中学数学实验教材
第三册（下）

中学数学实验教材编写组编

1983 年 7 月

前　言

这一套中学数学实验教材，内容的选取原则是精简实用，教材的处理力求深入浅出，顺理成章，尽量作到使人人能懂，到处有用.

本教材适用于重点中学，侧重在满足学生将来从事理工方面学习和工作的需要.

本教材的教学目的是：使学生切实学好从事现代生产、特别是学习现代科学技术所必需的数学基础知识；通过对数学理论、应用、思想和方法的学习，培养学生运算能力，思维能力，空间想象力，从而逐步培养运用数学的思想和方法去分析和解决实际问题的能力；通过数学的教学和学习，培养学生良好的学习习惯，严谨的治学态度和科学的思想方法，逐步形成辩证唯物主义世界观.

根据上述教学目的，本教材精选了传统数学那些普遍实用的最基础的部分，这就是在理论上、应用上和思想方法上都是基本的、长远起作用的通性、通法.比如，代数中的数系运算律，式的运算，解代数方程，待定系数法；几何中的图形的基本概念和主要性质，向量，解析几何；分析中的函数，极限，连续，微分，积分；概率统计以及逻辑、推理论证等知识. 对于那些理论和应用上虽有一定作用，但发展余地不大，或没有普遍意义和实用价值，或不必要的重复和过于繁琐的内容，如立体几何中的空间作图，几何体的体积、表面积计算，几何难题，因式分解，对数计算等作了较大的精简或删减.

全套教材共分六册. 第一册是代数. 在总结小学所学自然数、小数、分数基础上，明确提出运算律，把数扩充到有理数和实数系. 灵活运用运算律解一元一次、二次方程，二元、三元一次方程组，然后进一步系统化，引进多项式运算，综合除法，辗转相除，余式定理及其推论，学到根式、分式、部分分式. 第二册是几何. 由直观几何形象分析归纳出几何基本概念和基本性质，通过集合术语、简易逻辑转入欧氏推理几何，处理直线形，圆、基本轨迹与作图，三角比与解三角形等基本内容. 第三册是函数. 数形结合引入坐标，研究多项式函数，指数、对数、三角函数，不等式等. 第四册是代数. 把数扩充到复数系，进一步加强多项式理论，方程式论，讲线性方程组理论，概率（离散的）统计

的初步知识. 第五册是几何. 引进向量, 用向量和初等几何方法综合处理几何问题, 坐标化处理直线、圆、锥线, 坐标变换与二次曲线讨论, 然后讲立体几何, 并引进空间向量研究空间解析几何初步知识. 第六册是微积分初步. 突出逼近法, 讲实数完备性, 函数, 极限, 连续, 变率与微分, 求和与积分.

本教材基本上采取代数、几何、分析分科, 初中、高中循环排列的安排体系. 教学可按初一、初二代数、几何双科并进, 初三学分析, 高一、高二代数(包括概率统计)、几何双科并进, 高三学微积分的程序来安排.

本教材的处理力求符合历史发展和认识发展的规律, 深入浅出, 顺理成章. 突出由算术到代数, 由实验几何到论证几何, 由综合几何到解析几何, 由常量数学到变量数学等四个重大转折, 着力采取措施引导学生合乎规律地实现这些转折, 为此, 强调数系运算律, 集合逻辑, 向量和逼近法分别在实现这四个转折中的作用. 这样既遵循历史发展的规律, 又突出了几个转折关头, 缩短了认识过程, 有利于学生掌握数学思想发展的脉络, 提高数学教学的思想性.

这一套中学数学实验教材是教育部委托北京师范大学、中国科学院数学研究所、人民教育出版社、北京师范学院、北京景山学校等单位组成的领导小组组织“中学数学实验教材编写组”, 根据美国加州大学伯克利分校数学系项武义教授的《关于中学实验数学教材的设想》编写的. 第一版印出后, 由教育部实验研究组和有关省市实验研究组指导在北京景山学校、北京师院附中、上海大同中学、天津南开中学、天津十六中学、广东省实验中学、华南师院附中、长春市实验中学等校试教过两遍, 在这个基础上编写组吸收了实验学校老师们的经验和意见, 修改成这一版《中学数学实验教材》, 正式出版, 内部发行, 供中学选作实验教材, 教师参考书或学生课外读物. 在编写和修订过程中, 项武义教授曾数次详细修改过原稿, 提出过许多宝贵意见.

本教材虽然试用过两遍, 但是实验基础仍然很不够, 这次修改出版, 目的是通过更大范围的实验研究, 逐步形成另一套现代化而又适合我国国情的中学数学教科书. 在实验过程中, 我们热忱希望大家多提意见, 以便进一步把它修改好.

中学数学实验教材编写组
一九八一年三月

目 录

第六章　任意角的三角函数

第一节　弧和角的概念及其度量

一、任意大小的角

在平面几何里，每一个角可以看作是由一条射线绕着它的端点旋转而形成的．射线的端点叫做角的顶点，射线旋转的开始位置叫做角的始边，终止位置叫做角的终边．如图 6.1 所示的角 α 是射线 OA 绕着端点 O, 按着箭头所示的方向旋转到 OB 所形成．O 点是角 α 的顶点，射线 OA 和 OB 分别是角 α 的始边和终边.

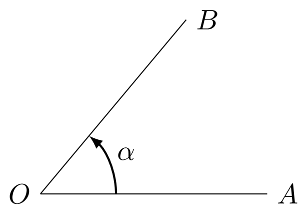


图 6.1

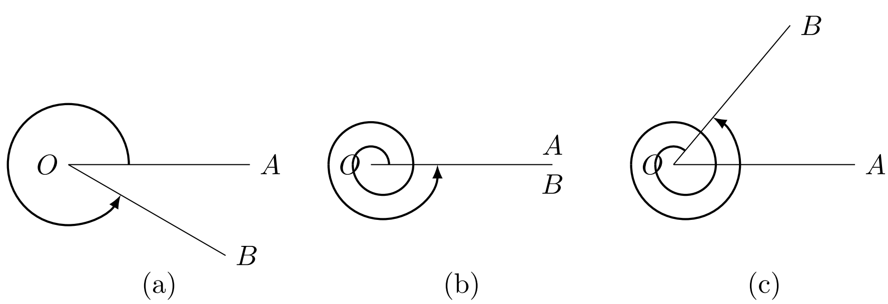


图 6.2

射线旋转所形成的角可以是任意大小的角，这也就是说，一条射线旋转所

成的角可以是锐角，钝角，平角，也可以大于一个平角 (图 6.2a), 也可以绕端点若干周后和开始的位置重合 (图 6.2b), 也可以旋转若干周又一周的部分 (图 6.2c).

我们还看到射线有两种相反的旋转方向：逆时针方向和顺时针方向. 为了加以区别，我们把按逆时针方向旋转所形成的角叫做正角，按顺时针方向旋转所形成的角叫做负角. 例如图 6.3 中以 OA 为始边的角 $\alpha = 210^\circ$, $\beta = -150^\circ$, $\gamma = -660^\circ$.

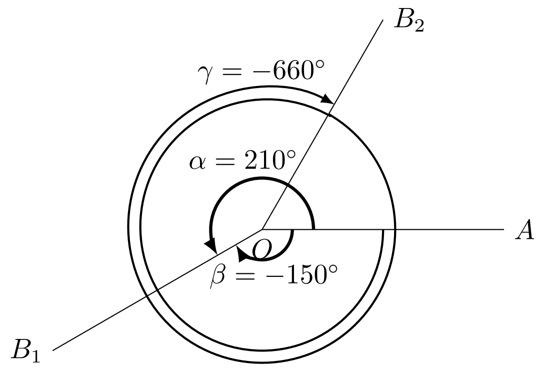


图 6.3

如果射线 OA 没有作任何旋转，仍留在开始的位置，那么我们也把它看成一个角，叫做**零角**.

这样，我们把角的概念推广到了任意的角，包括正角、负角和零角.

我们这样引进来的广义角的概念，是由下列三个因素组成：“始边”、“旋转方向”、“旋转量”. 旋转量的大小通常是以度数或弧度数来表示.

和角的概念对应的是弧的概念.

我们已经讨论了任意大小的角，现在再来讨论任意大小的弧.

圆弧可以看做是射线上的一点（不与端点重合），随着射线旋转所形成的轨迹.

如图 6.4 所示，弧 $\widehat{MM'}$ 是射线 OA 上的 M 点，随着射线 OA 旋转，由起始位置到 OB 时所形成的轨迹. 显然，对于任意角 α 的终边的每个位置，都有 M 点划出的弧 $\widehat{MM'}$ 和它对应. 和规定角的正负一样，我们规定：当射线上的一点按逆时针方向旋转时，该点所划出的弧为正的；按顺时针方向旋转时，该点所划出的弧为负的，这样规定就使正、负角和正、负弧对应起来.

再来规定角和它所对应弧的量数. 在平面几何里，我们曾规定把圆周分成 360 等分，每一份叫做一度的弧，一度弧所对的圆心角叫做一度的角. 因此，一

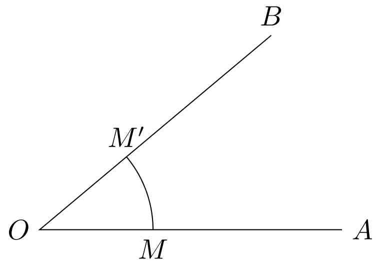


图 6.4

个圆弧含有多少度、分、秒，它所对圆心角也含有多少度、分、秒，即弧与其所对应的圆心角有完全相同的量数．例如圆心角是 500° 的角时，它所对的弧就是 500° 的弧；圆心角是 -300° 时，它所对的弧也是 -300°.

二、角的度量

角的度量是取一个确定的角作为度量单位，利用它来量所有的角．用周角的 $\frac{1}{360}$ 作为度量单位的叫做“度”．在高等数学和其它基础科学理论系统中也常用弧度作为度量圆弧和角的单位.

在弧度制中，取等于半径长的圆弧作为单位弧长．这样的弧叫做一弧度弧.用一弧度弧度量同一个圆上的圆弧所得到的量数叫做这个圆弧的弧度数，这也就是说给定圆弧的弧度数等于圆弧的弧长和半径的比值:

$$\alpha = \frac{\ell}{R} \tag{6.1}$$

这里 α 是圆弧的弧度数，ℓ 是弧长，R 是圆的半径.

我们指出圆心角所张的圆弧的弧度数由这个角的大小决定，而和圆的半径长短无关.

事实上，从几何里知道，在圆心角相同时，两个圆上的弧长的比等于它们的半径长的比 (图 6.5), 即

$$\frac{\overset{\frown}{A_1B_1}}{\overset{\frown}{A_2B_2}} = \frac{R_1}{R_2}$$

或

$$\frac{\overset{\frown}{A_1B_1}}{R_1} = \frac{\overset{\frown}{A_2B_2}}{R_2}$$

这就是说，两个圆弧 $\overset{\frown}{A_1B_1}$, $\overset{\frown}{A_2B_2}$ 的弧度数是相同的.

因此，一个圆心角所对的弧的弧度数可以表示这个角的大小，我们也把圆心角所对的圆弧的弧度数称为这个角的弧度数.

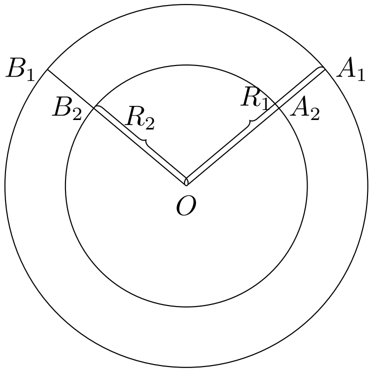


图 6.5

定义

以一个角为圆心角，这个角所对的弧的长和这个弧的半径长之比，叫做这个角的弧度数.

当弧长等于半径时，这个比值等于 1，因此，在弧度制里，度量一个角时，我们规定：

长度等于半径的圆弧所对的圆心角叫做 1 弧度角．换言之，一弧度圆弧所对的圆心角叫做 1 弧度角.

这样，由 (6.1) 推得

$$\ell = aR \tag{6.2}$$

即圆弧长等于这圆弧的弧度数（或这弧所对圆心角的弧度数）和半径长的乘积. 特别地，单位圆上的弧长等于它的弧度数.

利用 (6.1) 还可以接计算一些特殊角的弧度数.

当弧长等于圆周长 $C = 2\pi R$ 时，这个比值等于 2π，因此，

$$\begin{aligned}
\text{周角} &= \frac{2\pi R}{R} = 2\pi\text{弧度} \\
\text{平角} &= \frac{1}{2}\text{周角} = \pi\text{弧度} \\
\text{直角} &= \frac{1}{4}\text{周角} = \frac{\pi}{2}\text{弧度} \\
45^\circ &= \frac{1}{2}\text{直角} = \frac{\pi}{4}\text{弧度} \\
30^\circ &= \frac{1}{3}\text{直角} = \frac{\pi}{6}\text{弧度} \\
60^\circ &= \frac{1}{3}\text{平角} = \frac{\pi}{8}\text{弧度}
\end{aligned}$$

注意： 角的量数是以弧度数表示的，通常只写出数值不写出单位，以后我们都将单位“弧度”二字省略不写．例如平角 $=\pi$ 弧度就写成平角 $=\pi$．但是千万不要误解平角就是圆周率 $3.1415926\cdots$．

度与弧度的互化.

因为平角 $=180^\circ=\pi$, 所以 $1^\circ=\dfrac{\pi}{180}\approx 0.017453$. A° 的角相应的弧度数:

$$\alpha=\frac{A\pi}{180}$$
$$1'=\left(\frac{1}{60}\right)^\circ=\frac{1}{60}\left(\frac{\pi}{180}\right)\approx 0.00029088$$
$$1(\text{弧度})=\frac{180^\circ}{\pi}=57.295^\circ\approx 3438'\approx 206265''=57^\circ17'45''$$

α 弧度的角相应的度数:

$$A^\circ=\frac{a\cdot 180^\circ}{\pi}$$

下表给出一些常见角的弧度和它们的近似值:

度	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
弧度	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
近似值	0.5236	0.7854	1.0472	1.5708	3.1416	4.7124	6.2832

例 6.1 化 $67^\circ30'$ 为弧度.

解:

$$67^\circ30'=67.5^\circ=\frac{\pi}{180}\times 67.5=\frac{3}{8}\pi\ (\text{弧度})$$

例 6.2 化 $\dfrac{3}{5}\pi$ 弧度为度.

解:

$$\frac{3}{5}\pi=\frac{180^\circ}{\pi}\times\frac{3}{5}\pi=108^\circ$$

例 6.3 两皮带轮的半径 $R_1=20$, $R_2=30$, 求它们的转速之比 (图 6.6).

解: 因为在相同的时间内, 两轮周上转过的弧长相等, 即 $S_1=S_2$, 在弧度制下:

$$S_1=\alpha_1R_1,\qquad S_2=\alpha_2R_2$$

$$\therefore\quad \alpha_1R_1=\alpha_2R_2\quad\Rightarrow\quad\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\frac{R_2}{R_1}=\frac{30}{20}$$

$$\therefore\quad \alpha_1:\alpha_2=3:2$$

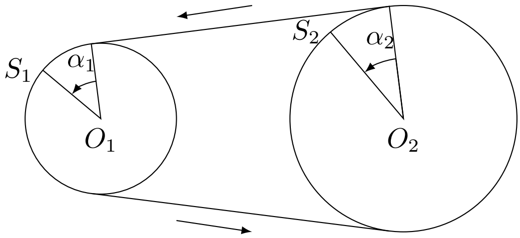


图 6.6

例 6.4 地球的半径为 6400 公里，在同一经线上，甲、乙两地的距离为 150 公里，试求甲、乙两地纬度差.

解： 设 θ 为甲、乙两地纬度差，则

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{150}{6400} \approx 0.0234 \\ &= 0.0234 \times \frac{180^\circ}{\pi} \\ &\approx 0.0234 \times 3438' \\ &\approx 13^\circ 14'\end{aligned}$$

答: 两地纬度差为 $13^\circ 14'$.

练习

1. 把下列各角的度数化为弧度数:

(a) 2° (b) 5° (c) $7^\circ 30'$ (d) $12^\circ 30'$ (e) 22.5° (f) 200° (g) 320° (h) $14^\circ 24'$ (i) $86^\circ 45'$ (j) $157^\circ 30'$

2. 把下列各角的弧度数化为度数:

(a) 0.4800 (b) 0.0099 (c) 2.6400 (d) $\frac{3}{5}\pi$ (e) $\frac{4}{5}\pi$ (f) $\frac{\pi}{15}$ (g) $\frac{\pi}{10}$ (h) 3π

3. 已知 200° 的圆心角所对的弧长等于 50cm, 求圆的半径.

4. 轮子每秒旋转 $\frac{5}{18}$ 弧度，20 秒钟内转了多大角度？

5. 一个大钟的长针长 2 尺 8 寸．20 秒间针端走了几寸？

6. 扇形弧长为 20cm, 半径为 15cm, 求扇形面积.

7. 地球半径为 6400 公里，地面上一弧所对球心角为 $1'$, 问弧长若干公里？

三、始边和终边相同的角

今后我们常在直角坐标系里讨论角，并把角放在下面的标准位置：使角的顶点与坐标原点重合，角的始边与 x 轴的正半轴重合，角的终边在第几象限，就把这个角叫做第几象限角（或说这个角属于第几象限）．如图 6.7(1) 中，$\frac{\pi}{6}$, $\frac{13\pi}{6}$ 和 $-\frac{11\pi}{6}$ 都是第一象限的角．在图 6.7(2) 中，$-\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$ 都是第四象限的角.

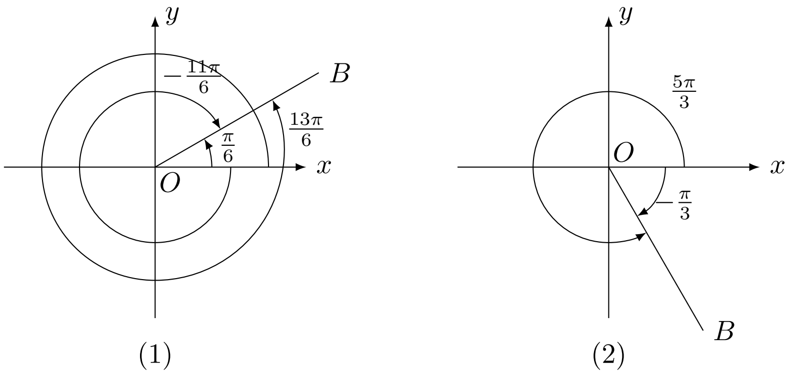


图 6.7

在图 6.7(1) 中可以看到 $\frac{13\pi}{6}$ 与 $-\frac{11\pi}{6}$ 都和 $\frac{\pi}{6}$ 的角终边相同. $\frac{13\pi}{6}$ 和 $-\frac{11\pi}{6}$ 可以写成下列形式：

$$2\pi+\frac{\pi}{6},\qquad -2\pi+\frac{\pi}{6}$$

显然，除了这两个角以外，与的角终边相同的角还有：

$$2\times 2\pi+\frac{\pi}{6},\qquad -2\times 2\pi+\frac{\pi}{6}$$
$$3\times 2\pi+\frac{\pi}{6},\qquad -3\times 2\pi+\frac{\pi}{6}$$
$$\cdots\cdots\qquad\qquad\cdots\cdots$$

所有和 $\frac{\pi}{6}$ 的角终边相同的角，连同 $\frac{\pi}{6}$ 在内，可以用下式表示：

$$2k\pi+\frac{\pi}{6},\quad (k\in\mathbb{Z})$$

当 $k=1$ 时，它表示 $\frac{\pi}{6}$ 的角；$k=1$ 时，它表示 $\frac{13\pi}{6}$ 的角；$k=-1$ 时，它表示 $-\frac{11\pi}{6}$ 的角.

一般地, 所有和 α 角终边相同的角, 连同 α 在内, 可以用式子 $2k\pi+\alpha$ $(k\in\mathbb{Z})$ 来表示.

由此可见，具有相同始边和终边的角不止一个，而是无穷多个，它们之间彼此相差整数周（正的或负的）即 2π 的整数倍. 实际上，相同始边和终边的角是由无穷多个角组成的集合. 与 α 终边相同的角（α 角处在标准位置）的集合可记作：

$$\{\beta|\beta=2k\pi+\alpha,\ k\in\mathbb{Z}\}\quad (\text{若 } \alpha \text{ 以弧度制给出})$$

或

$$\{\beta|\beta=k\cdot 360^\circ+\alpha,\ k\in\mathbb{Z}\}\quad (\text{若 } \alpha \text{ 以度数制给出})$$

例 6.5 在 0° 到 360° 的范围内，找出与下列各角终边相同的角，并判定下列各角是哪个象限的角.

$$-120^\circ,\qquad 640^\circ,\qquad -950^\circ 12'$$

解：

1. $\because\quad -120^\circ=-360^\circ+240^\circ$

   $\therefore\quad -120^\circ$ 的角与 240° 的角的终边相同，它是第三象限的角.

2. $\because\quad 640^\circ=360^\circ+280^\circ$

   $\therefore\quad 640^\circ$ 的角与 280° 的角的终边相同，它是第四象限的角.

3. $\because\quad -950^\circ 12'=-3x360^\circ+129^\circ 48'$

   $\therefore\quad -950^\circ 12'$ 的角与 $129^\circ 48'$ 的角的终边相同，它是第二象限的角.

例 6.6 写出与下列各角终边相同的角的集合 S, 并把 S 中 -2π 到 4π 间的角写出来：

$$\frac{\pi}{3},\qquad -\frac{\pi}{4},\qquad \frac{15\pi}{7}$$

解：

1. $S = \left\{\beta \middle| \beta = 2k\pi + \frac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

   S 中在 -2π 到 4π 间的角：

   - 当 $k=-1$ 时，$\beta = -2\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{-5\pi}{8}$
   - 当 $k=0$ 时，$\beta = \frac{\pi}{3}$
   - 当 $k=1$ 时，$\beta = 2\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}$

2. $S = \left\{\beta \middle| \beta = 2k\pi - \frac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

   S 中在 -2π 到 4π 间的角：

   - 当 $k=0$ 时，$\beta = -\frac{\pi}{4}$
   - 当 $k=1$ 时，$\beta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$
   - 当 $k=2$ 时，$\beta = 4\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{15\pi}{4}$

3. $S = \left\{\beta \middle| \beta = 2k\pi + \frac{15\pi}{7},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

   S 中在 -2π 到 4π 间的角：

   - 当 $k=-2$ 时，$\beta = -4\pi + \frac{15\pi}{7} = -\frac{13\pi}{7}$
   - 当 $k=-1$ 时，$\beta = -2\pi + \frac{15\pi}{7} = \frac{\pi}{7}$
   - 当 $k=0$ 时，$\beta = \frac{15\pi}{7}$

如果处在标准位置的角的终边落在坐标轴上，那么如何写出终边相同的角呢？下面我们来研究这个问题.

1. 终边落在 x 轴的正向上，这些角的量数为

$$2n\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$$

2. 终边落在 x 轴的负向上，这些角的量数

$$2n\pi + \pi = (2n+1)\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$$

把 1、2 结合起来，量数为 $k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ 的角的终边落在 x 轴上，在 k 为偶数时，终边落在 x 轴的正向上；在 k 为奇数时，终边落在 x 轴的负向上.

