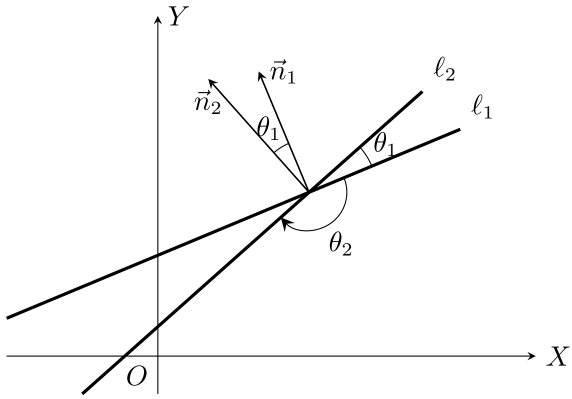


图 5.31

但

$$\tan\theta = \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1a_2 + b_1b_2}$$

所以

$$\tan\theta_1 = \tan\theta_2 = \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1a_2 + b_1b_2}$$

上式就是从 ℓ_1 到 ℓ_2 的旋转角的正切的计算公式. 从旋转角的正切我们就可算出两条直线旋转角，通常我们把两条直线的旋转角中绝对值较小的那个角叫做这**两条直线的夹角**.

如果给出的两条直线为斜截式. 即

$$\ell_1 : y = k_1x + b_1$$

$$\ell_2 : y = k_2x + b_2$$

我们取 ℓ_1 的法向量为 $\vec{n}_1 = (k_1, -1)$, ℓ_2 的法向量 $\vec{n}_2 = (k_2, -1)$, 那么由上述求旋转角的正切的计算公式就变为

$$\tan\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}, \quad (1 + k_1k_2 \neq 0)$$

例 5.39 求 ℓ_1 : $2x - y - 3 = 0$ 到 ℓ_2 : $3x + y - 2 = 0$ 的旋转角.

解：由于

$$\tan\theta = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{2 \times 3 + (-1) \times 1} = \frac{5}{5} = 1$$

所以：$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ 或 $-\dfrac{3}{4}\pi$.

例 5.40 已知直线 $\ell_1: y=-3x+2$, $\ell_2: y=2x-3$, 求 ℓ_1 到 ℓ_2 的旋转角 θ.

解： 由于

$$\tan\theta=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}=\frac{2-(-3)}{1+2\times(-3)}=\frac{5}{-5}=-1$$

所以：$\theta=\frac{3}{4}\pi$ 或 $-\frac{\pi}{4}$.

练习

1. 求证 $\ell_1: x-y+2=0$ 与 $\ell_2: 3x-3y+7=0$ 平行，并作图验证.
2. 方程 $2x+y+k=0$, 当 k 取各种不同的数值时，它们所表示的直线有什么关系，并作出 $k=0,1,2$ 的三条直线.
3. 求证方程 $y=3x+b$, 当 b 取各种不同的值时，它们所表示的直线互相平行，作出 $k=0,1,2$ 的直线.
4. 求证直线 $\ell_1: x-5y+1=0$ 与直线 $\ell_2: 5x+y-8=0$ 互相垂直.
5. 求出直线 $a_1x+b_1y+c_1=0$ 与 $\frac{x-x_0}{a_2}=\frac{y-y_0}{b_2}$ 垂直的条件.
6. 下面直线中，哪两条互相垂直？
   (a) $2x-3y=0$,　　$2x+3y=0$
   (b) $3x+2y=0$,　　$3x-2y=0$
7. 求直线 $\ell_1: x-y+2=0$ 与 $\ell_2: x+y-4=0$ 的交点坐标，并绘图验证.
8. 求直线 $\ell_1: y=2x+6$ 与直线 $\ell_2: y=\frac{1}{3}x-4$ 的旋转角.
9. 求直线 $\ell_1: 2x-3y+1=0$ 与直线 $\ell_2: 6x-4y-7=0$ 之间的夹角.
10. 求通过原点且与直线 $y=\frac{1}{2}x$ 夹角为 45° 的直线方程.
11. 求两条直线 $\ell_1: x+y-2=0$ 与 $\ell_2: 7x-y+4=0$ 的夹角.

六、直线束

定理

一条直线通过两条相交直线 $a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$ 的交点的充要条件是存在两个不全为零的常数 λ_1、λ_2 使这条直线方程为

$$\lambda_1(a_1x+b_1y+c_1)+\lambda_2(a_2x+b_2y+c_2)=0 \tag{5.26}$$

证明： 充分性：设 (x_0,y_0) 是已知两条直线的交点．则

$$a_1x_0+b_1y_0+c_1=0, \qquad a_2x_0+b_2y_0+c_2=0$$

显然 (x_0,y_0) 满足方程 (5.26), 这就是说,方程 (5.26) 表示的直线通过点 (x_0,y_0).

必要性：如果一条直线通过点 (x_0,y_0), 又通过另一点 (x_1,y_1) 只要取

$$\lambda_1=-(a_2x_1+b_2y_1+c_2), \qquad \lambda_2=a_1x_1+b_1y_1+c_1$$

这条直线方程就可写为

$$-(a_2x_1+b_2y_1+c_2)(a_1x+b_1y+c_1)+(a_1x_1+b_1y_1+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)=0$$

因 (x_0,y_0), (x_1,y_1) 两点不可能同时是两条已知直线的交点．所以 λ_1 和 λ_2 不能同时为零．

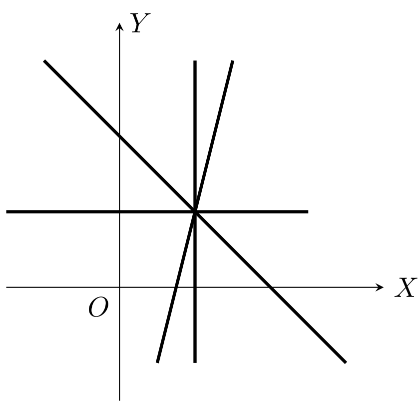


图 5.32

例 5.41 求通过直线 $3x-2y-6=0$ 与 $x+y-5=0$ 的交点与点 $(1,2)$ 的直线方程．

解：通过已知两条直线的交点的直线束方程可写为

$$\lambda_1(3x-2y-6)+\lambda_2(x+y-5)=0$$

这条直线又通过点 $(1,2)$, 所以

$$\lambda_1(3\times1-2\times2-6)+\lambda_2(1+2-5)=0$$

由此得

$$\lambda_1=-\frac{7}{2}\lambda_2$$

所以，所求的直线方程为

$$\frac{7}{2}\lambda_2(3x-2y-6)+\lambda_2(x+y-5)=0$$

化简，得

$$19x-16y+32=0$$

例 5.42 求经过 $3x+2y-3=0$ 与 $2x-y+5=0$ 的交点且与直线 $x+y-3=0$ 垂直的直线方程.

解：经过已知两条直线交点的直线束方程可写为

$$\lambda_1(3x+2y-3)+\lambda_2(2x-y+5)=0$$

即

$$(3\lambda_1+2\lambda_2)x+(2\lambda_1-\lambda_2)y-3\lambda_1+5\lambda_2=0$$

由于所求直线与直线 $x+y-3=0$ 垂直，所以

$$1\cdot(3\lambda_1+2\lambda_2)+1\cdot(2\lambda_1-\lambda_2)=0$$

由此得

$$\lambda_2=-5\lambda_1$$

因此所求直线方程为

$$\lambda_1(3x+2y-3)-5\lambda_1(2x-y+5)=0$$

整理得

$$x-y+4=0$$

练习

1. 求经过 $x+y-7=0$, $x-y-5=0$ 的交点和点 $P(5,3)$ 的直线方程.

2. 求经过 $2x-3y+2=0$, $3x-4y-2=0$ 的交点，且平行于 $5x-2y+3=0$ 的直线方程.

3. 求经过 $5x-3y+7=0$, $3x-2y-5=0$ 的交点，且与 $4x-3y+2=0$ 垂直的直线方程.

4. 三条直线 $\ell_1: a_1x+b_1y+c_1=0$, $\ell_2: a_2x+b_2y+c_2=0$, $\ell_3: a_3x+b_3y+c_3=0$ 共点的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

七、二元一次不等式表示的区域

我们知道，含有两个未知数，并且未知数的次数都是一次的不等式叫做**二元一次不等式**. 它的一般形式为

$$ax+by+c>0 \quad 或 \quad ax+by+c<0 \tag{5.27}$$

例如 $3x+y-1>0$, $y>2x-3$ 等都是二元一次不等式.

使不等式 (5.27) 成立的未知数的值，叫做不等式的解. 以不等式的解为坐标的所有点构成的集合叫做**不等式表示的区域**.

下面我们来研究，如何根据二元一次不等式画出它所表示的区域.

直线 $ax+by+c=0$ 把坐标平面分为两个半平面（不包括这条直线本身），我们把法向量 $\vec{n}=(a,b)$ 的方向所指向的那一侧叫做**正半平面**，简称正侧；另一侧叫做 **负半平面**，简称负侧（图 5.33）.

如果 $P_0(x_0,y_0)$ 是直线 $ax+by+c=0$ 上一点，则 $ax_0+by_0+c=0$, $c=-(ax_0+by_0)$, 于是

$$ax+by+c=ax+by-(ax_0+by_0)=a(x-x_0)+b(y-y_0)=\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_0P}$$

若 $P(x,y)$ 位于正半平面，则 $\vec{n}$ 与 $\overrightarrow{P_0P}$ 的夹角为锐角，即 $\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_0P}>0$. 这时 $ax+by+c>0$; 若 $P(x,y)$ 位于负半平面，则 $\vec{n}$ 与 $\overrightarrow{P_0P}$ 的夹角为钝角，即 $\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_0P}<0$. 这时 $ax+by+c<0$（图 5.33）.

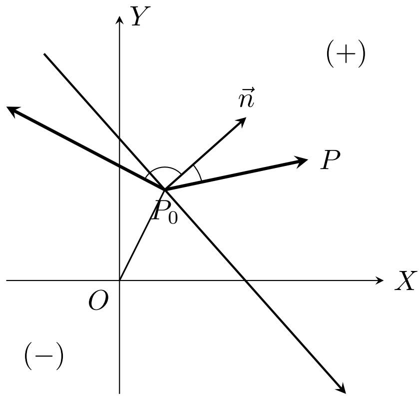


图 5.33

根据上面分析，我们要画出 $ax+by+c<0$ 或 $ax+by+c>0$ 所表示的区域，只要先画出直线 ℓ：$ax+by+c=0$, 然后就可确定 $ax+by+c>0$ 表示的区域是哪个半平面，$ax+by+c<0$ 表示的区域便是另一个半平面.

例 5.43 画出不等式 $2x-y+1>0$ 表示的区域.

解：在坐标平面上，画直线 $2x-y+1=0$（图 5.34），这时直线的法向量 $\vec{n}=(2,-1)$, 由于 $\vec{n}$ 指向的那一侧为正半平面，不等式 $2x-y+1>0$ 表示的区域是正半平面，如图 5.34 阴影所示.

由于二元一次式 $ax+by+c$ 在直线 $ax+by+c=0$ 同一侧的半平面内完全同号，所以在决定二元一次不等式所表示的区域时，只需取直线 $ax+by+c=0$ 一侧的某一个点，将它的坐标代入已知的不等式，如果不等式成立，那么这一点所在的半平面就是不等式表示的区域，如果不等式不成立，那么直线的另一侧就是不等式表示的区域，显然，对不等式 $ax+by+c>0$ 或 $ax+by+c<0$, 当 $c\neq 0$ 时，取原点 $O(0,0)$ 去确定它们所表示的区域最为方便.

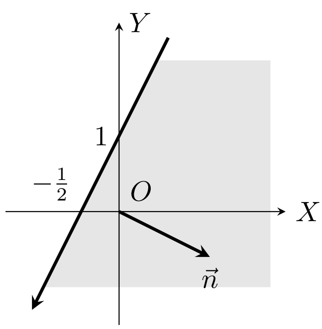


图 5.34

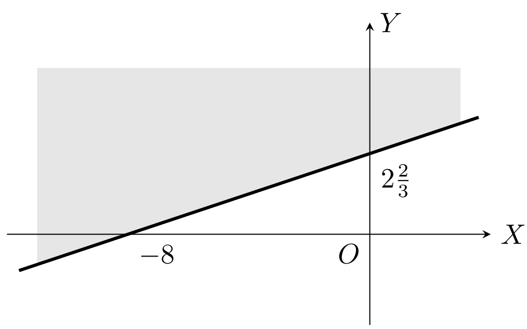


图 5.35

例 5.44 画出不等式 $x-3y+8<0$ 表示的区域.

解: 将 $(0,0)$ 代入已知不等式,得 $8>0$, 原不等式不成立,所以不等式 $x-3y+8<0$ 表示的区域是直线 $x-3y+8=0$ 不包含原点的那个半平面，如图 5.35 阴影所示.

例 5.45 画出二元一次不等式组 $\begin{cases} 3x+4y-2<0 \\ 2x+y+2>0 \end{cases}$ 表示的区域.

解: 作直线 $\ell_1:\ 3x+4y-2=0$, $\ell_2:\ 2x+y+2=0$. 分别用阴影线画出不等式 $3x+4y-2<0$ 和 $2x+y+2>0$ 所表示的区域，则已知不等式组所表示的区域是上面两个区域的交集，如图 5.36 所示双阴影区域（不包括这两条直线）.

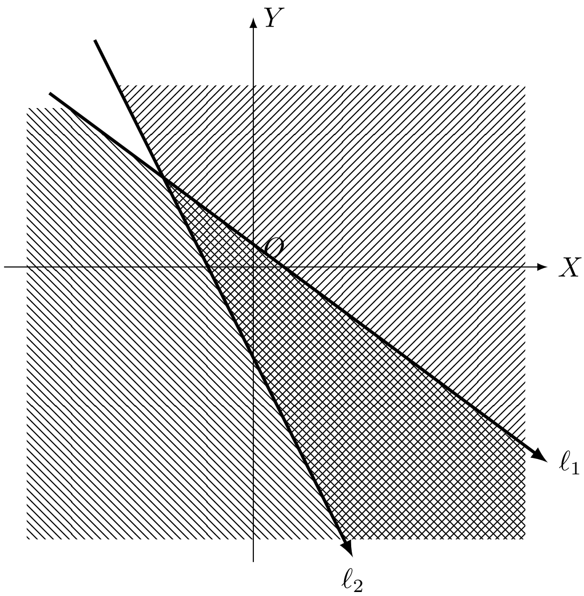


图 5.36

练习

1. 画出下列二元一次不等式表示的区域.

(a) $8x+4y+1>0$

(b) $3x-2y+5<0$

(c) $2x-6y+1\ge 0$

(d) $4x+y-4\le 0$

(e) $y-x>0$

(f) $2y-x<0$

2. 画出下列二元一次不等式组表示的区域.

(a) $\begin{cases} x-y>0 \\ 2x-<0 \end{cases}$　　(c) $\begin{cases} 2x+3y>12 \\ x-2y<4 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x+y-1<0 \\ x-y+2>0 \end{cases}$　　(d) $\begin{cases} 2x-6y-4>0 \\ y<\dfrac{x}{3}+\dfrac{2}{3} \end{cases}$

3. 画出下列三元一次不等式组表示的区域.

(a) $\begin{cases} x+y+5>0 \\ 2x-y+4>0 \\ 2x+y+4>0 \end{cases}$　　(b) $\begin{cases} x+y+5<0 \\ 2x-y+4<0 \\ 2x+y+4>0 \end{cases}$

习题 5.2

1. 已知 $A(5,3)$, $B(7,-1)$, $C(-1,5)$, 求 $\triangle ABC$ 各边所在直线的方程及三条中线所在直线的方程.

2. 求经过 $(-3,4)$ 点，并且在两轴上的截距和等于 12 的直线方程.

3. 已知直线的倾角是 60°, 并且到原点的距离等于 3, 求直线的方程.

4. 已知直线的斜率是 -3, 且到原点的距离等于 10, 求直线的方程.

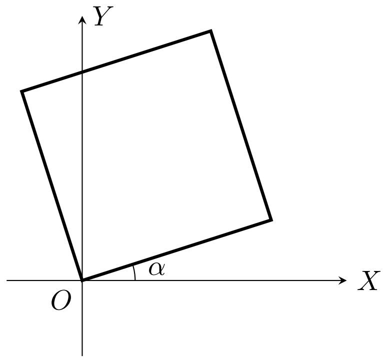
5. 求下列直线与点的距离

(a) $6x-8y-5=0,\quad (2,-10)$　　(c) $7x=0,\quad (-2,-1)$

(b) $y=\sqrt{3}x+7,\quad (0,5)$　　(d) $y=0,\quad (-1,3)$

6. 用解析法证明等边三角形经一边上的一点到其它两边的距离和等于这个边上的高.

7. 正方形的一个顶点在原点，它的一边倾角为 α, 边长等于 a, 求这个正方形的各边的直线方程.



第 7 题

8. 一动点 P 到已知三角形三边的距离分别是 P_1、P_2 、P_3, 如果对常数 a、b、c, 使 $aP_1+bP_2+cP_3=0$

   证明：P 点的轨迹是直线.

9. 证明由直线 $x=0$, $y=m_1x+b_1$ 和 $y=m_2x+b_2$ 所围成的三角形面积是 $\dfrac{(b_2-b_1)^2}{|m_2-m_1|}$ $(m_2\neq m_1)$

10. 已知 $A(1,3)$, $B(4,10)$, $C(-4,8)$, $D(-2,0)$. 若一动点 $P(x,y)$ 使 $\triangle PAB$ 的面积等于 $\triangle PCD$ 的面积. 求证 P 点的轨迹是直线 $15x-y+18=0$ 或 $x+5y+14=0$.

11. 已知 $A(a,0)$, $B(0,b)$, 通过 AB 的中点且垂直于 AB 的直线在 X 轴、Y 轴上的截距分别是 p、q. 求证 $ap+bq=0$.

第三节 圆

一、圆的方程

已知定点 $C(a,b)$, 定长 r, 我们来求以 C 为圆心，r 为半径的圆的方程（图 5.37）.

设 $P(x,y)$ 是一动点，由圆的定义可知，点 P 在圆上当且仅当 $|CP|=r$ 或 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CP}=r^2$. 用坐标表示，可写为

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \tag{5.28}$$

这就是说，以 C 为圆心，r 为半径的圆上的任一点 P, 它的坐标都满足方程 (5.28); 反过来，一个点的坐标如果满足方程 (5.28), 那么它必在以 C 为圆心 r

为半径的圆上，方程 (5.28) 叫做以 C 为圆心，r 为半径的**圆的方程**，如果圆心在原点（图 3.38），那么圆的方程为

$$x^2+y^2=r^2 \tag{5.29}$$

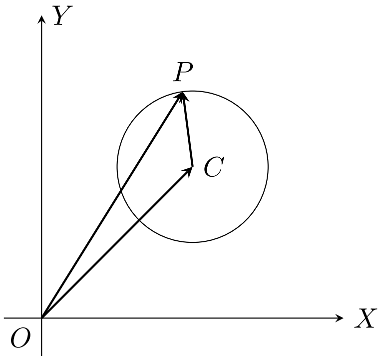


图 5.37

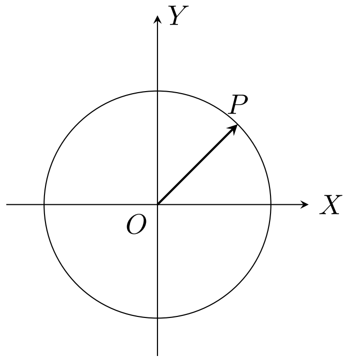


图 5.38

把 (5.28) 展开得

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$$

由此可见，任一圆的方程都可写为下面的形式

$$x^2+y^2+2Dx+2Ey+F=0. \tag{5.30}$$

由于 $\lambda(x^2+y^2+2Dx+2Ey+F)=0$ 和 (5.30) 表示了同一个圆，于是圆的方程是一般二次方程

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

的一种特殊形式，它具有两个特点：

1. x^2 与 y^2 项的系数相同且不等于 0;
2. 不含 xy 项.

现在要问，是否任一个形如方程 (5.30) 的图象都是一个圆呢？

将 (5.30) 左边配方，得

$$(x+D)^2+(y+E)^2=D^2+E^2-F \tag{5.31}$$

1. 当 $D^2+E^2-F>0$ 时，方程 (5.31) 表示以 $(-D,-E)$ 为圆心，以 $\sqrt{D^2+E^2-F}$ 为半径的圆;

2. 当 $D^2+E^2-F=0$ 时，方程 (5.31) 的图象只有一个点 $(-D,-E)$;
3. 当 $D^2+E^2-F<0$ 时，没有实数偶 (x,y) 满足方程 (5.31), 因此方程 (5.31) 没有图象.

为统一叙述，我们常把情况 2 的轨迹叫做**点圆**，情况 3 的轨迹叫做**虚圆**. 归纳以上讨论，我们有

定理

二元二次方程 $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$ 表示圆（包括点圆虚圆）的充要条件是

$$A=C\neq 0,\qquad B=0$$

例 5.46 已知 $C(3,4)$, 求以 C 为圆心，半径等于 5 的圆的方程.

解：设 $P(x,y)$ 在以 C 为圆心，半径等于 5 的圆上，则以 C 为圆心，半径等于 5 的圆的方程为

$$(x-3)^2+(y-4)^2=5^2$$

即

$$x^2+y^2-6x-8y=0$$

例 5.47 求圆 $x^2+y^2-6x+2y+6=0$ 的圆心和半径.

解：将原方程配方得

$$(x-3)^2+(y+1)^2=4$$

所以所求圆的圆心的坐标是 $(3,-1)$, 半径是 2.

例 5.48 已知 $A(9,-3)$, $B(3,-1)$, 求以 $\overline{AB}$ 为直径圆的方程（图 5.39）.

解： **方法一**：设 $\overline{AB}$ 的中点为 C, 则 C 点的坐标

$$x=\frac{9+3}{2}=6,\qquad y=\frac{-3-1}{2}=-2$$

依题意 $C(6,-2)$ 为所求圆的圆心，由距离公式得

$$r^2=(9-6)^2+(-3+2)^2=10$$

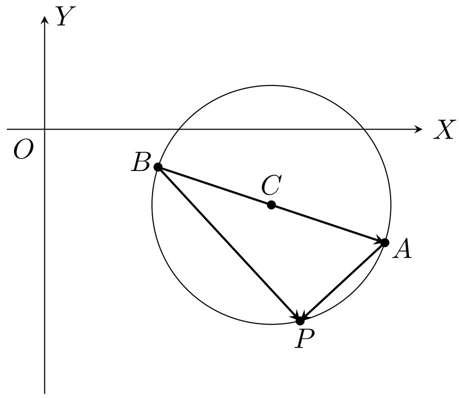


图 5.39

因此，所求圆的方程为

$$(x-6)^2+(y+2)^2=10$$

或

$$x^2+y^2-12x+4y+30=0$$

方法二：设 $P(x,y)$ 为所求圆上任一点，依平面几何定理可知，P 点在以 $\overline{AB}$ 为直径的圆上的充要条件是 $\angle APB=\dfrac{\pi}{2}$，或 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$. 用坐标表达，则为

$$(x-9)(x-3)+(y+3)(y+1)=0$$

展开整理得

$$x^2+y^2-12x+4y+30=0$$

这就是所求圆的方程，

例 5.49　已知 $A(2,2)$, $B(5,3)$, $C(3,-1)$, 求通过 A、B、C 三点圆的方程.

解：**方法一**：设所求圆的方程为

$$x^2+y^2+2Dx+2Ey+F=0$$

因为 A、B、C 三点都在圆上，所以它们的坐标都满足方程，故得

$$\begin{cases}4D+4E+F+8=0\\10D+6E+F+34=0\\6D-2E+F+10=0\end{cases}$$

解这个方程组，得

$$D=-4,\qquad E=-1,\qquad F=12$$

于是所求圆的方程为

$$x^2+y^2-8x-2y+12=0$$

方法二：分别求 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 垂直平分线方程，得

$$\begin{cases}3x+y=13\\x-3y=1\end{cases}$$

联立求解，得 $x=4$, $y=1$. 于是 $C(4,1)$ 就是所求圆的圆心，半径的平方为

$$r^2=(5-4)^2+(3-1)^2=5$$

因此，所求圆的方程为

$$(x-4)^2+(y-1)^2=5$$

或

$$x^2+y^2-8x-2y+12=0$$

例 5.50 求与 X 轴相交于 $A(1,0)$, $B(5,0)$ 两点且半径为 $\sqrt{5}$ 的圆的方程.

解：设所求圆的方程为

$$x^2+y^2+2Dx+2Ey+F=0$$

因 A、B 两点在圆上，所以 A、B 的坐标满足所设方程．即

$$\begin{cases}1+2D+F=0\\25+10D+F=0\end{cases}$$

解之得：$D=-3,\quad F=5$. 但因为

$$r^2=D^2+E^2-F$$

所以：

$$5=(-3)^2+E^2-5$$

即：$E=\pm1$，因此所求圆的方程有两个

$$x^2+y^2-6x+2y+5=0$$

或

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0$$

例 5.51　求到两定点 A 和 B 的距离之比等于常数 $k\ (k \neq 1)$ 的点的轨迹.

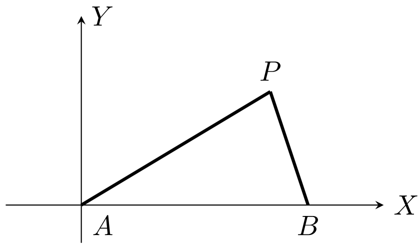


图 5.40

解：建立坐标系，取 A 为坐标原点，取射线 AB 为 X 轴的正半轴，设点 B 的坐标是 $(a, 0)$, 点 $P(x, y)$ 是一动点，依题意可知点 $P(x, y)$ 是轨迹上的点的充分必要条件是

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} = k$$

或

$$\frac{x^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} = k^2$$

经过变形、配方，这方程可化为

$$\left(x - \frac{ak^2}{k^2 - 1}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{ak}{k^2 - 1}\right)^2$$

因此，所求轨迹是一个圆心在 $\left(\dfrac{ak^2}{k^2 - 1}, 0\right)$, 半径为 $\dfrac{ak}{|k^2 - 1|}$ 的圆.

例 5.52　求通过圆 $C_1:\ x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$ 和圆 $C_2:\ x^2 + y^2 - 8x + 11 = 0$ 的交点和点 $(-2, 2)$ 的圆的方程.

解：类似于用直线束的解题方法，我们考虑圆族

$$\lambda_1(x^2 + y^2 - 4x - 1) + \lambda_2(x^2 + y^2 - 8x + 11) = 0 \tag{5.32}$$

当 λ_1, λ_2 不同时为零，方程 (5.32) 表示的圆都通过两圆 C_1, C_2 的两个交点，如果方程 (5.32) 是所求圆的方程，那么点 $(-2, 2)$ 的坐标应满足方程 (5.32), 由此，我们可定 $\lambda_1 : \lambda_2$, 把 $x = -2$, $y = 2$ 代入 (5.32) 得

$$\lambda_1[(-2)^2 + 2^2 - 4(-2) - 1] + \lambda_2[(-2)^2 + 2^2 - 8(-2) + 11] = 0$$

由此，得

$$\lambda_1 = -\frac{3}{7}\lambda_2$$

所以，所求圆的方程为

$$-7\lambda_2(x^2+y^2-4x-1)+3\lambda_2(x^2+y^2-8x+11)=0$$

消去 λ_2, 整理最后得所求圆的方程为

$$x^2+y^2-x-10=0$$

练习

1. 由下列给定的圆心 C 和半径 r, 求圆的方程.

   (a) $C(0,1),\quad r=1$
   (b) $C(2,7),\quad r=5$
   (c) $C(-6,4),\quad r=10$
   (d) $C(-3,-5),\quad r=7$

2. 已知下面一些圆的圆心在原点，且通过给定的点，求这些圆的方程.

