中学数学实验教材
第四册（下）

中学数学实验教材编写组编

1985 年 5 月

前　言

这一套中学数学实验教材，内容的选取原则是精简实用，教材的处理力求深入浅出，顺理成章，尽量作到使人人能懂，到处有用.

本教材适用于重点中学，侧重在满足学生将来从事理工方面学习和工作的需要.

本教材的教学目的是：使学生切实学好从事现代生产、特别是学习现代科学技术所必需的数学基础知识；通过对数学理论、应用、思想和方法的学习，培养学生运算能力，思维能力，空间想象力，从而逐步培养运用数学的思想和方法去分析和解决实际问题的能力；通过数学的教学和学习，培养学生良好的学习习惯，严谨的治学态度和科学的思想方法，逐步形成辩证唯物主义世界观.

根据上述教学目的，本教材精选了传统数学那些普遍实用的最基础的部分，这就是在理论上、应用上和思想方法上都是基本的、长远起作用的通性、通法.比如，代数中的数系运算律，式的运算，解代数方程，待定系数法；几何中的图形的基本概念和主要性质，向量，解析几何；分析中的函数，极限，连续，微分，积分；概率统计以及逻辑、推理论证等知识. 对于那些理论和应用上虽有一定作用，但发展余地不大，或没有普遍意义和实用价值，或不必要的重复和过于繁琐的内容，如立体几何中的空间作图，几何体的体积、表面积计算，几何难题，因式分解，对数计算等作了较大的精简或删减.

全套教材共分六册. 第一册是代数. 在总结小学所学自然数、小数、分数基础上，明确提出运算律，把数扩充到有理数和实数系. 灵活运用运算律解一元一次、二次方程，二元、三元一次方程组，然后进一步系统化，引进多项式运算，综合除法，辗转相除，余式定理及其推论，学到根式、分式、部分分式.第二册是几何. 由直观几何形象分析归纳出几何基本概念和基本性质，通过集合术语、简易逻辑转入欧氏推理几何，处理直线形，圆、基本轨迹与作图，三角比与解三角形等基本内容. 第三册是函数. 数形结合引入坐标，研究多项式函数，指数、对数、三角函数，不等式等. 第四册是代数. 把数扩充到复数系，进一步加强多项式理论，方程式论，讲线性方程组理论，概率（离散的）统计

的初步知识．第五册是几何．引进向量，用向量和初等几何方法综合处理几何问题，坐标化处理直线、圆、锥线，坐标变换与二次曲线讨论，然后讲立体几何，并引进空间向量研究空间解析几何初步知识．第六册是微积分初步．突出逼近法，讲实数完备性，函数，极限，连续，变率与微分，求和与积分．

本教材基本上采取代数、几何、分析分科，初中、高中循环排列的安排体系．教学可按初一、初二代数、几何双科并进，初三学分析，高一、高二代数(包括概率统计)、几何双科并进，高三学微积分的程序来安排．

本教材的处理力求符合历史发展和认识发展的规律，深入浅出，顺理成章．突出由算术到代数，由实验几何到论证几何，由综合几何到解析几何，由常量数学到变量数学等四个重大转折，着力采取措施引导学生合乎规律地实现这些转折，为此，强调数系运算律，集合逻辑，向量和逼近法分别在实现这四个转折中的作用．这样既遵循历史发展的规律，又突出了几个转折关头，缩短了认识过程，有利于学生掌握数学思想发展的脉络，提高数学教学的思想性．

这一套中学数学实验教材是教育部委托北京师范大学、中国科学院数学研究所、人民教育出版社、北京师范学院、北京景山学校等单位组成的领导小组组织“中学数学实验教材编写组”，根据美国加州大学伯克利分校数学系项武义教授的《关于中学实验数学教材的设想》编写的．第一版印出后，由教育部实验研究组和有关省市实验研究组指导在北京景山学校、北京师院附中、上海大同中学、天津南开中学、天津十六中学、广东省实验中学、华南师院附中、长春市实验中学等校试教过两遍，在这个基础上编写组吸收了实验学校老师们的经验和意见，修改成这一版《中学数学实验教材》，正式出版，内部发行，供中学选作实验教材，教师参考书或学生课外读物．在编写和修订过程中，项武义教授曾数次详细修改过原稿，提出过许多宝贵意见．

本教材虽然试用过两遍，但是实验基础仍然很不够，这次修改出版，目的是通过更大范围的实验研究，逐步形成另一套现代化而又适合我国国情的中学数学教科书．在实验过程中，我们热忱希望大家多提意见，以便进一步把它修改好．

中学数学实验教材编写组
一九八一年三月

目 录

第五章　数列和数列求和

第一节　数列的概念

一、数列的定义

首先让我们再来看一看人类最先认识的数——自然数：$1, 2, 3, 4, \ldots, n, n+1, \ldots$, 它们是一串依次排列的数，从 1 开始，逐次加 1 至无穷，这就是本节要讲的数列的一个原始的例子．下面再举几个数列的例子：

例 5.1　在自然数里，把被 3 整除，被 3 除余 1, 被 3 除余 2 的那些数，分别由小到大排列成数列.

解： 被 3 整除的数：$3, 3\times 2, 3\times 3, 3\times 4, \ldots, 3n, 3(n+1), \ldots$

被 3 除余 1 的数：$3+1, 3\times 2+1, 3\times 3+1, 3\times 4+1, \ldots, 3n+1, 3(n+1)+1, \ldots$

被 3 除余 2 的数：$3+2, 3\times 2+2, 3\times 3+2, 3\times 4+2, \ldots, 3n+2, 3(n+1)+2, \ldots$

例 5.2　某人考察，一对兔子经过一年的繁殖，总共可以有多少对兔子，假设兔子的生殖力是这样的：每一对兔子每一个月可以生一对兔子，并且兔子在生出两个月以后就具有生殖后代的能力，在各月份里观察到的兔子的对数如下表所示：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u_n	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

设 n 代表月份，u_n 代表该月内兔子对数．在第一个月里，第一对兔子生了一对后代，因此 $u_1 = 2$, 在这两对中，只有第一对能够在下一个月里生一对兔子，所以 $u_2 = 3$, 以后各月的兔子总对数除了上一个月的兔子总对数外，再加上其中 1 能够在这个月产生后代的兔子对数，即前一个月的兔子的总对数，因此以后各月的兔子总对数可以由公式：

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, \qquad (2 < n \leq 12)$$

计算出来.

例 5.3 试将 $\frac{1}{7}$ 准确到 $\frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^3}, \dots$ 的不足近似值和过剩近似值分别排成数列.

解: 将 $\frac{1}{7}$ 化成无限循环小数得到 $\frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$. 如果分别按去尾法和进一法舍取近似数, 就是说, 取 $0.\dot{1}4285\dot{7}$ 前 n 个数位上的数码而把它后面尾部数码都舍去, 这样得到的有限小数 u_n^- 叫做 $\frac{1}{7}$ 的准确到 $\frac{1}{10^n}$ 的不足近似值, 而把 $u_n^+ = u_n^- + \frac{1}{10^n}$ 叫做 $\frac{1}{7}$ 的准确到 $\frac{1}{10^n}$ 的过剩近似值.

由 $\frac{1}{7}$ 的准确到 $\frac{1}{10^n}$ 的不足近似值组成的数列是

$$0.1,\ 0.14,\ 0.142,\ 0.1428,\ 0.14285, \dots$$

由 $\frac{1}{7}$ 的准确到 $\frac{1}{10^n}$ 的过剩近似值组成的数列是

$$0.2,\ 0.15,\ 0.143,\ 0.1429,\ 0.14286, \dots$$

显然有:

$$\begin{aligned} 0.1 < 0.14 < 0.142 < 0.1428 < 0.14285 < \cdots < \frac{1}{7} \\ < \cdots < 0.14286 < 0.1429 < 0.143 < 0.15 < 0.2 \end{aligned}$$

并且

$$\left| u_n^- - \frac{1}{7} \right| < \frac{1}{10^n}, \qquad \left| u_n^+ - \frac{1}{7} \right| < \frac{1}{10^n}$$

现在我们可以给数列下个定义如下:

定义

一串依次排列的数 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 叫做数列.
数列中的数, 叫做数列的**项**, 用 a_n 表示, 每一项的位置序数 n 叫做该项的**指标**, 通常写在 a 的右下角, 故也叫**下标**. 数列用符号 $\{a_n,\ n = 1, 2, 3, \dots\}$ 表示, 或简写为 $\{a_n\}$.

依定义, 数列就是对每一个自然数 n 指定一项 a_n, 换言之, 数列就是自然数的函数.

通过前面的例子知道, 我们可以用以下几种方式给出一个数列:

1. 给出一个以指标 n 表示数列的任意一项 a_n 的公式，这公式叫做数列的**通项公式**. 例如在例 5.1 中，数列的通项公式分别是

$$a_n = 3n, \quad b_n = 3n + 1, \quad c_n = 3n + 2 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

2. 有的数列从某一项开始能够用在它前面的 k 个项表示出来. 这个表达式，叫做**递归方程**. 例如例 5.2 中的数列，由两个初始值 $u_1 = 2, u_2 = 3$ 和一个递归方程给出：

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, \qquad (n = 3, 4, 5, \ldots, 12)$$

3. 有的数列直接用语言描述它的 a_n 项，用来作一般性的讨论，如例 5.3 中的数列.

二、数列的种类及其定义

(一) 有穷数列和无穷数列

有末项的数列叫做**有穷数列**，无末项的数列叫做**无穷数列**. 如例 5.2 的数列是有穷数列，例 5.1, 例 5.3 的数列是无穷数列.

(二) 单调数列和摆动数列

数列 $\{a_n\}$ 中的项，若满足不等式

- $a_{n+1} \geq a_n, \quad (n = 1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots)$, 那么数列叫做**不减的**;
- 如果 $a_{n+1} > a_n, \quad (n = 1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots)$，那么数列叫做**递增的**;
- 如果 $a_{n+1} = a_n, \quad (n = 1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots)$，那么数列叫做**常数列**;
- 如果 $a_{n+1} \leq a_n, \quad (n = 1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots)$，那么数列叫做**不增的**;
- 如果 $a_{n+1} < a_n, \quad (n = 1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots)$，那么数列叫**递减的**.

以上各种数列统称为**单调数列**.

数列 $\{a_n\}$ 中的项，如果总有一些项大于前面的项，又总有一些项小于前面的项，那么数列叫做**摆动数列**.

例如：以下数列都是摆动数列

- 数列 $\{(-1)^{n+1}\}$： $1, -1, 1, -1, \ldots$

- 数列 $a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & n \text{ 是奇数} \\ \dfrac{n}{n+1}, & n \text{ 是偶数} \end{cases}$：$1, \dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{6}{7}, \cdots$
- 数列 $\{(-1)^n n\}$：$-1, 2, -3, 4, \ldots$

（三）有界数列和无界数列

有穷数列一定有最大项和最小项，无穷数列就不一定有此性质．无穷数列可分成有界数列和无界数列．

定义

任何一项的绝对值都小于某一正数，即 $|a_n| < M, \quad (M > 0)$ 的数列叫做**有界数列**；没有这样正数存在的数列叫做**无界数列**．

例如，数列 $\{(-1)^n\}$ 和 $\{n + (-1)^n n\}$ 都是无界数列．

数列 $\left\{(-1)^{n+1}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\right\}$ 是有界数列，因为

$$|a_n| = \left|(-1)^{n+1}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right| = 1 + \frac{1}{n} \leq 2, \quad (n = 1, 2, 3, 4, \ldots)$$

若数列递增，并且所有 $a_n \leq M$（定数），则称**数列有上界** M．

推论 1

递增有上界数列一定是有界数列．

若数列递减，并且所有 $a_n \geq M$（定数），则称**数列有下界** M．

推论 2

递减有下界数列一定是有界数列．

推论 3

有穷数列一定是有界数列．

图示数列的最简单的方法是直接把点 $a_1, a_2, a_3, \ldots$ 标在数轴上，这种图象可以清楚地表示数列变化的状态和趋势．图 5.1 是几个数列的图象．

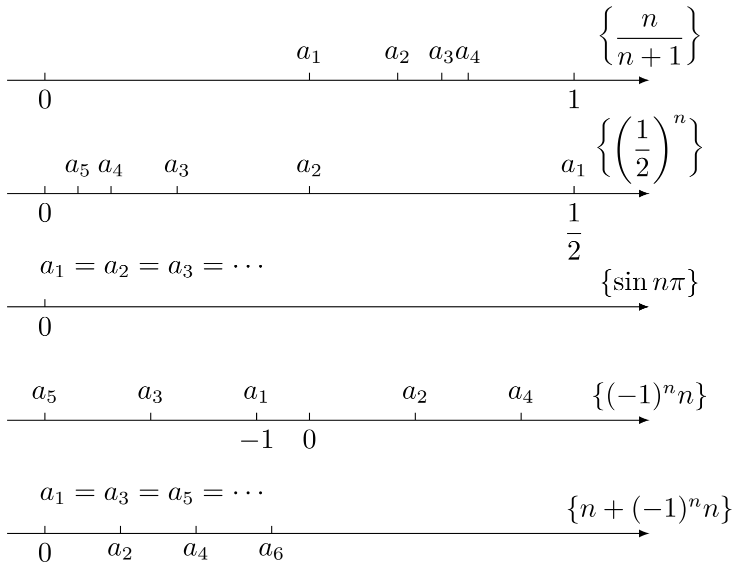


图 5.1

习题 5.1

1. 自然数里的质数由小到大排成一个数列，试依次写出它的前 10 个质数.

2. 分别用通项公式表示由小到大排列着的偶数数列和奇数数列.

3. 试写出下列各数列的通项公式

(a) $1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ \ldots$

(b) $1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}-\frac{1}{4},\ \ldots$

(c) $\frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\ \frac{6}{5},\ \ldots$

(d) $\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4},\ \frac{3\cdot 5}{4\cdot 6},\ \frac{5\cdot 7}{6\cdot 8},\ \frac{7\cdot 9}{8\cdot 10},\ \ldots$

(e) $\frac{10}{3},\ \frac{20}{9},\ \frac{30}{27},\ \frac{40}{81},\ \ldots$

(f) $1,\ 1\cdot 2,\ 1\cdot 2\cdot 3,\ 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4,\ \ldots$

(g) $-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \ldots$

(h) $1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \ldots$

(i) $\frac{1}{1\cdot 2},\ -\frac{1}{3\cdot 4},\ \frac{1}{5\cdot 6},\ -\frac{1}{7\cdot 8},\ \ldots$

4. 根据下列各数列的通项公式，写出它的前 10 项.

(a) $a_n = \cos n\pi, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$

(b) $a_n = \dfrac{2+(-1)^n}{n}, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$

(c) $f(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & n \text{ 为奇数}\\ \dfrac{n}{n+1}, & n \text{ 为偶数}\end{cases}$

5. 试将所有整数排成一个数列，并且用通项公式表示出来.

6. 数列的通项公式是

$$f(n)=\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \quad (n=1,2,3,\ldots)$$

(a) 求 $f(1)$, $f(2)$;

(b) 求证 $f(n)=f(n-1)+f(n-2)$.

7. 判断下列各数列的类型并图示它前 5 项.

(a) $a_n=1-2n, \quad (n=1,2,3,\ldots,10)$;

(b) $a_n=\dfrac{2n+1}{n}, \quad (n=1,2,3,\ldots)$;

(c) $a_n=\dfrac{(-1)^n2^n}{4}, \quad (n=1,2,\ldots,5)$;

(d) $a_n=\dfrac{(-1)^{n+1}n}{n+1}, \quad (n=1,2,3,\ldots)$;

(e) $\sqrt{2}$ 的准确到 1, 0.1, 0.01, ... 的过剩近似值.

(f) $a_n=\dfrac{2+(-1)^n}{n}, \quad (n=1,2,3,\ldots)$;

(g) $a_n=(1)^n\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^2, \quad (n=1,2,3,\ldots)$;

(h) $a_n=\dfrac{2n^2-3}{n}, \quad (n=1,2,3,\ldots)$;

(i) $a_n=\dfrac{-2n^2-3}{n}, \quad (n=1,2,3,\ldots)$;

(j) $a_n=\tan\dfrac{n\pi}{3}, \quad (n=1,2,3,\ldots)$.

8. 数列的通项公式是

$$a_n=2n^2-3, \quad (n=1,2,3,\ldots)$$

求数列的第 5 项，下面三个数：84788、32352 和 72197 中，哪个数是数列中的项，是第几项?

第二节　数列求和举例

在本节，我们要复习第一册已经学习过的两个简单而重要的数列，即等差数列和等比数列，同时通过例题来说明几种常用的求数列前 n 项和的方法.

如果一个数列，从第二项起，每一项减去它的前面的一项所得的差都等于同一个常数，那么这个数列叫做**等差数列**，这个常数叫做等差数列的**公差**，用符号 d 表示. 等差数列的通项公式是

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

它的前 n 项求和公式是

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

或

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$$

我们已在第一册给出上面求和公式的推导过程，现在建议读者独立地把它们推导出来，在通项公式与求和公式中共包含了五个数量：a_1，d，n，a_n 和 S_n. 如果问题给出了其中三个数量，那么其余两个数量便可由它们解出来.

例 5.4 在数轴上有两个点 $A(4.5)$ 和 $B(12.5)$, 在其间插入四个等间隔的点，求这些点的坐标.

解： 在 A 和 B 两点之间插入四个等间隔的点后，这六个点的对应坐标成等差数列，

$\because \quad a_1 = 4.5, \quad a_6 = 12.5, \quad n = 6$

$\therefore \quad 12.5 = 4.5 + (6-1)d$，解得：$d = 1.6$.

所求四个点的坐标分别是 6.1，7.7，9.3，10.9.

定义

给出两个数，其间插入一个数，使成等差数列，被插入的数叫做这二数的**等差中项**.

推论

若 a, b, c 三个数成等差数列，则等差中项

$$b = \frac{a+c}{2}$$

事实上，依定义有

$$b - a = c - b$$

移项，得

$$2b = a + c$$

即

$$b = \frac{a+c}{2}$$

例 5.5 在甲地有 48 根电杆，从离甲地 1000 米的地方树立第一根电杆，以后每隔 15 米树立一根电杆，载重汽车每次只能拖运三根电杆，问由一辆汽车去完成任务至少需要行驶多少公里?

解: 汽车需运电杆 $48 \div 3 = 16$ 次才能完成任务，所以，$n = 16$. 设 a_n 为第 n 次拖运电杆再返回原地所行驶的路程，依题意 $\{a_n\}$ 是等差数列，且知

$$a1 = 2060, \qquad d = 90, \qquad n = 16$$

因此:

$$\begin{aligned} S_n &= na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d \\ &= 16 \times 2060 + \frac{16 \times 15}{2} \times 90 \\ &= 43760(\text{米}) = 43.76(\text{公里}) \end{aligned}$$

答: 汽车需行驶 43.76 公里，才能完成任务.

如果一个数列，从第二项起，每一项和前面一项的比都等于一个常数，那么，这个数列叫做**等比数列**. 这个常数叫做等比数列的**公比**，通常用字母 q 表示. 换言之，等比数列是满足递归关系 $a_{n+1} = qa_n, \quad (n = 1, 2, \ldots)$ 的数列.

显然，当 $q > 0$ 时，等比数列是单调的. 若 $q > 1$，等比数列是递增的；若 $0 < q < 1$，等比数列是递减的；若 $q = 1$，等比数列是常数列.

当 $q < 0$ 时，等比数列是摆动的.

又当 $|q| \le 1$ 时，等比数列是有界的，当 $|q| > 1$ 时，等比数列是无界的.

我们已经知道等比数列的通项公式是

$$a_n = a_1 q^{n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

它前 n 项和公式是

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1}$$

若 $q<1$, 上式改写为

$$S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}$$

显然，若 $q=1$, 则 $S_n=na_1$.

将 $a_n=a_1q^{n-1}$ 代入求和公式中，得到

$$S_n=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$$

定义

任给两个数，在其间插入一个数，使成等比数列，则所插入的数叫做所给两数的**等比中项**.

推论

若 a,b,c 三个数成等比数列，则等比中项 $b=\pm\sqrt{ac}$，（或 $b^2=ac$）.

事实上，依定义有

$$\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$$

因此：$b^2=ac$，或者 $b=\pm\sqrt{ac}$.

例 5.6 在 81 和 1 之间，插入三个实数，使它们和这两个数成等比数列.

解： 在 81 和 1 之间，插入三个数后，1 就成为等比数列的第 5 项，因此

$$a_5=81q^4=1$$
$$(9q^2+1)(9q^2-1)=0$$

$\because$ q 为实数，$\therefore$ $9q^2+1\neq 0$，由此得：

$$9q^2-1=0 \quad\Rightarrow\quad q=\pm\frac{1}{3}$$

故所求三个实数为 $27,9,3$ 或 $-27,9,-3$.

例 5.7 已知一个正三角形，边长为 a，以此正三角形的高线为边做第二个三角形，依此类推，求前 10 个正三角形的面积的和.

解： 如图 5.2, 设第 k 个这样的正三角形的边长为 a_k, 高为 h_k, 面积为 A_k, $(k=1,2,\ldots,10)$, 于是

$$a_1=a,\qquad h_1=\frac{\sqrt{3}}{2}a,\qquad A_1=\frac{1}{2}a_1h_1=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

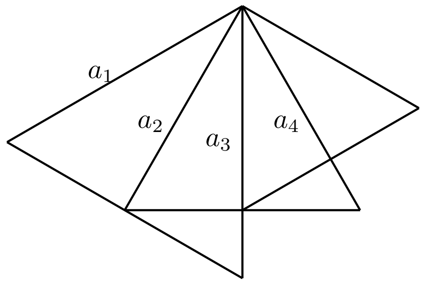


图 5.2

因为所有正三角形都相似，故对应边与对应高线成比例，即

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{h_{k+1}}{h_k}$$

又依三角形的作法，知

$$a_{k+1}=h_k, \qquad (k=1,2,3,\ldots,10)$$

$\therefore \quad \dfrac{a_{k+1}}{a_k}=\dfrac{h_{k+1}}{a_{k+1}}=\dfrac{h_1}{a_1}=\dfrac{\sqrt{3}}{2},$

根据相似三角形面积之比等于对应边平方之比，故

$$q=\frac{A_{k+1}}{A_k}=\frac{a_{k+1}^2}{a_k^2}=\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$$

因此，前 10 个正三角形面积之和

$$S_{10}=\frac{\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2\left[1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^{10}\right]}{1-\dfrac{3}{4}}=\sqrt{3}a^2\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^{10}\right]$$

为书写简便起见，我们用符号 $\sum\limits_{i=m}^{n}a_i$ 表示数列 $\{a_i\}$ 的相邻的一些项的和. 整数 i 在确定了的界限内变动，在 Σ 的下面和上面的数字分别表示求和的起止项的序号，符号“Σ”读作 sigma．例如

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=a_1+a_2+\cdots+a_n$$

$$\sum_{i=k}^{n}a_i=a_k+a_{k+1}+\cdots+a_n$$

在许多数学问题里，我们需要求出以下标 i 的 k 次多项式 $f(i)$ 为通项的前 n 项和的公式：

$$S_k(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i) = f(0) + f(1) + \cdots + f(n-1)$$

这里的指标集是非负整数集.

数列 $\{S_k(n)\}$ 称为数列 $\{f(n)\}$ 的和数列，即

$$\begin{aligned}
&S_k(1) = f(0)\\
&S_k(2) = f(0) + f(1)\\
&S_k(3) = f(0) + f(1) + f(2)\\
&\quad\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

为讨论方便起见，规定 $S_k(0) = 0$, 于是和数列 $\{S_k(n)\}$ 满足下面两个性质：

1. $S_k(0) = 0$
2. $S_k(n+1) - S_k(n) = f(n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$

我们来考虑这样一个多项式，它在 k 个点 $0, 1, 2, \ldots, k-1$ 处与横坐标轴相交，又通过 $(k, 1)$ 点，显然这个关于 n 的多项式为

$$q_k(n) = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

下面来求数列 $\{q_k(n)\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ 的前 n 项和的公式.

例 5.8 设 $q_k(n) = \dfrac{1}{k!}n(n-1)\cdots(n-k+1)$，则前 n 项的和

$$\begin{aligned}
S_k(n) &= \sum_{i=0}^{n-1} q_k(i) = q_k(0) + q_k(1) + \cdots + q_k(n-1)\\
&= \frac{1}{(k+1)!} n(n-1)\cdots(n-k)
\end{aligned}$$

换言之，其和是这样一个多项式，它在 $0, 1, 2, \ldots, (k-1)$，共 k 个点处与坐标轴相交且通过 $((k+1), 1)$ 点.

解： 设 $S_k(n)$ 是一个 n 的 $k+1$ 次多项式，且让 $S_k(n)$ 满足条件：

$$S_k(0) = 0 \tag{5.1}$$

$$S_k(n+1) - S_k(n) = q_k(n) \tag{5.2}$$

由于 $q_k(0)=q_k(1)=\cdots=q_k(k-1)=0$, 且 $q_k(k)=1$, 于是

$$\begin{aligned} S_k(n) &= q_k(0)+q_k(1)+\cdots+q_k(n-1) \\ &= \underbrace{0+0+\cdots+0}_{k\text{ 项}}+1+(k+1)+ \\ &\quad \cdots+\frac{1}{k!}(n-1)(n-2)\cdots(n-k) \end{aligned} \tag{5.3}$$

由等式 (5.1) 和 (5.3) 得到

$$S_k(0)=S_k(1)=\cdots=S_k(k)=0 \tag{5.4}$$

$$S_k(k+1)=1 \tag{5.5}$$

从而知道 $S_k(n)$ 有下面 $k+1$ 个因式，即

$$S_k(n)=Cn(n-1)(n-2)\cdots(n-k)$$

这里 C 是未定的常数因子.

常数因子 C 可由 (5.5) 确定,

$$S_k(k+1)=C(k+1)k(k-1)\cdots 2\cdot 1=1$$

$\therefore \quad C=\dfrac{1}{(k+1)!}$

此处记 $(k+1)!=1\cdot 2\cdot 3\cdots k(k+1)$.

因此,

$$\begin{aligned} S_k(n) &= \sum_{i=0}^{n-1} q_k(i)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{k!}i(i-1)\cdots(i-k+1) \\ &= \frac{1}{(k+1)!}n(n-1)\cdots(n-k) \end{aligned}$$

我们也常用这样一种想法来求数列前 n 项和的公式，即如果数列的通项能分解成另一个数列相邻两项的差:

$f(n)=F(n+1)-F(n)$, $n=0,1,2,\ldots$ 时，那么前 n 项的和

$$\begin{aligned} S(n) &= \sum_{i=0}^{n-1} f(i)=\sum_{i=0}^{n-1}[F(i+1)-F(i)] \\ &= [F(1)-F(0)]+[F(2)-F(1)]+\cdots+[F(n)-F(n-1)] \\ &= F(n)-F(0) \end{aligned}$$

例 5.9 求 $S(n)=\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ 的和.

解： $\because\quad \frac{1}{(3i-2)(3i+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3i-2}-\frac{1}{3i+1}\right)$

当 $i=1,2,3,\ldots,n$ 时，有

$$\frac{1}{1\cdot 4}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)$$
$$\frac{1}{4\cdot 7}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)$$
$$\cdots\cdots$$
$$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)$$

因此：

$$\begin{aligned} S(n)&=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(3i-2)(3i+1)}\\ &=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3n+1}\right)\\ &=\frac{n}{3n+1} \end{aligned}$$

如果数列的通项是以其它形式的 k 次多项式给出的，我们可以用待定系数法把它变形为例 5.8 的形式.

例 5.10 求 $S_2(n+1)=0^2+1^2+2^2+\cdots+n^2$ 的和.

解： 设 $i^2=\lambda\frac{i(i-1)}{2!}+\mu i$，$(i=0,1,2,\ldots,n)$，由待定系数法求得：

$$\lambda=2,\qquad \mu=1$$

于是：

$$S_2(n+1)=\sum_{i=0}^{n}i^2=2\sum_{i=0}^{n}\frac{i(i-1)}{2!}+\sum_{i=0}^{n}i$$

应用例 5.8 的结果，得到：

$$\begin{aligned} S_2(n+1)&=2\frac{(n+1)n(n-1)}{3!}+\frac{n(n+1)}{2}\\ &=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

例 5.11 设 $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ 成等差数列，求 $S_n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$ 的和.

解:

$$S_n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n \tag{5.6}$$

由于 (5.6) 式中的系数成等差数列，文字 $1, x, x^2, \ldots, x^n$ 成等比数列，利用等差数列的任意相邻的三项有递归关系：

$$a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 0, \qquad n \geq 2 \tag{5.7}$$

知道 (5.6) 相邻的三项下面等式成立：

$$a_nx^n - 2x(a_{n-1}x^{n-1}) + x^2(a_{n-2}x^{n-2}) = 0, \qquad n \geq 2 \tag{5.8}$$

让 (5.6) 的两边分别乘以 $1, 2x, x^2$, 然后相加，得

$$\begin{aligned} S_n &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \\ -2xS_n &= -2a_0x - 2a_1x^2 - 2a_2x^3 - \cdots - 2a_{n-1}x^n - 2a_nx^{n+1} \\ x^2S_n &= a_0x^2 + a_1x^3 + a_2x^4 + \cdots + a_{n-1}x^{n+1} + a_nx^{n+2} \end{aligned}$$

所以：

$$(1-x)^2S_n = a_0 + (a_1 - 2a_0)x + 0 + \cdots + 0 + (a_{n-1} - 2a_n)x^{n+1} + a_nx^{n+2}$$

由 (5.8) 可知在上面等式中，其余各项为 0, 若 $x = 1$, 两边除以 $(1-x)^2$, 得

$$S_n = \frac{a_0 + (a_1 - 2a_0)x + 0 + \cdots + 0 + (a_{n-1} - 2a_n)x^{n+1} + a_nx^{n+2}}{(1-x)^2}$$

若 $x = 1$，原题就变成求等差数列前 n 项的和，这时，

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

例 5.12 数列 $\{v_n\}$ 由下面递归定义给出：

$$v_{n+1} = 3v_n - 2v_{n-1}, \quad v_0 = 2, \quad v_1 = 3, \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

求：v_n，$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} v_i$.

解： 由 $v_{n+1}=3v_n-2v_{n-1}$ 容易看出

$$v_{n+1}-v_n=2(v_n-v_{n-1})$$

设 $q_n=v_{n+1}-v_n$, $q_{n-1}=v_n-v_{n-1}$, 则 $q_n=2q_{n-1}$, $(n=1,2,\dots)$, 换言之，$\{q_n\}$ 是公比为 2 的等比数列，

$$\therefore\quad q_n=2q_{n-1}=2^2q_{n-2}=\cdots=2^n(v_1-v_0)=2^n(3-2)=2^n$$

从而：

$$\begin{aligned}q_{n-1}&=v_n-v_{n-1}=2^{n-1}\\ v_n&=(v_n-v_{n-1})+(v_{n-1}-v_{n-2})+\cdots+(v_1-v_0)+v_0\\ &=2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2+1+2\\ &=(2^n-1)+2=2^n+1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_n=\sum_{i=0}^{n-1}v_i&=\sum_{i=0}^{n-1}(2^i+1)\\ &=\sum_{i=0}^{n-1}2^i+\sum_{i=0}^{n-1}1\\ &=(2^n-1)+n=2^n+(n-1)\end{aligned}$$

习题 5.2

1. 在等差数列中

   (a) 若 $a_5=100$, $d=\dfrac{1}{2}$, 求 a_{100}；

   (b) 若 $a_3=-4$, $a_5=2$, 求 a_{10}；

   (c) 若 $a_p=q$, $a_q=p$, 求 a_{p+q}；

   (d) 用 a_s, a_1, d 表示 a_n.

2. 在 7 和 35 之间插入 6 个数使它们和已给两数组成等差数列.

3. 在 8 和 32 之间应插入多少个等差中项，可使等差中项中的前两个数的和与后两个数的和之比为 $7:25$.

4. 求证含有奇数个项的等差数列里，第一项，中间项，最后项也成等差数列.

5. 在三位数里有几个是 6 的倍数，求它们的和.

6. 求 $S_n = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \cdots + (-1)^{n+1}n$ 的和.

7. 一等差数列前 n 项之和为 $S_n = 5n^2 + 3n$, 求 a_n.

8. 在等差数列中

   (a) 已知 $d = 2$, $n = 15$, $a_{15} = -10$, 求 S_{15}；

   (b) 已知 a_n, S_n 和 a_1，求 d;

   (c) 已知 d, S_n 和 a_1，求 n;

   (d) 已知 a_n, S_n 和 d, 求 a_1.

9. 求等差数列 $2\frac{1}{2}, 1\frac{5}{6}, 1\frac{1}{6}, \ldots$ 的第 n 项，并求这个等差级数的最大和.

10. 在等差数列中，若 $S_1 = a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1} = 44$, $S_2 = a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n-2} = 33$, 求 a_n.

11. 某化工厂为了加固烟囱，要在烟囱上打 32 道铁箍，且使每两道铁箍之间的距离相等，已知最上面一道铁箍处烟囱的外直径为 1.5m，最下面一道箍处烟囱的外直径为 3.5m. 求全部铁箍用料的总长.

12. 若 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 成等差数列，求证:
$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$$

13. 求下列各等比数列的通项公式

   (a) $-1,\ -2,\ -4,\ \ldots$

   (b) $\frac{2}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{8},\ \ldots$

   (c) $\sqrt{2},\ 1,\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ \ldots$

   (d) $-1,\ 1,\ -1,\ \ldots$

   (e) $1,\ -\sqrt{\frac{1}{3}},\ \frac{1}{3},\ \ldots$

14. 在等比数列里

   (a) $a_1 = 36$, $a_5 = 2\frac{1}{4}$，求 q 和 S_5；

   (b) $a_n = 1296$, $q = 6$, $S_n = 625$，求 a_0 和 a_1；

   (c) $a_1 = 3$, $q = \frac{1}{3}$, $n = 8$，求 S_8；

   (d) $S_5 = 242$, $q = 3$，求 a_5.

15. 在等比数列里，若 $a_7 - a_5 = a_6 + a_5 = 48$, 求 a_1, q 和 S_{10}.

16. 在 160 和 5 之间插入 4 个数，使这 6 个数成等比数列，求这 4 个数.

17. 求证若 $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ $(a_i > 0, i = 1, 2, 3, \ldots)$ 成等比数列，则以下数列均成等比数列：

    (a) $a_1,\ a_3,\ \ldots, a_{2n-1},\ \ldots$;

    (b) $ka_1,\ ka_3,\ \ldots, ka_{2n-1},\ \ldots$;

    (c) $\dfrac{1}{a_1},\ \dfrac{1}{a_2},\ \ldots, \dfrac{1}{a_n},\ \ldots$;

    (d) $a_1^2,\ a_2^2,\ \ldots, a_n^2,\ \ldots$;

    (e) $\sqrt{a_1},\ \sqrt{a_2},\ \ldots, \sqrt{a_n},\ \ldots$.

18. 从盛满 20 升纯酒精的容器里倒出一升，然后用水填满，再倒出一升混合溶液，用水填满，这样继续进行，一共倒三次，这时容器里有纯酒精多少?

19. 甲厂产量是乙厂产量的 40.96%, 甲厂产品每年增长的百分率比乙厂产品每年增长的百分率多 30%, 若第四年甲厂产量和乙厂产量相同，求甲厂每年产品平均增长的百分率是多少?

20. 一个机器制造厂的原订的三年计划，每年比上一年增产的机器台数相同，但到了第三年，由于实际需要，须比原计划多生产 1000 台，那么每年比上一年的增长百分数就相同，而且第三年的台数恰为原计划总台数的一半，问实际上每年生产了多少台？每年比上一年增长的百分数是多少?

21. 某农机厂去年十月份生产拖拉机 1000 台，这样连同一月至九月的产量恰好完成全年生产任务，为加速农业机械化，全厂在年底前又生产了 2310 台，于是就超额完成全年计划的 21%. 求

    (a) 今年十一，十二月份每月平均增长率；

    (b) 今年原计划生产量.

22. 若一个三角形的三个角成等差数列，而它的边成等比数列，求这个三角形的形状.

23. 已知一个正三角形边长为 a, 以此正三角形的高线为边做第二个三角形，依此类推，求前 10 个正三角形的周长的和.

24. 求 $(x+y)+(x^2+xy+y^2)+(x^3+x^2y+xy^2+y^3)+\cdots$ 的前 n 项的和.

25. 求 $7+77+777+\cdots$ 的前 n 项的和.

26. 设等比数列 $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ 的公比是 q.

    求证：$a_1 a_2 \cdots a_n = a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}$

27. 求下列各数列的和

(a) $\sum_{i=0}^{n-1} i^3$

(b) $\sum_{i=0}^{n-1} i^4$

(c) $\sum_{i=0}^{n-1}(i-1)i$

(d) $\sum_{i=0}^{n-1}(2i-1)^2$

(e) $\sum_{i=0}^{n-1} \frac{2i+1}{i^2\cdot(i+1)^2}$

28. 数列 $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ 中的 a_0, a_1 为已知，且 $a_n = \dfrac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2}$，$n = 2, 3, 4, \ldots$，求 a_n.

29. 数列 $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ 中，$a_1 = 2$, 且 $a_n = 3a_{n-1} + 1$ $(n = 2, 3, 4, \ldots)$, 求 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

30. 已知数列 $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ 的相邻两项 a_n, a_{n+1} 是方程 $x^2 + 3nx + c_n = 0$, $(n = 1, 2, \ldots)$ 的两根，当 $a_1 = 1$ 时，求 $\sum_{n=1}^{2p} c_n$.

31. n 是非负的整数，试问同时满足下面三个不等式的整数对 (x, y) 共有多少组？

$$y \geq x, \qquad y \leq 3x, \qquad y \leq n$$

32. 三角形三条边的长分别是 ℓ, m 和 n，这里 ℓ，m, n 都是正整数，且 $\ell \leq m \leq n$，对于每一个给定的 n（取 $n = 1, 2, 3, \ldots$），所说的不同形状的三角形有多少个？求出三角形的个数用 n 表示的一般公式.

33. 数列 $\{a_n\}$ 是：

$$a_1 = \frac{1}{3}, \qquad \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 2n + 3 \quad (n = 1, 2, 3, 4, \ldots)$$

(a) 用 3 的式子表示一般项；

(b) 用 n 的式子表示前 n 项的和 $\sum_{k=1}^{n} a_k$

34. 若数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，求证：

$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}a_n} = \frac{n-1}{a_1a_n}$$

第三节　数学归纳法

现在我们研究在数学中常用的一种证明方法——数学归纳法.