3. 终边落在 y 轴的正向上，这些角的量数为

$$2n\pi+\frac{\pi}{2}\quad(n\in\mathbb{Z})$$

4. 终边落在 y 轴的负向上，这些角的量数为

$$-\frac{\pi}{2}+2nx=(2n-1)\pi+\frac{\pi}{2}\quad(n\in\mathbb{Z})$$

把 3、4 结合起来，量数为 $k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbb{Z})$ 的角的终边落在 y 轴上，在 k 为偶数时，终边落在 y 轴的正向上，在 k 为奇数时，终边落在 y 轴的负向上.

量数为 $k\cdot\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbb{Z})$ 的角的终边，或落在 x 轴上，或落在 y 轴上. 在 $k=0,1,2,3,4,5,\ldots$ 时，终边依次落在 z 轴正向、y 轴正向、x 轴负向、y 轴负向、x 轴正向、y 轴正向⋯⋯在 $k=-1,-2,-3,-4,-5,\ldots$ 时，终边依次落在 y 轴负向、x 轴负向、y 轴正向、x 轴正向、y 轴负向⋯⋯

此外，若 α 的终边落在右半平面（一、四象限），则满足

$$-\frac{\pi}{2}+2k\pi<\alpha<\frac{\pi}{2}+2k\pi\quad(k\in\mathbb{Z})$$

若 α 的终边落在上半平面（一、二象限），则满足

$$2k\pi<\alpha<(2k+1)\pi$$

以上这些表示法希望大家熟悉，因为以后经常要用到.

练习

1. 在度数制下，写出下面处在标准位置的终边相同的角.

   (a) 30°
   (b) 终边落在 x 轴正向上；
   (c) 终边落在 x 轴负向上；
   (d) 终边落在 x 轴上；
   (e) 终边落在 y 轴正向上；
   (f) 终边落在 y 轴负向上；
   (g) 终边落在 y 轴上；
   (h) 角 α 的终边落在左半平面上；
   (i) 角 α 的终边落在下半平面上.

2. 把下列角放在标准位置上，用量角器作出下列各角，并指出它们是

哪个象限的角.

$$-55^\circ, \qquad -265^\circ, \qquad 400^\circ, \qquad 1000^\circ, \qquad -512^\circ$$

3. 当时钟上指出 3 点，6 点和 8 点的时候，写出分针与时针所成角的一般形式.

4. 试求出下列处在标准位置的各角的最小正同边角及最大负同边角，并说明各角为何象限角：

$$1140^\circ, \qquad 1680^\circ, \qquad -1290^\circ, \qquad -1510^\circ$$

5. 写出与下列各角终边相同的角的集合，并把集合中在 -4π 到 2π 间的角写出来：

$$\frac{\pi}{4}, \qquad -\frac{\pi}{6}, \qquad \frac{36\pi}{5}, \qquad -\frac{8\pi}{7}$$

四、单位圆

定义

以坐标原点为圆心，半径长为 1 的圆叫做单位圆．它上面任一弧的长度恰好等于弧度数.

如图 6.8, 单位圆交坐标轴于四个点 $A(1,0)$、$B(0,1)$、$A_1(-1,0)$、$B_1(0,-1)$. 过 A 作单位圆的切线 ℓ, 在 ℓ 上这样来建立坐标系：取 A 为原点，取向上的方向为正向，单位等于半径长，这样 ℓ 就是一条实数轴．我们已经知道实数轴上的点和全体实数是一一对应的.

现在把数轴 ℓ 设想为一条无限长而没有伸缩性的丝线，把数轴 ℓ 正的那一半按反时针方向来包卷单位圆，而用这条数轴负的那一半按顺时针方向包卷于单位圆上．设 S_1 是数轴 ℓ 正的那一半上的一点（图 6.8），当 ℓ 包卷到圆上后，此点就落到单位圆上的 P_1 点，此时 S_1 点的坐标是单位圆上弧 $\overset{\frown}{AP_1}$ 的长或 $\overset{\frown}{AP_1}$ 的弧度数，也是 $\overset{\frown}{AP_1}$ 所对圆心角 θ 的弧度数．如果数轴 ℓ 上的一点坐标是负的，那么它就是 ℓ 的负半轴按顺时针方向包卷在单位圆上的负弧或它所对负圆心角的弧度数，通过数轴在单位圆上的包卷，我们建立了数轴上一切点的坐标和处在标准位置的圆心角 θ 的弧度数之间的一一对应，并且由于它们的基本单位相等，于是 θ 角的弧度数就可以从包卷在单位圆上的数轴 ℓ 上的点的

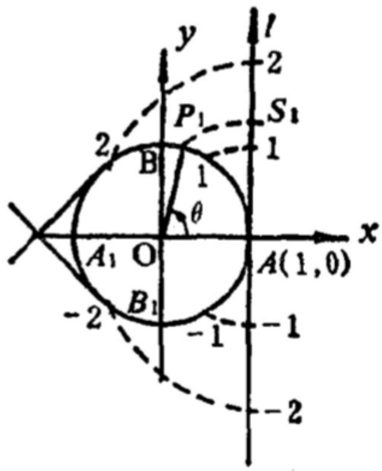


图 6.8

坐标直接读出来.

我们必须注意，在数轴 ℓ 上，坐标相差 2π 的或相差 2π 整数倍的那些点，当把 ℓ 包卷在单位圆上时，都位于同一点，例如 P_1 点是弧长 S_1 达到的一点，那么弧长等于 $S_1 \pm 2\pi, S_1 \pm 4\pi, \ldots$ 的弧，当 ℓ 包卷在单位圆上时也达到同一个点 P_1, 这就说明了数轴上的点和单位圆上的点是多一对应. 于是数轴 ℓ 上的任意两个实数 S_1, S_2 和单位圆上同一个点对应的充要条件是:

$$S_1 - S_2 = 2n\pi \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

我们把上述两种对应复合在一起得到:

$$\text{实数}\mathbb{R} \longleftrightarrow \{\theta|\text{标准位置有向角的弧度数}\} \qquad (\text{一一对应})$$
$$\longrightarrow \{(x,y)|x^2+y^2=1\} \qquad (\text{多一对应})$$

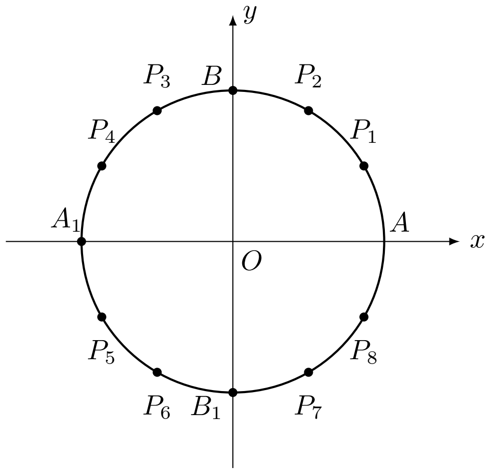
这里 (x,y) 是单位圆上点的坐标. 我们在下面将应用这种对应关系来研究三角函数的许多性质. 并且把角的三角函数与实变数的三角函数统一起来.

例 6.7 在单位圆上作出对应于下列各数的点:

$$0,\quad \frac{\pi}{6},\quad \frac{\pi}{3},\quad \frac{\pi}{2},\quad \frac{2\pi}{3},\quad \frac{5\pi}{6},\quad \pi,\quad \frac{7\pi}{6},\quad \frac{4\pi}{3},\quad \frac{3\pi}{2},\quad \frac{5\pi}{3},\quad \frac{11\pi}{6},\quad 2\pi$$

解: 这些数中每相邻两数的差是 $\dfrac{\pi}{6}$，即在单位圆上以相邻两数为端点的弧都相等，因此我们将单位圆 12 等分后，就得到对应于上列各数的点（图 6.9).

例 6.8 在数轴 ℓ 上找到和单位圆上 $(0,1)$ 点对应的一切实数.



$$\frac{\pi}{6} \to P_1, \qquad \frac{\pi}{3} \to P_2$$
$$\frac{\pi}{2} \to B, \qquad \frac{2\pi}{3} \to P_3$$
$$\frac{5\pi}{6} \to P_4, \qquad \pi \to A_1$$
$$\frac{7\pi}{6} \to P_5, \qquad \frac{4\pi}{3} \to P_6$$
$$\frac{3\pi}{2} \to B_1, \qquad \frac{5\pi}{3} \to P_7$$
$$\frac{11\pi}{6} \to P_8, \qquad 2\pi \to A$$

图 6.9

解： 在单位圆上 B 点的坐标是 $(0,1)$，$\overset{\frown}{AB}$ 的弧长是 $\frac{\pi}{2}$，因此在数轴 ℓ 上和 $(0,1)$ 点对应的一切实数是：$\frac{\pi}{2}+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

练习

1. 在单位圆上找出与实数 0，$\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{2}$，π 对应的点 P_1、P_2、P_3、P_4. 并写出与 $\angle AOP_1$、$\angle AOP_2$、$\angle AOP_3$、$\angle AOP_4$ 对应的一切实数的一般形式.

2. (a) 在单位圆上找出分别与下面各实数 0、$\frac{\pi}{6}$、$\frac{\pi}{4}$、$\frac{\pi}{3}$、$\frac{\pi}{2}$ 对应的点 P_0、P_1、P_2、P_3、P_4.

   (b) 分别写出 P_0、P_1、P_2、P_3、P_4 各点的直角坐标.

   (c) 与下面各实数对应的点，哪些和 P_0、P_1、P_2、P_3、P_4 关于坐标轴对称？哪些关于原点对称？并写出它们的直角坐标.

$$\frac{2\pi}{3},\quad \frac{3\pi}{4},\quad \frac{5\pi}{6},\quad \pi,\quad \frac{7\pi}{6},\quad \frac{5\pi}{4},\quad \frac{4\pi}{3},\quad \frac{3\pi}{2},\quad \frac{5\pi}{3},\quad -\frac{\pi}{4},\quad \frac{11\pi}{6}$$

第二节　任意角的三角函数

在描述和研究有关转动和振动的实际问题的时候，我们就要研究任意角的三角函数，下面我们来研究任意角的三角函数.

一、任意角三角函数的定义

如图 6.10, 在角 α 的终边上任意取一点 P (不是坐标系的原点).

以坐标系的原点为起点, P 为终点的有向线段 $\overrightarrow{OP}$ 叫做 P 点的向量半径或旋转半径.

设 P 点的坐标是 (x,y), 它和原点的距离为 $r>0$ (即旋转半径 $\overrightarrow{OP}$ 的长), 横坐标 x 与纵坐标 y 的正负是由 P 点所在的象限来确定的. 距离 r 总是正的, 并且

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

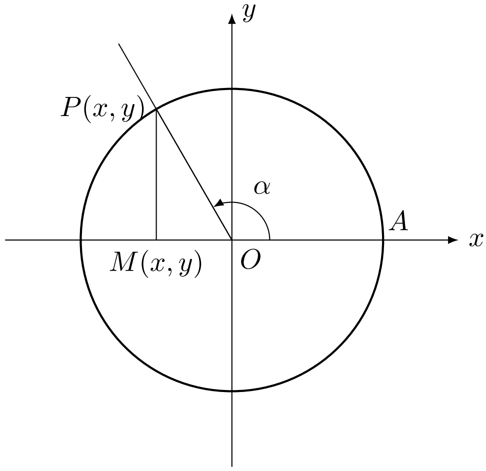


图 6.10

定义

1. $\dfrac{y}{r}$ 叫做角 α 的正弦, 记作 $\sin\alpha$, 即 $\sin\alpha=\dfrac{y}{r}$;
2. $\dfrac{x}{r}$ 叫做角 α 的余弦, 记作 $\cos\alpha$, 即 $\cos\alpha=\dfrac{x}{r}$;
3. $\dfrac{y}{x}$ 叫做角 α 的正切, 记作 $\tan\alpha$, 即 $\tan\alpha=\dfrac{y}{x}$;
4. $\dfrac{x}{y}$ 叫做角 α 的余切, 记作 $\cot\alpha$, 即 $\cot\alpha=\dfrac{x}{y}$;
5. $\dfrac{r}{x}$ 叫做角 α 的正割, 记作 $\sec\alpha$, 即 $\sec\alpha=\dfrac{r}{x}$;
6. $\dfrac{r}{y}$ 叫做角 α 的余割, 记作 $\csc\alpha$, 即 $\csc\alpha=\dfrac{r}{y}$.

对于确定的角 α，$\dfrac{y}{r}$，$\dfrac{x}{r}$，$\dfrac{y}{x}$，$\dfrac{x}{y}$，$\dfrac{r}{x}$，$\dfrac{r}{y}$ 这六个比值的大小，和我们在 α 角的终边上所取 P 点的位置没有关系，如图 6.11 中，$P_1(x_1, y_1)$ 点为角 α 终边上另一点，P_1 到原点 O 的距离为 r_1，x 和 x_1、y 和 y_1 的符号相同，因为 $\triangle POM \sim \triangle P_1OM_1$，所以

$$\frac{y_1}{r_1} = \frac{y}{r}, \qquad \frac{x_1}{r_1} = \frac{x}{r}, \qquad \frac{y_1}{x_1} = \frac{y}{x}$$
$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x}{y}, \qquad \frac{r_1}{x_1} = \frac{r}{x}, \qquad \frac{r_1}{y_1} = \frac{r}{y}$$

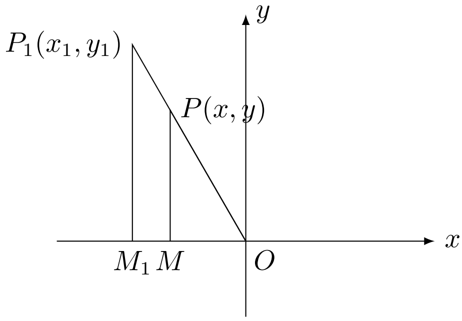


图 6.11

这就是说，对于确定的角 α, $\sin\alpha$、$\cos\alpha$、$\tan\alpha$、$\cot\alpha$、$\sec\alpha$、$\csc\alpha$ 都有确定的值，因为它们的值是随着 α 变化而变化的，当 α 角取确定值的时候，它们的值也相应地唯一确定，所以，角 α 的正弦、余弦、正切、余切、正割和余割都是角 α 的函数，这些函数都叫做三角函数.

很明显，当角 α 是锐角或钝角时，上面三角函数的定义和锐角、钝角三角函数的定义完全一样，所以锐角、钝角三角函数定义是任意角三角函数定义的特例.

根据任意角三角函数定义，可以看出

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \qquad \csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}, \qquad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$$

今后我们主要研究 $\sin\alpha$、$\cos\alpha$、$\tan\alpha$、$\cot\alpha$ 四个函数.

例 6.9　已知单位圆中旋转半径 OP 和 OX 轴正方向成 300° 角，求 $\sin 300^\circ$, $\cos 300^\circ$, $\tan 300^\circ$, $\cot 300^\circ$.

解： 设 OP 的端点 P 的坐标是 (x, y). 作直线 $PM \perp OX$ 轴于 M 点，A 点是单位圆与 OX 轴的交点 $(1, 0)$, 联结 P, A(图 6.12). 在 $\triangle OPA$ 中，

$\because \quad OP = OA = 1, \quad \angle POA = 360^\circ - 300^\circ = 60^\circ$

$\therefore$ $\triangle OPA$ 是等边三角形，因此，PM 垂直平分 OA, $|x| = |OM| = \dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned}|y| = |PM| &= \sqrt{|OP|^2 - |OM|^2}\\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

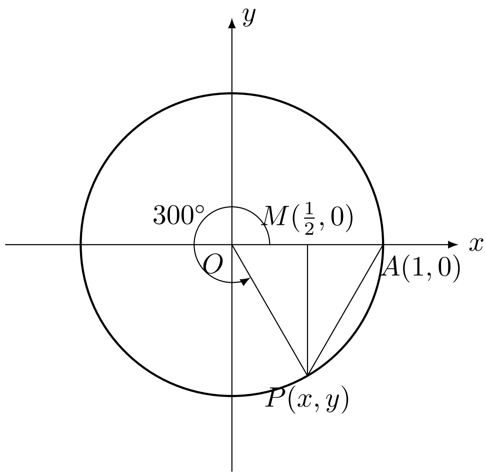


图 6.12

又 $\because$ P 点在第四象限，$\therefore$ P 点坐标是

$$x = \frac{1}{2}, \qquad y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

由此求得

$$\sin 300^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos 300^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 300^\circ = -\sqrt{3}, \qquad \cot 300^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

例 6.10

$$\cos 0 = 1, \qquad \sin 0 = 0, \qquad \cos\frac{\pi}{2} = 0, \qquad \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

$$\cos\pi = -1, \qquad \sin\pi = 0, \qquad \cos\frac{3\pi}{2} = 0, \qquad \sin\frac{3\pi}{2} = -1$$

二、数值变数的三角函数与三角函数的定义域

在数学中两个变数之间的函数可以表示不同物理量或几何量之间的函数关系，例如，数学中的二次函数 $y = ax^2$, 如果 $a = 1$, a 表示正方形的边长的数值，y 就表示正方形的面积数值；但是当 $a = \frac{1}{2}g$ 时，x 表示自由落体下降的时间，则 y 表示下降的距离. 同样，有许多物理或技术问题，常常要用到的三角函数，其中的自变量就不一定是角或弧而是时间或长度等，所以为了满足科学技术上的需要，就必需把角的三角函数扩充为变数 x 的三角函数.

假设 x 是在函数定义域内的任意实数，根据前节讨论知，对应此实数有一个量数是 x 的角或弧（用弧度作单位），而对应于该角又有它的各三角函数值，由于这种关系，对于任意实数 x 就有完全确定的三角函数值 y 与之对应，于是得到了一个数值变数的三角函数.

定义

变数 x 的三角函数就是具有弧度数 x 的角（或弧）的三角函数.

例 6.11　若 $x = 1.54$, 求 $\sin x$ 的值.

解： 因为 $\sin 1.54 = \sin 1.54$弧度，又 1.54弧度 $\approx 88°14'$,

所以 $\sin 1.54 \approx \sin 88°14' \approx 0.9995$

在任意大小的角、弧及数之间所能建立的对应，使得我们可以认为三角函数是角的函数，或是弧的函数，或是数的函数，其中变数由我们处理，可以解释为角或解释为弧，或解释为数.

现在给每个三角函数确定它的定义域：

设数值 α, 有单位圆上的点 P 与之对应（如图 6.13），那么 P 点的坐标是

$$x = \cos\alpha, \qquad y = \sin\alpha$$

因此：

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \cot\alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{x} = \frac{1}{\cos\alpha}, \qquad \csc\alpha = \frac{1}{y} = \frac{1}{\sin\alpha}$$

1. 函数 $\cos\alpha$ 和 $\sin\alpha$ 的定义域是开区间 $-\infty < \alpha < +\infty$, 即 $(-\infty, +\infty)$, 这是因为 $\cos\alpha$ 和 $\sin\alpha$ 是单位圆上对应于数 α 的点 P 的横坐标和纵坐标，它们对于任何实数 α 都有明确的值.

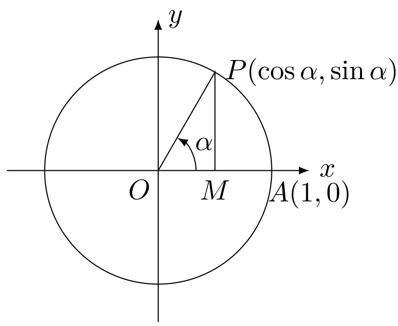


图 6.13

2. 函数 $\tan\alpha$ 的定义域是除去形如 $\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$ 的数的实数集:

$$\left\{\alpha\middle|\alpha\in\mathbb{R},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

即正切的定义域是无限个开区间组成的一个集:

$$\cdots,\left(-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right),\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right),\left(\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right),\cdots$$

这是因为 $\tan\alpha=\dfrac{y}{x}$ 是单位圆上 P 点的纵坐标对横坐标之比，唯有当 $x=0$ 时它失去意义，单位圆上与 $x=0$ 对应的点只有 $(0,1)$ 和 $(0,-1)$, 与 $(0,1)$ 点对应的一切实数是 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$, 与 $(0,-1)$ 点对应的一切实数是 $\alpha=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$, 和 $(0,1)$ 点、$(0,-1)$ 点这两点对应的一切实数可以合并写成:

$$\alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi\qquad(k\in\mathbb{Z})$$

3. 函数 $\cot\alpha$ 的定义域是除去形如 $k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$ 的数的实数集: $\{\alpha|\alpha\in\mathbb{R},\ \alpha\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$, 即余切的定义域是无限个开区间组成的一个集:

$$\cdots,(-\pi,0),(0,\pi),(\pi,2\pi),\cdots$$

4. 函数 $\sec\alpha$ 的定义域与正切函数 $\tan\alpha$ 的定义域 $\left\{\alpha\middle|\alpha\in\mathbb{R},\ \alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$ 相同.

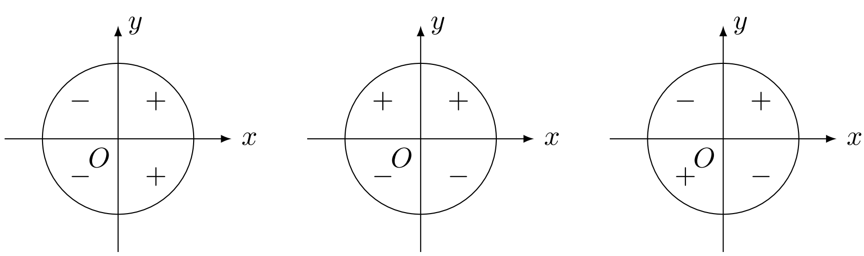
5. 函数 $\csc\alpha$ 的定义域与余切函数 $\cot\alpha$ 的定义域 $\{\alpha|\alpha\in\mathbb{R},\ \alpha\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$ 相同.

三、三角函数的正负

设单位圆上点 P 与数 α 对应，以后我们把与 α 对应，处在标准位置，以 α（弧度）为量数的角 $\angle AOP$ 简称为角 α.

1. 若 P 点在第一象限 (或者角 α 终边在第一象限), 则 P 点的横坐标 $x > 0$, 纵坐标 $y > 0$, 因此,
$$\cos\alpha > 0, \qquad \sin\alpha > 0, \qquad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} > 0, \qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} > 0$$
2. 若 P 点在第二象限 (或者角 α 终边在第二象限), 则 P 点的横坐标 $x < 0$, 纵坐标 $y > 0$, 因此,
$$\cos\alpha < 0, \qquad \sin\alpha > 0, \qquad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} < 0, \qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} < 0$$
3. 若 P 点在第三象限 (或者角 α 终边在第三象限), 则 P 点的横坐标 $x < 0$, 纵坐标 $y < 0$, 因此,
$$\cos\alpha < 0, \qquad \sin\alpha < 0, \qquad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} > 0, \qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} > 0$$
4. 若 P 点在第四象限 (或者角 α 终边在第四象限), 则 P 点的横坐标 $x > 0$, 纵坐标 $y < 0$, 因此,
$$\cos\alpha > 0, \qquad \sin\alpha < 0, \qquad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} < 0, \qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} < 0$$

总之，三角函数的符号可以由单位圆上 P 点在哪一象限，或者由角 α 的终边在哪一象限决定，如图 6.14 所示.