   (a) $(4,1)$
   (b) $(-4,3)$
   (c) $(-3,5)$
   (d) $(a-b,a+b)$
   (e) $(\sqrt{2},2\sqrt{3})$

3. 已知 $A(-2,4)$, $B(8,-2)$. 求以 $\overline{AB}$ 为直径的圆的方程.

4. 已知 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$. 求证以 $\overline{AB}$ 为直径的圈的方程可写为

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$$

5. 求以 $C(3,5)$ 为圆心，且通过点 $A(1,-3)$ 的圆的方程.

6. 已知 $A(4,-5)$, $B(-1,2)$, $C(11,0)$. 求证 A、B、C 三点决定一圆，并写出这圆的方程.

7. 求过 $A(5,2)$、$B(-3,0)$ 两点，圆心在 Y 轴上的圆的方程，并画出图形.

8. 求通过点 $(0,1)$ 和点 $(0,3)$, 且半径等于 2 的圆的方程.

9. 试判定下列方程表示圆、还是点圆、虚圆，若是圆，则求出圆心坐标和半径.

   (a) $x^2+y^2=0$

   (b) $x^2+y^2-100=0$

   (c) $(x-a)^2+(y-b)^2=0$

   (d) $x^2+y^2-8x-9=0$

   (e) $x^2+y^2-2x+4y+50=0$

10. 证明通过两定点 $A(-2,4)$, $B(6,8)$ 的圆的圆心都位于直线 $2x+y=10$ 上.

11. 求原点到圆 $x^2+y^2+6x-8y-11=0$ 的最大和最小距离.

12. 求与两定点 $O(0,0)$、$A(3,0)$ 的距离比为 $\dfrac{1}{2}$ 的点的轨迹的方程，并画出方程的图象.

13. 求通过两圆 $x^2+y^2-8x-2y+7=0$、$x^2+y^2-6x-4y+9=0$ 的两个交点和原点的圆的方程.

二、圆的切线方程

已知直线 ℓ 与圆：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 相切于点 $P_0(x_0,y_0)$, 我们来求切线 ℓ 的方程（图 5.41）.

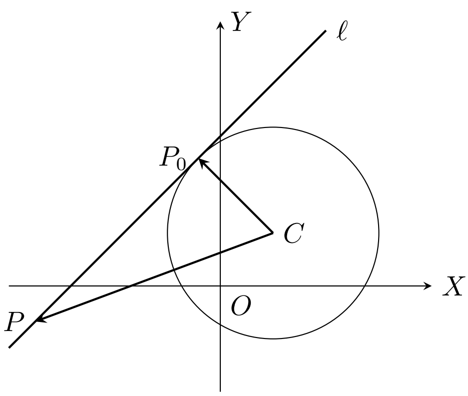


图 5.41

设 $P(x,y)$ 是一动点，则 $P(x,y)$ 在切线 ℓ 上的充要条件是

$$\overrightarrow{CP_0}\cdot\overrightarrow{P_0P}=0$$

用坐标表示，即为

$$(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-y_0)=0 \tag{5.33}$$

方程 (5.33) 就是所求切线 ℓ 的方程．特别当圆心在坐标原点，切线方程变为

$$x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)=0$$

$$x_0x+y_0y=r^2 \tag{5.34}$$

例 5.53 已知圆：$x^2+y^2=10$, 求与该圆相切于点 $A(1,3)$ 的切线方程.

解：由圆的切线 (5.34), 得所求切线方程为

$$x+3y=10$$

例 5.54 已知圆：$x^2+y^2+6x-4y-13=0$, 求与该圆相切于点 $A(2,3)$ 的切线方程.

解：已知圆的方程可化为

$$(x+3)^2+(y-2)^2=26$$

所以圆心 $C(-3,2)$, $\overrightarrow{CA}=(5,1)$. 由圆的切线方程，可得所求切线为

$$5\cdot(x-2)+1\cdot(y-3)=0$$

整理得

$$5x+y=13$$

例 5.55 求证直线 ℓ： $y=kx+b$, 与已知圆 $x^2+y^2=r^2$ 相切的充要条件是 $r=\pm\dfrac{b}{\sqrt{1+k^2}}$

证明： 把 $y=kx+b$ 代入 $x^2+y^2=r^2$, 得

$$(kx+b)^2+x^2=r^2$$

展开整理得

$$(1+k^2)x^2+2kbx+b^2-r^2=0$$

由圆的切线定义可知：已知直线与圆相切的充要条件是上面方程有重根，即它的判别式

$$\Delta=\sqrt{(2kb)^2-4(1+k^2)(b^2-r^2)}=0$$

化简就可得到直线 ℓ 与已知圆相切的条件是

$$b^2=r^2(1+k^2) \quad \Rightarrow \quad r=\pm\frac{b}{\sqrt{1+k^2}}$$

在例 5.55 的条件中，右边正好是圆心到直线 ℓ 的距离，所以上述条件的几何意义是：直线和圆相切的充要条件是圆心到直线的距离等于半径，这是我们在平面几何中已熟知的结论，这里用解析方法再次得到证明，当然我们也可由这个几何定理直接证明例 5.55.

例 5.56 已知 $P_0(x_0,y_0)$ 是已知圆 $x^2+y^2=r^2$ 外任一点，PT, PV 与此已知圆相切于 $T(x_1,y_1)$, $V(x_2,y_2)$ 两点，求直线 TV 的方程.

解： 在点 $T(x_1,y_1)$, $V(x_2,y_2)$ 处的切线方程分别为

$$x_1x+y_1y=r^2 \tag{5.35}$$

$$x_2x+y_2y=r^2 \tag{5.36}$$

因为切线 (5.35), (5.36) 都通过 A 点，所以

$$x_1x_0+y_1y_0=r^2 \tag{5.37}$$

$$x_2x_0+y_2y_0=r^2 \tag{5.38}$$

由 (5.37), (5.38) 可看出，点 $T(x_1,y_1)$, $V(x_2,y_2)$ 都满足方程

$$x_0x+y_0y=r^2 \tag{5.39}$$

由于两点定一直线，所以方程 (5.39) 就是直线 TV 的方程.

在例 5.56 中，方程 (5.39) 和圆的切线方程形状相同，当已知 $P_0(x_0,y_0)$ 在圆上，(5.39) 式就是圆的切线方程.

练习

1. 写出过下列圆上已知点的切线方程.

   (a) $A(1,2)$, $x^2+y^2=5$

   (b) $B(12,-5)$, $x^2+y^2=169$

   (c) $C(10,10)$, $(x-2)^2+(y-4)^2=100$

   (d) $D(2,-2)$, $x^2+y^2+8x-16y-56=0$

   (e) $E(-4,-3)$, $x^2+y^2+12x-8y-1=0$

   (f) $O(0,0)$, $x^2+y^2-9x+11y=0$

2. 已知定点 $C(a,b)$, 动点 $P(x,y)$. 证明圆 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CP}=r^2$, 在 $P_0(x_0,y_0)$ 处的切线方程为 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CP_0}=r^2$ 或 $(x-a)(x_0-a)+(y-b)(y_0-b)=r^2$.

3. 求证圆 $x^2+y^2+2Dx+2Ey+F=0$ 在其上 (x_0,y_0) 点处的切线方程是

$$x_0x+y_0y+D(x+x_0)+E(y+y_0)+F=0$$

4. 求证下列已知直线与已知圆相切，并求出切点的坐标.

   (a) $x-y=4$, $x^2+y^2=8$

   (b) $5x+12y=13$, $x^2+y^2=1$

   (c) $8x-15y=289$, $x^2+y^2=289$

   (d) $ax+by=a^2+b^2$, $x^2+y^2=a^2+b^2$

5. 求证圆 $x^2+y^2+2Dx+2Ey=0$ 在原点的切线方程是 $Dx+Ey=0$.

6. 从点 $A(5,-4)$ 到圆：$x^2+y^2+10x+7=0$ 引切线 AP, P 为切点，求 $\overline{AP}$ 的长和点 P 的坐标.

7. 求证圆 $x^2+y^2+2Dx+2Ey+F=0$ 与 X 轴相切的充要条件是 $D^2=F$, 并求与 Y 轴相切的一个充要条件.

8. 已知圆 $(x-2)^2+(y-2)^2=r^2$ 与 Y 轴相交在 A、B 两点，如果圆在 A、B 两点处的切线互相垂直，那么 $r=2\sqrt{2}$.

习题 5.3

1. 求通过点 $(0,0)$、$(a,0)$、$(0,a)$ 的圆的方程.

2. 求下列每个圆的圆心和半径.

   (a) $(x-a)(x-b)+(y-c)(y-d)=0$

   (b) $(x+y+a)^2+(x-y-a)^2=8a^2$

3. 已知 $A(2,-1)$, $B(2,3)$, $C(4,-1)$, 求 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心和半径.

4. 证明通过 $A(a,c)$, $B(b,c)$ 和 $C(b,d)$ 的圆的方程是 $(x-a)(x-b)+(y-c)(y-d)=0$.

5. P 是圆心在 $A(a,b)$ 且通过原点的圆上的一动点，求证 $\triangle OAP$ 重心的轨迹方程是
$$3(x^2+y^2)-4ax-4by+a^2+b^2=0$$

6. 证明 $A(6,3)$、$B(5,4)$、$C(1,-2)$ 和 $D(6,-1)$ 四点共圆.

7. 一动点到原点的距离的平方是它到定直线 $x=1$ 距离的 4 倍，求证这动点的轨迹是点圆 $(2,0)$ 或圆 $(x+2)^2+y^2=8$.

8. 已知三角形由直线 $x=2$, $y=4$ 和 $4x+3y=32$ 围成，求这三角形内切圆的方程.

9. 已知 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$, 一动点 $P(x,y)$ 使 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2=$ 常数，证明 P 点的轨迹是一个圆且它的圆心是 $\triangle ABC$ 的重心.

10. 已知 $A(2a,0)$, $C(0,2a)$, $\overline{AC}$ 是正方形 $OABC$ 的对角线，一动点 $P(x,y)$ 到这正方形四边距离的平方和等于 $12a^2$, 证明 P 点的轨迹是圆心在 (a,a), 半径是 $2a$ 的圆.

11. 已知 $A(3,7)$, $B(-1,5)$, 动点 $P(x,y)$ 使 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=82$, 证明 P 点的轨迹是半径等于 6 的圆.

12. 已知 $A(3,7)$, $B(1,-1)$, 动点 P 使 $\overline{AP}=3\overline{BP}$. 证明 P 点的轨迹是一个圆且这圆在 Y 轴上截出的弦长等于 6.

13. 已知 OC 是圆 $x^2+y^2-2ax=0$ 的一条弦，直线 OC 的斜率是 m, 求证以 OC 作直径圆的方程是
$$(1+m^2)(x^2+y^2)-2a(x+my)=0$$

14. 如果 a, b 是常数，θ 是一动角，求证两直线 $x\cos\theta + y\sin\theta = a$ 与 $x\cos\theta - y\sin\theta = b$ 的交点的轨迹是一个圆圆心在原点．半径等于 $\sqrt{a^2+b^2}$.

15. 已知一圆与 Y 轴相切于 $A(0,-3)$ 且半径 $r=2$, 求此圆的方程.

16. 已知一圆与两坐标轴相切且通过 $A(2,9)$, 求它的方程.

17. 已知一圆与 X 轴相切于 $(5,0)$ 且在 Y 轴上截出的弦长是 10, 求此圆的方程.

18. 求圆：$x^2+y^2=25$ 与平行线系 $x+5y+\lambda=0, \quad (\lambda \in \mathbb{R})$ 相交所截弦中点的轨迹.

19. 求二圆 $x^2-12x+y^2-10y+52=0$, $x^2+18x+y^2+20y+60=0$ 的圆心距及原点到连心线的距离.

20. 在直线系 $y-7+\lambda(x+1)=0$ 中，求与圆 $x^2+y^2=2$ 相切之直线.

21. 求通过点 $(5,-2)$ 且与已知直线 $3x-y-1=0$ 相切于点 $(1,2)$ 的圆的方程.

复习题五

1. 一个正六边形边长是 a, 中心在坐标原点，两个顶点在 X 轴上，求各顶点的坐标.

2. 以原点为起点的三个力 $\vec{F_1}=(9,7)$, $\vec{F_2}=(-6,4)$, $\vec{F_3}=(1,2)$; 求它们的合力坐标和方向.

3. 已知一个三角形三边中点的坐标分别是 (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3), 求三个顶点的坐标.

4. 已知 $A(-1,3)$, $B(4,1)$, 直线 AB 与 X 轴，Y 轴分别相交于 C、D 两点，求 C、D 两点分割 AB 的比值.

5. 已知 $P(x,y)$, $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ 且

$$x = x_1 + t(x_2 - xy), \qquad y = y_1 + t(y_2 - y_1)$$

求证：P 点按定比 $\mu = \dfrac{t}{1-t}$ 分割 $\overrightarrow{AB}$.

6. 已知直线 ℓ： $ax+by+c=0$ 及 $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$ 两点，求证直线 ℓ 与直线 P_1P_2 的交点把 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 按定比 $-\dfrac{ax_1+by_1+c}{ax_2+by_2+c}$ 分割.

7. 用坐标法证明：直角三角形斜边的中点到三顶点的距离相等.

8. 用坐标法证明勾股定理的逆定理.

9. 已知：四边形一组对边的平方和等于另一组对边的平方和，用坐标法证明：两条对角线互相垂直.

10. 已知 G 是 $\triangle P_1P_2P_3$ 的重心，用坐标法证明：

$$S_{GP_2P_3}=\frac{1}{3}S_{P_1P_2P_3}$$

11. 已知 $A(1,2)$、$B(8,4)$、$C(4,10)$, 求一点使 $\triangle PAB$、$\triangle PBC$、$\triangle PCA$ 的面积相等，并解释这个结果的几何意义.

12. 一条直线经过点 $P(1,-1)$, 它的倾角等于直线 $y=x$ 倾角的 3 倍，求这条直线的方程.

13. 已知 $A(-3,2)$, $B(-2,-2)$, $C(4,0)$. 求：

    (a) $\triangle ABC$ $\overline{BC}$ 边上的中线方程；

    (b) $\overline{AC}$ 边上的高线方程，并求出这条高的长.

14. 一条直线经过 $(2,4)$ 并且和直线 $x+y-4=0$ 的夹角是 $\pi/4$，求这条直线的方程.

15. 一条光线从 $P_0(6,4)$ 射出和 X 轴正向交成锐角 α, 遇到 X 轴反射，已知 $\tan\alpha=2$, 求入射光线和反射光线所在的直线方程.

16. 从原点向直线 $3x-2y+7=0$ 作垂线，求垂线段的长和垂足的坐标.

17. 在直线 $2x-3y=0$ 上求一点，使这点和原点之间的距离等于这点到直线 $2x+3y-2=0$ 之间的距离.

18. 已知点 $P(3,2)$, 直线 ℓ： $y=4x+3$, 求 P 点到直线 ℓ 的距离，垂线足的坐标，点 P 关于 ℓ 的轴对称点的坐标.

19. 已知直线 $ax+by+c=0$ 和点 $P_0(x_0,y_0)$, 求 P_0 点关于直线 $ax+by+c=0$ 的轴对称点的坐标.

20. 已知 $\ell_1:\ 3x-4y-17=0$, $\ell_2:\ y=4$, $\ell_3:\ 12x+5y-12=0$, 求证点 $(-4,-1)$ 是 ℓ_1,ℓ_2,ℓ_3 两两相交所构成三角形的内心.

21. 求直线 $3x-4y+6=0$ 与 $12x-5y-9=0$ 交角平分线的方程.

22. 证明通过点 (a,b) 的直线方程可写为

$$\lambda_1(x-a)+\lambda_2(y-b)=0$$

23. 设 $P_1(x_1,y_1)$ 及 $P_2(x_2,y_2)$ 为两定点，过 P_1 作直线交 Y 轴于 B 点，过 P_2 作直线与过 P_1 之直线垂直，交 X 轴于点 A, 求 AB 中点的轨迹.

24. 求下列各圆的方程.

    (a) 过 $O(0,0)$, $A(-5,0)$, $B(0,3)$;

    (b) 中心在 $C(-3,4)$ 与 $3x+8y-6=0$ 相切；

    (c) 过 $A(4,3)$, $(-2,5)$, 圆心在 $2x-3y=0$ 上；

    (d) 过 $A(5,-2)$ 与直线 $3x-y-1=0$ 相切于点 $(1,2)$;

    (e) 通过 $O(0,0)$, 圆心在 $x=2$ 上且与直线 $x+y-8=0$ 相切.

25. 求两圆 $x^2+y^2-x+2y=0$, $x^2+y^2+2x-y=9$ 的交点的坐标.

26. 求两圆 $x^2+y^2+ax+by=0$, $x^2+y^2+bx-ay=0$ 的交点的坐标.

27. 求两圆 $x^2+y^2=10$, $x^2+y^2-10x-10y+30=0$ 公共弦所在直线的方程.

28. 已知圆 $x^2+y^2-4x-5=0$ 和点 $A(5,4)$, 求圆心在 A 点且与已知圆外切的圆的方程.

29. 已知二圆 $x^2+y^2-6x+8y=0$, $x^2+y^2+2x-12y+1=0$, 求通过二圆圆心的直线方程.

30. 求两圆 $(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=r_1^2$, $(x-a_2)^2+(y-b_2)^2=r_2^2$ 正交（即在两圆公共点处的切线互相垂直）的条件是

$$(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2=r_1^2+r_2^2$$

31. 一条 $AB=2a$ 的两个端点 A 和 B 分别在 X 轴和 Y 轴上滑动，求 $\overline{AB}$ 中点 M 的轨迹.

32. 已知 $A(2,2)$, $\triangle OAC$ 是等边三角形，且 O、A、C 构成反时针排列，求点 C 的坐标.

33. 已知 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$, 求证 $\triangle ABC$ 的重心到三顶点的距离平方和为最小.

34. 已知 $A(-5,4)$, 过点 A 作条直线使它与两坐标轴相交所成的三角形的面积等于 5 个平方单位，求证这条直线的方程是 $8x+5y+20=0$ 或 $2x+5y-10=0$.

35. 已知点 $A(a,b)$ 在第 1 象限，过点 A 求一条直线使与坐标轴交成的三角形面积最小，并求出最小面积的值.

36. 如果

    (a) $D=0$
    (b) $E=0$
    (c) $F=0$
    (d) $D=0$, $E=0$
    (e) $D=0$, $F=0$
    (f) $E=0$, $F=0$

    那么圆 $x^2+y^2+2Dx+2Ey+F=0$ 对坐标系的位置有什么特征.

37. 已知 $P_0(x_0,y_0)$ 是圆：$x^2+y^2+2Dx+2Ey+F=0$ 外任意一点，若自 P_0 向圆引切线 P_0T, T 为切点，求证：$\overline{P_0T}^2=x_0^2+y_0^2+2Dx_0+2Ey_0+F$.

38. 为了使圆 $x^2+y^2+2Dx+2Ey+F=0$

    (a) 不与 X 轴相交；
    (b) 和 X 轴交于两点；
    (c) 和 X 相切，

    问它的方程中的系数分别应该满足怎样的条件？

39. 求圆心在点 $(4,0)$ 并与直线 $3x-4y+1=0$ 相切的圆的方程.

40. 已知 $\odot C$ 的圆心 C 在直线 $x-y-4=0$ 上，并经过两圆 C_1：$x^2+y^2-4x-3=0$ 和 C_2：$x^2+y^2-4y-3=0$ 的交点，求 $\odot C$ 的方程.

41. 一动点到已知正方形的各顶点的距离平方和是一个常数，求这动点的轨迹方程，并说明轨迹是什么图形.

42. 已知点 $Q(4,0)$, 点 $P(x,y)$ 是圆：$x^2+y^2=4$ 上一动点，求 PQ 中点的轨迹方程.

43. 当 λ 为何值时，直线 $\lambda x-y-\lambda-1=0$ 与圆 $x^2+y^2-4x-2y+1=0$ 相交，相切或相离.

第六章　圆锥曲线

远在古希腊时代，人们就开始研究一个平面和一个正瞬锥的截线的性质，并且获得了丰硕的成果，这些截线分别有椭圆、抛物线和双曲线，并统称为圆锥曲线，在第二章附录里，我们已用球面切线长相等原理证明了它们分别具有如下几何特征.

椭圆有两个焦点 F_1, F_2, 对椭圆上任一点 P 有

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \text{常数}$$

双曲线有两个焦点 F_1, F_2, 对双曲线上任一点 P 有

$$\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = \text{常数}$$

抛物线有一个焦点，对抛物线上任一点 P 到焦点 F 与到一定直线 ℓ 的距离 d 相等，即

$$\overline{PF} : d = 1$$

这一章，我们将要根据上述圆锥曲线的几何特性来定义椭圆、双曲线和抛物线，建立它们在平面直角坐标系中的标准方程，并利用标准方程进一步研究圆锥曲线其它的几何特性.

第一节　圆锥曲线的标准方程及其性质

一、椭圆的标准方程和形状

定义

平面内与两定点的距离之和等于常数（这常数必须大于两定点间的距离）的点的轨迹叫做椭圆. 这两定点叫做椭圆的**焦点**. 两焦点间的距离叫做**焦距**.

下面，我们根据椭圆的定义来建立椭圆的方程.

设 F_1、F_2 是椭圆的两个焦点，取射线 F_1F_2 作为 X 轴的正半轴，$\overline{F_1F_2}$ 的垂直平分线作为 Y 轴（图 6.1）. 设焦距 $\overline{F_1F_2}=2c\ (c>0)$，则

$$F_1(-c,0),\qquad F_2(c,0)$$

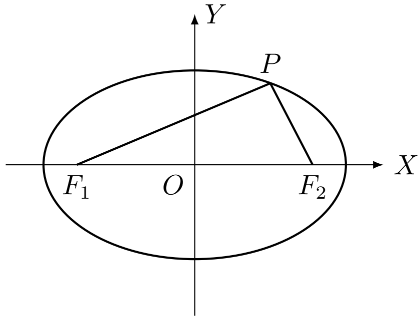


图 6.1

设 $P(x,y)$ 是椭圆上的任一点,它到 F_1、F_2 的距离之和等于常数 $2a\ (a>0)$, 则

$$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$$

由求两点的距离公式得

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

去根号，整理得

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2) \tag{6.1}$$

因 $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}>\overline{F_1F_2}$, 所以 $a>c$, $a^2-c^2>0$, 设 $a^2-c^2=b^2\ (b>0)$, 代入 (6.1) 式得

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

两边同除 a^2b^2 得

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1} \tag{6.2}$$

这就是说，椭圆上任一点的坐标都满足方程 (6.2); 反过来，设 $P(x_1,y_1)$ 的坐标满足方程 (6.2), 则

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$$

$$y_1^2=b^2\left(1-\frac{x_1^2}{a^2}\right)=(a^2-c^2)\left(1-\frac{x_1^2}{a^2}\right)$$

于是

$$\begin{aligned}\overline{PF_1} &= \sqrt{(x_1+c)^2+y_1^2}\\ &= \sqrt{(x_1+c)^2+(a^2-c^2)\left(1-\frac{x_1^2}{a^2}\right)}\\ &= \sqrt{a^2+2cx_1+\frac{c^2}{a^2}x_1^2}\\ &= \left|a+\frac{c}{a}x_1\right|\end{aligned}$$

由 $\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1$，可推知 $\dfrac{x_1^2}{a^2}\le 1$，$|x_1|\le a$.

又因 $c<a$，所以 $\dfrac{c}{a}<1$，$\left|\dfrac{c}{a}x_1\right|<a$ ，$a+\dfrac{c}{a}x_1>0$，因此：

$$\overline{PF_1}=a+\frac{c}{a}x_1 \tag{6.3}$$

同理可证，

$$\overline{PF_2}=a-\frac{c}{a}x_1$$

所以：$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$

这就是说，坐标满足方程 (6.2) 的点 P 也一定在椭圆上，由以上证明，所以方程 (6.2) 是所求的椭圆方程，并把方程 (6.2) 叫做**椭圆的标准方程**.

下面，用椭圆的标准方程来研究椭圆的几何形状.

首先，由于方程 (6.2) 中只含有 x,y 的平方，故把一个坐标变号，对于方程没有影响，这就表明：如果 $M(x,y)$ 在椭圆上，那么，$M_1(x,-y)$, $M_2(-x,-y)$, $M_3(-x,y)$ 各点也都在椭圆上，所以椭圆既是以 X 轴或 Y 轴为对称轴的轴对称图形，又是以坐标原点为对称中心的中心对称图形，对称中心又叫做椭圆的中心.

其次，由方程 (6.2) 得

$$\frac{x^2}{a^2}\le 1,\qquad \frac{y^2}{b^2}\le 1$$

$$-a\le x\le a,\qquad -b\le y\le b$$

这两个不等式表明椭圆全部包含在如图 6.2 所示的长方形内.

最后，我们来讨论椭圆在第 I 象限内的性态. 由 (6.2) 得

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

在第 I 象限，椭圆方程可写为

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},\qquad 0\le x\le a$$

当 $x=0$ 时，$y=b$, 当 x 递增时，y 递减，当 $x=a$ 时，$y=0$, 因此椭圆在第 I 象限内的轨迹大致是 B_2A_2 这部分曲线，由对称性可画出整个椭圆的图象（图 6.2）.

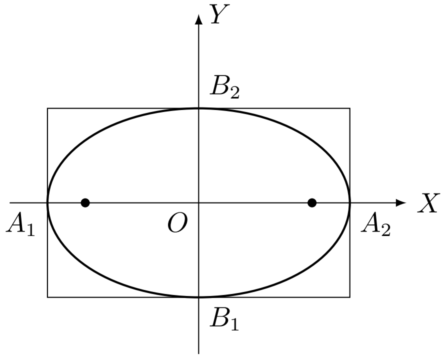


图 6.2

当 $y=0$, $x=\pm a$, 点 $A_1(-a,0)$, $A_2(+a,0)$ 是 X 轴上距 Y 轴最远的两个点，当 $x=0$, $y=\pm b$, 点 $B_1(0,-b)$, $B_2(0,+b)$ 是 Y 轴上距 X 轴距离最远的两个点，这四点，A_1、A_2、B_1、B_2 叫做**椭圆的顶点**. $\overline{A_1A_2}, \overline{B_1B_2}$ 分别叫做椭圆的长和轴短轴. $\overline{A_1A_2}=2a$, $\overline{B_1B_2}=2b$, a 和 b 分别叫做椭圆的**长半轴长和短半轴长**. 长轴和短轴的交点叫做**椭圆的中心**.

如果 $a=b$, 那么方程 (6.2) 化为

$$x^2+y^2=a^2$$

这时椭圆成为圆，$c=\sqrt{a^2-b^2}=0$, 即椭圆的两个焦点重合于圆心，因此可以说**圆是椭圆的特殊情形**.

由以上讨论可以看出，椭圆的形状依赖于 a 和 b, 数量 $c=\sqrt{a^2-b^2}$ 可表示出椭圆离开圆的偏差. 由 $c^2=a^2-b^2$ 可得

$$\frac{c}{a}=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}, \qquad \frac{b}{a}=\sqrt{1-\left(\frac{c}{a}\right)^2}$$

比值

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

叫做**椭圆的离心率**，用它可同样来表出椭圆的形状. 由 $c<a$, 可知 $e<1$, 当离心率愈来愈大时，也就是愈来愈接近 1 时，$1-e^2$ 就越小，椭圆的形状就愈扁平；反之，就愈接近于圆，当 $e=0$ 时，$a=b$ 椭圆就成为圆了.

如果椭圆的中心在原点，焦点在 Y 轴上，那么长轴也一定在 Y 轴上，这时两个焦点 F_1, F_2 的坐标分别是 $(0,-c)$, $(0,c)$ (图 6.3), 求得圆的标准方程是

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1} \qquad a \geq b > 0 \tag{6.4}$$

把方程 (6.2) 的变量 x 和 y 互换就可得到方程 (6.6).