我们常常从一些特殊事实归纳出一般结论，这种推理方法就是通常说的归纳法，用归纳法可以帮助我们从特殊情况发现一般规律，但如果归纳时所根据的特殊事实没有完全包括结论中所涉及到的所有情况，结论可能不正确，这就是说：命题可能对于一系列的特别情形是对的，但是一般并不正确.

例如，已知函数 $f(n)=(n^2-5n+5)^2$，则

$$f(1)=1,\qquad f(2)=1,\qquad f(3)=1,\qquad f(4)=1$$

如果我们由此得出结论 $f(n)=(n^2-5n+5)^2=1$ （n 是任何自然数），那就是错误的，事实上，$f(5)=25$, 不等于 1.

为了克服这种归纳法的不完全性，我们常采用下述的数学归纳法来证明一个关于自然数 n 的命题.

数学归纳法的证明逻辑是：

对于一个依赖于自然数 $n=1,2,3,\ldots$ 的命题 $p(n)$, 如果

1. 当 $n=1$ 时，命题 $p(1)$ 正确；
2. 假设 $n=k$, $(k\geq 1)$ 时，命题 $p(k)$ 正确，可以推出 $n=k+1$ 时，命题 $p(k+1)$ 正确，那么，命题 $p(n)$ 对于一切自然数 $n=1,2,3,\ldots$ 都正确.

这个方法的根据，就是自然数的基本性质：

自然数的基本性质

令 A 是自然数集 $\mathbb{N}$ 中具有下面性质的子集：

1. $1\in A$;
2. 若 $n\in A$，则 $n+1\in A$

那么：$A=\mathbb{N}$.

现在，我们来证明数学归纳法的正确性，设使命题 $p(n)$ 成立的自然数是自然数集 $\mathbb{N}$ 中的子集 A, 即 $A\subseteq\mathbb{N}$.

根据数学归纳法中的 1，$1\in A$; 再根据数学归纳法中的 2，若 $n\in A$，则 $n+1\in A$. 于是，根据自然数的基本性质，得到

$$A=\mathbb{N}$$

因此，命题 $p(n)$ 对于一切自然数成立.

下面举一些例子说明这个方法的应用.

例 5.13 求证：

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2} \tag{5.9}$$

分析： 我们注意到和式：$1+2+3+\cdots+n$ 可以递归地定义为

$$\begin{cases} S(1)=1 \\ S(n)=S(n-1)+n, \qquad n=2,3,\ldots \end{cases}$$

上面的等式为应用数学归纳法去证明打下了基础.

证明：

1. 当 $n=1$ 时，$\because \quad S(1)=1, \quad \dfrac{1(1+1)}{2}=1,$

   $\therefore$　等式 (5.9) 成立.

2. 假设 $n=k$, $(k\geq 1)$ 时，等式 (5.9) 成立，即有

   $$S(k)=1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

   那么，当 $n=k+1$ 时，

   $$S(k+1)=1+2+3+\cdots+k+(k+1)=S(k)+(k+1)$$

   应用数学归纳法假设于上面的等式，得到

   $$\begin{aligned} S(k+1)&=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=(k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right) \\ &=\frac{(k+1)(k+2)}{2} \\ &=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2} \end{aligned}$$

   即等式 (5.9) 仍成立.

   由所证 1 和 2 两步知：

   $$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

   对于一切自然数 n 都成立.

从上例明显地看出，用数学归纳法证明一个命题的步骤是：

1. 验证命题 $p(n)$, 当 n 取第一个值 $n=1$ 时, $p(1)$ 正确. 这一条是数学归纳法的基础.

2. 假设当 $n=k$, $(k \geq 1)$ 时, 命题 $p(k)$ 正确, 证明当 $n=k+1$ 时, 命题 $p(k+1)$ 也正确. 这一条是说性质 $p(n)$ 具有遗传性, 可以一代一代地传下去. 完成了这两步以后, 就可以断定命题 $p(n)$ 对于一切自然数 n 都正确. 因为首先证明 $p(1)$ 正确, 另外由 $p(1)$ 正确推出 $p(2)$ 正确, 由 $p(2)$ 正确推出了 $p(3)$ 正确, 依次下去, 便可知对于一切自然数 n, $p(n)$ 正确.

有时不一定从 1 开始, 也就是数学归纳法里两句话, 可以改成

1. 当 $n=k_0$ 时, 命题 $p(k_0)$ 正确.

2. 从假设 $n=k$, $(k \geq k_0)$ 时, 这个命题 $p(k)$ 正确, 可以推出当 $n=k+1$ 时, 这个命题 $p(k+1)$ 也正确, 那么 $p(n)$ 对于 $n \geq k_0$ 都正确.

例 5.14 假设我们只有面额是 3 分和 5 分的两种邮票, 试证明可以用面额是 3 分和 5 分的两种邮票去付多于 7 分的任意一笔邮资.

如果我们对于每一种情形逐一地去证明, 譬如, 用 3 分和 5 分的邮票各一张可以付 8 分的邮资; 用 3 分的邮票 3 张可以付 9 分的邮资, 用 5 分的邮票 2 张可以付 10 分的邮资等等, 照这样一个一个地验证下去, 不是有成效的, 因为有无数多种的情况需要去验证, 让我们用数学归纳法来证明.

证明:

1. 我们对于 8 分的邮资, 可以用 3 分和 5 分的邮票各一张去付, 因此, 当 $n=8$ 时, 命题正确.

2. 假设用 3 分邮票和 5 分的邮票可以付 k 分的邮资, 我们要证明这两种邮票也可以用来付 $k+1$ 分的邮资.

   因为 $k \geq 8$, 有两种可能的情形: k 分的邮资至少要用一张 5 分的邮票去付; k 分的邮资完全可以用 3 分的邮票去付.

   在第一种情形下, 要付 $k+1$ 分的邮资, 只要原来的某一张 5 分的邮票换以两张 3 分的邮票就可以了;

   在第二种情形下, 3 分的邮票至少要有 3 张. 要付 $k+1$ 分的邮资, 只要把原来的三张 3 分邮票换以两张 5 分的邮票就可以了.

   根据 1 和 2, 可以断定 n 为任何大于 7 的自然数, 命题正确.

数学归纳法这两步骤，是缺一不可的，从求函数 $f(n)=(n^2-5n+5)^2$ 的值可知，缺少了步骤 2 就得出不正确的结论，同样缺少了步骤 1 也可能得出不正确的结论．例如，由于没有验证数学归纳法中的第一条，而得出下面荒谬的结论：

$$2+4+6+\cdots+2n=n^2+n+1$$

我们在下面只证明数学归纳法中的 2.

假设 $n=k$, $(k>1)$, 等式 $2+4+6+\cdots+2k=k^2+k+1$ 成立，那么，当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}2+4+6+\cdots+2k+2(k+1)&=(2+4+6+\cdots+2k)+2(k+1)\\&=k^2+k+1+2(k+1)\quad(\text{数学归纳法假设})\\&=(k+1)^2+(k+1)+1\end{aligned}$$

由此知，当 $n=k+1$ 时，等式仍成立．如果仅从数学归纳法中的 2 就得出等式对于任何自然数都成立，那是错误的.

事实上，当 $n=1$ 时，等式左边 $=2$, 右边 $=12+1+1=3$，因此，上面的等式是错误的.

例 5.15 证明：

$$S(n)=1-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$$

证明：

1. 当 $n=1$ 时，$S(1)=1$，又 $(-1)^0\dfrac{1(1+1)}{2}=1$，所以等式成立.
2. 假设 $n=k$ 时，有

$$S(k)=1-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{k-1}k^2=(-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2}$$

那么，当 $n=k+1$ 时，有

$$\begin{aligned}S(k+1)=S(k)+(-1)^k(k+1)^2&=(-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2}+(-1)^k(k+1)^2\\&=(-1)^k(k+1)\left[-\frac{k}{2}+(k+1)\right]\\&=(-1)^k\frac{(k+1)(k+2)}{2}\\&=(-1)^k\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}\end{aligned}$$

由 1 和 2 知，等式对于一切自然数 n 都成立.

例 5.16 证明:

$$\begin{aligned}S(n) &= \sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+2\beta) + \cdots + \sin(a+(n-1)\beta)\\ &= \frac{\sin\dfrac{n\beta}{2}}{\sin\dfrac{\beta}{2}}\sin\left(\alpha + \frac{n-1}{2}\beta\right)\end{aligned}$$

证明:

1. 当 $n=1$ 时,

$$\because \quad 左边 = S(1) = \sin\alpha, \qquad 右边 = \frac{\sin\dfrac{\beta}{2}}{\sin\dfrac{\beta}{2}}\sin(\alpha + 0\cdot\beta) = \sin\alpha$$

$\therefore$ 　等式成立.

2. 假设 $n=k$ 时,

$$\begin{aligned}S(k) &= \sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+2\beta) + \cdots + \sin(\alpha+(k-1)\beta)\\ &= \frac{\sin\dfrac{k\beta}{2}}{\sin\dfrac{\beta}{2}}\sin\left(a + \frac{k-1}{2}\beta\right)\end{aligned}$$

成立，那么:

$$\begin{aligned}S(k+1) &= S(k) + \sin(\alpha + k\beta)\\ &= \frac{\sin\dfrac{k\beta}{2}}{\sin\dfrac{\beta}{2}}\sin\left(a + \frac{k-1}{2}\beta\right) + \sin(\alpha+k\beta)\\ &= \frac{1}{\sin\dfrac{\beta}{2}}\left[\sin\left(\alpha + \frac{k-1}{2}\beta\right)\sin\frac{k\beta}{2} + \sin(\alpha+k\beta)\sin\frac{\beta}{2}\right]\\ &= \frac{1}{2\sin\dfrac{\beta}{2}}\left[\cos\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) - \cos\left(\alpha + k\beta - \frac{\beta}{2}\right)\right.\\ &\qquad\qquad \left. + \cos\left(\alpha + k\beta - \frac{\beta}{2}\right) - \cos\left(\alpha + k\beta + \frac{\beta}{2}\right)\right]\\ &= \frac{1}{2\sin\dfrac{\beta}{2}}\left[\cos\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) - \cos\left(\alpha + k\beta + \frac{\beta}{2}\right)\right]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
S(k+1) &= \frac{(-2)}{2\sin\dfrac{\beta}{2}}\sin\left(\frac{2\alpha+k\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{-k\beta-\beta}{2}\right)\\
&= \frac{1}{\sin\dfrac{\beta}{2}}\cdot\sin\left(\alpha+\frac{k}{2}\beta\right)\cdot\sin\frac{(k+1)\beta}{2}\\
&= \frac{\sin\dfrac{(k+1)\beta}{2}}{\sin\dfrac{\beta}{2}}\sin\left[\alpha+\frac{(k+1)-1}{2}\beta\right]
\end{aligned}
$$

即当 $n=k+1$ 时，等式仍成立. 由 1 和 2 可知，等式对任何自然数 n 都成立.

例 5.17 用数学归纳法证明，如果 n 是一个正整数，那么 $x^{2n}-y^{2n}$ 能被 $x+y$ 整除.

证明:

1. 当 $n=1$ 时，$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$ 能被 $x+y$ 整除.
2. 假设当 $n=k$, (k 是自然数), $x^{2k}-y^{2k}$ 能被 $x+y$ 整除, 那么当 $n=k+1$ 时,

$$
\begin{aligned}
x^{2(k+1)}-y^{2(k+1)} &= x^2\cdot x^{2k}-y^2\cdot y^{2k}\\
&= x^2\cdot x^{2k}-x^2y^{2k}+x^2y^{2k}-y^2\cdot y^{2k}\\
&= x^2(x^{2k}-y^{2k})+(x^2-y^2)\cdot y^{2k}
\end{aligned}
$$

因为 $x^{2k}-y^{2k}$ 与 x^2-y^2 都能被 $x+y$ 整除,所以 $x^2(x^{2k}-y^{2k})+(x^2-y^2)y^{2k}$ 也能被 $x+y$ 整除，这就是说，$x^{2k+1}-y^{2k+1}$ 能被 $x+y$ 整除.

根据 1 和 2, 命题成立.

例 5.18 平面上有 n 条直线，其中任何两条不平行，任何三条不过同一点，证明这 n 条直线把平面分成 $f(n)=\dfrac{1}{2}(n^2+n+2)$ 个部分.

证明:

1. 当 $n=1$ 时, 直线把平面分成两部分 (为了简单起见, 也说分成两块), 又

$$f(1)=\frac{1}{2}(1^2+1+2)=2$$

因此，$n=1$ 时命题成立.

2. 假设 $n=k$ 时命题成立，就是

$$f(k)=\frac{1}{2}(k^2+k+2)$$

我们要设法找出 $f(k+1)$ 与 $f(k)$ 的递归关系，即由 $f(k)$ 求得 $f(k+1)$ 的关系. 为此，我们在平面上再增加一条直线 ℓ（图 5.3），因为已知任何两条直线不平行，所以直线 ℓ 与平面上的原 k 条直线都相交，而且这 k 个交点互不相同，否则与任何三条直线不过同一点的已知条件矛盾，这 k 个交点将直线 ℓ 分成 $k+1$ 段，因此直线 ℓ 越过原来的 $k+1$ 块平面部分，直线上的每段将它所在的原平面块分成两块，因此要给原来的平面部分的总数 $f(k)$ 增加 $k+1$ 块新的平面部分，就是

$$f(k+1)=f(k)+(k+1)$$

将 $f(k)=\dfrac{1}{2}(k^2+k+2)$ 代入上式，得到

$$\begin{aligned}f(k+1)&=\frac{1}{2}(k^2+k+2)+(k+1)\\&=\frac{1}{2}(k^2+3k+4)\\&=\frac{1}{2}[(k+1)^2+(k+1)+2]\end{aligned}$$

这就是说，当 $n=k+1$ 时，命题也成立.

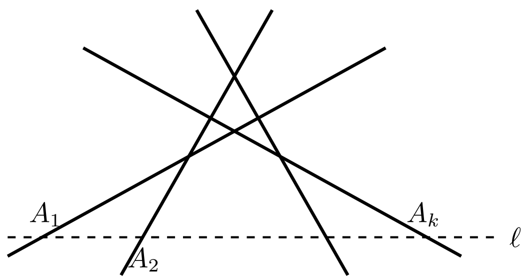


图 5.3

根据 1 和 2，可知命题成立.

同学也许会问：例 5.18 的结果是怎样发现的？数学归纳法能解决这个问题吗？其实此题的证明已经解决了这个问题，因为我们证明了 $f(n)$ 可以递归地定义为

$$\begin{cases}f(1)=2\\f(k+1)=f(k)+(k+1), \qquad k=1,2,\ldots,(n-1)\end{cases}$$

首先 $f(1)$ 有定义，其次如果知道了 $f(1)$, 就知道 $f(2)$, 依次推下去，就知道 $f(n)$. 所以

$$\begin{aligned}
f(n) &= [f(n)-f(n-1)]+[f(n-1)-f(n-2)]+\cdots+[f(2)-f(1)]+f(1)\\
&= n+(n-1)+\cdots+2+2\\
&= [n+(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1]+1\\
&= \frac{n(n+1)}{2}+1=\frac{n^2+n+2}{2}
\end{aligned}$$

习题 5.3

1. 用数学归纳法证明下列各等式：

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3^{k-1}=\frac{3^n-1}{2}$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

   (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}=\frac{n}{n+1}$

   (d)
   $$\begin{aligned}
   &\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+\cdots+\cos[\alpha+(n-1)\beta]\\
   &=\frac{\sin\dfrac{n\beta}{2}}{\sin\dfrac{\beta}{2}}\cos\left(\alpha+\frac{n-1}{2}\beta\right)
   \end{aligned}$$

2. 用数学归纳法证明：

   (a) 当 n 是正整数时，x^n-y^n 能被 $x-y$ 整除.

   (b) 当 n 是正奇数时，x^n+y^n 能被 $x+y$ 整除.

   (c) $(3n+1)7^n-1$ 能被 9 整除.

   (d) 连接的三个自然数的立方和，必定能被 9 整除.

   (e) 当 n 是正整数时，$(11)^{n+2}+(12)^{2n+1}$ 能被 133 整除.

   (f) 当 n 是正整数时，$3^{2n+2}-8n-9$ 能被 64 整除.

3. 数列 $\{a_n\}$ 是这样确定的：

$$a1=1,\quad 4a_ka_{k+1}=(a_k+a_{k+1}-1)^2,\quad a_k<a_{k+1}\quad (k=1,2,3,\ldots)$$

(a) 求 a_2, a_3, a_4, 并由此推断 a_n;

(b) 用数学归纳法证明 (a) 中推断出的 a_n 的正确性.

4. 空间有 n 个平面，其中没有两个平面平行，没有三个平面相交于同一条直线，也没有四个平面过同一个点.

   求证：它们把空间分成 $f(n) = \dfrac{1}{6}(n^3 + 5n + 6)$ 份.

5. 有 n 个圆，其中每两个圆都相交于两点，并且每三个圆不相交于同一点.

   求证：这 n 个圆把平面分成 $n^2 - n + 2$ 部分.

6. 若数列 $\{a_n\}$，当 $n \geq 3$ 时，满足条件

$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \frac{1}{a_3a_4} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}a_n} = \frac{n-1}{a_1a_n}$$

   用数学归纳法证明数列 $\{a_n\}$ 是等差数列.

第六章 实数

实数是现实世界中最基本的数系，我们采用逼近法来研究实数，逼近法是一种原理简朴但是应用广泛的方法，它将贯穿于本书的微积分学部分，是一支主力军.

第一节 度量与实数

一般说来，常见的量可以归纳成两类：比如一堆蛋，一群牛，它们都具有天然的个别单元，对它们的处理方法是数一数它们的个数，用来数个数的数学体系就是“自然数系”. 另一类量如长度、重量、温度、压力这种量不具有天然不可分割的单元！我们处理这类量的办法是度量，由度量产生的数系就是“实数系”，换句话说，实数系乃是将常见的长度、重量等这一类量的通性加以抽象化、组织化所得出来的数学体系，它是用来表达、计算这一类连续变化的量的简洁、有效工具.

下面将以长度为例，说明度量和实数的起源.

一、长度的度量

因为长度这种量并不是有天然不可分割的单位，所以我们只好选用人为的单位长，设线段 u 是所选用的单位长，当我们要度量一个线段 a 时，我们所要去求的乃是 a 与 u 之间的“比值”，这个比值是一个实数 k, 我们就说线段 a 的长度是 k 单位，现在让我们耐心地分析一下，在实践中这个“比值”是怎样求得的?

我们先拿一根尺 u, 用它去逐段比量线段 a, 假如 a 恰好是 n 个和 u 等长的线段首尾连接而成，我们说 u 恰好整量 a, a 的长度是 n 单位，但是假如 u 不能整量 a，例如在图 6.1 中的线段，a 比 $4u$ 要长些，却比 $5u$ 要短些.

试着去解决上述不能整量的矛盾的一个简朴想法是：把单位长 u 适当地加

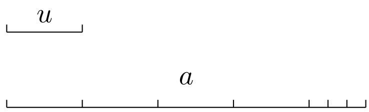


图 6.1

以等分，希望分后的“分单位”能够整量 a（比如上面的例子中，$\frac{1}{4}u$ 就可以整量 a, 即 $a=4\frac{3}{4}u=\frac{19}{4}u$），一般地，假如 a 能用 $\frac{1}{m}u$ 这个分单位整量，譬如 $a=\frac{n}{m}u$，则 a,u 之间的比值是个有理数（也称为比数）．在这儿，就自然地产生下述基本问题.

度量基本问题　任给两个量 a,b 之间的比值是否一定是个有理数（比数）? 换句话说，对于任给两个量 a,b 是否存在一个同时整量 a,b 的 u?

上面这个问题的重要性可以分别从正、反两面来分析：假如任何两个量的比值总是有理数，那么有理数全体就足够处理度量问题，这样度量问题就变得十分简单了．从另一方面来看，假如两个量之间的比值不一定是有理数，则有理数全体（简称有理数系或比数系）就不足以处理度量问题，换句话说，我们就得学会一个不只包含有理数系的实数系，才能充分处理度量问题．总之，上述基本问题是必须实事求是地弄明白的!

二、无理数（非比实数）的存在

不难给出，两个线段的比值不可能是有理数的一个简单例子，如图 6.2 所示，各边为单位长度的正方形的对角线 ℓ 与边长之比就不能是个有理数.

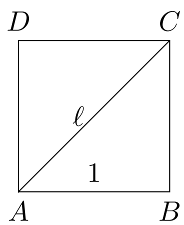


图 6.2

因为根据勾股定理，$\ell^2=2$, 所以，如果 ℓ 是个有理数，设其等于 $\frac{p}{q}$，这里 q 和 p 是两个互质的正整数，我们将有

$$p^2=2q^2$$

根据上述方程，p 是偶数，因此 p 本身也必定是偶数，譬如说，$p=2p'$, 用 $2p'$

代替 p, 我们得到

$$4({p'}^2) = 2q^2$$

或者,

$$q^2 = 2(p')^2$$

因而 q^2 是偶数，于是 q 也是偶数，然而这同我们所作的 p 和 q 没有公因子的约定相矛盾，这一矛盾是由假设对角线长能够表示为既约分数 $\dfrac{p}{q}$ 引起的，所以这一假设是错误的.

这一用反证法推导的例子，表明符号 $\sqrt{2}$ 不能对应于任何有理数. 另一例子是 π——圆的周长与直径的比，证明 π 不是有理数要复杂得多，并且直到近代才做到. 不属于有理数系的实数有很多，所以在某种意义上远比有理数更为普遍，因此，从几何度量的客观实际需要出发，我们不得不增添一类新数，这一类新数叫**无理数**. 有理数和无理数的全体统称为**实数系**. 当我们面对着实数系中还存在着许多“无理数”这一事实时，怎样去有系统地学习实数系的性质并充分掌握其用法，这便成为我们的一个迫切的基本课题. 下面所要谈的逼近法，就是一种有效地利用熟知的有理数系作为桥梁，向实数系进军的捷径.

三、逼近法

通过已知的有理数系去了解实数系的可能性基于下述基本事实，那就是: 任何无理数都可以用有理数去逼近它！现在我们用数轴来图解有理数系与实数系间的关系. 如图 6.3 所示.

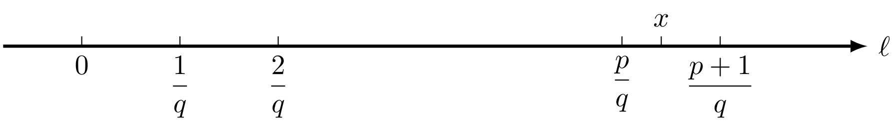


图 6.3

在上面坐标系中，所有以整数为坐标的点，在直线 ℓ 上成一均匀分布的点集,其相邻两点间的距离都是 1 单位;同样的,所有坐标是 $\dfrac{p}{2}$, $(p = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$ 的点，在直线上成一均匀分布的点集，其相邻两点间的距离都是 $\dfrac{1}{2}$ 单位；设 q 为一指定的自然数，则所有坐标是 $\dfrac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$ 的点在直线上成一均匀分布的点集，其相邻两点间的距离是 $\dfrac{1}{q}$ 单位. 只要将 q 取成足够大的自然数，则能使数 $\dfrac{1}{q}$ 想要多么小就可以多么小. 这个现象说明在直线上任何一段很短的线段中，都有坐标是有理数的点，也就是任何两个有理数点之间都有有理数点，这就是

有理数点集稠密性，但是这个现象并不表示有理点就可以填满整个直线，例如长度为 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ 的线段，若将它的一个端点放在数轴的原点，则另一端点在直线的坐标就不是有理数. 现在我们的问题是如何说明实数同原来熟悉的有理数，因而最终同整数的关系. 让我们再回到图 6.3 的数轴 ℓ 上，显然 ℓ 上面的每一个点或者是坐标为 $\frac{p}{q}$ 的有理点，或者处于两个相邻的有理点 $\frac{p}{q}$ 和 $\frac{p+1}{q}$ 之间，换言之，给了任何自然数 q 之后，对于每一个实数 x, 一定有一整数 p, 使得

$$\frac{p}{q} \le x < \frac{p+1}{q}$$

即

$$\frac{p}{q} \le x < \frac{p}{q} + \frac{1}{q}$$

从这三个数各减去 $\frac{p}{q}$，得到

$$0 \le x - \frac{p}{q} < \frac{1}{q}$$

于是

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q}$$

这个不等式说明，只要将 q 取成足够大的自然数，每一个实数 x 与有理数 $\frac{p}{q}$ 的误差想要多么小就可以多么小.

下面我们来说明每一个无理数如何通过越来越逼近它的有理数数列来描述它.

(一) 二分逼近法

现在让我们用二分逼近法来说明任何无理数都可以用有理数数列去逼近它，使得误差小到任意小.

设某无理数 x 位于线段 $A_0B_0 = [a_0, b_0]$ 内（亦即 $a_0 < x < b_0$, a_0, b_0 均为有理数)，见图 6.4.

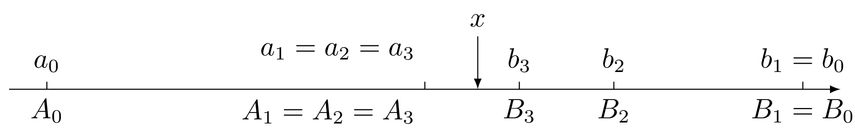


图 6.4

我们将线段 $A_0B_0 = [a_0, b_0]$ 等分为两段,亦即 $\left[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}\right]$ 和 $\left[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0\right]$; 而把 x 所在的那一段叫做 $A_1B_1 = [a_1, b_1]$, 换句话说，当 $a_0 < x < \frac{a_0+b_0}{2}$ 时，

$a_1 = a_0$, $b_1 = \dfrac{a_0+b_0}{2}$；当 $\dfrac{a_0+b_0}{2} < x < b_0$，$a_1 = \dfrac{a_0+b_0}{2}$，$b_1 = b_0$. 这样逐次二等分，由 A_1B_1 求得 A_2B_2,⋯⋯, 由 $A_{n-1}B_{n-1}$ 求得 A_nB_n, 永远无休止地二等分下去，因为每次二等分后，分段长度减半，所以 x 所在的线段就可以小到任何需要的程度. 现在把上面的二分逼近过程写下来，就得到 a_n, b_n, x 的下列关系：

1. $A_0B_0 = [a_0, b_0] \supseteq A_1B_1 = [a_1, b_1] \supseteq \cdots \supseteq A_nB_n = [a_n, b_n] \supseteq A_{n+1}B_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}] \supseteq \cdots \supseteq \{x\}$，即：

$$a_0 \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n \le \cdots < x < \cdots \le b_n \le \cdots \le b_2 \le b_1 \le b_0$$

2. $b_n - a_n = \dfrac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1}) = \cdots = \dfrac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$，这就保证了 a_n 或 b_n 和 x 之间的误差小于 $\dfrac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$, 即 $|x - a_n| < \dfrac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$ 或 $|x - b_n| < \dfrac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$, 只要 n 够大，上述误差就可以小到任意小.

3. 实数 x 由它的夹逼数列：

$$a_0 \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n \le \cdots < x < \cdots \le b_n \le \cdots \le b_2 \le b_1 \le b_0$$

   其中：$b_n - a_n = \dfrac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$ 唯一确定，即没有另一点能够处在所有的线段 A_nB_n 之中.

要证明这个数的唯一性，我们假定另有第二个数 y 也属于一切线段 A_nB_n 之中，于是这些线段的每一个长 $b_n - a_n$ 都应不小于 $|x - y|$, 但是，因为线段 A_nB_n 可以任意小，只要 n 足够大，A_nB_n 的长就会小于 x 和 y 之间的距离，这就得出矛盾. 所以实数 x 能由它的夹逼数列唯一确定.

现在以 $x = \sqrt{2}$, $a_0 = 1$, $b_0 = 2$ 为例来说明如何用二分逼近法求 $\sqrt{2}$ 的近似值，如图 6.5 所示.

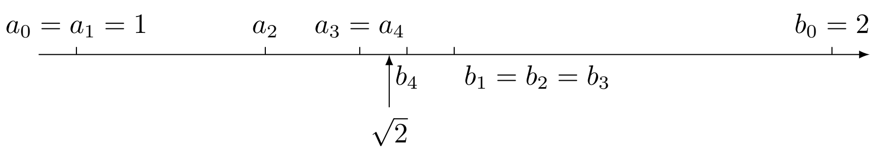


图 6.5

1. $\dfrac{1}{2}(a_0 + b_0) = \dfrac{3}{2}$, $\quad \left(-\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{4} > 2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{3}{2} > \sqrt{2}$

   故 $a_0 = a_1 = 1$, $\quad b_1 = \dfrac{3}{2}$

2. $\frac{1}{2}(a_1+b_1)=\frac{5}{4}$, $\quad \left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{25}{16}<2 \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{4}<\sqrt{2}$

故 $a_2=\frac{5}{4}$, $\quad b_2=b_1=\frac{3}{2}$

3. $\frac{1}{2}(a_2+b_2)=\frac{11}{8}$, $\quad \left(\frac{11}{8}\right)^2=\frac{121}{64}<2 \quad \Rightarrow \quad \frac{11}{8}<\sqrt{2}$

故 $a_3=\frac{11}{8}$, $\quad b_3=b_2=\frac{3}{2}$

4. $\frac{1}{2}(a_3+b_3)=\frac{23}{16}$, $\quad \left(\frac{23}{16}\right)^2=\frac{529}{256}>2 \quad \Rightarrow \quad \frac{23}{16}>\sqrt{2}$

故 $a_4=a_3=\frac{11}{8}$, $\quad b_4=\frac{23}{16}$

5. $\frac{1}{2}(a_4+b_4)=\frac{45}{32}$, $\quad \left(\frac{45}{32}\right)^2=\frac{2025}{1024}<2 \quad \Rightarrow \quad \frac{45}{32}<\sqrt{2}$

故 $a_5=\frac{45}{32}$, $\quad b_5=b_4=\frac{23}{16}$

6. $\frac{1}{2}(a_5+b_5)=\frac{91}{64}$, $\quad \left(\frac{91}{64}\right)^2=\frac{8281}{4096}>2 \quad \Rightarrow \quad \frac{91}{64}>\sqrt{2}$

故 $a_6=a_5=\frac{45}{32}$, $\quad b_6=\frac{91}{64}$

7. $\frac{1}{2}(a_6+b_6)=\frac{181}{128}$, $\quad \left(\frac{181}{128}\right)^2=\frac{32761}{16314}<2 \quad \Rightarrow \quad \frac{181}{128}<\sqrt{2}$

故 $a_7=\frac{181}{128}$, $\quad b_7=b_6=\frac{91}{64}$，这时，$\frac{181}{128}<\sqrt{2}<\frac{91}{64}$，把 $\frac{181}{128}$ 作为 $\sqrt{2}$ 的不足近似值，其误差小于 $\frac{1}{2^7}=\frac{1}{128}$.

照这样逐步计算，每次只要检验 $\frac{1}{2}(a_{n-1}+b_{n-1})$ 的平方和 2 之间的大小次序关系，就能确定 $\frac{1}{2}(a_{n-1}+b_{n-1})$ 应该是 a_n 还是 b_n，显然的，这样所求得的 a_n, b_n 和 $\sqrt{2}$ 有下列关系：

$$a_n<\sqrt{2}<b_n, \quad b_n-a_n=\frac{1}{2^n},\ (n=1,2,3,\ldots)$$

我们可以把 a_n 叫做 $\sqrt{2}$ 的一个 "n 阶不足近似值"．b_n 叫做 $\sqrt{2}$ 的一个 "n 阶过剩近似值"，它们和 $\sqrt{2}$ 的差的绝对值小于 $\frac{1}{2^n}$.

（二）十分逼近法

上面所讨论的二分逼近法只不过是逼近法的一种，譬如，对于任何大于 1 的整数 q, 我们可以仿照上法用逐次 q 等分而得到 “q 分逼近法”，但是实用起来, q 愈大则每次要去确定 x 属于 q 个分段中的哪一段时所需做计算也就愈繁, 所以二分逼近法比较简便，再者，在 q 分逼近法中，用来逼近的数 a_n, b_n 都是那些分母是 q 的方幂的分数；而常用的 “十进小数” 也就是分母是 10 的方幂的分数，例如，

$$1.4 = \frac{14}{10}, \quad 1.41 = \frac{141}{100} = \frac{141}{10^2}, \quad \ldots$$

所以十分逼近法也就是用小数去逼近的方法，现在再以 $\sqrt{2}$ 为例，简要地说明十分逼近法如下：

将线段 $[1,2]$ 十等分，其分点分别是 $1.1, 1.2, \ldots, 1.9$, 看看哪些分点的平方小于 2, 哪些大于 2, 算一下就得出：

$(1.1)^2, (1.2)^2, (1.3)^2, (1.4)^2 = 1.96 < 2 < 2.25 = (1.5)^2, (1.6)^2, \ldots, (1.9)^2$. 所以 $1.4 < \sqrt{2} < 1.5$, $\sqrt{2}$ 属于分段 $[1.4, 1.5]$;

再把 $[1.4, 1.5]$ 十等分, 分点分别是 $1.41, 1.42, \ldots, 1.49$, 再算一下, 由 $(1.41)^2 = 1.9891 < 2 < 2.0164 = (1.42)^2, (1.43)^2, \ldots, (1.49)^2$, 就得出 $\sqrt{2}$ 属于分段 $[1.41, 1.42]$, 再一次十等分，然后再由计算可以确定 $\sqrt{2}$ 属于分段 $[1.414, 1.415]$, 这样逐次十等分，就可以求得一个 n 位小数 a_n 使得

$$a_n < \sqrt{2} < b_n = a_n + \left(\frac{1}{10}\right)^n$$

在实用时，我们按照实际问题所需要的精确度，求到足够位数（即 $\left(\frac{1}{10}\right)^n$ 小于许可误差）. 这里我们用普通的算术法则对 2 作开方运算将得到一个足够精确的小数. 例如，求 $\sqrt{2}$ 的不足近似值和过剩近似值，精确到 $\frac{1}{10^4}$. 计算如下：

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1.4\quad 1\quad 4\quad 2\cdots \\ \hline
 & 2.00,00,00,00,\cdots \\
 & \underline{1} \\
24 & 1\ 00 \\
 & \underline{\quad 96} \\
281 & \quad 4\ 00 \\
 & \underline{\quad 2\ 81} \\
2824 & \quad 1\ 19\ 00 \\
 & \underline{\quad 1\ 12\ 96} \\
28282 & \qquad 6\ 04\ 00 \\
 & \underline{\qquad 5\ 65\ 64} \\
 & \qquad\quad 38\ 36
\end{array}
$$

从计算中知道

$$1.4142 < \sqrt{2} < 1.4143$$

$$|\sqrt{2} - 1.4142| < \frac{1}{10^4}, \qquad |\sqrt{2} - 1.4143| < \frac{1}{10^4}$$

因此，1.4142, 1.4143 分别是 $\sqrt{2}$ 的精确到 $\dfrac{1}{10^4}$ 的不足近似值与过剩近似值.

总结上面对于逼近法的讨论，我们得到了下列几点简要的初步认识:

1. 实数系，有理数系，整数系，自然数系的包含关系是这样的:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R} & \supset & \mathbb{Q} & \supset & \mathbb{Z} & \supset & \mathbb{N} \\ \text{实数系} & & \text{有理数系} & & \text{整数系} & & \text{自然数系} \end{array}$$

   实数系还包括无理数，任何无理数都可以用有理数去逼近它！二分逼近法和 q 分逼近法是各种逼近法中最常用的几种.

2. 一般说来，逼近法就是对于某一给定实数 x 逐步地去求它的近似值 a_n，使得误差 $|x - a_n|$ 可以小到任意小. 在 q 分法中，使得误差小到任意小的办法是用逐次 q 等分同时求出一个“不足近似值” a_n 和一个“过剩近似值” b_n，它们把所要逼近的实数 x 夹逼在当中，即 $a_n < x < b_n$. 因为当 n 逐步增大时，$b_n - a_n = \dfrac{b_0 - a_0}{q^n}$ 是显然可以小到任意小！这也就是说，给定实数 x 由它的不足近似值数列 $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ 和过剩近似值数列 $\{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots\}$ 唯一确定.

3. 更普遍地,对给定的实数 x, 用某种方法得到两个无穷数列 $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ 和 $\{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots\}$, 它们和 x 之间满足下列关系:

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots < x < \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1$$

而且在 n 不断增大时,$(b_n - a_n)$ 可以小到任意小,则 $\{a_n\}$ 就叫做 x 的一个"左逼近数列",$\{b_n\}$ 就叫做 x 的一个"右逼近数列",它们分别从左、右夹逼 x, 这样,x 也就由这两组数列唯一确定.

四、实数系的基本性质

实数系是计算长度、面积、重量、时间等等这一类量不可缺少的工具. 实数系具有四则运和大小次序这两种基本结构. 现在我们先以线段的长度为例,从几何上定义实数系的四则运算和大小次序,这样,同学就容易从几何上验证实数(线段长度)满足有理数系的四则运算和大小次序的基本性质. 然后,我们将在第七章利用数列极限的概念再给出实数的算术运算的定义.

将两个线段 AB, CD 互相叠置,使 A 点与 C 点重合,如果 D 点不与 B 点重合,落在线段 AB 上,那么线段 AB 的长度 k 个单位就大于线段 CD 的长度 ℓ 个单位,记作 $k > \ell$; 如果 D 点落在线段 AB 的延长线上,那么线段 AB 的长度就小于线段 CD 的长度,记作 $k < \ell$; 如果 D 点与 B 点重合则说线段 AB 与 CD 有相等长度,记作 $k = \ell$.

我们定义,和 $k + \ell$ 与差 $k - \ell$ $(k > \ell)$ 分别是线段的几何和与差的长度.

例如线段 AB 的长度是 k 单位,BC 的长度是 ℓ 单位,则线段 AC 的长度就是 $(k + \ell)$ 单位,如图 6.6 所示.

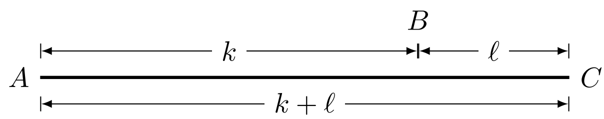


图 6.6

现在我们定义积 ab, 如图 6.7(1), 画了一个任意角,在它的一边上,从顶点开始顺次截取长度为 1 和 b 的线段 OA 和 AC, 在另一边上截取长度为 a 的线段 OB, 此外,作直线 CD 平行于直线 AB, CD 截得的线段 BD 的长度,定义为积 ab. 这个定义是合理的,因为如果我们在另一个角 O' 上类似地作图(图 2.7(2)),那么得到的线段 $B'D'$ 的长度和线段 BD 的长度相等.