$\cos\alpha$ 和 $\sec\alpha$　　$\sin\alpha$ 和 $\csc\alpha$　　$\tan\alpha$ 和 $\cot\alpha$

图 6.14

例 6.12　例 1 决定下列三角函数的符号:
$$\cos 120^\circ, \qquad \sin(-465^\circ), \qquad \csc\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$$

解：

1. 120° 的角是第二象限的角，而第二象限的角的余弦为负，所以
$$\cos 120^\circ < 0$$
2. -465° 的角是第三象限的角，而第三象限的角的正弦为负，所以
$$\sin(-465^\circ) < 0$$
3. $-\dfrac{4\pi}{3}$ 的角是第二象限的角，而第二象限的角的余割为正，所以
$$\csc\left(-\frac{4\pi}{3}\right) > 0$$

例 6.13 如果 α 是第四象限的角，那么 $\sin\alpha\tan\alpha$ 和 $\dfrac{cos\alpha}{\cot\alpha}$ 各取什么符号？

解： 因为 α 是第四象限的角，根据第四象限角的三角函数的符号得：

$$\sin\alpha < 0, \qquad \cos\alpha > 0, \qquad \tan\alpha < 0, \qquad \cot\alpha < 0$$

所以
$$\sin\alpha\tan\alpha > 0, \qquad \frac{\cos\alpha}{\cot a} < 0$$

例 6.14 若 α 是第三象限的角，求证：$\tan\alpha + \cot\alpha \geq 2$

解： $\because$ α 是第三象限的角，$\tan\alpha > 0$, $\cot\alpha > 0$. 根据两个正数的算术平均值不小于它的几何平均值，因此有：
$$\frac{\tan a + \cot a}{2} \geq \sqrt{\tan\alpha\cot\alpha}$$
即：$\dfrac{\tan a + \cot a}{2} \geq 1$

$\therefore$ $\tan a + \cot a \geq 2$

练习

1. 图示下列各点位置，并求出与原点的距离. 写出角的终边通过这些点的三角函数值：$P_1(-3,4)$, $P_2(4,-5)$, $P_3(-5,-3)$.
2. 若 P 点的坐标为 $(-4, y)$、OP 长为 5, 试求 y 值，并写出角的终

边通过 P 点的三角函数值.

3. $\sec\alpha$ 能否小于 $\tan\alpha$? $\csc\alpha$ 能否小于 $\cot\alpha$?

4. 就绝对值而言能否 $\cos\alpha$ 大于 $\cot\alpha$? $\sin\alpha$ 大于 $\tan\alpha$?

5. x 为何值，不等式 $|\sin x| + |\cos x| < 1$ 成立?

6. 决定下列各角正弦、余弦、正切的符号:

$$885°, \qquad -395°, \qquad \frac{19\pi}{6}$$

7. 若 $\cos A < 0$ 且 $\tan A < 0$, 试决定 A 为何象限角?

8. 设 $\dfrac{\sin\alpha}{\tan\alpha} < 0$, $\dfrac{\cot\alpha}{\cos\alpha} < 0$, $\sin\alpha\cos\alpha < 0$, 角 α 的终边应当在哪些象限?

9. 设 α 的终边在第三象限内，决定下列各式的符号:

(a) $\sin\alpha + \cos\alpha$

(b) $\tan\alpha - \sin\alpha$

(c) $\cos\alpha + \cot\alpha$

(d) $\sec\alpha + \tan\alpha + \cot\alpha$

10. α 为何值时，下面式子失去意义:

(a) $\cos\alpha + \dfrac{1}{\cos\alpha}$

(b) $\tan\alpha + \sin\alpha$

(c) $\tan\alpha + \cot\alpha$

(d) $\dfrac{1}{\cos\alpha} + \tan\alpha$

(e) $\dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$

四、一些特殊角的三角函数值

我们常常要考虑在 $[0, 2\pi]$ 范围的一些特殊角的三角函数值，仍利用单位圆来讨论，设向量半径 $\overrightarrow{OP}$ 的端点为 $P(x, y)$, 于是

- 当 $\alpha = 0$ 时，则 P 的坐标是 $(1, 0)$, 那么，$\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$, $\tan 0 = 0$, $\cot 0$ 不存在，$\sec 0 = 1$, $\csc 0$ 不存在.

- 当 $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ 时，则 P 的坐标是 $(0, 1)$, 那么，$\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$, $\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$, $\tan\dfrac{\pi}{2}$ 不存在, $\cot\dfrac{\pi}{2} = 0$，$\sec\dfrac{\pi}{2}$ 不存在, $\csc\dfrac{\pi}{2} = 1$.

- 当 $\alpha=\pi$ 时，则 P 的坐标是 $(-1,0)$，那么，$\cos\pi=-1$，$\sin\pi=0$，$\tan\pi=0$，$\cot\pi$ 不存在，$\sec\pi=-1$，$\csc\pi$ 不存在.
- 当 $\alpha=\dfrac{3\pi}{2}$ 时，则 P 的坐标是 $(0,-1)$，那么，$\cos\dfrac{3\pi}{2}=0$，$\sin\dfrac{3\pi}{2}=-1$，$\tan\dfrac{3\pi}{2}$ 不存在，$\cot\dfrac{3\pi}{2}=0$，$\sec\dfrac{3\pi}{2}$ 不存在，$\csc\dfrac{3\pi}{2}=-1$.

把上面结果列成表. 要记着表上结果并不难，只要记着特殊点 P 的相应位置，根据三角函数的定义就很快得到函数值.

$P(x,y)$	α	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$	$\sec\alpha$	$\csc\alpha$
$P(1,0)$	0	1	0	0	不存在	1	不存在
$P(0,1)$	$\dfrac{\pi}{2}$	0	1	不存在	0	不存在	1
$P(-1,0)$	π	-1	0	0	不存在	-1	不存在
$P(0,-1)$	$\dfrac{3\pi}{2}$	0	-1	不存在	0	不存在	-1

在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 之间的几个特殊角的函数值，以前见过了，现在再复习一下（见图 6.15）：

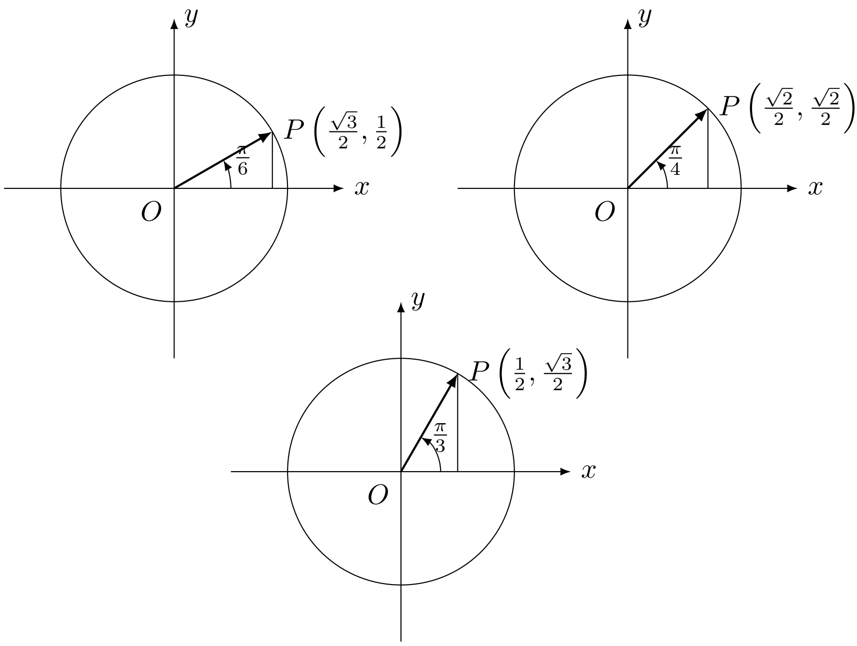


图 6.15

- 设 $\alpha=\dfrac{\pi}{6}(=30^\circ)$，根据直角三角形性质（$30^\circ$ 角的对边等于斜边的一半），

得 P 点坐标 $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$，那么

$$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad \sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},\qquad \tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3},\qquad \cot\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$$

- 设 $\alpha=\frac{\pi}{4}(=45^\circ)$, 这时得 $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，那么

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\qquad \sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\qquad \tan\frac{\pi}{4}=1,\qquad \cot\frac{\pi}{4}=1$$

- 设 $\alpha=\frac{\pi}{3}(=60^\circ)$, 这时得 $P\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，那么

$$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},\qquad \sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad \tan\frac{\pi}{6}=\sqrt{3},\qquad \cot\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

把上述结果列表如下：

α	$\frac{\pi}{6}(30^\circ)$	$\frac{\pi}{4}(45^\circ)$	$\frac{\pi}{3}(60^\circ)$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\alpha$	$\frac{1}{2}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

练习

1. 求下列各式的值：

   (a) $5\sin 90^\circ+2\cos 0^\circ-3\sin 270^\circ+10\cos 180^\circ$

   (b) $a^2\cos 270^\circ+b^2\sin 0^\circ+2ab\cot 270^\circ$

   (c) $m\sin 270^\circ-\dfrac{n\sin 90^\circ}{\cos 180^\circ}+k\tan 180^\circ$

   (d) $a^2\cos 0^\circ-b^2\sin 270^\circ+ab\cos 180^\circ-ab\cos 0^\circ$

   (e) $a^2\sin 90^\circ+2ab\cos 180^\circ+\dfrac{b^2}{\cos^2 0^\circ}$

2. 求下列各式的值：

(a) $p^2\sin 90^\circ - 2pq\cos 0^\circ - q^2\sec 180^\circ$

其中：$p=\dfrac{1}{3}, q=\dfrac{1}{2}$

(b) $\cos\dfrac{\pi}{3} - \tan\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{3}{4}\tan^2\dfrac{\pi}{6} - \sin\dfrac{\pi}{6} + \cos^2\dfrac{\pi}{6} + \sin\dfrac{3\pi}{2}$

(c) $\cos\dfrac{\pi}{3} - \sin^2\dfrac{\pi}{4}\cos\pi - \dfrac{1}{3}\tan^2\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{3\pi}{2} + \cos 0$

第三节 三角函数的诱导公式

一、三角函数的奇偶性

关于函数的奇偶性的概念我们在以前已经学习过了，现在我们来研究三角函数的奇偶性，以便在计算函数值时得到一些简便的法则.

我们有下面的定理.

定理

余弦函数是偶函数，正弦函数、正切函数和余切函数都是函数，这就是说，对于一切容许的 α 值，都有

$$\begin{aligned} \sin(-\alpha) &= -\sin\alpha, \qquad & \cos(-\alpha) &= \cos\alpha \\ \tan(-\alpha) &= -\tan\alpha, \qquad & \cot(-\alpha) &= -\cot\alpha \end{aligned} \tag{6.3}$$

证明： 设 α 和 $-\alpha$ 是处在标准位置（即如图 6.16 所示）的，按相反的旋转方向且有相同绝对值的角，于是这两个角的终边关于 Ox 轴对称.

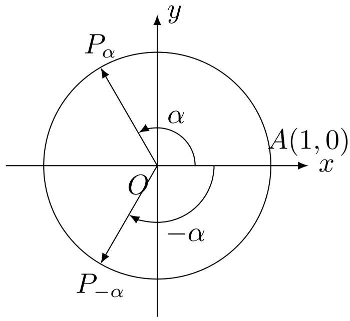


图 6.16

设它们的终边与单位圆交于 P_α 和 $P_{-\alpha}$ 两点，此两点也必定关于 Ox 轴对

称.

根据三角函数的定义，

- P_α 点的坐标是 $(\cos\alpha, \sin\alpha)$；
- $P_{-\alpha}$ 点的坐标是 $(\cos(-\alpha), \sin(-\alpha))$.

因此，由它们关于 Ox 轴的对称性便知道它们的横坐标相等，纵坐标是相反数，也就是说

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha, \qquad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

由此，

$$\tan(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\tan\alpha$$
$$\cot(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\cot\alpha$$

例 6.15 求 $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$，$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$，$\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$，$\cot\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

解:

$$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$
$$\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$\cot\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\cot\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$$

例 6.16 下面函数哪些是偶函数，哪些是奇函数，哪些都不是?

1. $g(x) = 1 - \cos x$
2. $F(x) = x - \sin x$
3. $h(x) = x^2\cos x$
4. $y(x) = \dfrac{x + \sin x}{x - \sin x}$

解:

1. $\because \quad g(-x) = 1 - \cos(-x) = 1 - \cos x = g(x)$

   $\therefore \quad g(x)$ 是偶函数.

2. $\because$ $F(-x) = (-x) - \sin(-x) = -x - (-\sin x) = -(x - \sin x) = -F(x)$

$\therefore$ $F(x)$ 是奇函数.

3. $\because$ $h(-x) = (-x)^2 \cos(-x) = x^2 \cos x = h(x)$

$\therefore$ $h(x)$ 是偶函数.

4. $\because$ $y(-x) = \dfrac{(-x) + \sin(-x)}{(-x) - \sin(-x)} = \dfrac{-(x + \sin x)}{-(x - \sin x)} = \dfrac{x + \sin x}{x - \sin x} = y(x)$

$\therefore$ $y(x)$ 是偶函数.

练习

下面函数哪些是偶函数，哪些是奇函数，哪些都不是?

1. $f(x) = |\sin x|$
2. $H(x) = x^2 + \sin x$
3. $\phi(x) = \cos x \sin x$
4. $G(x) = \dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$
5. $f(t) = \dfrac{t^2 + \sin t^2}{1 + \sin^2 t}$
6. $y = \tan(x + 2)$
7. $y = -\tan 2x + 2$
8. $y = \tan(3 - x)$

二、$2\pi \pm \alpha$ 与 α 的三角函数间的关系

根据三角函数的定义可以知道，终边相同的角的同一三角函数的值相等，即

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + 2k\pi) &= \sin\alpha, & \cos(\alpha + 2k\pi) &= \cos\alpha \\ \tan(\alpha + 2k\pi) &= \tan\alpha, & \cot(\alpha + 2k\pi) &= \cot\alpha \end{aligned} \tag{6.4}$$

其中 $k \in \mathbb{Z}$.

利用上面的公式可以把求任意角的三角函数值的问题，转化为求 0 到 2π 间角的三角函数值的问题.

例 6.17 求下列三角函数值:

1. $\sin(-1480°10')$
2. $\cos\left(\dfrac{9\pi}{4}\right)$
3. $\tan\left(-\dfrac{11\pi}{3}\right)$

解:

1. $\sin(-1480°10') = -\sin(1480°10') = -\sin(4\times360°+40°10') = -\sin 40°10' = -0.6451$

2. $\cos\left(\dfrac{9\pi}{4}\right) = \cos\left(2\pi+\dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

3. $\tan\left(-\dfrac{11\pi}{3}\right) = \tan\left(-4\pi+\dfrac{\pi}{3}\right) = \tan\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

在上面公式中，若令 $k=1$, 则有

$$\begin{aligned}\sin(2\pi+\alpha)&=\sin\alpha, &\qquad \cos(2\pi+\alpha)&=\cos\alpha\\ \tan(2\pi+\alpha)&=\tan\alpha, &\qquad \cot(2\pi+\alpha)&=\cot\alpha\end{aligned}\tag{6.5}$$

现在来看 $2\pi-\alpha$ 的各三角函数值:

$$\sin(2\pi-\alpha)=\sin[2\pi+(-\alpha)]=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(2\pi-\alpha)=\cos[2\pi+(-\alpha)]=\cos(-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\tan(2\pi-\alpha)=\tan[2\pi+(-\alpha)]=\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$$
$$\cot(2\pi-\alpha)=\cot[2\pi+(-\alpha)]=\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$$

于是有

$$\begin{aligned}\sin(2\pi-\alpha)&=-\sin\alpha, &\qquad \cos(2\pi-\alpha)&=\cos\alpha\\ \tan(2\pi-\alpha)&=-\tan\alpha, &\qquad \cot(2\pi-\alpha)&=-\cot\alpha\end{aligned}\tag{6.6}$$

例 6.18　求下列各三角函数值:

1. $\sin\dfrac{11\pi}{6}$
2. $\cos\dfrac{13\pi}{8}$
3. $\cot 310°18'$
4. $\sin\left(-\dfrac{17}{3}\pi\right)$
5. $\tan(-324°18')$

解:

1. $\sin\dfrac{11\pi}{6} = \sin\left(2\pi-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\sin\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{1}{2}$

2. $\cos\dfrac{13\pi}{8} = \cos\left(2\pi-\dfrac{3\pi}{8}\right) = \cos\dfrac{3\pi}{8} = \cos 67°30' = 0.3827$

3. $\cot 310°18' = \cot(360°-49°42') = -\cot 49°42' = -0.8481$

4. $\sin\left(-\dfrac{17}{3}\pi\right) = \sin\left(-6\pi+\dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

   或者

   $$\sin\left(-\frac{17}{3}\pi\right) = -\sin\frac{17\pi}{3} = -\sin\left(6\pi-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

5. $\tan(-324°18') = -\tan 324°18' = -\tan(360°-35°42') = -(-\tan 35°42') = \tan 35°42' = 0.7186$

三、$\dfrac{\pi}{2}\pm\alpha$ 与 α 的三角函数间的关系

$\dfrac{\pi}{2}\pm\alpha$ 与 α 的三角函数间有下述关系:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) &= \cos\alpha, & \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) &= -\sin\alpha \\ \tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) &= -\cot\alpha, & \cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) &= -\tan\alpha \end{aligned} \tag{6.7}$$

证明: 设 P 和 P' 是单位圆上的点, 且 $\angle POP' = \dfrac{\pi}{2}$. 若 P 点分别在第一、二、三、四象限, 那么 P' 点就依次在第二、三、四、一象限, 如图 6.17 所示.

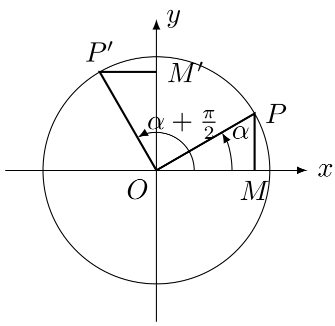


图 6.17

从 P 点和 P' 点分别向 Ox 轴和 Oy 轴引垂线 PM, $P'M'$. 从直角三角形 OMP 和 $OM'P'$ 全等得

$$|OM| = |OM'|, \qquad |MP| = |M'P'|$$

由上面等式和对于任意角 α 的 P, P' 两点所在象限知道: P 点的横坐标 $x_P = OM$, 恒与 P' 点的纵坐标 $y_{P'} = OM'$ 相等, 即它们的绝对值和符号都相同, 也就是 $x_P = y_{P'}$, 因此 $\cos\alpha = \sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)$.

又 P 点的纵坐标 $y_P = MP$ 是 P' 点的横坐标 $x_{P'} = M'P'$ 的相反数, 即

$y_P = MP = -M'P' = -x_{P'}$，因此，$\sin\alpha = -\cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right)$．这样就得到：

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) &= \cos\alpha\\
\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) &= -\sin\alpha\\
\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\cot\alpha\\
\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) &= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\tan\alpha
\end{aligned}$$

由公式 (6.7) 我们可以得到，对于任意角 α，

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \sin\left[\frac{\pi}{2}+(-\alpha)\right] = \cos(-\alpha) = \cos\alpha\\
\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \cos\left[\frac{\pi}{2}+(-\alpha)\right] = -\sin(-\alpha) = \sin\alpha\\
\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \tan\left[\frac{\pi}{2}+(-\alpha)\right] = -\cot(-\alpha) = \cot\alpha\\
\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \cot\left[\frac{\pi}{2}+(-\alpha)\right] = -\tan(-\alpha) = \tan\alpha
\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \cos\alpha, & \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \sin\alpha\\
\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \cot\alpha, & \cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \tan\alpha
\end{aligned} \tag{6.8}$$

四、$\pi\pm\alpha$、$\dfrac{3\pi}{2}\pm\alpha$ 与 α 的三角函数间的关系

由于

$$\begin{aligned}
\sin(\pi+\alpha) &= \sin\left[\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha\\
\cos(\pi+\alpha) &= \cos\left[\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right] = -\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\cos\alpha\\
\tan(\pi+\alpha) &= \tan\left[\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right] = -\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -(-\tan\alpha) = \tan\alpha\\
\cot(\pi+\alpha) &= \cot\left[\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right] = -\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -(-\cot\alpha) = \cot\alpha
\end{aligned}$$

因此有：

$$\begin{aligned}
\sin(\pi+\alpha) &= -\sin\alpha, & \cos(\pi+\alpha) &= -\cos\alpha\\
\tan(\pi+\alpha) &= \tan\alpha, & \cot(\pi+\alpha) &= \cot\alpha
\end{aligned} \tag{6.9}$$

由于

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin[\pi+(-\alpha)]=-\sin(-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\cos(\pi-\alpha)=\cos[\pi+(-\alpha)]=-\cos(-\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\tan(\pi-\alpha)=\tan[\pi+(-\alpha)]=\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$$
$$\cot(\pi-\alpha)=\cot[\pi+(-\alpha)]=\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$$

因此有:

$$\begin{aligned}\sin(\pi-\alpha)&=\sin\alpha, & \cos(\pi-\alpha)&=-\cos\alpha\\ \tan(\pi-\alpha)&=-\tan\alpha, & \cot(\pi-\alpha)&=-\cot\alpha\end{aligned}\tag{6.10}$$

由于

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\left[\pi+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]=-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha$$
$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\left[\pi+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-(-\sin\alpha)=\sin\alpha$$
$$\tan\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\tan\left[\pi+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]=\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot\alpha$$
$$\cot\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\cot\left[\pi+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]=\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\tan\alpha$$

因此有:

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)&=-\cos\alpha, & \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)&=\sin\alpha\\ \tan\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)&=-\cot\alpha, & \cot\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)&=-\tan\alpha\end{aligned}\tag{6.11}$$

由于

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\left[\frac{3\pi}{2}+(-\alpha)\right]=-\cos(-\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\left[\frac{3\pi}{2}+(-\alpha)\right]=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\left[\frac{3\pi}{2}+(-\alpha)\right]=-\cot(-\alpha)=\cot\alpha$$
$$\cot\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\left[\frac{3\pi}{2}+(-\alpha)\right]=-\tan(-\alpha)=\tan\alpha$$

因此有:

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)&=-\cos\alpha, & \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)&=-\sin\alpha\\ \tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)&=\cot\alpha, & \cot\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)&=\tan\alpha\end{aligned}\tag{6.12}$$

例 6.19　求 $\sin(-1650^\circ)$，$\cos\left(-\dfrac{19\pi}{6}\right)$ 的值.

解：

$$\begin{aligned}\sin(-1650^\circ) &= -\sin(1650^\circ) = -\sin(4\times 360^\circ + 210^\circ)\\ &= -\sin 210^\circ = -\sin(180^\circ + 30^\circ)\\ &= \sin 30^\circ = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\left(-\frac{19\pi}{6}\right) &= \cos\frac{19\pi}{6} = \cos\left(2\pi + \frac{7\pi}{6}\right)\\ &= \cos\frac{7\pi}{6} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)\\ &= -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

五、三角函数的诱导公式

把上面的自变数是 $-\alpha$、$\dfrac{\pi}{2}\pm\alpha$、$\pi\pm\alpha$、$\dfrac{3\pi}{2}\pm\alpha$、$2\pi\pm\alpha$ 的三角函数表示为自变数就是 α 的三角函数的公式，叫做三角函数的诱导公式. 为便于查阅和比较，我们把三角函数的诱导公式全部都列于下表中.

	cos	sin	tan	cot
$-\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$
$\dfrac{\pi}{2}+\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$
$\dfrac{\pi}{2}-\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cot\alpha$	$\tan\alpha$
$\pi+\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
$\pi-\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$
$\dfrac{3\pi}{2}+\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$
$\dfrac{3\pi}{2}-\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\cot\alpha$	$\tan\alpha$
$2\pi+\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
$2\pi-\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$

比如要计算 $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)$ 的值，在表中找到标记 $\dfrac{\pi}{2}+\alpha$ 的第二行与标记 tan 的第三列，它们相交之处，标记着 $-\cot\alpha$, 于是，相应的诱导公式可以写成 $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\cot\alpha$.