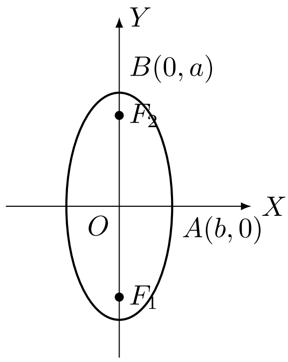


图 6.3

例 6.1　已知椭圆的长轴长是 10, 焦距是 8, 求椭圆的标准方程.

解：由已知条件得 $2a=10, \quad 2c=8$，所以：

$$a=5, \qquad c=4, \qquad b^2=a^2-c^2=5^2-4^2=9$$

因此所求椭圆的标准方程为

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

例 6.2　求椭圆 $4x^2+9y^2=36$ 的长轴、短轴长、离心率、焦点和顶点的坐标，并用描点法画出它的图形.

解：已知方程可化为

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

这是长轴在 X 轴上，中心在坐标原点的椭圆标准方程．因此 $a=3$, $b=2$, $c=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$, 顶点 $A'(-3,0)$, $A(3,0)$, $B'(0,-2)$, $B(0,2)$．焦点 $F_1(-\sqrt{5},0)$, $F_2(\sqrt{5},0)$．离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

在第 I 象限已知椭圆方程可写为

$$y = \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}, \qquad 0 \le x \le 3$$

算出一些满足所求椭圆方程的点的坐标 (x, y):

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
y	2	1.97	1.89	1.73	1.49	1.11	0

描点画出椭圆在第 I 象限的图象，然后根据椭圆的对称性就可画出整个椭圆的图象（图 6.4）.

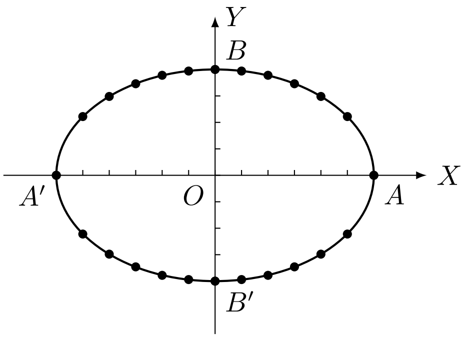


图 6.4

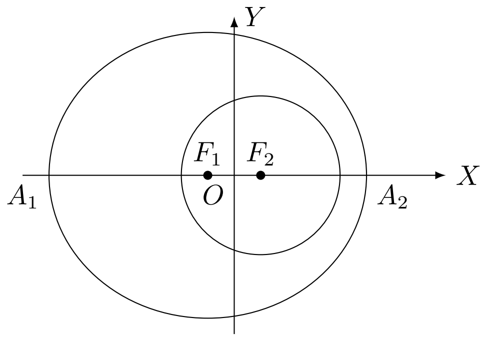


图 6.5

例 6.3 我国第一颗人造地球卫星的运行轨道是以地球中心为一焦点的椭圆,卫星的近地点与地球表面距离为 439 公里；远地点与地球表面距离为 2384 公里，已知地球半径约为 6371 公里，试求卫星轨道的近似方程及其离心率.

解：设地球中心 F_2 在 X 轴上（图 6.5），所求方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

依题意

$$\overline{A_1F_2} = a + c = 6371 + 2284 = 8755$$

$$\overline{A_2F_2} = a - c = 6371 + 439 = 6810$$

由以上两式联立求解得

$$a = 7782.5, \qquad c = 972.5, \qquad b = \sqrt{a^2 - c^2} = 7721.5$$

所以，所求卫星轨道的近似方程为

$$\frac{x^2}{(7782.5)^2} + \frac{y^2}{(7721.5)^2} = 1$$

其离心率 $e = \dfrac{c}{a} \approx 0.125$

练习

1. 已知椭圆的长轴长是 6, 短轴长是 2, 焦点在 X 轴上，求这椭圆的标准方程并画出这椭圆的草图.

2. 在第 1 题中，若焦点在 Y 轴，椭圆的标准方程为何？

3. 已知椭圆的一个焦点是 $F_1(-3,0)$ 与 X 轴一个交点 $A(4,0)$, 求此椭圆的方程.

4. 求以下椭圆的长轴长，短轴长、焦点的坐标及其离心率.

   (a) $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{36}=1$

   (b) $25x^2+9y^2=100$

   (c) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{64}=1$

   (d) $49x^2+9y^2=2500$

5. 已知椭圆中心在原点，一焦点是 $F(3,0)$, 椭圆与 X 轴相交于 A、A' 两点，$\overline{AF}=2$, $\overline{A'F}=8$, 求此椭圆的方程.

6. 已知地球的轨道是一个椭圆，太阳在它的一个焦点上，长轴长约 30 亿公里，离心率 $e=1/60$, 求地球的轨道方程，地球的轨道中心与太阳的距离，以及近日点，远日点到太阳的距离.

7. 试求平分圆 $x^2+y^2=25$ 上各点的纵坐标，而横坐标不变的点的轨迹方程.

8. 试求把圆 $x^2+y^2=100$ 上各纵坐标分为 2:3, 而横坐标不变的点的轨迹方程.

9. 一动点与直线 $x=8$ 的距离是它与点 $(2,0)$ 的距离的 2 倍，求这动点的轨迹方程.

10. 一定长为 a 的线段，两端在互相垂直的二直线上移动，试求此线段上任意一点的轨迹方程.

11. 设一三角形的一边的两个端点为 $(0,6)$, $(0,-6)$，其它两边斜率的乘积是 $-\dfrac{4}{9}$，试求另一顶点的轨迹.

12. 已知 $A>0$, $B>0$, 且 $A<B$, 试求椭圆 $Ax^2+By^2=C$ 的焦点坐标.

13. 试证：椭圆的短半轴长是其中一焦点到长轴两顶点距离的比例中项.

14. 在椭圆 $\dfrac{x^2}{45}+\dfrac{y^2}{20}=1$ 上求一点，使它与两焦点连线互相垂直.

二、双曲线的标准方程和形状

定义

平面内到两定点距离的差的绝对值等于常数（常数小于两定点间的距离）的轨迹叫做双曲线．这两个定点叫做双曲线的焦点，两个焦点间的距离叫做焦距.

根据双曲线的定义，我们来求它的方程：

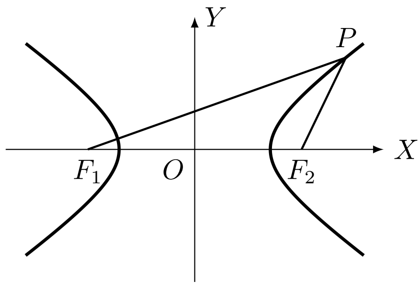


图 6.6

设 F_1、F_2 是双曲线的两个焦点，取射线 F_1F_2 的方向作为 X 轴的正方向，$\overline{F_1F_2}$ 的垂直平分线作为 Y 轴（图 6.6）．若 $\overline{F_1F_2}=2c$, 则两焦点的坐标分别为 $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$.

再设 $P(x,y)$ 是双曲线上任一点，则由双曲线的定义有

$$|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=2a$$

因 $\overline{PF_1}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$, $\overline{PF_2}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$, 代入上式，得方程

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a$$

去根号，整理得

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

这个式子和上节得到的椭圆方程 (6.1) 在外形上完全一样，这里，由双曲线的定义 $2c > 2a$, 即

$$c > a$$

所以 $a^2 - c^2 < 0$, 故设 $a^2 - c^2 = -b^2$ $(b > 0)$, 代入 (6.1) 式得

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2$$

两边同除 $-a^2b^2$ 得

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \tag{6.5}$$

由上述推导过程说明，凡在双曲线上的点，它的坐标一定满足方程 (6.5); 反过来，设 $P_1(x_1, y_1)$ 的坐标满足方程 (6.5), 则

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1$$
$$\overline{P_1F_1} = \sqrt{(x_1 + c)^2 + y_1^2}$$

但

$$y_1^2 = b^2\left(\frac{x_1^2}{a^2} - 1\right) = (c^2 - a^2)\left(\frac{x_1^2}{a^2} - 1\right)$$

代入上式，化简可得

$$\overline{P_1F_1} = \left|\frac{c}{a}x_1 + a\right| \tag{6.6}$$

同理可求

$$\overline{P_1F_2} = \left|\frac{c}{a}x_1 - a\right| \tag{6.7}$$

因为 $c > a$, $|x| \geq a$, 所以 $\left|\frac{c}{a}x_1\right| > a$，$\frac{c}{a}x_1 + a$ 及 $\frac{c}{a}x_1 - a$ 与 $\frac{c}{a}x_1$ 同号.

当 $x_1 > 0$ 时

$$\overline{P_1F_1} = \frac{c}{a}x_1 + a, \qquad \overline{P_1F_2} = \frac{c}{a}x_1 - a$$

因此，

$$\overline{P_1F_1} - \overline{P_1F_2} = 2a$$

当 $x_1 < 0$ 时，

$$\overline{P_1F_1} = -\left(\frac{c}{a}x_1 + a\right), \qquad \overline{P_1F_2} = -\left(\frac{c}{a}x_1 - a\right)$$

因此，

$$\overline{P_1F_1} - \overline{P_1F_2} = -2a$$

这就证明了，凡坐标适合方程 (6.5) 的点都在双曲线上，由以上证明，所以方程 (6.5) 是所求的双曲线的方程，并且我们把方程 (6.5) 叫做**双曲线的标准方程**，它所表示的双曲线的焦点在 X 轴上，焦点是 $F_1(-c, 0)$、$F_2(c, 0)$. 这里 $c^2 = a^2 + b^2$.

如果取 F_1、F_2 的连线作为 Y 轴，取 F_1F_2 的垂直平分线作为 X 轴，在这一坐标系中，仿上面的方法可得双曲线的方程为

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1} \tag{6.8}$$

只要将方程 (6.5) 中的 x 与 y 对调就可得到方程 (6.8), 这一方程也叫做双曲线的标准方程，它表示双曲线的焦点在 Y 轴上，焦点是 $F_1(0, -c)$, $F_2(0, c)$, $c^2 = a^2 + b^2$.

下面我们用双曲线的标准方程研究它的几何形状.

首先，与椭圆方程一样，方程 (6.5) 中只含有 x、y 的平方，故把其中一个坐标变号，对于方程没有影响，这就表明，如果点 $M(x, y)$ 在双曲线上，那么 $M_1(x, -y)$、$M_2(-x, -y)$、$M_3(-x, y)$ 等也都在双曲线上，所以，双曲线是以 X 轴或 Y 轴为对称轴的轴对称图形，又是以坐标原点为对称中心的中心对称图形，对称中心又叫做双曲线的中心，其次，由方程 (6.5) 得

$$\frac{x^2}{a^2} \geq 1, \qquad x^2 \geq a^2$$

则 $x \geq a$ 或 $x \leq -a$. 这说明双曲线在两条直线 $x = a$, $x = -a$ 所夹平面区域的外侧，最后我们讨论双曲线在第 I 象限内的性态，在第 I 象限，方程 (6.5) 可写为

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \qquad (x \geq a)$$

当 $x = a$ 时，$y = 0$, 当 x 由 a 递增且趋向 ∞, y 也由 0 递增趋向，方程的轨迹趋向无穷远（图 6.7），但由于

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}x\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2} < \frac{b}{a}x$$

即

$$\frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} > 0$$

所以，当 x 由 a 趋向 ∞ 时，相应的 y 值愈来愈接近 $\dfrac{b}{a}x$, 而又不会大于 $\dfrac{b}{a}x$, 这说明，双曲线在第 I 象限的部分永远在射线 $y = \dfrac{b}{a}x$ $(x \geq 0)$ 的下方并且逐渐

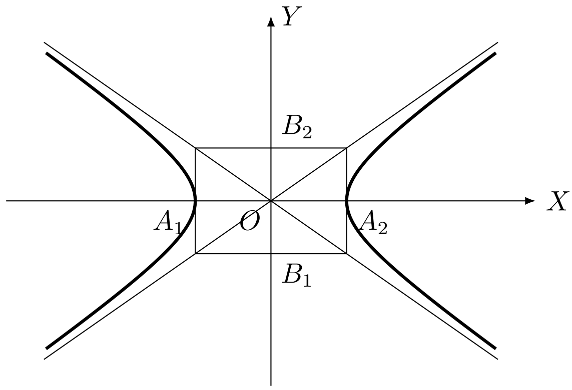


图 6.7

接近于射线 $y=\dfrac{b}{a}x\ (x\geq 0)$. 由对称性，可推知双曲线在其它象限的性态（图 6.7）.

直线 $y=\dfrac{b}{a}x$ 和 $y=-\dfrac{b}{a}x$ 叫做**双曲线的渐近线**.

令 $y=0,\ x=\pm a$, 点 $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$ 叫做双曲线的顶点，$\overline{A_1A_2}$ 叫做双曲线的**实轴**，它的长等于 $2a$, a 叫做双曲线的实半轴长.

令 $x=0$, $y=\pm b\sqrt{-1}$, 这说明双曲线和 Y 轴没有交点. 在 Y 轴上作 $B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$, $\overline{B_1B_2}$ 叫做双曲线的虚轴，它的长等于 $2b$, b 叫做双曲线虚半轴长（图 6 .7）. 实轴和虚轴等长的双曲线叫做**等轴双曲线**.

以已知双曲线的虚轴为实轴，实轴为虚轴所得到的双曲线叫做原双曲线的**共轭双曲线**. 由这个定义可知，双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 与 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ 是互为共轭双曲线（图 6.8）.

作为练习，请同学证明：双曲线和它的共轭双曲线有相词的渐近线.

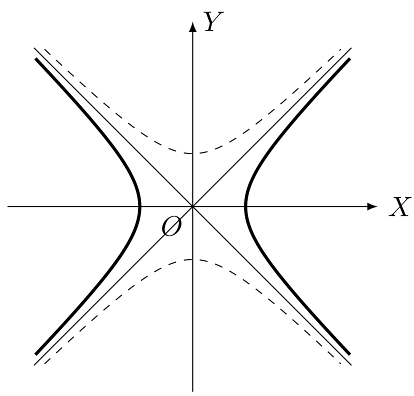


图 6.8

和定义椭圆的离心率 e 一样，对于双曲线，比值

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

也叫做双曲线的离心率，因为 $c>a$, 所以双曲线的离心率 $e>1$, 容易看出，$\frac{b}{a}$ 越大，e 越大；反之，e 越大，$\frac{b}{a}$ 也越大，渐近线 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 的斜率的绝对值也越大，这时双曲线的开口增大越快.

例 6.4 设双曲线两焦点间的距离等于 8, 顶点间的距离等于 6, 实轴在 X 轴上，求双曲线的标准方程，离心率，渐近线方程并画草图.

解：依题意 $2c=8$, $2a=6$, 所以 $c=4$, $a=3$,

$$b^2=c^2-a^2=16-9=7, \qquad b=\sqrt{7}$$

所求双曲线方程为

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$$

离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{3}$，渐近线方程为

$$y=\frac{\sqrt{7}}{3}x, \qquad y=-\frac{\sqrt{7}}{3}x$$

作图：如图 6.9 所示

1. 在 X 轴上作 $A_1(-3,0)$, $A_2(3,0)$, 在 Y 轴上作 $B_1(0,-\sqrt{7})$、$B_2(0,\sqrt{7})$, 过 A_1、A_2、B_1、B_2 作矩形 $ABCD$, 直线 OA, OB 为双曲线的渐近线.
2. 算出一些满足所求双曲线方程的点的坐标：

x	±4	±5	±6	±7
y	±2.3	±3.5	±4.6	±5.6

描点连线，使曲线与渐近线逐渐接近，就可得到双曲线的草图.

例 6.5 证明：双曲线上任一点到两条渐近线的距离的乘积等于常数 $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$

证明：已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，它的两条渐近线方程为

$$\ell_1:\ bx+ay=0, \qquad \ell_2:\ bx-ay=0$$

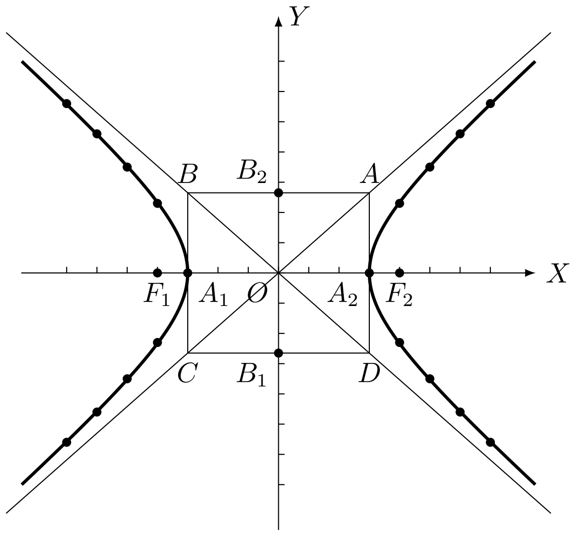


图 6.9

设 $P(x_1, y_1)$ 为双曲线上任一点，P 到 ℓ_1 的距离记为 d_1，P 到 ℓ_2 的距离记为 d_2，则：

$$d_1 = \frac{|bx_1 + ay_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad d_2 = \frac{|bx_1 - ay_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d_1 \cdot d_2 = \frac{|bx_1 + ay_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{|bx_1 - ay_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|b^2x_1^2 - a^2y_1^2|}{a^2 + b^2}$$

但

$$|b^2x_1^2 - a^2y_1^2| = a^2b^2$$

所以

$$d_1 \cdot d_2 = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$$

练习

1. 求适合下列条件的双曲线的标准方程.

   (a) 实轴长为 12, 虚轴长为 $2\sqrt{13}$, 焦点在 X 轴上;

   (b) 实轴长为 5, 虚轴长为 3, 焦点在 Y 轴上;

   (c) 焦距是 10, 两顶点间的距离是 8; 实轴在 X 轴上;

   (d) 实轴长等于 4, 且经过点 $A(2, 4)$, 实轴在 X 轴上;

   (e) 实轴长等于 4, 且经过点 $A(2, 4)$, 实轴在 Y 轴上.

2. 求下列双曲线的实轴和虚轴长，顶点和焦点的坐标，离心率和渐近线方程.

(a) $x^2-y^2=1$

(b) $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{9}=1$

(c) $4x^2-y^2=16$

(d) $x^2-y^2=-1$

(e) $\dfrac{x^2}{25}-y^2=-1$

3. 画出双曲线 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 的草图.

4. 等轴双曲线的一个焦点 $F_1(-4,0)$, 求它的标准方程.

5. 证明：

(a) 双曲线和它的共轭双曲线有共同的渐近线；

(b) 双曲线和它的共轭双曲线的四个焦点在同一个圆上.

6. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$, 求出它的共领双曲线方程并求共轭双曲线的焦点的坐标，渐近线方程和离心率.

三、抛物线的标准方程和形状

定义

平面内与一定点和一条定直线的距离相等的点的轨迹叫做抛物线. 定点叫做抛物线的焦点，定直线叫做抛物线的准线.

下面，我们根据抛物线的定义来建立抛物线的方程.

设焦点为 F, 准线为 ℓ (图 6.10)，过 F 点作 ℓ 的垂线与 ℓ 相交于 D 点，取射线 DF 的方向作为 X 轴的正方向，以 $\overline{DF}$ 的垂直平分线为 Y 轴，设 F 到 ℓ 的距离为 p, 即 $\overline{DF}=p$, 则

$$F\left(\frac{p}{2},0\right),\qquad D\left(-\frac{p}{2},0\right)$$

准线 ℓ 的方程为

$$x=-\frac{p}{2}$$

设 $P(x,y)$ 是抛物线上任一点，它到焦点 F 的距离等于它到 ℓ 的距离. 即

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|$$

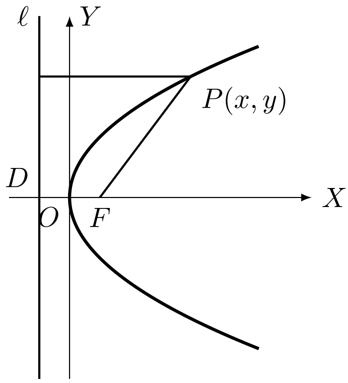


图 6.10

将上式两边平方，并化简得

$$y^2 = 2px \qquad (p > 0) \tag{6.9}$$

这就是说,凡是在抛物线上的点,它的坐标都适合这一方程;反过来,设 $P(x_1, y_1)$ 的坐标满足方程 (6.9), 则 $y_1^2 = 2px_1$. 点 $P(x_1, y_1)$ 与焦点 F 的距离

$$\begin{aligned} PF &= \sqrt{\left(x_1 - \frac{p}{2}\right)^2 + y_1^2} = \sqrt{\left(x_1 - \frac{p}{2}\right)^2 + 2px_1} \\ &= \sqrt{\left(x_1 + \frac{p}{2}\right)^2} = \left|x_1 + \frac{p}{2}\right| \end{aligned}$$

这就是点 P 到准线的距离，这就证明了，凡坐标适合方程 (6.9) 的点，都在抛物线上.

由以上证明，所以方程 (6.9) 是所求的抛物线方程，并把方程 (6.9) 叫做**抛物线的标准方程**. 它表示的抛物线的焦点 F 在 X 轴的正半轴上且坐标是 $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ 准线方程是 $x = -\frac{p}{2}$.

如果抛物线的焦点和准线分别取

$$\begin{aligned} &F\left(-\frac{p}{2}, 0\right), \quad x = \frac{p}{2} \qquad (\text{图 } 6.11) \\ &F\left(0, \frac{p}{2}\right), \quad y = -\frac{p}{2} \qquad (\text{图 } 6.12) \\ &F\left(-\frac{p}{2}, 0\right), \quad y = \frac{p}{2} \qquad (\text{图 } 6.13) \end{aligned}$$

可分别类似地得到抛物线标准方程为

$$y^2 = -2px, \qquad x^2 = 2py, \qquad x^2 = -2py$$

下面我们用抛物线的标准方程来研究抛物线的形状.

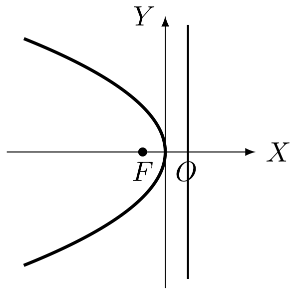


图 6.11

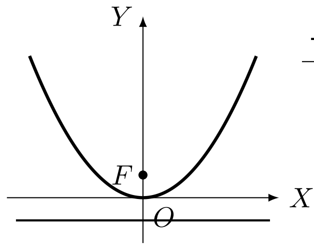


图 6.12

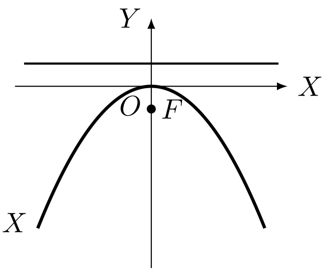


图 6.13

首先，在方程 (6.9) 中，含有 y 的平方，故把 $-y$ 代替 y 对方程没有影响，这表明曲线是**以 X 轴为对称轴的轴对称形**. 我们把这条轴叫做**抛物线的轴**. 轴和抛物线的交点叫做**抛物线的顶点**.

其次，由方程 (6.9) 可知 $x \geq 0$, 当 x 增大时，y 的绝对值也跟着增大，因此抛物线在 Y 轴的右方，向上、向下无限伸展. 设 $P(x, y)$ 是抛物线上任一点，直线 OP 的倾角为 α, 则

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{y^2}{xy} = \frac{2px}{xy} = \frac{2p}{y}$$

其中 p 是常数，当 y 无限增大时，$\dfrac{2p}{y}$ 无限接近于零，这说明，抛物线上动点 $P(x, y)$ 无限远离原点时，$P(x, y)$ 点到 X 轴的距离无限增大，而 $\overrightarrow{OP}$ 的方向与 X 轴正向之间的方向差却趋于零，这是抛物线与双曲线的重要区别之一.

例 6.6 已知抛物线的焦点 $F(2, 0)$, 求它的标准方程.

解： 因为焦点 $F(2, 0)$ 在 X 轴上，$\dfrac{p}{2} = 2$, $p = 4$, 所以抛物线标准方程是

$$y^2 = 8x$$

例 6.7 已知抛物线的标准方程是 $y^2 = -4x$, 求它的焦点坐标和准线方程.

解： 因为 $p = -2$, 所以焦点的坐标是 $(-1, 0)$, 准线方程是 $x = 1$.

练习

1. 根据下列抛物线方程，求出焦点的坐标，准线方程，并画出草图.

(a) $y^2 = 10x$　　(c) $x^2 = 12y$

(b) $y^2 = -10x$　　(d) $y^2 = -8x$

2. 证明：抛物线 $y^2 = 2px$ 纵坐标中点的轨迹方程，是 $y^2 = \dfrac{p}{2}x$

3. 由下列已知条件，求抛物线的标准方程.

   (a) 焦点与顶点的距离等于 3;

   (b) 焦点 F 的坐标是 $(5, 0)$;

   (c) X 轴是对称轴，抛物线通过原点和点 $(1, -4)$;

   (d) Y 轴是对称轴，焦点在 $(0, 2)$;

   (e) Y 轴是对称轴，通过原点和点 $(6, -2)$.

4. 在抛物线 $y^2 = 8x$ 上，求到原点距离等于 20 的点的坐标.

5. 已知抛物线焦点 $F(2, 1)$, 准线方程是 $x + y + 1 = 0$，由抛物线的定义，求它的方程.

四、椭圆与双曲线的准线

由抛物线的定义可知，抛物线上任一点到一定点（焦点）的距离与它到一条定直线（准线）的距离之比等于常数 1, 这一节，我们将证明对椭圆和双曲线也存在着这样的定直线，使椭圆和双曲线上任一点到焦点的距离与到定直线的距离之比等于一常数，并且这个常数正好等于它们的离心率 e.

设 $P(x_1, y_1)$ 是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 上任一点，我们在前面曾得到公式

$$\overline{PF_1} = a + \frac{c}{a}x_1 \tag{6.10}$$

$$\overline{PF_2} = a - \frac{c}{a}x_1 \tag{6.11}$$

把 (6.10) 式右边变形可得

$$\overline{PF_1} = \frac{c}{a}\left(x_1 + \frac{a^2}{c}\right) = e\left(x_1 + \frac{a^2}{c}\right)$$

即：$\dfrac{\overline{PF_1}}{d_1} = e$，其中 $d_1 = x_1 + \dfrac{a^2}{c}$. 同样 (6.11) 式也可化为 $\dfrac{\overline{PF_2}}{d_2} = e$，其中 $d_2 = -x_1 + \dfrac{a^2}{c}$.

由计算点 $P(x_1, y_1)$ 分别到直线 $\ell_1:\ x+\dfrac{a^2}{c}=0$ 和 $\ell_2:\ x-\dfrac{a^2}{c}=0$ 的距离可知，d_1, d_2 正好分别是 $P(x_1, y_1)$ 到 ℓ_1 与 ℓ_2 的距离，这说明**椭圆上任一点 $P(x_1, y_1)$ 到焦点 $F_1(-c, 0)(F_2(c, 0))$ 的距离与它到定直线 ℓ_1 (ℓ_2) 的距离的比是一个常数**（等于离心率 e），两条直线

$$\ell_1:\ x=-\frac{a^2}{c}, \qquad \ell_2:\ x=\frac{a^2}{c}$$

分别叫做椭圆的左准线和右准线（图 6.14）.