除法运算定义为乘法的逆运算. 如图 6.8, 在角的一边上从顶点开始,顺次截取长度为 b 和 a 的线段,而在另一边上截取单位线段,作 CD 平行于 AB,

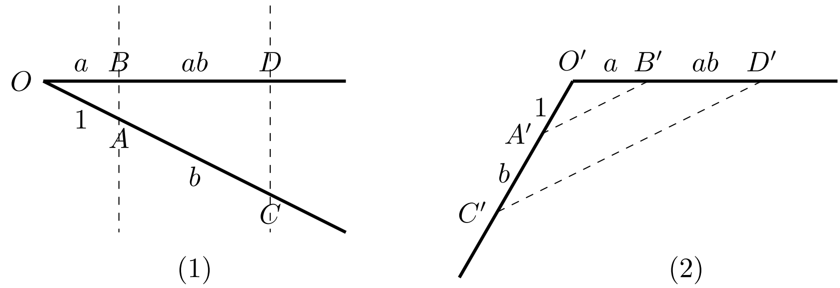


图 6.7

于是 AC 的长度定义为 $\dfrac{a}{b}$ 这个定义也是合理的，并且 $b\left(\dfrac{a}{b}\right)=a$.

最后，我们来规定负长度和零长度. 在数轴上，原点 O 右边的点和这点与点 O 的连接线段的长度成一一对应，我们把这种长度称为正的长度. 我们把直线上关于原点 O 和点 A （即对应长度为 a 的点）对称的点 A' 的相应线段的长度，形式地规定为负的长度 $-a$, 规定点 O 对应于长度零. 结果在整个直线上的点和实数之间建立了一一对应.

现在从几何上容易验证实数在四则运算和大小次序这两种结构上满足下面的基本性质，例如，用图 6.9 可以验证分配律 $a(b+c)=ab+ac$.

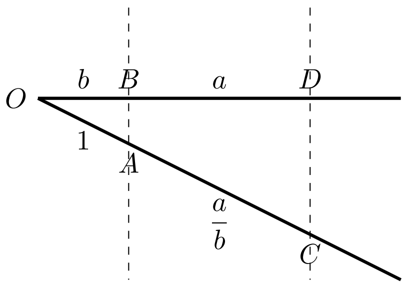


图 6.8

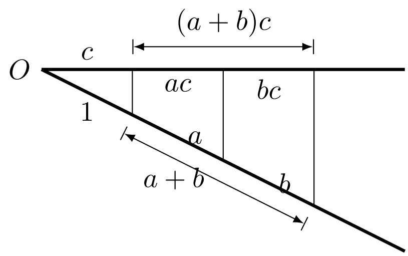


图 6.9

（一）加法和乘法的运算性质

1. 交换律：$a+b=b+a$;　　$ab=ba$

2. 结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$;　　$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$

3. 分配律：$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

4. 可逆性：$a+x=b$;　　$a\cdot x=b\ (a\neq 0)$ 都是唯一可解的，第一式的解是 $b-a$; 第二式的解是 b/a.

（二）顺序性

1. 对于任意实数 a, b, 下列关系中有一种且仅有一种成立:

$$a > b, \qquad a = b \quad 或 \quad a < b$$

2. 由 $a < b$ 和 $b < c$ 推出 $a < c$(符号“$<$”的传递性).

3. 设 $a < b$ 则 $a + c < b + c$

4. 符号定则

$$\begin{cases} a > 0, & b > 0 \\ a > 0, & b < 0 \\ a < 0, & b < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \cdot b > 0 \\ a \cdot b < 0 \\ a \cdot b > 0 \end{cases}$$

5. 对于任意两个正实数, $a, b > 0$, 恒存有一够大的正整数 n, 使得 $na < b$.(通常称之为阿基米德性质)

（三） 实数集连续性（完备性）

我们已经知道实数系与有理数系在加、乘及不等式的运算上有完全相同的性质，但是实数系还具有一个有理数系所没有的优良性质，那就是下面讨论的实数系连续性（完备性）.

在前面，我们用二分法和十分法为例，说明了任何给定的实数 x 都可以用有理数去逼近它. 我们所用的是两个有理数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 从左、右夹逼 x, $\{a_n\}, \{b_n\}$ 和 x 之间的关系可以用下面这一串次序关系来表达:

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots < x < \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1$$

$(b_n - a_n)$ 可以任意小，记作 $(b_n - a_n) \to 0$. 上面是实数 x 已经先给定了的情况，去求出两串数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 来左、右夹逼实数 x, 也就是说，数轴 ℓ 上的每一点，即每一个实数，能够由上述的两个有理数列来唯一确定. 反过来问，假如先给定了满足下述这样一串大小次序关系的 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$, 即

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1$$

且 $(b_n - a_n)$ 可以任意小，是不是会有那么一个实数 x 去被 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 左、右夹逼呢? 上述问题的答案是肯定的! 因为从实数系在长度度量的直观上看，这个实数 x 的存在也就是说实数轴上没有空隙存在，即直线是连续不断的，换言之，实数系也是连续不断的，因此我们称实数系为**实数连续统**；它说明实数系

包含着度量时所有应该包含的数，所以也叫做实数系的**完备性**．下面是直线连续不断的直观概念的解析描述．

实数系完备性

对于任给满足下述大小次序关系的两个数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$, 即

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots a_n \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1$$

且 $(b_n - a_n) \to 0$，则必定存在一个介于所有 a_n, b_n 之间的实数 x.

实数系的完备性是非常基本而且重要的！在以后的章节中，我们将用这个性质来证明极限的存在，从而可进行一切极限运算，而这些运算乃是微积分的基础．在每次用到时，我们将详细解说其用法．这样逐步渐近，同学不难学会它的种种用法．

习题 6.1

1. 证明 $\sqrt{3}$ 是无理数.
2. 设 $\sqrt{5} = a$, a 的小数部分用 b 表示，求 $a - \frac{1}{b}$.
3. 若 $a + \sqrt{b} = c + \sqrt{d}$, 这里 a, b, c, d 是有理数而 $\sqrt{b}$ 是无理数，则 $a = c$, $b = d$, 试证之.
4. 利用“整系数方程 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$ 的任何有理根，如果写成既约分数时为 $\frac{p}{q}$，那么分子 p 是 a_n 的约数，分母 q 是 a_0 的约数”，这一准则使我们能够得到一切有理实根，从而证明任何其它根都是无理数.

   试证明：$3 + 2\sqrt{2}$, $1 + \sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ 都是某一整系数方程的无理根，从而证明这些数都是无理数.
5. (a) 如果 a 是有理数，x 是无理数，试证明 $a + x$ 是无理数；又如果 $a \neq 0$，试证明 ax 是无理数.

   (b) 试证明任何两个有理数之间至少存在着一个无理数，因而存在着无穷多个无理数.
6. 试证明：任给无理数 a 和正整数 m, 我们可以找到分数 $\frac{n}{m}$, 使得 $\left|a - \frac{n}{m}\right| < \frac{1}{2m}$

7. 若等腰三角形的顶角为 $36°$，底边长为 1，试证它的腰长不能用有理数表示.

8. 用二分逼近法求下列无理数的有理近似值，使得误差小于 $\dfrac{1}{100}$：

   (a) $\sqrt{7}$　　　　(b) $\sqrt[3]{2}$

第二节　不等式与绝对值

不等式在高等数学中所起的作用要比在初等数学中大得多，一个量 x 的精确值往往难以确定，不过，对 x 进行估值，即指明 x 大于某个已知量 a 而小于另一个已知量 b, 却是容易做到的．在许多应用中，重要的只是知道 x 的这种估值．为以后学习方便起见，我们要在这一节比较详细地回顾一下不等式的一些重要性质.

一、不等式的性质

a 和 b 是实数，如果 $a-b>0$, 那么就称 a 大于 b, 记作 $a>b$; 如果 $a-b<0$, 那么就称 a 小于 b, 记作 $a<b$; 如果 $a-b=0$ 那么就称 a 等于 b, 记作 $a=b$. 注意若 $a<b$ 有时也说成 $b>a$, 因此 $a<b$ 和 $b>a$ 是等价的.

应用两个正实数之和或积仍然是正数这个基本事实，即如果 $a>0$ 和 $b>0$ 则有 $a+b>0$ 和 $ab>0$, 而且依据不等式 $a>b$ 等价于 $a-b>0$, 我们容易推导出下面的性质.

性质 1

若 $a>b$ 和 $c>d$, 则 $a+c>b+d$. 换言之，同向的两个不等式可以相加.

性质 2

若 $a>b$ 且 $c>0$, 则 $ac>bc$.

性质 3

若 $a>b$ 且 $c<0$, 则 $ac<bc$.

上面的性质 2 和性质 3 也可以表达为不等式若乘以正数得到同向不等式；若乘以负数则得到异向的不等式．更一般地可以得到：

若 $a>b>0$ 和 $c>d>0$ 则 $ac>bd$. 也就是两个同向的正数不等式可以相乘.

性质 4

- 若 $a>b>0$, 则 $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$;
- 若 $a>0>b$, 则 $\dfrac{1}{a}>0>\dfrac{1}{b}$;
- 若 $a<b<0$, 则 $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$.

性质 5

若 $a>b$ 而 $b>c$, 则 $a>c$.

这就是说不等式具有传递性,在几何上这是显然的,也可由 $(a-b)+(b-c)=a-c$ 为正直接推出，在上述推演中，如果我们处处都用符号 $\geq$ 代替 $>$，则各项法则仍然成立.

性质 6

若 $a>b>0$, 则 $a^2>b^2$.

我们注意到 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, 因为 $a+b$ 是正数，由 $a>b$ 可以推出，$a^2>b^2$. 这样正数之间不等式可以进行平方运算.

性质 7

若 $a>b>0$, 则 $\sqrt{a}>\sqrt{b}$，即在正实数之间的不等式两端能取平方根.

事实上，$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$，因为 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 是正数，从而由 $a>b$ 就可推出 $\sqrt{a}-\sqrt{b}>0$, 即 $\sqrt{a}>\sqrt{b}$.

更一般地，若 $a>b>0$ 且 n 是自然数，那么 $a^n>b^n$.

这个结论可以用数学归纳法来证明. 这个证明留给同学作为练习.

反过来，若 $a>b>0$, 且 n 是一个正整数，则 $a^{\frac{1}{n}}>b^{\frac{1}{n}}$.

证明： 假设 $a^{\frac{1}{n}}=b^{\frac{1}{n}}$, 那么 $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n>\left(b^{\frac{1}{n}}\right)^n$，因而，$a=b$, 这就与已知 $a>b$ 矛盾.

假设 $a^{\frac{1}{n}} < b^{\frac{1}{n}}$, 于是 $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n < \left(b^{\frac{1}{n}}\right)^n$，即 $a < b$, 这又与已知条件 $a > b > 0$ 矛盾，故我们得出结论 $a^{\frac{1}{n}} > b^{\frac{1}{n}}$.

二、绝对值不等式

我们回想到 $|x|$ 的定义是这样的：

定义

x 是一个实数，当 x 是一个非负数时，x 的绝对值 $|x|$ 是它本身；当 x 是一个负数时，x 的绝对值 $|x|$ 是 x 的相反数.

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \tag{6.1}$$

我们也可以说，当 x 不为零时，$|x|$ 是 x 和 $-x$ 两数之中的较大者；当 x 为零时，$|x|$ 则等于二者之中任何一个. 即

$$\begin{aligned} |x| &= \max\{x, -x\}, \qquad (x \neq 0) \\ |x| &= x = -x, \qquad (x = 0) \end{aligned} \tag{6.2}$$

例 6.1

$$|5| = \max\{5, -5\} = 5, \qquad |-5| = \max\{5, -5\} = 5, \qquad |0| = 0$$

(一) $|x|$ 的几何意义

在 Oxy 平面内，$P(x, 0)$ 和原点 $O(0, 0)$ 之间的距离是

$$d = \sqrt{(x-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{x^2} = |x|$$

因此我们可以说 $|x|$ 是 $P(x, 0)$ 点离开原点有 x 单位的 **距离**.

图 6.10 说明 $|x_2| = |P_2O|$, $|x_1| = |OP_1|$, 其中 $x_2 < 0$, $x_1 > 0$.

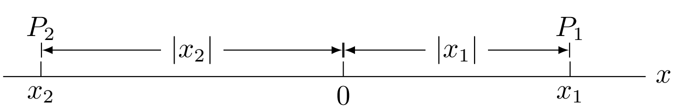


图 6.10

如果我们要在 x 轴上描述距离原点不超过 2 个单位的点集，我们把这个条件可以直接写成

$$|x| \leq 2 \tag{6.3}$$

这个不等式的解集是位于以原点 O 为中心，长度等于 4 的线段上的一切点. 下图说明这些点的位置.

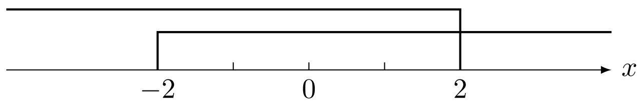


图 6.11

从上面看出这些点的坐标满足不等式

$$-2 \leq x \leq 2 \tag{6.4}$$

这就是说 (6.3) 和 (6.4) 是等价的不等式. 今后我们将经常遇到的不等式具有下面的形式

$$|x-a| < 3 \tag{6.5}$$

$|x-a| = \sqrt{(x-a)^2}$ 的几何意义是 x 轴上的 $P(x,0)$ 点离开 $A(a,0)$ 点的距离. 因此已给的不等式是描述在 x 轴上距离 $A(a,0)$ 点小于 3 个单位的点集，根据上面的例题的结论，(6.5) 等价于 $-3 < x-a < 3$.

不等式的各端加 a, 得到

$$a-3 < x < a+3 \tag{6.6}$$

因此满足不等式 (6.5) 的点的坐标是在 $a-3$ 与 $a+3$ 之间（不包括 $a-3$ 和 $a+3$).

例 6.2 在 x 轴上哪些点满足不等式 $|x-3| \leq 5$.

解： $|x-3| \leq 5$, 即 $-5 \leq x-3 \leq 5$, 也即

$$-5+3 \leq x \leq 5+3$$

$\therefore \quad -2 \leq x \leq 8$

这些点位于以 3 为中心，长度等于 10 个单位的线段上，见下图（图 6.12).

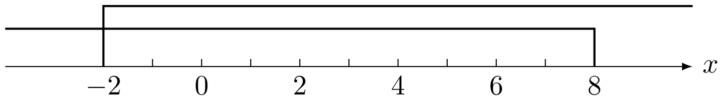


图 6.12

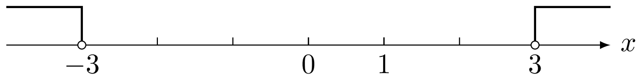


图 6.13

同样地，我们也可以解释 $x>3$ 的几何意义，不等式 $|x|>3$ 是描述在 x 轴上距离原点大于 3 个单位的点集，图 6.13 说明了这些点的位置，图中的圆圈表示去掉 ± 3, 因此这些点的坐标小于 -3 或大于 3, 即

$$x<-3, \quad \text{或} \quad x>3$$

这就是说, 不等式 $|x|>a$ $(a>0)$ 等价于不等式 $x<-a$ 或 $x>a$ $(a>0)$.

例 6.3 求满足不等式 $(x+2)^2-16>0$ 的点集.

解： 移项

$$(x+2)^2>16$$

两边开平方，等价于

$$|x+2|>4$$

即

$$x+2<-4 \qquad \text{或} \qquad x+2>4$$
$$x<-6 \qquad \text{或} \qquad x>2$$

因此，满足不等式的解集是 $\{x|x<-6\}\cup\{x|x>2\}$.

利用二次函数 $y=(x+2)^2-16$ 的草图, 如图 6.14, 就更直接地得到 $x<-6$ 或 $x>2$.

(二) 和、积、商的绝对值

若 a 和 b 是实数，则 $a\le|a|$ 和 $b\le|b|$, 相加得到

$$a+b\le|a|+|b|$$

同样

$$-a\le|a| \qquad \text{和} \qquad -b\le|b|$$

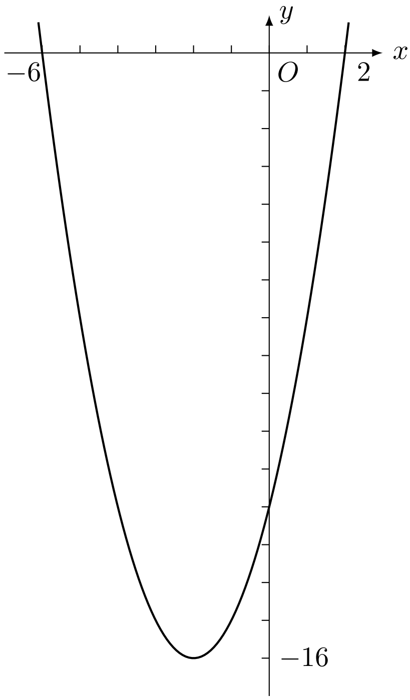


图 6.14

于是

$$-a-b \leq |a|+|b|$$

因为 $a+b$ 和 $-(a+b)$ 都不大于 $|a|+|b|$, 所以这两个数中最大者也不大于 $|a|+|b|$, 于是

$$|a+b| = \max\{a+b, -(a+b)\} \leq |a|+|b|$$

这个结果

$$|a+b| \leq |a|+|b| \tag{6.7}$$

常叫做**三角不等式**，因为它类似于三角形中任何一边小于其它两边之和这个定理.

有时，我们需要 $|a+b|$ 的下限估值，注意到

$$|a| = |(a+b)-b \leq |a+b|+|-b| = |a+b|+|b|$$

因此下面不等式成立

$$|a+b| \geq |a|-|b| \tag{6.8}$$

若 a, b 是任何实数，则

$$|ab| = \sqrt{(ab)^2} = \sqrt{a^2b^2} = \sqrt{a^2}\cdot\sqrt{b^2} = |a|\cdot|b|$$

即

$$|ab| = |a| \cdot |b| \tag{6.9}$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}} = \frac{|a|}{|b|}$$

即

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \tag{6.10}$$

习题 6.2

1. 解不等式组：

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} - \dfrac{x}{3} > -1 \\ 2(x-3) - 3(x-2) < 0 \end{cases}$$

2. 解不等式：

   (a) $|2x-1| < 2|1-2x| - 3$

   (b) $\left|\dfrac{3x}{x+1} - 3\right| < 0.01$

   (c) $|x+1| + |x-5| > 3$

   (d) $\dfrac{3x-1}{x-5} < 2$

3. 图示满足下面不等式组的点 (x, y) 的区域 R.

$$\begin{cases} |x-1| + |y-5| < 1 \\ y > 5 + |x-1| \end{cases}$$

4. 试证明若 $ax^2 + bx + c > 0$ 对于任何 x 都成立的充要条件是 $a > 0$ 且 $b^2 - 4ac < 0$.

5. 等差数列与等比数列的首项相等且第 $2n+1$ 项也相等，问第 $n+1$ 项如何?

6. 若 $x + 2y = 1$, 求 xy 的最大值.

7. 平移 $y = -\dfrac{1}{3}x^2$ 使其顶点在抛物线 $y = x^2$ 上，试求这样得到任何一条抛物线都不能经过的范围，并画图表示.

8. 求证

   (a) $|a + b + c| \le |a| + |b| + |c|$

(b) $|a-b-c| \geq |a|-|b|-|c|$

(c) $\Big||a|-|b|\Big| \leq |a+b|$

9. (a) 若 $|h| < \dfrac{\varepsilon}{4}$, $|k| < \dfrac{\varepsilon}{6}$，求证 $|2h-3k| < \varepsilon$.

(b) 若 $|a_n - r| < \varepsilon$，$|a_n - a_n'| < \varepsilon$，求证 $|a_n' - r| < \varepsilon$.

(c) 若 $|b_n| < \varepsilon$，$|a_n - b_n| < \varepsilon$，求证 $|a_n| < 2\varepsilon$.

10. 试用 a 表出从点 $(0,a)$ 到曲线 $y = \left|\dfrac{x^2}{2} - 1\right|$ 上的点 (x,y) 的距离的最小值 $(a>1)$.

11. 解不等式 $\sqrt{2x^2-3x-2} > x-1$.

三、几个重要的不等式

下面我们来推导几个常用的著名不等式.

例 6.4 贝努里不等式. 若 $n \in \mathbb{N}$ 且 $n \geq 2$, $a > -1$ 且 $a \neq 0$ （即 $a > 0$ 或 $-1 < a < 0$），则

$$(1+a)^n > 1+na$$

证明:

1. 对于 $n=2$, 因为 $(1+a)^2 = 1+2a+a^2$, 又 $a^2 > 0$, 故不等式成立.

2. 假设不等式对于 $n=k$ 成立，即

$$(1+a)^k > 1+ka$$

我们来证明不等式对于 $n=k+1$ 也成立，就是说

$$(1+a)^{k+1} > 1+(k+1)a$$

事实上，由假设 $1+a>0$, 故不等式

$$(1+a)^k(1+a) > (1+ka)(1+a)$$

成立，即

$$(1+a)^{k+1} > 1+(k+1)a+ka^2$$

将上面不等式右边舍去正项 ka^2, 就知道

$$(1+a)^{k+1} > 1+(k+1)a$$

成立，因此命题对于 $n \geq 2$ 的自然数成立.

例 6.5 无论多少个正数的几何平均数不大于其算术平均数，即

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

证明： 令 $A=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$，则题意是说，

$$A^n \geq a_1a_2\cdots a_n \tag{6.11}$$

当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时，则 (6.11) 显然成立. 如果 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 这 n 个数有不相等的，由于

$$nA=a_1+a_2+\cdots+a_n$$

即:

$$(a_1-A)+(a_2-A)+\cdots+(a_n-A)=0$$

则必有一大于 A, 也必有一小于 A, 不妨设 $a_1>A>a_2$, 于是，$A-a_1<0$, $A-a>0$, 把 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 改换成

$$a_1'=A,\ a_2'=a_2+a_1-A,\ a_3'=a_3,\ \ldots,a_n'=a_n \tag{6.12}$$

由此可见我们新得之 n 个数，其和不变，即

$$\begin{aligned}a_1'+a_2'+\cdots+a_n' &= A+(a_2+a_1-A)+a_3+\cdots+a_n\\ &= a_1+a_2+\cdots+a_n\\ &= nA\end{aligned}$$

但其积增大，因为

$$\begin{aligned}A(a_2+a_1-A)-a_1a_2 &= Aa_2+Aa_1-A^2-a_1a_2\\ &= A(a_2-A)+a_1(A-a_2)\\ &= (A-a_2)(a_1-A)>0\end{aligned}$$

从而

$$A(a_2+a_1-A)a_3\cdots a_n > a_1a_2\cdots a_n$$

若 (6.12) 中还有不等于 A 的，比如，$a_s>A>a_m$, 我们用同法即用 A 取代其中较大的一个 a_c, 用 a_m+a_s-A 代换 a_m, 又可另得 n 个正数，其和同前，而其积更大. 由此以往，不过 $n-1$ 次，便可得 n 个相等之正数 $\underbrace{A,A,\cdots A}_{n\text{ 个}}$, 此时积最大，故有

$$A^n \geq a_1a_2\cdots a_n$$

且当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时，等式成立.

例 6.6 柯西不等式，若 a_i, b_i，$i = 1, 2, \cdots, n$ 是实数，则

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n) \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$$

当且仅当 $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \cdots = \dfrac{a_n}{b_n}$ 时，等式成立.

证明： 对于任何实数 t, 不等式

$$(a_1 + tb_1)^2 + (a_2 + tb_2)^2 + \cdots + (a_n + tb_n)^2 \geq 0 \tag{6.13}$$

成立，将 (6.13) 的左端改写成按 t 的降幂排列，得

$$(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)t^2 + 2(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)t + (a_1^2 + a_2^2 + + \cdots + a_n^2) \geq 0 \tag{6.14}$$

设 $A = a_1^2 + \cdots + a_n^2$, $B = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$, $C = b_1^2 + \cdots + b_n^2$, 于是 (6.14) 写成 $Ct^2 + 2Bt + A > 0$, 其中 $C \geq 0$.

- 若 $C = 0$, 于是 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$, 显然，柯西不等式成立.
- 若 $C > 0$, 因而
$$C\left(t + \frac{B}{C}\right)^2 + \left(A - \frac{B^2}{C}\right) \geq 0$$
对于任意实数 t 成立．故令 $t = -\dfrac{B}{C}$ 代入，得到
$$A - \frac{B^2}{C} \geq 0, \qquad 即 \qquad \frac{AC - B^2}{C} \geq 0$$
$\because \quad C > 0, \qquad \therefore \quad B^2 \leq AC$, 即
$$(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2)$$
再由 (6.13) 推知当且仅当 $t = \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \cdots = \dfrac{a_n}{b_n}$ 时，等式成立.

例 6.7 设 $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ 是实数，则

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

证明：

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_ib_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

由例 6.6 柯西不等式知

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

因此:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2 &\leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \\ &= \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\right)^2\end{aligned}$$

两边开平方，取算术根即得所证.

习题 6.3

1. 若 a,b,c,d 是不相等正数，求证:
   (a) $\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}+\frac{a}{d} > 4$
   (b) $\frac{b}{\sqrt{a}}+\frac{a}{\sqrt{b}} > \sqrt{a}+\sqrt{b}$
2. 若 a_1, a_2 表示正数，p, q 表示正整数，求证:
   (a) $a_1^{p+q}+a_2^{p+q} \geq a_1^p a_2^q + a_1^q a_2^q$
   (b) $\frac{a_1^{p+q}+a_2^{p+q}}{2} \geq \left(\frac{a_1^p+a_2^p}{2}\right)\left(\frac{a_1^q+a_2^q}{2}\right)$
3. 用数学归纳法证明：若 $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, n 是正整数，则

$$\frac{a_1^n+a_2^n}{2} \geq \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^n$$

4. 求证，当 n 是 1 或不小于 5 的自然数时，总有 $2^n > n^2$.
5. 设 $0 < a < 1$, $0 < x_0 < 1$, $x_n = a(1-x_{n-1}) + +(1-a)x_{n-1}$, $(n = 1,2,3,\ldots)$,
   (a) 用 a 与 x_0 表示 x_n;
   (b) 证明 $0 < x_n < 1$.

6. 设 $a > 2$，给定数列 $\{x_n\}$，其中 $x_1 = a$，$x_{n+1} = \dfrac{x_n^2}{2(x_n - 1)}$，$(n = 1, 2, 3, \ldots)$，求证：

   (a) $x_n > 2$, 且 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} < 1$

   (b) 如果 $a < 3$, 那么 $x_n \leq 2 + \dfrac{1}{2^{n-1}}$

7. 若长方形的体积是定值，求全面积的最小值.

8. 求证球内接长方体中，以正方体的体积为最大.

9. 求证在周长都为 $2L$ 的所有三角形中，面积最大的必是等边三角形.

10. 若 a, b, c 是正数且 $abc = 8$.

    求证：$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2} \geq 3\sqrt{2}(abc)^{\frac{1}{3}} = 6\sqrt{2}$

11. 若 $a > 0$, $b > 0$, 且 $a + b = 1$, 求证：

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(b + \frac{1}{b}\right) \geq \frac{25}{4}$$

12. 若 $a + b + c = 1$, 且 $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, 求证：

    (a) $\left(\dfrac{1}{a} - 1\right)\left(\dfrac{1}{b} - 1\right)\left(\dfrac{1}{c} - 1\right) \geq 8$

    (b) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \geq 9$

13. 若 x, y 是实数，且 $x^2 + y^2 \leq 1$, 求证：$|x^2 + 2xy - y^2| \leq \sqrt{2}$

14. 对于任何实数，求证：

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

    当且仅当诸数相等时，等式成立.

15. $a + b = 1$, $a > 0$, $b > 0$, 求证 $\sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} \leq 2sqrt2$.

16. 求证 $\dfrac{|x_1 + x_2|}{|4 + x_1^2||4 + x_2^2|} < \dfrac{1}{8}$

17. 对于 $n \geq 2$ 的自然数 n, 证明不等式

$$2^n > 1 + n\sqrt{2^{n-1}}$$

18. 对于任何正整数 $k \leq n$, 求证:

$$1+\frac{k}{n} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^k \leq 1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}$$

19. 已知 a, b, c, d, e 是实数，满足

$$a+b+c+d+e=8, \qquad a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=16$$

试确定 e 的最大值.

20. 半径为 1 的圆内接三角形面积等于 $\dfrac{1}{4}$, 设此三角形三边长为 a, b, c, 求证:

(a) $abc = 13$

(b) $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} < \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$

21. 直角三角形斜边长等于 10, 内切圆半径为 a. 求何时内切圆的半径最大，最大值是多少?

22. 若 $n > 2$, 求证 $(n!)^2 > n^n$.

23. 有 n 个实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 且 $a_1+a_2+\cdots+a_n = n$

(a) 求证: $\sqrt{|a_1|}+\sqrt{|a_2|}+\cdots+\sqrt{|a_n|} \geq \sqrt{n}$

(b) 又 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2 = n$, 求 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 的值.

24. 若 a, b, c 是正实数，求证: $\dfrac{c}{a+b}+\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a} \geq \dfrac{3}{2}$

第七章　数列的极限

第一节　数列的极限概念

在前一章中, 我们已经看到任何一个实数都可以用有理数来左、右夹逼, 即对于任何实数 x 我们总可以用逼近法求得两个有理数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 使得

$$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n \le \cdots \le x \le \cdots \le b_n \le \cdots \le b_2 \le b_1$$

并且 $b_n - a_n$ 可以小到任意小.

数列中的项 a_n 和 b_n 就是 x 的第 n 次不足近似值和过剩近似值，它们的误差可以用不等式

$$|x - a_n| < b_n - a_n, \qquad |x - b_n| < b_n - a_n$$

来估计. 这里所说的逼近的要点在于**误差可以小到任意小**，下面用例子从另一个角度来说明这一点.

今以 $\dfrac{2}{3}$ 为例，作上述分析：

1. 以 3 去除 2，得：

$$
\begin{array}{r}
0.66\overline{6} \\
3\,\overline{)\,2.000} \\
\underline{1.8} \\
20 \\
\underline{18} \\
20 \\
\underline{18} \\
2
\end{array}
$$

因为每次 20 除以 3 都余 2, 所以商数 6 重复出现，这个除法可以无止境地作下去.

2. 上述除式的意义是

$$
\begin{aligned}
2 &= 0.6 \times 3 + 0.2 \Longleftrightarrow 0.6 < \frac{2}{3} < 0.7, \\
&= 0.66 \times 3 + 0.02 \Longleftrightarrow 0.66 < \frac{2}{3} < 0.67, \\
&= 0.666 \times 3 + 0.002 \Longleftrightarrow 0.666 < \frac{2}{3} < 0.667, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

从上面的分析，同学们可以看出 $\frac{2}{3}$ 显然不能用有限位小数表示出，但是存在着由有限位小数所成的无穷数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$

$$\{a_n\}: \quad a_1 = 0.6,\ a_2 = 0.66,\ a_3 = 0.666,\ \ldots,\ a_n = 0.\underbrace{66\cdots66}_{n\text{ 位小数}},\ \ldots$$

$$\{b_n\}: \quad b_1 = 0.7,\ b_2 = 0.67,\ b_3 = 0.667,\ \ldots,\ b_n = 0.\underbrace{66\cdots67}_{n\text{ 位小数}},\ \ldots$$

满足

$$a_n = 0.\underbrace{66\cdots66}_{n\text{ 位小数}} < \frac{2}{3} < 0.\underbrace{66\cdots67}_{n\text{ 位小数}} = a_n + \frac{1}{10^n}$$

并且 a_n 与 $\frac{2}{3}$ 之间的误差 $\left|a_n - \frac{2}{3}\right| < b_n - a_n = \frac{1}{10^n}$, 同样 b_n 与 $\frac{2}{3}$ 之间误差 $\left|b_n - \frac{2}{3}\right| < \frac{1}{10^n}$，只要 n 充分大，误差可以小到任意小．上面的逼近过程，表明无穷数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 从左、右两方面趋近 $\frac{2}{3}$，可以使其误差任意小，$\frac{2}{3}$ 就是数列 $\{a_n\}$ 的极限，也是数列 $\{b_n\}$ 的极限，用符号表示就是

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3}, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{2}{3}$$

或者用

$$a_n \to \frac{2}{3}, \qquad b_n \to \frac{2}{3}, \qquad a_n \to \frac{2}{3} \leftarrow b_n$$

来生动地表述上述事实.

从这里我们看到逼近与极限是密切相关的，极限只是把逼近过程推进到无穷 $(n \to \infty)$ 的结果，逼近只要误差小到所要求的精确度后就可以停止. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3}$ 表示数列 $\{a_n\}$ 当 n 无限增大的极限值是 $\frac{2}{3}$.

我们再用极限的观点对 $\sqrt{2}$ 进行分析如下． $\sqrt{2}$ 是一个什么数？要回答这个问题，我们只须找出有理数 $\frac{a}{b}$ 在什么时候大于 $\sqrt{2}$, 什么时候小于 $\sqrt{2}$, 也就是说，如果 $\left(\frac{a}{b}\right)^2 < 2$, 那么正数 $\frac{a}{b} < \sqrt{2}$；如果 $\left(\frac{a}{b}\right)^2 > 2$, 那么 $\frac{a}{b} > \sqrt{2}$. 根

据有理数是有序的，稠密的，因此有理数的平方总能和 2 比较大小，这就保证我们可以用逼近法（譬如十分逼近法）决定左、右夹逼 $\sqrt{2}$ 的两个由十进位小数组成的数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 如下：

$$\{a_n\}: \quad a_1 = 1,\ a_2 = 1.4,\ a_3 = 1.41,\ a_4 = 1.414, \dots$$
$$\{b_n\}: \quad b_1 = 2,\ b_2 = 1.5,\ b_3 = 1.42,\ b_4 = 1.415, \dots$$

使得 $a_n < \sqrt{2} < b_n$, 而且 $b_n - a_n = \dfrac{1}{10^n}$, 于是

$$|a_n - \sqrt{2}| < \frac{1}{10^n}, \qquad |b_n - \sqrt{2}| < \frac{1}{10^n}$$

这就是说，第 n 次的有限小数近似值 a_n 和 b_n 与 $\sqrt{2}$ 的误差分别小于 $\dfrac{1}{10^n}$，因此，只要 n 充分大，误差就可以小到任意小，当我们让这个计算过程，无穷地进行下去时，我们就说 $\sqrt{2}$ 是数列 $\{a_n\}$ 或 $\{b_n\}$ 的极限，记做

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = \sqrt{2}$$

从上面两个例子看到，实数是具有 n 位数字的普通十进位小数数列，当 n 无限增大时的极限.

如今我们说明了逼近与极限概念密切相关的一面，但是极限与逼近也有观点不同，概念层次也不同的方面，上面所说用十分逼近法求 $\sqrt{2}$ 的近似值 $1, 1.4, 1.41, \dots$ 等是逼近的观点，它是先有 $\sqrt{2}$，即我们先知道 $\sqrt{2}$ 是方程 $x^2 = 2$ 的根，然后用小数去逐步逼近. 极限的观点恰恰相反，它是先有一个无穷数列 $\{a_n\}$, 然后要去看一下，它们是否恰好无限逼近某一个常数 A. 假如是这样，就叫 A 是数列 $\{a_n\}$ 的极限值.

下面介绍几个逼近某一常数的无穷数列的例子.

例 7.1　仔细观察数列：

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \dots,\ \frac{1}{n},\ \dots$$

我们马上看出

1. 上述数列的每一项都是正数.

2. 上述数列逐项递减：

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \cdots > \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} > \cdots > 0$$

因而是一个递减有界数列.

3. 当 n 愈来愈大时，$a_n=\dfrac{1}{n}$ 愈来愈接近 0, 它们的误差 $|a_n-0|=\dfrac{1}{n}$, 只要充分大，就可以小到任意小.

对于情形 3, 我们就说：数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ 趋近于 0 或收敛到 0, 或 0 是数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ 的极限，并记作 $\dfrac{1}{n}\to 0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$.

现在，让我们再用数轴把上述事实图解说明如下：

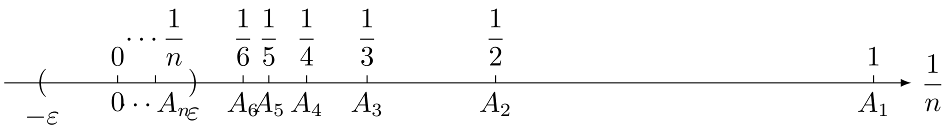


图 7.1

在数轴上取以数列：

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \cdots$$

的各项为坐标的各点，就得到一个点列：

$$A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots, A_n, \ldots,$$

上述点列 $\{A_n\}$ 从原点 O 的右边逐步向原点逼近，而且点 A_n 到原点的距离 $|a_n-0|=\dfrac{1}{n}$，只要 n 充分大，就可以小到任意小. 上面的事实也可以这样来说明：通常我们把 A 点为中心的**开区间** $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ 叫做这**点 A 的 ε 邻域**. 我们看到，原点 O 的任意 ε 邻域，包含 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ 的除有限个点以外的全部点. 这也就是说数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ 是收敛的，并且收敛到 0.

例 7.2 观察数列 $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$: $\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3},\ldots,\dfrac{n}{n+1},\ldots$ 同学们容易看出，这个数列逐项递增，其各项 $a_n=\dfrac{n}{n+1}$ 永远小于 1, a_n 和 1 之间的误差 $|a_n-1|=\left|\dfrac{-1}{n+1}\right|=\dfrac{1}{n+1}$，只要 n 充分大就可以到任意小. 这也就是说，这个数列在数轴上的对应点列，除有限个点外全部点都在点 1 的任意 ε 邻域内（图 3.2），因此，这个数列 $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ 的极限是 1, 或者变量 $a_n=\dfrac{n}{n+1}$ 的极限是 1, 用符号表示就是：

$$\frac{n}{n+1}\to 1, \quad \text{或者} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

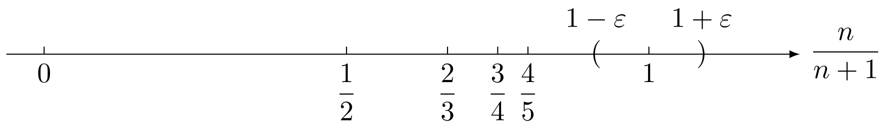


图 7.2

例 7.3 观察数列 $\left(-\dfrac{1}{2}\right)$，$\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2$，$\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3,\dots,\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$，$\dots$，这个数列逐项正负相间，是摆动数列，显然，各项的绝对值 $|a_n|\leqslant\dfrac{1}{2}$, $n=1,2,3,\dots$，因此，它又是有界的. 其第 n 项与数 0 之间的误差 $|a_n-0|=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$，当 n 充分大时，可以小到任意小. 再从数轴上看，其对应点列从原点的左、右两侧向原点逼近，而且当 n 充分大时，a_n 全部都在原点的任意 ε 邻域内（图 7.3），因此，这个数列 $\left\{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$ 的极限是 0.