表中最后一列，给出对于锐角 α（带斜条的全等直角三角形的顶点在圆心的锐角）的三角函数诱导公式的几何解释.

我们称正弦与余弦，正切与余切互为余函数.

从表中，可知 $-\alpha$、$\dfrac{\pi}{2}\pm\alpha$、$\pi\pm\alpha$、$\dfrac{3\pi}{2}\pm\alpha$ 和 $2\pi\pm\alpha$ 都可以化成 $k\dfrac{\pi}{2}\pm\alpha$ $(k=0,1,2,3,4)$ 的形式，并且这些角的三角函数和角 α 的三角函数之间的关系，可以总结出下面的法则.

1. 符号

   要确定结果的符号，只要假定 α 为锐角（实际上，在所有公式中的 α 都是任意角），看角 $k\cdot\dfrac{\pi}{2}\pm\alpha$ 在哪一象限，然后用原来函数在这个象限内应取的符号，作为结果的符号.

2. 函数名称

   (a) 若 k 为偶数（包括 $k=0$ 在内）则等式两边函数名称相同.

   (b) 若 k 为奇数，则等式两边函数名称不同，可由原来函数名称中的“正”变“余”，或“余”变“正”（就是正弦变余弦，正切变余切；或余弦变正弦，余切变正切等等）而得到.

为了便于记忆，上述法则还可以概括成下面的口诀：

正负看象限，奇变偶不变.

利用上面的法则，便可以迅速地写出三角函数的诱导公式，下面举例来说明.

例 6.20 写出 $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)$ 的诱导公式.

解：

1. 假定 α 是锐角，则 $\dfrac{3\pi}{2}+\alpha$ 是第四象限的角，而第四象限的角的余弦是正的，所以结果应取正号.

2. 因为 $\dfrac{3\pi}{2}=3\cdot\dfrac{\pi}{2}$，3 是奇数，所以，结果中函数名称应由余弦变为正弦，因此，有

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\left(3\cdot\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$$

例 6.21 写出 $\tan(\pi-\alpha)$ 的诱导公式.

解：

1. 假定 α 是锐角，则 $\pi-\alpha$ 是第二象限的角，而第二象限的角的正切是负的，所以结果应取负号.

2. 因为 $\pi=2\cdot\dfrac{\pi}{2}$，2 是偶数，所以，结果中函数名称与原来的相同，仍为正切，因此，有
$$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$$

利用三角函数的诱导公式，我们可以把求任意角的三角函数值的问题化为求锐角三角函数值的问题. 下面分三种情形举例说明.

第一种情形：0 到 2π (或 0° 到 360°) 之间的角的三角函数. 先选用适当的诱导公式化为锐角函数，然后求值.

例 6.22
$$\sin 150^\circ=\sin(180^\circ-30^\circ)=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$$
或
$$\sin 150^\circ=\sin(90^\circ+60^\circ)=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$$

例 6.23
$$\cos\frac{2\pi}{3}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$$
或
$$\cos\frac{2\pi}{3}=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$$

例 6.24 $\tan\dfrac{4\pi}{3}=\tan\left(\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)=\tan\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

例 6.25 $\cot 313^\circ 25'=\cot(360^\circ-46^\circ 35')=-\cot 46^\circ 35'=-0.9463$

第二种情形：大于 2π (或大于 360°) 的角的三角函数，可利用公式 (6.4)，化为上述第一种情形，然后求值.

例 6.26 $\sin 510^\circ=\sin(360^\circ+150^\circ)=\sin 150^\circ=\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}$

例 6.27 $\cos\dfrac{8\pi}{3}=\cos\left(2\pi+\dfrac{2\pi}{3}\right)=\cos\dfrac{2\pi}{3}=\cos\left(\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\cos\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}$

例 6.28
$$\begin{aligned}\tan 500^\circ=\tan(360^\circ+140^\circ)&=\tan 140^\circ\\&=\tan(180^\circ-40^\circ)\\&=-\tan 40^\circ=-0.8391\end{aligned}$$

第三种情形：负角的三角函数，可先化为正角的三角函数，然后再分别按上述两种情形求值.

例 6.29

$$\begin{aligned}\sin(-680^\circ) &= -\sin 680^\circ = -\sin(360^\circ + 320^\circ)\\ &= -\sin 320^\circ = -\sin(360^\circ - 40^\circ)\\ &= -(-\sin 40^\circ) = \sin 40^\circ = 0.6428\end{aligned}$$

或

$$\sin(-680^\circ) = \sin(-680^\circ + 2\times 360^\circ) = \sin 40^\circ = 0.6428$$

例 6.30

$$\begin{aligned}\cos\left(-\frac{22\pi}{5}\right) = \cos\frac{22\pi}{5} &= \cos\left(4\pi + \frac{2\pi}{5}\right)\\ &= \cos\frac{2\pi}{5} = \cos 72^\circ = 0.3090\end{aligned}$$

例 6.31 化 $\tan(\alpha - 270^\circ)$ 为角 α 的三角函数.

解:

$$\tan(\alpha - 270^\circ) = \tan[-(270^\circ - \alpha)] = -\tan(270^\circ - \alpha) = -\cot\alpha$$

或

$$\tan(\alpha - 270^\circ) = \tan[(\alpha - 270^\circ) + 360^\circ] = \tan(90^\circ + \alpha) = -\cot\alpha$$

习题 6.1

1. 用余角的三角函数来替换下面的三角函数.

   (a) $\sin 75^\circ 30'$

   (b) $\sin(30^\circ - \alpha)$

   (c) $\cos(2\alpha + 14^\circ)$

   (d) $\cos\left(\frac{\alpha}{2} + 55^\circ\right)$

   (e) $\tan\left(66^\circ - \frac{\alpha}{3}\right)$

   (f) $\cot(45^\circ + \alpha)$

2. 查表求下列三角函数值:

(a) $\sin 105°45'$
(b) $\cos 165°24'$
(c) $\tan 200°$
(d) $\cot 290°$

3. 查表求下列三角函数值:

(a) $\sin \dfrac{5\pi}{8}$
(b) $\cos \dfrac{9\pi}{8}$
(c) $\tan 1.4\pi$
(d) $\cot 1.8\pi$
(e) $-\tan 0.3\pi$

4. 查表求下列三角函数值:

(a) $\sin(-1640°)$
(b) $\cos(-900°)$
(c) $\tan(-700°)$
(d) $\cot\left(-13\dfrac{3}{4}\pi\right)$

5. 查表求下列三角函数值:

(a) $\sin 2$
(b) $\cos 1$
(c) $\tan(-3)$
(d) $\cot(\sin 2)$

6. 查表求下列三角函数值:

(a) $\sin 1160°$
(b) $\tan(-1596°)$
(c) $\cot 864°$
(d) $\cos(-320°)$
(e) $\tan 1190°$
(f) $\cos(-847°32')$
(g) $-\sin 570°$
(h) $-\cot 390°$

7. 已知 $\sin(180° + \alpha) = -\dfrac{1}{2}$，计算:

(a) $\sin(270° + \alpha)$
(b) $\cos(90° + \alpha)$
(c) $\tan(\alpha - 270°)$
(d) $\tan(\alpha - 180°)$

8. 计算下列各式的值:

(a) $2\sin^2 \dfrac{17\pi}{4} + \tan^2 \dfrac{33\pi}{4} \cot \dfrac{3\pi}{4}$

(b) $\tan 10° \cdot \tan 20° \cdot \tan 30° \cdot \tan 40° \cdot \tan 50° \cdot \tan 60° \cdot \tan 70° \cdot \tan 80°$

(c) $\sin 110° + \sin 130° + \sin 150° + \sin 170° + \sin 190° + \sin 210° + \sin 230° + \sin 250° + \sin 270°$

9. 确定下列各式的符号：

(a) $\sin 100° + \cos 100°$　　(b) $\dfrac{1}{\cos 230°} - \dfrac{1}{\cos 220°}$

10. 查表求角，若

(a) $\sin\alpha = -0.515, \quad 180° < \alpha < 270°$

(b) $\sin\alpha = 0.669, \quad 90° < \alpha < 180°$

(c) $\tan\alpha = -1.376, \quad 90° < \alpha < 180°$

(d) $\cos\alpha = 0.407, \quad 270° < \alpha < 360°$

(e) $\tan\alpha = 0.577, \quad 180° < \alpha < 270°$

(f) $\cot\alpha = -2.747, \quad 90° < \alpha < 180°$

六、正切函数线与余切函数线

定义

过单位圆与坐标系的横轴 Ox 的交点 $A(1,0)$ 的切线叫做正切函数线，简称正切线；而过单位圆与坐标系纵轴 Oy 的交点 $B(0,1)$ 的切线叫做余切函数线，简称余切线（图 6.18）.

正切线与 Oy 轴平行，在正切线上，规定它的正方向与 Oy 轴的正方向一致，它上面的单位长等于单位圆的半径.

令 P 是角 α 的终边与单位圆的交点，延长旋转半径 OP 或反向延长旋转半径 OP 与正切线交于 L 点（当 P 点位于 Oy 轴上时，过 O、P 两点的直线就不与正切线相交），如图 6.19 所示.

定理

角 α 的正切等于它的终边所在直线与正切线的交点的纵坐标.

证明： 如果角 α 的终边 OP 在 Oy 轴的右侧，射线 OP 与正切线交于 L 点. 设 P 点坐标为 (x,y)，L 点坐标为 $(1,y_1)$，这时

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{AL}{1} = y_1$$

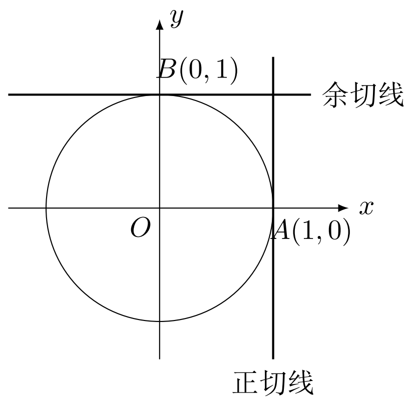


图 6.18

这里 AL 是有向线段 $\overrightarrow{AL}$ 的数量（图 6.19(a)).

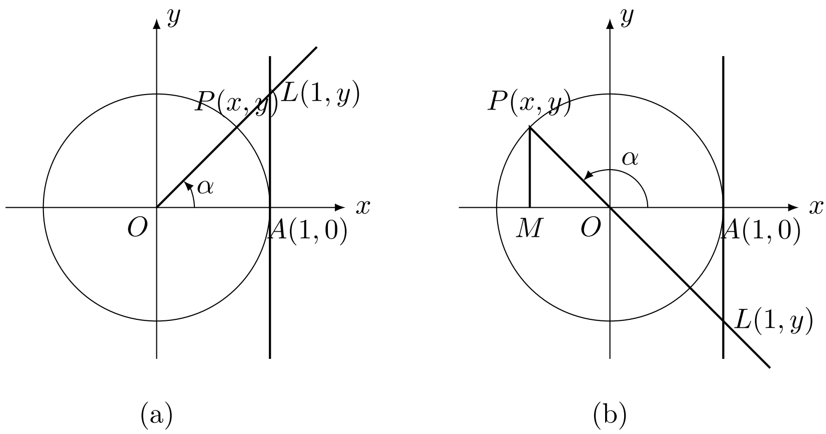


图 6.19

如果角 α 的终边 OP 在 Oy 轴的左侧，反向延长 OP 与正切线交于 L 点. 设 P 点、L 点的坐标分别是 (x,y)、(x_1,y_1)，这时 P 点和 L 点的同名称坐标的符号相反，但由于 $\triangle OPM\sim\triangle OLA$, 所以它们的坐标的比相同（图 6.19(b)），即

$$\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{MP}{OM}=\frac{AL}{OA}=\frac{y_1}{1}=y_1$$

如果 P 点在 Oy 轴上则 L 点不存在，$\tan\alpha$ 不存在.

余切线与 Ox 轴平行，在余切线上，规定它的正方向与 Ox 轴的正方向一致，它上面的单位长等于单位圆的半径.

我们可以用同样的方法证明下面的定理.

定理

角 α 的余切等于角 α 终边所在直线与余切线交点的横坐标（图 6.20）.

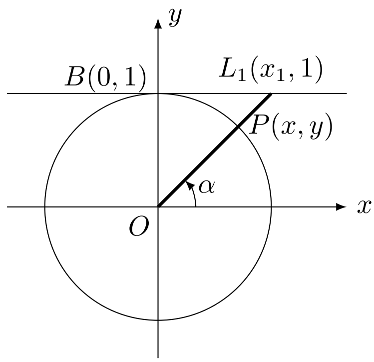


图 6.20

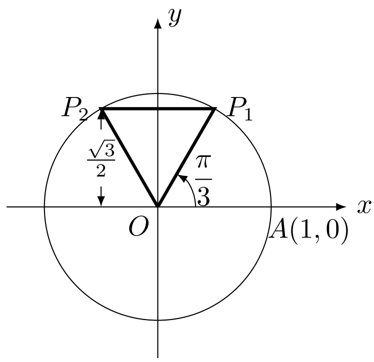


图 6.21

（证明留给读者去完成）

例 6.32 求适合下列各式的角 α 的值（用弧度表示）.

1. $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\sin 2\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
3. $\cos\dfrac{\alpha}{2} = -\dfrac{1}{2}$
4. $3\tan\alpha + \sqrt{3} = 0$

解：

1. 在单位圆上，纵坐标等于 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 的点，分别是在第一象限的点 P_1 和第二象限的点 P_2（如图 6.21）.

   $\because \quad \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，故通过 P_1 点的一切角

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

   通过 P_2 点的一切角

$$\alpha_2 = \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

   另解： $\because \quad \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} > 0$

$\therefore$　α 角终边在第一或第二象限. 但知 $\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，根据诱导公式得到

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)=\sin\left[\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+2k\pi\right]=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

所以 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 的解集是

$$\left\{\alpha\middle|\alpha=\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{\alpha\middle|\alpha=\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

2. 在单位圆上，纵坐标等于 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 的点，分别是在第三象限的点 P_1 和第四象限的点 P_2 (如图 6.22)

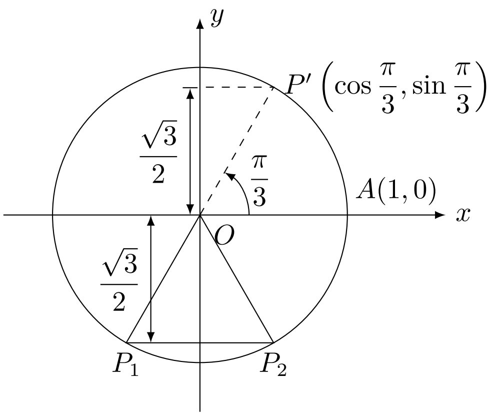


图 6.22

$\because$　$\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，故通过 P_1 点的一切 $2\alpha_1$ 角：

$$2\alpha_1=\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+2k\pi=\frac{4\pi}{3}+2k\pi$$

由此得 $\alpha_1=\dfrac{2\pi}{3}+k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.$

通过 P_2 点的一切 $2\alpha_2$ 角：

$$2\alpha_2=\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)+2k\pi=\frac{5\pi}{3}+2k\pi$$

由此得 $\alpha_2=\dfrac{5\pi}{6}+k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$

所以 $\sin2\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 的解集是

$$\left\{\alpha\middle|\alpha=\frac{2\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{\alpha\middle|\alpha=\frac{5\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

另解： $\because \quad \sin 2\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} < 0$

$\therefore$ 角 2α 终边在第三或第四象限.

$\because \quad \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，根据诱导公式

$$\sin\left[\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+2k\pi\right] = \sin\left[\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)+2k\pi\right] = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

得知

$$2\alpha = \frac{4\pi}{3}+2k\pi \qquad \text{或} \qquad 2\alpha = \frac{5\pi}{3}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$$

$\therefore \quad \alpha = \dfrac{2\pi}{3}+k\pi \qquad$ 或 $\qquad \alpha = \dfrac{5\pi}{6}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

3. 在单位圆上，横坐标等于 $=-\dfrac{1}{2}$ 的点分别是在第二象限的 P_1 点和第三象限的 P_2 点（如图 6.23）.

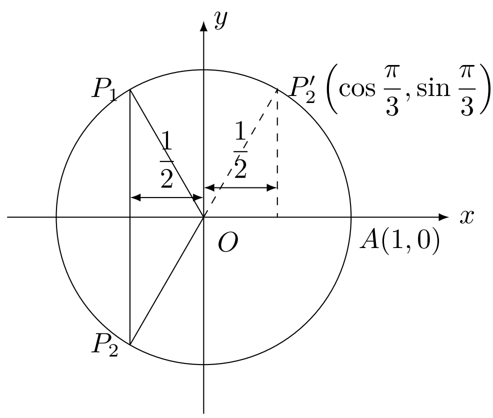


图 6.23

$\because \quad \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$，故通过 P_1 点的一切 $\dfrac{\alpha_1}{2}$ 角：

$$\frac{\alpha_1}{2} = \left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+2k\pi = \frac{2\pi}{3}+2k\pi$$

由此得：$\alpha_1 = \dfrac{4\pi}{3}+4k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$.

通过 P_2 点的一切 $\dfrac{\alpha_2}{2}$ 角：

$$\frac{\alpha_2}{2} = \left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+2k\pi = \frac{4\pi}{3}+2k\pi$$

由此得：$\alpha_1 = \dfrac{8\pi}{3}+4k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$.

所以解集是:

$$\left\{\alpha \middle| \alpha=\frac{4\pi}{3}+4k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{\alpha \middle| \alpha=\frac{8\pi}{3}+4k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

另解: $\because\quad \cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{1}{2}<0$,

$\therefore$　角 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边在第二象限或第三象限.

$\because\quad \cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$，根据诱导公式

$$\cos\left[\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+2k\pi\right]=\cos\left[\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+2k\pi\right]=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$$

得知: $\frac{\alpha}{2}=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$　或　$\frac{\alpha}{2}=\frac{4\pi}{3}+2k\pi$

$$\therefore\quad \alpha=\frac{4\pi}{3}+4k\pi\qquad\text{或}\qquad\alpha=\frac{8\pi}{3}+4k\pi\quad(k\in\mathbb{Z})$$

4. $3\tan\alpha+\sqrt{3}=0\quad\Rightarrow\quad\tan\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

在正切线上纵坐标等于 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 的点 L 对应着单位圆上第二象限的 P_1 点和第四象限的 P_2 点（如图 6.24).

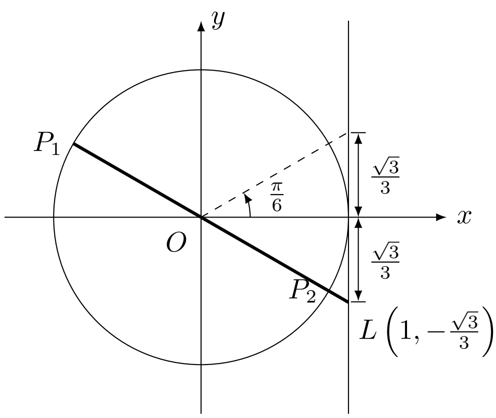


图 6.24

因为 $\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以通过 P_2 点和 P_1 点的一切角 $\alpha=-\frac{\pi}{6}+k\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$

所以解集是: $\left\{\alpha\middle|\alpha=\frac{\pi}{6}+k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\right\}$

另解： $\because \quad \tan\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} < 0$

$\therefore$　角 α 终边在第二象限或第四象限.

$\because \quad \tan\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$，根据诱导公式

$$\tan\left[\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi\right] = \tan\left[\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi\right] = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

得知：

$$\alpha = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \qquad \text{或} \qquad \alpha = \frac{5\pi}{6} + (2k+1)\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

练习

查表求适合下面等式的所有角，并图示所求角的终边.

1. $\sin\alpha = -\dfrac{1}{3}$
2. $\cos\alpha = \dfrac{2}{5}$
3. $\tan\alpha = -\dfrac{2}{3}$
4. $\cot\alpha = -2$

第四节　三角函数的基本关系

一、相同角的三角函数的关系

根据任意角三角函数的定义，我们得到

倒数关系

1. $\sin\alpha \cdot \csc\alpha = 1, \quad \alpha \neq k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$
2. $\cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1, \quad \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$
3. $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1, \quad \alpha \neq k \cdot \dfrac{\pi}{2} \qquad (k \in \mathbb{Z})$

证明： 根据任意角三角函数定义得

$$\sin\alpha \cdot \csc\alpha = \frac{y}{r} \cdot \frac{r}{y} = 1, \quad \alpha \neq k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$
$$\cos\alpha \cdot \sec\alpha = \frac{x}{r} \cdot \frac{r}{x} = 1, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$
$$\tan\alpha \cdot \cot\alpha = \frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y} = 1, \quad \alpha \neq k \cdot \frac{\pi}{2} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

商数关系

1. $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \alpha = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$
2. $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \alpha \neq k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$

证明：

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{x}{y} = \tan\alpha, \quad \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}} = \frac{y}{x} = \cot\alpha, \quad \alpha \neq k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

平方关系

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
2. $1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha, \quad \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$
3. $1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha, \quad \alpha \neq k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$

证明：根据任意角三角函数定义，得

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{r^2}$$

因为 $y^2 + x^2 = r^2$，所以 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$

把 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ 的两边同除以 $\cos\alpha$，$\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$，便得到

$$\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$$

或

$$1 + \tan^2\alpha = sec^2\alpha$$

把 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ 的两边同除以 $\sin^2\alpha$,$\alpha \neq k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$，便得到

$$1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$$

上面八个公式，除去使公式中的函数不存在的那些 a 的值以外，对于 α 其它的值都成立，因此，把它们叫做三角函数的基本恒等式.

利用这些恒等式，可以进行同角的三角函数式的恒等变换，使较繁的式子化为简单的形式；或利用它们，根据给出的一个角的某一个三角函数值，推导出该角的其余三角函数值.

例 6.33 化简 $\sin^3\alpha(1+\cot\alpha)+\cos^3\alpha(1+\tan\alpha)$

解:

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \sin^3\alpha\left(1+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)+\cos^3\alpha\left(1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)\\
&= \sin^3\alpha\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}+\cos^3\alpha\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}\\
&= \sin^2\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)+\cos^2\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)\\
&= (\sin\alpha+\cos\alpha)\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)\\
&= \sin\alpha+\cos\alpha
\end{aligned}$$

例 6.34 当 $\alpha=24^\circ30'$ 时, 计算 $\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha-\cos\alpha}{1+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha-\sin\alpha}$ 的值.

解: 如果直接把 α 的值代入，查表计算将很烦琐，因此最好先把式子进行化简.