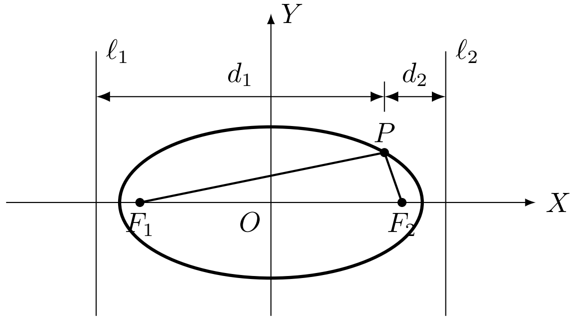


图 6.14

反过来，我们也可证明：与定点 $F_1(-c, 0)$ $(F_2(c, 0))$ 的距离和定直线 $\ell_1:\ x=-\dfrac{a^2}{c}$ $(\ell_2:\ x=\dfrac{a^2}{c})$ 的距离的比等于常数 e $(0<e<1)$ 的点必在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上.

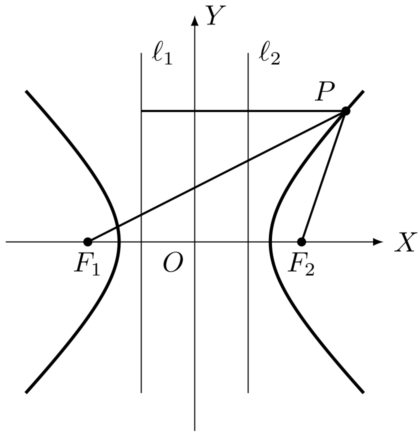


图 6.15

类比上述对椭圆的分析，同样也可证明，双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 也有两条准

线（图 6.15）：左准线 $\ell_1:\ x=-\dfrac{a^2}{c}$；左准线 $\ell_2:\ x=\dfrac{a^2}{c}$. 并且具有如下特征性质.

双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上任一点 $P(x_1,y_1)$ 到焦点 $F_1(-c,0)$ $(F_2(c,0))$ 的距离和到定直线 ℓ_1 (ℓ_2) 的距离的比是一个常数（等于离心率 e）；反之也对.

总结以上讨论和抛物线的定义，我们可给圆锥曲线一个统一的定义如下：

圆锥曲线是与一定点的距离和定直线的距离的比等于常数 e 的点的轨迹，当 $0<e<1$ 时是椭圆；$e>1$ 时是双曲线；$e=1$ 时是抛物线，定点叫做圆锥曲线的焦点，定直线叫做圆锥曲线的准线. 椭圆和双曲线有两个焦点和两条准线，抛物线只有一个焦点和一条准线.

例 6.8　求椭圆 $x+4y^2=100$ 的准线方程.

解：已知椭圆的标准方程为 $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{25}=1$，因此：

$$a=10,\qquad b=5,\qquad c=\sqrt{c^2-b^2}=5\sqrt{3}$$

所以已知椭圆的准线方程为

$$\ell_1:\ x=-\frac{a^2}{c}=-\frac{20\sqrt{3}}{3},\qquad \ell_2:\ x=\frac{20\sqrt{3}}{3}$$

例 6.9　求双曲线 $x^2-y^2=1$ 的准线方程.

解：在已知双曲线方程中，$a=1$, $b=1$, 因此，

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}$$

所以已知双曲线的准线方程为

$$\ell_1:\ x=-\frac{a^2}{c}=-\frac{\sqrt{2}}{2},\qquad \ell_2:\ x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

练习

1. 求椭圆 $3x^2+4y^2=36$ 的焦点的坐标和准线方程并画出草图.
2. 求双曲线 $2x^2-3y^2=6$ 的焦点的坐标和准线方程并画出草图.
3. 求下列每个椭圆或双曲线的准线方程

(a) $16x^2+25y^2=400$　　(c) $x^2-5y^2=10$

(b) $x^2+2y^2=4$　　(d) $4x^2-3y^2=36$

五、圆锥曲线的切线

我们知道，与圆只有一个公共点的直线叫做圆的切线，但这个定义不能推广为一般曲线的切线的定义，如图 6.16 所示，直线 ℓ_1 虽然与曲线只有一个公共点，但它不是曲线的“切线”，直线 ℓ_2 虽与曲线有两个公共点，但它与曲线“相切”.

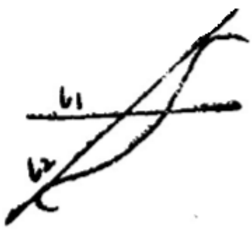


图 6.16

图 6.17

下面我们来阐述一般曲线的切线的定义，并由这个定义推导圆锥曲线的切线方程.

定义

设 P_1 为曲线上一点，过 P_1 引割线 P_1P_2 交曲线于另一点 P_2，当 P_2 沿曲线无限趋近于点 P_1 时，割线 P_1P_2 的极限位置 P_1T 叫做曲线在 P_1 点的切线（图 6.17）.

已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，设 $P_1(x_1,y_1)$ 是椭圆上一定点，$P_2(x_2,y_2)$ 是椭圆上任一点，则椭圆的割线 P_1P_2 的方程为

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)=\frac{y_2^2-y_1^2}{(x_2-x_1)(y_2+y_1)}(x-x_1) \tag{6.12}$$

由于点 $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$ 都在已给的椭圆上，所以

$$y_1^2=b^2\left(1-\frac{x_1^2}{a^2}\right),\qquad y_2^2=b^2\left(1-\frac{x_2^2}{a^2}\right)$$

两式相减得

$$y_2^2 - y_1^2 = \frac{b^2}{a^2}(x_2^2 - x_1^2)$$

代入 (6.12) 化简即可得

$$y - y_1 = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1}(x - x_1)$$

当 P_2 与 P_1 重合时，即 $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$, 上式变为

$$y - y_1 = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$$

或

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}$$

即：

$$\boxed{\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1} \tag{6.13}$$

(6.13) 式就是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 在点 $P_1(x_1, y_1)$ 的切线方程.

同理可证，双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 在点 $P_1(x_1, y_1)$ 处的切线方程为

$$\boxed{\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1} \tag{6.14}$$

抛物线 $y^2 = 2px$ 在点 $P_1(x_1, y_1)$ 处的切线方程为

$$\boxed{y_1 y = p(x + x_1)} \tag{6.15}$$

经过切点 $P_1(x_1, y_1)$ 与切线垂直的直线叫做曲线在点 P_1 的**法线**.

根据法线的定义可知，法线的方向向量可取切线的法向量，因此可得椭圆、双曲线、抛物线的在 $P_1(x_1, y_1)$ 点的法线方程分别为

$$\frac{x - x_1}{b^2 x_1} = \frac{y - y_1}{a^2 y_1} \tag{6.16}$$

$$\frac{x - x_1}{b^2 x_1} = \frac{y - y_1}{-a^2 y_1} \tag{6.17}$$

$$\frac{x - x_1}{p} = \frac{y - y_1}{-y_1} \tag{6.18}$$

例 6.10　求椭圆：$2x^2 + 3y^2 = 35$ 在其上一点 $P(2, 3)$ 的切线方程.

解：已知椭圆化为标准方程为

$$\frac{x^2}{\frac{35}{2}}+\frac{y^2}{\frac{35}{3}}=1$$

所以，已知椭圆在点 $P(2,3)$ 的切线方程为

$$\frac{2x}{\frac{35}{2}}+\frac{3y}{\frac{35}{3}}=1$$

整理得：$4x+9y=35$

例 6.11 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 在其上任一点 $P_0(x_0,y_0)$ 的切线与双曲线的两条渐近线分别相交于 A、B 两点（图 6.18），求证 $\triangle OAB$ 的面积等于常数 ab.

解：已知双曲线在 $P_0(x_0,y_0)$ 的切线方程为

$$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$$

将它分别与渐近线方程 $y=-\frac{b}{a}x$, $y=\frac{b}{a}x$ 联立求解，就可分别得到

$$A\left(\frac{a^2b}{bx_0+ay_0},\frac{-ab^2}{bx_0+ay_0}\right),\qquad B\left(\frac{a^2b}{bx_0-ay_0},\frac{ab^2}{bx_0-ay_0}\right)$$

所以

$$\begin{aligned}S_{\triangle OAB}&=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\frac{a^2b}{bx_0+ay_0} & \frac{-ab^2}{bx_0+ay_0}\\ \frac{a^2b}{bx_0-ay_0} & \frac{ab^2}{bx_0-ay_0}\end{vmatrix}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{a^3b^3}{b^2x_0^2-a^2y_0^2}+\frac{a^3b^3}{b^2x_0^2-a^2y_0^2}\right)\\&=\frac{a^3b^3}{b^2x_0^2-a^2y_0^2}=\frac{a^3b^3}{a^2b^2}=ab\end{aligned}$$

例 6.12 设 F 是抛物线 $y^2=2px$ 的焦点，M 是抛物线上任一点，MT 是抛物线在点 M 的切线，MN 是法线并与 X 轴相交于 N 点，直线 ME 平行 X 轴（图 6.19),

求证：$\angle FMN=\angle NME$.

解：设 $M(x_1,y_1)$, 则由在 M 点的切线方程可得在 M 点的法线方程为

$$y-y_1=-\frac{y_1}{p}(x-x_1)$$

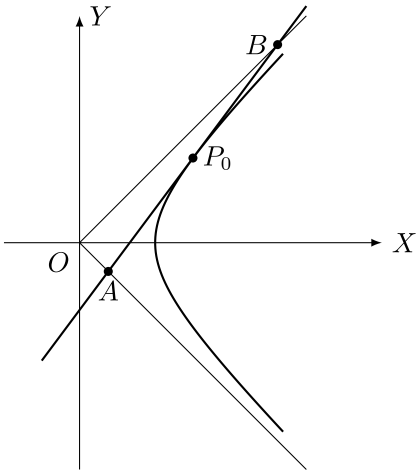


图 6.18

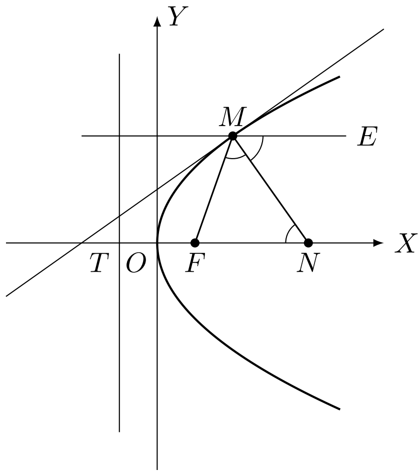


图 6.19

令 $y=0$，得 $N(x_1+p,0)$, 所以

$$\overline{FN}=x_1+p-\frac{p}{2}=x_1+\frac{p}{2}$$

又由抛物线的定义可知，$\overline{MF}$ 等于 M 点到准线 $x=-\dfrac{p}{2}$ 的距离，即

$$\overline{FM}=x_1+\frac{p}{2}$$

所以 $\overline{FN}=\overline{FM}$,　$\angle FMN=\angle FNM$, 但 $\angle FNM=\angle NME$，所以

$$\angle FMN=\angle NME$$

例 6.12 所证结论告诉我们，如果一族平行光线照射到抛物线上，经抛物线反射都通过焦点，抛物线这种光学性质有许多用途，例如太阳能灶的聚光镜，把太阳光线（看作平行）集中到焦点上，在焦点产生高温，探照灯把放在焦点处光源发出的光线经镜面反射后成为平行光线等.

我们同样可以证明，椭圆和双曲线具有如下性质.

- 椭圆的法线平分切点与两个焦点连线所成的角（图 6.20).
- 双曲线的法线平分切点与两个焦点连线所成角的邻补角（图 6.21).

我们把证明留给同学．作为练习.

上述性质说明，椭圆和双曲线具有类似于抛物线的光学性质，由椭圆一个焦点射出的光线照射到椭圆上，经过反射后都通过另一焦点（图 6.22)，在双

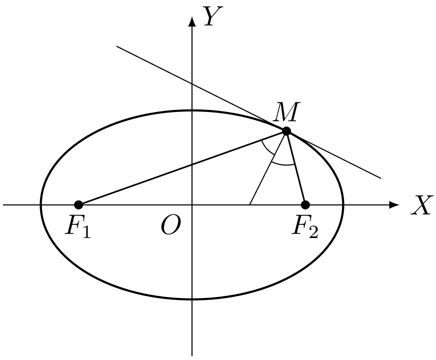


图 6.20

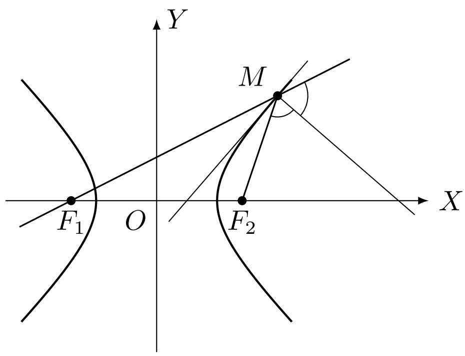


图 6.21

曲线一个焦点发出的光线，照射到双曲线上，经过反射，会使光线散开，如同光线从另一个焦点发出来的光线一样（图 6.23）.

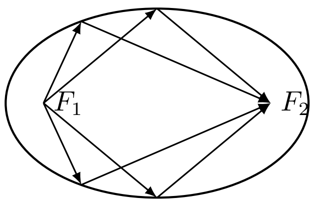


图 6.22

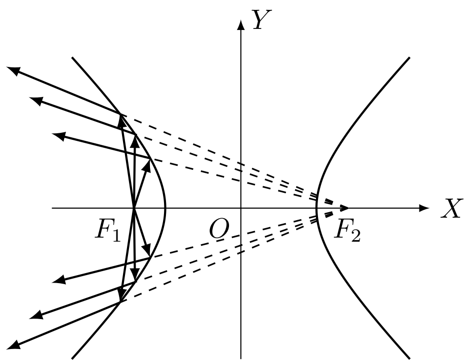


图 6.23

练习

1. 证明本小节的双曲线的切线方程 (6.14).

2. 证明本小节的抛物线的切线方程 (6.15).

3. 已知如下各曲线上一点的坐标，求在这点的切线和法线方程.

(a) $\dfrac{x^2}{225}+\dfrac{y^2}{25}=1, \qquad (9,4)$

(b) $2x^2+3y^2=14, \qquad (1,-2)$

(c) $4x^2-y^2=15, \qquad (2,-1)$

(d) $y^2=3x, \qquad (12,6)$

4. 求抛物线 $y^2=4x$ 在点 $(36,12)$ 的切线在 X 轴上的截距.

5. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 在 $P_1(x_1,y_1)$ 的切线与过两顶点 A_1,A_2 且垂直于 X 轴的两条直线分别相交于 C、D 两点，求证：$\overline{A_1C}\cdot\overline{A_2D}=b^2$.

6. 求证：双曲线两条渐近线之间的切线段被切点等分.

六、圆锥曲线的直径

定义

通过椭圆（双曲线）中心的直线，叫做**椭圆（双曲线）的直径**，与抛物线的轴平行的直线叫做**抛物线的直径**.
如果一条直线与圆锥曲线相交于两点，那么交点间的线段叫做**圆锥曲线的弦**（图 6.24）.

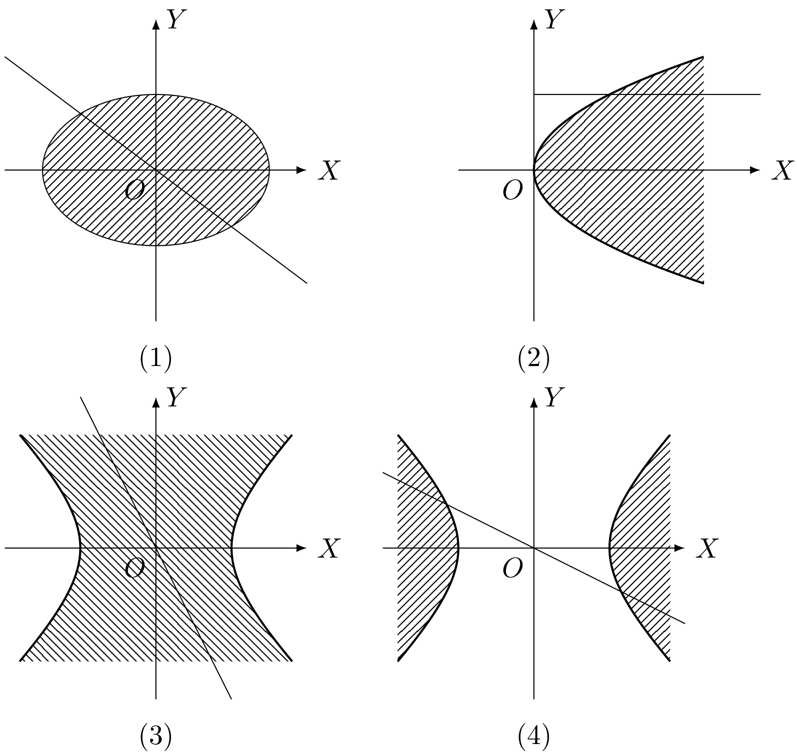


图 6.24

定理

圆锥曲线的平行弦的中点在直径上.

我们以椭圆为例加以证明，关于双曲线和抛物线的情况留给同学作为练习.

已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, 求证它的一族平行弦的中点在它的一条直径上（图 6.24(1)）.

证明： 如果平行弦垂直于对称轴，那么，由椭圆的对称性，定理显然成立．我们来证明一般情况．设平行弦所在的平行线系方程为 $y=kx+c,\quad k\neq 0$．代入已知椭圆方程整理得

$$(b^2+a^2k^2)x^2+2a^2kcx+a^2(c^2-b^2)=0$$

设这个二次方程的两个根为 x_1,x_2, 则：

$$x_1+x_2=-\frac{2a^2kc}{b^2+a^2k^2}$$

因此平行弦中点的横坐标

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{a^2kc}{b^2+a^2k^2}$$

代入直线系方程得中点的纵坐标

$$y=-\frac{b^2c}{b^2+a^2k^2}$$

于是

$$\frac{y}{x}=-\frac{b^2}{a^2k}$$

所以平行弦中点的坐标都在直线 $y=-\dfrac{b^2}{a^2k}x$ 上，这条直线通过椭圆中心，因此它是椭圆的直径.

已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的一族平行弦平行于直径 $y=kx$，则直径 $y=k'x,\quad \left(k'=-\dfrac{b^2}{a^2k}\right)$ 叫做 $y=kx$ 的**共轭直径**.

上述定理也就是说，与一条直径平行的弦的中点都在它的共轭直径上．显然直径的共轭性是相互的（图 6.25）.

例 6.13 $P_0(x_0,y_0)$ 是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 与它的一条直径 $y=kx$ 的交点，求证椭圆在 $P_0(x_0,y_0)$ 的切线平行于这条直径的共轭直径（图 6.26）.

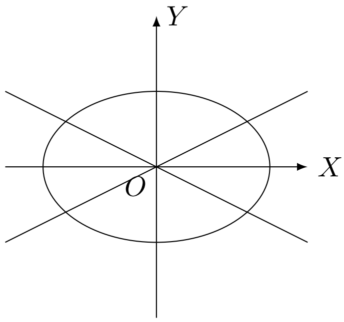


图 6.25

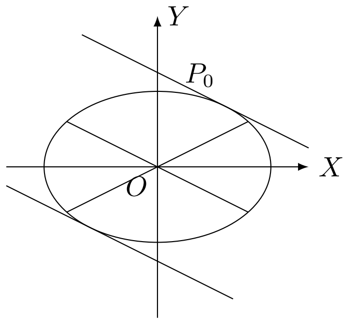


图 6.26

证明： 椭圆在 (x_0, y_0) 点的切线方程是 $\dfrac{x_0 x}{a^2}+\dfrac{y_0 y}{b^2}=1$，它的斜率 $k'=-\dfrac{x_0 b^2}{a^2 y_0}$，但 (x_0, y_0) 在已知直径上，所以

$$\frac{y_0}{x_0}=k, \qquad k'=-\frac{b^2}{a^2 k}$$

又已知直径 $y=kx$ 的共轭直径是 $y=-\dfrac{b^2}{a^2 k}x$，所以切线与共轭直径平行.

练习

1. 对双曲线和抛物线情况证明本节定理.
2. 已知椭圆 $3x^2+4y^2=12$, 求倾角为 $135°$ 的椭圆平行弦中点所在的直线方程.
3. 已知双曲线 $2x^2-y^2=6$, 它的一族平行弦的倾角是 $30°$, 求这族平行弦中点所在的直线方程.
4. 在练习 2、3 中写出与弦平行的直径和它的共轭直径的方程.
5. 已知抛物线 $y^2=6x$ 的一族平行弦的斜率是 $1/2$, 求平分这族平行弦的直径方程.
6. 设 $P_0(x_0, y_0)$ 是双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 与它的一条直径 $y=kx$ 的交点，求证：双曲线在 $P_0(x_0, y_0)$ 的切线平行于这条直径的共轭直径.

习题 6.1

1. 在椭圆 $24x^2+30y^2=720$ 上，求与短轴相距为 5 的点的坐标.

2. 一椭圆以坐标轴为对称轴，坐标原点为对称中心且经过点 $M(\sqrt{3},-2)$, $N(-2\sqrt{3},1)$, 求此椭圆的方程.

3. 点 $P(x_1,y_1)$ 和点 $Q(x_2,y_2)$ 分别位于椭圆的内部和外部，求证

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}<1, \qquad \frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}>1$$

4. 已知一椭圆的准线方程是 $x=\pm 8$, 短轴长等于 8, 求此椭圆的方程.

5. 已知椭圆 $36x^2+100y^2=3600$, 在它上面求一点使这点到右焦点的距离是这点到左焦点距离的 4 倍.

6. 已知椭圆中心在原点，它的一个焦点是 $F_2(3,0)$, 求其上一点 $M(4,2.4)$ 到准线的距离.

7. 求下列各双曲线标准方程.

   (a) 两焦点间的距离是 8, 两准线间的距离是 6;

   (b) 已知两条准线方程是 $x=\pm 3\sqrt{2}$, 两条渐近线的夹角是直角.

   (c) 已知渐近线方程是 $y=\pm 2x$, 两个焦点距中心的距离是 5.

   (d) 已知渐近线方程是 $y=\pm\dfrac{5}{3}x$, 且双曲线通过点 $N(6,9)$.

8. 根据下列已知条件，求双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的渐近线方程.

   (a) 离心率 $e=2$;

   (b) 两焦点间的距离是二准线间距离的 2 倍.

9. 根据下列已知条件，求双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的离心率.

   (a) 两渐近线之间的夹角是 $60°$;

   (b) 两渐近线之间的夹角是 $90°$.

10. 已知等轴双曲线 $x^2-y^2=8$, 求一抛物线方程使它与已知双曲线有公共焦点且通过点 $M(-5,3)$.

11. 通过点 $A(2,-5)$ 引直线平行于双曲线 $x^2-4y^2=4$ 的渐近线，求此直线的方程.

12. 通过点 $A(3,-1)$ 作双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ 的弦且被 A 点平分，求此弦的方程.

13. 求下列抛物线方程，已知

(a) 顶点在 $(0,0)$, 焦点在 $(2,0)$;

(b) 顶点在 $(0,0)$, 准线是 $2x+5=0$;

(c) 顶点在 $(0,0)$, 准线是 $2y-1=0$;

(d) 顶点在 $(0,0)$, 焦点在 $(0,-3/5)$.

14. 一条抛物线顶点在原点，它的轴是 X 轴并且它通过点 $M(-1,1)$, 求它的方程.

15. 求椭圆 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的内接正方形每边所在直线的方程.

16. 求直线 $Ax+By+C=0$ 与椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 相切的条件.

17. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 的两个焦点到它的某条切线的距离之比是 9, 求此切线方程.

18. 求双曲线 $\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 在下列各点的切线，$(2\sqrt{2},0)$, $(-4,3)$.

19. 一条双曲线在点 $M(4,2)$ 与直线 $x-y-2=0$ 相切. 求此双曲线的方程.

20. 求直线：$Ax+By+C=0$ 与双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 相切的条件.

21. 已知抛物线 $y^2=12x$, 根据下列各条件，求它的切线方程.

(a) 切点的横坐标 $x=3$;

(b) 平行于直线 $3x-y+5=0$;

(c) 垂直于直线 $2x+y-7=0$;

(d) 与直线 $4x-2y+9=0$ 交成 $\pi/4$ 角.

22. 求直线 $y=kx+b$ 与抛物线 $y^2=2px$ 相切的条件.

23. 直线 $x+y=1$ 与椭圆相交于 C 和 D 两点，求弦 $\overline{CD}$ 的中点的坐标.

24. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, 在其上一点 P 的切线和法线分别与 X 轴相交于 T 点和 G 点，过焦点 F_1、F_2 和原点分别作切线的垂线，设垂足分别为 V、U、K, 过 P 点作 X 轴的垂线，设垂足为 N, 求证：

(a) $\overline{ON}\cdot\overline{OT}=a^2$

(b) $\overline{PG}\cdot\overline{OK}=b^2$

(c) $\overline{OG}=e^2\cdot\overline{ON}$

(d) $\overline{F_1V}\cdot\overline{F_2U}=b^2$

第二节 坐标变换

一、坐标轴的平移

不改变坐标轴的方向和长度单位，只变换原点的位置，这种坐标系的变换叫做**坐标轴的平移**，简称**移轴**.

给定一坐标系 OXY, 平移坐标轴得到新坐标系 $O'X'Y'$, 下面我们来确定平面上任意一点 P 的新坐标 (x',y') 与原坐标 (x,y) 之间的关系（图 6.27).

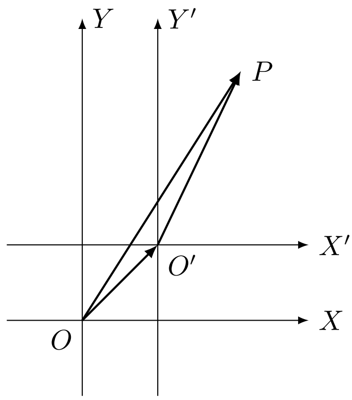


图 6.27

设 O' 在坐标系 OXY 中的坐标为 (h,k), 则在坐标系 OXY 中

$$\overrightarrow{OO'}=(h,k),\qquad \overrightarrow{OP}=(x,y),\qquad \overrightarrow{O'P}=(x',y')$$

因为 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'P}$，所以

$$(x,y)=(h,k)+(x',y')$$

即：

$$x=x'+h,\qquad y=y'+k \tag{6.19}$$

或

$$x'=x-h,\qquad y'=y-k \tag{6.20}$$

公式 (6.19), (6.20) 叫做**平移公式**或**移轴公式**.

例 6.14 给定一坐标系 OXY, 平移坐标轴，原点移到 $O'(3,2)$, 求 $A(5,6)$ 的新坐标.

解： 把 A、O' 点的坐标代入平移公式 (6.20), 得

$$x' = 5 - 3 = 2, \qquad y' = 6 - 2 = 4$$

即点 A 在新坐标系 $O'X'Y'$ 中的坐标为 $(2,4)$.

例 6.15 平移坐标轴，化简圆的方程 $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$

解： 把已知圆的方程配方得

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 4 \tag{6.21}$$

设它上面任一点的新坐标为 (x', y'), 平移坐标轴使

$$x' = x + 1, \qquad y' = y - 3$$

即：$x = x' - 1, \qquad y = y' + 3$，代入 (6.21)，得到新方程为 (图 6.28)

$$x'^2 + y'^2 = 4$$

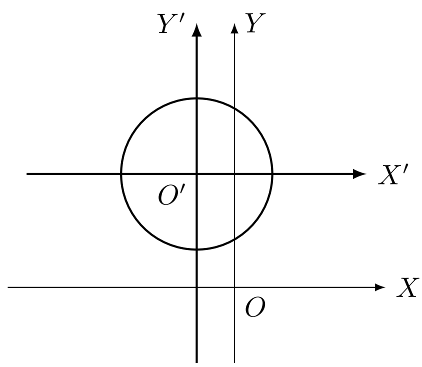


图 6.28

从例 6.15 可以看出，适当地变换坐标系，可以使曲线的方程简化．由于曲线的几何性质与我们选取的坐标系无关．所以，我们研究曲线时，总是想法选择能使曲线方程最为简单的坐标系，以便于我们研究曲线的性质．

练习

1. 平移坐标轴，使原点移至 $O'(-2,.3)$, 求下列各点的新坐标，并画图.
$$A(1,2),\quad B(0,-2),\quad C(-3,-2),\quad D(-3,-5)$$

2. 平移坐标轴，化简下列圆的方程，并画图.
   (a) $(x-1)^2+(y-2)^2=1$
   (b) $(x+2)^2+(y-5)^2=9$
   (c) $x^2+y^2+2x-6y+1=0$

3. 平移坐标轴，使原点移至 $O'(2,-1)$, 求曲线 $y^2+2y-4x+9=0$ 在新坐标系的方程.