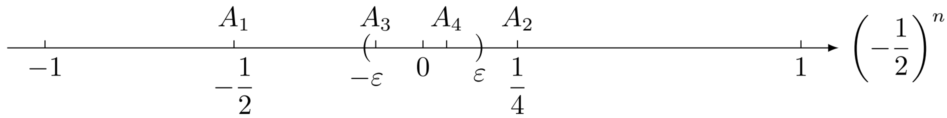


图 7.3

从以上三个数列，我们看到它们的共性是在项数 n 无限增大的过程中，参与在这个过程的变量 $a_n=\dfrac{1}{n}$, $a_n=\dfrac{n}{n+1}$, $a_n=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$ 所取的值与某一个常数 A 的差的绝对值 $|a_n-A|$（或者说它们之间的绝对误差），只要 n 充分大，就可以小到任意小. 它们在数轴上对应的点列，只要 n 充分大，除有限个点外全部点都在点 A 的任意 ε 邻域内.

让我们把只要 n 充分大，误差可以任意小的含义说得更精确些. 为此，再以例 7.3 说明之，我们来看它的第 n 项与 0 的误差:

$$|a_n-0|=\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^n-0\right|=\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

当 n 为何值时，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^n<0.0001$. 解之，得

$$n\lg\left(\frac{1}{2}\right)<-4,\quad 即\quad (-0.3010)n<-4$$

$\therefore\quad n>13.289$

因此，只须 $n \geq 14$, 就有

$$|a_n - 0| = \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{14} = 0.000061 < 0.0001$$

这也就是说，对于给定的 0.0001, 总能找到这样一个项数，$N = 14$, 使得当 $n \geq 14$ 时，其误差

$$|a_n - 0| = \left(\frac{1}{2}\right)^{14} < 0.0001$$

当 n 为何值时，$\left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{10^8}$ 只须，

$$n \lg \left(\frac{1}{2}\right) < -8$$

即

$$n > \frac{-8}{-0.3010} = 26.578$$

因此，只须 $n \geq 27$ 时，就有

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n < \left(\frac{1}{2}\right)^{27} = 0.000000007 = 7 \times 10^{-9} < 10^{-8}$$

一般地，任给 $\varepsilon > 0$, 当 n 为何值时，$\left(\frac{1}{2}\right)^n < \varepsilon$. 只须

$$n \lg \frac{1}{2} < \lg \varepsilon$$

即

$$n > \frac{\lg \varepsilon}{-0.3010}$$

由于 ε 是任意小的正数，当 $\varepsilon < 1$ 时，$\lg \varepsilon < 0$. 于是 $\frac{\lg \varepsilon}{-0.3010}$ 是正数，因此，我们总能找到这样项数 $N = \left(\frac{\lg \varepsilon}{-0.3010}\text{的整数部分}\right) + 1$ ，使得当 $n \geq N$,

$$|a_n - 0| = \left(\frac{1}{2}\right)^n < \left(\frac{1}{2}\right)^N < \varepsilon$$

现在，我们可以给数列 $\{a_n\}$ 的极限是 A 以精确定义如下：

定义

任给正数 ε, 总可以定出一个正整数 N, 使得只要 $n \geq N$ 时, $|a_n - A| < \varepsilon$ 都成立，我们就说数列 $\{a_n\}$ 的**极限是** A, 或者说数列 $\{a_n\}$ **收敛到** A.

让我们再对上述定义作几点说明：

1. ε (读成 Epsilon) 是希腊字母，相当于英文字母的 e, 它是 error（误差）的头一个字母，误差任意小的数量提法就是“小于任给正数 ε”.

2. a_n 是逐步逼近 A 的，要使误差 $|a_n - A|$ 愈小（或者说够小）那就要让数列的项数 n 变得够大，所以“只要 $n \geq N$ 时，$|a_n - A| < \varepsilon$ ”的意义也就是：“只要 n 够大，误差 $|a_n - A|$ 就会小到所要求的那么小!”

3. ε 是任给的正数，是变量，但是当误差范围 ε 一经给定之后，就为常数，我们对于这个指定的 ε 检验是否存在具有上述性质的 N, 在求 N 的过程中，ε 的值不能变动，一般说来，给的 ε 愈小，那么求得的 N 愈大.

4. 定义中的当 $n \geq N$ 时, $|a_n - A| < \varepsilon$ 等价于当 $n \geq N$ 时, $A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$ 或 $a_n \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$, 这就是说，如果数列 $\{a_n\}$ 收敛于 A 则在点 A 的任何 ε 邻域内必包含这个数列的除有限个项以外的一切项.

为了帮助同学熟悉极限定义，我们在下面再举几个例子，说明 N 的大小和 ε 之间的关联，并给出证明某数是已知数列的极限的方法.

例 7.4 证明数列 $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ 的极限是 1.

解： 对于任给 $\varepsilon > 0$，要使

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

只须 $n + 1 > \dfrac{1}{\varepsilon}$，即 $n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$，取 $N = \left(\dfrac{1}{\varepsilon} - 1\right)$ 的整数部分 $+1$，所以当 $n \geq N$ 时，可使

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{N+1} < \varepsilon$$

这就是说 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$.

例 7.5 证明数列：$1, 0, \dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{3}, 0, \ldots, 0, \dfrac{1}{n}, 0, \ldots$ 的极限是 0.

证明： 这个数列的通项公式可以写成

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{当 } n \text{ 为偶数时;} \\ \dfrac{2}{n+1}, & \text{当 } n \text{ 为奇数时.} \end{cases}$$

对于任给 $\varepsilon > 0$, 因为数列 $\{a_n\}$ 的所有偶数项为 0, 所以从第二项开始以后的所有偶数项都小于给定的 ε. 现在须从奇数项中确定从哪一项开始以后的一切项与 0 的误差小于 ε.

令奇数项与 0 的误差：$\dfrac{2}{n+1}<\varepsilon$，即

$$n+1>\frac{2}{\varepsilon},\qquad n>\frac{2}{\varepsilon}-1$$

取 $N=\left(\dfrac{2}{\varepsilon}-1\right)$ 的整数部分加 1，于是，当 $n\geq N$，可使 $\dfrac{2}{n+1}<\varepsilon$. 所以对于任给 $\varepsilon>0$, 从第 N 项开始以后的一切项都能使 $|a_n-0|<\varepsilon$ 成立. 即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

例 7.6 证明数列 $\left\{\dfrac{n^2-1}{n^2+n+1}\right\}$ 的极限是 1.

证明: 对于任给 $\varepsilon>0$, 要使

$$|a_n-1|=\left|\frac{n^2-1}{n^2+n+1}-1\right|=\left|\frac{-n-2}{n^2+n+1}\right|=\frac{n+2}{n^2+n+1}<\varepsilon$$

看看是否存在这样的 N, 使得当 $n\geq N$ 时，永远有 $|a_n-1|<\varepsilon$，可是直接从上面的不等式解出 N 是不容易的，但我们注意到，当 n 充分大时，在分子中起主导作用的是 n, 而在分母中起主导作用 n^2. 如果把分子扩大为 $2n$ $(n>2)$, 又把分母缩小为 n^2, 这样有

$$|a_n-1|=\frac{n+2}{n^2+n+1}<\frac{2n}{n^2}=\frac{2}{n}$$

现在令 $|a_n-1|<\dfrac{2}{n}<\varepsilon$，即 $n>\dfrac{2}{\varepsilon}$，取 N 为 $\dfrac{2}{\varepsilon}$ 的整数部分加 1, 于是, 当 $n\geq N$ 时，可使

$$|a_n-1|>\frac{2}{n}<\varepsilon$$

这就是说 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-1}{n^2+n+1}=1$.

在上面的证明中，所取得的 N 比实际所需要的要大一些，这样并不影响我们所要说明的问题:“N 是根据预先给定的 ε 来确定的, 而且这个 N 满足极限定义中的条件”，事实上，N 不是由 ε 唯一确定的，对于给定的 $\varepsilon>0$, 如果某数，譬如 10000 可以充当极限定义中的 N, 则大于 10000 的任何一个自然数也都可以充当 N, 自然 N 愈小愈好，但是，有时候为了便于证明，不妨把 N 取得大些. 问题的关键是是否存在这样的 N, 至于这个 N 是否是最小的, 那是第二位的问题.

例 7.7 说明数列 $\left\{\sin^{2n}\dfrac{n\pi}{2}\right\}$ 没有极限.

证明： 这个数列各项的数值为 $1, 0, 1, 0, \ldots$. 显然，1 和 0 都不是这个数列的极限，因为在点 1 的小于 1 的任何邻域之外，有此数列无穷多个数值为 0 的偶数项，同样，在点 0 的小于 1 的任何邻域之外，有此数列无穷多个值为 1 的奇数项. 假设数 $A \neq 0, 1$ 并且是此数列的极限，则在点 A 的任何 ε 邻域 $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ 内都包含数 0 和 1, 于是

$$2\varepsilon = (A+\varepsilon)-(A-\varepsilon)| > |1-0| = 1$$

即：$\varepsilon > \dfrac{1}{2}$. 这和 ε 是任意小的正数矛盾，因此，这个数列没有极限.

现在我们再来说明趋近于 0 的变量与收敛于某一个不等于 0 的常数的变量之间的关系. 从前面的例 7.2 和例 7.6, 我们看到当一个给定数列 $\{a_n\}$ 的极限看出来等于 A $(A \neq 0)$ 时，我们需要验证的是 $(a_n - A) \to 0$. 这个事实就是变量 $a_n \to A \neq 0$ 的必要充分条件是 $(a_n - A) \to 0$. 再者 $a_n \to 0$ 的必要充分条件是 $|a_n| \to 0$.

前面所举的数列的例子，除例 7.7 之外，都有极限，我们已经把这样的数列叫做**收敛数列**. 如果数列不收敛就叫做**发散数列**. 显然无界数列是发散数列. 下面给出一些发散数列的例子.

对于一个数列 $\{a_n\}$, 无论给出多么大的正数 M, 都能找到正整数 N, 使得当 $n \geq N$ 时，常有 $|a_n| > M$, 我们说数列是**无限增大**的.

例如，$\{n^2\}$, $\{-n^2\}$, $\{(-n)\}$ 等数列都是无限增大的.

如果数列 $\{a_n\}$ 是无限增大的，并且从某项以后的一切项为正数时，我们说数列 $\{a_n\}$ 趋于正无穷大，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$，例如 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty$.

如果数列 $\{a_n\}$ 是无限增大的，并且从某项以后的一切项为负数时，我们说数列 $\{a_n\}$ 趋于负无穷大，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$. 例如 $\lim\limits_{n\to\infty} (-n^2) = -\infty$.

在无界数列中，也有不是无限增大的，例如，数列

$$\left(n \sin \frac{n\pi}{2}\right): \quad 1, 0, -3, 0, 5, 0, -7, 0, \ldots$$

是无界的，但不是无限增大的，因为它的偶数项永远等于 0.

有界数列中也有发散的，例如前面例 7.7 的数列在两个数值 0 和 1 上摆动.

命题

如果各项不为 0 的数列 $\{a_n\}$ 是无限增大的，那么它的倒数 $b_n = \dfrac{1}{a_n}$ 就组成以 0 为极限的数列；反过来，如果各项不为 0 的数列 $\{a_n\}$ 收敛到 0, 那么它的倒数 $b_n = \dfrac{1}{a_n}$ 就组成无限增大的数列.

事实上, 对于任意给出的无论多么小的正数 ε, 令 $M=\dfrac{1}{\varepsilon}$, 根据数列 $\{a_n\}$ 是无限增大的，一定可以找到正整数 N, 使得当 $n \geq N$ 时，有 $|a_n|>M$ 成立，从而

$$|b_n|=\left|\frac{1}{a_n}\right|=\frac{1}{|a_n|}<\frac{1}{M}=\varepsilon$$

这就是说，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n}=0$. 同样也可以证明逆命题.

习题 7.1

1. 数列的通项公式是

$$a_n=\frac{1000[1+(-1)^n]}{n}, \quad n=1,2,3,\ldots,n,\ldots$$

(a) 计算这个数列的前 5 项，在数轴上图示这些数值;

(b) 对于 $\varepsilon = 1$, 0.1, 0.01, 0.0001, 0.0000001, 求出项数 N, 使得当 $n \geq N$ 时，$|ax|<1$, $|a_n|<0.1$, $|a_n|<0.01$, $|a_n|<0.0001$, $|an|<0.0000001$;

(c) 证明这个数列的极限为 0.

2. 按定义证明下面数列的极限为 0.

(a) $\left\{\dfrac{n+1}{n^2+1}\right\}$

(b) $\left\{\dfrac{\sin n}{n}\right\}$

(c) $\left\{\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^3}\right\}$

(d) $\left\{\dfrac{1}{2\sqrt{n}}\right\}$

(e) $\left\{\dfrac{1}{n}+\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right\}$

3. 证明数列：0.9, 0.99, 0.999, ... 的极限是 1.

4. 证明 $\dfrac{3n^5}{n^5-n^2+1}\to 3$.

5. 说出下面数列的变化趋向:

(a) $\left\{\dfrac{100-3n}{100}\right\}$

(b) $\left\{(-1)^n\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^2\right\}$

(c) $\left\{(-1)^n\dfrac{n^2+1}{n}\right\}$

(d) $\left\{\dfrac{1-(-1)^n}{2}n\right\}$

(e) $\{3(-1)^n+5\}$　　(f) $\{n-(-1)^n\}$

第二节　具有极限的数列的性质

数列趋向于它们的极限时，有种种不同方式，例如在例 7.1 中，数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ 趋向于它的极限时，不断地减小；在例 7.2 中，数列 $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ 趋向它的极限时，不断地增大，在例 7.3 中，数列 $\left\{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$ 趋向于它的极限时，时而增大，时而减小，从极限值的两侧趋向于极限值 0.

虽然数列趋向于它们各自的极限时，有各种不同的状态，但是所有这些数列都具有一系列的共同的性质，我们现在就来研究其中若干重要性质.

定理 1

若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, 而 $A>p$(或 $A<p$), 则存在数 N, 当 $n \geq N$ 时，永远有 $a_n > p$(或 $a_n < p$).

证明： $\because$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ 让我们取定正数 $\varepsilon < A-p$ (或 $p-A$), 从而

$$A-\varepsilon > p$$

根据数列极限定义，可以找到这样的 N, 使得当 $n \geq N$ 时，有

$$A-\varepsilon < a_n < A+\varepsilon$$

于是，当 $n \geq N$ 时，就有 $a_n > p$ (或 $a_n < p$).

定理 1 说明如果数列的极限大于（或小于）某一个实数，那么收敛到此极限的数列从某一项起也大于（或小于）这个实数．这个性质反映了收敛的数列和极限之间的密切关系.

定理 2

若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, 而且当 $n \geq N$ 时，$a_n \leq p$ （或 $a_n \geq p$），则 $A \leq p$ （或 $A \geq p$）.

证明： 假设 $A > p$, 根据定理 1, 当 $n \geq N$ 时，可使 $a_n > p$, 这与 $a_n \leq p$ 矛盾.

$\therefore$　$A \leq p$.

从例 7.2 看到 $a_n = \dfrac{n}{n+1} < 1$, 而 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$. 这个例子说明从严格的不等式 $a_n < p$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, 不能推出严格的不等式 $A < p$. 而定理 2 是说取极限过程使不大于或不小于关系保持不变.

定理 3

若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, 则 A 是唯一的.

证明: 用反证法，假设 $a_n \to A$ 和 $a_n \to B$ 且 $A < B$, 在 A 与 B 之间任取一数 R, 设 $A < R < B$, 因为 $a_n \to A$, 且 $A < R$, 所以可以找到 N_1, 使得当 $n \geq N_1$ 时，有 $a_n < R$.

另一方面，$a_n \to B$, 且 $B > R$, 所以可以找到 N_2, 使得当 $n \geq N_2$ 时，有 $a_n > R$.

取 N 为 N_1 和 N_2 中较大者，即 $N = \max(N_1, N_2)$, 则当 $n \geq N$ 时，就有 $a_n < R$, 同时又有 $a_n > R$, 这是不可能的，因此，数列的极限是唯一的.

定理 4

若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, 则数列 $\{a_n\}$ 是有界的.

证明: 由极限定义知，对于任意小正数 ε, 可以找到 N, 使得当 $n \geq N$ 时，有 $A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$.

设 $A - \varepsilon, a_1, a_2, \ldots, a_N, A + \varepsilon$ 中最大的绝对值为 M, 则有 $|a_n| \leq M$，即数列 $\{a_n\}$ 是有界的.

定理 5

若三个数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 的对应项满足不等式 $a_n < b_n < c_n$, 对于一切 $n = 1, 2, 3, \ldots$ 并且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$.

证明:

$$\because \quad \lim_{n\to\infty} a_n = A, \quad \lim_{n\to\infty} c_n = A$$

根据数列极限定义知，对于任意给定 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N_1, 使得当 $n \geq N_1$ 时，有

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$$

并且也存在一个正整数 N_2, 使得当 $n \geq N_2$, 有

$$A - \varepsilon < c_n < A + \varepsilon$$

令 $N = \max(N_1, N_2)$, 于是当 $n \geq N$ 时，就同时有

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon, \qquad A - \varepsilon < c_n < A + \varepsilon$$

$\because \quad a_n \le b_n \le c_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

$\therefore$　当 $n \ge N$ 时，就有

$$A - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < A + \varepsilon$$

这就是说，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$.

定理 5 不仅告诉我们判断 $\{b_n\}$ 的极限存在的一种方法，而且也可用这方法来求极限. 用这个方法，我们可以不去直接求 $\{b_n\}$ 的极限，而是把它和另外两个我们熟悉的有相同极限的数列作比较.

例 7.8 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n\left(\cos^2 \dfrac{1}{2}n\pi + n\sin^2 \dfrac{1}{2}n\pi\right)}$

解:

$$\begin{aligned}
\text{分母} &= n\left(\cos^2 \frac{1}{2}n\pi + n\sin^2 \frac{1}{2}n\pi\right) \\
&= n\left[1 + (n-1)\sin^2 \frac{1}{2}n\pi\right]
\end{aligned}$$

又因为 $0 \le \sin^2 \dfrac{1}{2}n\pi \le 1$，所以

$$0 < n \le n\left(\cos^2 \frac{1}{2}n\pi + n\sin^2 \frac{1}{2}n\pi\right) \le n^2$$

即

$$\frac{1}{n^2} \le \frac{1}{n\left(\cos^2 \frac{1}{2}n\pi + n\sin^2 \frac{1}{2}n\pi\right)} \le \frac{1}{n}$$

此外，$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0, \quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$，根据定理 5，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\left(\cos^2 \frac{1}{2}n\pi + n\sin^2 \frac{1}{2}n\pi\right)} = 0$$

例 7.9 若 $|q| > 1$, $n \to \infty$, 则变量 $|q|^n$ 是发散的；若 $0 < q < 1$, $n \to \infty$, 则 $q^n \to 0$, 试证明之.

证明: 在证明这个问题之前, 回忆第二章例 2.1, 贝努里不等式: 若 $n \ge 2$, $a > -1$ 且 $a \ne 0$, 则 $(1+a)^n > 1 + na$.

若 $|q|>1$, 则 $|q|=1+a$, $(a>0)$, 于是

$$|q|=(1+a)^n>1+na$$

当 $n\to\infty$ 时，变量 $1+na$ 无限增大，是发散的，因此，$|q|^n$ 也是发散的.

若 $0<|q|<1$, 设 $q=\dfrac{1}{q_1}$, 于是 $|q_1|>1$, 因而 $|q_1|^n>1+na>0$, 根据不等式的性质，得:

$$0<\frac{1}{|q_1^n|}<\frac{1}{1+na}$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+na}=0, \quad \lim 0=0$，根据定理 5，得:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|q_1^n|}=0, \quad \lim_{n\to\infty}|q|^n=\lim_{n\to\infty}|q^n|=0$$

从而，$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$, $0<|q|<1$.

例 7.10 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r^n}{n!}=0$

证明: 设 $a_n=\dfrac{r^n}{n!}$，因 r 是常数且 n 在无限增大过程中必有一自然数 k, 使得 $k\le|r|<k+1$，于是

$$\frac{|r|}{k+1}<1$$

又:

$$\begin{aligned}|a_n|=\left|\frac{r^n}{n!}\right|&=\frac{|r|^k}{k!}\left(\frac{|r|}{k+1}\cdot\frac{|r|}{k+2}\cdots\frac{|r|}{n}\right)\\&<\frac{|r|^k}{k!}\cdot\left|\frac{r}{k+1}\right|^{n-k}\\&=\frac{|k+1|^k}{k!}\cdot\left|\frac{r}{k+1}\right|^n\end{aligned}$$

$\because \quad \left|\dfrac{r}{k+1}\right|<1$

$\therefore$ 当 $n\to\infty$ 时，$\left|\dfrac{r}{k+1}\right|^n\to 0$

$\therefore \quad 0\le\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{r^n}{n!}\right|\le\lim_{n\to\infty}\dfrac{|k+1|^k}{k!}\left|\dfrac{r}{k+1}\right|^n=0$

$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}\dfrac{r^n}{n!}=0$

例 7.11 构造一个收敛于 $\sqrt{a}$ 的数列，然后证明构造的数列的极限是 $\sqrt{a}$.

解： 可以这样构造收敛于 $\sqrt{a}$ 的数列：取 x 是 $\sqrt{a}$ 的足够接近的有理近似值，使得误差 $|\alpha_1| < 1$．于是

$$\sqrt{a} = x_1 + \alpha_1$$

为估计 α_1 的值，两边平方得

$$a = x_1^2 + 2x_1\alpha_1 + \alpha_1^2$$

因为 $|\alpha_1| < 1$, 故 $|\alpha_1|^2$ 更小，可忽略不计，于是

$$a \approx x_1^2 + 2x_1\alpha_1$$
$$\alpha_1 \approx \frac{a - x_1^2}{2x_1}$$

把 $x_1 + \dfrac{a - x_1^2}{2x_1} = \dfrac{x_1^2 + a}{2x_1}$ 作为 $\sqrt{a}$ 的第二个近似值 x_2，即：

$$x_2 = \frac{x_1^2 + a}{2x_1}$$

为得到更精确的近似值，重复上面的过程，用 x_2 替换上面的 x_1, 同样得到 $\sqrt{a}$ 的第三个近似值

$$x_3 = \frac{x_2^2 + a}{2x_2}$$

一般地，若求得 $\sqrt{a}$ 的第 n 个近似值 x_n, 则下一近似值可由公式

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n} \tag{7.1}$$

求得.

现在我们来证明，这样求得的 $\sqrt{a}$ 近似值数列 (7.1) 收敛到 $\sqrt{a}$. 这也就是要证明误差 $|x_{n+1} - \sqrt{a}|$ 可以任意地小．为此，比较相邻的两个近似值的误差：

$$\alpha_n = x_n - \sqrt{a}, \qquad \alpha_{n+1} = x_{n+1} - \sqrt{a}$$

$$\alpha_{n+1} = x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n} - \sqrt{a} = \frac{\left(x_n - \sqrt{a}\right)^2}{2x_n} \tag{7.2}$$

因为 $\sqrt{a}$ 是算术根，其近似值 x_n 均为正值．因此，$\alpha_{n+1} > 0$, 即 $\alpha_2, \alpha_3, \ldots$ 均为正数．换言之，从第二个近似值开始以后所有近似值均为过剩近似值，而第一个近似值是可以是过剩的也可以是不足的．由 (7.2) 得

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = \left(\frac{x_n - \sqrt{a}}{2x_n}\right)(x_n - \sqrt{a}) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{a}}{2x_n}\right)(x_n - \sqrt{a})$$

$\because \quad x_n > \sqrt{a}, \quad \therefore \quad 0 < \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{a}}{2x_n} < \dfrac{1}{2}$，由此得

$$\left|x_{n+1} - \sqrt{a}\right| < \frac{1}{2}\left|x_n - \sqrt{a}\right| < \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left|x_{n-1} - \sqrt{a}\right| < \cdots < \left(\frac{1}{2}\right)^n \left|x_1 - \sqrt{a}\right|$$

$\therefore \quad 0 \le \lim\limits_{n\to\infty} \left|x_{n+1} - \sqrt{a}\right| \le \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \left|x_1 - \sqrt{a}\right|$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \left|x_1 - \sqrt{a}\right| = 0$，所以

$$\lim_{n\to\infty} \left|x_{n+1} - \sqrt{a}\right| = 0$$

即：$\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \sqrt{a}$.

现在看看这个方法逐次逼近 $\sqrt{a}$, 应用起来有多好！下面以 $\sqrt{2}$ 为例：

设 $x_1 = 1$，则：

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{2 + x_1^2}{2x_1} = \frac{3}{2} = 1.5 \\ x_3 &= \frac{2 + 1.5^2}{2 \times 1.5} = \frac{5.25}{3} = 1.4166666 \\ x_4 &= \frac{2 + 1.4166666^2}{2 \times 1.4166666} = 1.4142157 \end{aligned}$$

其误差 α_4 的近似值为

$$|\alpha_4| \approx \left|\frac{2 - x_4^2}{2x_4}\right| = \left|\frac{2 - 1.4142157^2}{2 \times 1.4142157}\right| = 0.000002$$

故 x_4 是 $\sqrt{2}$ 的具有 6 个有效数字的近似值，因此，$\sqrt{2} \approx 1.41421$（准确到 2×10^{-6}）.

习题 7.2

1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin \dfrac{n\pi}{2}}{\sqrt{n^2 + n}}$

2. 若 $|\phi(n+1)| \le k|\phi(n)|, \quad 0 < k < 1$，求证 $\lim\limits_{n\to\infty} \phi(n) = 0$.

3. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\phi(n+1)}{\phi(n)} = \ell, \quad -1 < \ell < 1$，求证 $\lim\limits_{n\to\infty} \phi(n) = 0$.

4. 应用上题，求 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{r^n}{n!}$.

5. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

6. 设数列 $\left\{\dfrac{p_n}{q_n}\right\}$ 是一个逐步定义的有理分数数列:

$$a_1=\frac{p_1}{q_1}=\frac{1}{1},\quad a_2=\frac{p_2}{q_2}=\frac{p_1+2q_1}{p_1+q_1}=\frac{1+2\times 1}{1+1}=\frac{3}{2}$$
$$a_3=\frac{p_3}{q_3}=\frac{p_2+2q_2}{p_2+q_2}=\frac{3+2\times 2}{3+2}=\frac{7}{5},\quad \cdots$$

由 $a_n=\dfrac{p_n}{q_n}$，我们定义 $a_{n+1}=\dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}=\dfrac{p_n+2q_n}{p_n+q_n}$.

试证明:

(a) 当 $a_n<\sqrt{2}$ 时，那么 $a_{n+1}>\sqrt{2}$, 反之，当 $a_n>\sqrt{2}$ 时，那么 $a_{n+1}<\sqrt{2}$.

(b) 若 a_n 是 $\sqrt{2}$ 的有理近似值，那么 $a_{n+1}=\dfrac{p_n+2q_n}{p_n+q_n}$ 是 $\sqrt{2}$ 的更好的有理近似值.

(c) 试证数列 $\left\{\dfrac{p_n}{q_n}\right\}$ 收敛到 $\sqrt{2}$.

7. 试用例 7.11 的方法求 $\sqrt{28}$, 准确到 10^{-4}.

8. 求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^\beta}{a^n}=0$, 这里 a 为大于 1 的定值，β 为一整数.

第三节　数列极限的四则运算

定义

给定两个变量 a_n 和 b_n, 它们各自取数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的值，如果变量 c_n 取数列 $\{a_n+b_n\}$ 的数值，即两个数列对应项的和，那么就称变量 c_n 为这两个变量 a_n 与 b_n 的和，记作 $c_n=a_n+b_n$.

用同样的方法，我们可以定义两个变量的差 $c_n=a_n-b_n$, 两个变量的积 $c_n=a_n\cdot b_n$, 两个变量的商 $c_n=\dfrac{a_n}{b_n}$, $(b_n\neq 0)$.

例 7.12　已知 $a_n=6+\dfrac{4}{n}$, $b_n=3+\dfrac{1}{n}$, $(n=1,2,3,\ldots)$, 求这两个变量的和、差、积、商的变量.

解： 依定义

$$
\begin{aligned}
a_n + b_n &= 9 + \frac{5}{n} \\
a_n - b_n &= 3 + \frac{3}{n} \\
a_n \cdot b_n &= \left(6 + \frac{4}{n}\right)\left(3 + \frac{1}{n}\right) = 18 + \frac{18}{n} + \frac{4}{n^2} \\
\frac{a_n}{b_n} &= \frac{6 + \frac{4}{n}}{3 + \frac{1}{n}} = \frac{6n+4}{3n+1} = 2 + \frac{2}{3n+1}
\end{aligned}
$$

现在我们对这些变量求它们各自的极限值，显然有下面的等式

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 6 + 3 = 9$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 6 - 3 = 3$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 6 \cdot 3 = 18$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{6}{3} = 2$

上面这些等式，对于求变量的极限很方便，以后经常用到，于是我们得到关于极限算法定理如下：

定理

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$，则

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$，只要 $b_n \neq 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$

证明： 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$，对于任给 $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$，存在 N_1 使得当 $n \geq N_1$ 时，有

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

同样存在 N_2 使得当 $n \geq N_2$ 时，有

$$|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$$

取 $N = \max(N_1, N_2)$, 于是当 $n \geq N$ 时，便同时有

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$$

因此，当 $n \geq N$ 时，有

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| = |(a_n - A) + (b_n - B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

因此，$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 同样地，可以证明等式 2.

为了证明等式 3，我们要用到加、减同一个量的方法，

$$\begin{aligned}|a_nb_n - AB| &= |a_nb_n - Ab_n + Ab_n - AB| \\ &= |b_n(a_n - A) + A(b_n - B)| \\ &\leq |b_n| \cdot |a_n - A| + |A| \cdot |b_n - B|\end{aligned}$$

因此，如果 $|b_n| \cdot |a_n - A| + |A| \cdot |b_n - B| < \varepsilon\ (n \geq N)$，等式 3 就一定成立. 因为变量 b_n 有极限，所以变量 b_n 一定**有界**，即存在正数 M, 使得 $|b_n| < M$. 由于这样的 M 不只一个，凡比 M 大的数都满足上面不等式，故我们选取 M 时可以要求它也满足 $|A| < M$, 于是，我们这样选取自然数 N, 使得当 $n \geq N$ 时，同时成立

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2M}, \qquad |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

这样，

$$|a_nb_n - AB| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{|A|\varepsilon}{2M} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

因此，等式 3 成立.

最后来证明 4. 其实只证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{B}$ 就够了，为了证明，当 $n \geq N$, 有

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B}\right| = \frac{|B - b_n|}{|Bb_n|} = |B - b_n| \left|\frac{1}{Bb_n}\right| < \varepsilon$$

只要能证明数列 $\left\{\frac{1}{Bb_n}\right\}$ 是有界的就可以了. 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} Bb_n = B \lim\limits_{n\to\infty} b_n = B^2 > 0$, 所以当给定 $\varepsilon' = \frac{B^2}{2}$, 就一定存在自然数 N, 使得当 $n \geq N$ 时，有

$$-\frac{B^2}{2} < Bb_n - B^2 < \frac{B^2}{2}$$

即

$$\frac{B^2}{2} < Bb_n < \frac{3B^2}{2}$$

从而 $\dfrac{2}{3B^2} < \dfrac{1}{Bb_n} < \dfrac{2}{B^2}$,

取 $M = \max\left(\left|\dfrac{2}{3B^2}\right|, \left|\dfrac{1}{Bb_1}\right|, \left|\dfrac{1}{Bb_2}\right|, \dots, \left|\dfrac{1}{Bb_{N-1}}\right|, \left|\dfrac{2}{B^2}\right|\right)$

于是，对于一切自然数 n, 有：$\left|\dfrac{1}{Bb_n}\right| \le M$. 因此，

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B}\right| = |B - b_n| \left|\frac{1}{Bb_n}\right| \le |B - b_n| M$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, 我们选出自然数 N_1, 使得当 $n \ge N_1$ 时，有

$$|B - b_n| < \frac{\varepsilon}{M}$$

从而当 $n \ge N_1$ 时，有

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B}\right| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$$

因此，$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{b_n} = \dfrac{1}{B}$，最后根据等式 3，得到：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{A}{B} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}, \quad (b_n \ne 0,\ B \ne 0)$$

对于这个定理的应用，我们提醒几点注意：

1. 等式 1 和 3 可以推广到有限多个变量的情形，但对无穷多个变量一般不成立.

2. 定理的求极限法则是在事先假定了变量 a_n, b_n 的极限都存在的情形下得到的(在除的时候, 还需分母的极限不为零), 这些条件仅仅是变量 $a_n \pm b_n$, $a_n \cdot b_n$, $\dfrac{a_n}{b_n}$ 的极限存在的充分条件而不是必要条件，例如变量 $a_n = n + \dfrac{1}{n}$ 和 $b_n = -n$ 都是发散的，而 $a_n + b_n \to 0$；又例如 $a_n = (-1)^n$，$b_n = (-1)^{n-1}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$, 而 $a_n + b_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} \to 0$, $a_n b_n = -\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \to -1$, $\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{-n}{n+1} \to -1$.

3. 等式 1—4 使我们可以将有理运算同求极限过程交换先后次序，所得结果相同，这样就给求极限过程带来很大方便.

4. 在 $a_n \to \infty, b_n \to \infty$ 的情形下，求 $a_n \pm b_n$, $\dfrac{a_n}{b_n}$ 的极限，需要先对式子变形使满足定理的条件.

例 7.13 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+4n-1}{4n^2-n+3}$

解:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+4n-1}{4n^2-n+3} &= \lim_{n\to\infty} \frac{3+\dfrac{4}{n}-\dfrac{1}{n^2}}{4-\dfrac{1}{n}+\dfrac{3}{n^2}} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{4}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(4-\dfrac{1}{n}+\dfrac{3}{n^2}\right)} \\
&= \frac{3+0-0}{4-0+0} = \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

例 7.14 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{P+1}-1}{\dfrac{1}{n}}$

解:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{P+1}-1 = \frac{1}{n}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{P}+\left(1+\frac{1}{n}\right)^{P-1}+\cdots+\left(1+\frac{1}{n}\right)+1\right]$$

显然:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{P+1}-1}{\dfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{P}+\left(1+\frac{1}{n}\right)^{P-1}+\cdots+\left(1+\frac{1}{n}\right)+1\right]$$

中括号内共有 P+1 项,首项是 P 个 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ 的乘积,应用定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{P}=1$, 同理知其它各项的极限为 1, 故

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{P+1}-1}{\dfrac{1}{n}} = 1+1+\cdots+1 = P+1$$

例 7.15 讨论正整数 n 的有理分式

$$s(n)=\frac{a_0n^p+a_1n^{p-1}+\cdots+a_p}{b_0n^q+b_1n^{q-1}+\cdots+b_q}$$

当 $n\to\infty$ 时的变化情形.

解: 我们对 $s(n)$ 作变形，将它改写成下面的形式

$$n^{p-q}\left[\frac{a_0+\dfrac{a_1}{n}+\cdots+\dfrac{a_p}{n^p}}{b_0+\dfrac{b_1}{n}+\cdots+\dfrac{b_q}{n^q}}\right]$$

在花括内的分式，其分子和分母都是以 $\dfrac{1}{n}$ 为变量的多项式，因此，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0+\dfrac{a_1}{n}+\cdots+\dfrac{a_p}{n^p}}{b_0+\dfrac{b_1}{n}+\cdots+\dfrac{b_q}{n^q}}=\frac{a_0}{b_0}$$

现在，

- 如果 $p<q$, 那么 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{p-q}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{q-p}}=0$;
- 如果 $p=q$, 那么 $n^{p-q}=n^0=1$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{p-q}=1$;
- 如果 $p>q$, 那么 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{p-q}=+\infty$.

因此，

$$\lim_{n\to\infty}s(n)=\begin{cases}0 & p<q\\ \dfrac{a_0}{b_0} & p=q\\ +\infty & p>q,\quad \dfrac{a_0}{b_0}>0\end{cases}$$

上面的例子说明我们只了解分子，分母的变化性态或它们的极限值，还不能判断它们比的性态，它们比的性态要由分式本身的性质来决定. 因此：如果 $a_n\to\infty$, $b_n\to\infty$ 或 $a_n\to0$, $b_n\to0$ 我们就说 $\dfrac{a_n}{b_n}$ 表示 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 或 $\dfrac{0}{0}$ 的**未定式**.

习题 7.3

求下列各变量的极限:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+3\right)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5-1(n+1)}{n}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}+\frac{4n-1}{n}\right)$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n+1}{2n-1}-\frac{3}{2^n}\right)$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+1}{4n^3-n-2}$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+4}{2n^2-3n-4}$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1000n}{n^2+1}$

8. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{n}$

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2\sin n!}{n^3}$

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n-1}{2^n}$

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2-5c+\sin n}{4n^2+7n+6}$

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$

第四节 无穷级数和无限小数

一、无穷级数概念

有穷级数是有限个数的和，如

$$u_1+u_2+\cdots+u_n,\quad \text{或者}\quad \sum_{i=1}^{n}u_i$$

显然，每一个有穷级数都有确定的和.

无穷级数指无穷多个数：$u_1,u_2,\ldots,u_n,\ldots$ 连加的式子

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots,\quad \text{或者}\quad \sum_{i=1}^{\infty}u_i$$

由于这个式子包含无穷个加数，一般地说，我们不能指望得到最后的结果.

例如，求所有的自然数的和：

$$1+2+3+\cdots+n+(n+1)+\cdots$$

是不能得到最后结果的.

但是对于一些特殊的无穷级数，我们可以求和.

例如：一个单位正方形，每次取它面积的一半，累加起来，得到无穷级数，（如图 7.4）

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots$$

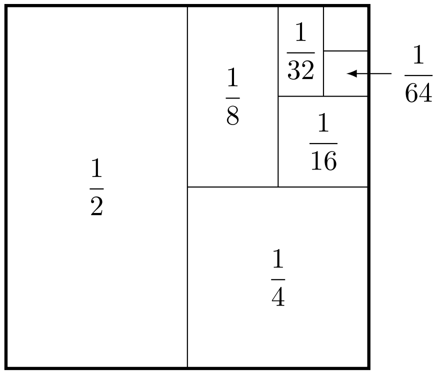


图 7.4

从这个无穷级数里，依次取出前 n 项的部分和 S_n, 得到数列 $\{s_n\}$:

$$s_1=\frac{1}{2},\quad s_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4},\quad s_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8},\cdots$$

$$s_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n,\cdots$$

我们看到，这个数列 $\{s_n\}$ 和原正方形的关系是:

1. 前 n 项部分和 s_n 小于 1;

2. s_n 与 1 的误差 $|s_n-1|$, 只要 n 充分大，就可以小到任意小.