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{\cos\alpha(2\sin\alpha-1)}{1+\sin^2\alpha-(1-\sin^2\alpha)-\sin\alpha}\\
&= \frac{\cos\alpha(2\sin\alpha-1)}{2\sin^2\alpha-\sin\alpha}\\
&= \frac{\cos\alpha(2\sin\alpha-1)}{\sin\alpha(2\sin\alpha-1)}\\
&= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\cot\alpha
\end{aligned}$$

最后把 α 值代入，查表可得:

$$\cot 24^\circ30'=2.194$$

例 6.35 化简 $\sqrt{1-\sin^2\alpha}\cdot\tan\alpha$

解：

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \sqrt{\cos^2\alpha}\cdot\tan\alpha \\
&= |\cos\alpha|\cdot\tan\alpha \\
&= \begin{cases} \cos\alpha\cdot\tan\alpha = \sin\alpha, & -\dfrac{\pi}{2}+2k\pi<\alpha<\dfrac{\pi}{2}+2k\pi \\ -\cos\alpha\cdot\tan\alpha = -\sin\alpha, & \dfrac{\pi}{2}+2k\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi \end{cases}
\end{aligned}
$$

练习

证明恒等式：

1. (a) $(\tan^2\alpha-\sin^2\alpha)\cot^2\alpha=\sin^2\alpha$

   (b) $\dfrac{1}{1-\cos\alpha}\cdot\dfrac{1}{\csc\alpha+1}+\dfrac{1}{1+\cos\alpha}\cdot\dfrac{1}{\csc\alpha-1}=\sec^2\alpha$

2. (a) $\dfrac{\tan\alpha-\sin\alpha}{\tan\alpha}=1-\cos\alpha$

   (b) $\dfrac{\tan\alpha+\cot\alpha-2}{\tan\alpha+\cot\alpha+2}=\left(\dfrac{\tan\alpha-1}{\tan\alpha+1}\right)$

3. (a) $\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{\cot\alpha+\cot\beta}=\tan\alpha\tan\beta$

   (b) $\dfrac{\cos\alpha+\cot\alpha}{\cot\alpha}-1=\tan\alpha\cot\cos\alpha$

4. (a) $\dfrac{1+\tan^4\alpha}{\tan^2\alpha+\cot^2\alpha}=\tan^2\alpha$

   (b) $\dfrac{1}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\dfrac{1+\cot^2\alpha}{1-\cot^2\alpha}$

5. (a) $\dfrac{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2-1}{\cot\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}=2\tan^2\alpha$

   (b) $\sqrt{2\tan\alpha+\sec^2\alpha}=1+\tan\alpha$，（$\alpha$ 是正锐角）

化简下列各式：

1. (a) $\sqrt{1-\cos^2\alpha}\cdot\cot\alpha$

   (b) $\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

   (c) $\sqrt{\sin^2\alpha(1+\cot\alpha)+\cos^2\alpha(1+\tan\alpha)}$

2. 已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}$，求：

$$\sin\alpha\cos\alpha,\qquad \sin^3\alpha+\cos^3\alpha,\qquad \sin^4\alpha+\cos^4\alpha$$

3. 把 $\sin^4\alpha-\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$ 化为只含 $\cos\alpha$ 的式子.

二、根据一个三角函数计算其余各三角函数

根据前面中所推导出的三角函数间的基本公式，可以从一个已知的三角函数值，计算其余的三角函数值.

例 6.36 已知 $\cos\alpha=\dfrac{12}{13}$，求 α 角的其余的三角函数.

解： 因为 $cos\alpha=\dfrac{12}{13}>$，所以 α 角的终边在第一象限或在第四象限.

从公式 $\sec\alpha=\dfrac{1}{\cos\alpha}$，有 $\sec\alpha=\dfrac{1}{\frac{12}{13}}=\dfrac{13}{12}$.

其次，从公式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 得

$$\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=\pm\frac{5}{13}$$

因为 $\csc\alpha=\dfrac{1}{\sin\alpha}$，所以

$$\csc\alpha=\frac{1}{\pm\frac{5}{13}}=\pm\frac{13}{5}$$

从公式 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ 求得

$$\tan\alpha=\frac{\pm\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}}=\pm\frac{5}{12}$$

最后

$$\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}=\pm\frac{12}{5}$$

例 6.37 已知 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，求 α 角的其余各三角函数值.

解： 因为 $\sin\alpha = \frac{3}{5} > 0$，所以 α 角是第一象限角或第二象限角.

$$\begin{aligned}
\csc\alpha &= \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{5}{3} \\
\cos\alpha &= \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \pm\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \pm\frac{4}{5} \\
\sec\alpha &= \frac{1}{\cos\alpha} = \pm\frac{5}{4} \\
\tan\alpha &= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\pm\frac{4}{5}} = \pm\frac{3}{4} \\
\cot\alpha &= \frac{1}{\tan\alpha} = \pm\frac{4}{3}
\end{aligned}$$

例 6.38 已知 $\tan\phi = \frac{7}{8}$, $\pi < \phi < \frac{3\pi}{2}$，求 ϕ 角的其余三角函数值，准确到 0.01.

解： $\cot\phi = \frac{1}{\tan\phi} = \frac{8}{7} \approx 1.14$

$\because$ ϕ 是第三象限角，$\therefore$ $\sec\phi < 0$

因此：

$$\begin{aligned}
\sec\phi &= -\sqrt{1+\left(\frac{7}{8}\right)^2} \approx -1.33 \\
\cos\phi &= -\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{7}{8}\right)^2}} \approx -\frac{1}{1.33} \approx -0.75 \\
\sin\phi &= \tan\phi\cdot\cos\phi \approx \frac{7}{8}(-0.753) \approx -0.66 \\
\csc\phi &= -\frac{1}{0.658} \approx -1.52
\end{aligned}$$

例 6.39 已知 $\cot\alpha = m$，$-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$，求 α 角的其余各三角函数值.

解： 因为 $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<0$，所以 $\cot\alpha=m\neq 0$，$\csc\alpha<0$，于是

$$\begin{aligned}
\tan\alpha &= \frac{1}{m}\\
\csc\alpha &= -\sqrt{1+\cot^2\alpha}=-\sqrt{1+m^2}\\
\sin\alpha &= -\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\\
\cos\alpha &= \cot\alpha\cdot\sin\alpha=m\left(-\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\right)=-\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}\\
\sec\alpha &= \frac{1}{\cos\alpha}=-\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}
\end{aligned}$$

例 6.40 已知 $\tan\alpha=-3$，求：

1. $\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$ 的值；
2. $\dfrac{1}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$ 的值.

解：

1. 因为 $\tan\alpha=-3$，所以 $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$，即 $\cos\alpha\neq 0$. 分子、分母分别除以 $\cos\alpha\neq 0$，则
$$\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\frac{\tan\alpha-1}{1+\tan\alpha}=\frac{-3-1}{1+(-3)}=2$$
2. $\dfrac{1}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$
分子、分母分别除以 $\cos^2\alpha\neq 0$，则
$$\frac{1}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{\tan^2\alpha+1}{\tan^2\alpha-1}=\frac{(-3)^2+1}{(-3)^2-1}=\frac{5}{4}$$

注意：

1. 在包含有函数 $\tan\alpha$ 或 $\sec\alpha$ 的一切公式里，要除去 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ 的诸值，其中 $k\in\mathbb{Z}$；在包含有 $\cot\alpha$ 或 $\csc\alpha$ 的一切公式里，要除去 $\alpha=k\pi$，其中 $k\in\mathbb{Z}$.
2. 在包含有根号的那些公式里，一般的情形在根号之前应置双号“±”，若已给出 α 角终边所在象限，则可选择确定的符号，根号前面符号的选择，依赖于 α 角终边所在的象限所求三角函数的符号.
3. 含有 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的有理式，当分子和分母都是关于 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的同次的齐次多项式时，可以化为只含有 $\tan\alpha$ 的有理式.

习题 6.2

1. 已知 $\sin\alpha = -\dfrac{24}{25}$，计算 $\cos\alpha, \tan\alpha, \cot\alpha$.

2. 已知 $\cos\alpha = -\dfrac{9}{41}$，$90^\circ < \alpha < 180^\circ$，计算 $\sin\alpha, \tan\alpha, \cot\alpha, \sec\alpha, \csc\alpha$.

3. 已知 $\cot\alpha = 3\dfrac{41}{60}, \pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$，计算 $\cos\alpha$.

4. 已知 $\tan = 1.4, \pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$, 计算 α 角的其它三角函数值 (准确到 0.01).

5. 已知 $\cot\alpha = -\dfrac{52}{173}$ 和 $0^\circ < \alpha < 180^\circ$，计算 $\tan\alpha - \sec\alpha$ 的值.

6. 已知 $\tan\alpha = -1.5$，$100^\circ < \alpha < 200^\circ$，计算 $\cos\alpha$.

7. 已知 $\sin\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，计算 $\tan\alpha - \cot\alpha$ 的值.

8. 已知 $\cot\alpha = 3, \pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$，求积 $\sin\alpha\cos\alpha$.

9. (a) 设 $\tan\alpha = 2$，计算 $\dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$;

   (b) 设 $\cot\alpha = -2$，计算 $\dfrac{1}{\sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha}$.

10. (a) 若 $0 < \alpha < \pi$，化简 $\sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} - \sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$;

    (b) 若 $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$，化简 $\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} + \sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$.

复习题六

1. $\cos 1^\circ$ 和 $\cos 1$ 哪个大？又 $\tan 1^\circ$ 和 $\tan 1$ 哪个大？

2. 圆的半径等于 240mm, 求这个圆上长 500mm 的弧所对圆心角的度数.

3. 直径是 20cm 的滑轮，每秒旋转 45 弧度，求轮周上一点在 5 秒钟内所转过的弧长.

4. 已知一扇形的弧含有 45°, 半径等于 20cm, 求扇形的周长和面积 (精确到 1cm).

5. 在 0° 到 360° 的范围内，找出与下列各角终边相同的角，并判定它们是哪个象限的角：

$$-54^\circ 18', \qquad 395^\circ 8', \qquad -1190^\circ 30', \qquad 1563^\circ$$

6. 试说明 $k \cdot 360^\circ + 130^\circ$ 与 $k \cdot 360^\circ - 230^\circ$, $(k \in \mathbb{Z})$ 为同边角.

7. 若一四边形内角的比为 $5:9:10:12$, 求各角的度数及弧度数.

8. 已知角 α 的终边上一点 $P(-2,2)$, 求角 α 的各三角函数值，如果已知终边上一点 $Q(-1,1)$ 时，α 的各三角函数值有变化吗？

9. 设 A 为三角形的一个内角，下列函数中哪些可以是负值，哪些只能是正值.

$$\sin A, \qquad \cos A, \qquad \tan A, \qquad \cot\frac{A}{2}$$

10. 确定下列各函数的符号：

(a) $\sin 1000^\circ$

(b) $\cos(-2200^\circ)$

(c) $\tan\left(-\dfrac{3}{11}\pi\right)$

(d) $\cot 10$

11. 求下列各函数的定义域：

(a) $y = \sqrt{-\dfrac{\sin x}{\cos x}}$

(b) $y = \sqrt{-\sin x} + \sqrt{\cos x}$

(c) $y = \sqrt{\tan x \cdot \cos x}$

12. 求下列各式的值：

(a) $\csc 180^\circ + \sin 60^\circ + \tan 45^\circ - \cos 230^\circ + \sin 30^\circ + \cot 90^\circ$

(b) $4\sin\pi - 2\cos\dfrac{3\pi}{2} + 3\sin 2\pi - \tan\pi$

13. 下面函数哪些是偶函数，哪些是奇函数，哪些都不是？

(a) $y = \tan 2x$

(b) $y = |\tan x|$

(c) $y = \sin(\tan x)$

(d) $y = \cos(\tan x)$

(e) $y = x\tan x$

(f) $f(x) = \dfrac{\tan x + 1}{\tan x - 1}$

(g) $g(x) = \tan x \cdot \sin x$

(h) $h(\alpha) = \sin\alpha \cdot \cot\alpha$

(i) $F(y) = \tan y \cdot \cot^2 y$

14. 求下列各式的值:

(a) $5\sin 90^\circ + 2\cos 0^\circ - 2\sin 270^\circ + 10\cos 180^\circ$

(b) $\cos\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{4}\cos\pi - \frac{1}{8}\tan^2\frac{\pi}{3}\sin\frac{3\pi}{2} + \cos 0$

(c) $8\sin 510^\circ \cdot \cos(-300^\circ) \cdot \tan 240^\circ$

(d) $10\cot 315^\circ \cdot \sin(-150^\circ) \cdot \cos 225^\circ$,

(e) $\dfrac{\cos(-120^\circ)}{\cos 30^\circ} + \dfrac{\tan 210^\circ \sin 315^\circ}{\cos 180^\circ}$

(f) $\sin(450^\circ - \alpha) - \sin(180^\circ - \alpha) + \cos(450^\circ - \alpha) + \cos(\alpha - 180^\circ)$

(g) $[\tan^2(\pi + \alpha) - \cot^2(\pi - \alpha)]\sin(2\pi - \alpha) \cdot \cos(\alpha - 2\pi)$

(h) $\sqrt{\sin^2 30^\circ + \sin^2 35^\circ - 2\sin 30^\circ + \cos^2 35^\circ}$

15. 证明对于任何角 α，下面各等式都成立:

(a) $$\frac{\sin(2\pi - \alpha)\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\cot\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos(2\pi + \alpha)\tan(\pi + \alpha)} = 1$$

(b) $$\frac{\sin^2(\pi + \alpha)}{\sin^2\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)} + \frac{\tan^2\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}{\cot^2(\pi + \alpha)} = \frac{1}{\cos^2(\alpha - 2\pi)}$$

16. 已知三角函数值求角:

(a) $\sin x = \frac{1}{2}, \qquad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$

(b) $\cos x = -\frac{1}{2}, \qquad \left(\frac{\pi}{2} < x < \pi\right)$

(c) $\tan x = -1, \qquad \left(\frac{\pi}{2} < x < \pi\right)$

(d) $\cot x + \sqrt{3} = 0, \qquad \left(\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right)$

(e) $2\sin x - \sqrt{2} = 0, \qquad (0 < x < 2\pi)$

(f) $3\tan x + \sqrt{3} = 0, \qquad (0 < x < 2\pi)$

(g) $2\cos x - \sqrt{3} = 0, \qquad (0 < x < 2\pi)$

(h) $\sqrt{3}\cot x - 1 = 0, \qquad (0 < x < 2\pi)$

17. 证明下列各恒等式:

(a) $\sin^4\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1$

(b) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

(c) $(\csc\alpha-\sin\alpha)(\sec\alpha-\cos\alpha)(\tan\alpha+\cot\alpha)=1$

(d) $(1-\cot\alpha+\csc\alpha)(1-\tan\alpha+\sec\alpha)=2$

(e) $\dfrac{\cos\alpha\csc\alpha-\sin\alpha\sec\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\csc\alpha-\sec\alpha$

(f) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta=1$

(g) $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\tan\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)\tan(2\pi-\alpha)}=-\cos\alpha$

(h) $\dfrac{\sin^2(\pi+\alpha)}{\sin^2\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}+\dfrac{\tan^2\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\cot^2(\pi+\alpha)}=\sec^2(\alpha-2\pi)$

(i) $(a\sin\alpha+b\cos\alpha)^2+(a\cos\alpha-b\sin\alpha)^2=a^2+b^2$

(j) $\tan\alpha\left(1-\cot^2\alpha\right)+\cot\alpha\left(1-\tan^2\alpha\right)=0$

(k) $\dfrac{(1-\sin\alpha-\cos\alpha)(1-\sin\alpha+\cos\alpha)}{\sin^2\alpha-\sin\alpha}=2$

(l) $\dfrac{1-2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{1+2\sin\alpha\cos\alpha}$

18. (a) 已知 $\sin\theta=\dfrac{15}{17}, 90^\circ<\theta<180^\circ$, 求 $\cos\theta, \tan\theta$ 和 $\cot\theta$.

(b) 已知 $\cot\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, θ 在第四象限, 求 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$.

19. x 取 0° 到 720° 之间的哪些值时，下面等式成立：

$$\sqrt{1-\sin^2\frac{x}{2}}=\cos\frac{x}{2}$$

20. 已知 $\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{60}{169}$，并且 $\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，求 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的值.

21. 已知 $\sin(180^\circ+\alpha)=-\dfrac{1}{3}$，且 $0^\circ<\alpha<90^\circ$，计算 $\cot(\alpha-180^\circ)$ 的值.

22. 已知 $\tan x=-2$，求 $\cot(3\pi-x)$, $\cos(x-4\pi)$ 的值.

23. 已知 $\tan A=\dfrac{2mn}{m^2-n^2}$ $(0^\circ<A<180^\circ)$，求 $\sin A$.

第七章　三角函数的图象和性质

我们知道，函数图象能把函数性质形象地表现出来，为了便于研究三角函数的性质，我们现在来做出各三角函数的图象.

第一节　正弦函数的图象和性质

一、正弦函数的图象

我们知道正弦函数的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 且它是个奇函数，故它的图象可在 x 轴的正、负方向无限延伸，且图象关于原点对称.

我们先用描点法作出它的图象，列出 x 由 0 到 2π 每隔 $\dfrac{\pi}{6}$ 取值的正弦值表如下：

x	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{2\pi}{3}$	$\dfrac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	0
x		$\dfrac{7\pi}{6}$	$\dfrac{4\pi}{3}$	$\dfrac{3\pi}{2}$	$\dfrac{5\pi}{3}$	$\dfrac{11\pi}{6}$	2π
$\sin x$		$-\dfrac{1}{2}$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$-\dfrac{1}{2}$	0

把表内 x, y 的每一对值作为点的坐标，在直角坐标系内作出对应的点，将它们依次连结成平滑曲线，这条曲线就是 $[0, 2\pi]$ 上正弦函数 $y = \sin x$ 的图象 (图 7.1).

因为终边相同的角的三角函数值相等，所以正弦函数 $y = \sin x$ 在区间 $[2k\pi, 2(k+1)\pi]$ $(k = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots)$ 上的图象，与它在 $[0, 2\pi]$ 上的图象完全一样，因此，为了要作出整个定义域上的正弦函数的图象，我们只要把它在 $[0, 2\pi]$ 上的图象向左或向右平移 $2\pi, 4\pi, \ldots$ 就可以得到 $y = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ 的图象 (图 7.2).

正弦函数 $y = \sin x$ 的图象叫做正弦曲线.

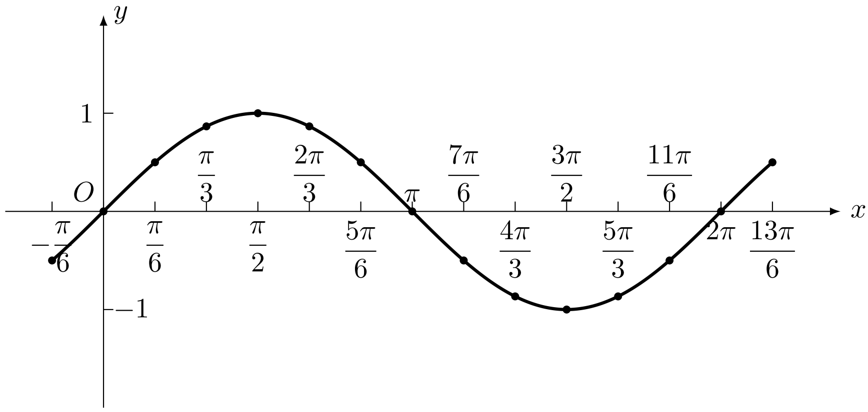


图 7.1

由上面描点法可以看出，要作出整个定义域上正弦函数的图象，关键要作出 $[0,2\pi]$ 上的正弦函数的图象，而要作出 $[0,2\pi]$ 上正弦函数图象，有五个关键点：$(0,0)$, $\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)$, $(\pi,0)$, $\left(\dfrac{3\pi}{2},-1\right)$, $(2\pi,0)$ 就可以把图象基本确定了.

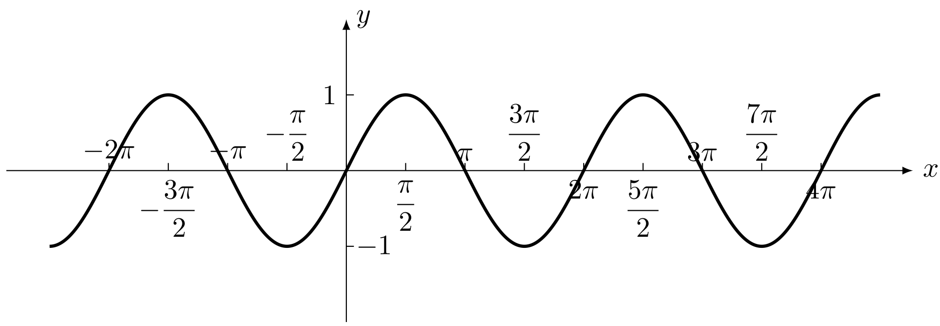


图 7.2

因此，在精确度要求不太高时，我们常用“五点法”作出关于正弦函数在 $[0,2\pi]$ 上的图象.

例 7.1　用五点法作出 $y=1+\sin x,\quad x\in[0,2\pi]$ 的图象.

解： 列表

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$1+\sin x$	1	2	1	0	1

描点作图：（如图 7.3）

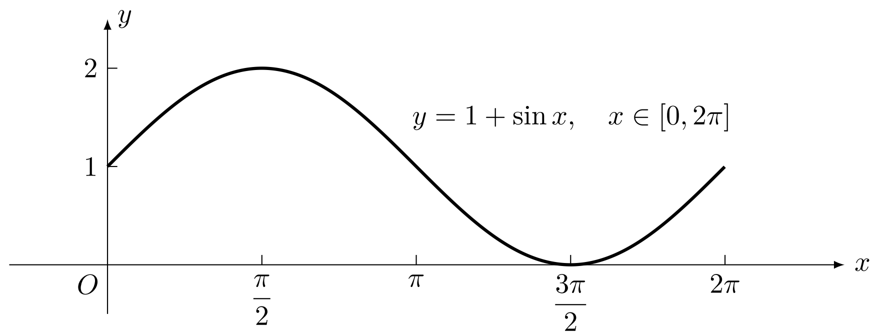


图 7.3

我们也可以用几何法作出 $[0,2\pi]$ 上正弦函数的图象. 如图 7.4 所示，在 $O-x$ 轴的负半轴上任意取一点，以这点为圆心，单位长为半径作圆，从这个圆的右半圆和 $O-x$ 轴的交点 P_0 量起，把这个圆分成 12 等份，并在 $O-x$ 轴上，从原点起向右取长等于 2π(即单位圆的周长）的一段，也分成 12 等份，过圆上的各个分点，分别向 Ox 轴作垂线，便得到各分点上的纵坐标，显然，这些点的纵坐标就是对应各角（数）的正弦值，因此过各分点作平行于 $O-x$ 轴的直线，它们分别与由 $O-x$ 轴上各个对应点处所作 Ox 轴的垂线相交，这些交点就是 $y=\sin x$ 图象上的点. 把这些点依次连结成平滑的曲线，就得到正弦函数 $y=\sin x$ 在 $[0,2\pi]$ 区间上的图象.

如果把曲线在 $[0,2\pi]$ 间的一段，沿着 Ox 轴向左、右连续移动，每次移动 2π 个单位，就可以得到如图 7.2 所示的连续不断的正弦曲线.

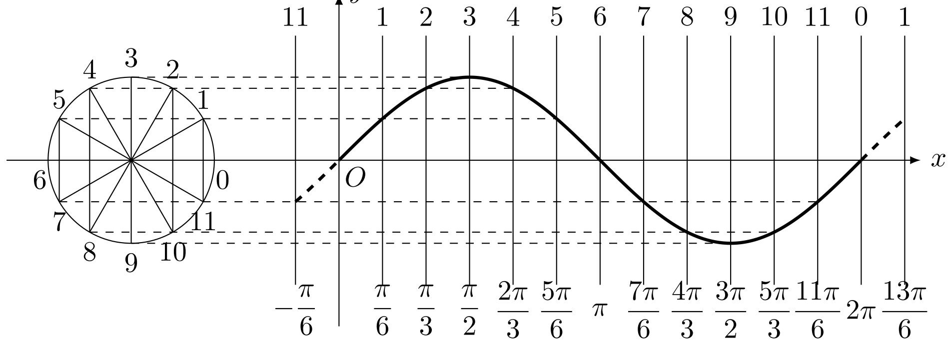


图 7.4

练习

1. 作 $y = |\sin x|, \quad x \in \mathbb{R}$ 的图象.