4. 已知直线 ℓ : $2x+3y-5=0$, 平移坐标轴，使原点移至 $O'\left(\dfrac{5}{2},0\right)$, 求 ℓ 在新坐标系中的方程.

5. 平移坐标轴，化简下列曲线方程，并画出曲线的草图.
   (a) $\dfrac{(x-3)^2}{25}+\dfrac{(y+3)^2}{9}=1$
   (b) $(x+1)^2-(y-1)^2=1$
   (c) $y=4(x+3)^2-1$

二、坐标轴的旋转

不改变坐标轴的原点和长度单位，只是坐标轴绕原点转一角度，这种坐标系的变换叫做**坐标轴的旋转**，简称**转轴**.

给定一坐标系，坐标轴绕原点 O 转 θ 角，得到一新坐标系 $OX'Y'$(图 6.29). 下面我们来确定平面上任一点 P 的新坐标 (x',y') 与原坐标 (x,y) 之间的关系.

设 $\vec{e}_x,\vec{e}_y$ 和 $\vec{e}_{x'},\vec{e}_{y'}$ 分别是两个坐标系中的基向量，则

$$\overrightarrow{OP}=x\vec{e}_x+y\vec{e}_y=x'\vec{e}_{x'}+y'\vec{e}_{y'}$$
$$\vec{e}_{x'}=\cos\theta\vec{e}_x+\sin\theta\vec{e}_y$$
$$\vec{e}_{y'}=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\vec{e}_x+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\vec{e}_y=-\sin\theta\vec{e}_x+\cos\theta\vec{e}_y$$

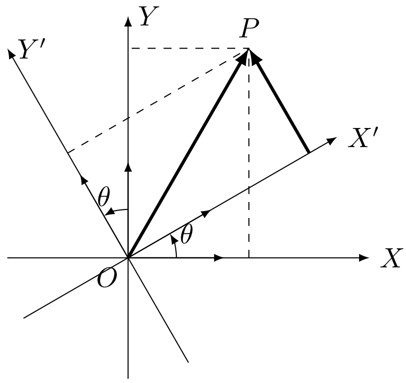


图 6.29

代入上式，得

$$x\vec{e}_x + y\vec{e}_y = (x'\cos\theta - y'\sin\theta)\vec{e}_x + (x'\sin\theta + y'\cos\theta)\vec{e}_y$$

所以：

$$\boxed{\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}} \tag{6.22}$$

由 (6.22) 解出 x', y' 得

$$\boxed{\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}} \tag{6.23}$$

(6.22) 式是用新坐标来表示原坐标的公式，(6.23) 式是用原坐标来表示新坐标的公式，它们统称为**旋转公式**或转轴公式.

例 6.16 把坐标轴旋转 $\dfrac{\pi}{3}$，求点 $P(-2,3)$ 在新坐标系中的坐标.

解：把已知量代入旋转公式 (6.23), 得

$$x' = (-2)\cdot\cos\frac{\pi}{3} + 3\cdot\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}-2}{2},$$
$$y' = -(-2)\cdot\sin\frac{\pi}{3} + 3\cdot\cos\frac{\pi}{3} = \frac{2\sqrt{3}+3}{2}$$

所以，P 点的新坐标是 $\left(\dfrac{3\sqrt{3}-2}{2}, \dfrac{2\sqrt{3}+3}{2}\right)$

例 6.17 把坐标轴旋转 $\dfrac{\pi}{4}$，求曲线 $xy = 1$ 在新坐标系中的方程.

解： $\theta=\dfrac{\pi}{4}$，代入旋转公式 (6.22), 得

$$x=x'\cos\frac{\pi}{4}-y'\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y')$$
$$y=x'\sin\frac{\pi}{4}+y'\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')$$

代入 $xy=1$, 得

$$\frac{1}{2}(x'-y')(x'+y')=1$$

即：

$$\frac{x'^2}{(\sqrt{2})^2}-\frac{y'^2}{(\sqrt{2})^2}=1$$

这就是曲线在新坐标系中的方程，容易看出，它是一条等轴双曲线（图 6.30).

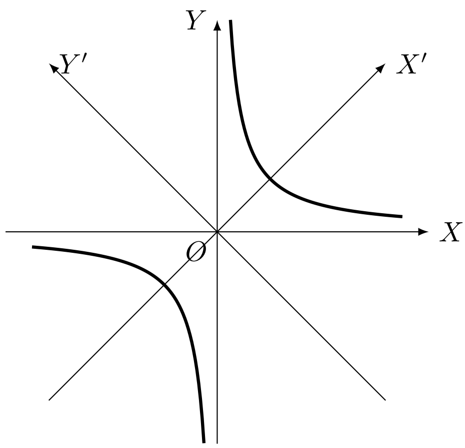


图 6.30

练习

1. 写出旋转角 θ 为下列各值时的旋转公式 (6.22) 和 (6.23):

(a) $\theta=30^\circ$　(c) $\theta=120^\circ$　(e) $\theta=-90^\circ$

(b) $\theta=-30^\circ$　(d) $\theta=90^\circ$　(f) $\theta=180^\circ$

2. 已知 $A(2,0)$, $B(3,1)$, $C(-2,4)$. 设旋转角 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$, 求它们在新坐标系中的坐标.

3. 设旋转角 $\theta=45^\circ$, 写出下列曲线在新坐标系中的方程:

(a) $x+y=0$

(b) $x^2+y^2=4$

(c) $3x^2-10xy+3y^2+8=0$

三、一般的坐标变换公式

设 OXY, $O'X'Y'$ 是两个坐标系（图 6.31），O' 在坐标系 OXY 中的坐标是 (h,k), 容易看出，把坐标系 OXY 作移轴变换，把原点 O 移到 $O'(h,k)$ 得到坐标系 $O'XY$ 然后再绕 O' 旋转 θ 角就可得到坐标系 $O'X'Y'$, 这就说，上述的一般的坐标变换是平移与旋转的合成．下面我们来确定，平面上任意一点 P 的新坐标 (x',y') 与原坐标 (x,y) 之间的关系．

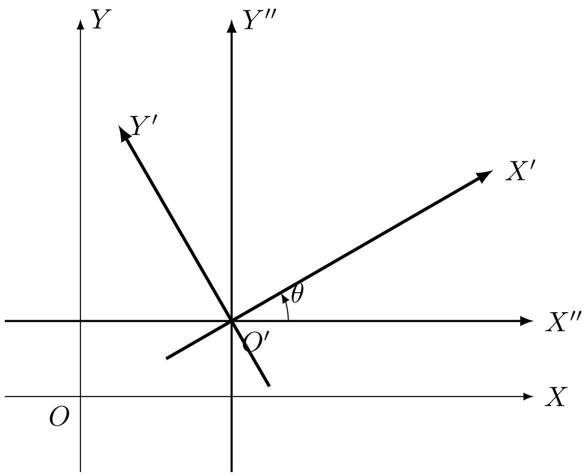


图 6.31

设 OXY 经过移轴后得到的坐标系为 $O'XY$ （图 6.31），则由平移公式，得

$$\begin{cases} x = x''+h \\ y = y''+k \end{cases} \tag{6.24}$$

再由旋转公式，得

$$\begin{cases} x'' = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y'' = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases} \tag{6.25}$$

把 (6.25) 代入 (6.24)，得

$$\boxed{\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta + h \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta + k \end{cases}} \tag{6.26}$$

由 (6.26) 式解出 x', y' 又可得

$$\boxed{\begin{cases} x' = (x-h)\cos\theta + (y-k)\sin\theta \\ y' = -(x-h)\sin\theta + (y-k)\cos\theta \end{cases}} \tag{6.27}$$

(6.26), (6.27) 两个公式就是**一般的坐标变换公式**. 公式 (6.26) 是通过新坐标来表示原坐标，公式 (6.27) 是通过原坐标来表示新坐标.

例 6.18 已知直线 $x+y-2=0$, 平移坐标轴，使原点移到 $O'(1,1)$, 再旋转 $\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 角，求直线 ℓ 在新坐标系 $O'X'Y'$ 中的方程（图 6.32）.

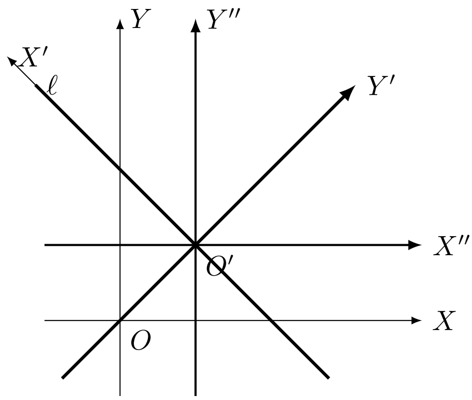


图 6.32

解：把已知量代入变换公式 (6.27), 得

$$x = x'\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - y'\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y') + 1$$
$$y = x'\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + y'\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x'+y') + 1$$

代入方程 $x+y=2$ 得：

$$y' = 0$$

这就是直线 ℓ 在新坐标系中的方程.

例 6.19 讨论线性分式函数 $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ 的图象.

解： 原式可化为 $xy-2x-y-1=0$, 为了求得这个方程的图象，我们希望选择一个新坐标系，使图象在新坐标系中有较简单的方程. 我们考虑移轴变换，

$$x=x'+h,\qquad y=y'+k$$

代入原方程，得

$$x'y'+(k-2)x'+(h-1)y'+hk-2h-k-1=0$$

如果取 $h=1$, $k=2$, 上述方程变为

$$x'y'=3$$

这就是图象在新坐标系 $O'X'Y'$ 中的方程，由例 6.17 可知它是以新坐标系的坐标轴为渐近线的等轴双曲线（图 6.33）.

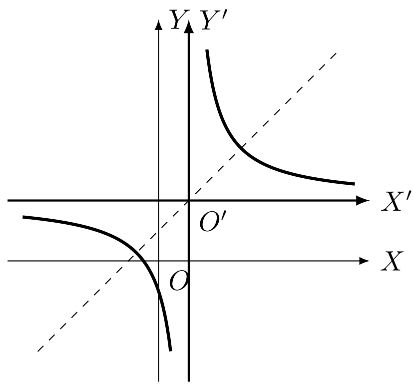


图 6.33

练习

1. 写出下列平移坐标轴，使原点移到 (h,k), 再旋转 θ 角的一般坐标变换公式：

   (a) $(h,k)=(1,1)$, $\qquad\theta=\dfrac{\pi}{4}$

   (b) $(h,k)=(-5,-3)$, $\qquad\theta=120^\circ$

   (c) $(h,k)=(0,3)$, $\qquad\theta=-\dfrac{\pi}{2}$

2. 给定坐标系 OXY, 移轴使原点移到 $O'(2,1)$, 再旋转 $\dfrac{\pi}{4}$ 角，写出

曲线在新坐标系中的方程：

(a) $2x - y - 3 = 0$

(b) $x^2 + 6xy + y^2 - 10x - 14y + 9 = 0$

3. 讨论线性分式函数 $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ 的图象.

4. 取两条互相垂直的直线 $x + 2y + 1 = 0$, $2x - y - 3 = 0$, 作新坐标轴，写出坐标变换公式.

习题 6.2

1. 给定坐标系 OXY, 已知 $P(2,1)$, 移轴将原点分别移到下列各点，求 P 点的新坐标.

   (a) $(0,3)$ (b) $(3,4)$ (c) $(-2,-6)$

2. 一定点 P 在坐系 OXY 与 $O'X'Y'$ 中的坐标分别是 $(2,5)$, $(-4,3)$ 且两坐标系的坐标轴方向相同，试求每一坐标系的原点相对于另一坐标系中的坐标.

3. 利用配方因式分解证明下列各方程都表示一对直线，并作平移变换，化简这些方程：

   (a) $x^2 - y^2 - 4x + 6y - 5 = 0$

   (b) $4x^2 - 9y^2 + 8x + 18y - 5 = 0$

   (c) $4x^2 - 16y^2 - 12x + 9 = 0$

4. 转轴到怎样的角度后，才可使点 $(2,0)$ 的两个坐标分量相等.

5. 利用移变换消去方程 $xy - x - y = 1$ 中的一次项.

6. 证明：方程 $x^2 + y^2 = r^2$ 不因旋转坐标轴而变形.

7. 取两条互相垂直的直线

$$ax + by + c_1 = 0, \qquad -bx + ay + c_2 = 0$$

   作新坐标系的坐标轴，建立新旧坐标系的变换公式.

8. 取直线 $x+y=0$, $x-y=0$, 分别为新坐标系的 X' 轴和 Y' 轴，求在新坐标系下曲线 $x^2-y^2=a^2$ 的方程.

第三节　一般二元二次方程的讨论

一、在坐标变换下二元二次方程系数的变换

一般二元二次方程可写为如下形式

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \tag{6.28}$$

方程的系数 A、B、C 中至少有一个不等于零，系数中析出因子 2, 是为了以后演算的方便. 凡坐标满足方程 (6.28) 的点的轨迹叫做**二次曲线**.

对方程 (6.28), 我们进行平移和旋转变换，令

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\theta - y'\sin\theta + h \\ y &= x'\sin\theta + y'\cos\theta + k \end{aligned}$$

代入 (6.28) 式，展开合并同类项，就得到同一个二次曲线在 $O'X'Y'$ 坐标系中的方程为

$$A'{x'}^2+2B'x'y'+C'{y'}^2+2D'x'+2E'y'+F'=0 \tag{6.29}$$

其中

$$\begin{aligned} A' &= A\cos^2\theta+2B\sin\theta\cos\theta+C\sin^2\theta \\ 2B' &= -2A\sin\theta\cos\theta+2B(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+2C\sin\theta\cos\theta \\ &= 2B\cos2\theta-(A-C)\sin2\theta \\ C' &= A\sin^2\theta-2B\cos\theta\sin\theta+C\cos^2\theta \\ D' &= 2Ah\cos\theta+2B(k\cos\theta+h\sin\theta)+2Ck\sin\theta \\ &\quad +2D\cos\theta+2E\sin\theta \\ E' &= -2Ah\sin\theta+2B(h\cos\theta-k\sin\theta)+2Ck\cos\theta \\ &\quad -2D\sin\theta+2E\cos\theta \\ F' &= Ah^2+2Bhk+Ck^2+2Dh+2Ek+F \end{aligned} \tag{6.30}$$

上述关系式 (6.30), 骤看起来是有些繁琐的，但稍加分析我们不难看出以下几点：

1. 一般二元二次方程，经坐标变换后，仍是二元二次方程，这就是说，上述二次曲线的定义与坐标系的选取无关.

2. 在 (6.30) 中，令 $h=k=0$, 也就是坐标系只作旋转变换，这时二次项系数和一次项系数一般都发生改变，而常数项不变．新方程 (6.29) 中的二次项系数 A',B',C' 只与原方程 (6.28) 中二次项系数和转角 θ 有关，而与原方程中的一次项系数和常数无关；新方程 (6.29) 中一次项系数只与原方程 (6.28) 中一次项系数及转角有关，而与二次项系数和常数无关．

3. 在 (6.30) 中，令 $\theta=0$, 也就是坐标系只作平移变换，这时二次项系数不变，即

$$A=A', \qquad B=B', \qquad C=C'$$

而一次项系数和常数项一般都要改变，且

$$\begin{aligned} D'&=2Ah+2Bk+2D \\ E'&=2Bh+2Ck+2E \end{aligned} \tag{6.31}$$

最后让我们来证明，在一般坐标变换下，新方程 (6.29) 与原方程 (6.28) 的系数有如下关系：

1. $A+C=A'+C'$

2. $B^2-AC={B'}^2-A'C'$

证明：

1.
$$\begin{aligned} A'+C'&=A\cos^2\theta+2B\sin\theta\cos\theta+C\sin^2\theta+A\sin^2\theta \\ &\quad -2B\sin\theta\cos\theta+C\cos^2\theta \\ &=A(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+C(\sin^2\theta+\cos^2\theta) \\ &=A+C \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} A'-C'&=(A-C)\cos 2\theta+2B\sin 2\theta \\ (2B')^2+(A'-C')^2&=(2B)^2+(A-C)^2 \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} {B'}^2-A'C'&=\frac{1}{4}\left[(2B)^2+(A-C)^2-(A'+C')^2\right] \\ &=\frac{1}{4}\left[(2B)^2+(A-C)^2-(A+C)^2\right] \\ &=B^2-AC \end{aligned}$$

由以上证明可知，$A+C$ 和 B^2-AC **都是二元二次方程在一般坐标变换下不变的量**.

练习

1. 对方程 (6.28) 作旋转变换，如果使方程 (6.29) 中 $B'=0$, 求证：$(A'-C')^2=(A-C)^2+4B^2$.
2. 对方程 (6.28) 作平移变换，如果使方程 (6.29) 中，消去各一次项，求证：

$$F=\frac{-\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}}{B^2-AC}$$

二、一般二元二次方程的化简

这节，我们来研究，如何选取适当的坐标系，使二次曲线的方程有较简单的形式.

(一) 用平移变换消去二元二次方程中各一次项

由 (6.31) 式可知，对一般二元二次方程，若要在新坐标系中消去各一次项，只要作平移变换选取 (h,k) 使

$$\begin{cases} Ah+Bk+D=0 \\ Bh+Ck+E=0 \end{cases}$$

在 $B^2-AC\neq 0$ 时，此方程组有唯一一组解 (h,k), 我们将坐标原点移到 (h,k), 就可使二次曲线在新坐标系中的方程中 $D'=E'=0$. 在 $B^2-AC=0$ 时，若 $A:B=B:C=D:E$, 方程组有无穷多解，若 $A:B=B:C\neq D:E$, 方程组无解，在后一种情况出现时，我们可先用下面 (二) 中介绍的方法去化简方程.

例 6.20 平移坐标轴，化简方程 $2x^2+3y^2-8x+6y-7=0$ 并画出新坐标系和方程的曲线.

解： 令 $x=x'+h$, $y=y'+k$, 代入已知方程，得

$$2(x'+h)^2+3(y'+k)^2-8(x'+h)+6(y'+k)-7=0$$

就是，

$$2x'^2+3y'^2+(4h-8)x'+(6k+6)y'+2h^2+3k^2-8h+6k-7=0$$

令 $4h-8=0$, $6k+6=0$，解得 $h=2$, $k=-1$, 代入方程 (6.28)，得

$$2x'^2+3y'^2=18 \quad \Rightarrow \quad \frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{6}=1$$

这是椭圆的标准方程，对原坐标系来说，它的中心在 $O'(2,-1)$, 它的长轴和短轴分别在直线 $y=-1$, $x=2$ 上，它的长轴长是 6, 短轴长是 $2\sqrt{6}$. 新坐标和曲线如图 6.34 所示.

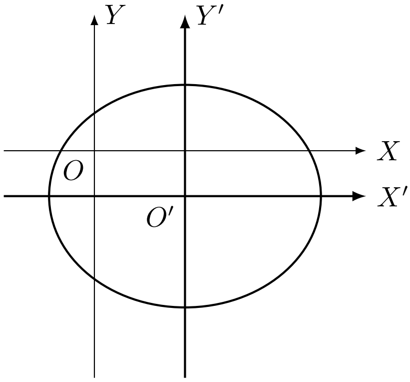


图 6.34

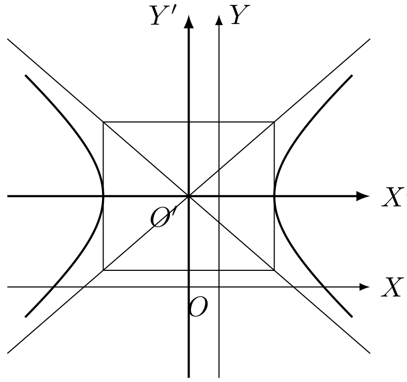


图 6.35

例 6.21 平移坐标轴，化简方程 $3x^2-4y^2+6x+24y-57=0$ 并画出新坐标系和方程的曲线.

解：把已知方程按 x,y 配方，得

$$3(x+1)^2-4(y-3)^2=24$$

令 $x'=x+1$, $y'=y-3$，代入上面方程，得：

$$3x'^2-4y'^2=24 \quad \Rightarrow \quad \frac{x'^2}{8}-\frac{y'^2}{6}=1$$

这是双曲线的标准方程，新坐标系和曲线如图 6.35 所示.

（二）用旋转变换，消去 (6.28) 中的 xy 项

由关系式 (6.30), 对一般二元二次方程，若要在新坐标系中使得方程不含 $x'y'$ 项，只要选取 θ 角，使

$$2B=2Bcos2\theta-(A-C)\sin\theta=0$$

即

$$\cot 2\theta = \frac{A-C}{2B}, \qquad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

把坐标轴旋转由上式所决定的 θ 角，就可使二次曲线在新坐标系中的方程不含 $x'y'$ 项.

例 6.22 利用坐标轴旋转化简二次方程 $8x^2 + 4xy + 5y^2 - 36 = 0$ 并画出它的图形.

解：

$$\cot 2\theta = \frac{A-C}{2B} = \frac{8-5}{4} = \frac{3}{4}$$

由于 $\cos 2\theta$ 与 $\cot 2\theta$ 同号，所以

$$\cos 2\theta = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}} = \frac{3}{5}$$

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

因此，可令旋转变换为

$$x = \frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y', \qquad y = \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'$$

代入原方程化简，得

$$9x'^2 + 4y'^2 = 36$$

这是一个椭圆，长轴在 Y' 轴上.

根据 $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$，得旋转角 $\theta \approx 26°34'$, 它的图形如图 6.36 所示.

练习

1. 平移坐标轴，化简下列各二次方程

(a) $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 3 = 0$

(b) $9x^2 + 4y^2 - 36x + 16y + 16 = 0$

(c) $2x^2 - 4y^2 + 4x + 4y - 1 = 0$

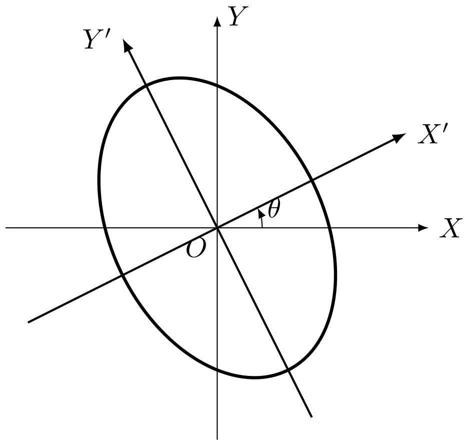


图 6.36

(d) $xy-6x-8y+20=0$

2. 旋转坐标轴，化简下列各二次方程

(a) $x^2+12xy+9y^2-16=0$

(b) $x^2-2xy+y^2+2x-4y+3=0$

3. 化简下列各二次方程

(a) $5x^2+6xy+5y^2-4x+4y-4=0$

(b) $9x^2+4xy+6y^2+12x+36y+44=0$

三、一般二元二次方程的讨论

由前节可知，一些二元二次方程，经一般坐标变换后可化为圆锥曲线的标准方程，这节我们对二元二次方程作一般性的讨论，看看如何根据二次曲线的方程来判断它的形状和位置.

给定二次曲线

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \tag{6.32}$$

我们总可通过转轴，选取适当的坐标系 $OX'Y'$, 使二次曲线的方程在这个新系中不含 $x'y'$ 项，由于转轴后方程 (6.32) 中的常数项不变，新方程可写为

$$A'{x'}^2+C'{y'}^2+2D'x'+2E'y'+F=0 \tag{6.33}$$

下面分两种情况讨论：

1. A'、C' 都不等于零（即 $A'C' \neq 0$）．再作平移变换，消去一次项，由于移轴后方程 (6.33) 中的二次项系数不变，所以新方程可写为

$$A'x''^2 + C'y''^2 + F' = 0 \tag{6.34}$$

我们再分两种情况：

(a) A'、C' 同号（即 $A'C' > 0$）．当 $F' \neq 0$, 且 A'、C' 与 F' 异号时，方程的图象是椭圆；当 $F' \neq 0$ 且 A'、C' 与 F' 同号时，显然没有点的坐标满足方程 (6.34), 因此，方程的图象不存在；当 $F' = 0$, 且 A'、C' 同号时，显然方程的图象只有一点．

(b) A'、C' 异号（即 $A'C' < 0$）．当 $F' \neq 0$ 时，方程 (6.32) 的轨迹是双曲线；当 $F' = 0$ 时，方程 (6.34) 可分解为

$$\left(x'' + \sqrt{-\frac{C'}{A'}}y''\right) \cdot \left(x'' - \sqrt{-\frac{C'}{A'}}y''\right) = 0$$

因此，方程的轨迹是两条相交直线．

2. A'、C' 中有一个为零（即 $A'C' = 0$）．设 $A' = 0$, 则方程 (6.33) 变为

$$C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F = 0 \tag{6.35}$$

作平移变换：令 $x'' = x'$, $y = y' + \dfrac{E'}{C'}$，方程 (6.35) 在新坐标系中的方程可写为

$$C'y''^2 + 2D'x'' + F' = 0 \tag{6.36}$$

我们再分两种情况：

(a) $D' \neq 0$, 这时方程的图象是抛物线．

(b) $D' = 0$, 当 $F' \neq 0$ 且 C' 与 F' 异号，方程 (6.36) 变为

$$y'' \pm \sqrt{-\frac{F'}{C'}} = 0$$

这时方程的图象两条平行直线；当 $F' \neq 0$ 且 C' 与 F' 同号，显然没有点的坐标满足方程，这时方程 (6.32) 没有轨迹，当 $F' = 0$ 时，方程 (6.36) 化为 $y'' = 0$，这时方程 (6.32) 表示两条重合的直线．

由以上讨论可知，**一般二次曲线或者是圆锥曲线（椭圆、双曲线、抛物线），或者是两条直线（包括重合情况），或者是一个点，或者不存在.**

一般我们把情况 1 中的类型 (a) 叫做**椭圆型方程**，类型 (b) 叫做**双曲线型方程**；情况 2 中的类型叫做 **抛物线型方程**. 由于在方程 (6.33) 中 $B' = 0$, 所以

$$B^2 - AC = {B'}^2 - A'C' = -A'C'$$

这样，上面情况 1 中的类型 (a) 的条件，A'、C' 同号相当于 $B^2 - AC < 0$; A'、C' 异号相当于 $B^2 - AC > 0$；情况 2 中的条件 $A'C'$ 中有一个为零相当于 $B^2 - AC = 0$. 因此，我们可不作坐标变换，直接根据 $B^2 - AC$ 来判别二次曲线的类型．$B^2 - AC$ 叫做一般二元二次方程的**判别式.**

由判别式判别二次曲线的类型，我们归纳为下表.

方程 $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$

判别式	类型	一般情形	特殊情形（退化二次曲线）
$B^2 - 4C < 0$	椭圆型	椭圆	一点或没有图象
$B^2 - 4C > 0$	双曲线型	双曲线	两条相交直线
$B^2 - AC = 0$	抛物线型	抛物线	两条平行或重合直线或没有图象

例 6.23 试判别下列方程的类型

1. $x^2 - 3xy + 2y^2 - x - 5y + 3 = 0$

2. $9x^2 - 6xy + y^2 - 4 = 0$

3. $3x^2 - 2xy + y^2 - 5x - 2y + 34 = 0$

解:

1. $B^2 - AC = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 - 1 \times 2 = \dfrac{9}{4} - 1 > 0$ 因此方程是双曲线型.