因此，前 n 项部分和 s_n 的极限是 1, 即

$$\lim_{n\to\infty}s_n=1$$

我们可以这样理解无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 的意义，它就是前 n 项部分和 s_n 的极限值，于是

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=1$$

我们说，这个无穷级数收敛到 1, 而前 n 项的部分和 s_n 是这个极限的近似值.

现在，我们可以赋予这一类收敛的无穷级数以和的意义.

定义

如果无穷级数 $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ 的前 n 项部分和 s_n 所组成的数列 $\{s_n\}$ 有极限值，即 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=s$, 那么，这个无穷级数就叫做收敛的，并把这个确定的数 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=s$ 叫做这个无穷级数的和，即

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n=\lim_{n\to\infty} s_n=s$$

下面我们用收敛的数列来构造收敛的无穷级数. 假设数列 $\{a_n\}$ 是收敛的，即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$, 令 $b_i=a_i-a_{i-1}$, $i=1,2,\ldots$, 即得一个新数列 $\{b_n\}$. 无穷级数 $b_1+b_2+\cdots+b_n+b_{n+1}+\cdots$ 是收敛的.

事实上，这个级数的部分和是：

$$s_1=b_1=a_1-a_0$$

$$s_2=b_1+b_2=(a_1-a_0)+(a_2-a_1)=a_2-a_0$$

$$s_3=b_1+b_2+b_3=(a_1-a_0)+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)=a_3-a_0$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$$s_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=(a_1-a_0)+(a_2-a_1)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=a_n-a_0$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

因此：

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} b_i&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} b_i=\lim_{n\to\infty}(a_n-a_0)\\&=\lim_{n\to\infty} a_n-a_0\end{aligned}\tag{7.3}$$

因此，无穷级数 $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ 是收敛的.

例 7.16 令 $a_n=1-\dfrac{1}{n+1}$, $n=0,1,2,\ldots$, 显然 $\{a_n\}$ 是收敛的，并且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$.

令

$$\begin{aligned}b_i&=a_i-a_{i-1}=\left(1-\frac{1}{i+1}\right)-\left(1-\frac{1}{i}\right)\\&=\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}=\frac{1}{i(i+1)}\end{aligned}$$

于是，

$$\begin{aligned}\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)} &= \lim_{n\to\infty} a_n - a_0\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n-1}\right)-0=1\end{aligned}$$

上面 (7.3) 式也表示，要求一个无穷级数的和 $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$，常将 b_i 分解，使 $b_i = a_i - a_{i-1}$，于是求无穷级数的和就转化为求数列 $\{a_n\}$ 的极限.

例 7.17 求以下无穷等比级数的和.

$$a_1 + a_q + a_1 q^2 + \cdots + a q^{n-1} + \cdots \qquad (|q|<1)$$

解： 我们在本章中，已经证明，若 $|q|<1$, 则 $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$. 因为：

$$s_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1 q^n}{1-q}$$

所以，

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1}{1-q}\lim_{n\to\infty} q^n = \frac{a_1}{1-q}$$

因此：

$$a_1 + a_q + a_1 q^2 + \cdots + a q^{n-1} + \cdots = \frac{a_1}{1-q} \quad (|q|<1)$$

为了讨论循环小数及以后的需要，让我们用下面两个定理作为本节的总结.

定理 1

无穷等比级数，$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$ 收敛的充分必要条件是公比 q 的绝对值 $|q|<1$, 此时，它的和是 $\dfrac{a_1}{1-q}$，（注意这里 $q\neq 1$).

证明： 上面的例 7.17 已证明了 $|q|<1$ 是 $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = \dfrac{a_1}{1-q}$ 的充分条件. 要证必要性，我们只须注意到，如果 $|q|\geq 1$, 那么 $a_n = a_1 q^{n-1}$ 是发散的，于是，$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$ 也是发散的（见下面的定理 2).

定理 2

无穷级数 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ 收敛的必要条件是 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

证明： 因为 $a_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) = s_n - s_{n-1}$

由于 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ 是收敛的，故有

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0$$

下面的例题说明这个条件不是充分的.

例 7.18 $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}+\cdots$ 是发散级数，为什么呢?

解: 我们首先注意到这是正项级数，因此，部分和会越来越大，而且

$$\begin{aligned}
&s_1 = 1\\
&s_2 = 1+\frac{1}{2}\\
&s_4 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} > 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\\
&s_8 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\\
&\quad > 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

一般地，

$$s_{2^m} = 1+\overbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}}^{m\text{ 个}} = \frac{m+2}{2}$$

因为，当 m 无限增大时，$\dfrac{m+2}{2}$ 越来越大毫无止境，故 s_{2^m} 也发散到无穷大，又总有这样的 n 满足 $2^m < n$, 故当 $m\to\infty$ 时，也使 $m\to\infty$, $s_n > s_{2^m}\to\infty$, 即 s_n 也发散到无穷大.

注意到: $a_n\to 0$, 但如果数列 $\{s_n\}$ 中的子数列 $\{s_{2^m}\}$ 是发散的, 那么 $\{s_n\}$ 也是发散的.

二、无限小数与十分逼近

在这一节, 我们要用无限十进小数来描述实数, 要说明无限小数的意义, 证明每一个循环小数都等于一个分数，而每一个分数都等于一个循环小数.

现在我们借助十分逼近法去规定实数的无限十进小数表示. 考察某实数 x. 将数轴分为单位线段，各分点均为整数. 点 x 在某一线段内，或者本身就是一

个分点. 如果 x 是相邻两个单位线段的分点, 约定 x 属于线段的左端点. 于是, 存在一个整数 α_0, 使得

$$\alpha_0 \leq x < \alpha_0 + 1, \quad \text{即 } x \in \overline{A_0B_0} = (\alpha_0, \alpha_0 + 1)$$

$\alpha_0 + \dfrac{1}{10}$, $\alpha_0 + \dfrac{2}{10}$, $\alpha_0 + \dfrac{3}{10}$, $\dots$, $\alpha_0 + \dfrac{9}{10}$ 这些点将 $\overline{A_0B_0} = (\alpha_0, \alpha_0 + 1)$ 分为十等份, 点 x 必在某一个分段内, 或者 x 本身是一个分点, 如果是分点, 约定 x 属于分段的左端点, 在这两种情况下, 存在一个整数 α_1, $(0 \leq \alpha_1 \leq 9)$, 使得

$$\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} \leq x < \alpha_0 + \frac{\alpha_1 + 1}{10}$$

即: $x \in \overline{A_1B_1} = \left[\alpha_0 + \dfrac{\alpha_1}{10}, \alpha_0 + \dfrac{\alpha_1 + 1}{10}\right)$.

再将线段 $\overline{A_1B_1}$ 十等分, 我们可以找到一个整数 α_2 ($0 \leq \alpha_2 \leq 9$), 使得

$$\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} \leq x < \alpha_0 + \frac{\alpha_1 + 1}{10} + \frac{\alpha_2 + 1}{10^2}$$

即: $x \in \overline{A_2B_2} = \left[\alpha_0 + \dfrac{\alpha_1}{10} + \dfrac{\alpha_2}{10^2}, \alpha_0 + \dfrac{\alpha_1 + 1}{10} + \dfrac{\alpha_2 + 1}{10^2}\right)$.

经过 n 步以后, x 必在线段 $\overline{A_nB_n}$ 之中, 即

$$\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{10^n} \leq x < \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \cdots + \frac{\alpha_n + 1}{10^n}$$

这里 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 都是 0 到 9 之间的整数, 线段 $\overline{A_nB_n}$ 之长度等于 $\dfrac{1}{10^n}$, 而有限十进小数 $\alpha_0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ 和 $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\cdots(\alpha_n + 1)$ 分别是 x 的准确到 $\dfrac{1}{10^n}$ 的不足近似值和过剩近似值.

让这个十分逼近过程无限地进行下去, 那么实数 x 就完全可以由无限小数 $\alpha_0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\cdots$ 来表示, 同时由于 x 与有限小数近似值的误差

$$|\alpha_0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n - x| < \frac{1}{10^n}, \qquad |\alpha_0.\alpha_1\alpha_2\cdots(\alpha_n + 1) - x| < \frac{1}{10^n}$$

当 n 充分大时, 可以小到任意小, 所以无限小数 $x = \alpha_0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\cdots$ 是由有限十进小数组成的两个数列:

$$\alpha_0,\ \alpha_0.\alpha_1,\ \alpha_0.\alpha_1\alpha_2,\ \dots,\ \alpha_0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n,\ \dots$$

与

$$(\alpha_0 + 1),\ \alpha_0.(\alpha_1 + 1),\ \alpha_0.\alpha_1(\alpha_2 + 1),\ \dots, \alpha_0.\alpha_1\alpha_2\cdots(\alpha_n + 1),\ \dots$$

的共同的极限值.

无限小数的定义是这样的，我们取实数的小数点以下第 n 位为止的有限小数 $\alpha_0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$，记作 x_n，即 $x_n=\alpha_0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$，那么数列 $\{x_n\}$ 的极限值是这个无限小数，用式子表示就是

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x = \alpha_0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\cdots$$

例 7.19 $\dfrac{2}{3}=0.\dot{6}$ 表示数列 $\{x_n\}$ 的极限：

$$x_1=0.6,\ x_2=0.66,\ x_3=0.666,\ldots,\ x_n=0.\underbrace{66\cdots66}_{n\text{ 位小数}},\ \ldots$$

例 7.20 无限小数 $\pi=3.1415926\cdots$ 的意思是，令

$$x_1=3.1,\ x_2=3.14,\ x_3=3.141,\ \ldots$$

那么 $x_n\to\pi$.

注意，在上面我们用十分逼近得到实数 x 的无限十进小数表示时，在 x 是十等分的一个分点的情形，如果不限定 x 属于两相邻线段的左端点，那么对于同一个整数或有限小数，可能有两类不同的无限十进小数表示法．例如

$$1=1.0000\cdots=0.999\cdots,\quad 2.35=2.35000\cdots=2.34999\cdots$$

为排除这种不确定性，按照我们的约定，就可以去掉那些从某一位以后有数字都是 9 的十进小数表达式.

把实数写成小数形式，便于比较它们的大小．在比较时，遇到以 9 为循环节结尾的无限小数都用以 0 为循环节结尾的无限小数代替.

今有两个实数 $x=\alpha_0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\cdots$ 和 $y=\beta_0.\beta_1\beta_2\cdots\beta_n\cdots$，比较这两个实数 x 和 y 的大小，只须比较两个数的各数位上的数字，并且注意在哪一个数位上的数字不同，从而告诉我们哪个实数大.

例如：$\dfrac{17}{20}=0.850000\cdots$，$\dfrac{45}{53}=0.84905000\cdots$，看一眼就能发觉，它们有相同的第一位小数，$\dfrac{17}{20}$ 的第二位小数大于 $\dfrac{45}{53}$ 的第二位小数，因此，$\dfrac{17}{20}>\dfrac{45}{53}$.

一般地，我们说 $x>y$, 如果下面的条件中有一个成立

1. $\alpha>\beta$

2. $\alpha=\beta$，而 $\alpha_1>\beta_1$

3. $\alpha=\beta,\alpha_1=\beta_1,\ldots,\alpha_\ell=\beta_\ell$，而 $\alpha_{\ell+1}>\beta_{\ell+1}$

根据前面的讨论，我们知道任何一个实数都是两个有限十进小数的夹逼数列的极限.

设 $\lim x_n = x = \lim x'_n$, $\lim y_n = y = \lim y'_n$, 或者

$$x_n \to x \leftarrow x'_n, \qquad y_n \to y \leftarrow y'_n$$

$$x'_n - x_n \to 0, \qquad y'_n - y_n \to 0$$

则对应数列的相加，我们有实数的相加，对应于数列相乘，我们有实数的相乘，也就是说：

$$\lim(x_n + y_n) = x + y = \lim(x'_n + y'_n)$$
$$\lim(x_n \cdot y_n) = x \cdot y = \lim(x'_n \cdot y'_n)$$

例如 $\sqrt{2} = 1.4142135\cdots$, $\sqrt{3} = 1.7320508\cdots$,

$$\begin{cases} x_n + y_n \\ x'_n + y'_n \end{cases} \qquad \begin{cases} 1.4 + 1.7 = 3.1 \\ 1.5 + 1.8 = 3.3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1.41 + 1.73 = 3.14 \\ 1.42 + 1.74 = 3.16 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1.414 + 1.732 = 3.146 \\ 1.415 + 1.733 = 3.148 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1.4142 + 1.7320 = 3.1462 \\ 1.4143 + 1.7321 = 3.1464 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1.41421 + 1.73205 = 3.14626 \\ 1.41422 + 1.73206 = 3.14628 \end{cases} \quad \cdots$$

即: $3.1 < 3.14 < 3.146 < 3.1462 < 3.14626 < \cdots < \sqrt{2}+\sqrt{3} < \cdots < 3.14628 < 3.1464 < 3.148 < 3.16 < 3.3$

$\therefore$ $\sqrt{2} + \sqrt{3} = 3.1462\cdots$. 只要把 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ 的夹逼小数求到足够多的数位，我们用上面的方法就可以把 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 的小数表示求到任意的数位上.

同样地得到

$$\begin{cases} x_n \cdot y_n \\ x'_n \cdot y'_n \end{cases} \qquad \begin{cases} 1.4 \times 1.7 = 2.38 \\ 1.5 \times 1.8 = 2.70 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1.41 \times 1.73 = 2.4393 \\ 1.42 \times 1.74 = 2.4708 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1.414 \times 1.732 = 2.449048 \\ 1.415 \times 1.733 = 2.452195 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1.4142 \times 1.7320 = 2.4493944 \\ 1.4143 \times 1.7321 = 2.449709 \end{cases} \quad \cdots$$

$\therefore$ $\sqrt{6} = 2.449\cdots$.

在无限小数中，除了有一类**无限循环小数**，还有一类**无限不循环小数**，譬如，0.1001000100001 $\cdots$, 就是一个无限不循环小数.

现在我们要来证明每一个循环小数都等于一个分数，而每一个分数都等于一个循环小数. 先举几个将无限循环小数化为分数的例子，再给出一般的证明.

例 7.21　怎样将循环小数 $0.\overline{621}$ 化成分数?

解: 我们可以将无限小数 $0.\overline{621}$ 表示成一个无穷级数

$$\begin{aligned}0.\overline{621} &= 0.621 + 0.000621 + 0.000000621 + \cdots \\ &= \frac{621}{10^3} + \frac{621}{10^6} + \frac{621}{10^9} + \cdots\end{aligned}$$

显然，这个无穷级数是无穷等比级数，它的首项 $a_1 = \dfrac{621}{10^3}$, 公比 $q = \dfrac{1}{10^3}$ 根据 4.1 中的定理，这个无穷等比级数的和是 $\dfrac{a_1}{1-q}$，因此:

$$\begin{aligned}0.\overline{621} &= \frac{621}{10^3} + \frac{621}{10^6} + \frac{621}{10^9} + \cdots \\ &= \frac{621}{10^3} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{1}{10^3}} = \frac{621}{10^3} \cdot \frac{10^3}{10^3 - 1} \\ &= \frac{621}{999} = \frac{23}{37}\end{aligned}$$

例 7.22　试将 $0.3\overline{12}$ 化成分数.

解:

$$\begin{aligned}0.3\overline{12} &= 0.3 + 0.0\overline{12} = 0.3 + (0.012 + 0.00012 + \cdots) \\ &= \frac{3}{10} + \left(\frac{12}{10^3} + \frac{12}{10^5} + \cdots\right) \\ &= \frac{3}{10} + \frac{12}{10^3} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{1}{10^2}} \\ &= \frac{3}{10} + \frac{12}{10^3} \cdot \frac{10^2}{10^2 - 1} \\ &= \frac{3}{10} + \frac{12}{10} \cdot \frac{1}{99} = \frac{309}{990} = \frac{103}{330}\end{aligned}$$

下面，我们来证明任何一个循环小数一定是一个分数.

如果 a 是个循环小数，它的循环节是由第 $k+1$ 位开始到 $k+\ell$ 位，平常我们写作

$$a = a_0.c_1c_2\cdots c_k\overline{c_{k+1}c_{k+2}\cdots c_{k+\ell}}$$

它的意思是

$$\begin{aligned}a = a_0 &+ \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \cdots + \frac{c_k}{10^k} + \frac{c_{k+1}}{10^{k+1}} + \cdots + \frac{c_{k+\ell}}{10^{k+\ell}} \\ &+ \frac{c_{k+1}}{10^{k+\ell+1}} + \cdots + \frac{c_{k+\ell}}{10^{k+2\ell}} + \frac{c_{k+1}}{10^{k+2\ell+1}} + \cdots + \frac{c_{k+\ell}}{10^{k+3\ell}} + \cdots\end{aligned}$$

虽然，这不是无穷等比级数，现在用结合律来构造这个无穷级数的部分和的子数列：

设 $S_1 = a_0 + \dfrac{c_1}{10}$, $\quad S_2 = a_0 + \dfrac{c_1}{10} + \dfrac{c_2}{10^2}, \ldots$ 于是第 k 个部分和是

$$S_k = a_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \cdots + \frac{c_k}{10^k}$$

再令

$$d = \frac{c_{k+1}}{10^{k+1}} + \frac{c_{k+2}}{10^{k+2}} + \cdots + \frac{c_{k+\ell}}{10^{k+\ell}}$$

所以，d 是分数，而且 $0 \le d < 1$

那么，第 $k+m\ell$ 个部分和是

$$\begin{aligned}S_{k+m\ell} &= S_k + d + \frac{d}{10^\ell} + \frac{d}{10^{2\ell}} + \cdots \frac{d}{10^{(m-1)\ell}} \\ &= S_k + d\left(1 + \frac{1}{10^\ell} + \frac{1}{10^{2\ell}} + \cdots + \frac{1}{10^{(m-1)\ell}}\right) \\ &= S_k + \frac{d\left(1 - \dfrac{1}{10^{m\ell}}\right)}{1 - \dfrac{1}{10^\ell}}\end{aligned}$$

当 $m = 1, 2, 3, \ldots$ 时，部分和 $S_{k+m\ell}$ 就构成无穷级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 的子数列 $\{S_{k+m\ell}\}$, 并且

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty} S_{k+m\ell} &= \lim_{m\to\infty}\left\{S_k + \frac{d\left(1 - \dfrac{1}{10^{m\ell}}\right)}{1 - \dfrac{1}{10^\ell}}\right\} \\ &= S_k + \frac{d}{1 - \dfrac{1}{10^\ell}} = S_k + \frac{10^\ell \cdot d}{10^\ell - 1} = a'\end{aligned}$$

这里 a' 表示分数．我们只证明了部分和数列的子数列 $\{S_{k+m\ell}\}$ 收敛到分数 a', 还需要证明部分和数列 $\{S_n\}$ 也收敛到 a'.

我们只须注意到原来的循环小数所代表的无穷级数也都是正项的，这就是说，部分和数列 $\{S_n\}$ 是递增数列，特别地，如果 $k+m\ell \le n < k+(m+1)\ell$，那么 $S_{k+m\ell} \le S_n \le S_{k+(m+1)\ell}$，因此，如果“子数列” $\{S_{k+m\ell},\ m=1,2,3,\dots\}$ 收敛到 a', 原数列 $\{S_n\}$ 也收敛到 a'.

我们已证明了，每个循环小数都可以化为分数，现在证明分数可以化为循环小数.

设 $\dfrac{a}{b}$ 为一任意给定的不可约真分数（亦即 a,b 互质且 $a<b$).

1. b 只含有 2 或 5 的质因子，则容易看出可以化 $\dfrac{a}{b}$ 成有限位小数.

   事实上，设 $b=2^\alpha 5^\beta$, $d=5^{\alpha-\beta}a$, 若 $\alpha \ge \beta$，则

   $$\frac{a}{b}=\frac{a}{2^\alpha 5^\beta}=\frac{5^{\alpha-\beta}a}{10^\alpha}=\frac{d}{10^\alpha}$$

   为 α 位小数. 我们可以把有限位小数看成循环小数的特例. 如:

   $$\frac{1237}{2\times 5^3}=\frac{1237\times 2^2}{10^3}=4.948=4.948\overline{0}$$

2. 设 b 与 10 互质，即：$(b,10)=1$, 根据整数分解的唯一性而知 $\dfrac{a}{b}$ 不可能写成 $\dfrac{m}{10^k}$ 的形式，这里 m 为正整数，故 $\dfrac{a}{b}$ 不可能化为有限小数. 做除法，我们得到

   $$10a=bq_1+r_1, \qquad 0<r_1<b$$

   两边再除以 b, 得

   $$\frac{10a}{b}=q_1+\frac{r_1}{b}, \qquad 0<\frac{r_1}{b}<1$$

   这里 q 是 $0,1,2,\dots,9$ 这十个整数中的某个. 用和上面同样的方法，逐步得到

   $$\begin{aligned}\frac{10r_1}{b}&=q_2+\frac{r_2}{b}, \qquad 0<\frac{r_2}{b}<1,\\ \frac{10r_2}{b}&=q_3+\frac{r_3}{b}, \qquad 0<\frac{r_3}{b}<1,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{10r_{n-1}}{b}&=q_n+\frac{r_n}{b}, \qquad 0<\frac{r_n}{b}<1\end{aligned}$$

这里每个 q_n 是 $0,1,2,\ldots,9$ 这十个整数中的某个，于是

$$\begin{aligned}\frac{a}{b}&=\frac{q_1}{10}+\frac{r_1}{10b}\\&=\frac{q_1}{10}+\frac{q_2}{10^2}+\frac{r_2}{10^2b}\\&=\frac{q_1}{10}+\frac{q_2}{10^2}+\frac{q_3}{10^3}+\frac{r_3}{10^3b}\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&=\frac{q_1}{10}+\frac{q_2}{10^2}+\cdots+\frac{q_n}{10^n}+\frac{r_n}{10^nb}\end{aligned}$$

再设

$$\begin{aligned}x_n&=\frac{q_1}{10}+\frac{q_2}{10^2}+\cdots+\frac{q_n}{10^n}\\y_n&=\frac{q_1}{10}+\frac{q_2}{10^2}+\cdots+\frac{q_n+1}{10^n}\\d_n&=\frac{r_n}{10^nb}<\frac{1}{10^n}\end{aligned}$$

则:

$$\frac{a}{b}=x_n+d_n,\qquad 0<d_n<\frac{1}{10^n}$$

再有 $x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n<\cdots<y_n<y_{n-1}<\cdots<y_2<y_1$，且 $y_n-x_n\to 0.$

当 n 无限增大时，根据实数完备性，无限小数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_n}{10^n}=0.q_1q_2\cdots q_n\cdots$$

表示一实数，又因为，$d_n\to 0$, 故我们确定了一个其值为 $\frac{a}{b}$ 的无限小数 $0.q_1q_2\cdots q_n\cdots.$

再说明这个无限小数一定是纯循环小数,设 $a=r_0$, 因为 $r_0,r_1,r_2,\ldots,r_n,\ldots$ 是一串大于 0 而小于 b 的正整数, 这种正整数只有 $b-1$ 个不同的, 所以, 这一串数 $r_0=a,r_1,r_2,\ldots r_n,\ldots$ 必然有二者会相同, 就假定 r_k 为首先出现的重见余数，假定这两个相同的余数是 r_k 和 r_i, 即有 $r_k=r_i$. 现在我们要证明 r_i 只能是 $a=r_0$, 用反证法, 若 $i>0$ 则由等式 $\frac{10r_{k-1}}{b}=q_k+r_k$ 和 $\frac{10r_{i-1}}{b}=q_i+r_i$ 两边作减法，得到

$$\frac{10(r_{k-1}-r_{i-1})}{b}=q_k-q_i$$

因为 $q_k - q_i$ 是整数，所以 b 能整除 $10(r_{k-1} - r_{i-1})$, 由于 b 与 10 互质，故 b 能整除 $r_{k-1} - r_{i-1}$，但是 $r_{k-1} - r_{i-1} < b$, 所以 $r_{k-1} - r_{i-1} = 0$, 即 $r_{k-1} = r_{i-1}$ 重见更早，与原设 r_k 为首先出现的重见余数不合，故 $i = 0$.

$\therefore \quad r_k = r_0 = a$, 这样

$$\frac{a}{b} = 0.\overline{q_1 q_2 \cdots q_{k-1} q_k}$$

3. 设 $b = 2^{\alpha} 5^{\beta} b_1$, 而 $b_1 > 1$ 且与 10 互质，又 α 与 β 均不为 0, 若 $\alpha \geq \beta$,

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{2^{\alpha} 5^{\beta} b_1} = \frac{5^{\alpha-\beta} a}{10^{\alpha} b_1}$$

做 $5^{\alpha-\beta} a$ 除以 b_1, 得

$$5^{\alpha-\beta} a = M b_1 + r, \quad 0 < r < b$$

M 是一个正整数，两边再除以 b_1, 得

$$5^{\alpha-\beta} \frac{a}{b_1} = M + \frac{r}{b_1}, \qquad 0 < \frac{r}{b_1} < 1$$

由前段证明 2 的结果

$$\frac{r}{b_1} = 0.\overline{c_1 c_2 \cdots c_s}$$

故，

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{5^{\alpha-\beta} a}{10^{\alpha} b_1} = \frac{1}{10^{\alpha}} \left(M + 0.\overline{c_1 c_2 \cdots c_s}\right) \\ &= \frac{1}{10^{\alpha}} \left(M.\overline{c_1 c_2 \cdots c_s}\right) \end{aligned}$$

当以 10^{α} 除以 $M.\overline{c_1 c_2 \cdots c_s}$ 时，也就是将小数点左移 α 位，我们得到

$$\frac{a}{b} = 0.m_1 m_2 \cdots m_{\alpha} \overline{c_1 c_2 \cdots c_s}$$

为混循环小数.

若 $\alpha \leq \beta$, 可以用同样的方法说明 $\dfrac{a}{b}$ 为一混循环小数，因此有

定理

任何一个分数都等于某一个循环小数，任何一个循环小数必然是个分数.

如果采用无限十进小数来描述实数，我们按照下表来对实数分类：

$$\text{实数——无限十进小数} \begin{cases} \text{有理数—无限十进循环小数} \\ \text{无理数—无限十进不循环小数} \end{cases}$$

习题 7.4

1. 求下列无穷等比数列的和:

(a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\cdots$

(b) $1-\frac{2}{5}+\frac{4}{25}-\cdots$

(c) $\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}+\cdots$

(d) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}+1+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}+\cdots$

2. 若 a,b 是实数且 $\left|\frac{a+2b+3}{b+3}\right|+3(a+3b)^2=0$, 求等比级数 $ab+b+\frac{b}{a}+\cdots$ 的和.

3. 已知 $\sqrt{3}\sin\alpha-\cos\alpha=0$, α 为锐角, 求 $\sum_{n=0}^{\infty}(-\sin\alpha)^n$

4. 求下列无穷级数的和:

(a) $\frac{1}{1\times4}+\frac{1}{2\times5}+\frac{1}{3\times6}+\frac{1}{4\times7}+\cdots$

(b) $\frac{6}{2\times7}+\frac{6}{7\times12}+\frac{6}{12\times17}+\frac{6}{17\times22}+\cdots$

(c) $\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+\frac{1}{4\times5\times6}+\cdots$

(d) $\frac{1}{1\times2\times3\times4}+\frac{1}{2\times3\times4\times5}+\frac{1}{3\times4\times5\times6}+\frac{1}{4\times5\times6\times7}+\cdots$

(e) $\frac{1}{7}+\frac{2}{7^2}+\frac{3}{7^3}+\frac{1}{7^4}+\frac{2}{7^6}+\frac{3}{7^6}+\frac{1}{7^7}+\frac{2}{7^8}+\frac{3}{7^9}+\cdots$

5. 求下列各式的极限值:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}\qquad(|a|<1,\ |b|<1)$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}\right)$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^3}\right)$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

7. 数列 x_n $(n=1,2,3,\ldots)$ 是由下列各式所确定:

$$x_0=a,\ x_1=b,\ x_n=\frac{x_{n-2}+x_{n-1}}{2}\quad(n\geq2)$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

8. 将下列循环小数化为分数:

$$0.\overline{47},\qquad 2.\overline{234},\qquad 0.4\overline{7},\qquad 3.2\overline{31},\qquad 0.\overline{1108},\qquad 5.38\overline{90}$$

9. 求出下列各式的值:

(a) $0.\overline{48}\times 0.\overline{48}$

(b) $0.\overline{12}+0.\overline{83}+0.\overline{34}+\cdots+0.\overline{89}$

(c) $0.\overline{15}+0.0\overline{15}+0.00\overline{15}+\cdots$

第五节　数列极限在几何上的应用

在平面几何中，我们知道了什么是相似形，而且知道研究相似形的基本定理是“设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的三个内角对应相等，则其对应边长成比例”. 在初中时，我们证明了当比值是有理数时，定理是对的，现在要补充推证，在比值是无理数时，定理也是对的，这样这个定理的证明才是完整的.

证明: 设 $AB=kA'B'$, 这里 k 是无理数，我们要证明

$$\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=k$$

我们知道任何一个无理数可以用有理数来逼近,于是可以找到两串有理数 k'_n,k''_n 从左、右夹逼无理数 k 使得

$$k'_n\to k\leftarrow k''_n,\quad \text{或者}\quad \lim_{n\to\infty}k'_n=\lim_{n\to\infty}k''_n=k$$

比如，k 是特殊的情形，$k=\sqrt{2}$，则可取

$$\begin{aligned}&k'_1=1,\quad k'_2=1.4,\quad k'_3=1.41,\ \ldots\\&k''_1=1,\quad k''_2=1.5,\quad k''_3=1.42,\ \ldots\end{aligned}$$

如图 7.5, 在直线 AB 上取点列 $\{B_n\}$ 和 $\{\bar{B}_n\}$ 使得

$$AB_n=k'_nA'B',\qquad A\bar{B}_n=k''_nA'B'$$

再由 $B_n,\bar{B}_n$ 点分别作 BC 边平行线交 AC 线于 $C_n,\bar{C}_n$ 点，则因为相似三角形定理对有理数比值是对的，所以

$$\triangle AB_nC_n\backsim\triangle A\bar{B}_n\bar{C}_n\backsim\triangle A'B'C'$$

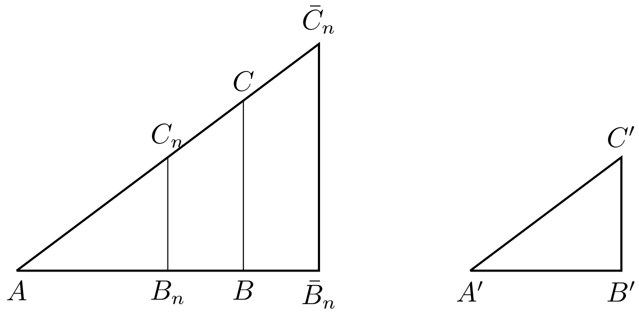


图 7.5

$$\frac{AB_n}{A'B'} = \frac{AC_n}{A'C'} = \frac{B_nC_n}{B'C'} = k'_n$$
$$\frac{A\bar{B}_n}{A'B'} = \frac{A\bar{C}_n}{A'C'} = \frac{\bar{B}_n\bar{C}_n}{B'C'} = k''_n$$

由作图知

$$k'_nA'B' = AB_n < AB < A\bar{B}_n = k''_nA'B'$$

并可得

$$k'_nA'C' = AC_n < AC < A\bar{C}_n = k''_nA'C'$$
$$k'_nB'C' = B_nC_n < BC < \bar{B}_n\bar{C}_n = k''_nB'C'$$

对上面不等式各端取极限，得到

$$\lim_{n\to\infty} k'_nA'C' = \lim_{n\to\infty} k''_nA'C' = kA'C'$$

另一方面又可得到

$$\lim_{n\to\infty} k'_nA'C' = \lim_{n\to\infty} k''_nA'C' = AC$$

根据数列的极限值是唯一的，因此 $AC = kA'C'$, 同理可得 $BC = kB'C'$.

总结上面的证明可以归纳成下面两点：

1. 先有一个数 k, 因为它是无理数，比较复杂，往往我们要用简单的有理数逐步逼近它；

2. 在求极限过程中，要点是要用极限值的唯一性保证所要的结论.

在几何上，π 表示单位圆的面积，这个面积显然能用一个有理数或无理数来表示，可是，如果我们想要以任何精确度计算出数元，这个定义对于我们来说并没有什么帮助. 这时，我们必须借助于求极限的过程，把数 π 表示为已知并且不难算出的数列的极限，除此外别无它法.

假如我们把单位圆等分成 $2n$ 个小扇形，然后一上一下间插排列起来，如图 7.6.

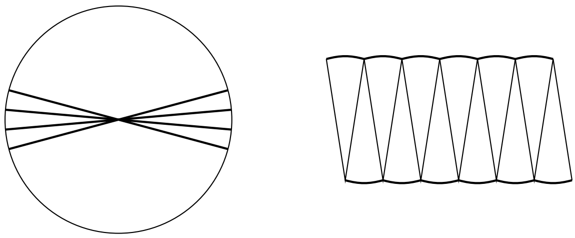


图 7.6

当 n 愈大时，上图就愈接近一个高为 1, 面积为 π 的矩形. 这也就说明了单位圆的圆周长等于 2π.

早在三国时代，我国古代数学家刘徽于公元 263 年在《九章算术》中，对古率 $\pi=3$ 极为不满，就提出了用折线逐步地来逼近曲线，用正多边形的面积来逐步地逼近圆的面积的思想，他说如果圆内接正六边形，正十二边形，二十四边形⋯⋯依次递求它的面积，边数愈增多则其面积与圆面积愈加接近，如果边数增加到无限则多边形面积的极限就与圆面积相等.

设 π 为单位圆面积，S_n 为单位圆的内接正 n 边形的面积，S 为单位圆的外切正 n 边形的面积，如图 7.7, 对于每一个 n, 从几何直观上作如下估计

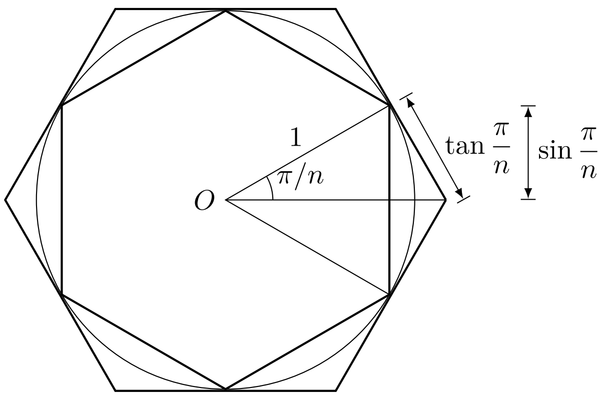


图 7.7

$S_n<S_{2n}<\pi<S'_{2n}<S'_n$，刘徽的计算理论基础是，$|S_n-\pi|<S'_n-S_n$, 在 n 无限增大时，$(S'_n-S_n)\to 0$. 从图 7.7 看出：

$$S'_n=2n\text{直角三角形的面积}=2n\cdot\frac{1}{2}\tan\frac{\pi}{n}=n\tan\frac{\pi}{n}$$

$$S_n=2n\text{直角三角形的面积}=2n\cdot\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{\pi}{n}=n\sin\frac{\pi}{n}\cdot\cos\frac{\pi}{n}$$

$$\begin{aligned}
S'_n - S_n &= n\left(\tan\frac{\pi}{n} - \sin\frac{\pi}{n}\cdot\cos\frac{\pi}{n}\right)\\
&= n\sin\frac{\pi}{n}\left(\frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n}} - \cos\frac{\pi}{n}\right)\\
&= \frac{1}{2}(\text{圆内接 } n \text{ 边形周长})\left(\frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n}} - \cos\frac{\pi}{n}\right)\\
&< \frac{1}{2}(\text{圆外切六边形周长})\left(\frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n}} - \cos\frac{\pi}{n}\right) \to 0
\end{aligned}$$

这就说明了由圆内接正多边形的面积所组成的数列 $\{S_{6\cdot 2^{n-1}}\}$ 的极限是 π.

让我们计算这个数列中的前面几个面积. 面积的通项是

$$S_{6\cdot 2^{n-1}} = 6\cdot 2^{n-1}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}\right) = 3\cdot 2^{n-1}\sin\frac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

为由 $\sin\dfrac{\pi}{n}$ 求出 $\sin\dfrac{\pi}{2n}$, 我们需要导出它们之间的递推关系:

$$\begin{aligned}
\sin\frac{\pi}{2n} &= \sqrt{\frac{1-\cos\dfrac{\pi}{n}}{2}}\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{n}}\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{2-2\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{n}}}
\end{aligned}$$

于是:

- 当 $n = 1$, $S_6 = 3\cdot\sin\dfrac{\pi}{3} = 2.5980762$,
- 当 $n = 2$, $S_{12} = 6\cdot\sin\dfrac{\pi}{6} = 3$,
- 当 $n = 3$,

$$\begin{aligned}
S_{24} = 12\cdot\sin\frac{\pi}{12} &= 12\left(\frac{1}{2}\sqrt{2-2\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}\right)\\
&= 12\cdot\left(\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}\right) = 12\times 0.258819 = 3.1058285
\end{aligned}$$

- 当 $n=4$,

$$\begin{aligned}S_{48}&=24\cdot\sin\frac{\pi}{24}=24\left(\frac{1}{2}\sqrt{2-2\sqrt{1-0.258819^2}}\right)\\&=24\times0.1305266=3.132639\end{aligned}$$

- 当 $n=5$,

$$\begin{aligned}S_{96}&=48\cdot\sin\frac{\pi}{48}=48\left(\frac{1}{2}\sqrt{2-2\sqrt{1-0.1305266^2}}\right)\\&=48\times0.0654031=3.1393515\end{aligned}$$

- 当 $n=6$,

$$\begin{aligned}S_{192}&=96\cdot\sin\frac{\pi}{96}=96\left(\frac{1}{2}\sqrt{2-2\sqrt{1-0.0654031^2}}\right)\\&=96\times0.032719=3.1410307\end{aligned}$$

现在我们对 π 的近似值 $S_{192}\approx3.1410307$ 的误差作如下估计

$$\begin{aligned}|S_{192}-\pi|&<192\left(\tan\frac{\pi}{192}-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{96}\right)\\&=192\left(0.0163639-\frac{1}{2}\times0.032719\right)\\&=0.000845\end{aligned}$$

刘徽定 $\pi\approx3.14$, 后世称之为**徽率**，在**刘徽**以后重新推算圆周率贡献最大的是南朝**祖冲之**（公元 429—500 年）. 祖冲之的著名结果为

$$3.1415926<\pi<3.1415927$$

$$密率\pi=\frac{355}{113},\qquad 约率\pi=\frac{22}{7}$$

全世界定圆周率值准确到 $\dfrac{1}{10^7}$ 的，当推**祖冲之**为第一人.