2. 用“五点法”作出下列各函数的图象 $(0 \le x \le 2\pi)$, 并且和 $y = \sin x$ 的图象比较，说明这些图象和 $y = \sin x$ 的图象的区别.

   (a) $y = \sin x - 1$

   (b) $y = 1 - \sin x$

   (c) $y = 2\sin x$

二、正弦函数的主要性质

由上一章的讨论和正弦函数图象，我们可以得到正弦函数 $y = \sin x$ 的主要性质如下：

1. 定义域　正弦函数的定义域是一切实数，也就是说，当自变量 x 取任何实数值时，正弦函数 y 都有唯一确定的值与之对应，从图象上看曲线随着 x 轴连续不断地无限延伸.

2. 值域　由图 7.2 看出，曲线上点的纵坐标最小是 - 1, 最大是 1, 正弦函数值是在 -1 与 $+1$ 之间，这说明正弦函数的值域是闭区间 $[-1, 1]$, 或 $|\sin x| \le 1$.

3. 奇偶性　正弦函数是奇函数，因此，正弦曲线关于原点对称.

4. 函数的符号　终边落在 x 轴的上半平面时，正弦函数为正；落在轴的下半平面时，正弦函数为负. 也就是说，在区间 $(0, \pi)$ 内，$\sin x > 0$. 一般地，当 $2k\pi < x < (2k+1)\pi$ 时 $(k \in \mathbb{Z})$, $\sin x > 0$. 在区间 $(\pi, 2\pi)$ 内，$\sin x < 0$. 一般地，当 $(2k+1)\pi < x < 2(k+1)\pi$ 时，$\sin x < 0$. 这反映在图象上，在区间 $(2k\pi, (2k+1)\pi)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 上，曲线在 x 轴的上方；在区间 $((2k+1)\pi, 2(k+1)\pi)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 上，曲线在 x 轴下方.

   当横坐标 $x = 0$, $x = \pi$ 和 $x = 2\pi$ 时，正弦函数值为零. 一般地，当 $x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ 时，$\sin x = 0$, 这时曲线与 x 轴相交.

5. 增减性　由正弦曲线容易看出，随着 x 增加正弦函数在区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 内是递增的；在区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ 内是递减的. 一般的情况是 $\sin x$ 在区间

$\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$ 内是递增的，在区间 $\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+(2k+1)\pi\right)$ 内是递减的，这里 $k \in \mathbb{Z}$.

由 $\sin x$ 的增减性看出，在 $x=\frac{\pi}{2}$ 一处，正弦函数由递增变为递减，因此在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处，$\sin x$ 取得极大值 1. 一般地，当 $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ 时，$\sin x=1$ 是极大值. 同时还看出，在 $x=\frac{3\pi}{2}$ 处，正弦函数由递减变为递增，因此在 $x=\frac{3\pi}{2}$ 处，$\sin x$ 取得极小值 -1，一般地，当 $x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ 时，$\sin x=-1$ 是极小值.

6. 周期性　当横坐标 x 每隔 2π 时，曲线重复出现，也就是说，正弦曲线上任何一点的横坐标加上或减去 2π 时，对应的纵坐标相等，即

$$\sin(x \pm 2\pi)=\sin x$$

一般地：

$$\sin(x+2k\pi)=\sin x \quad (k \in \mathbb{Z})$$

从上面的公式知道正弦函数是周期函数，它的周期有无穷多个，即 2π 的整数倍，但是我们所关心的是最小正周期.

下面我们来研究一般的周期函数的定义，并证明正弦函数的最小正周期是 2π.

定义

设有 x 的函数 $f(x)$, 若存在不等于 0 的一个常数 p, 使对于函数定义域中的任何实数 x, 等式

$$f(x)=f(x+p) \tag{7.1}$$

成立，则称 $f(x)$ 是周期函数，常数 p 叫做函数 $f(x)$ 的一个周期.

下面我们来说明，任何周期函数一定有正周期.

在等式 (7.1) 中，以 $x-p$ 替换 x, 就得到

$$f(x-p)=f(x)$$

因此有 $f(x)=f(x \pm p)$. 这也就是说，$\pm p$ 都是函数 $f(x)$ 的周期，故 $f(x)$ 必有正周期.

函数 $f(x)$ 的最小正周期应满足：

1. $p>0$;

2. 对于任意实数 x, 正数 p 须使 $f(x+p)=f(x)$ 成立;

3. p 为满足 1、2 的最小正数.

下面我们来证明 $\sin x$ 的最小正周期等于 2π.

在恒等式 $\sin(x+p)=\sin x$ 中，令 $x=0$, 得到 $\sin p=0$, 在单位圆上，弧的始点为 $(1,0)$, 而弧长分别等于 0 和 π 的这两个弧的端点 P_0, P_π 的纵坐标等于 0, 又和这两个点对应的最小正数分别是 2π 和 π. 在这两个数中，π 显然不能是周期，因为，$\sin\dfrac{\pi}{2}=1$，但 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi\right)=-1$ ，因此最小正周期只可能是 2π, 由于 $\sin(x+2\pi)=\sin x$, 对于任何数 x 都成立，所以 $\sin x$ 的最小正周期等于 2π.

例 7.2 求下列函数的最小正周期:

1. $y=\sin 2x$
2. $y=2\sin\left(4x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

解:

1. 因为 $\sin 2x=\sin(2x+2\pi)=\sin 2(x+\pi)$, $(x\in\mathbb{R})$, 即当自变量 x 改变成 $x+\pi$ 时，函数值不变，所以 $y=\sin 2x$ 的周期 $T=\pi$.

   为证明 π 是 $\sin 2x$ 的最小正周期，我们用反证法. 假设 $y=\sin 2x$ 还有一个比 π 小的正周期 T', 即 $0<T'<\pi$，根据周期 T' 的定义，我们有
   $$\sin 2(x+T')=\sin 2x$$
   即
   $$\sin(2x+2T')=\sin 2x$$
   令 $x=0$, 代入上式得 $\sin 2T'=0$, 依不等式 $0<T'<\pi$，从而 $0<2T'<2\pi$，得到 $2T'=\pi$ 即
   $$T'=\frac{\pi}{2}$$
   今验知，$\sin 2\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin(2x+\pi)=-\sin 2x$. 故 T' 不是 $y=\sin 2x$ 的周期，因此得到矛盾. 这就是说 $\sin 2x$ 的最小正周期是 π.

2. 由于:
   $$\begin{aligned}2\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)&=2\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}+2\pi\right)\\&=2\sin\left[4\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{6}\right]\quad(x\in\mathbb{R})\end{aligned}$$

即当自变量 x 改变成 $x+\dfrac{\pi}{2}$ 时，函数值不变，所以 $y=2\sin\left(4x-\dfrac{\pi}{8}\right)$ 的周期 $T=\dfrac{\pi}{2}$. 再证 $T=\dfrac{\pi}{2}$ 是 $y=2\sin\left(4x-\dfrac{\pi}{8}\right)$ 的最小正周期.

假设 $y=2\sin\left(4x-\dfrac{\pi}{8}\right)$ 还有一个比 $\dfrac{\pi}{2}$ 小的正周期 T'，即 $0<T'<\dfrac{\pi}{2}$，从而得到

$$0<4T'<2\pi \tag{7.2}$$

根据周期 T' 的定义，我们有

$$2\sin\left[4(x+T')-\frac{\pi}{6}\right]=2\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right) \tag{7.3}$$

即

$$2\sin\left[\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)+4T'\right]=2\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right) \tag{7.4}$$

令 $4x-\dfrac{\pi}{6}=0$, 即 $x=\dfrac{\pi}{24}$, 代入 (7.4), 得

$$2\sin 4T'=0$$

依不等式 (7.2)，$4T'$ 的值只能是 π，即 $T'=\dfrac{\pi}{4}$. 今验证知

$$2\sin\left[4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{6}\right]=2\sin\left(4x+\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-2\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)$$

故 $T'=\dfrac{\pi}{4}$ 不是 $2\sin\left(4x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的周期，因此得到矛盾. 这就证明了 $y=2\sin\left(4x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期是 $\dfrac{\pi}{2}$.

一般地，对于函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ （ω,φ 为常数，且 $\omega\neq 0$，$x\in\mathbb{R}$），由于

$$\begin{aligned}A\sin(\omega x+\varphi)&=A\sin(\omega x+\varphi+2\pi)\\&=A\sin\left[\omega\left(x+\frac{2\pi}{\omega}\right)+\varphi\right]\end{aligned}$$

故 $\dfrac{2\pi}{|\omega|}$ 是 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的一个正周期，它只与自变量的系数有关，而与 A,φ 无关. 用上面同样的方法可以证明 $\dfrac{2\pi}{|\omega|}$ 是 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的最小正周期（证明留给读者去完成）.

例 7.3 不求值决定下列各差的符号：

1. $\sin 20^\circ 12'-\sin 20^\circ 13'$

2. $\sin\left(-\dfrac{\pi}{18}\right)-\sin\left(-\dfrac{\pi}{10}\right)$

3. $\sin 1605^\circ-\sin 1657^\circ$

解:

1. 正弦函数在第一象限是增函数,

   $\therefore\quad \sin 20^\circ 12' < \sin 20^\circ 13'$ 即

$$\sin 20^\circ 12' - \sin 20^\circ 13' < 0$$

2. $\because\quad -\dfrac{\pi}{2} < -\dfrac{\pi}{10} < -\dfrac{\pi}{18} < \dfrac{\pi}{2}$

   正弦函数 $y=\sin x$ 在 $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ 上是增函数

   $\therefore\quad \sin\left(-\dfrac{\pi}{10}\right) < \sin\left(-\dfrac{\pi}{18}\right)$ 即

$$\sin\left(-\frac{\pi}{18}\right)-\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right) > 0$$

3. $\because\quad \sin 1605^\circ = \sin 165^\circ,\qquad \sin 1657^\circ = \sin 217^\circ$

   又 $\because\quad 90^\circ < 165^\circ < 217^\circ < 270^\circ$，正弦函数 $y=\sin x$ 在 $90^\circ < x < 270^\circ$ 上是减函数.

   $\therefore\quad \sin 165^\circ > \sin 217^\circ$，即

$$\sin 1605^\circ - \sin 1657^\circ > 0$$

例 7.4 求证定圆的外切菱形中以正方形的面积最小.

解: 如图 7.5, 设定圆 O 的半径为 r, 它的外切菱形中的 $\angle A=\theta$, 由于对边切点连线必过圆心，故外切菱形的高等于 $2r$, 外切菱形的边长为 $\dfrac{2r}{\sin\theta}$.

于是，菱形面积 $S=2r\cdot\dfrac{2r}{\sin\theta}$，当 $\sin\theta=1$ 时，菱形面积 S 最小，这时 $\theta=90^\circ\ \ (0^\circ<0<180^\circ)$.

因此，定圆的外切菱形中以正方形的面积最小.

例 7.5 求函数 $y=\left(\sin x-\dfrac{1}{2}\right)^2+2$ 的最大值和最小值，并求取最大值或最小值时的 x 值.

解: 把 y 看作 $\sin x$ 的二次函数，这样问题变成求闭区间 $-1\le\sin x\le 1$ 上的 y 的最大值和最小值. 也就是要把开区间 $(-1,1)$ 内的极值和两端点处的函数值作比较.

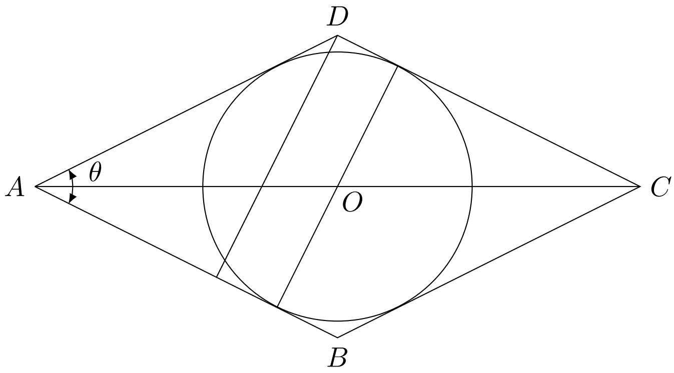


图 7.5

1. 当 $\sin x=-1$ 时，$y=\left(-1-\dfrac{1}{2}\right)^2+2=4\dfrac{1}{4}$

2. 当 $\sin x=1$ 时，$y=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^2+2=2\dfrac{1}{4}$

3. 当 $\sin x=\dfrac{1}{2}$ 时，极小值 $y=2$, 这是函数在 $(-1,1)$ 中的唯一极值点.

因此，

1. 当 $\sin x=-1$, 即 $x=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\quad(k\in\mathbb{Z})$ 时，最大值 $y=4\dfrac{1}{4}$；

2. 当 $\sin x=\dfrac{1}{2}$，即 $x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$ 或 $\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi\quad(k\in\mathbb{Z})$ 时，最小值 $y=2$.

习题 7.1

1. 比较下列各组中两个三角函数值的大小（不求值）：

   (a) $\sin 250^\circ$ 和 $\sin 260^\circ$

   (b) $\sin\left(-\dfrac{54}{7}\pi\right)$ 和 $\sin\left(-\dfrac{63}{8}\pi\right)$

   (c) $\sin 380^\circ$ 和 $\sin 480^\circ$

2. 说出下列各函数的最小正周期：

   (a) $y=\sin 3x$

   (b) $y=\sin\dfrac{x}{2}$

   (c) $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

   (d) $y=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

(e) $y = 3\sin\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{\pi}{4}\right)$　　(f) $y = 3\sin\left(\pi x + \dfrac{\pi}{3}\right) + 1$

3. 求下列函数的最大值和最小值，又在何时有最大值或最小值:

(a) $y = |\sin x|$

(b) $y = 1 + \sin x$

(c) $y = 1 + 5\sin^2 x$

(d) $y = \dfrac{1}{1 - \sin x}$

(e) $y = \left(\sin x - \dfrac{3}{2}\right)^2 - 2$

(f) $y = 2 - \left(\sin x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

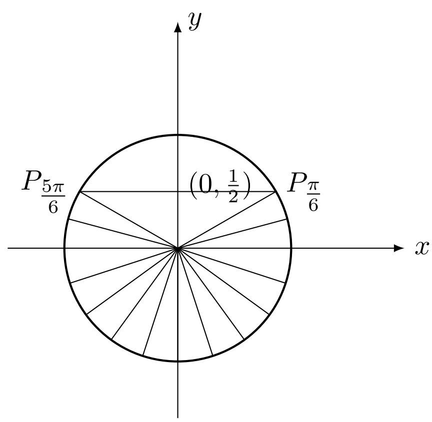
4. 求证等腰三角形中，若腰长一定则等腰直角三角形的面积最大.

5. $y = |\sin x|$ 是周期函数吗? 如果是，说出它的最小正周期.

6. 作 $y = \sin|x|$ 的图象，试从它的图象说明函数 $y = \sin|x|$ 不是周期函数:

7. 利用单位圆，容易看出 $\sin x < \dfrac{1}{2}$ 的解的范围，如下图所示.

$$\frac{5\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2(k+1)\pi$$



用同样的方法解下面不等式:

$$\sin 2x > \frac{1}{2}, \qquad \sin 3x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

第二节 余弦函数的图象和性质

一、余弦函数的图象

我们知道余弦函数的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 它是个偶函数，故它的图象向 x 轴的正负方向无限延伸，图象关于 y 轴对称.

我们从第五章中知道，函数 $f(x+\ell)$ 的图象是由函数 $f(x)$ 的图象向左、右平移 $|\ell|$ 个单位得到，当 $\ell > 0$ 时，向左平移 1 个单位，当 $\ell < 0$ 时，向右平移 $|\ell|$ 个单位.

在上一章我们又知道，$\cos x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$, 故 $y = \cos x$ 的图象就是 $y = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ 的图象，而正弦型函数 $y = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ 的图象恰是正弦函数 $y = \sin x$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 个单位得到，这就是说，我们只须把正弦曲线 $y = \sin x$ 沿着 x 轴向左平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 个单位就得到余弦函数 $y = \cos x$ 的图象. 如图 7.6 所示.

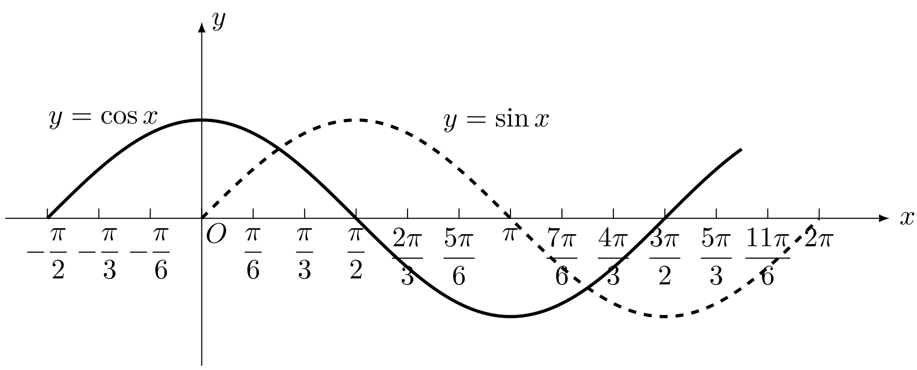


图 7.6

当然，也可以用描点法来作余弦函数的图象. 根据上面所说的我们可以借助第一节中的正弦函数值表，将自变数 x 的取值分别减去 $\dfrac{\pi}{2}$ 而对应的 y 值仍不变就能够得到余弦函数值表.

把表内 x、y 的每一对值作为点的坐标，在直角坐标系内作出对应的点，将它们依次连结成平滑曲线，这样就得到余弦函数在 $\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ 上的图象. 如果把曲线 $\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ 上的一段，沿着 x 轴向左、右推移，每次移动 2π 个单位，就可以得到连续不断的余弦函数的图象 (图 7.7).

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$y=\cos x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
x		$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$
$y=\cos x$		$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

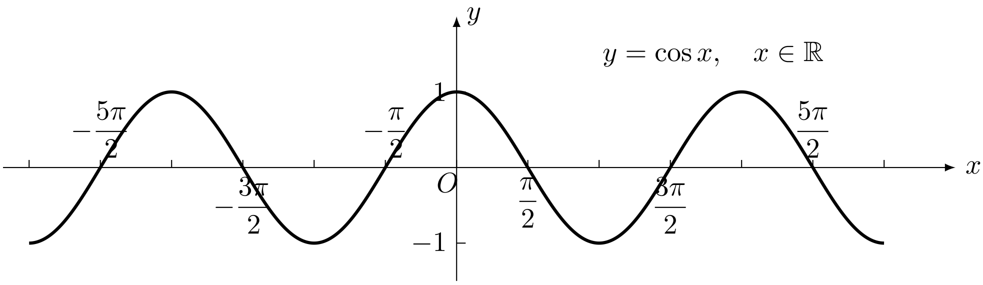


图 7.7

余弦函数 $y=\cos x$ 的图象叫做余弦曲线.

如作正弦函数的图象那样,只要把 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$、$(0,1)$、$\left(\frac{\pi}{2},0\right)$、$(\pi,-1)$、$\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$ 这五个点作出后，余弦函数 $y=\cos x$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 的图象就基本确定了. 因此，在精确度要求不太高的情况下，也可用“五点法”作出关于余弦函数的图象.

例 7.6 用“五点法”作出 $y=-\cos x$, $x\in[0,2\pi]$ 的图象.

解: 列表并作图（如图 7.8 所示）

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1
$-\cos x$	-1	0	1	0	-1

二、余弦函数的主要性质

由上一章的讨论和余弦函数图象，我们可以得到余弦函数 $y=\cos x$ 的主要性质如下:

1. 定义域　余弦函数 $y=\cos x$ 的定义域是一切实数，即 $-\infty<x<+\infty$ 或 $(-\infty,+\infty)$;

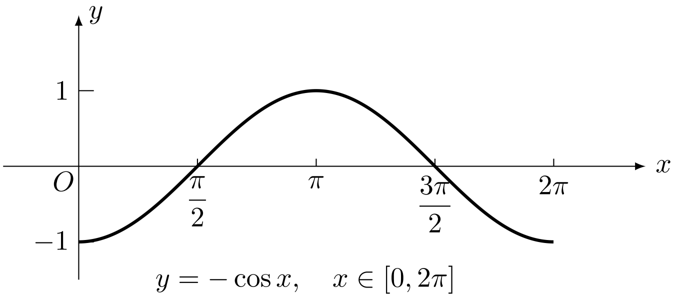


图 7.8

2. 值域　余弦函数 $y=\cos x$ 的值域是 $[-1,1]$, 或 $|\cos x|\le 1$;

3. 奇偶性　余弦函数是偶函数;

4. 函数的符号

- 当 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi$ 时，$\cos x>0$;
- 当 $\frac{\pi}{2}+2k\pi<x<\frac{\pi}{2}+(2k+1)\pi$ 时，$\cos x<0$;
- 当 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ 时，$\cos x=0$，这里 $k\in\mathbb{Z}$.

5. 增减性

- $y=\cos x$ 在区间 $[2k\pi,(2k+1)\pi]$ 内是递减的;
- $y=\cos x$ 在区间 $[(2k+1)\pi,2(k+1)\pi]$ 内是递增的.

因此,

- 当 $x=2k\pi$ 时，$\cos x=1$ 是极大值.
- 当 $x=(2k+1)\pi$ 时，$\cos x=-1$ 是极小值，这里 $k\in\mathbb{Z}$.

6. 周期性　余弦函数 $y=\cos x$ 的最小正周期（以后简称周期）是 2π.

函数 $y=\cos x$ 的周期是 $\frac{2\pi}{|\omega|}$ $(\omega\ne 0,\quad x\in\mathbb{R})$ 一般地，函数 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$ 的周期是 $\frac{2\pi}{|\omega|}$ $(\omega,\varphi$ 为常数，且 $\omega\ne 0,\ x\in\mathbb{R})$.

因为 $\cos(\omega x+\varphi)=\sin\left[\omega x+\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\right]$，这里 ω 是不等于 0 的常数，$\varphi+\frac{\pi}{2}$ 仍是常数，根据函数 $y=A\sin\left[\omega x+\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\right]$ 的最小正周期是 $\frac{2\pi}{|\omega|}$，因此 $\cos(\omega x+\varphi)$ 的最小正周期也是 $\frac{2\pi}{|\omega|}$.

例 7.7 求函数 $y = 4\cos(2x+3)$ 的周期，极值和极值点.

解： 函数 $y = 4\cos(2x+3)$ 的周期是 $\dfrac{2\pi}{2} = \pi$

把 $2x+3$ 看作一个变数，并根据余弦函数的增减性知：

1. 当 $2x+3 = 2k\pi$ 时，y 达到极大值，这时 $x = k\pi - \dfrac{3}{2}$, 极大值 $y = 4$;
2. 当 $2x+3 = (2k+1)\pi$ 时，y 达到极小值，这时 $x = k\pi + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{3}{2}$ 极小值 $y = -4$.

例 7.8 求 $4 - 2\cos\alpha - \sin^2\alpha$ 的最大值和最小值.