2. $B^2 - AC = (-3)^2 - 9 \times 1 = 0$ 因此方程是抛物线型.

3. $B^2 - AC = (-1)^2 - 3 \times 1 = -2 < 0$ 因此方程是椭圆型.

例 6.24 判别方程 $3x^2 + 12xy + 12y^2 + 10x + 10y - 3 = 0$ 的类型，并画出它的图形.

解： $B^2 - AC = (6)^2 - 3 \times 12 = 0$，因此方程是抛物线型．作旋转变换

$$\cot 2\theta = \frac{3-12}{12} = -\frac{3}{4}, \qquad \cos 2\theta = \frac{-\frac{3}{4}}{\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}} = -\frac{3}{5}$$

$$\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad \theta \approx 63^\circ 26'$$

旋转公式是

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y'), \qquad y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y')$$

代入原方程，化简得

$$15{x'}^2 + 6\sqrt{5}x' - 2\sqrt{5}y' - 3 = 0$$

对 x' 配方，方程可写为

$$15\left(x' + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 2\sqrt{5}\left(y' + \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$$

作平移变换，令 $x'' = x' + \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $y'' = y' + \dfrac{3}{\sqrt{5}}$，最后方程变为

$$15{x''}^2 = 2\sqrt{5}y''$$

这是一条抛物线（图 6.37），在 $OX'Y'$ 坐标系中，它的顶点是 $O'\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}, -\dfrac{3}{\sqrt{5}}\right)$，由旋转公式容易求得，在原坐标系 OXY 中，它的顶点是 $O'(1,-1)$. x'' 轴是直线 $2x - y - 3 = 0$, y'' 轴是直线 $x + 2y + 1 = 0$.

练习

1. 试判别下列方程的类型

   (a) $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 38x - 34y + 71 = 0$

   (b) $x^2 - 5xy + 13y^2 - 3x + 21y = 0$

   (c) $8x^2 + 8xy - 7y^2 + 36y + 36 = 0$

   (d) $4x^2 + 9y^2 - 16x - 18y - 11 = 0$

   (e) $2x^2 + 5xy - 3y^2 + 3x + 16y - 5 = 0$

2. 判别下列方程的类型，并画出它们的图形

   (a) $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4x - 4y - 4 = 0$

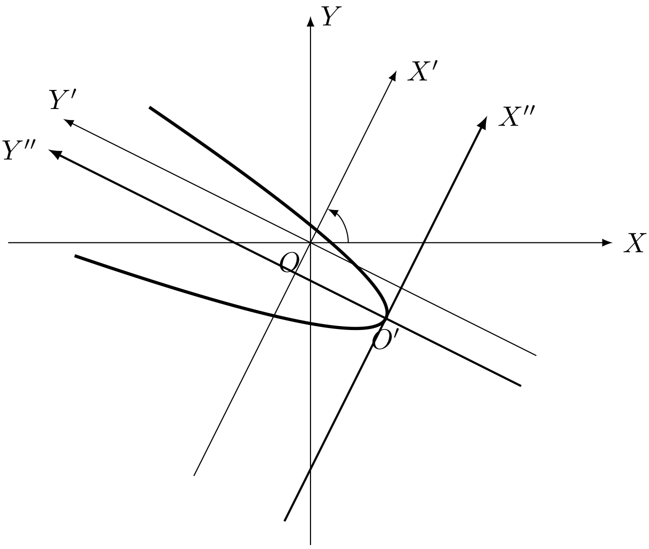


图 6.37

(b) $7x^2 - 8xy + y^2 + 14x - 8y - 2 = 0$

(c) $x^2 - 2xy + y^2 + 3x - y - 4 = 0$

(d) $3x^2 - xy + 5y^2 - 6x + y + 3 = 0$

(e) $4x^2 + 12xy + 9y^2 + 2x + 3y + 2 = 0$

习题 6.3

1. 化简下列方程，求对称轴方程，并画出方程的图象.

   (a) $11x^2 + 6xy + 3y^2 - 12x + 2y - 12 = 0$

   (b) $7x^2 - 8xy + y^2 + 14x - 8y + 16 = 0$

   (c) $8x^2 + 8xy + 2y^2 - 6x - 3y - 5 = 0$

   (d) $x^2 - 2xy - 6x + 4y + 4 = 0$

2. 证明二元二次方程表示等轴双曲线或两条互相垂直的直线的充要条件是 $A + C = 0$.

3. 证明抛物线 $y = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$ 的对称轴平行于原坐标轴.

4. 方程 $2x^2+\lambda xy+4y^2-7x+\lambda^2 y+3=0$ 中，λ 取什么值时，方程是：椭圆型；双曲线型；抛物线型.

5. 设一二次曲线过点 $(2,3)$, $(4,2)$, $(-1,-3)$, 且以 $(0,1)$ 为对称中心，求这曲线方程.

复习题六

1. 已知椭圆的两个焦点分别是 $F_1(2,4)$、$F_2(8,4)$ 并经点 $A(5,0)$, 求此椭圆方程.

2. 两条直线 $3x\pm 4y=0$ 都是适合下列各条件的双曲线的渐近线，求各双曲线方程.

   (a) 焦点在点 $(0,10)$;

   (b) 焦点在点 $(5,0)$;

   (c) 经过点 $(7,2)$.

3. 求适合下列条件的抛物线的方程式.

   (a) 顶点在点 $(2,4)$, 焦点在点 $(3,4)$;

   (b) 经过 $(0,1)$, $(2,3)$, $(5,-1)$ 三点且它的轴平行于 Y 轴;

   (c) 顶点在原点，准线是 $x=3$.

4. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，直线 $\overline{OP}$ 与 $\overline{OQ}$ 互相垂直并与椭圆分别相交于 P、Q 两点，求证：

$$\frac{1}{\overline{OP}^2}+\frac{1}{\overline{OQ}^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$$

5. 已知 $P(x_1,y_1)$ 和 $Q(x_2,y_2)$ 是椭圆 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 上任意两点，又知点 $L(e_{x_1},0)$, 点 $M(e_{x_2},0)$; 求证：$\overline{PM}=\overline{QL}$.

6. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，求证：通过点 $M(h,k)$ 且被 M 点平分的弦的方程是

$$\frac{hx}{a^2}-\frac{ky}{b^2}=\frac{h^2}{a^2}-\frac{k^2}{b^2}$$

7. 证明方程

$$\frac{x^2}{9+\lambda}+\frac{y^2}{5+\lambda}=1$$

当 $\lambda > -5$ 时，表示椭圆，当 $-9 < \lambda < -5$ 时，表示双曲线，并证明所有这些椭圆和双曲线具有公共的焦点 $(\pm 2, 0)$.

8. 已知方程
$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} = 1, \qquad a > b > 0$$
问 λ 为何值时，表示椭圆；表示双曲线. 并证明所有这些椭圆和双曲线有公共焦点.

9. 已知双曲线的轴是坐标轴，且通过点 $(1, 4)$ 和点 $(-2, 7)$, 求这双曲线的方程.

10. 证明由方程 $4x^2 - 5y^2 = c$（c 为非零常数）所确定的双曲线具有公共的渐近线.

11. 设 α 是双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 的两条渐近线的夹角，证明 $\cos\alpha = 2e^{-2} - 1$.

12. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, 如果与双曲线在 P 点的切线与两条渐近线分别相交于 E、F, 求证：

    (a) P 点是 EF 的中点；

    (b) $\overline{OE} \cdot \overline{OF} = a^2 + b^2$.

13. 双曲线 $x^2 - y^2 = a^2$ 在 P 点的法线与坐标轴相交于 C、D 两点，求证：P 点是通过 O、C、D 三点圆的中心.

14. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 在 P 点的法线分别与 X 轴，Y 轴相交于 C、D 两点，求证 $\overline{CD}$ 中点的轨迹是
$$4(a^2x^2 - b^2y^2) = (a^2 + b^2)^2$$

15. 求证椭圆只有一个内接正方形和一个外切正方形.

16. 证明通过点 $M(a, b)$ 的椭圆 $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ 的弦的中点的轨迹是
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$$

17. 从椭圆外一点 $P(x_1, y_1)$ 引椭圆的两条切线，求证：通过两个切点的直线方程为
$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

18. 证明：在过椭圆焦点弦的两个端点处的切线相交在椭圆的准线上.

19. 求抛物线 $y^2 = 8ax$ 和 $x^2 = ay$ 在公共点切线之间的交角.

20. 求椭圆 $\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{3} = 1$ 的外切正方形的边长.

21. 已知椭圆的轴平行于坐标轴且与 X 轴相切于点 $(7, 0)$, 与 Y 轴相切于点 $(0, 4)$. 求这椭圆的方程.

22. 在抛物线 $x^2 = ay$ $(a > 0)$ 上求一点 N, 使它到 $M(0, ka)$ （$k > 0$ 且为定值）的距离最小；又当 a 变化时，求 N 点的轨迹.

23. 求抛物线 $4x^2 + 4x + 3y - 2 = 0$ 的顶点和焦点的坐标及其对称轴和准线方程.

24. 证明：任何一个以椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 的互为共轭直径的端点为顶点的平行四边形的面积都等于常数 $2ab$.

25. 证明：外切椭圆的矩形，其对角线之长等于定量，

26. 试证明在抛物线上三点 P_1、P_2、P_3 各引切线，这三条切线所围成的三角形面积等于 $\triangle P_1P_2P_3$ 面积的一半.

27. 判定下列二次曲线的类型，并把它们化为标准方程.

    (a) $8x^2 + 4xy + 5y^2 + 8x - 16y - 16 = 0$

    (b) $x^2 - 4xy - 2y^2 + 10x + 4y = 0$

    (c) $4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y = 0$

第七章　极坐标与参数方程

第一节　极坐标系与曲线的极坐标方程

一、极坐标的概念

如果知道了一点相对于一定点的距离和方向，那么这个点的位置就被唯一确定了．这就是说，我们可用角度和距离来确定平面上点的位置．这节，我们研究如何利用角度和距离来建立坐标系．

在平面内取一个定点 O, 叫做**极点**，引射线 OA, 叫做 **极轴**，再选定一个长度单位和角度的正向（通常取逆时针方向）．对于平面上任一点 P, 但 P 不是极点，用 r 表示 $\overline{OP}$ 的长度，θ 表示从 OA 转到 OP 的角度．这时 r 叫做 P 点的 **极径**，θ 叫做 P 点的**极角**．有序实数对 (r, θ) 就叫做 P 点的极坐标，并记作 $P(r, \theta)$. 这样建立的坐标系叫做极坐标系（图 7.1）.

在极坐标系中，$r = 0$, 不论 θ 是什么角，$(0, \theta)$ 都表示极点，除去极点，显然，不同的点对应不同的极坐标；反过来任取一对实数 (r, θ), 其中 $0 < r < \infty$, $0 \leq 0\theta < 2\pi$, 我们能够且只能够在平面上找到一点 P, 使它的坐标恰好是 (r, θ). 由此可见，平面上除了极点外的所有点和实数对集合：

$$\{(r, \theta) | 0 < r < \infty, \quad 0 \leq \theta < 2\pi\}$$

可建立一一对应关系．

有时为了研究问题的需要，我们往往取消上述对 r, θ 的限制，规定 r 和 θ 可取任何实数值．如果已知任意有序实数对 (r, θ), 那么，我们可按下面的方法，在极坐标系中作出它的对应点．

以极轴 OA 为始边，作有向角 $\angle AOM = \theta$, 如果 $r > 0$, 在射线 OM 上作 $\overline{OP} = r$, 如果 $r < 0$, 在射线 OM 的反向延长线上作 $\overline{OP} = |r|$. 这样，对任一对有序实数 (r, θ)，我们总可以在平面上确定一点 P; 反过来，对平面上任一点 P, 都可对应无限多有序实数对组成的极坐标，如果已知 $P(r, \theta)$, 那么 $(r, \theta + 2k\pi)$, 当 k 为任意整数时，都可表示 P 点的极坐标．

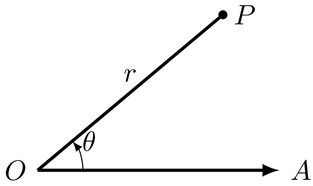


图 7.1

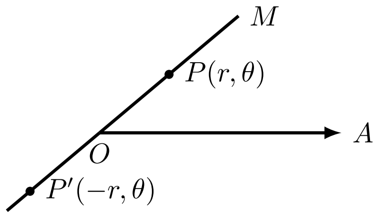


图 7.2

例 7.1　在极坐标系中，作出下列各点

$$B\left(4,\frac{\pi}{6}\right),\qquad C(2,0),\qquad D\left(4,\frac{5}{6}\pi\right),\qquad E\left(4,\frac{3}{2}\pi\right)$$

$$F\left(-4,\frac{\pi}{6}\right),\qquad G\left(3,-\frac{\pi}{3}\right),\qquad H\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$$

解：如图 7.3 所示.

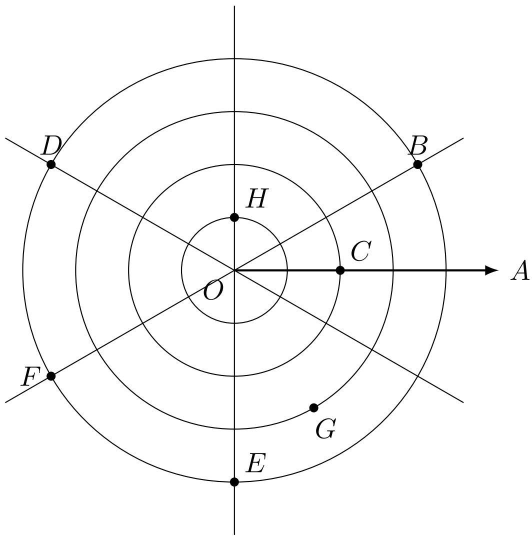


图 7.3

练习

1. 在极坐标系中，描出下各点.

$$L\left(3,\frac{\pi}{3}\right),\qquad M(3,0),\qquad N\left(1,\frac{\pi}{2}\right),\qquad P\left(-3,\frac{\pi}{4}\right)$$

$$Q\left(3,-\frac{\pi}{4}\right),\qquad R\left(-2,-\frac{2}{3}\pi\right),\qquad S\left(1,\frac{3}{4}\pi\right)$$

2. 在极坐标系中，描出下列各点和它们关于原点和极轴的对称点.

$$P_1\left(2,\frac{\pi}{3}\right),\qquad P_2\left(-3,\frac{\pi}{2}\right),\qquad P_3\left(\frac{5}{4},\frac{\pi}{4}\right)$$

3. 已知一等边三角形边长为 a, 它的中心与极点重合，一个顶点在极轴上，求三个顶点的极坐标.

4. 已知一正方形边长是 $2a$, 它的中心在极点，它的一边与极轴垂直. 求它的四个顶点的极坐标.

二、极坐标和直角坐标的关系

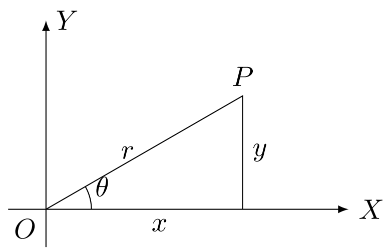


图 7.4

在平面上建立一直角坐标系 OXY 和一极坐标系，使极点和坐标原点 O 重合，极轴 OA 与 X 轴的正半轴重合. 设平面上任一点 P 在 OXY 中的坐标为 (x,y), 在极坐标系中的坐标为 (r,θ). 若 P 点的极坐标为已知，且 $r>0$, 则由三角学可知，P 点的直角坐标可由变换公式

$$x=r\cos\theta,\qquad y=r\sin\theta \tag{7.1}$$

求得. 若 $r=0$, 公式 (7.1) 显然成立，若 $r<0$, 则因 (r,θ) 和 $(-r,\theta+\pi)$ 表示同一点，故可用 $(-r,\theta+\pi)$ 代替 (r,θ) 来求 (x,y), 于是

$$x=-r\cos(\theta+\pi)=-r(-\cos\theta)=r\cos\theta$$
$$y=-r\sin(\theta+\pi)=(-r)(-\sin\theta)=r\sin\theta$$

因此，当 $r<0$ 时，点的直角坐标仍可由公式 (7.1) 求得.

反过来，如果 P 点的直角坐标为已知，我们可由公式

$$r^2=x^2+y^2,\qquad \tan\theta=\frac{y}{x}\quad(x\neq 0) \tag{7.2}$$

求得该点的极坐标，由上一小节可知，点 P 的极坐标可对应无穷多对数值，其中任一对数值都可作为点 P 的极坐标.在一般情况下，我们只求 $r \geq 0, 0 \leq 0 < 2\pi$ 的一对数值就可以了.

例 7.2 把点 P 的极坐标 $\left(3, \frac{\pi}{3}\right)$ 化为直角坐标.

解： 由于

$$x = 3 \cdot \cos\frac{\pi}{3} = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$y = 3 \cdot \sin\frac{\pi}{3} = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

因此：点 P 的直角坐标是 $\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

例 7.3 把点 $M(-1, -1)$ 化为极坐标.

解：

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\tan\theta = \frac{-1}{-1} = 1$$

由于点 M 在第三象限．因此，取 $\theta = \frac{5\pi}{4}$

$\therefore$ 点 M 的极坐标为 $\left(\sqrt{2}, \frac{5}{4}\pi\right)$

练习

1. 试求下列各点的直角坐标.

$$M\left(-4, -\frac{\pi}{4}\right), \qquad N\left(-4, -\frac{5}{4}\pi\right), \qquad P(-3, 8\pi)$$

$$Q(7, 0^\circ), \qquad R\left(5, -\frac{\pi}{2}\right), \qquad S\left(-2, -\frac{2}{3}\pi\right)$$

2. 试求下列各点的极坐标.

$$B(1, -1), \qquad C\left(3, \sqrt{3}\right), \qquad D(-1, 1)$$

三、点的轨迹的极坐标方程

我们已知，可用一对有序实数 (r,θ) 来确定平面上一点的位置，因此，平面上点的轨迹有时可用含有 r,θ 两个变量的方程来表示，这个方程叫做点的轨迹的**极坐标方程**或简称**极方程**.

例 7.4 求通过极点 O 且与极轴成定角 α 的直线的极坐标方程（图 7.5）.

解： 设点 $P(r,\theta)$ 为已知直线上的任一点，则点 P 满足极方程

$$\theta=\alpha \tag{7.3}$$

反之，对任一实数 r, 以 (r,α) 为极坐标的点也一定满足方程 (7.3). 因此方程 (7.3) 就是所求的直线的极方程.

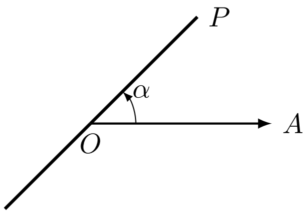


图 7.5

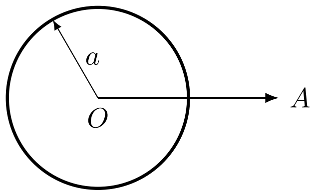


图 7.6

例 7.5 求圆心在极点 O, 半径为 a 的圆的极坐标方程（图 7.6）.

解： 因为对任一点 $P(r,\theta)$, 当且仅当

$$r=a \tag{7.4}$$

时，P 点才在已知圆上，所以 (7.4) 式就是所求圆的极方程.

例 7.6 试求以 $C(a,0)$ 为圆心，以 a 为半径的圆的极坐标方程（图 7.7）.

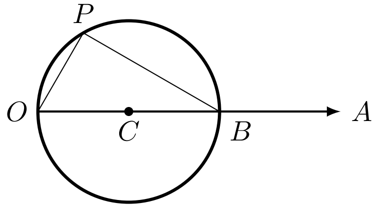


图 7.7

解：由已知条件，圆心在极轴上，圆经过极点 O. 设圆和极轴的另一个交点是 B. 得知 $P(r,\theta)$ 在已知圆上的充要条件是 $\angle OPB=\pi/2$, 即

$$|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{OB}|\cos\theta$$

$$r=2a\cos\theta \tag{7.5}$$

因此 (7.5) 式就是所求圆的极方程.

如果某动点的轨迹在直角坐标系中的方程为已知，那么，利用变换公式

$$x=r\cos\theta,\qquad y=r\sin\theta$$

可求得该动点轨迹的极坐标方程；反之，若一动点的轨迹的极方程为已知，我们也可用上节变换公式 (7.2), 把它化为在直角坐标系中的方程.

例 7.7　设一圆的方程为

$$x^2+y^2-8y=0$$

如果以原直角坐标系的原点为极点，X 轴的正半轴为极轴，求这圆的极方程.

解：将 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, 代入已知圆的方程，得

$$r^2-8r\sin\theta=0$$

即 $r=8\sin\theta$. 这就是已知圆的极坐标方程.

例 7.8　已知直线的极方程为 $r\sin\theta=2$, 把它化为直角坐标方程.

解：将 $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\sin\theta=\dfrac{y}{r}$ 代入已知直线的极方程，得

$$\sqrt{x^2+y^2}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=2$$

即 $y=2$. 这就是已知直线的直角坐标方程.

我们可根据极方程用描点法近似地作出这个极方程的图象，下面举例说明.

例 7.9　描出方程 $r=a\theta$ $(a>0)$ 的图象.

解：与直角坐标系中的作图步骤一样，先给出 θ 一系列的允许值，算出 r 的对应值，由此得到一对应值表. 然后再根据对应值表描点作图（图 7.8).

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π	$\cdots$
r	0	$0.78a$	$1.57a$	$2.36a$	$3.14a$	$3.93a$	$4.71a$	$5.50a$	$6.28a$	$\cdots$

方程 $r=a\theta$, $(a>0)$ 的图象，叫做**阿基米德螺线**.

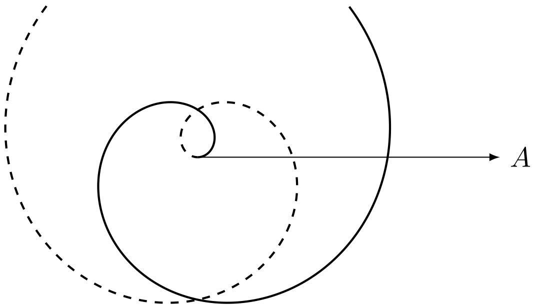


图 7.8

练习

1. 求通过极点 O 且与极轴 OA 成 $\pi/6$ 角的直线的极方程.

2. 求以 $C(3,\pi/3)$ 为圆心，半径等于 2 的圆的极方程.

3. 求通过点 $P(r,\theta)$ 且与原点距离等于 d 的直线的极方程.

4. 求 $M(r_1,\theta_1)$, $N(r_2,\theta_2)$ 两点间的距离.

5. 把下列直角坐标方程化为极方程.

   (a) $x=6$
   (b) $y=2x$
   (c) $x^2+y^2-9=0$
   (d) $x^2+y^2-4x+8=0$
   (e) $xy=4$
   (f) $x^2-y^2=1$
   (g) $y^2=4x$
   (h) $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$

6. 把下列极坐标方程，化为直角坐标方程.

   (a) $r=3$
   (b) $\theta=\dfrac{\pi}{4}$
   (c) $r=3\cos\theta$
   (d) $r=5\tan\theta$
   (e) $r^2\cos 2\theta=16$
   (f) $r=\dfrac{6}{1+2\cos\theta}$

7. 画出心脏线 $r=a(1+\cos\theta)$ 的图象.

8. 画出双纽线 $p^2=a^2\cos 2\theta$ 的图象.

四、圆锥曲线的极坐标方程

在第六章中，我们给圆锥曲线下了一个统一的定义，现在我们根据这个定义来求圆锥曲线统一的极方程.

已知圆锥曲线的焦点 F 和准线 ℓ, 过 F 作 ℓ 的垂线，设垂足为 D. 以 F 为极点，$\overrightarrow{DF}$ 的方向作为极轴的方向建立极坐标系（图 7.9）. 设 $P(r,\theta)$ 是曲线上任一点，作 $\overline{PF}$, 再作 $PQ\perp\ell$, PM 垂直极轴，垂足分别为 Q,M. 设 F 到准线 ℓ 的距离 $\overline{FD}=p$, 则由圆锥曲线的定义，得

$$\frac{PF}{PQ}=e$$

即：$r=e\cdot PQ$

$\because\quad PQ=DF+r\cos\theta=p+r\cos\theta$

$\therefore\quad r=e(p+r\cos\theta)$

解出 r，得：

$$\boxed{r=\frac{ep}{1-e\cos\theta}}\tag{7.6}$$

这就是圆锥曲线的极方程. 当 $0<e<1$ 时，方程 (7.6) 表示椭圆，定点 F 是它的左焦点，定直线 ℓ 是它的左准线；当 $e=1$ 时，方程 (7.6) 表示开口向右的抛物线；当 $e>1$ 时，方程 (7.6) 表示双曲线，定点 F 是它的右焦点，定直线 ℓ 是它的右准线（图 7.10）.

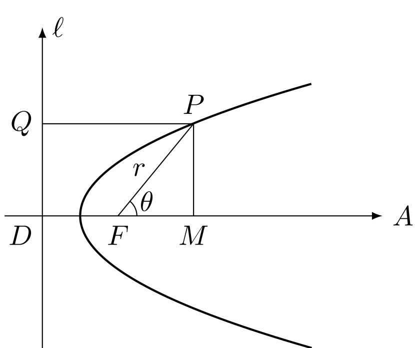


图 7.9

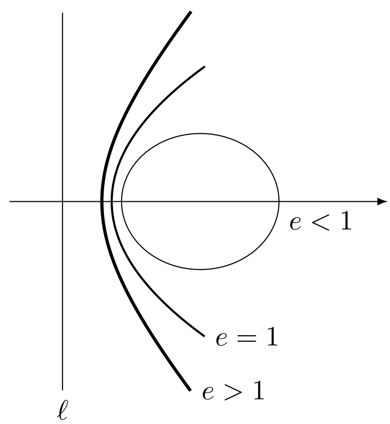


图 7.10

练习

1. 求证圆锥曲线 $r=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$，当 $0<e\leq 1$ 时的直角坐标方程是

$$(1-e^2)x^2+y^2-2e^2px-e^2p^2=0$$

当 $e>1$ 时，直角坐标方程是 $\sqrt{x^2+y^2}=e(x+p)$.

2. 一颗慧星的轨道是抛物线，太阳位于这条抛物线的焦点上，已知这颗慧星在距太阳为 1.6×10^8 公里时，它的极径和轨道轴成 60° 角. 求这颗慧星的轨道的极方程，并且求出它的近日点与太阳的距离.

3. 说明下列方程的图形是什么，并且画出草图.

(a) $r=\dfrac{5}{1-\cos\theta}$

(b) $r=\dfrac{5}{3-4\cos\theta}$

(c) $r=\dfrac{1}{2-\cos\theta}$

(d) $r=\dfrac{4}{1+\cos\theta}$

习题 7.1

1. 作出下列极方程的图象，并说明它们各是什么曲线.

(a) $r=1$

(b) $\theta=\dfrac{\pi}{3}$

(c) $r\cos\theta=2$

(d) $r\sin\theta=1$

(e) $r=6\cos\theta$

(f) $r=10\sin\theta$

2. 求满足下列条件的各图形的极方程.

(a) 经过点 $P\left(2,\dfrac{\pi}{4}\right)$, 垂直于极轴的直线;

(b) 经过点 $Q\left(3,\dfrac{\pi}{3}\right)$, 平行于极轴的直线;

(c) 圆心在极点，半径等于 a 的圆;

(d) 圆心在点 $B\left(a,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 半径等于 3 的圆;

(e) 圆心在 $C(a,\pi)$, 半径等于 a 的圆;

(f) 经过点 $P(a,0)$ 和极轴相交成 α 角的直线.

3. 从极点作圆 $r=2a\cos\theta$ 的各弦，求各弦中点的轨迹的极坐标方程.