习题 7.5

1. 联结三角形 ABC 三边的中点 D,E,F, 作三角形 DEF, 再联结 $\triangle DEF$ 各边之中点，作 $\triangle GHI$, 如此下去，求所得一切三角形面积之总和与原三角形面积之比.

2. 从 $\angle BAC$ 边上一点 B 起，作 $BC\perp AC$, 从 C 作 $CD\perp AB$, 从 D 再作 $DE\perp AC$, 这样无限继续下去，设 $BC=7\text{cm}$, $CD=6\text{cm}$, 求这些垂线的和（图 7.8).

3. 有一束射线, 每相邻两条射线间的夹角为 α, 从一条射线上任一点对其紧邻的一射线作垂线 S_0, 从它的垂足再对下一射线作垂线 S_1, 依此类推（图 7.9). 问: $\lim\limits_{n\to\infty}(S_0+S_1+S_2+\cdots+S_n+\cdots)$

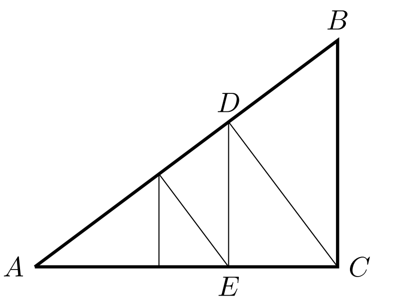


图 7.8

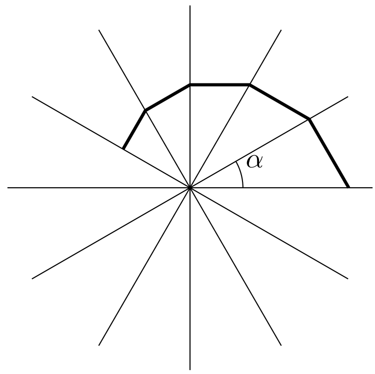


图 7.9

4. 直角三角形三边之长分别为 3,4,5, 作一圆内切于此三角形, 再作一圆外切于此圆, 并切于三角形的斜边和边长为 4 的直角边, 如此继续作下去, 则得到一个切圆的序列, 求这些圆的面积之和.

第六节 数列极限存在定理

前面在引进数列极限的定义时, 所考虑的许多数列的极限都是已经知道的, 然后再用数列极限的定义来验证,如果数列极限的概念仅能给出这样的认识,即一些已知数能够用另一些已知数的某些数列来逼近, 那么我们从极限概念所得到的东西太少了. 但是数列的一个最为重要的应用在于, 有些问题所要确定的数值往往不能用别的方法直接得知或表示, 却能用数列极限方式来表示. 例如我们用有理数逼近无理数, 又在上一节用圆内接正多边形的面积来逼近圆面积, 求出 π 的数值等, 这样的例子就是数列极限重要应用的典型例子. 因此我们构造的数列是否收敛就成为第一位重要问题了. 对于一个数列 $\{a_n\}$ 的极限, 事实上应该分成两个层次来讨论.

1. 存在性. 即数列 $\{a_n\}$ 是否有极限存在?

2. 求值问题. 假如已经确定了给定数列 $\{a_n\}$ 的极限存在，我们再设法求它的极限值，其实只要确定了 $\{a_n\}$ 的极限存在，那么这个极限值就是一个实数，而数列 $\{a_n\}$ 就是它的逐次逼近的近似数值，要点是去了解数列的性质，总之求值问题是个比较次要的问题了.

下面给出一个比较简单的极限存在定理.

定理

递增有上界的数列 $\{a_n\}$ 极限存在（同样递减，有下界数列 $\{a_n\}$ 的极限也存在）.

例如：数列 $\left\{\dfrac{n^2-1}{n^2}\right\}$ 符合定理的条件，因为 $0, \dfrac{3}{4}, \dfrac{8}{9}, \dfrac{15}{16}, \dfrac{24}{25}, \ldots$ 显然是递增的，同时 $a_n=\dfrac{n^2-1}{n^2}=1-\dfrac{1}{n^2}<1$, 也就是说，它是有界的，而且容易看出数列的极限值是 1, 事实上

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=1-0=1$$

下面的证明可以说是将二分逼近和实数完备性配合运用的典型例子，在这儿是初次用到，往后还会遇到相似的配合用法. 其实，只要能基本上理解命题意义和证明大意，就可以先去学习它的应用，往往用了几次后再回头看第二遍，也就更加明白了.

证明： 一个使得 $a_n\leq K$ 恒成立的常数 K 叫做 $\{a_n\}$ 的一个 **上界**. 下面我们将用二分逼近法和完备性来说明 $\{a_n\}$ 的极限等于它的**最小上界**（因为 $\{a_n\}$ 是递增的）.

令 $A_1=a_1$, $B_1=K$, 由假设 $A_1=a_1\leq a_n\leq K=B_1$, 即所有 a_n 都在线段 $[A_1,B_1]$ 之内，将线段 $[A_1,B_1]$ 二等分，假如分点 $\dfrac{1}{2}(A_1+B_1)$ 还是一个上界（即 $a_n\leq\dfrac{A_1+B_1}{2}$ 恒成立），则取前半段为 $[A_2,B_2]$, 不然则取后半段为 $[A_2,B_2]$. 这样逐次二等分，每次当分点 $\dfrac{1}{2}(A_m+B_m)$ 是一个上界时，取其前半段，不然则取其后半段，继续不断地按照上述办法二等分而选取其半段，就得到满足下列性质的两个夹逼数列 $\{A_n\}$ 和 $\{B_n\}$：

1. $A_1\leq A_2\leq A_3\leq\cdots\leq A_m\leq\cdots\leq B_m\leq\cdots\leq B_3\leq B_2\leq B_1$, $(B_m-A_m)\to 0$

2. 所有 B_m 都是数列 $\{a_n\}$ 的上界.

3. 对于任何 A_m, 都至少有一个 a_N 使得 $A_m < a_N$, 换言之，线段 $[A_m, B_m]$ 至少包含一个点，比如 a_N（由 $\{a_n\}$ 的递增性，所有 $n \geq N$ 也满足 $A_m < a_n$).

因此，由性质 1 和实数完备性就得到唯一的实数 k, 介于一切 A_m 和 B_m 之间，换言之，存在唯一实数 k 使得 $\lim\limits_{m\to\infty} A_m = k = \lim\limits_{m\to\infty} B_m$

现在让我们来说明 k 也就是 $\{a_n\}$ 的极限！设 ε 是一个任给的正数，因为 $\lim\limits_{m\to\infty} A_m = k = \lim\limits_{m\to\infty} B_m$ 所以存在足够大的 M, 使得（如图 7.10）

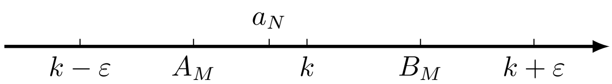


图 7.10

$$k - \varepsilon < A_M \leq k \leq B_M < k + \varepsilon \tag{7.4}$$

由性质 3 知道，存在一个够大的 N, 使得

$$A_M < a_N \tag{7.5}$$

由性质 2 知道，B_M 是一个上界，即恒有

$$a_N \leq B_M \tag{7.6}$$

由 $\{a_n\}$ 的递增性，当 $n \geq N$ 时，有

$$a_N \leq a_n \tag{7.7}$$

综合上述四点，就说明了当 $n \geq N$ 时，有

$$k - \varepsilon < A_M \leq a_N \leq a_n < B_M < k + \varepsilon$$

亦即 $|a_n - k| < \varepsilon$, 这也就说明了 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = k$.

例 7.23 应用本节存在定理，求 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{r^n}{n!}$.

解： 设 $x_n = \dfrac{r^n}{n!}$，则

$$x_{n+1} = \frac{|r|}{n+1}|x_n|$$

所以只在 $n > |r| - 1$ 时，数列 $\{|x_n|\}$ 才是递减的，同时，由于 $|x_n| > 0$, 所以它是有下界的，因此数列 $\{|x_n|\}$ 收敛于 ℓ, 在上面等式两边取极限

$$\lim_{n\to\infty} |x_{n+1}| = \lim_{n\to\infty} \frac{|r|}{n+1} \cdot |x_n|$$

即

$$\lim_{n\to\infty}|x_{x+1}| = \lim_{n\to\infty}\frac{|r|}{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}|x_n|$$

因为变量 $|x_{n+1}|$ 和 $|x_n|$ 取同一个数列的数值（除第一个数值外）. 因此有同一个极限 ℓ，即：$\ell = 0\cdot\ell$，所以

$$\lim_{n\to\infty}|x_n| = \ell = 0$$

最后有

$$\lim_{n\to\infty}x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{n!} = 0$$

例 7.24 求下面数列 $\{a_n\}$：

$$a_1=\sqrt{2},\quad a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}},\quad a_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},$$
$$\ldots,\quad a_n=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{ 个根号}},\quad \ldots$$

的极限.

解： 显然，$a_1=\sqrt{2}, a_2=\sqrt{2+a_1},\ldots,a_n=\sqrt{2+a_{n-1}},\ldots$

$\because\quad 2+\sqrt{2}>2,\qquad \therefore\quad a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}>\sqrt{2}=a_1$

又假设 $a_n>a_{n-1}$ 成立，则 $2+a_n>2+a_{n-1}$

$\therefore\quad a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}>\sqrt{2+a_{n-1}}=a_n$

因此，对于一切 $n\in\mathbb{N}$, 有 $a_{n+1}>a_n$, 则此数列是递增的.

$\because\quad \sqrt{2}<2,\qquad \therefore\quad a_1<2,\quad a_2<\sqrt{2+2}=2$

假设 $a_{n-1}<2$, 那么，

$$a_n=\sqrt{2+a_{n-1}}<\sqrt{2+2}=2$$

所以对于一切 $n\in\mathbb{N}$, 有 $a_n<2$.

根据极限存在定理知数列 $\{a_n\}$ 有极限，设它为 x，于是，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=x$. 由于

$$a_n=\sqrt{2+a_{n-1}}$$

两边平方得

$$a_n^2=2+a_{n-1}$$

取极限有

$$\lim_{n\to\infty}a_n^2=\lim_{n\to\infty}(2+a_{n-1})$$

或者：$x^2=2+x$，解得：

$$x_1=2, \qquad x_2=-1$$

然而因为 $a_n>0 \quad\Longrightarrow\quad \lim_{n\to\infty} a_n = x \geq 0$,
$\therefore\quad x_2=-1$ 不合要求，因此，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2$$

由上面的极限存在定理可以引出下面的结论：

1. 预先证明极限存在是很重要的，它也给实际计算这个极限提供了基础.
2. 在极限定义中，要求我们预先猜到 $\{a_n\}$ 的极限值 A, 然后再用数列极限定义来验证这个极限 A 是存在的，这就和前面所说的在数列极限的重要应用中出现的层次有些本末倒置，本节的极限存在定理就纠正了这种本末倒置的局面.

习题 7.6

1. 试利用关于单调而有界的数列的极限存在定理检验下面数列极限存在性.
   (a) $a_n = 1+\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)},\quad n=1,2,3,\ldots$
   (b) $a_n = \dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n},\quad n=1,2,3,\ldots$
   (c) $x_n = p_0+\dfrac{p_1}{10}+\cdots+\dfrac{p_n}{10^n}$，式中 p_i, $(i=0,1,2,\ldots)$ 是非负数，且从 p_1 起不大于 9.
2. 已知 $a_1=\sqrt{2}$, $a_2=\sqrt{2\sqrt{2}}$, $a_3=\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},\ldots,a_{n+1}=\sqrt{2a_n},\ldots$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
3. 设 $a_{n+1}=\sqrt{k+a_n}$, 这里 $k>0$, $a_1>0$, 求证数列 $\{a_n\}$ 递增，并以方程 $x^2=x+k$ 的正根为极限.
4. 已知 $x_1=1, x_2=1+\dfrac{x_1}{1+x_1},\ldots,x_n=1+\dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}},\ldots$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.
5. 数列 $\{x_n\}$ 由下面递归方程定义

$$x_1=h, \qquad x_{n+1}=x_n^2+k$$

这里 $0 < k < \dfrac{1}{4}$, h 在方程 $x^2 - x + k = 0$ 的二根 a, b 之间, 即 $a < h < b$. 求证: $a < x_{n+1} < x_n < b$, 并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

6. 设 $0 < a_1 < b_1$ 是两个给定正数, 令

$$a_2 = \sqrt{a_1 b_1}, \qquad b_2 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1), \quad (a_2 < b_2)$$
$$a_3 = \sqrt{a_2 b_2}, \qquad b_3 = \frac{1}{2}(a_2 + b_2), \quad (a_3 < b_3)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \qquad b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n), \quad (a_{n+1} < b_{n+1})$$

求证:

(a) $\{a_n\}$ 递增和 $\{b_n\}$ 递减;

(b) $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的极限相同.

第八章　单变量函数

前面中我们已经说明了如何由量的度量而产生实数系. 在这一章中我们要进一步说明如何用变数符号去表达变量, 用变数之间的函数关系去表达变量之间的关联. 变数是变量的抽象, 函数是变量相互关系的抽象. 在这一章里我们还要运用极限来分析和确立连续函数的概念.

第一节　函数的概念

一、变数和变域

在研究自然现象时, 人们会遇到许多不同的物理量, 如时间、长度、体积、速度、质量、力等等. 按照给定条件, 能取许多不同数值的量叫做**变量**; 而只取一个数值的量叫做 **常量**, 用来表达变量的符号叫做**变数**. 习惯上常用 x, y, z 等字母表示变数, 从纯数学的观点来说, 一个变数就是一个 "能取许多不同数值" 的符号, 它所能取的所有数值构成一个集合, 叫做它的**变域**. 如果变数 x 的变域已经给出, 我们就认为变数 x 是已知的. 一般说来, 任何数集可以当作变数的变域. 常会遇到取所有自然数的变数 n, 譬如数列中的项数. 可是在现实生活中, 我们通常研究的是连续变化的变数, 如动点所经过的路程及所花的时间等物理量, 就是这种变数的原形, 数的区间就是这一类变数的变域, 最常用的区间是以两个实数 a 与 b $(a < b)$——它的两个端点——为界限的有限区间, 两个端点本身可以包含在区间内, 也可以不包含在内. 因此我们可以把区间分为:

- 开区间 (a, b) 就是 $\{x|a < x < b\}$;
- 闭区间 $[a, b]$ 就是 $\{x|a \leq x \leq b\}$;
- 半开区间 $(a, b]$ 就是 $\{x|a < x \leq b\}$; $[a, b)$ 就是 $\{x|a \leq x < b\}$.

在上述各种情形, 数 $b - a$ 为区间的长度.

常量可以看作变量的特殊情形，它的变域是由一个数组成的集合 $\{x|x=a\}$.

数轴上的线段是数的区间的几何表示，图示开区间如图 8.1 或 8.2.

在点 a,b 处的圆圈或圆括号表示从区间去掉这两个数. 在两个圆圈之间的粗线段表示在 a,b 之间的一切数 x. 图示闭区间如图 8.3. 图示半开区间如图 8.4、8.5, 每一种情形都只包含出现有方括号的数，以及在 a,b 之间的一切实数.

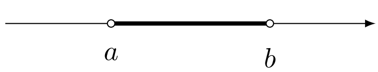


图 8.1

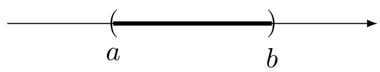


图 8.2

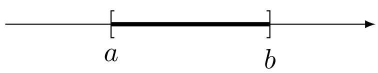


图 8.3

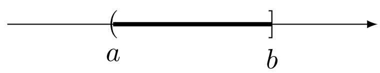


图 8.4

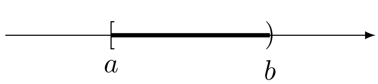


图 8.5

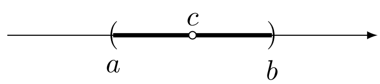


图 8.6

有时也要考虑无穷区间，用符号 $-\infty,+\infty$ 作为一端或两端，它们的记号和上面所引进的相类似，例如 $(-\infty,+\infty)$ 是全体实数集合 $\{x|x\in\mathbb{R}\}$, 区间 $(a,+\infty)$ 表示集合 $\{x|x>a\}$, 区间 $(-\infty,b]$ 表示集合 $\{x|x\leq b\}$. 无穷区间在几何上可用两端无限伸延的直线或一端无限伸延的射线来表示.

以后我们要常用到一点的邻域的概念. **c 点的邻域**是包含 c 点的任何开区间 (a,b), 而 c 点的去心邻域指去掉 c 点的任何 c 点的邻域. 它的图象如图 8.6.

c 点的去心邻域可写成 $(a,c)\cup(c,b)$. 我们常把 c 点的邻域写成对称的形式：$(c-r,c+r)$, 对任何 $r>0$, 并且称它为 c **点的对称邻域**.

例 8.1　试写出含于区间 $(1,5)$ 中 π 的对称邻域. $\left(\pi-\dfrac{1}{2},\pi+\dfrac{1}{2}\right)$ 是含于 $(1,5)$ 的 π 对称邻域. 此外 $(\pi-1,\pi+1)$, $\left(\pi-\dfrac{3}{2},\pi+\dfrac{3}{2}\right)$, $(\pi-0.01,\pi+0.01)$ 等都是含于 $(1,5)$ 中的对称邻域.

二、函数的定义

我们已经在第三册研究过许多函数，例如多项式函数、三角函数，由于函数这个概念的重要性，并且它将是我们的主要研究对象，因此需要回忆一般的函数的定义，下面我们从数集之间的多对一（包括一对一）的关系重新给出函数定义.

定义

设有数集 A, B, 如果有一对应关系或法则 f 存在，对于 A 的任何一个数 x, 有数集 B 中唯一的一个数 y 与之对应，我们就称给出了一个从数集 A 到数集 B 内的函数 f, 用

$$f : A \mapsto B$$

表示，并写成 $y = f(x)$, $(x \in A)$, 此时称 $f(x)$ 为函数 f 在 x 的函数值，并称 A 为函数 f 的**定义域**. 又当 x 取遍 A 中的数时，函数值 $f(x)$ 全体也构成一个数集，称为函数 f 的**值域**，记作

$$f(A) = \{f(x)|x \in A\}$$

要注意的是在构造一个函数 $f : A \mapsto B$ 的时候，$f(A)$ 不一定等于 B, 而是 B 的一个真子集，即 $f(A) \subset B$.

例 8.2 设 $\mathbb{R}$ 是实数集，函数 $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ 定义为

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+1}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

求它的值域.

解： 方程 $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ 等价于

$$yx^2 - 2x + y = 0 \tag{8.1}$$

根据函数的值域定义，任给 $y \in f(\mathbb{R})$, 方程 (8.1) 必有实数解，而方程 (8.1) 有实数解的充要条件是

$$\Delta = 1 - y^2 \geq 0$$

即：$-1 \leq y \leq 1$，所以

$$f(\mathbb{R}) = \{f(x)| -1 \leq f(x) \leq 1\} \subset \mathbb{R}$$

在函数的定义中包含三个要素，即**定义域**，**多对一的对应法则**和**函数值所在的数集**. 应养成一个习惯，当给定一个函数时，必须指明它的定义域. 在实际问题中，函数的定义域是根据实际意义来确定的，例如温度计刻有华氏温标度数 F 和摄氏温标度数 c，因为不存在低于绝对零度的温度，因此，这两个度数之间的函数 φ 是

$$F = \varphi(c) = \frac{9}{5}c + 32, \quad c \in (-273, +\infty)$$

以后，当我们只在数学上，一般地研究一个具体解析式子规定的函数关系时，如果定义域 A 没有被指明，那么函数的定义域是使解析式子具有数值意义的所有 x 的数值组成的自然定义域，函数 y 的值域通常是不指出的，因为由对应的规律本身就可以确定函数的值域.

例 8.3 求下列函数定义域：

1. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x}}{x}$
2. $g(x) = \sqrt{x^2-1}$

解：

1.

$$\text{函数 } f \text{ 有意义} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x \leq 1, \quad x \neq 0$$

$\therefore$　函数 f 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, 1]$.

2.

$$\text{函数 } g \text{ 有意义} \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow \quad x \leq 1, \text{ 或} x \geq 1$$

$\therefore$　函数 g 的定义域为 $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

三、相等的函数

怎样的两个函数是相等的函数？在数学中，有些函数可以用不同的方式来定义，例如，函数 $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ 是由 $f(x) = |x|$ 规定的，而函数 $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ 是由 $g(x) = \sqrt{x^2}$ 规定的，这里表示 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的式子全不同，但是对于它们的相同的定义域中的任一 x 值，经过不同规则的计算，它们的结果是相同的，即 $f(x) = g(x)$, 所以对于这个例子来说，尽管函数 $f(x), g(x)$ 的表

达式不同，我们说 $f(x)$ 和 $g(x)$ 表示相同的函数．此外，解析式子相同，但定义域不同的函数是不相同的函数．例如：

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= \frac{1}{x}, \qquad x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \\
f_2(x) &= \frac{1}{x}, \qquad x \in (0, +\infty) \\
f_3(x) &= \frac{1}{x}, \qquad x \in (0, 1)
\end{aligned}
$$

是不相同的函数，因为对于 $x=-2$, f_1 有意义而 f_2, f_3 都无意义；对于 $x=2$, f_1 和 f_2 都有意义而 f_3 无意义.

下面给出相等（同）的两个函数的条件.

定义

两个函数 $f: A \mapsto B$, $g: C \mapsto D$ 称为相等的当且仅当 $A=C$, $B=D$, 且对于每个 $a \in A$（或 C），有 $f(a)=g(a)$.

读者可能会不同意上面 $B=D$ 这个条件，提出下面这个例子来反驳：

“由 $f(n)=g(n)=n$ 给出的两个函数 $f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$, $g: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Q}$ 是相等的函数”我们须指出两个函数不同的地方，就函数值所在数集上看，g 可以除以 2, 因此，对于 g 我们可以构造一个新函数，$\frac{1}{2}g: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Q}$, 这里

$$\left(\frac{1}{2}g\right)(n) = \frac{1}{2}n$$

但是对于 f, 不能做这种构造.

四、函数的几个类型——满射、单射和双射

现在，我们来讨论函数的三个重要类型，先给出定义，然后再举例说明.

定义

如果在函数 $f: A \mapsto B$ 的 B 中的每一个数 b 在函数 f 的作用下都是 A 中一个数或某些数的对应数，也就是说：对于任意 $b \in B$, 存在一个 $a \in A$, 使得 $b=f(a)$, 这样我们就说 f 是由 A 到 B 的**满射**.

显然，如果 $f: A \mapsto B$ 是满射，那么 $f(A)=B$.

第二类函数和满射同样地重要，叫做**单射**，定义如下：

定义

如果对于 A 中的任何两个不同的数 a_1 和 a_2, 就在 B 中有两个不同的函数值 $f(a_1)$ 和 $f(a_2)$, 即任何 $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$, 那么我们就说 $f: A \mapsto B$ 是**单射**（或一对一）.

它的逆否命题"如果在 B 中有 $f(a_1) = f(a_2)$ 就在 A 中有 $a_1 = a_2$, 那么函数 $f: A \mapsto B$ 叫做**单射**（或一对一）."和上面的定义等价，也常用来说明函数是一对一的.

还有一类很重要的函数叫做**双射**.

定义

函数 $f: A \mapsto B$, 如果是满射又是单射，就叫做 **双射**.

例 8.4　函数 $f: \mathbb{R} \mapsto [-1, 1]$, 这里 $f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}$ 是满射，但不是单射，因为对于 $\sin x = \dfrac{1}{2} \in [-1, 1]$，就有无穷多个 $x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ 或 $\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ 的值和它对应.

例 8.5　函数 $f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$, 这里 $f(n) = 2n$ 是单射，但不是满射.

例 8.6　设 $2\mathbb{N}$ 代表偶数集，函数 $f: \mathbb{N} \mapsto 2\mathbb{N}$, 这里 $f(n) = 2n$ 就是一双射.

第二节　函数的运算与复合函数

一、函数的四则运算

设 $f(x), g(x)$ 是两个 x 的函数，它们的定义域分别为 D_f 和 D_g, 我们可以用通常对于"数"的四则运算得到它们的和函数 $(f+g)(x)$, 差函数 $(f-g)(x)$, 积函数 $(f \cdot g)(x)$ 与商函数 $\dfrac{f}{g}(x)$, $g(x) \neq 0$. 它们的定义域为 $D_f \cap D_g$.

由 $f(x), g(x)$ 的四则运算所得出来的新函数的定义如下：

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ （即 $(f+g)$ 在 x 点的值是 f, g 的值的和）;
- $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ （即 $(f-g)$ 在 x 点的值是 f, g 的值的差）;
- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ （即 $(f \cdot g)$ 在 x 点的值是 f, g 的值的积）;
- $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$ （即 f/g 在 x 点的值是 f, g 的值的商，但只有在 $g(x) \neq 0$ 时才有意义）.

$f+g$, $f-g$ 和 $f\cdot g$ 的定义域是 f 的定义域和 g 的定义域的交集. 而 f/g 的定义域要从 f 和 g 的定义域的交集中去掉使 $g(x)=0$ 的值.

例 8.7 已知 $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\sqrt{1-x}$, 求 $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$, $\dfrac{f}{g}$, $\dfrac{g}{f}$.

解: f 和 g 的自然定义域是 $D_f=\{x|x\geq 0\}$, $D_g=\{x|x\leq 1\}$，D_f 和 D_g 的交集是 $D_f\cap D_g=[0,1]$.

- 和：$(f+g)(x)=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$
- 差：$(f-g)(x)=\sqrt{x}-\sqrt{1-x}$
- 积：$(f\cdot g)(x)=\sqrt{x(1-x)}$
- 商：$\dfrac{f}{g}(x)=\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$, $\qquad \dfrac{g}{f}(x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$

$f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ 的定义域是 $[0,1]$. 因为当 $x=1$ 时，$g(x)=0$, 所以 $\dfrac{f}{g}$ 的定义域是 $[0,1)$, 同样得到 $\dfrac{g}{f}$ 的定义域 $(0,1]$.

例 8.8 设 $f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos x$，$D_f=(-\infty,+\infty)$，$D_g=(-\infty,+\infty)$，则:

$$
\begin{aligned}
(f+g)(x)=\sin x+\cos x &=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)\\
&=\sqrt{2}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}\right)\\
&=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\\
(f-g)(x)=\sin x-\cos x &=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\\
(f\cdot g)(x)=\sin x\cdot\cos x &=\frac{1}{2}\sin 2x\\
\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\sin x}{\cos x} &=\tan x
\end{aligned}
$$

这里 $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$, $\dfrac{f}{g}$ 的定义域是

$$\left\{x\middle|x\in\mathbb{R},\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

二、复合函数

上面我们是用四则运算来组合已知函数为一个新函数的，但是构成新的函数的方法，还有一个更重要的运算叫做组成函数的函数或复合函数法.

我们先从一个简单的例子说起，火箭从地面上的 L 点垂直向上发射，火箭 R 在 t 秒后离开发射点的距离是 $h(t)$, 这个函数是已知的. 在离发射座 1 公里远的地方有一个观测站 O, 我们要求把火箭与观测站的距离 d 确定为时间 t 的函数（图 8.7).

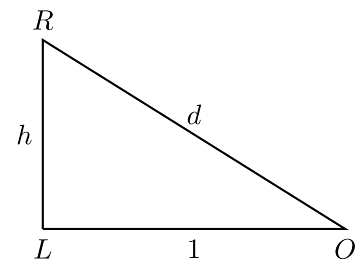


图 8.7

我们已经知道火箭的垂直高度 h 是 t 的函数 $h(t)$, 又火箭到观测站的距离 d 又是火箭的高度 h 的函数

$$d = \sqrt{1+h^2}$$

因此在时刻 t, R 到 O 的距离是

$$d(t) = \sqrt{1+h^2(t)}$$

上面函数 $d(t)$ 是由 $h = h(t)$ 和 $d = f(h) = \sqrt{1+h^2}$ 两个函数构成的，把其中一个函数 $h(t)$ 代入另一个函数 $f(h)$ 的运算叫做复合运算，得到的函数 $d(t) = f\big(h(t)\big)$ 叫做 t 的复合函数.

一般说来，若 $z = f(y)$, $y = g(x)$, 且 $g(x)$ 的值域含于 $f(y)$ 的定义域中，那么对于 $g(x)$ 定义域内的每一个 x 值经过中间变数 y, 相应地得到唯一确定的一个值 z, 变数 z 经过中间变数 y 而成变数 x 的函数，记为 $z = f\big(g(x)\big)$, 这个函数称为前两个函数的**复合函数**. 应该指出，函数 $y = g(x)$ 的值域不能超出函数 $f(y)$ 的定义域，这是极重要的.

例 8.9 设 $z = \sqrt{1+y}$, 它的定义域 $D_y = [-1, +\infty)$, 再设 $y = x^2 - 5$, 它的定义域 $D_x = (-\infty, +\infty)$, 值域 $R = [-5, +\infty)$.

作为复合函数 $z = \sqrt{1+(x^2-5)} = \sqrt{x^2-4}$, 其定义域只能是 $(-\infty, -2]$ 和 $[2, +\infty)$, 这时，$y = x^2 - 5$ 的值域是 $[-1, +\infty)$, 它没有超过 $D_y = [-1, +\infty)$

的范围，这就是说复合函数 $z=f\big(g(x)\big)$ 的定义域只能由 $y=g(x)$ 的定义域中那些使 $g(x)$ 属于 $z=f(y)$ 的定义域的 x 组成.

例 8.10 已知 $f(g)=\dfrac{1}{g+1}$，$g=g(x)=x^2$.

求 $f\big(g(x)\big)$ 和 $g\big(f(x)\big)$.

解：

$$f\big(g(x)\big)=\frac{1}{x^2+1}$$
$$g\big(f(x)\big)=\left(\frac{1}{x+1}\right)^2=\frac{1}{x^2+2x+1}$$

显然，$f\big(g(x)\big)\neq g\big(f(x)\big)$, 这表明函数的复合运算是不满足交换律的.

例 8.11 已知 $f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=\cos x+1$，求 $f\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)$.

解： 复合函数 $f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=\cos x+1=2-2\sin^2\dfrac{x}{2}$ 是把函数 $y=\sin\dfrac{x}{2}$ 代入 $f(y)=2-2y^2$ 中复合而成. 现在令 $y=\cos\dfrac{x}{2}$ 代入 $f(y)$，得到

$$f\left(\cos\frac{x}{2}\right)=2-2\cos^2\frac{x}{2}=2-(1+\cos x)=1-\cos x$$

在函数的运算中，我们介绍了函数的加、减、乘、除和函数的复合五种运算，从定义来看，我们可以用上述五种运算，由某一简单而基本的函数去造出多种多样的新函数来，譬如从常数函数 $y=c$ 和恒等函数 $y=x$, 用加、减、乘运算就可以得出多项式函数. 其实我们常常要用到的，并不是把所给的函数组合成更复杂的函数；而是要把所给的函数分解成更简单的函数的组合，把要解的问题归于比较简单的问题去解决.

例 8.12 将函数 $y=x\sin\dfrac{1}{x}$ 分解成比较简单的函数的组合（引进新的中间变数符号).

解： $y=x\sin\dfrac{1}{x}$ 可分解为 $f(x)=x$ 与 $g(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 之积，又 $g(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 可以看作是 $g(h)=\sin h$ 和 $h=h(x)=\dfrac{1}{x}$ 的复合函数，于是原来的函数可以看作下面简单函数的组合

$$F(x)=f(x)\cdot g\big(h(x)\big)$$

这里 $f(x)=x$, $g(h)=\sin h$, $h=h(x)=\dfrac{1}{x}$.

例 8.13　求函数 $\sqrt{x-\sqrt{x+1}-2}$ 的定义域.

解: 设 $F(x)=\sqrt{x-\sqrt{x+1}-2}=\sqrt{(x+1)-\sqrt{x+1}-3}$，则 $F(x)$ 可以看作 $f(y)=\sqrt{y^2-y-3}$ 与 $y=g(x)=\sqrt{x+1}$ 的复合函数，即 $F(x)=f\big(g(x)\big)$ 且知:

$f(y)$ 的定义域 $D_f=\left(-\infty,\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}\right]\bigcup\left[\dfrac{1+\sqrt{13}}{2},+\infty\right)$

$g(x)$ 的定义域 $D_g=[-1,+\infty)$, 它的值域 $R_x=[0,+\infty)$

$$\text{复合函数 } F(x)=f\big(g(x)\big) \text{ 有意义} \Longleftrightarrow \begin{cases} g(x)\text{有意义} \\ g(x)\in\left[\dfrac{1+\sqrt{13}}{2},+\infty\right) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+1\geq 0 \\ \sqrt{x+1}\geq\dfrac{1+\sqrt{13}}{2} \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \begin{cases} x\geq -1 \\ x+1\geq\left(\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^2=\dfrac{7+\sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow x\geq\frac{5+\sqrt{13}}{2}$$

$\therefore$　函数 $\sqrt{x-\sqrt{x+1}-2}$ 的定义域是 $\left[\dfrac{5+\sqrt{13}}{2},+\infty\right)$.

如果直接求 $F(x)=\sqrt{x-\sqrt{x+1}-2}$ 的定义域，那么只须:

$$x-\sqrt{x+1}-2\geq 0 \Longleftrightarrow x-2\geq\sqrt{x+1} \Longleftrightarrow \begin{cases} x-2\geq 0 \\ x+1\geq 0 \\ (x-2)^2\geq(x+1) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x\geq 2 \\ x\geq -1 \\ x\geq\dfrac{5+\sqrt{13}}{2} \end{cases} \quad \Longleftrightarrow x\geq\frac{5+\sqrt{13}}{2}$$

$\therefore$　函数 $\sqrt{x-\sqrt{x+1}-2}$ 的定义域是 $\left[\dfrac{5+\sqrt{13}}{2},+\infty\right)$.

习题 8.1

试确定下面 1—5 里每一对函数 f 和 g 的自然定义域，并求 $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$, f/g 和 g/f 的相应的定义域.

1. $f(x) = x, \qquad g(x) = \sqrt{x-1}$

2. $f(x) = \dfrac{1}{x-2}, \qquad g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$

3. $f(x) = \sqrt{x}, \qquad g(x) = \sqrt[4]{x+1}$

4. $f(x) = \sin x, \qquad g(x) = \cos x$

5. $f(x) = \tan x, \qquad g(x) = \tan x$

6. 证明函数 $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ 在它的定义域上是单射的. 又 x 为何值时，下列各式才有意义?

   (a) $f\big(f(x)\big)$

   (b) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

   (c) $f(cx)$

   (d) 对于哪些数 c, 有一数 x 能使 $f(cx) = f(x)$

7. 下列函数能否构成复合函数 $y = f\big(\varphi(x)\big)$, 如果能够构成，则指出复合函数的定义域和值域:

   (a) $y = f(u) = 2u+1, \qquad u = \varphi(x) = x^2$

   (b) $y = f(u) = \sqrt{u}, \qquad u = \varphi(x) = 1-x^2$

   (c) $y = f(u) = u^2+u^3, \qquad u = \varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数} \\ 2, & \text{当 } x \text{ 为无理数} \end{cases}$

   (d) $y = f(u) = 2$, 定义域为 U_1, $\qquad u = \varphi(x)$, 定义域为 X, 值域为 U_2.

8. 设 $f(x) = ax^2+bx+c$, 证明 $f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x) = 0$.

9. (a) 设 $y = f(x) = a+bx+\dfrac{c}{x}$, 求 $f\left(\dfrac{2}{x}\right)$.

   (b) 设 $y = f(x) = \sqrt{1+x+x^2}$, 求 $f(x^2)$, $f(-x^2)$.

10. 若 $\varphi(x) = x^3+1$, 求 $\varphi(x^2)$, $\big(\varphi(x)\big)^2$, $\varphi\big(\varphi(x)\big)$.

11. 求下列函数定义域:

   (a) $y = \sqrt{x}+\sqrt{-x}$

   (b) $y = \sqrt[4]{\dfrac{(x-2)(x-3)}{x^2}}$

12. a, b, c, d 取什么值，才能使函数

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$$

对所有 x 满足 $f\big(f(x)\big)=x$?

第三节　函数的图象

从平面上一条曲线（对这条曲线应该要求：与纵轴平行的直线与它的交点不能多于一个）可以引出一个函数，反过来，给了一个函数 $y=f(x)$, 那么通常采用直角坐标系，就可以用图形来表示 y 是 x 的函数.

定义在某一变域 D 上的函数的图象就是让 x 取遍 D 中所有值，所有点 $(x, f(x))$ 的集合便形成平面上的一个**图形**，这个图形称为函数 $y=f(x)$ 的**图象**，而这个方程 $y=f(x)$ 称为**图象的方程**.

利用函数图象的几何直观可以更清楚地看出函数的一些性质，下面我们把函数的解析性质和它的图象上相应的几何性质对照着列出来：

	解析性质	几何性质
1	f 是 x 的增函数, 即对于任意的 $a \in D, b \in D$, 当 $a<b$ 时, 恒有 $f(a)<f(b)$	f 的图象随着 x 向右移动而上升
2	f 是 x 的减函数, 即对于任意的 $a \in D, b \in D$, 当 $a<b$ 时, 恒有 $f(a)>f(b)$	f 的图象随着向右移动而下降
3	f 是偶函数，即对于任意的 $x \in D$, 恒有 $f(-x)=f(x)$	函数 f 的图象关于 y 轴对称
4	f 是奇函数，即对于任意的 $x \in D$, 恒有 $f(-x)=-f(x)$	函数 f 的图象关于原点对称
5	f 是周期函数，即对于任意的 $x \in \mathbb{R}$, 恒有 $f(x+p)=f(x)$, 这里 p 是一个正的常数	函数 f 在区间 $[0, p]$ 或 $\left[-\dfrac{p}{2}, \dfrac{p}{2}\right]$ 上的图象可以沿 x 轴左、右连续推移，重复出现

下面我们给出几个常见的函数的图象.

(一) 常值函数

常值函数 $f(x)=c$ 的图象是一条平行 x 轴的直线，它至 x 轴的距离为 $|c|$，如图 8.8.

(二) 取整函数

函数 $f(x)=[x]$ 代表不超过 x 的最大整数，即：若 $n\le x<n+1$，$n\in\mathbb{Z}$，则 $f(x)=[x]=n$. 它的图象如图 8.9.