解：

$$4 - 2\cos\alpha - \sin^2\alpha = 3 - 2\cos\alpha + \cos^2\alpha = 2 + (1-\cos\alpha)^2$$

$1-\cos\alpha$ 的最小值为 0, 最大值为 2, 故知 $4 - 2\cos\alpha - \sin^2\alpha$ 的最小值为 2, 最大值为 6, 且当 $\alpha = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ 时，$4 - 2\cos\alpha - \sin^2\alpha$ 有最小值；当 $\alpha = (2k+1)\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ 时，$4 - 2\cos\alpha - \sin^2\alpha$ 有最大值.

例 7.9 已知函数

1. $\sin\left(\omega x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ 的周期是 $\dfrac{2\pi}{3}$
2. $\cos\left(\omega x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ 的周期是 π

试确定函数.

解：

1. $\because \quad \dfrac{2\pi}{|\omega|} = \dfrac{2\pi}{3}$

   $\therefore \quad |\omega| = 3, \quad \omega = \pm 3$

   故所求函数为：$\sin\left(\pm 3x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

2. $\because \quad \dfrac{2\pi}{|\omega|} = \pi$

   $\therefore \quad |\omega| = 2, \quad \omega = \pm 2$

   故所求函数为：$\cos\left(\pm 2x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2x \pm \dfrac{\pi}{3}\right)$

习题 7.2

1. 确定差的符号（不查表）：

(a) $\sin 72° - \sin 80°$

(b) $\cos 15° - \cos 16°$

(c) $\sin 200° - \sin 250°$

(d) $\cos 300° - \cos 340°$

2. 用“五点法”作出下列函数的图象 $(x \in [0,2])$:

$$y = -\sin x, \qquad y = 1 + \cos x, \qquad y = 1 + |\cos x|$$

3. 求下列各函数周期:

(a) $y = \sin 3x$

(b) $y = \cos \dfrac{x}{6}$

(c) $y = 3\sin \dfrac{x}{4}$

(d) $y = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{10}\right)$

(e) $y = \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

(f) $y = \sqrt{8}\sin\left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

4. 求下面函数的极大值和极小值以及取极值时的 x 值:

$$y = 2 + \cos x, \qquad y = 2 - \cos x, \qquad y = \frac{1}{1 + \cos^2 x}$$

5. 求函数 $y = -\cos^2 \alpha - 0.1\sin\alpha + 1.15$ 的最大值和最小值. 又当 α $(0 < \alpha < 2\pi)$ 为何值时，函数有最大值和最小值.

6. 求 $y = \sqrt{2\cos 2x - \sqrt{3}}$ 的定义域.

第三节　正切函数的图象和性质

一、正切函数的图象

我们知道正切函数的定义域是除去 $\dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ 的实数集. 也就是由下面无数个开区间

$$\ldots, \left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right), \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right), \ldots$$

组成的一个集，图象在这些点: $\dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ 处断开.

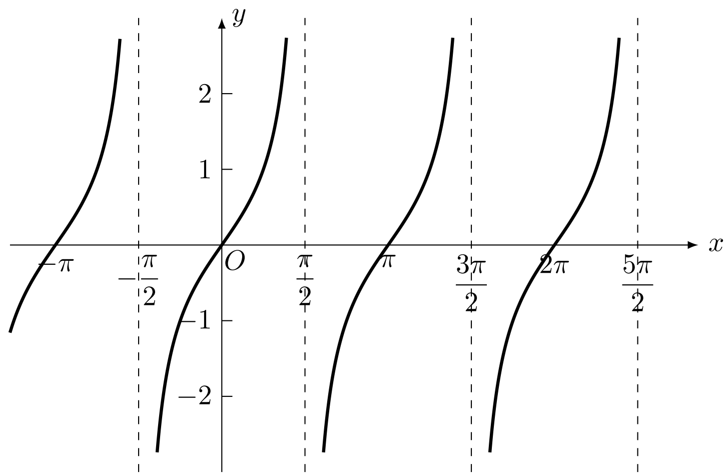
我们又知道正切函数是奇函数，故它的图象关于原点对称.

现在，我们用描点法作出正切函数的图象.

列表:

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{5\pi}{12}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{12}$	
$y=\tan x$	不存在	-3.73	-1.73	-1	-0.58	-0.27	
x	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$
$y=\tan x$	0	0.27	0.58	1	1.73	3.73	不存在

把表内 x、y 的每一对值作为点的坐标，在直角坐标系内作出对应的点，将它们依次连结成平滑曲线，这样就得到正切函数在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上的图象，如果把图象向左、右扩展出去，就得出 $y=\tan x,\quad x\in\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right),\quad k\in\mathbb{Z}$ 的图象 (图 7.9).



$y=\tan x\qquad x\in\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$

图 7.9

正切函数 $y=\tan x$ 的图象叫做**正切曲线**，由图 7.9 可以看出，正切曲线是由互相平行的直线 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})$ 隔开的无穷多支曲线所组成.

下面我们说明 $y=\tan x$ 图象的几何画法.

应用单位圆上的正切线，我们在开区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ 和 $\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right)$ 内作出正切函数 $y=\tan x$ 的图象．画图象时让横坐标每隔 $\frac{\pi}{12}$ 取点，作法如图 7.10.

二、正切函数的主要性质

由上一章的讨论和正切函数图象，我们可以得到正切函数 $y=\tan x$ 的主要性质如下：

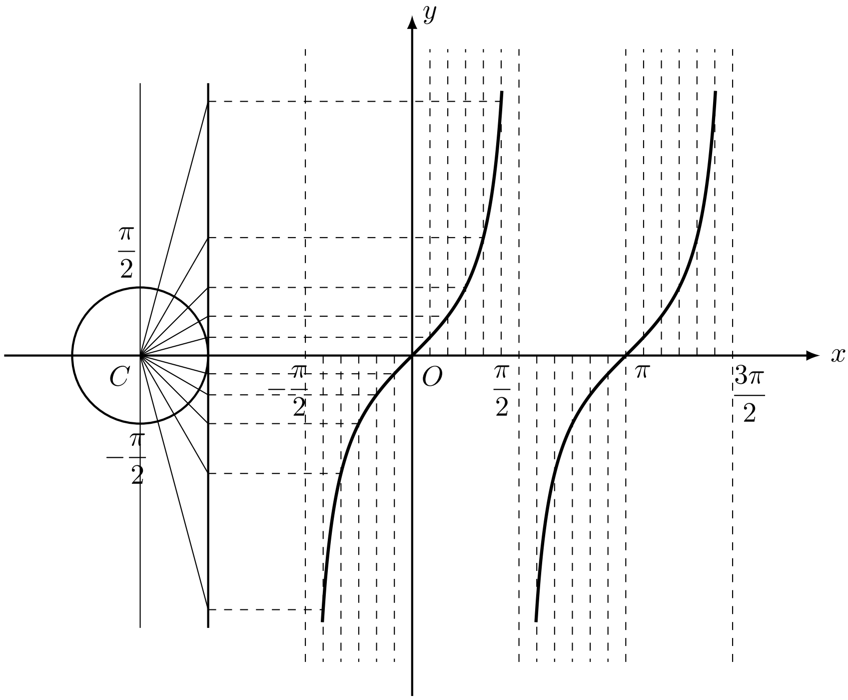


图 7.10

1. 定义域　正切函数 $y=\tan x$ 的定义域是 $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$ 的一切实数，也就是由下面无数个开区间：

$$\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right),\quad k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$$

组成的一个集.

2. 值域　正切函数 $y=\tan x$ 的值域为一切实数.

3. 奇偶性　正切函数是奇函数.

4. 函数的符号　当 x 在一、三象限时, $\tan x>0$; 在二、四象限时, $\tan x<0$. 一般地,
   - 若 $x\in\left(2k\pi,\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)$ 或 $\left((2k+1)\pi,\dfrac{\pi}{2}+(2k+1)\pi\right)$ 时, $\tan x>0$;
   - 若 $x\in\left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,(2k+1)\pi\right)$ 或 $\left(\dfrac{\pi}{2}+(2k+1)\pi,2k\pi\right)$ 时，$\tan x<0$.（这里 $k\in\mathbb{Z}$）

5. 增减性　正切函数 $y=tanx$ 在 $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)$ $(k\in\mathbb{Z})$ 的每一个开区间内，都是递增的.

但是要注意, 正切函数在整个定义域内并不是增函数. 事实上, 设 $x_1=\dfrac{\pi}{4}$, $x_2=\dfrac{3\pi}{4}$，那么

$$\tan x_1=\tan\frac{\pi}{4}=1$$
$$\tan x_2=\tan\frac{3\pi}{4}=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$$

这样，$x_1<x_2$ 时，有 $\tan x_1>\tan x_2$. 当 $x=k\pi$ 时 $(k\in\mathbb{Z})$, $\tan x=0$.

6. 周期性 由诱导公式 $\tan(x+\pi)=\tan x$ (这里 x 为定义域内任意数)，知正切函数的周期是 π, 现在我们证明 π 是正切函数的最小正周期.

   证明： 设 p 是 $\tan x$ 的正周期且 $0<p<\pi$，根据周期 p 的定义，我们有 $\tan(x+p)=\tan x$ (这里 x 是定义域内任意数).

   令 $x=0$, 则 $\tan p=\tan 0=0$, 由此得到 $p=k\pi$ $(k\in\mathbb{Z},\text{且}k\neq 0)$, 这就是说，如果 p 是 $\tan x$ 的周期，p 只能是 π 的整数倍，这就与存在比 π 小的正周期 p 的假设矛盾.

   因此，π 就是 $\tan x$ 的最小正周期.

   - 函数 $y=\tan\omega x$ 的最小正周期是 $\dfrac{\pi}{|\omega|}$ ($\omega\neq 0$, ωx 为定义域内的数).
   - 函数 $y=\tan(\omega x+\varphi)$ 的最小正周期是 $\dfrac{\pi}{|\omega|}$ (ω,φ 为常数，且 $\omega\neq 0$, ωx 为定义域内的数).

7. 渐近线 由图 7.9 可以看到，当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\tan x>0$, 又当 $x<\dfrac{\pi}{2}$ 而 x 又无限地趋近 $\dfrac{\pi}{2}$ 时，(记作 $x\to\dfrac{\pi}{2}^-$)，正切曲线无限地下降但与直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 永远不相交，我们把这个性质说成当 x 由小于 $\dfrac{\pi}{2}$ 的方面无限趋近 $\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\tan x$ 的值增大并超出任何指定的正数，并且写成

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan x=+\infty$$

当 $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ 时，$\tan x<0$，又当 $x>\dfrac{\pi}{2}$，而且 x 无限地趋近 $\dfrac{\pi}{2}$ 时 (记作 $x\to\dfrac{\pi}{2}^+$)，正切曲线无限地上升，但与直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 永远不相交，我们把这个性质说成当 x 由大于 $\dfrac{\pi}{2}$ 的方面无限趋近 $\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\tan x$ 取负值减小但其绝对值增大并超出任何指定的正数，并且写成

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\tan x=-\infty$$

同样地，还有

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty, \qquad \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$$

我们把直线 $x = -\dfrac{\pi}{2}$ 和 $x = \dfrac{\pi}{2}$ 叫做正切曲线的渐近线．一般地，直线 $x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$，$k \in \mathbb{Z}$ 都是正切曲线的渐近线.

注意：这里对渐近线的叙述，同学们只要从图象上了解其意义就可以了，这个问题到高中还要详细地介绍.

练习

1. 证明 $y = \tan\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ 是奇函数，作出它的图象.
2. 作 $y = -|\tan x|$ 的图象，并说出它的周期.
3. 求下列函数的周期：

$$\tan\left(2x - \frac{x}{4}\right), \qquad \tan\frac{x}{2}$$

第四节　余切函数的图象和性质

一、余切函数的图象

我们知道余切函数的定义域是除去 $x = k\pi\ \ (k \in \mathbb{Z})$ 的实数集．也就是由下面无数个开区间 $\ldots, (-2\pi, -\pi)$，$(-\pi, 0)$，$(0, \pi)$，$(\pi, 2\pi), \ldots$ 组成的一个集，图象都在 $k\pi\ \ (k \in \mathbb{Z})$ 处断开.

我们又知道余切函数是奇函数，故它的图象关于原点对称.

由关系式 $\cot x = -\tan\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$，知道余切函数 $\cot x$ 的图象就是正切函数型 $y = -\tan\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ 的图象，又 $y = -\tan\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ 的图象，可以通过将正切曲线 $y = \tan x$ 沿 x 轴向左平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 个单位，再把所得曲线作关于 Ox 轴反射，这个最后得到的曲线就是余切函数 $y = \cot x$ 的图象（如图 7.11).

在具体画图时，我们也可以将正切函数 $y = \tan x$ 的数值表作相应的改变得到余切函数 $y = \cot x$ 的数值表，然后用描点法作图．为此，只须将 $\tan x$ 的自变数 x 的取值各减去 $\dfrac{\pi}{2}$ 而使原来的对应函数值都变为相应的相反数就可以了．今由正切函数 $y = \tan x$, 在区间 $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ 上的数值表：

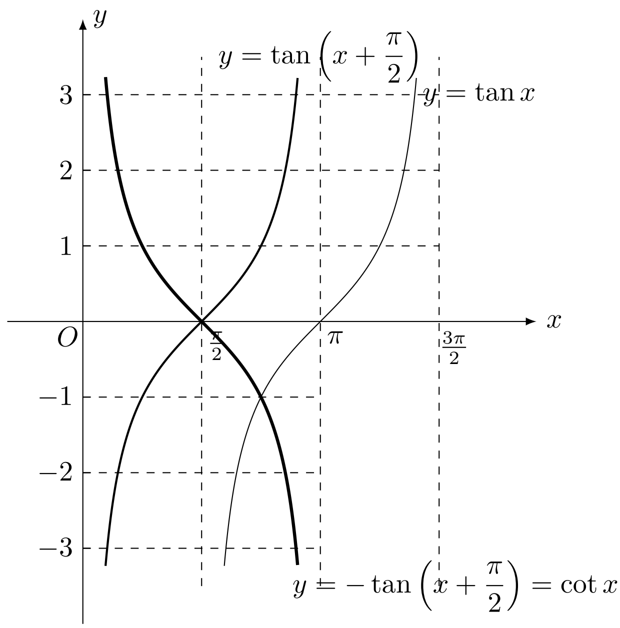


图 7.11

x	$\frac{6\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{8\pi}{12}$	$\frac{9\pi}{12}$	$\frac{10\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{12}$	
$y=\tan x$	不存在	-3.73	-1.73	-1	-0.58	-0.27	
x	π	$\frac{13\pi}{12}$	$\frac{14\pi}{12}$	$\frac{15\pi}{12}$	$\frac{16\pi}{12}$	$\frac{17\pi}{12}$	$\frac{18\pi}{12}$
$y=\tan x$	0	0.27	0.58	1	1.73	3.73	不存在

作相应的改变后得到余切函数 $y=\cot x$ 的数值表:

x	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{12}$	$\frac{4\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{12}$	
$y=\cot x$	不存在	3.73	1.73	1	0.58	0.27	
x	$\frac{6\pi}{12}=\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{8\pi}{12}$	$\frac{9\pi}{12}$	$\frac{10\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{12}$	$\frac{12\pi}{12}=\pi$
$y=\cot x$	0	-0.27	-0.58	-1	-1.73	-3.73	不存在

根据此表，我们可以画出在区间 $(0,\pi)$ 上的余切函数 $y=\cot x$ 的图象.

余切函数 $y=\cot x$ 的图象叫做**余切曲线**. 整个余切曲线在点 $x=k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ 处间断开，分成无数多个分支（图 7.12）.

二、余切函数的主要性质

由上一章的讨论和余切函数图象，我们可以得到余切函数 $y=\cot x$ 的主要性质如下:

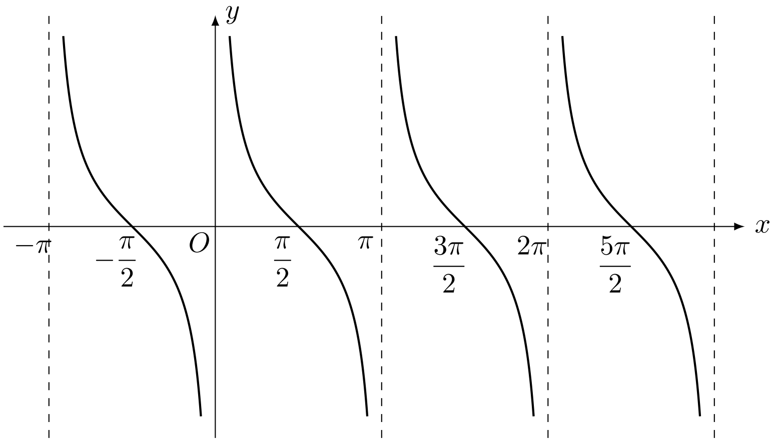


图 7.12

1. 定义域　余切函数 $y = \cot x$ 的定义域是 $x \neq k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z})$ 的实数集，也就是由下面无数个开区间：

$$\Big(k\pi,\ (k+1)\pi\Big), \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

组成的一个集.

2. 值域　余切函数 $y = \cot x$ 的值域为一切实数.

3. 奇偶性　余切函数是奇函数.

4. 函数的符号　当 x 在第一、三象限时，$\cot x > 0$；在第二、四象限时，$\cot x < 0$，一般地：

   - 若 $x \in \left(2k\pi,\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ 或 $\left((2k+1)\pi,\ \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi\right)$ 时，$\cot x > 0$；
   - 若 $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ (2k+1)\pi\right)$ 或 $\left(\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi,\ (2k+2)\pi\right)$ 时，$\cot x < 0$，这里 $k \in \mathbb{Z}$

5. 增减性　余切函数 $y = \cot x$ 在区间 $(k\pi,\ (k+1)\pi) \ \ (k \in \mathbb{Z})$ 都是减函数. 当 $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z})$ 时，$\cot x = 0$.

6. 周期性　余切函数的周期是 π.

   事实上，假设 $p > 0$ 是 $\cot x$ 的一个周期，根据周期 p 的定义，有 $\cot(x + p) = \cot x$, 这里 x 是 $\cot x$ 的定义域中任何一个数.

令 $x=\dfrac{\pi}{2}$，则

$$\cot\left(\frac{\pi}{2}+p\right)=\cot\frac{\pi}{2}$$

即

$$\tan p=0$$

$\therefore\quad p=k\pi\quad(k\in\mathbb{Z},\ k\neq 0)$

由于 $\cot(x+k\pi)=\cot x$ 对于 x 的任何容许值都成立，所以能使上面等式成立的最小正数 $p=x$. 即 $\cot x$ 的最小正周期等于 π.

- 函数 $y=\cot\omega x$ 的最小正周期是 $\dfrac{\pi}{|\omega|}$，($\omega\neq 0,\omega x$ 为定义域内的数).
- 函数 $y=A\cot(\omega x+\varphi)$ 的最小正周期是 $\dfrac{\pi}{|\omega|}$,(ω,φ 为常数,$\omega\neq 0,\omega x$ 为定义域内的数).

7. 渐近线　因为

$$\lim_{x\to 0^+}\cot x=+\infty,\qquad \lim_{x\to 0^-}\cot x=-\infty$$
$$\lim_{x\to \pi^-}\cot x=-\infty,\qquad \lim_{x\to \pi^+}\cot x=+\infty$$

故 $x=0$, $x=\pi$ 的直线就是余切曲线的渐近线.

一般地，直线 $x=k\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$，都是余切曲线的渐近线.

习题 7.3

1. 确定差的符号:

   (a) $\tan 72^\circ-\tan 80^\circ$

   (b) $\cot 15^\circ-\cot 16^\circ$

   (c) $\tan 70^\circ-\cot 70^\circ$

   (d) $\cot 100^\circ-\cot 90^\circ$

2. 求下列各式子的符号:

   (a) $\sin 3\cdot\tan 5$

   (b) $\cos 8\cdot\cos 5\cdot\tan 1$

   (c) $\tan 5\cdot\cot 3\cdot\tan 1$

   (d) $\sin(-5)\cos(-3)\tan(-2)\cot 2$

3. 在怎样的区间内随着不超过 360° 的正角 α 的增大:

   (a) $\sin\alpha$ 和 $\cot\alpha$ 同时增大？同时减小？

(b) $\cos\alpha$ 和 $\tan\alpha$ 同时增大？同时减小？

(c) $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 同时增大？同时减小？

4. 作下面函数的图象：

$$y = \cot\left(x - \frac{\pi}{2}\right), \qquad y = \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

5. 利用单位圆和余切函数线，解下面不等式

$$\cot x > 1, \qquad 3\cot x + \sqrt{3} < 0$$

6. 作下面函数的图象：

$$y = \sec x, \qquad y = \csc x$$

为了便于比较和查阅，我们把正弦函数，余弦函数，正切函数，余切函数的主要性质列表如下：

函数	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$	$y=\cot x$
定义域	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\{x \mid x\in\mathbb{R},\ \ x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi\}$	$\{x \mid x\in\mathbb{R},\ \ x\neq k\pi\}$
值域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数	奇函数
函数的符号	在一、二象限为正；在三、四象限为负	在一、四象限为正；在二、三象限为负	在一、三象限为正；在二、四象限为负	在一、三象限为正；在二、四象限为负
增减性	在一、二象限是增函数；在三、四象限是减函数	在一、二象限是减函数；在三、四象限是增函数	在各象限都为增函数	在各象限都为减函数
函数的极值	$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ 时，取极大值 1；$x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$ 时，取极小值 -1	$x=2k\pi$ 时，取极大值 1；$x=(2k+1)\pi$ 时，取极小值 -1	无	无
周期性	2π	2π	π	π
渐近线	无	无	直线 $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$	直线 $x=k\pi$

第五节　正弦型曲线

在这一节，我们来研究正弦型曲线，即函数 $y = A\sin(mx + a)$ 的图象，这个图象在学习物理、电工和力学时将会遇到，下面我们先研究几种特殊正弦型曲线的作法，然后再归结到一般情形.

一、函数 $y = A\sin x$ 的图象

我们取 $A = \dfrac{1}{2}$, $A = 1$, $A = 2$ 三种情形来讨论，即讨论

$$y = \frac{1}{2}\sin x, \qquad y = \sin x, \qquad y = 2\sin x$$

考虑到函数 $\sin x$ 的周期是 2π, 我们只须画出闭区间 $[0, 2\pi]$ 上的图象，先列出 x 由 0 到 $\dfrac{\pi}{2}$, 每隔 $\dfrac{\pi}{6}$ 取值的正弦值表，然后，应用诱导公式 $\sin(\pi - x) = \sin x$, 列出 $\dfrac{\pi}{2}$ 到 π 之间的正弦值；最后应用诱导公式 $\sin(\pi + x) = -\sin x$ 列出 π 到 2π 之间的正弦值. 对于同一个 x 值，函数 $\dfrac{1}{2}\sin x$ 的值为函数 $\sin x$ 的值的 $\dfrac{1}{2}$, 而函数 $2\sin x$ 的值为函数 $\sin x$ 的值的 2 倍.

把它们的自变量及对应函数值列表于下：

x	$y = \sin x$	$y = \frac{1}{2}\sin x$	$y = 2\sin x$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
0	0	0	0
$\frac{\pi}{6}$	0.5	0.25	1
$\frac{\pi}{3}$	0.87	0.44	1.74
$\frac{\pi}{2}$	1	0.5	2
$\frac{2\pi}{3}$	0.87	0.44	1.74
$\frac{5\pi}{6}$	0.5	0.25	1
π	0	0	0
$\frac{7\pi}{6}$	-0.5	-0.25	-1
$\frac{4\pi}{3}$	-0.87	-0.44	-1.74
$\frac{3\pi}{2}$	-1	-0.5	-2
$\frac{5\pi}{3}$	-0.87	-0.44	-1.74
$\frac{11\pi}{6}$	-0.5	-0.25	-1
2π	0	0	0
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

对于每一个函数，把表内 x、y 的每一对值作为点的坐标，在直角坐标系内作出对应点，将它们依次连结成平滑曲线，这三条曲线就是正弦函数 $y=\sin x$，及正弦型函数 $y=\frac{1}{2}\sin x$ 和 $y=2\sin x$ 的图象 (如图 7.13).