4. 从极点 O 作直线和直线 $r\cos\theta=4$ 相交于 M 点，在 $\overline{OM}$ 上取一点 P, 使 $\overline{OM}\cdot\overline{OP}=12$, 求 P 点轨迹的极坐标方程.

5. 求适合于下列条件的轨迹的极坐标方程，并且画出轨迹的草图.

   (a) 点的极径和极角成正比例;

   (b) 点的极径和极角成反比例.

6. 把下列各直角坐标方程化为极方程.

   (a) $y^2=12x$

   (b) $x^2+y^2=4y$

   (c) $x^2-2xy+y^2=x-4$

   (d) $y^2=4(1-x)$

   (e) $y^2=2px$

   (f) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

   (g) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

7. 判别下列各极方程表示什么曲线.

   (a) $r^2=\dfrac{400}{25\sin^2\theta+16\cos^2\theta}$

   (b) $r^2=\dfrac{4}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}$

   (c) $r^2=\dfrac{6}{2\cos^2\theta+3\sin^2\theta}$

   (d) $r^2=\dfrac{1}{\cos^2\theta-2\sin^2\theta}$

   (e) $r^2=\dfrac{4\cos\theta}{\sin^2\theta}$

   (f) $r^2=\dfrac{4\sin\theta}{\cos^2\theta}$

8. 把下列极坐标方程化成直角坐标方程.

   (a) $r=64\sin 2\theta$

   (b) $r+6\cot\theta\cdot\cos\theta=0$

第二节　参数方程

一、参数方程的概念

在直角坐标系 OXY 中，已知直线 ℓ 过点 $P_0(x_0,y_0)$ 且平行于已知向量 $\vec{a}=(a_1,a_2)$ (图 7.11). 如果 $P(x,y)$ 是 ℓ 上一动点，那么 ℓ 的向量方程为

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_0}+t\vec{a}$$

换成坐标形式，即为

$$\begin{cases} x=x_0+a_1t \\ y=y_0+a_2t \end{cases} \tag{7.7}$$

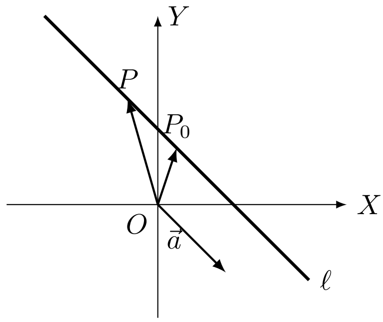


图 7.11

这就是说，直线 ℓ 上的点可以和实数 t 建立一一对应关系.

一般来说，在取定的坐标系中，如果曲线上任一点的坐标 x, y 都是某个变数 t 的函数时，

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t) \tag{7.8}$$

并且对于 t 的每一允许值，由方程 (7.8) 所确定的点 $P(x, y)$ 都在这条曲线上. 那么方程 (7.8) 就叫做这条**曲线的参数方程**. 例如，方程 (7.7) 就是通过 $P_0(x_0, y_0)$ 且平行于已知向量 $\vec{a}$ 的直线的参数方程.

上面我们用参数来表示直角坐标系中点的坐标 x, y, 同样我们也可用参数来表示在极坐标系中，点的极坐标 r, θ. 即

$$r = f(t), \qquad \theta = \varphi(t)$$

相对于参数方程来说，直接给出点的坐标间的关系的曲线方程，叫做曲线的**普通方程**. 如我们学过的直角坐标方程和极方程.

二、曲线的参数方程

除上节建立的直线参数方程外，现在我们来建立几种常见的曲线的参数方程.

（一）圆的参数方程

以原点为圆心，R 为半径的圆，可以看作是一个质点作等速圆周运动的轨迹（图 7.12）. 设质点的运动的角速度为 ω, 从圆周与 X 轴的正半轴的交点 A 的位置开始按逆时针方向运动，经过时间 t 后，质点到达圆周上一点 $P(x, y)$

的位置．由于 $\angle AOP=\omega t$，所以

$$\begin{cases} x=R\cos\omega t \\ y=R\sin\omega t \end{cases} \tag{7.9}$$

在方程 (7.9) 中，对应 t 的每一个值，圆周上就有一点 $P(x,y)$ 与它对应．当 t 的值从 0 逐渐增加到 $2\pi/\omega$ 时，P 点就从 A 点开始按逆时针方向描出一个圆，所以 (7.9) 式就是表示以原点为中心，R 为半径的圆的参数方程．如果直接取 $\angle AOP=\theta$ 作为参数，那么圆的参数方程是

$$\begin{cases} x=R\cos\theta \\ y=R\sin\theta \end{cases}$$

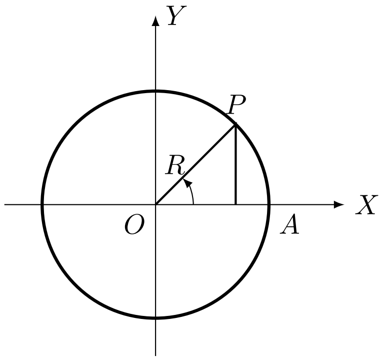


图 7.12

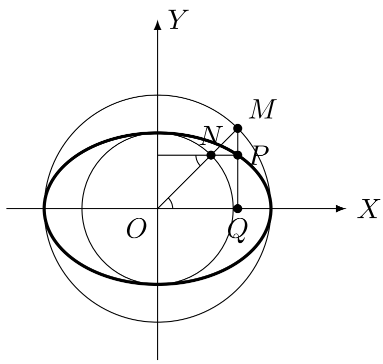


图 7.13

（二）椭圆的参数方程

设 $P(x,y)$ 是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上任一点，以 O 为圆心，分别以 a,b 为半径作两个辅助圆（图 7.13）．过 P 点作直线 PQ 垂直于 X 轴，垂足为 Q 点，并交大辅助圆于 M 点，作 $\overline{OM}$.

设 $\angle MOX\varphi$，则 $x=\overline{OQ}=a\cos\varphi$．把上式代入椭圆方程，得 $y=b\sin\varphi$，因此：

$$\begin{cases} x=a\cos\varphi \\ y=b\sin\varphi \end{cases} \tag{7.10}$$

就是椭圆的一个参数方程，其中 φ 叫做**离心角**.

（三）双曲线的参数方程

由三角公式

$$\sec^2\varphi-\tan^2\varphi=1$$

我们可得双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的一个参数方程为

$$\begin{cases} x=a\sec\varphi \\ y=b\tan\varphi \end{cases} \tag{7.11}$$

（四）抛物线 $y^2=2px$ 的参数方程

如果令 $y=2pt$，则 $x=2pt^2$，所以

$$\begin{cases} x=2pt^2 \\ y=2pt \end{cases} \tag{7.12}$$

可作为抛物线 $y^2=2px$ 的一个参数方程.

（五）旋轮线的参数方程

一个半径是 a 的车轮，沿一条直线轨道滚动，轮周上一点 P 的轨迹叫做**旋轮线**（图 7.14）.

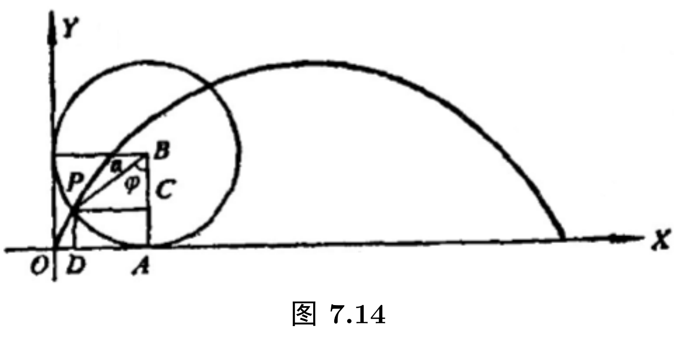


图 7.14

下面我们来建立旋轮线的参数方程.

取 P 点落在轨道上的个一位置作为原点．轨道所在直线作为 X 轴，当车轮从开始起转过了 φ 角，设这时 P 点的坐标是 (x,y), 车轮的圆心在 B 点，与轨道相切于 A 点，于是 $\widehat{AP}$ 的长等于 $\overline{OA}$ 的长，我们引入参数 φ（弧度).（叫做滚动角）来表示 x 和 y.

作 $PD\perp OX$ 于 D 点，$PC\perp BA$ 于 C 点，则

$$x=\overline{OD}=\overline{OA}-\overline{DA}=\widehat{AP}-\overline{PC}=a\varphi-a\sin\varphi=a(\varphi-\sin\varphi)$$
$$y=\overline{DP}=\overline{AC}=\overline{AB}-\overline{BC}=a-a\cos\varphi=a(1-\cos\varphi)$$

因此，P 点的轨迹的参数方程是

$$\begin{cases} x=a(\varphi-\sin\varphi) \\ y=a(1-\cos\varphi) \end{cases} \tag{7.13}$$

(7.13) 式就是旋轮线的一个参数方程.

（六）圆的渐开线参数方程

把一条没有伸缩性的绳子绕在一个固定的圆盘的侧面上，拉开绳子的一端并拉直，使绳子和圆周始终相切，然后逐渐展开．绳子端点的轨迹叫做圆的**渐开线**（图 7.15)．这个圆叫做渐开线的**基圆**.

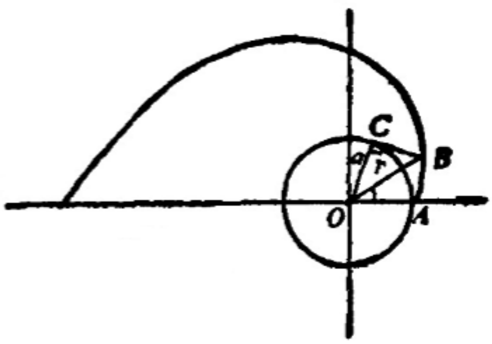


图 7.15

下面我们来建立渐开线的参数方程.

设定圆的圆心为 O, 半径为 a, 开始时绳子的外端在 A 点，O 为极点，以射线 OA 为极轴建立极坐标系，设 B 是渐开线上任一点，(r,θ) 是它的极坐标，其中 θ 的单位是弧度．$\overline{OA}=a$, $\angle BOC=\alpha$, 则 $r=\dfrac{a}{\cos\alpha}$，$\overline{BC}=a\tan\alpha$. 根据题设应有

$$\overline{BC}=\widehat{AC}=a(\alpha+\theta)$$

解出 θ, 得

$$\theta=\frac{\overline{BC}}{a}-\alpha=\tan\alpha-\alpha$$

因此，渐开线的极坐标的参数方程为

$$\begin{cases} r = \dfrac{a}{\cos\alpha} \\ \theta = \tan\alpha - \alpha \end{cases} \tag{7.14}$$

以 OA 为 X 轴的正半轴，建立直角坐标系．取 $\angle AOC = \varphi$ 作为参数，由于 $\varphi = \alpha + \theta$, 应用公式 (7.14) 式的第二式可得

$$\varphi = \tan\alpha$$

设 B 点在 OXY 中的坐标为 (x, y), 则

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta = a(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi) \\ y &= r\sin\theta = a(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi) \end{aligned} \tag{7.15}$$

这是渐开线在直角坐标系中的参数方程．

由以上几种常见曲线的参数方程的推导可知，通常建立曲线的参数方程有两种方法：一种是像 (一) 那样，把曲线看作动点的轨迹，选取时间参数 t, 使得曲线上的点的动坐标 x, y 分别用 t 的函数来表示，另一种是像 (二)、(三) 那样，从已知曲线的直角坐标方程引入适当的参数，从而求得曲线的参数方程．最后，我们指出，一条曲线的参数方程不是唯一的．

以后我们将会看到，利用参数方程研究曲线的形状和性质比普通方程更加方便．

例 7.10　画出参数方程 $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$ 所表示的曲线．

解： 列表

t	$\cdots$	-3	-2	0	1	2	3	$\cdots$
x	$\cdots$	9	4	0	1	4	9	$\cdots$
y	$\cdots$	-27	-8	0	1	8	27	$\cdots$

用表中的数对 (x, y) 描点作图，就可得到方程的曲线（图 7.16）. 这条曲线叫做**半立方抛物线**.

练习

1. 写出下列直线的参数方程．

   (a) 过 $P(2, 3)$ 且平行于已知向量 $\vec{a} = (1, 4)$ 的直线

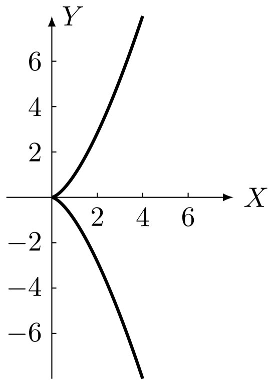


图 7.16

(b) 过 $P_1(3,4)$, $P_2(4,-3)$ 两点的直线

(c) $y = kx$

(d) $y = kx + b$

2. 一质点沿方向 $\vec{S} = \left(\cos\dfrac{\pi}{6}, \sin\dfrac{\pi}{6}\right)$, 从点 $P_0(1,2)$, 以 3m/s 的速率运动，写出运动轨迹的参数方程.

3. 已知一条直线上两点 $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$, 以分点 $M(x,y)$ 分 $\overline{M_1M_2}$ 所成的比 λ 为参数. 写出这条直线的参数方程.

4. 已知抛物线 $x = 2pt^2$, $y = 2pt$, 写出通过对应于参数 t_1, t_2 两点的弦的方程.

5. 作下列参数方程的图形.

(a) $x = t$, $y = 3t$

(b) $x = 3\sin\theta$, $y = 4\cos\theta$

(c) $x = 4t^2$, $y = 2t$

三、参数方程和普通方程的互化

设曲线的参数是

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = \varphi(t) \end{cases}$$

如果我们能从这个方程消去参数 t, 那么我们就可求出当线的普通方程.

例 7.11 把参数方程 $\begin{cases} x = 5\cos t + 2 \\ y = 2\sin t - 3 \end{cases}$ 化为普通方程.

解: 由已知参数方程可得

$$\frac{x-2}{5} = \cos t, \qquad \frac{y+3}{2} = \sin t$$

两式两边平方后相加，得

$$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$$

这就是已知曲线的普通方程.

例 7.12 把参数方程

$$\begin{cases} x = at^2 & (7.16) \\ y = a^2t^3 & (7.17) \end{cases}$$

化为普通方程.

解: (7.16) 式两边立方，(7.17) 式两边平方，得

$$x^3 = a^3t^6 \tag{7.18}$$

$$y^2 = a^4t^6 \tag{7.19}$$

由 (7.18), (7.19) 两式可得

$$y^2 = ax^3$$

例 7.13 化直线的点斜式方程 $y - y_0 = k(x - x_0)$ 为参数方程.

解: 直线的点斜式方程可变为

$$kx - y + y_0 - kx_0 = 0$$

因此直线具有方向向量为 $\vec{S} = (1, k)$, 所以，直线方程的参数方程可写为

$$\begin{cases} x = x_0 + t \\ y = y_0 + kt \end{cases}$$

练习

1. 把下列曲线的参数方程化为普通方程.

(a) $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 - 3t \end{cases}$　　(c) $\begin{cases} x = t \\ y = 4t^2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x = 2 + 3\cos\theta \\ y = 4 - 3\sin\theta \end{cases}$　　(d) $\begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = \sin t \end{cases}$

2. 把下列普通方程化为参数方程.

(a) $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{x+5}{3}$

(b) $y = 4x$

(c) $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

(d) $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} - \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

(e) $y = 6x^2$

(f) $y^2 = 8x$

习题 7.2

1. 已知直线 ℓ 通过点 $P_0(x_0, y_0)$ 并且与已知单位向量 $\vec{e} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ 平行，求直线 ℓ 的参数方程.

2. 求经过点 $P(1,3)$, 倾角是 $\pi/4$ 的参数方程.

3. 已知 $M(x,y)$ 从原点以常速度向量 $\vec{v}(v_x, v_y)$ 运动. 求 M 点的轨迹的参数方程. 并且把它化为普通方程. 如果 M 点从 $A(a,b)$ 点开始运动，M 点的轨迹的参数方程怎样？

4. 把下列参数方程化成普通方程.

(a) $\begin{cases} x = t^2 - 2t \\ y = t^2 + 2 \end{cases}$　　(c) $\begin{cases} x = a\sec\varphi \\ y = b\tan\varphi \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x = \dfrac{a(1-t^2)}{1+t^2} \\ y = \dfrac{2bt}{1+t^2} \end{cases}$　　(d) $\begin{cases} x = 5t^2 - 1 \\ y = 10t^2 + 4 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x = \dfrac{a}{2}\left(t + \dfrac{1}{t}\right) \\ y = \dfrac{b}{2}\left(t - \dfrac{1}{t}\right) \end{cases}$

5. 已知抛物线 $x = 2pt^2$, $y = 2pt$, 求证：通过对应 t_1, t_2 两点的直线方程是

$$x - (t_1 + t_2)y + 2pt_1t_2 = 0$$

6. 已知抛物线 $x = 2pt^2$, $y = 2pt$, 求证：抛物线在点 t_1 处的切线方程为

$$x - 2t_1y + 2pt_1^2 = 0$$

7. 求证：抛物线 $x = 2pt^2$, $y = 2pt$, 在点 t_1、t_2 处的切线交点的坐标是

$$\big(2pt_1t_2,\ p(t_1 + t_2)\big)$$

8. 利用第 7 题的结论，证明：抛物线通过焦点的弦的两个端点处的切线相交在准线上.

复习题七

1. 画出下列各极坐标方程的图形.

(a) $r\theta = a$
(b) $r = 2\theta$
(c) $r = 5(1 - \cos\theta)$
(d) $r = a\sin 3\theta$
(e) $r = a\cos\theta + b$
(f) $r^2 = 16\sin 2\theta$

2. 把下列各曲线的极坐标方程化为直角坐标方程.

(a) $r\sin\theta = 10$
(b) $r = 4\sin\theta$
(c) $r(5 + 3\cos\theta) = 16$
(d) $r(4 + 5\cos\theta) = 9$
(e) $r^2\cos 2\theta = -1$
(f) $r(\sin\theta + 2\cos\theta) = 6$
(g) $r = 2\cos\theta + 3\sin\theta$
(h) $\theta = 45^\circ$
(i) $r = \dfrac{3}{2 + 3\sin\theta}$
(j) $r^2 = 9\cos 2\theta$

3. 把下列各直角坐标方程化为极坐标方程.

(a) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

(b) $\dfrac{x^2}{a+x}=\dfrac{y^2}{a-x}$

(c) $x^2+y^2=3xy$

(d) $y^2=\dfrac{x^3}{2a-x}$

(e) $x^2+y^2+2Dx+2Ey+F=0$

(f) $(x^2+y^2)^3=4x^2y^2$

(g) $x^4+x^2y^2-(x+y)^2=0$

(h) $(x^2+y^2)^3=16x^2y^2(x^2-y^2)^2$

4. 说明下列两条直线的位置关系.

   (a) $\theta=\alpha$ 和 $r\cos(\theta-\alpha)=a$ ($a>0$ 且为定值);

   (b) $\theta=\alpha$ 和 $r\sin(\theta-\alpha)=a$.

5. 求证：经 $P(r_1,\theta_1)$ 点和极轴交成 α 角的直线方程是

$$r\sin(\theta-\alpha)=r_1\sin(\theta_1-\alpha)$$

6. O 点是原点，P 点是椭圆 $x=3\cos\varphi,\ y=2\sin\varphi$ 上相当于 $\varphi=\pi/6$ 的一点，求直线 OP 的倾角.

7. 已知椭圆 $x=a\cos\varphi,\ y=b\sin\varphi$, 求证：通过对应 $\varphi=\alpha$ 和 $\varphi=\beta$ 椭圆上两点的直线方程是

$$\frac{x}{a}\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\frac{y}{b}\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

8. 已知椭圆 $x=a\cos\varphi,\ y=b\sin\varphi$. 求证：椭圆上对应 φ_1 点的切线方程是

$$\frac{x}{a}\cos\varphi_1+\frac{y}{b}\sin\varphi_1=1$$

9. 一个圆的圆心在 $C(a,b)$, 半径为 R. 求这个圆以圆心角 θ（从 X 轴的正方向算起）为参数的参数方程.

10. 已知 P、Q 是椭圆 $x=a\cos\varphi,\ y=b\sin\varphi$ 上分别对应 φ_1 和 φ_2 的两点. 求证：直线 OP 和 OQ 为椭圆共轭直径的条件是 $|\varphi_1-\varphi_2|=90^\circ$.

11. 已知椭圆 $x=a\cos\varphi,\ y=b\sin\varphi$, P、Q 是椭圆上对应 φ 和 $\varphi+90^\circ$ 的两点，求证：

$$|\overrightarrow{OP}|^2+|\overrightarrow{OQ}|^2=a^2+b^2$$

12. 画出下列参数方程表示的图形.

(a) $\begin{cases} x = 3t - 5 \\ y = t^3 - t \end{cases}$　　(b) $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$

第八章　空间解析几何初步

第一节　空间向量的坐标运算

一、空间直角坐标系与向量运算

任取一点 O(图 8.1), 一个单位长，通过 O 点建立三条互相垂直的数轴，X 轴、Y 轴、Z 轴，并且使这三个数轴的正方向构成右手系．这样我们就说在空间建立了一个空间右手坐标系，并用 $OXYZ$ 来表示．O 点叫做坐标系的原点．X 轴、Y 轴、Z 轴总称为坐标轴．三个坐标轴每两个决定一平面叫做坐标平面．坐标平面共有三个 OXY、OYZ、OZX，它们互相垂直并且把空间分为八个区域，每个区域叫做一个**卦限**.

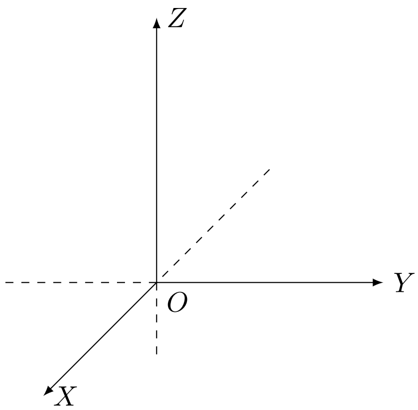


图 8.1

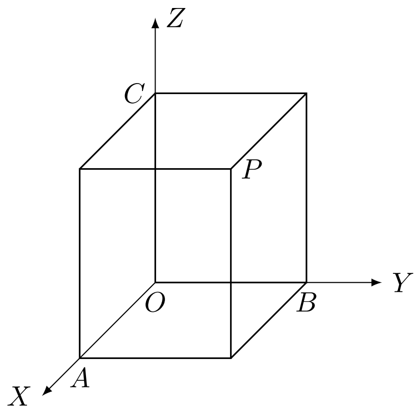


图 8.2

设 P 是空间中任一点，通过 P 点作平面分别与坐标平面 OYZ、OZX、OXY 平行（图 8.2)，并且分别与 X 轴、Y 轴、Z 轴相交于 A、B、C 三点，如果 A、B、C 在各坐标轴上的坐标分别为 x、y、z, 则这三个有序实数组 (x, y, z) 叫 P 点的**空间坐标**．简称坐标．P 点的坐标是 (x, y, z), 记作 $P(x, y, z)$．x、y、z 分别叫做 P 点的 X 坐标，Y 坐标，Z 坐标.

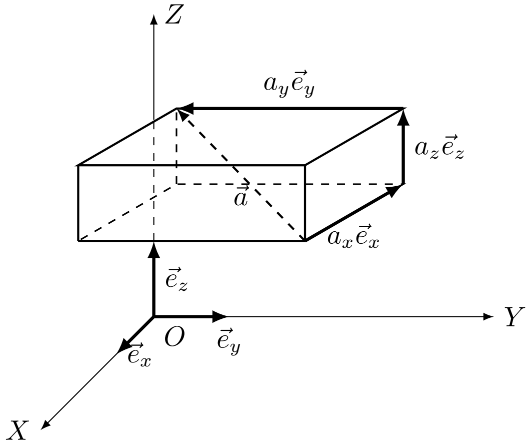


图 8.3

如果沿 X 轴、Y 轴、Z 轴的正方向分别引单位向量 $\vec{e}_x$、$\vec{e}_y$、$\vec{e}_z$(图 8.3), 那么对空间任一向量 $\vec{a}$, 存在唯一的有序数组 (a_x, a_y, a_z) 使

$$\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z$$

(a_x, a_y, a_z) 就叫做 $\vec{a}$ 在 $OXYZ$ 中的坐标．并简记作

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$$

其中 a 叫做 $\vec{a}$ 在 X 轴上的坐标分量．a_y 叫做 $\vec{a}$ 在 Y 轴上的坐标分量．a_z 叫做 $\vec{a}$ 在 Z 轴上的坐标分量．

如果 $\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z$，那么分别对这个表示式两边对 $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ 取内积运算，就可得到

$$a_x = \vec{e}_x \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cos\langle \vec{e}_x, \vec{a} \rangle$$
$$a_y = \vec{e}_y \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cos\langle \vec{e}_y, \vec{a} \rangle$$
$$a_z = \vec{e}_z \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cos\langle \vec{e}_z, \vec{a} \rangle$$

如果 $\langle \vec{e}_x, \vec{a} \rangle = \alpha$, $\langle \vec{e}_y, \vec{a} \rangle = \beta$, $\langle \vec{e}_z, \vec{a} \rangle = \gamma$, 那么 α、β、γ 确定了 $\vec{a}$ 在空间中的方向．α、β、γ 叫做 $\vec{a}$ 的方向角，$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 叫做 $\vec{a}$ 的方向余弦，于是 $\vec{a}$ 的单位向量

$$\vec{a}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

对空间任一点 P, 它被相对于 O 点的位置向量所唯一确定（图 8.4）．设

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

由上述点的坐标和向量坐标的定义，$\overrightarrow{OP}$ 的坐标 (x,y,z) 也就是 P 点的坐标；反之 P 点的坐标也是 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标．由此可见，给定了原点 O 和三个互相垂直且构成右手系的单位向量 $\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z$，坐标系 $OXYZ$ 也就完全确定了．因此，坐标系 $OXYZ$ 也可用 $[O:\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z]$ 来表示，$\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z$ 叫做 $OXYZ$ 的基向量．

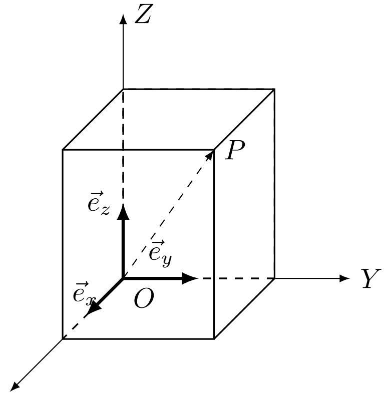


图 8.4

已知 $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$, 则：

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\\ &= x_2\vec{e}_x+y_2\vec{e}_y+z_2\vec{e}_z-(x_1\vec{e}_x+y_1\vec{e}_y+z_1\vec{e}_z)\\ &= (x_2-x_1)\vec{e}_x+(y_2-y_1)\vec{e}_y+(z_2-z_1)\vec{e}_z\\ &= (x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)\end{aligned}$$

这就是说**一个向量的坐标，等于表示它的有向线段终点的坐标减去起点的坐标**．例如，已知 $A(2,-1,5)$、$B(3,2,-7)$, 则

$$\overrightarrow{AB}=[3-2,\ 2-(-1),\ -7-5]=(1,3,-12)$$

练习

1. 问在 $OXYZ$ 中，哪个坐标平面与 X 轴垂直，哪个坐标平面与 Y 轴垂直，哪个坐标平面与 Z 轴垂直？
2. 写出点 $P(2,4,3)$ 在 $OXYZ$ 的三个坐标平面上投影点的坐标．
3. 求点 $P(3,5,4)$ 关于坐标平面 OXY 的对称点的坐标．
4. 点 P 在 $OXYZ$ 中的坐标平面 OXY 上，若 P 点在平面直角坐标

系 OXY 中的坐标是 $(2,3)$, 求它在 $OXYZ$ 中的坐标.