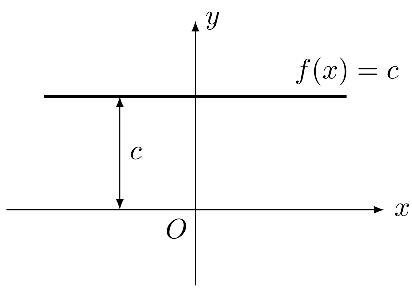


图 8.8

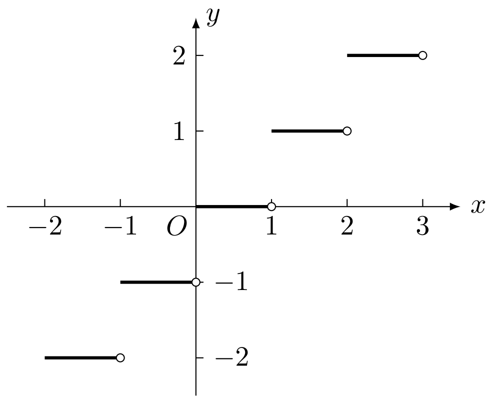


图 8.9

(三) 一次函数

我们已经在第三册中知道，一次函数 $f(x)=kx+b\ (k\neq 0)$ 的图象是不平行于 x 轴和 y 轴的直线. k 称为直线的斜率，b 称为直线的 y 截距. 若知一次函数图象上的两个点，我们用直线方程的两点式：

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

就可以写出一次函数的关系式.

下面给出的函数的图象是有间断点的直线：

函数 $f(x)=\frac{3}{4}\cdot\frac{x^2-1}{x-1}$，$x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ 的图象是一条有间断点 $\left(1,1\frac{1}{2}\right)$ 的直线，除去点 $\left(1,1\frac{1}{2}\right)$ 外，它与直线 $y=\frac{3}{4}(x+1)$ 一致.（见图 8.10）

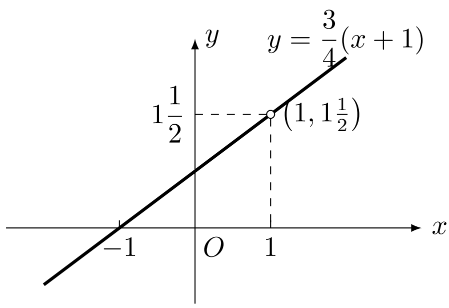


图 8.10

（四）阶梯函数

设点列 $\{x_i\}$，$i=0,1,\ldots,n$ 是闭区间 $[a,b]$ 中的递增点列，使得 $x_0=a$, $x_n=b$, 即 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，且当 $x_{i-1}<x<x_i$ 时，$f(x)=k_i$，$i=1,2,\ldots,n$. 而 x 在分点，x_i，$i=0,1,\ldots,n$ 的值 $f(x_i)$ 可以任意给定，这样一个在 $[a,b]$ 上有定义的，而在每个子区间 (x_{i-1},x_i)，$i=1,2,\ldots,n$ 都是常数的函数叫做阶梯函数.

例如，定义在 $[0,6]$ 上的阶梯函数 f:

$$\begin{cases} f(0)=2.5, & \\ f(x)=2, & 0<x\leq 1, \\ f(x)=0, & 1<x\leq 2, \\ f(x)=-1, & 2<x\leq 4, \\ f(x)=2, & 4<x\leq 6. \end{cases}$$

的图象如图 4.11 所示.

（五）折线函数

我们定义 g:

$$g(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}(x-1), & x\in[1,2] \\ -\frac{3}{2}(x-2)+\frac{1}{2}(2-1), & x\in[2,3] \\ (x-3)-\frac{3}{2}(3-2)+\frac{1}{2}(2-1), & x\in[3,4] \\ -2(x-4)+(4-3)-\frac{3}{2}(3-2)+\frac{1}{2}(2-1), & x\in[4,6] \end{cases}$$

它的图象是一条折线 $ABCDE$, 如图 4.12.

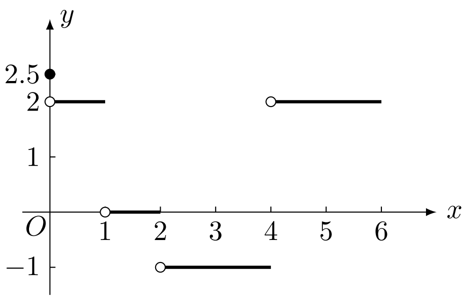


图 8.11

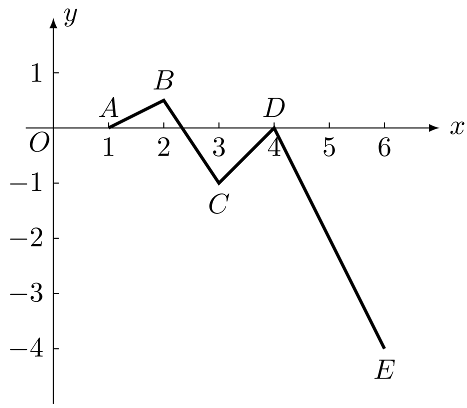


图 8.12

（六）幂函数

函数 $f(x)=x^n$，其中 n 为任意自然数，称为正整指数幂函数.

为了了解正整指数幂函数的一般性质，我们在同一个坐标系内，绘出几个这样的函数，如图 4.13.

显然，当 n 为奇数时，因为 $f(-x)=(-x)^n=-x^n=-f(x)$, 所以函数是奇函数. 又所有正整指数幂函数，当 $x=0$ 时，$f(0)=0$. 故每个奇次幂函数的图象通过原点，位于第一和第三象限内且关于原点对称. 所有这样的函数都是增函数.

当 n 为偶数时，因为 $f(-x)=(-x)^n=x^n=f(x)$，所以函数是偶函数，每个图象通过原点，位于第一和第二象限内且关于 y 轴对称.

由于当 $x=1$ 时，$f(1)=1^n=1$, 每个正整指数幂函数的图象都通过点 $(1,1)$.

现在让指数 n 逐次增大，看看图象的变化，从图 8.14, 8.15 可以清楚地看出每个图象的平坦部分和陡峭部分，曲线最终以图 8.14 和 8.15 中的粗黑线为极限位置.

函数 $f(x)=x^{-n}$（$x\neq 0$, n 为自然数）称为负整指数幂函数. 在同一坐标系内，绘出 $y=x^{-1}$, $y=x^{-2}$, $y=x^{-3}$, $y=x^{-4}$ 的图象如图 8.16 所示. 当 $x=0$ 时，这些函数都无意义，函数的图象在此点断开，它的二支以 y 轴为渐近线.

当指数为负奇数时，这些函数是奇函数. 图象的二支分别位于第一和第三象限内，随 x 向右移动下降，且关于原点对称. 因此，函数在 $(-\infty,0)$ 或 $(0,+\infty)$ 内是减函数.

当指数是负偶数时，这些函数是偶函数，每个函数的图象在原点处断开，分

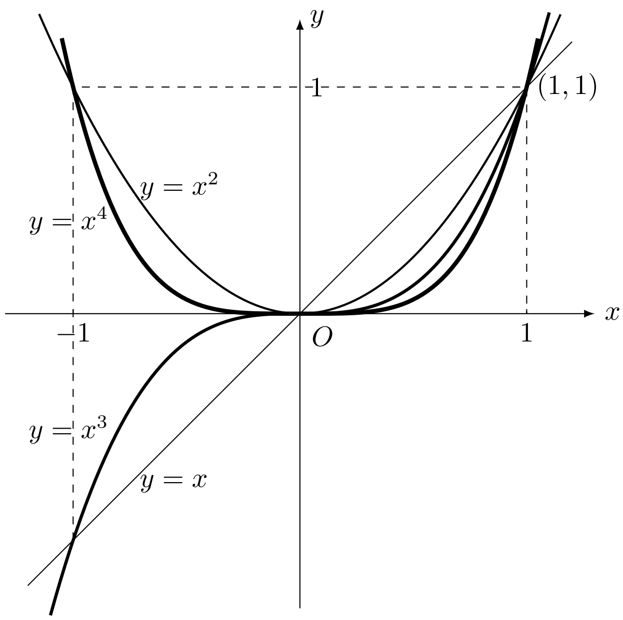


图 8.13

为二支，位于第一和第二象限内，都以 y 轴为渐近线，且关于 y 轴对称. 从图象明显地看出，当 $x<0$ 时，函数是增函数，当 $x>0$ 时，函数是减函数.

下面我们来说明一些函数的图象如何由另一些函数的已知图象经过某些几何变换得到.

若对于任意的 $x\in D$, 函数 f 和 g 满足 $g(x)=f(x-c)$, 这里 c 是常数，则若 $c>0$ $(c<0)$，$y=g(x)$ 的图象可以由 $y=f(x)$ 的图象，平行 x 轴右移（或左移）$|c|$ 个单位得到.

若函数 f 和 g 满足等式 $g(x)=f(kx)$, 这里 k 是常数，则若 $k>1$ $(0<k<1)$, $y=g(x)$ 的图象可以由 $y=f(x)$ 的图象经过把它上面的所有点的横坐标垂直于 y 轴压缩（或拉长）倍而纵坐标不变的几何变换得到.

若函数 f 和 g 满足等式，$g(x)=kf(x)$, 这里 k 是常数，则若 $k>1$ $(0<k<1)$, $y=g(x)$ 的图象可以由 $y=f(x)$ 的图象经过把它上面的所有点的纵坐标垂直 x 轴拉长（或压缩）k 倍而使横坐标不变的几何变换得到.

下面我们用例子说明图象的几何变换.

例 8.14　说明 $y=f(x)=\sin x$ 和 $y=g(x)=\cos x$ 的图象的关系.

解： 这两个函数的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$，根据 $f(x)=\sin x$ 和 $g(x)=\cos x$ 是周期等于 2π 的函数，因此我们可以先在长度等于 2π 的区间上来讨论这两个函数.

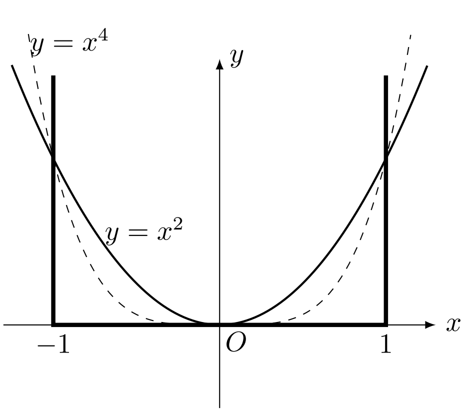


图 8.14

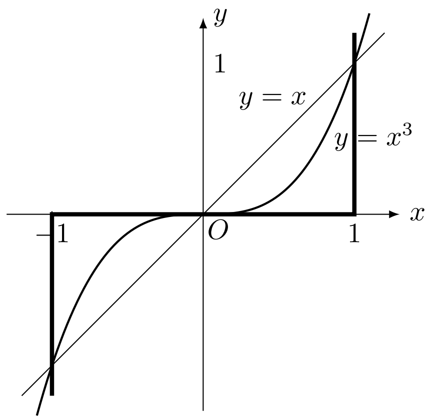


图 8.15

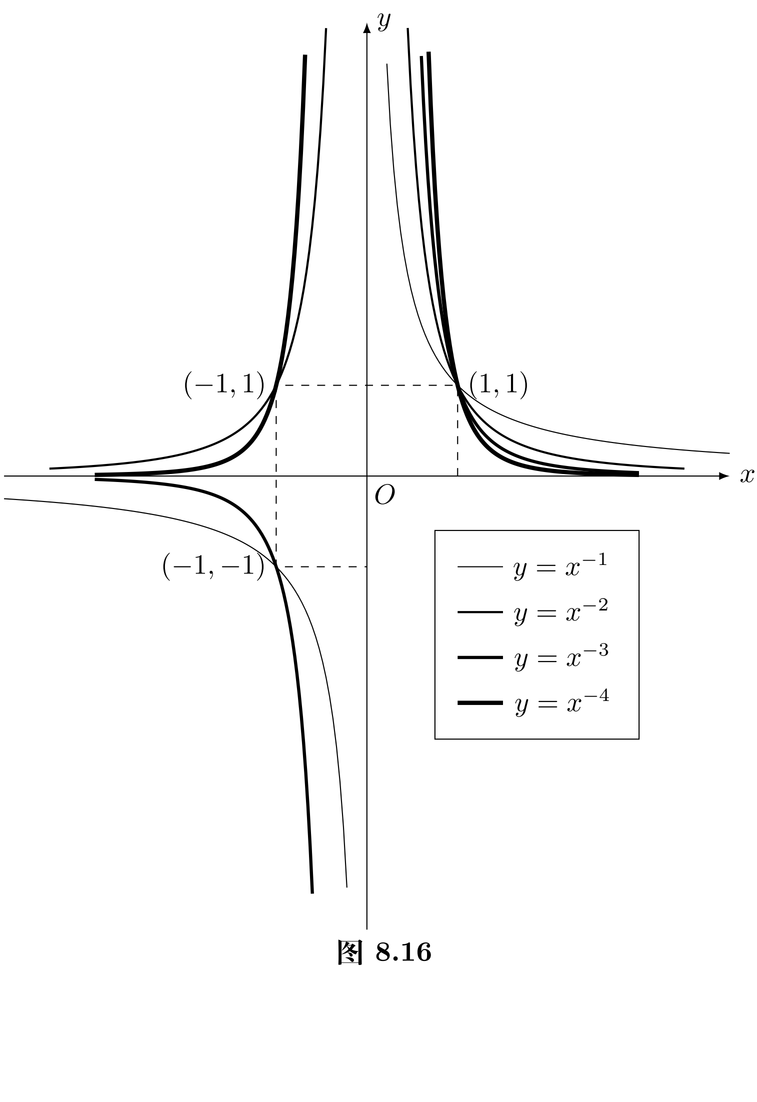


图 8.16

设 $f(x)=\sin x$ 的定义域 $D_y=[0,2\pi]$, 因为余弦函数 $g(x)=\cos x$ 可以看作正弦函数 $\sin x$ 与 $x'=x+\dfrac{\pi}{2}$ 的复合函数，即 $g(x)=\cos x=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$, 所以复合函数 $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 有意义，必须且只须 $0\le x+\dfrac{\pi}{2}\le 2\pi$，由此得到 $-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{3\pi}{2}$.

这就是说 $y=g(x)=\cos x$ 的定义域是 $D_g=\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$. 因为区间 D_g 是把区间 D_f 左移了 $\dfrac{\pi}{2}$ 个单位的结果，并且对于 $D_g=\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 中的每一个 x 都可以在 $D_f=[0,2\pi]$ 中找到相应的 $x+\dfrac{\pi}{2}$ 使得 $\cos x=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$, 所以 $y=\sin x$ 在区间 $D_f=[0,2\pi]$ 上的一段图象左移 $\dfrac{\pi}{2}$ 个单位就得到 $y=\cos x$ 在区间 $D_g=\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 上的一段，因此，将 $y=\sin x$ 的整个图象左移 $\dfrac{\pi}{2}$ 个单位就得到整个 $y=\cos x$ 的图象了，如图 8.17 所示.

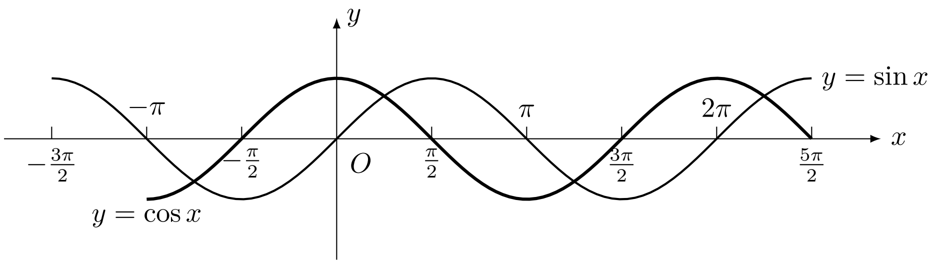


图 8.17

$\because\quad \sin(-x)=-\sin x,\qquad \therefore\quad y=\sin x$ 的图象关于原点对称.

$\because\quad \cos(-x)=\cos x,\qquad \therefore\quad y=\cos x$ 的图象关于 y 轴对称.

例 8.15 说明函数 $y=f(x)=\sqrt{1-x^2}$, $D_f=[-1,1]$ 和 $y=g(x)=\sqrt{1-4x^2}$ 的图象的关系.

解: 我们已经知道 f 的定义域是 $D_f=[-1,1]$ 且 $g(x)$ 可以看作 $f(x')$ 与 $x'=2x$ 的复合函数，即

$$g(x)=f(2x)=\sqrt{1-(2x)^2}$$

复合函数 $f(2x)$ 有意义必须且只须 $-1\le 2x\le 1$, 即:

$$-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}$$

因此，$g(x)$ 的定义域是 $D_g=\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$. 因为对于 $D_g=\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$ 中的每一个 x, 在 D_f 中一定有一个相应的 $2x$ 使得 $g(x)=f(2x)$ 成立，这就说明了将

$y=f(x)$ 的图象上所有点的横坐标垂直 y 轴压缩一半而使点的纵坐标不变便得 $g(x)=\sqrt{1-4x^2}$ 的图象，如图 4.18 所示.

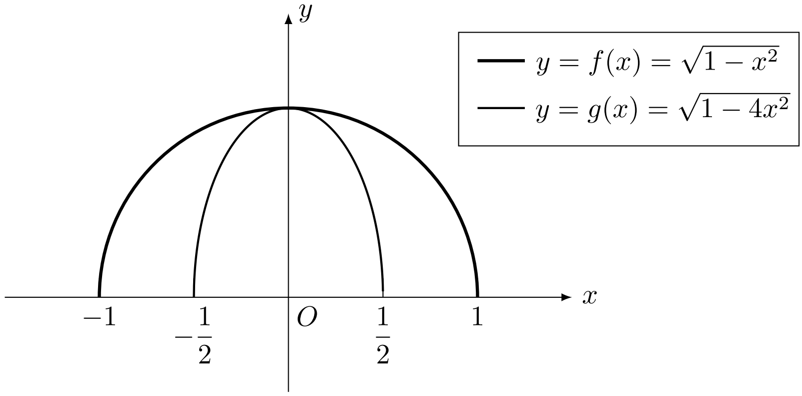


图 8.18

练习

1. 试由函数增减性的定义，说明下面函数的增减性:

   (a) $y=x^3$

   (b) $y=x^{-2}$

   (c) $f(x)=\sqrt{x}$

   (d) $g(x)=\sqrt[3]{x}$

   (e) $h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

2. 作下列函数的图象:

   (a) $y=\sqrt{x}$

   (b) $y=x-[x]$

   (c) $y=\sqrt{x-[x]}$

   (d) $y=[x]+\sqrt{x-[x]}$

3. 若一折线函数的图象 $ABCDE$ 的顶点坐标是

   $$A\left(-1,-1\frac{1}{2}\right),\quad B(1,1),\quad C(3,-1),\quad D(6,2.5),\quad E(7,2.5)$$

   写出这个函数的解析式.

4. 作下列函数的图象:

   (a) $f(x)=|2x|$

   (b) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$

   (c) $y=|4-x^2|,\quad -3\le x\le 3$

   (d) $y=|x^2-2x-3|$

5. 已知点 $P(\alpha,\beta)$ 和一水平线 L 即 $g(x)=\gamma$ 的图象．证明至 P 与 L 等距离的所有点 (x,y) 的集合，是具有 $f(x)=ax^2+bx+c$ 形式的函数的图象.

第四节　函数的连续性

在初中一年级讨论平方根时，我们曾用下面的想法初步地肯定 $\sqrt{2}$ 的“存在性”：边长是 1 米的正方形面积是 1 平方米；边长是 2 米的正方形面积是 4 平方米，所以，当一个正方形的边长逐渐增加时，它的面积逐渐由 1 平方米增加到 4 平方米，中间应该会有那么一个 2 平方米的正方形.

上面这段话只是一个粗略的想法，用数学语言来表达如下：

$y=f(x)=x^2$, 这个幂函数的函数值，在 $x=1$ 时，$f(1)=1^2=1$；$x=2$ 时，$f(2)=2^2=4$; 当 x 由 1 变到 2 时，x 的值应该由 1 “连续地” 变到 4, 所以 x 应该能取一个值 x_0 使 $f(x_0)=x_0^2=2$.

上面说的“连续地”这个术语究竟是什么意思呢？在这一节中，我们就是要把“连续性”的涵意加以分析、确立．并且，把上面这个粗略的想法体现成一个明确有用的定理——中间值定理.

一、连续函数的概念

从几何的直观来看，连续与间断的意思是一目了然的，一条曲线是连续的，指这条曲线没有间断点，在上一节考察的函数，展示了函数图象有间断点的情形，函数 f 在点 x_0 是否连续只依赖于它在 x_0 的一个（任意小的）邻域内的变化情况．直观地看来，如果

1. f 在其定义域的点 x_0 的邻域 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内有定义；

2. 当 x 充分接近 x_0 时，函数值 $f(x)$ 同 $f(x_0)$ 相差任意小，即自变量 x 的微小变化只能引起函数值的微小变化，从而排除了函数值的跳跃，就函数的图象来看，在这一点 x_0 的邻近，函数图象是由一条曲线组成的，而没有在这一点断开成为两个分支，那么称函数 f 在点 x_0 连续.

“充分接近”和“相差任意小”这两句话是不够明确的，而必须用定量的术语给以严格的表述．现在我们可以用数列极限的概念把“当 x 充分接近 x_0 时，$f(x)$ 与 $f(x_0)$ 相差任意小”这句话定量地描述如下：

如果在函数定义域 I 中，自变量 x 取任何一个收敛于 $x_0 \in I$（即 $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x_0$）的数列 $\{x_i\}$ 的项 x_i $(i = 1, 2, \ldots)$, 那么对应的函数数列：

$$f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots,\ f(x_i), \ldots$$

总有极限值 $f(x_0)$, 即

$$\lim_{i\to\infty} f(x_i) = f(x_0)$$

于是我们得到下述连续性的严格定义：

定义

定义在区间 I 上的一个函数 f 在点 $a \in I$ 称做连续，如果

1. $f(a)$ 有一个确定值，
2. 对于 I 中每一个收敛于 a 的数列 $\{x_i\}$, 对应的函数数列 $\{f(x_i)\}$ 总以 $f(a)$ 为极限，即有关系式：$\lim\limits_{i\to\infty} f(x_i) = f(a) = f\left(\lim\limits_{i\to\infty} x_i\right)$ 成立.

这个定义表明对于一个连续函数 f, 记号 lim 可以和记号 f 互换.

我们举几个例子说明如何用这个定义来验证函数 f 在点 a 处连续或间断.

例 8.16 函数 $f(x) = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ 在点 $x = 1$ 处不连续，因为 $f(1)$ 没有意义.

例 8.17 函数 $f(x) = [x]$ 在整数点 n 处不连续，因为当 $x = n$, $(n \in \mathbb{Z})$ 时，函数 $f(x) = [x]$ 有确定值 $f(n) = [n] = n$. 虽然当 x 取的数列 $\{x_i\}$ 的值，从 $x = n$ 的右边趋于 n 时，有 $\lim\limits_{i\to\infty} f(x_i) = \lim\limits_{i\to\infty} [x_i] = n = f(n)$, 但是当 x 取的数列 $\{x'_n\}$ 从 $x = n$ 的左边趋于 n 时，即当 x'_i 满足条件：$n - 1 \leq x'_i < m$, $\lim\limits_{i\to\infty} x'_i = n$ 时，那么

$$\lim_{i\to\infty} f(x'_i) = \lim_{i\to\infty} [x'_n] = n - 1 \neq f(n) = n$$

这就是说 $f(x) = [x]$ 的图象是在整数点具有跳跃性间断的曲线.

现在我们来考虑另一种间断性的曲线.

例 8.18 函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在点 $x = 0$ 处不连续，因为 $f(0)$ 不存在，并且任何数列 $\{x_i\}$ 收敛于 0 时，例如：

当 $x_i > 0$, $x_i \to 0$ 时，即 x_i 从右边趋近于原点时，有 $\lim\limits_{i\to\infty} \dfrac{1}{x_i} = +\infty$;

当 $x_i < 0$, $x_i \to 0$ 时，即 x_i 从左边趋近于原点时，有 $\lim\limits_{i\to\infty} \dfrac{1}{x_i} = -\infty$;

当 $\{x_i\}$ 是任意一个趋于 0 的数列时，则 $\lim\limits_{i\to\infty}\left|\dfrac{1}{x_i}\right| = \infty$.

无论哪种情形，数列 $\left\{\dfrac{1}{x_i}\right\}$ 趋向无穷大.

注意： 例 8.16 和例 8.18 的分母的零点都是函数的不连续点，但是例 8.16 中的分式：$f(x) = \dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{x^2-1}{x-1}$，当 $x=1$ 时，代数恒等式

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{3}{4}(x+1)$$

是成立的．因此任何数列 $x_i\ (\neq 1)$ 趋于 1 时，由于 $x_i \neq 1$,

$$\begin{aligned}\lim_{i\to\infty} f(x_i) &= \lim_{i\to\infty}\frac{3}{4}\cdot\frac{x_i^2-1}{x_i-1} = \lim_{i\to\infty}\frac{3}{4}(x_i+1)\\ &= \frac{3}{4}(1+1) = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

这就是说，对于任何收敛于 1 的数列 $\{x_i\}$, 对应的函数数列 $\{f(x_i)\}$ 都以 $\dfrac{3}{2}$ 为极限.

如果我们定义一个新函数 F：

$$F(x) = \begin{cases}\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{x^2-1}{x-1}, & x\neq 1\\ \dfrac{3}{2}, & x=1\end{cases}$$

那么 $F(x)$ 在点 $x=1$ 处就连续了.

定义

如果对于任何收敛于 a 的数列 $\{x_i\}$, $\lim\limits_{i\to\infty} f(x_i)$ 存在，并且彼此相等，但不等于 $f(a)$, 或者 $f(a)$ 没有定义，则称 f 在 a 处有可去间断点.

例 8.16 中的 $x=1$ 就是 f 的可去间断点.

定义

如果函数 f 在定义域 I 中每一点都连续，就说 f 是 I 上的一个连续函数，或简称为连续函数.

二、连续函数的运算

由连续函数定义知道，函数 f 在 $a\in I$ 连续当且仅当：若 I 里的每个数列 $\{x_i\}$ 收敛于 a 时，数列 $\{f(x_i)\}$ 也收敛于 $f(a)$.

我们可以把上述条件:

$$\lim_{i\to\infty} x_i = a \quad \Longrightarrow \quad \lim_{i\to\infty} f(x_i) = f(a)$$

简写成:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) = f\left(\lim_{x\to a} x\right)$$

由数列极限运算定理直接得出下面定理.

定理 1

设 f 和 g 在 a 处连续, 即

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a), \qquad \lim_{x\to a} g(x) = g(a)$$

则

1. $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = f(a) \pm g(a)$, (即 $f \pm g$ 在 a 处连续).
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = f(a) \cdot g(a)$, (即 $f \cdot g$ 在 a 处连续).
3. 若 $g(a) \neq 0$, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{g(a)}$, (即 $1/g$ 在 a 处连续).

例 8.19 函数 $f(x) = x^k$ (k 是一个正整数, $x \in \mathbb{R}$) 到处连续, 即 $\lim\limits_{x\to a} x^k = a^k$, $(a \in \mathbb{R})$.

证明: 对 k 用数学归纳法来证明, 设 a 是 f 的定义域 $\mathbb{R}$ 中任何一点.

当 $k=1$ 时, 显然, $\lim\limits_{x\to a} x = a$, 命题成立.

假设当 $k = i$ ($i \in \mathbb{N}$) 时, 有

$$\lim_{x\to a} x^i = a^i \qquad (i \in \mathbb{N})$$

那么, 当 $k = i+1$ 时, 有

$$\lim_{x\to a} x^{i+1} = \lim_{x\to a} x^i \cdot x = \lim_{x\to a} x^i \cdot \lim_{x\to a} x = a^i \cdot a = a^{i+1}$$

于是, 对于所有正整数 k, $f(x) = x$ 在任何一点 a 连续, 也即 $f(x) = x$ 到处连续.

由定理 1 和 $f(x) = x^k$ ($k \in \mathbb{N}$), 及常数函数 $g(x) = c$ (c 是常数) 的到处连续性, 我们可以证明下面的命题成立.

命题 1

任何多项式函数到处连续.

进一步推得下面命题:

命题 2

若 f 和 g 是两个多项式，$g \neq 0$, 那么有理函数 $r = f/g$，除去 g 的零点集合，函数 r 是有定义的而且是连续的.

命题 3

$f(x) = \sqrt[n]{x}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上连续，即

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0} \qquad (x \in [0, +\infty))$$

证明: 设 x_0 是一个任给正数, 数列 $\{x_i\}$ 是在 $[0, +\infty)$ 内任何一个收敛到 x_0 的数列, 即 $\lim\limits_{i \to \infty} x_i = x_0$. 我们要证明, 当 $\lim\limits_{i \to \infty} x_i = x_0$ 时, $\lim\limits_{i \to \infty} (\sqrt[n]{x_i} - \sqrt[n]{x_0}) = 0$.

在代数恒等式:

$$(A - B)\left(A^{n-1} + A^{n-2}B + \cdots + AB^{n-2} + B^{n-1}\right) = A^n - B^n$$

中，以 $A = x_i^{\frac{1}{n}}, B = x_0^{\frac{1}{n}}$ 代入，即得:

$$\sqrt[n]{x_i} - \sqrt[n]{x_0} = \frac{x_i - x_0}{x_i^{\frac{n-1}{n}} + x_i^{\frac{n-2}{n}} \cdot x_0^{\frac{1}{n}} + \cdots + x_i^{\frac{1}{n}} \cdot x_0^{\frac{n-2}{n}} + x_0^{\frac{n-1}{n}}} \tag{8.2}$$

由于 $\lim\limits_{i \to \infty} x_i = x_0$, 根据数列极限定义，取 $\varepsilon = \dfrac{x_0}{2}$，则存在正整数 N, 使得当 $i > N$ 时，有

$$x_i > x_0 - \frac{x_0}{2} = \frac{x_0}{2}$$

从而，当 $i > N$ 时，有

$$(x_i)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{x_0}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \tag{8.3}$$

此外，显然有

$$(x_0)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{x_0}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \tag{8.4}$$

由 (8.2)—(8.4) 立即得

$$|\sqrt[n]{x_i} - \sqrt[n]{x_0}| < \frac{|x_i - x_0|}{n\left(\sqrt[n]{\dfrac{x_0}{2}}\right)^{n-1}}$$

当 $i \to \infty$ 时, $|x_i - x0| \to 0$, 又因为 $n\left(\sqrt[n]{\frac{x_0}{2}}\right)^{n-1}$ 是一个和 i 无关的常数, 所以

$$|\sqrt[n]{x_i} - \sqrt[n]{x_0}| \to 0$$

即

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$$

这也就证明了 $f(x) = \sqrt[n]{x}$ 在区间 $[0, \infty)$ 上到处连续.

我们在这里介绍了函数连续性的严格定义，对于初学者只要能够正确理解这一分析定义的涵义就可以了，以后在第六册微积分中，我们还要对它进行研究.

三、连续函数的中间值定理

平面上一个一目了然的性质是：一条直线把平面分割成两半，例如，在 (x, y) 坐标平面上，直线 $y = c$ 就把平面分成 $y < c$ 和 $y > c$ 这两半，从上半平面走到下半平面的连续通路，必须和分界线 $y = c$ 相交，下述中间值定理也就是上述直观现象的代数化:

(一) 中间值定理

设 $y = f(x)$ 是一个在闭区间 $[a, b]$ 上到处连续的函数，设 c 是一个介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的常数,则必存在一个介于 a, b 之间的实数 x_0, 使得 $f(x_0) = c$. 用几何术语来说：$y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ 的图象是一条还结 $P(a, f(a))$ 点和 $Q(b, f(b))$ 点的连续曲线，而 P, Q 分居于直线 $y = c$ 的两侧，则曲线 $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ 至少和直线 $y = c$ 有一个交点 $(x_0, f(x_0) = c)$，(图 8.19).

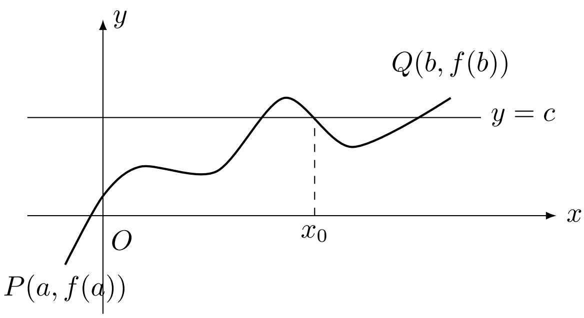


图 8.19

在给出这个定理的证明之前，我们先讨论一个特例，让 $f(x)=x^3+x-3$, $a=1$, $b=2$. 由于 $f(1)=-1$ 与 $f(2)=7$ 异号，我们将说明在 1, 2 之间一定存在 $f(x)=x^3+x-3$ 的根 k, 使 $f(k)=0$.

从 $y=x^3+x-3$ 的图象（图 8.20）上看，这个命题是一目了然的，现在我们要把二分逼近法与实数完备性，函数连续性配合一起来说明它的根的存在和根的求法.

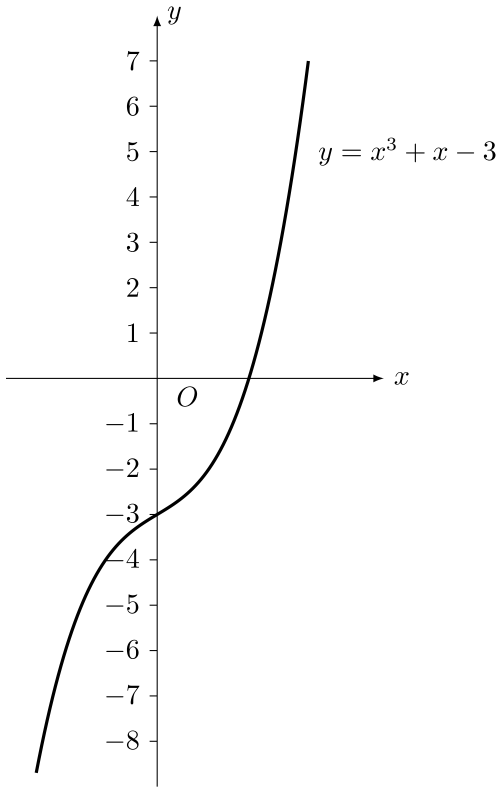


图 8.20

首先，我们容易验证这个方程没有整数根 ±1 和 ±3, 因此所求的根一定是一个无理数，由于闭区间 $[a,b]=[1,2]$ 具有性质 $P: f(a)\cdot f(b)<0$, 即 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号. 当我们把它二等分时，至少会有一个分段保有这个性质 P, 照这样，不断地二等分保有性质 P 的分段，我们就可以得到保有性质 P 的两串左、右夹逼数列如下：

令 $x=\dfrac{1+2}{2}=\dfrac{3}{2}$, 显然 $f\left(\dfrac{3}{2}\right)\neq0$, 否则 $f(x)$ 就会有有理数根 $\dfrac{3}{2}$，无论 $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$ 是正还是负，在 $\left[1,\dfrac{3}{2}\right]$ 和 $\left[\dfrac{3}{2},2\right]$ 这两个分段中一定有一段具有性质 P,

算出

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{8}>0$$

取 $a_1=1$, $b_1=\dfrac{3}{2}$, 闭区间 $[a_1,b_1]=\left[1,\dfrac{3}{2}\right]$ 保有性质 P, 照这样进行有限次后，由于 $f(x)$ 没有有理根，所以 $f\left(\dfrac{a_m+b_m}{2}\right)\neq 0$, 这就使我们每次由 $[a_m,b_m]$ 选取保有性质 P 的一个分段 $[a_{m+1},b_{m+1}]$ 之后，还可以细分下去，因此，这个过程是无终止的.

- 令 $x=\dfrac{a_1+b_1}{2}=\dfrac{1+\dfrac{3}{2}}{2}=\dfrac{5}{4}$, 算出 $f\left(\dfrac{5}{4}\right)=\dfrac{13}{64}>0$, 取 $[a_2,b_2]=\left[1,\dfrac{5}{4}\right]$;
- 令 $x=\dfrac{a_2+b_2}{2}=\dfrac{1+1.25}{2}=1.125$, 算出 $f(1.125)=-0.4512<0$，取 $[a_3,b_3]=[1.125,1.25]$;
- 令 $x=\dfrac{a_3+b_3}{2}=\dfrac{1.125+1.25}{2}=1.1875$, 算出 $f(1.1875)=-0.1379<0$, 取 $[a_3,b_3]=[1.1875,1.25]$;
- 令 $x=\dfrac{1.1875+1.25}{2}=1.2188$, 算出 $f(1.2188)=0.029>0$, 取 $[a_4,b_4]=[1.1875,1.2188]$;
- 令 $x=\dfrac{1.1875+1.2188}{2}=1.203$, 算出 $f(1.203)=-0.0552<0$，取 $[a_5,b_5]=[1.203,1.2188]$;
- 令 $x=\dfrac{1.203+1.2188}{2}=1.211$, 算出 $f(1.211)=-0.0132<0$，取 $[a_6,b_6]=[1.211,1.2188]$;
- 令 $x=\dfrac{1.211+1.2188}{2}=1.215$, 算出 $f(1.215)=0.008>0$，取 $[a_7,b_7]=[1.211,1.215]$;
- 令 $x=\dfrac{1.211+1.215}{2}=1.213$, 算出 $f(1.213)=-0.0025<0$, 取 $[a_8,b_8]=[1.213,1.215]$;

这样继续下去，我们得到无穷个闭区间满足下面的条件：

1. $[a,b]=[1,2]\supseteq[a_1,b_1]=\left[1,\dfrac{3}{2}\right]\supseteq[a_2,b_2]=\left[1,\dfrac{5}{4}\right]\supseteq[a_3,b_3]=[1.1875,1.25]\supseteq[a_4,b_4]=[1.1875,1.2188]\supseteq[a_5,b_5]=[1.203,1.2188]\supseteq[a_6,b_6]=[1.211,1.2188]\supseteq[a_7,b_7]=[1.211,1.215]\supseteq[a_8,b_8]=[1.213,1.215]\supseteq\cdots\supseteq[a_n,b_n]=\supseteq\cdots$

2. $[a_n, b_n] = \frac{1}{2}[a_{n-1}, b_{n-1}] = \frac{1}{2^2}[a_{n-2}, b_{n-2}] = \cdots = \frac{1}{2^n}[a, b]$

   因此，闭区间 $[a_n, b_n]$ 的长 $= \frac{1}{2^n} \to 0$.