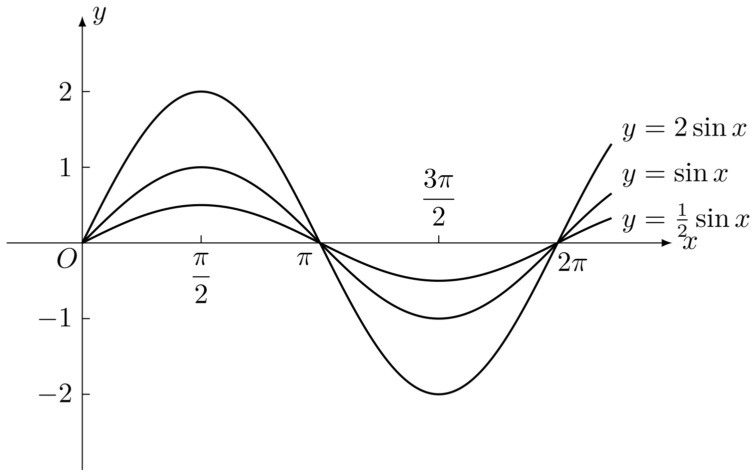


图 7.13

由图象显然看出：

1. 对于同一横坐标 x，$y=\frac{1}{2}\sin x$ 的纵坐标为 $y=\sin x$ 的纵坐标的 $\frac{1}{2}$，$y=2\sin x$ 的纵坐标为 $y=\sin x$ 的纵坐标的 2 倍，因此，可以说，把曲线 $y=\sin x$ 沿纵轴方向压缩到 $\frac{1}{2}$，就得到曲线 $y=\frac{1}{2}\sin x$；沿纵轴方向拉长 2 倍，就得到曲线 $y=2\sin x$.

2. $y=\sin x$ 的最大纵坐标是 1；$y=2\sin x$ 的最大纵坐标是 2；$y=\frac{1}{2}\sin x$ 的最大纵坐标是 $\frac{1}{2}$. 我们这个最大的纵坐标叫做该曲线的振幅.

3. 它们的周期相同，都是 2π.

推广到一般情形，就得出下面的结论：

函数 $y=A\sin x$ 的图象是把 $y=\sin x$ 的图象沿着纵轴方向压缩到 A $(0<A<1)$ 倍或拉长到 A $(A>1)$ 倍而得到，曲线 $y=A\sin x$ 的振幅为 A，周期为 2π.

二、函数 $y=\sin mx$ 的图象

我们取 $m=\frac{1}{2}$, $m=1$, $m=2$ 三种情形来讨论，即讨论 $y=\sin\frac{x}{2}$, $y=\sin x$, $y=\sin 2x$.

三个函数的周期分别是 4π, 2π 和 π, 它们有相同的振幅 $A=1$. 所有这些函数在自变量 mx 取相同值的变化过程中对应的函数值也相同，但现在 m 值不同，因此，只有当取不同的值时，才能使这些函数的对应值相同．比如，

- 当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，$\sin x$ 的值为 0.5；
- 当 $x=\frac{\pi}{3}$ 时，$\sin\frac{1}{2}x$ 的值为 0.5；
- 当 $x=\frac{\pi}{12}$ 时，$\sin 2x$ 的值为 0.5.

这就是说，只要我们有一个函数 $y=\sin x$ 在闭区间 $[0,2\pi]$ 上的函数值表，我们就可以通过把这个数值表中自变量 x 的取值乘以 2, 就得到函数 $y=\sin\frac{1}{2}x$ 在闭区间 $[0,4\pi]$ 上的函数值表；如果把 $y=\sin x$ 的数值表中自变量 x 的取值除以 2, 就可以得到 $y=\sin 2x$ 在闭区间 $[0,\pi]$ 上的函数值表.

列表作图于下：

将 $y=\sin x$ 的函数值表

x	$\cdots$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$y=\sin x$	$\cdots$	0	0.5	0.87	1	0.87	0.5	0
x		$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	$\cdots$
$y=\sin x$		-0.5	-0.87	-1	-0.87	-0.5	0	$\cdots$

里的 x 的取值分别乘以 2 得到 $y=\sin\frac{1}{2}x$ 的函数值表如下：

x	$\cdots$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
$y=\sin\frac{1}{2}x$	$\cdots$	0	0.5	0.87	1	0.87	0.5	0
x		$\frac{7\pi}{3}$	$\frac{8\pi}{3}$	3π	$\frac{10\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{3}$	4π	$\cdots$
$y=\sin\frac{1}{2}x$		-0.5	-0.87	-1	-0.87	-0.5	0	$\cdots$

作图：

由上面的表和图 7.14 可以看出：

1. 当 $y=\sin\frac{1}{2}x$ 的横坐标为 $y=\sin x$ 的横坐标的 2 倍时，它们的纵坐标相等.

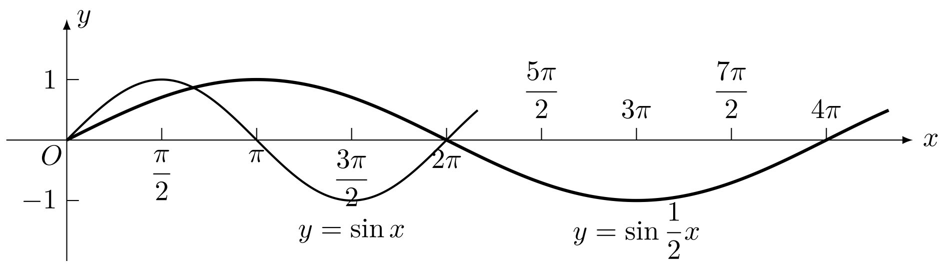


图 7.14

2. 它们的振幅相同，都是 1.

3. $y=\sin\frac{1}{2}x$ 的周期是 $4\pi=\frac{2\pi}{1/2}$，二倍于 $y=\sin x$ 的周期.

因此，$y=\sin\frac{1}{2}x$ 的图象是把 $y=\sin x$ 的图象沿横轴方向拉长 2 倍而得到.

将 $y=\sin x$ 的函数值表里的 x 取值分别除以 2, 得到 $y=\sin 2x$ 的函数值如下：

x	$\cdots$	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$
$y=\sin\frac{1}{2}x$	$\cdots$	0	0.5	0.87	1	0.87	0.5	0
x		$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$	π	$\cdots$
$y=\sin\frac{1}{2}x$		-0.5	-0.87	-1	-0.87	-0.5	0	$\cdots$

作图象：

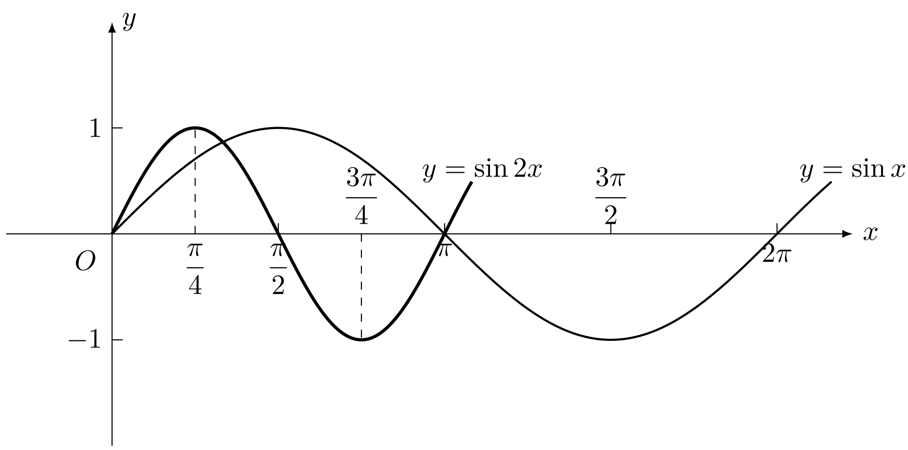


图 7.15

由上面的表和图 7.15 可以看出:

1. 当 $y=\sin 2x$ 的横坐标为 $y=\sin x$ 的横坐标的一半时，它们的纵坐标相等.

2. 它们的振幅相同，都是 1.

3. $y=\sin 2x$ 的周期是 $\pi\left(=\frac{\pi}{2}\right)$

因此，$y=\sin 2x$ 的图象是把曲线 $y=\sin x$ 沿横轴方向压缩 $\frac{1}{2}$ 倍，就得到曲线 $y=\sin 2x$.

根据上述情况，可得一般结论如下:

函数 $y=\sin mx$ 的图象是把 $y=\sin x$ 的图象沿横轴方向拉长 $\frac{1}{m}$ 倍 $(0<m<1)$，或压缩到 $\frac{1}{m}$，$(m>1)$ 而得到. 曲线 $y=\sin mx$ 的振幅为 1, 周期为 $\frac{2\pi}{m}$.

三、函数 $y=A\sin(mx+\alpha)$ 的图象

现在我们来说明如何画一般的正弦型曲线 $y=A\sin(mx+\alpha)$. 这里 A 和 m 为已给的正实数，α 为已给的实数.

把函数

$$y=A\sin(mx+\alpha) \tag{7.5}$$

改写成

$$y=A\sin m\left(x+\frac{\alpha}{m}\right) \tag{7.6}$$

函数 (7.5), (7.6) 和函数 $y=A\sin mx$ 的振幅相同，都等于 A. 而且它们的周期也相同，都等于 $\frac{2\pi}{m}$.

显然，$y=A\sin m\left(x+\frac{\alpha}{m}\right)$ 的图象上一点的横坐标 x_1 所对应的纵坐标是 $y=A\sin m\left(x_1+\frac{\alpha}{m}\right)$，并且恒等于 $y=A\sin mx$ 的图象上横坐标是 $x_1+\frac{\alpha}{m}$ 的一点的纵坐标. 由于在 Ox 轴上点 x_1 是在点 $x_1+\frac{\alpha}{m}$，$(\alpha>0)$ 的左方 $\left|\frac{\alpha}{m}\right|$ 个单位处，或者点 x_1 是在点 $x_1+\frac{\alpha}{m}$，$(\alpha<0)$ 的右方的 $\left|\frac{\alpha}{m}\right|$ 个单位处，所以我们只须把 $y=A\sin mx$ 的图象沿横轴方向左移 $x_1+\frac{\alpha}{m}$，$(\alpha>0)$ 个单位，或者右移 $x_1+\frac{\alpha}{m}$，$(\alpha<0)$ 个单位，就得到 $y=A\sin m\left(x+\frac{\alpha}{m}\right)$ 的图象.

例 7.10　作函数 $y = 1.5\sin\left(2t + \dfrac{\pi}{4}\right)$ 的图象.

解： 所求函数 $y = 1.5\sin\left(2t + \dfrac{\pi}{4}\right)$ 的图象，可以由函数 $y = 1.5\sin 2t$ 的图象沿横轴方向左移 $\dfrac{\pi}{8}$ 个单位得到．这时，曲线 $y = 1.5\sin 2t$ 上的 $(0,0)$ 点就平移到 $\left(-\dfrac{\pi}{8}, 0\right)$ 点，我们把它作为曲线 $y = 1.5\sin 2\left(t + \dfrac{\pi}{8}\right)$ 的起点.

列出函数 $y = \sin t$ 在闭区间 $[0, 2\pi]$ 上自变量 t 每隔 $\dfrac{\pi}{4}$ 的函数值表:

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$y = \sin t$	0	0.71	1	0.71	0	−0.71	−1	−0.71	0

按照给出的曲线方程作相应的变更，分别得到函数 $y = \sin 2t$, $y = 1.5\sin 2t$ 和 $y = 1.5\sin 2\left(t + \dfrac{\pi}{8}\right)$ 在一个周期内的函数值表如下:

t	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π
$y = \sin 2t$	0	0.71	1	0.71	0	−0.71	−1	−0.71	0
$y = 1.5\sin 2t$	0	1.07	1.5	1.07	0	−1.07	−1.5	−1.07	0

t	$-\frac{\pi}{8}$	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$
$y = 1.5\sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$	0	1.07	1.5	1.07	0
t		$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$
$y = 1.5\sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$		−1.07	−1.5	−1.07	0

作图:

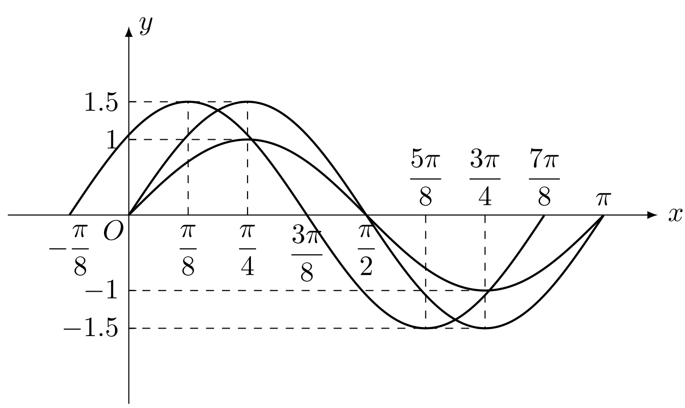


图 7.16

上面这种作图方法，把几种曲线之间的关系明确的揭露出来，使我们能够了解到它们之间的内在联系，但是，这样作图比较费事，在实际问题中往往只须知道函数 $y = A\sin(mx+\alpha)$ 的草图，只要这个图能够表示出它的三个特征量：振幅 A, 周期 $\dfrac{2\pi}{m}$，起点 $\left(-\dfrac{\alpha}{m}, 0\right)$ 就可以了.

$y = A\sin(mx+\alpha)$ 的图象的简便作法如下：

1. 化函数 $y = A\sin(mx+\alpha)$ 为下面的形式
$$y = A\sin m\left(x+\frac{\alpha}{m}\right)$$
2. 确定：振幅为 A; 周期为 $\dfrac{2\pi}{m}$；起点为 $\left(-\dfrac{\alpha}{m}, 0\right)$.
3. 选取比例尺：1 个单位为几厘米.
4. 在 Ox 轴上以 $\left(-\dfrac{\alpha}{m}, 0\right)$ 为起点，并把 $x = -\dfrac{\alpha}{m}$ 到 $x = -\dfrac{\alpha}{m} + \dfrac{2\pi}{m}$ 的一段分成 4 等份，每等份长为 $\dfrac{2\pi}{m} \div 4 = \dfrac{\pi}{2m}$, 各分点的横坐标是
$$-\frac{\alpha}{m}, \quad -\frac{\alpha}{m}+\frac{\pi}{2m}, \quad -\frac{\alpha}{m}+\frac{\pi}{m}, \quad -\frac{\alpha}{m}+\frac{3\pi}{2m}, \quad -\frac{\alpha}{m}+\frac{2\pi}{m}$$
它们对应的纵坐标分别是 $0, A, 0, -A, 0$.

根据上述结果,便可作出函数 $y = A\sin(mx+\alpha)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\alpha}{m},\ -\dfrac{\alpha}{m}+\dfrac{2\pi}{m}\right]$ 上的图象.

例 7.11 求作函数 $y = \dfrac{3}{2}\sin(3t-\pi)$ 的图象.

解：

1. 化函数 $y = \dfrac{3}{2}\sin(3t-\pi)$ 为下面的形式：
$$y = \frac{3}{2}\sin 3\left(t-\frac{\pi}{3}\right)$$
2. 确定：振幅为 $\dfrac{3}{2}$，周期为 $\dfrac{2\pi}{8}$，起点为 $\left(\dfrac{\pi}{8},\ 0\right)$
3. 选取比例尺：1 个单位长 $= 0.8$ 厘米.
4. 列表：

t	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\cdots$
$y = \frac{3}{2}\sin(3t-\pi)$	$\cdots$	0	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	0	$\cdots$

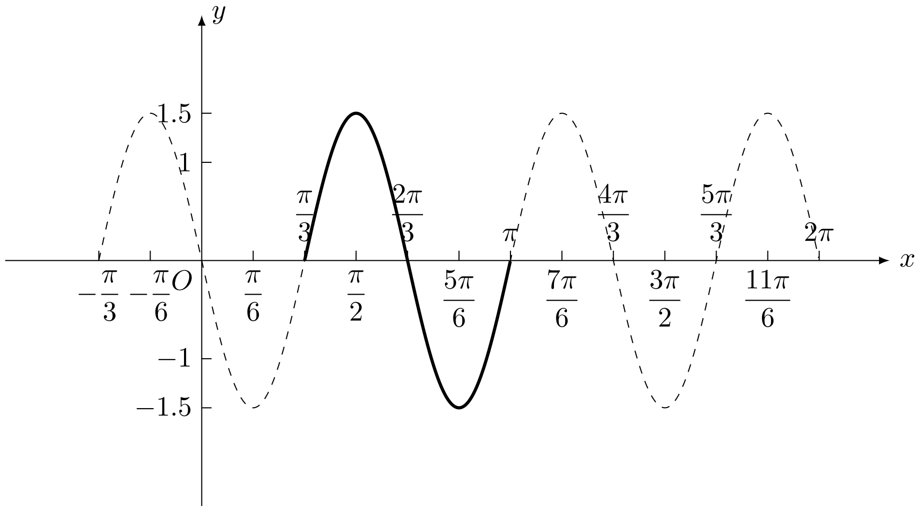


图 7.17

图中虚线表示曲线 $y=\dfrac{3}{2}\sin(3t-\pi)$ 上未画出的部分，我们把图象变换总结如下：

位置变换

1. $y=\sin(x+b)$ 的图象可由 $y=\sin x$ 的图象沿 x 轴的方向左、右平移而得到（当 $b>0$ 时向左，$b<0$ 时向右）.
2. $y=\sin x+\ell$ 的图象可由 $y=\sin x$ 的图象沿 y 轴的方向上、下平移而得到（当 $\ell>0$ 时向上，$\ell<0$ 时向下）.
3. $y=-\sin x$ 的图象可由 $y=\sin x$ 的图象作关于 Ox 轴的反射得到.

形状变换

1. $y=A\sin x\ (A>0)$ 的图象可由 $y=\sin x$ 的图象的振幅扩大 A 倍而得到.
2. $y=\sin mx\ (m>0)$ 的图象可由 $y=\sin x$ 的图象沿 x 轴方向拉长 $(0<m<1)$ 或压缩 $(m>1)$ 到 $\dfrac{1}{m}$ 倍而得到（周期 T 为 $\dfrac{2\pi}{m}$）.

位置形状全变换

$$y = A\sin(mx+\alpha)+\ell = A\sin m\left(x+\frac{\alpha}{m}\right)+\ell \quad (A>0,\ m>0)$$

可由 $y=\sin x$ 的图象沿轴方向拉长或压缩到原来的 $\dfrac{1}{m}$ 倍，（周期变为 $\dfrac{2\pi}{m}$），沿 x 轴向左或向右平移 $\left|\dfrac{\alpha}{m}\right|$ 个单位，然后把振幅扩大到原来的 A 倍；最后沿 y 轴向上或向下平移 $|\ell|$ 个单位.

练习

1. 作下面三角函数的图象：

(a) $y=1+\sin 2x$

(b) $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

(c) $y=2\sin\left(3t-\dfrac{\pi}{3}\right)$

(d) $y=\dfrac{2}{3}\cos\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

2. 求下面函数的图象在 $(0,2\pi)$ 区间的交点坐标：

(a) $y=\sin 2x$ 和 $y=2\cos x$

(b) $y=\sin 3x$ 和 $y=2\sin x$

复习题七

1. 求 θ 所在的象限，已知：

(a) $\sin\theta$ 和 $\cot\theta$ 同号

(b) $\cos\theta$ 和 $\tan\theta$ 异号

(c) $\dfrac{\tan\theta}{\cot\theta}$ 是正值

(d) $\sin\theta<0$，而 $\cos\theta>0$

2. 根据三角函数性质，比较两函数值的大小：

(a) $\sin 20^\circ$, $\sin 21^\circ$

(b) $\cos 20^\circ$, $\cos 120^\circ$

(c) $\tan 120^\circ$, $\tan 121^\circ$

(d) $\cot 175^\circ$, $\cot 185^\circ$

(e) $\cos 1^\circ$, $\cos 1$

(f) $\sin 1$, $\cos 1$

(g) $\sin(-310^\circ)$, $\cos(-310^\circ)$

(h) $\sin\dfrac{4\pi}{5}$, $\cos\dfrac{4\pi}{5}$

3. 说出下列各函数的周期：

(a) $y = \sin 4x$

(b) $y = \cos\dfrac{x}{2}$

(c) $y = \tan ax \quad (a > 0)$

(d) $y = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{8}\right)$

(e) $y = \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

(f) $y = 3\tan\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$

4. (a) 等式 $\sin\left(\dfrac{7\pi}{6} + \dfrac{2\pi}{3}\right) = \sin\dfrac{7\pi}{6}$，能不能成立？

(b) 如果上面的等式成立，能不能说 $\dfrac{2\pi}{3}$ 是 $\sin x$ 的周期？为什么？

5. (a) 等式 $\sin(x + 4\pi) = \sin x$ 是不是对于 x 的一切值都能成立？

(b) 如果上面的等式对于 x 的一切值都能成立，能不能说 4π 是 $\sin x$ 的周期？为什么？

6. 用下面给出的周期，各举出一个周期函数来：

$$3\pi, \qquad \frac{\pi}{6}, \qquad \frac{2\pi}{3}$$

7. 说明正弦曲线 $y = \sin x$ 经过怎样的变化能得到下列的函数曲线：

(a) $y = \dfrac{1}{2}\sin 3x$

(b) $y = 2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

(c) $y = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

(d) $y = 2\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{8}\right)$

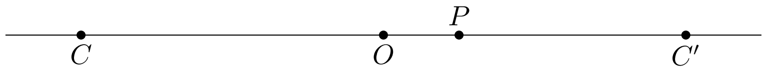
8. 电流强度 I 随时间 t 变化的函数关系是 $I = A\sin\omega t$. 设 $\omega = 100\pi$(弧度 / 秒)，$A = 5$(安培)：

(a) 求电流强度变化的周期和频率（往复振动一次所需的时间 $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$，叫做振动的周期，单位时间内往复振动的次数 $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$，叫做振动的频率）；

(b) 当 $t = 0$、$\dfrac{1}{200}$、$\dfrac{1}{100}$、$\dfrac{3}{200}$、$\dfrac{1}{50}$（秒）时，求电流强度；

(c) 画出图象表示电流强度 I 随时间 t 的变化情况（以 I 为纵坐标，0.5cm 表示 1 安培；以 t 为横坐标，1cm 表示 $\dfrac{1}{200}$ 秒）.

9. 如图，一质点 P 在线段 CC' 上作往复运动，取原点 O 为 CC' 中点，又 $CC' = 16\text{cm}$，设 P 点离开原点 O 的坐标 x 是时间 t 的函数 $x = 8\sin\left(\dfrac{\pi}{4}t + \dfrac{\pi}{6}\right)$



问:

(a) 当 $t=0,2,4$ 秒时，P 点在何位置?

(b) 从 0 秒算起，经过多少秒，P 点第一次到达 C 点.

(c) 经过多少秒后 P 点开始重复运动.