5. 写出基向量 $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ 的坐标.
6. 已知 $\vec{a} = 12$, $\langle \vec{e}_x, \vec{a} \rangle = 30°$, $\langle \vec{e}_y, \vec{a} \rangle = 45°$, $\langle \vec{e}_z, \vec{a} \rangle = 60°$，求 $\vec{a}$ 的坐标.
7. 已知 $P(-3,2,4)$, $Q(5,7,-2)$, 求 $\overrightarrow{PQ}$ 与 $\overrightarrow{QP}$ 的坐标.
8. 已知 $A(2,-1,5)$, $B(3,2,-1)$ 用基向量 $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ 表示向量 $\overrightarrow{AB}$.

二、向量的坐标运算

定理

如果 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$, 那么

$$\begin{aligned}
\vec{a} \pm \vec{b} &= (a_x, a_y, a_z) \pm (b_x, b_y, b_z) = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z) \\
\lambda\vec{a} &= \lambda(a_x, a_y, a_z) = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z) \\
\vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x, a_y, a_z) \cdot (b_x, b_y, b_z) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z
\end{aligned}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, \qquad \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

证明留给同学作为练习.

下面我们研究如何用向量的坐标来表示向量垂直、平行与共面的条件.

已知 $\vec{a} \,/\!/\, \vec{b} \quad (\vec{b} \neq 0)$ 的充要条件是存在一实数 λ，使

$$\vec{a} = \lambda \vec{b}$$

如果 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 那么上面条件用坐标表示，即为

$$a_x = \lambda b_x, \qquad a_y = \lambda b_y, \qquad a_z = \lambda b_z \tag{8.1}$$

或

$$a_x : b_x = a_y : b_y = a_z : b_z \tag{8.2}$$

这就是说**两个向量平行的充要条件是它们的坐标成比例**.

已知 $\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0$ 用坐标表示，即为

$$\vec{a}\perp\vec{b} \iff a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0 \tag{8.3}$$

已知 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, $\vec{c}=(c_x,c_y,c_z)$, 则

$$\vec{a},\vec{b},\vec{c}\text{ 共面} \iff (\vec{a},\vec{b},\vec{c})=0$$

即

$$\vec{a},\vec{b},\vec{c}\text{ 共面} \iff \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0$$

例 8.1　已知 $\vec{a}=(1,1,1)$, $\vec{b}=(3,-1,2)$, $\vec{c}=(1,-3,0)$. 求证：$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面.

解：

$$\because\quad (\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}=0$$

$\therefore\quad \vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面.

练习

1. 已知 $\vec{a}=(-1,2,3)$, $\vec{b}=(2,-4,-6)$, 求证：$\vec{a}\ //\ \vec{b}$.
2. 试证下面各对向量线性相关.

   (a) $\vec{a}=(2,-1,-2)$,　　$\vec{b}=(6,-3,-6)$

   (b) $\vec{a}=(-3,-5,4)$,　　$\vec{b}=(6,10,-8)$
3. 已知 $\vec{a}=(2,3,4)$, $\vec{b}=(-3,-6,6)$, 求证 $\vec{a}\perp\vec{b}$.
4. 设 $\vec{a}=(2,-1,4)$, $\vec{b}=(-4,-5.-1)$, 求使 $\vec{a}-k\vec{b}$ 垂直于 $\vec{b}$ 的实数 k 的值.
5. 已知 $\vec{a}=(-5,2,3)$, $\vec{b}=(0,-3,2)$, $\vec{c}=(5,-2,-3)$, 求证：$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 三个向量共面.
6. 已知 $P(x,y,z)$, $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$, $P_3(x_3,{}_3,z_3)$. 求证这

四点共面的充要条件是

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 \quad 或 \quad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

三、空间解析几何的基本问题

问题 1

求有向线段定比分点的坐标.

已知 $P_1(x_1,y_1,z_1)$、$P_2(x_2,y_2,z_2)$, 如果 $P(x,y,z)$, 按定比 μ 分割 $\overrightarrow{P_1P_2}$, 那么

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OP_1}+\mu\overrightarrow{OP_2}}{1+\mu}$$

换用坐标表示，即为

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+\mu x_2}{1+\mu} \\ y=\dfrac{y_1+\mu y_2}{1+\mu} \\ z=\dfrac{z_1+\mu z_2}{1+\mu} \end{cases} \tag{8.4}$$

(8.4) 式就是求 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的**定比分点坐标的计算公式**. 当 $\mu=1$ 时，P 点是 $\overline{P_1P_2}$ 的中点，P 点的坐标是

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+x_2}{2} \\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2} \\ z=\dfrac{z_1+z_2}{2} \end{cases} \tag{8.5}$$

公式 (8.5) 又叫做中点公式.

例 8.2 已知 $A(-1,2,2)$, $B(-4,2,5)$, 点 P 按定比 $\mu=2$ 分割 $\overrightarrow{AB}$, 求 $P(x,y,z)$.

解： 由于 $\mu=2$，因此：

$$x=\frac{-1+2\times(-4)}{1+2}=-3$$
$$y=\frac{2+2\times 2}{1+2}=2$$
$$z=\frac{2+2\times 5}{1+2}=4$$

即：$P(-3,2,4)$

问题 2

求向量长度和两点间距离公式.

若 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, 则

$$|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}=a_x^2+a_y^2+a_z^2$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2} \tag{8.6}$$

(8.6) 式就是求**向量 $\vec{a}$ 的长度的计算公式**.

若 $A(x_1,y_1,z_1)$、$B(x_2,y_2,z_2)$，则：

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \tag{8.7}$$

(8.7) 式就是求空间任意**两点间的距离公式**.

问题 3

求一向量的方向余弦.

若 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, α,β,γ 为 $\vec{a}$ 的方向角，则：

$$a_x=|\vec{a}|\cos\alpha,\qquad a_y=|\vec{a}|\cos\beta,\qquad a_z=|\vec{a}|\cos\gamma$$

于是得：

$$\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{a_x}{|\vec{a}|}=\dfrac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}\\ \cos\beta=\dfrac{a_y}{|\vec{a}|}=\dfrac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}\\ \cos\gamma=\dfrac{a_z}{|\vec{a}|}=\dfrac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}\end{cases} \tag{8.8}$$

(8.8) 式就是**向量 $\vec{a}$ 的方向余弦的计算公式**.

把 (8.7) 式两边平方加起来，得

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

这就是说，**任何一个向量的方向余弦的平方和恒等于 1**.

若 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$，则 $\vec{a}$ 的单位向量

$$\begin{aligned}\vec{a}_0=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}&=\left(\frac{a_x}{|\vec{a}|},\frac{a_y}{|\vec{a}|},\frac{a_z}{|\vec{a}|}\right)\\&=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)\end{aligned}$$

这就是说，**空间任一向量的单位向量的坐标分量正好等于它的方向余弦**.

例 8.3 求 $\vec{a}=(2,-3,1)$ 的方向余弦和它的单位向量 $\vec{a}_0$ 的坐标.

解：由于：$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}=\sqrt{14}$

$$\therefore \quad \cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{14}}, \qquad \cos\beta=\frac{-3}{\sqrt{14}}, \qquad \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$\vec{a}_0=\left(\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{-3}{\sqrt{14}},\frac{1}{\sqrt{14}}\right)$$

问题 4

求两个向量的夹角.

如果 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$，那么

$$\begin{aligned}\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle &= \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\\ &= \frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}\end{aligned} \tag{8.9}$$

公式 (8.9) 就是求向量夹角的计算公式.

例 8.4 已知 $\vec{a}=(1,1,0)$, $\vec{b}=(1,0,1)$, 求 $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$.

解：

$$\cos\langle\vec{a}\cdot\vec{b}\rangle=\frac{1\times1+1\times0+0\times1}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+0^2}}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{\pi}{3}$$

练习

1. 已知 $A(3,5,-7)$, $B(-2,4,3)$, 点 P 按定比 $\mu=-2$ 分割 $\overrightarrow{AB}$, 求 P 点的坐标.
2. 已知 $P(3,-4,1)$, $Q(0,2,-3)$, 点 A 按定比 $\mu=2$ 分割 $\overrightarrow{QP}$, 求 A 点的坐标.
3. 已知 $A(0,-1,1)$, $B(2,1,-3)$, 求 $\overline{AB}$ 中点的坐标.
4. 已知 $\triangle ABC$ 的两个顶点 $A(-4,-1,2)$, $B(3,5,-16)$, $\overline{AC}$ 边的中

点在 Y 轴上，$\overline{BC}$ 边的中点在 OZX 平面上，求第三顶点 C 的坐标.

5. 已知 $A(3,-1,0)$、$B(2,1,-3)$, 求 A、B 两点间的距离.

6. 已知 $|\vec{a}|=10$, $\langle\vec{e}_x,\vec{a}\rangle=60^\circ$, $\langle\vec{e}_y,\vec{a}\rangle=60^\circ$
   求 $\langle\vec{e}_z,\vec{a}\rangle=60^\circ$ 和 $\vec{a}$ 的坐标.

7. 已知 $\vec{a}\parallel\vec{b}$, $|\vec{a}|=10$, $\vec{b}=(3,-3,3)$, 求 $\vec{a}$ 的坐标.

8. 已知 $\vec{a}=(-1,2,3)$, $\vec{b}=(2,5,4)$, 求 $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$

9. 已知 $\vec{a}=(2,-3,5)$, $\vec{b}=(-4,2,6)$, 求证 $\vec{a}\nparallel\vec{b}$.

习题 8.1

1. 如果向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 分别平行于 X 轴、Y 轴、Z 轴，问它们的坐标各有什么特点？

2. 如果 $\vec{a}$ 的 x 坐标是 0, 那么 $\vec{a}$ 与哪个平面平行.

3. 已知 $\vec{a}=(2,-1,3)$、$\vec{b}=(-3,0,4)$, 求满足下列关系的向量 $\vec{c}$ 的坐标.

   (a) $3\vec{a}+2\vec{c}=\vec{b}$
   (b) $\vec{a}-3\vec{c}=2\vec{b}$
   (c) $\vec{a}-2\vec{c}=3\vec{b}-\vec{c}$
   (d) $2(3\vec{a}-\vec{c})+\vec{b}=0$

4. 已知 $A(2,-1,7)$, $B(4,5,-2)$, 求每个坐标平面分割 $\overrightarrow{AB}$ 的比值.

5. 已知 $A(2,3,6)$, $B(5,2,8)$, 直线 AB 上有 C 点使 B 点为 $\overline{AC}$ 的中点，求 $C(x,y,z)$.

6. 已知 $A=(x_1,y_1,z_1)$、$B=(x_2,y_2,z_2)$、$C=(x_3,y_3,z_3)$, 求 $\triangle ABC$ 的重心.

7. 已知 $\vec{a}=(1,2,-2)$, $\vec{b}=(3,4,2)$, $\vec{c}=(-2,-4,4)$, 求证：$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 线性相关.

8. 已知 $A(4,1,3)$, $B(2,-5,1)$, $C(3,7,-5)$. 求向量 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}$ 的坐标和长度（精确到 0.01）.

9. 已知 $A(1,1,\sqrt{2})$, 求 $\overrightarrow{OA}$ 与三个坐标轴的夹角.

10. 已知 $\vec{a}=(-1,1,0)$, $\vec{b}=(1,-2,2)$, 求 $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$.

第二节　空间的平面　直线与球面方程

一、空间的平面方程

已知非零向量 $\vec{n}=(a,b,c)$ 和定点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$, 过 P_0 点作平面 π 与 $\vec{n}$ 垂直，求平面 π 的方程.

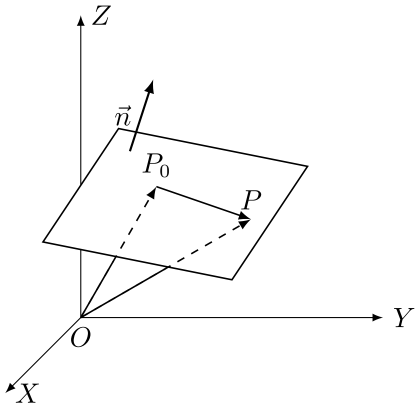


图 8.5

设 $P(x,y,z)$ 为平面 π 上一动点，因为 $\overrightarrow{P_0P}\perp\vec{n}$, 所以 $\overrightarrow{P_0P}\cdot\vec{n}=0$，即：

$$\left(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP_0}\right)\cdot\vec{n}=0 \tag{8.10}$$

反之，如果 $P(x,y,z)$ 满足 (8.10) 式，那么 P 点一定在平面 π 上，所以 (8.10) 式就是**平面 π 的向量方程**.

(8.10) 式用坐标表示即可写为

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \tag{8.11}$$

(8.11) 式就叫做**平面的点法向式方程**. 其中 $\vec{n}=(a,b,c)$, 叫做平面 π 的一条法线向量.

如果令 $d=-(ax_0+by_0+cz_0)$, 那么 (8.11) 式又可写为

$$ax+by+cz+d=0 \tag{8.12}$$

方程 (8.12) 又叫做**平面的普通方程**，其中 a,b,c 至少有一个不为零.

显然，如果 $\vec{n}=(a,b,c)$ 是平面 π 的一个法线向量，那么对任何非零常数 k, $k\vec{n}$ 也是 π 的法线向量．这样，若取 $k\vec{n}$ 作为平面的法线向量，则 π 的方程还可写为

$$k(ax+by+cz+d)=0$$

因此，同一个平面方程，仅仅相差一个常数因子．

由方程 (8.12) 可以看出，平面的方程是 x,y,z 的一次方程；反之，如果设 (x_0,y_0,z_0) 是三元一次方程 $ax+by+cz+d=0$ 的一个解，则

$$ax_0+by_0+cz_0+d=0$$

两式相减，得

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \tag{8.13}$$

如果建立空间直角坐标系，作 $\overrightarrow{OP_0}=(x_0,y_0,z_0)$, $\vec{n}=(a,b,c)$, 那么 (8.13) 式就是通过 P_0 且垂直于 $\vec{n}$ 的一个平面方程，这就是说，**任何一个三元一次方程都表示一个平面**．这样，在空间解析几何中，一个平面和一个三元一次方程是同一码事．

由以上分析，我们还可得到一个结论，即，**任给一个平面** $\pi:\ ax+by+cz+d=0$**, 其中** x,y,z **的系数向量** $\vec{n}=(a,b,c)$ **是平面** π **的一个法线向量．**

例 8.5　求通过点 $P(2,-1,3)$ 且垂直于 $\vec{n}=(2,-1,5)$ 的平面方程．

解： 由平面的点法式方程，得所求平面方程为

$$2(x-2)+(-1)[y-(-1)]+5(z-3)=0$$

整理得

$$2x-y+5z-20=0$$

例 8.6　已知 $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$, $C(x_3,y_3,z_3)$ 三点不共线．求通过 A、B、C 的平面方程．

解： 设 $P(x,y,z)$ 为所求平面的一个动点，则 P 点与 A、B、C 三点共面的充要条件是

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

这就是**通过 A、B、C 三点的平面方程**，叫做平面方程的三点式．

例 8.7 求通过原点和两点 $(2,0,1)$, $(0,1,3)$ 的平面方程.

解: **方法 1**：由平面方程的三点式，得

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 2-0 & 0-0 & 1-0 \\ 0-0 & 1-0 & 3-0 \end{vmatrix} = 0$$

展开化简，得

$$x+6y-2z=0$$

方法 2：设所求的平面方程为 $ax+by+cz+d=0$, 把已知三点的坐标，代入上面方程，得

$$\begin{cases} d=0 \\ 2a+c=0 \\ b+3c=0 \end{cases}$$

解此方程组，得

$$a=-\frac{1}{2}c, \qquad b=-3c, \qquad d=0$$

所以，所求的平面方程为

$$\frac{1}{2}cx-3cy+cz=0$$

即：$x+6y-2z=0$.

例 8.8 求通过点 $(1,2,3)$ 且平行于平面 $2x+y-z+3=0$ 的平面方程.

解：已知平面的一个法线向量是 $\vec{n}=(2,1,-1)$, 它与所求平面垂直，由平面的点法向式方程，得所求方程为

$$2(x-1)+1(y-2)+(-1)(z-3)=0$$

整理，得

$$2x+y-z-1=0$$

例 8.9 求点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 到平面 π : $ax+by+cz+d=0$ 的距离 d(图 8.6).

解：过 P_1 作 P_1P_0 垂直平面 π 于 P_0 点，则

$$d=|\overrightarrow{P_0P_1}|$$

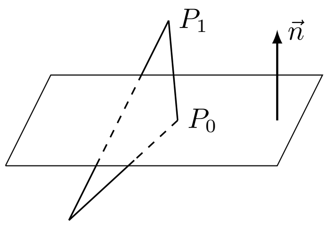


图 8.6

设 P_0 的坐标为 (x_0, y_0, z_0). 则

$$|\overrightarrow{P_0P_2}| = |\overrightarrow{P_0P_1} \cdot \vec{n}_0|$$

其中 $\vec{n}_0$ 是 π 的单位法向量. 换用坐标表示，即为

$$|\overrightarrow{P_0P_1}| = \frac{a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

因为 $P_0 \in \pi$, 所以

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$$

其中: $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$, 代入上式，得

$$|\overrightarrow{P_0P_1}| = \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

例 8.9 说明，如果要求一点到一平面的距离，只要把这一点的坐标代入平面方程. 取绝对值，再除以系数向量的长度就可求出.

练习

1. 求三个坐标平面的方程.
2. 求过点 $A(1, 2, -3)$, 以 $\vec{n} = (1, -3, 2)$ 为法线向量的方程.
3. 求过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 且垂直于 X 轴的平面方程.
4. 已知两点 $A(2, 3, 4)$, $B(-2, 4, 3)$, 求 $\overline{AB}$ 的垂直平分面的方程.
5. 求通过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 且平行于 OXY 平面的方程.
6. 证明方程 $ax + by + cz = 0$, 是通过原点的平面，其中 a、b、c 至少

有一个不为零

7. 求过原点和两点 $(1,0,-1)$, $(0,2,3)$ 的平面方程.

8. 求过点 $(3,5,-2)$ 且平行于平面 $2x-y+3z=0$ 的平面方程.

9. 求点 $(3,-2,5)$ 到平面 $3x-4y-z+3=0$ 的距离.

二、空间的直线方程

已知，一定点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 和一向量 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, 求过 P_0 且平行于向量 $\vec{a}$ 的直线方程.

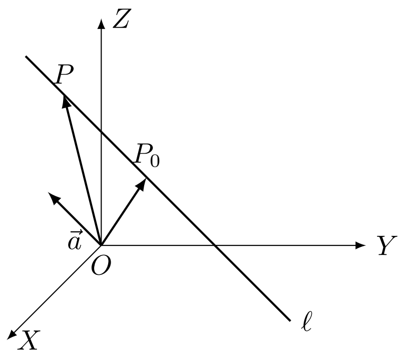


图 8.7

设 $P(x,y,z)$ 是所求直线 ℓ 上一动点，则存在一实数 t 使

$$\overrightarrow{P_0P}=t\vec{a},\qquad \overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_0}+t\vec{a}$$

换用坐标表示，即为

$$\begin{cases} x=x_0+a_1t \\ y=y_0+a_2t \\ z=z_0+a_3t \end{cases}\tag{8.14}$$

(8.14) 式叫做直线 ℓ 的**参数方程**. t 叫做**参数**.

如果 a_1,a_2,a_3 都不为零，从 (8.14) 式消去参数 t, 得

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}$$

(8.15) 式叫做 ℓ 的**点、方向式方程**又叫**对称式方程**．其中 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ 叫做 ℓ 的方向向量．如果取 $\vec{a}$ 的单位向量

$$\vec{a}_0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$$

作为方向向量，则 ℓ 的方程为

$$\frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\cos\beta}=\frac{z-z_0}{\cos\gamma}$$

$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 又叫做有向**直线 ℓ 的方向余弦**.

如果直线 ℓ 通过两点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$, 则直线 ℓ 的方向向量可取

$$\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$

这时直线 ℓ 的方程可写为

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \tag{8.15}$$

方程 (8.16) 一般叫做直线的**两点式方程**.

例 8.10　求通过 $P_0(1,-1,2)$, 且和向量 $\vec{a}=(2,3,1)$ 平行的直线 ℓ 的方程.

解：由直线的对称式方程可得直线 ℓ 的方程为

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=z-2$$

例 8.11　求通过两个不同点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 的直线的参数方程.

解：取直线 P_1P_2 的方向向量

$$\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1,y_2-{}_1,z_2-z_1)$$

由直线的参数方程．可得直线 P_1P_2 的参数方程为

$$\begin{cases} x=x_1+(x_2-x_1)t \\ y=y_1+(y_2-y_1)t \\ z=z_1+(z_2-z_1)t \end{cases}$$

例 8.12　已知 $P_1(5,0,1)$, $P_2(5,6,4)$, 求直线 P_1P_2 的参数方程.

解：由例 8.11, 可知直线 P_1P_2 的参数方程为

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 6t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$

在例 8.12 中，由于 $\overrightarrow{P_1P_2} = (0, 6, 3)$, 其中 x 坐标为零，因此直线 P_1P_2 不能写为对称式方程，但确能用参数方程来表达. 由此可看到，直线的参数方程比较优越.

练习

1. 求通过点 $P_0(-1, 2, -3)$ 且平行于向量 $\vec{s} = (2, 3, -5)$ 的直线方程.
2. 求通过 $P_0(2, 3, 1)$, $P_1(-1, -2, 3)$ 的直线方程.
3. 求通过点 $(2, 3, 1)$ 且和 X 轴平行的直线方程.
4. 求过点 $(2, -3, 7)$, 其方向向量为 $(2, 0, 3)$ 的直线方程.
5. 求直线 $2x - 6 = 4 - y = 2 - 5$ 的方向向量.
6. 求平行于两平面 $x - 2y + 5z + 2 = 0$ 和 $3x + y - z + 5 = 0$ 的交线，且通过原点的直线方程.

三、球面方程

空间一动点 $P(x, y, z)$ 在以 $A(a, b, c)$ 为球心，R 为半径的球面上的充要条件是

$$|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}| = R$$

或

$$(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) = R^2$$

换用坐标表示，条件可写为

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2 \tag{8.16}$$

方程 (8.16) 就是以 $A(a, b, c)$ 为球心，以 R 为半径的**球面方程**. 当 A 点在原点，球面方程变为

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

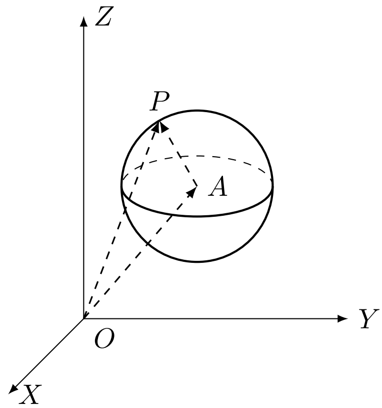


图 8.8

练习

1. 求以 $A(1,2,-2)$ 为球心，3 为半径的球面方程.
2. 求球心在原点，半径等于 5 的球面方程.
3. 设一动点 Q 在以 $A(0,4,0)$ 为球心，2 为半径的球面上变动，求 $\overline{OQ}$ 中点的轨迹.

习题 8.2

1. 求满足以下条件的平面方程.

   (a) 通过点 $P_0(5,3,4)$ 且垂直于向量 $\vec{n}=(1,1,1)$;

   (b) 通过坐标原点且垂直于 $\vec{n}=\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$;

   (c) 垂直于 $\vec{n}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2},0\right)$ 且与原点的距离等于 5.

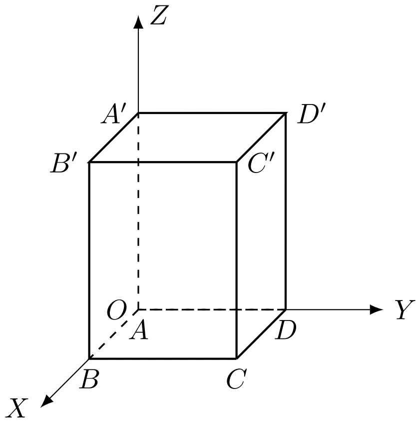
2. 说出如下方程表示的平面的几何特征.

   (a) $x=2$ (b) $x=y$ (c) $x+y+z=1$

3. 求证通过三点 $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $C(0,0,c)$ 的平面方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

4. 如图，试写出长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的各侧面，底面的平面方程以及各棱所在的直线方程．已知 $\overline{AB}=a$, $\overline{AD}=b$, $\overline{AA'}=c$.



第 4 题

5. 分别求两点 $P_1(3,9,1)$, $P_2(4,1,5)$ 到平面 S：$x-2y+2z-3=0$ 的距离．

6. 求两条直线

$$\ell_1:\quad \frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{6}=\frac{z-5}{2}$$
$$\ell_2:\quad \frac{x}{2}=\frac{y-3}{9}=\frac{z+1}{6}$$

的夹角．

7. 求通过点 $(1,-1,2)$ 并与已知平面：$x+y+z=1$ 垂直的直线方程．并求这条直线与平面交点的坐标．

8. 在直线 ℓ：$x=1+2t$, $y=8+t$, $z=8+3t$ 上求一点使它和原点的距离等于 35.

9. 求满足下列条件的球面方程．

(a) 球心在 $(-2,3,-6)$, 半径是 7

(b) 球心在 $(4,0,0)$, 半径是 2

(c) 球心在 $(0,-4,3)$, 半径是 5

(d) 球心在 $(0,-5,0)$, 半径是 2

(e) 球心在 $\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},0\right)$，半径是 1

10. 求球面：$x^2+y^2+z^2+4x-6y-2z+5=0$ 的球心和半径．

复习题八

1. 已知点 $P(3,-1,2)$ 和 $M(a,b,c)$, 求 P、M 两点分别关于坐标平面、坐标轴以及原点的对称点的坐标.

2. 求点 $P(2,5,6)$ 到坐标原点以及三条坐标轴的距离.

3. 已知 $\overrightarrow{OA}=(6,2,9)$，求 $\overrightarrow{OA}$ 与三个坐标平面的夹角.

4. 已知 $A(-2,1,3)$, $B(0,-1,2)$，求与 A、B 两点距离相等点的轨迹方程.

5. 已知 $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $C(0,0,c)$, 原点到平面 (A,B,C) 的距离为 d, 求证
$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{d^2}$$

6. 在 Z 轴上求一点，使得到 $A(-4,1,7)$, $B(3,5,-2)$ 两点的距离相等.

7. 已知四面体 $ABCD$，且 $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$, $C(x_3,y_3,z_3)$, $D(x_4,y_4,z_4)$, 求它的重心的坐标.

8. 已知 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, 求证：以 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 为邻边的平行四边形面积
$$S=\sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2}$$

9. 已知点 $P(1,3,5)$ 和 $\vec{a}(-2,1,1)$. 求通过 P 点具有方向 $\vec{a}$ 的直线与平面 $2x+3y-z=1$ 的交点.

10. 求通过如下三点的平面方程.

    (a) $(2,1,1)$,　　$(3,-1,1)$,　　$(4,1,-1)$

    (b) $(-2,3,-1)$,　　$(2,2,3)$,　　$(-4,-1,1)$

    (c) $(-5,-1,-2)$,　　$(1,2,-1)$,　　$(3,-1,2)$

11. 求下列通过已知点 P 且以 $\vec{a}$ 为方向向量的直线方程.

    (a) $P(2,1,3)$,　$\vec{a}=(1,1,-2)$　　　(d) $P(0,0,0)$,　$\vec{a}=(2,-3,5)$

    (b) $P(-5,3,4)$,　$\vec{a}=(-2,2,1)$

    (c) $P(4,-3,2)$,　$\vec{a}=(5,0,3)$　　　(e) $P(a,b,c)$,　$\vec{a}=(\ell,m,n)$