3. $f(a_n) < 0$，$f(b_n) > 0$ 恒成立.

换言之，得到满足下面性质的夹逼数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$:

1. $a = 1 \le a_1 = 1 \le a_2 = 1 \le a_3 = 1.1875 \le a_4 = 1.1875 \le a_5 = 1.203 \le a_6 = 1.211 \le a_7 = 1.211 \le a_8 = 1.213 \le \cdots \le a_n \le \cdots \le b_n \le \cdots \le b_8 = 1.215 \le b_7 = 1.215 \le b_6 = 1.2188 \le b_5 = 1.2188 \le b_4 = 1.2188 \le b_3 = 1.25 \le b_2 = 1.25 \le b_1 = 1.5 \le b = 2$

   并且 $(b_n - a_n) = \frac{1}{2^n} \to 0$.

2. $f(a_n) < 0$，$f(b_n) > 0$ 恒成立.

由 1 和实数完备性，就得到唯一实数 k 满足

$$a_n \to k \leftarrow b_n, \qquad \text{即} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = k$$

再由函数 $f(x) = x^3 + x - 3$ 的到处连续性，即有

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(k) \qquad \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(k)$$

- 由 $f(a_n) < 0$ 得知 $f(k) \le 0$,
- 由 $f(b_n) > 0$ 得知 $f(k) \ge 0$.

所以只有 $f(k) = 0$ 才能同时满足上述两种条件.

仿照上面的推理，我们得到了连续函数中间值定理的证明如下：

为了叙述方便，我们不妨设 $f(a) < f(b)$. [当 $f(a) > f(b)$ 时，我们可以对 $-f(x)$ 和 $-c$ 来作同样的讨论]. 由图 8.19 所示，交点可能有好几个，但是我们所要证的是至少有一个交点，我们将用二分法去逼近其中一个交点的坐标 x_0.

取 $a_1 = a$, $b_1 = b$, 把闭区间 $[a, b]$ 二等分.

- 若 $f\left(\frac{a_1 + b_1}{2}\right) = c$, 则就是一个所求的 x_0, 自然不必再费任何手脚了；
- 若 $f\left(\frac{a_1 + b_1}{2}\right) < c$, 则取后半段为 $[a_2, b_2]$；
- 若 $f\left(\frac{a_1 + b_1}{2}\right) > c$, 则取前半段为 $[a_2, b_2]$.

照这样逐次地由 $[a_m, b_m]$ 去求出它的半段为 $[a_{m+1}, b_{m+1}]$. 因为 $f(a_m) < c$, $f(b_m) > c$, 取 $x_0 = \dfrac{a_m + b_m}{2}$

- 若 $f\left(\dfrac{a_m + b_m}{2}\right) < c$ 则取后半段为 $[a_{m+1}, b_{m+1}]$;
- 若 $f\left(\dfrac{a_m + b_m}{2}\right) > c$ 则取前半段为 $[a_{m+1}, b_{m+1}]$;
- 若 $f\left(\dfrac{a_m + b_m}{2}\right) = c$ 则 $\dfrac{a_m + b_m}{2}$ 也就是所求的 x_0, 而定理得证.

总结上述逐步二等分过程，就只有两种可能：一种可能是经过有限次二等分后，有这样的分点 $\dfrac{a_m + b_m}{2}$ 使 $f\left(\dfrac{a_m + b_m}{2}\right) = c$, 于是定理得证，另一种可能是没有这样的分点 $\dfrac{a_m + b_m}{2}$ 使 $f\left(\dfrac{a_m + b_m}{2}\right) = c$ 成立，在这种情形下，继续不断二等分，我们得到无限多个退缩闭区间套 $[a_n, b_n]$ 满足下列条件：

1. 闭区间的端点形成夹逼数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, 适合

$$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n \le \cdots \le b_n \le \cdots \le b_2 \le b_1$$

   并且 $(b_n - a_n) \to 0$.

2. $f(a_n) < c$, $f(b_n) > c$ 恒成立.

由条件 1 和数完备性就得到唯一实数 x_0

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = x_0 \quad \text{即} \quad a_n \to x \leftarrow b_n$$

再由函数 $f(x)$ 在 x_0 连续性即有

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0), \qquad \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(x_0)$$

由 $f(a_n) < c$, 得知它的极限值 $f(x_0) \le c$, 同样地，由 $f(b_n) > c$, 得知它的极限值 $f(x_0) \ge c$.

所以，只有 $f(x_0) = c$ 才能同时满足上述两个条件，定理得证.

命题 1

当 $a > 0$ 时，$f(x) = x^n - a = 0$ 存在唯一的正实数根，叫做 a 的 n 次算术方根，用符号 $\sqrt[n]{a}$ 表示.

证明： 先证存在性. $f(0)=-a<0$, 而

$$f(1+a)=(1+a)^n-a>0$$

所以，由中间值定理 $f(x)=x^n-a$ 在 0 和 $(1+a)$ 之间至少有一个根 x_0, 使得 $f(x_0)=x_0^n-a=0$ 成立.

再证唯一性. 因在 $x>0$ 时, x 愈大则它的 n 次方幂 x^n 也愈大, 所以 $f(x)$ 在 $x>0$ 时是严格递增的，当然不可能有两个不同的正实数满足 $f(x)=0$.

上面的命题给常用的 “n 次方根函数 $y=\sqrt[n]{x},\ x\geq 0$” 提供了理论基础. 为了进一步把中间值定理应用到一般的多项式函数上，我们给出下面的命题.

命题 2

对于实系数的多项式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n,\quad (a_0\neq 0)$, 总可以求出一个正数 P, 使得当 $x>P$ 时，$f(x)$ 的值与 a_0x^n 的值有相同的符号.

证明： $f(x)=x^n[a_0+\varphi(x)]$, 这里 $\varphi(x)=\dfrac{a_1}{x}+\dfrac{a_2}{x^2}+\cdots+\dfrac{a_n}{x^n}$, $(x\neq 0)$ 是一个 $\dfrac{1}{x}$ 的实系数多项式. 显然，

$$\lim_{x\to\infty}\varphi(x)=0$$

这也就是说，对于给定的 $\varepsilon=|a_0|$, 存在一个正数 P, 使得当 $x>P$ 时，从而 $0<\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{P}$ 时，有

$$|\varphi(x)|<|a_0|$$

于是 $a_0+\varphi(x)$, $(x>P)$ 与 a_0 同号，因此 $f(x)$ 与 a_0x^n 同号.

但是要具体地求出 P 的值,还得用一些技巧.令 $g=\max(|a_1|,|a_2|,\ldots,|a_n|)$, 并且先设 $x>P>1$, 于是 $0<\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{P}<1$, 从而

$$\begin{aligned}|\varphi(x)|&=\left|\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\cdots+\frac{a_n}{x^n}\right|\\&\leq g\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\cdots+\frac{1}{x^n}\right)<g\cdot\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}\end{aligned}$$

要使

$$|\varphi(x)|<g\cdot\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}<|a_0|$$

只须 $\dfrac{1}{x}<\dfrac{|a_0|}{g+|a_0|}$，即 $x>1+\dfrac{g}{|a_0|}$.

取 $P=1+\dfrac{g}{|a_0|}$，因此，当 $x>1+\dfrac{g}{|a_0|}$ 时，就可以使 $f(x)$ 与 a_0x^n 有相同符号.

如果令 $x=-X$ $(X>0)$，前面的情形说明当 X 是一个充分大的正数时，$f(-X)$ 的值的符号就与 $(-1)^na_0X^n$ 的值有相同符号. 因此我们得到下面的推论:

推论

对于实系数多项式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a^n$ $(a_0\neq 0)$

- 当 x 充分大时，$f(x)$ 与 a_0 同号；
- 当 x 取负值而 $|x|$ 充分大时，若 n 是偶数，则 $f(x)$ 与 a_0 同号；若 n 是奇数，则 $f(x)$ 与 a_0 异号.

由上面的推论直接得到下面的命题:

命题 2

若 n 为奇数，则实系数方程 $x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_0=0$ 有一个根.

习题 8.2

1. 证明下列各函数是到处连续的函数:

   (a) $f(x)=|x|$

   (b) $g(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$

   (c) $h(x)=x|x|-\dfrac{1}{2}$

   (d) $\varphi(x)=\sqrt{x}$

2. 设函数 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{2x-1}$，则 $f(0)=-1$，$f(1)=2$ 符号相反，讨论方程式 $f(x)=0$ 在 $0\leq x\leq 1$ 中是否有解?

3. 下列函数各在哪些点不连续:

   (a) $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-1}$

   (b) $f(x)=\dfrac{x-1}{(x^2+1)(2x+3)}$

(c) $g(x)=\sqrt{\dfrac{x-2}{x^2-4}}$　　(e) $\varphi(x)=\dfrac{|x|-1}{|x-1|-4}$

(d) $h(x)=\dfrac{2}{|x|-1}$　　(f) $F(x)=\dfrac{1}{x-[x]}$

4. 试证下列多项式有唯一的正实根.

   (a) $x^3+x^2-1=0$;　　(b) $x^3-3x^2+3x-4=0$.

5. 证明 $8x^3-4x^2-18x+9=0$ 的一根在 0 和 1 之间，一根在 1 和 2 之间，一根在 -2 和 -1 之间.

6. 对于下列各多项式函数 f, 求一整数 n 使在 n 和 $n+1$ 之间的某一 x 满足 $f(x)=0$:

   (a) $f(x)=x^3-x+3$;　　(b) $f(x)=x^5+x+1$.

7. 设 $f(x),g(x)$ 是两个连续函数而且 $f(a)>g(a)$, $f(b)<g(b)$, 求证在 a,b 之间存在一个适当 x_0, 使得 $f(x_0)=g(x_0)$.

8. 设 $a<b<c$, 证明方程 $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}+\dfrac{1}{x-c}=2$ 有三个实根，且一个根在 a,b 之间，另一个根在 b,c 之间.

9. 用二分逼近法求 $x^3+2x-7=0$ 的正根，使得误差小于 0.01.

第五节　反函数和它的图象

在研究一个问题的时候，不只是把两个变量之间的函数关系表示成 y 是 x 的函数，有时也需要把 x 表示为 y 的函数，例如，在自由落体运动中，如果想从已知的时间 t 来确定路程 s, 则 s 是 t 的函数

$$s=\frac{1}{2}gt^2 \tag{8.5}$$

如果反过来，想从已知的路程 s 来确定下落的时间 t, 则应从 (8.5) 式将 t 解出:

$$t=\sqrt{\frac{2s}{g}} \tag{8.6}$$

这时，t 是 s 的函数.

从这里看出，这两个函数 $s=f(t)=\dfrac{1}{2}gt^2$ 和 $t=g(s)=\sqrt{\dfrac{2s}{g}}$，其实是同一种关系的两种表示法，我们把这样的两个函数 f 和 g 叫做互为反函数.

例 8.20 若 $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$, 那么，函数

$$f:\ y = f(x) = 2x + 3, \qquad g:\ x = g(y) = \frac{y-3}{2}$$

互为反函数.

例 8.21 若 $x \in X = \{x|0 \le x \le 1\}, y \in Y = \{y|0 \le y \le 1\}$，而 x, y 之间的关系是 $x^2 + y^2 = 1$, 则函数

$$f:\ y = f(x) = \sqrt{1-x^2}$$
$$g:\ x = g(y) = \sqrt{1-y^2}$$

互为反函数，因为在上述关系 $x^2 + y^2 = 1$ 中，x, y 是对称的，所以 f 和 g 是同一形式的函数. 在一般情况下 f 和 g 是不同形式的函数.

必须注意,不能认为从每一个函数 $y = f(x)$ 都能解得一个反函数 $x = g(y)$. 例如，如果两个变数 x, y 之间的关系是 $y = x$, 定义域 $X = \{x|x \in \mathbb{R}\}$, 值域 $Y = \{y|y \ge 0\}$, 那么：$f:\ y = x,\ x \in (-\infty, +\infty)$ 是 $X \mapsto Y$ 的函数. 但是，如果不对自变数 x 加以限制，这个函数 f 是不可逆的，也就是由它不能得到一个新函数 $g:\ Y \mapsto X$. 因为，对于每个 $y(\neq 0) \in Y$, 将有 X 中两个数值 $x = \sqrt{y}$ 和 $x = -\sqrt{y}$ 和 y 对应，如下图所示：

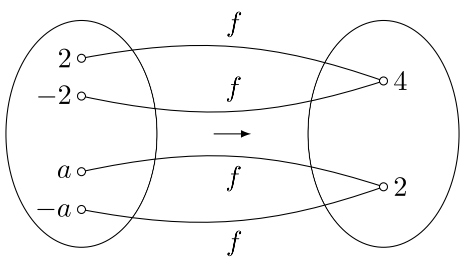


图 8.21

下面我们来说明具有怎样性质的函数才有反函数.

假如函数 $y = f(x)$ 具有这样的性质：“若 $x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \neq f(x_2)$, 也就是说对于定义域 X 中任意不同的 x_1, x_2, 它们在值域 $Y = f(X)$ 中的对应值 $f(x_1), f(x_2)$ 也不相同”. 那么对于 $Y = f(X)$ 内任何一个 y, 通过函数 f, 可以逆对应出一个且只有一个 x, 使得 y 和这个 x 对应，这样一个函数叫做由 X 到 $Y = f(X)$ 的一一对应函数，或双射（满射且单射），简称这个函数是**可逆**的. 对于一个可逆函数 $f:\ x \mapsto f(x)$, 我们可以交换自变数与因变数的地位，

于是对于 $Y=f(X)$ 的每一个 y 就有 X 内唯一一个逆象 x, 这就是说我们得到了一个新函数:

$$g:\ Y=f(X)\mapsto X,\qquad \text{使得 } y\mapsto x=g(y)$$

假如 $y=f(x)$.

新函数和原来函数的这种关系可以用下图来说明:

$$x \;\text{—}\; \boxed{f} \;\text{——}\; y=f(x) \;\text{——}\; \boxed{g} \;\text{—}\; x$$

根据上面的分析，我们得到反函数的一般定义如下:

定义

设给了一个函数 $y=f(x)$, 其定义域为 X, 值域为 $Y=f(X)$, 如果对于 $Y=f(X)$ 中每一个 y 值，都可以从关系式 $y=f(x)$ 确定唯一的一个 x 值，则得到一个定义在 $Y=f(X)$ 上而且把 $f(X)=Y$ 映射到 X 上的以 y 为自变数的新函数 $x=g(y)$, 这个函数称为函数 $y=f(x)$ 的反函数.

不难理解 f 也是 g 的反函数，并且函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $x=g(y)$ 组成的复合函数一定是一个恒等函数，即

$$g\big(f(x)\big)=x,\qquad f\big(g(y)\big)=y$$

有时用符号 f^{-1} 表示反函数比较方便，如

$$f^{-1}\big(f(x)\big)=x,\qquad f\big(f^{-1}(y)\big)=y$$

按照函数 $y=f(x)$ 的图象容易判断函数 $y=f(x)$ 是否有反函数存在，就是在值域 $Y=f(X)$ 内，任意给一个值 y_0, 作和 x 轴平行的直线 $y=y_0$. 如果函数 $y=f(x)$, $x\in X$ 的图象和直线 $y=y_0$ 的交点多于一个，那么这个函数的反函数就不存在. 如果只有一个交点，那么这个函数就有反函数. 如图 8.22 所示.

现在我们来研究互为反函数的图象的关系，因为互为反函数的两个函数 $y=f(x)$ 和 $x=g(y)$ 事实上就是同一个关系，在几何上就是同一条曲线. 例如函数 $y=2x+3$ 的图象和它的反函数 $x=\dfrac{1}{2}(y-3)$ 的图象就是通过两个点 $\left(-\dfrac{3}{2},0\right)$, $(0,3)$ 的同一条直线 $2x-y+3=0$, 只是就函数 $y=f(x)=2x+3$ 的图象去看，横轴是自变量轴，而就反函数 $x=g(y)=\dfrac{1}{2}(y-3)$ 的图象来看，

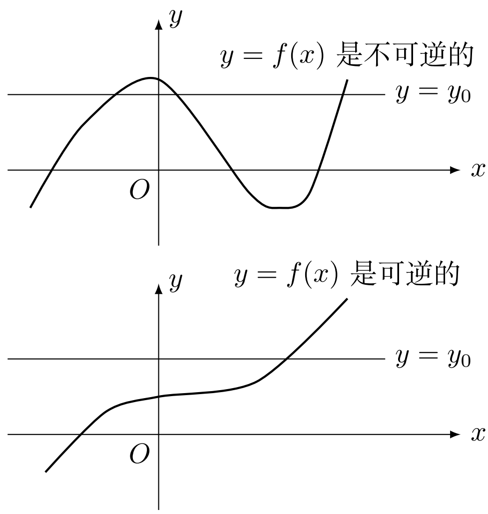


图 8.22

纵轴是自变量轴，但是在同一个坐标系内，一般我们总规定用横坐标 x 表示自变数，纵坐标 y 表示因变数，所以我们还需要把反函数关系式 $x=g(y)$ 的 x,y 对调一下，得到习惯上的反函数 $y=g(x)$. 我们也称 $y=g(x)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，当然反过来 $y=f(x)$ 也是 $y=g(x)$ 的反函数，例如函数 $y=2x+3$ 和 $y=\dfrac{1}{2}(x-3)$ 互为反函数.

函数 $y=f(x)$ 和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象之间有如下关系：

若点 (a,b) 在曲线 $y=f(x)$ 上，那么点 (b,a) 就在曲线 $y=f^{-1}(x)$ 上.

事实上，因为点 (a,b) 在曲线 $y=f(x)$ 上，所以 $b=f(a)$ 成立，此等式也可以写成 $a=f^{-1}(b)$, 这表示点 (b,a) 在曲线 $y=f^{-1}(x)$ 上，于是当点 (a,b) 走遍曲线 $y=f(x)$ 时，点 (b,a) 就走遍曲线 $y=f^{-1}(x)$. 通过初等几何的方法可以证明点 (a,b) 和 (b,a) 关于第一象限角和第三象限角的平分线 $y=x$ 对称. 因此，为了得到反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象，我们只要把 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 反射过来就可以. 如图 8.23 所示.

最后，我们给出一个反函数定理：

定理

设 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上严格递增（递减）且连续，又 $f(a)=\alpha$, $f(b)=\beta$, 则在闭区间 $[\alpha,\beta]$ 上存在着 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$, 又 $x=f^{-1}(y)$ 在 $[\alpha,\beta]$ （或 $[\beta,\alpha]$）上也是严格递增（或递减）且连续的.

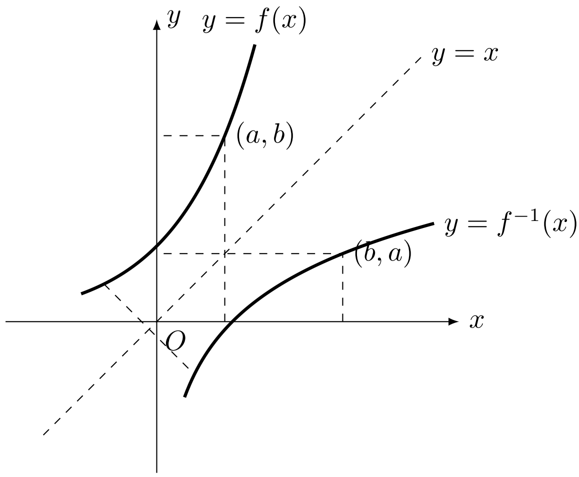


图 8.23

证明:

1. 先证 $y = f(x)$ 的值域是闭区间 $[\alpha, \beta]$, 设 y 是 $[\alpha, \beta]$ 中任意一点，如果 $y = \alpha$ 或 β, 那么相应的 $x = a$ 或 b, 即有 $f(a) = \alpha$ 或 $f(b) = \beta$, 换言之, α, β 在 $f(x)$ 的值域中. 又如果 $\alpha = f(a) < y_0 < f(b) = \beta$, 由连续函数中间值定理，在 $[a, b]$ 之间必存在一点 x_0 满足 $f(x_0) = y_0$, 即 $[\alpha, \beta]$ 内任一点都属于值域 $f([a, b])$, 又如果 $y_0 \notin [\alpha, \beta]$, 那么由严格递增性得出，它不可能是任一点 $x \in [a, b]$ 的象，这就证明了 $f(x)$ 的值域是 $[\alpha, \beta]$, 因此，连续递增函数 $f : [a, b] \mapsto [\alpha, \beta]$ 是满射的.

2. 再证 f 是单射的，因为一个严格递增函数 f 满足条件:

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$

即自变数的值与函数值是一对一的，所以 f 是单射的.

由上可知函数 f 是可逆的，因此存在一个反函数 $f^{-1} : [\alpha, \beta] \mapsto [a, b]$, 其中 $x = f^{-1}(y)$.

3. 证明 f^{-1} 的递增性.

假设 y_1, y_2 是 $[\alpha, \beta]$ 内的两个数，并且 $y_1 < y_2$, 又设 $x = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$, 对于这两数 x_1 和 x_2 只有三种可能: $x_1 < x_2$, $x_1 = x_2$, $x_1 > x_2$.

如果 $x_1 \geq x_2$, 由于 f 的递增性质，知道

$$y_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = y_2$$

这与 $y_1 < y_2$ 的假设矛盾，因此，$x_1 < x_2$, 即

$$y_1 < y_2 \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(y_1) = x_1 < x_2 = f^{-1}(y_2)$$

这就证明了 $x = f^{-1}(y)$ 是 $[\alpha, \beta]$ 上的递增函数.

4. 最后还应证明 $x = f^{-1}(y)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续，但是在高中阶段，我们不深究，同学只要知道结论就可以了.

一般来说，一个函数可以分成分段单调的几支，对于每一支得一反函数.

例如，函数 $y = f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ 在区间 $[0, +\infty)$ 或 $(-\infty, 0]$ 上连续和严格单调. 因为 $[0, b] \subset [0, +\infty)$ 和 $[-b, 0] \subset (-\infty, 0]$，这个 b 是任意大的正数，因此 $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ 的两个分段 $y = f_1(x) = x^2$, $x \in [0, b]$ 和 $y = f_2(x) = x^2$, $x \in [-b, 0)$ 根据反函数存在定理，分别有反函数：

$$x = f_1^{-1}(y) = \sqrt{y}, \qquad y \in [0, b^2]$$
$$x = f_2^{-1}(y) = -\sqrt{y}, \qquad y \in [0, b^2]$$

但是当 $b \to +\infty$ 时，$b^2 \to +\infty$, 所以，

- 连续和递增的一段 $y = f_1(x) = x^2$, $x \in [0, +\infty)$ 的反函数是 $x = f_1^{-1}(y) = \sqrt{y}$, $y \in [0, +\infty)$, 它是连续的和严格递增的；
- 连续和递减的一段 $y = f_2(x) = x^2$, $x \in (-\infty, 0]$ 的反函数是 $x = f_2^{-1}(y) = -\sqrt{y}$, $y \in [0, +\infty)$, 它是连续的和严格递减的.

将 f_1^{-1} 和 f_2^{-1} 中的 x 和 y 对调后，便得到 f_1 和 f_2 的矫形的反函数，(见图 8.24).

$$y = f_1^{-1}(x) = \sqrt{x}, \qquad y \in [0, +\infty)$$
$$y = f_2^{-1}(x) = -\sqrt{x}, \qquad y \in [0, +\infty)$$

一般地，函数 $y = f(x) = x^n$, $(n \in \mathbb{N})$ 在半开区间 $[0, +\infty)$ 上连续和严格递增，函数 f 有反函数

$$x = f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}, \qquad y \in [0, +\infty)$$

它是连续的和严格递增的.

在图 8.25 中，我们画出几个幂函数和它们的反函数的图象：

习题 8.3

1. 下列函数在哪些范围内是严格单调的?

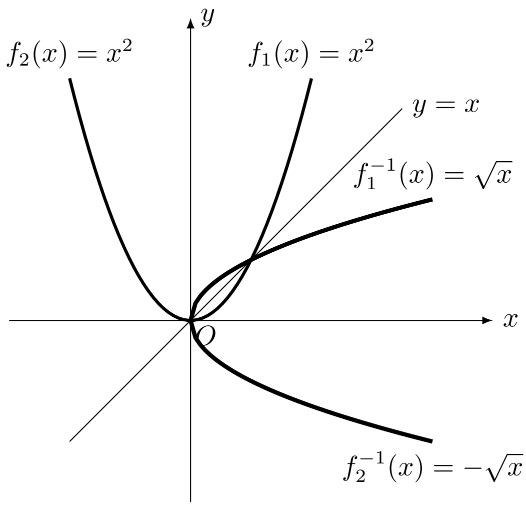

y
$f_2(x) = x^2$
$f_1(x) = x^2$
$y = x$
$f_1^{-1}(x) = \sqrt{x}$
x
O
$f_2^{-1}(x) = -\sqrt{x}$

图 8.24

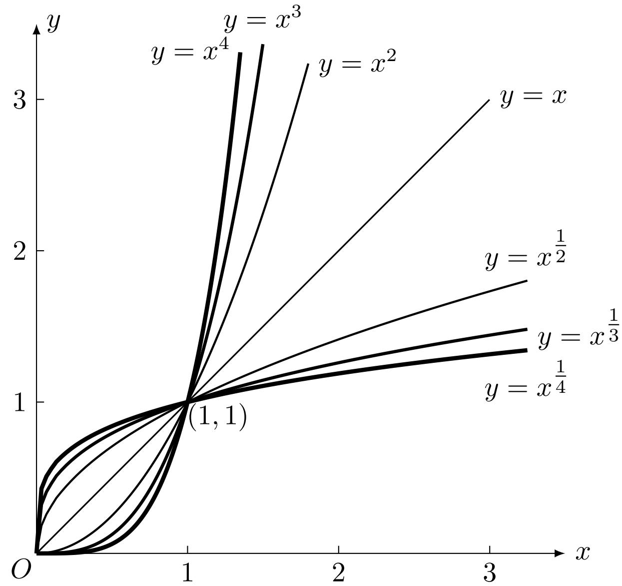

y
$y = x^3$
$y = x^4$
$y = x^2$
$y = x$
$y = x^{\frac{1}{2}}$
$y = x^{\frac{1}{3}}$
$y = x^{\frac{1}{4}}$
$(1, 1)$
3
2
1
O
1
2
3
x

图 8.25

(a) $f(x) = x^3$

(b) $\varphi(x) = x^4$

(c) $y = \sqrt{x}$

(d) $y = \sqrt[3]{x}$

(e) $f(x) = |x+1|$

2. 对于下列各函数分别找出它们的最大定义域和值域使得它们有反函数, 并分别写出它们的变数 x 表出的反函数.

(a) $y = \sqrt{2x+1}$

(b) $y = x^{\frac{3}{2}}$

(c) $y = x^2 - 1$

(d) $y = \sqrt{1-x^2}$

(e) $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}, \quad -1 < x < 1$

3. 作出下列各函数和它的反函数的图象:

(a) $y = x^{\frac{1}{2}} \quad (x \geq 0)$

(b) $y = \dfrac{x+1}{x} \quad (x \neq 0)$

(c) $y = \dfrac{x}{x+1} \quad (x \neq -1)$

4. 证明, 当且仅当 $ad - bc \neq 0$ 时, $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}, \left(x \neq -\dfrac{d}{c}\right)$ 是单射的, 并求它的反函数. 又在什么条件下, $f(x)$ 的反函数等于原来函数.

5. (a) 求 $f(x) = \dfrac{2x-5}{x-3}$ 的反函数 $f^{-1}(x)$.

   (b) 已知函数 $f(x) = \dfrac{2x-5}{x-3}$ 的值域是 $\{f(x)|f(x) \leq 0,\ f(x) \geq 4\}$, 求 $f(x)$ 的定义域.

   (c) 设函数 $g(x) = \dfrac{ax-4}{x+b}$ 的反函数是 $g^{-1}(x) = \dfrac{3x+c}{-x+2}$, 求实数 a, b, c 的值.

6. $f(x) = \begin{cases} -x, & x \geq 0 \\ x^2 & x < 0 \end{cases}$ 给出由实数集 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的一个函数 f.

   (a) 设 $q(x)$ 是 f 和 f 的复合函数, 用 x 的式子表示 $q(x)$.

   (b) 设 $q(x)$ 的反函数是 $q^{-1}(x)$, 用 x 的式子表示 $q^{-1}(x)$.

第九章　反三角函数与简单三角方程的解法

第一节　反正弦函数

我们知道，正弦函数 $y = \sin x$ 是一个周期等于 2π 的振动函数，它的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 而值域是闭区间 $[-1, 1]$, 它的图象如图 9.1.

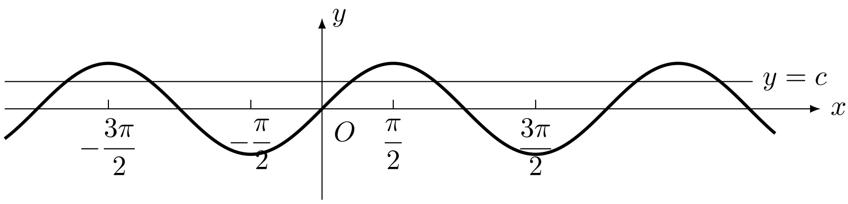


图 9.1

每取一数 $y = c$, $-1 \le c \le 1$, 作直线 $y = c$, 可与正弦曲线 $y = \sin x$ 交于无穷多个点，这些交点的横坐标是

$$x = x_0 + 2k\pi \qquad \text{和} \qquad x = (\pi - x_0) + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

因此有无数多个 x 的值满足方程 $\sin x = c$, 而和那个 $y = c$ 对应. 可见对于变数 x 的一切可能实数值来说，我们不能由函数 $f: \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$ 得出它的反函数来. 把定义域分成无数个单调区间, 则在各区间 $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ 上，$y = \sin x$ 由 -1 上升到 1，而在各区间 $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$ 上，$y = \sin x$ 由 1 下降到 -1，于是由前一章中的反函数定理知道，对于上述每一个单调区间存在一个反函数.

如果我们强调的是在闭区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上来考虑正弦函数的反函数，我们

就说它是反正弦函数的主值，并把这个函数记作 $x=\arcsin y$，使得

$$x=\arcsin y \qquad \Longleftrightarrow \qquad y=\sin x$$

这里 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$， $y\in[-1,+1]$.

对于使得 $y=\sin x$ 是单调的另一区间，例如 $x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$，我们就得到另一个反正弦函数. 假如我们没有明确地指出反正弦函数的值域所在的区间，我们就不能由函数 $y=\sin x$ 得出它的反函数. 为了明确起见，现在我们规定

定义 1

函数 $y=\sin x$ 在闭区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的反函数叫做**反正弦函数**或**反正弦**，这个函数用记号写作 $x=\arcsin y$ (即 x 是一角或弧，其相应的正弦值为 y)，它的定义域是闭区间 $-1\le y\le 1$, 值域是闭区间 $-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}$.

用习惯上的写法，将字母 x 与 y 互换而写成 $y=\arcsin x$, 现在，我们将反正弦函数（主值）的定义用几何名词叙述如下：

在闭区间 $-1\le x\le 1$ 上，数 x 的反正弦 $y=\arcsin x$ 是在闭区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的一个角或弧，它的正弦值等于 x, 即 $\sin y=x$.

由反正弦函数的定义和前一章的反函数定理可得到它的一些性质如下：

- $\arcsin(\sin y)=y,\qquad -\dfrac{\pi}{2}\le y\le\dfrac{\pi}{2}$

  $\sin(\arcsin x)=x,\qquad -1\le x\le 1$

- 函数 $f(x)=\arcsin x$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上单调递增，并且连续.

- $y=\arcsin x$，$-1\le x\le 1$ 的图象与 $y=\sin x$，$-\dfrac{\pi}{2}\le y\le\dfrac{\pi}{2}$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称（图 5.2）.

我们已知正弦函数是奇函数，它的图象关于原点对称，现在我们要证明 $f(x)=\arcsin x$ 是奇函数，即 $\arcsin(-x)=-\arcsin x$.

证明： 因为 $-\dfrac{\pi}{2}\le\arcsin x\le\dfrac{\pi}{2}$，角 $-\arcsin x$ 也被限制在由 $-\dfrac{\pi}{2}$ 到 $\dfrac{\pi}{2}$ 的区间内：

$$-\frac{\pi}{2}\le-\arcsin x\le\frac{\pi}{2}$$

又，角 $-\arcsin x$ 的正弦等于 $-x$

$$\sin(-\arcsin x)=-\sin(\arcsin x)=-x$$

因此：$\arcsin(-x)=-\arcsin x$.

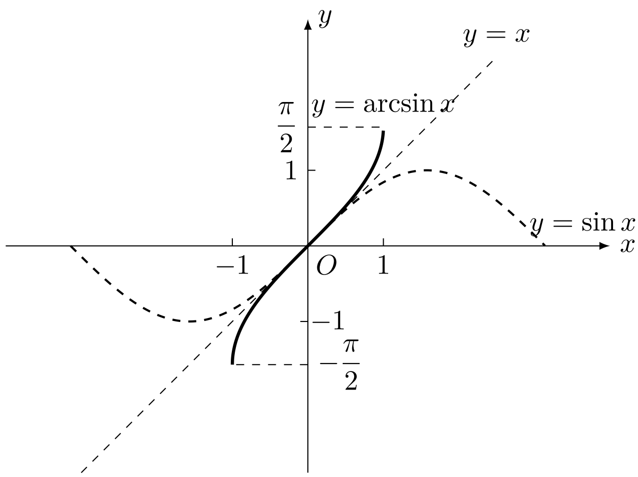


图 9.2

例 9.1 求下列各式的值（口答）:

1. $\arcsin\frac{1}{2}$
2. $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$
3. $\arcsin 1$

解:

1. $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$，因为 $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，且 $-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}$
2. $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$，因为 $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$，且 $-\frac{\pi}{2}<-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}$
3. $\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$，因为 $\sin\frac{\pi}{2}=1$，而且 $\frac{\pi}{2}$ 不超出 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 的界限.

例 9.2 求下列各式的值:

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\qquad \arcsin(-0.2672)$$

解:

1. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\pi}{3}$
2. $\arcsin(-0.2672)=-\arcsin 0.2672=-15°30'\approx-0.2705$

例 9.3 求下列各式的值:

1. $\sin\left(\arcsin\dfrac{1}{3}\right)$

2. $\tan\left(\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

3. $\cos\left(\arcsin\dfrac{3}{5}\right)$

4. $\sin\left[2\arcsin\left(-\dfrac{3}{5}\right)\right]$

5. $\arcsin\left(\sin\dfrac{7\pi}{6}\right)$

解：

1. $\sin\left(\arcsin\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{3}$

2. $\tan\left(\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\tan\dfrac{\pi}{4}=1$

3. 设 $\arcsin\dfrac{3}{5}=\alpha$, 其中 $-\dfrac{\pi}{2}\le\alpha\le\dfrac{\pi}{2}$, 那么 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$. 由于 $-\dfrac{\pi}{2}\le\alpha\le\dfrac{\pi}{2}$, $\sin\alpha>0$，可以知道，α 是第一象限的角，所以
$$\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$$

4. 设 $\arcsin\left(-\dfrac{3}{5}\right)=\alpha$，其中 $-\dfrac{\pi}{2}\le\alpha\le\dfrac{\pi}{2}$，那么
$$\sin\alpha=\sin\left[\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right]=-\frac{3}{5}$$
由于 $-\dfrac{\pi}{2}\le\alpha\le\dfrac{\pi}{2}$ 和 $\sin\alpha<0$，可以知道 α 是第四象限的角，所以
$$\cos\alpha=\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$$
即：$\sin\left[2\arcsin\left(-\dfrac{3}{5}\right)\right]=\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=2\left(-\dfrac{3}{5}\right)\cdot\left(\dfrac{4}{5}\right)=-\dfrac{24}{25}$

5.
$$\begin{aligned}\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{6}\right)&=\arcsin\left[\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right]\\&=\arcsin\left(-\sin\frac{\pi}{6}\right)\\&=-\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

关于 $y=\sin x$, 只要知道了它在闭区间 $-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}$ 上的反函数 $x=\arcsin y$, 我们便能求出 $y=\sin x$ 在其它单调区间上的反函数.

命题

1. $y = \sin x$ 在闭区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ 上，由 -1 上升到 1，它们相应的反函数是

$$x = \arcsin y + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

因为

$$\sin x = \sin(\arcsin y + 2k\pi) = \sin(\arcsin y) = y$$

而且

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \arcsin y + 2k\pi \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

2. $y = \sin x$ 在闭区间 $\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ 上，由 1 下降到 -1，它的反函数是

$$x = \pi - \arcsin y$$

因为

$$\sin x = \sin(\pi - \arcsin y) = \sin(\arcsin y) = y$$

而且

$$\frac{\pi}{2} = \pi - \frac{\pi}{2} \leq \pi - \arcsin y \leq \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

我们也可以在单位圆上作图来说明 2，如图 9.3 所示.

3. $y = \sin x$ 在闭区间 $\left[\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$ 上，由 1 下降到 -1, 相仿地证得它在相应区间上的反函数是

$$x = (\pi - \arcsin y) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

例 9.4　讨论函数 $y = \arcsin(\sin x)$ 的图象.

解： 由于正弦的周期性，函数 $\arcsin(\sin x)$, $x \in \mathbb{R}$ 也以 2π 为周期，因此，只研究它在长度为 2π 的区间内情形即可．由于

$$\sin y = \sin[\arcsin(\sin x)] = \sin x$$

这里 $-\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$，而 $x \in \mathbb{R}$，故

- 当 $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 时，则 $y = x$.

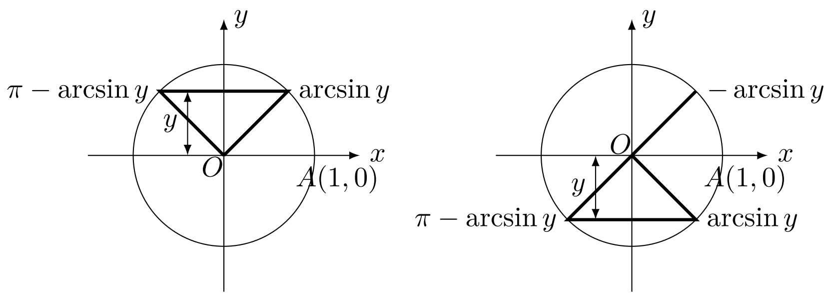


图 9.3

- 当 $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ 时，则由上面的命题 2 知

$$x = \pi - y \quad \Rightarrow \quad y = \pi - x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

因之，在此区间内函数的图象与直线 $y = \pi - x$ 一致，总之，由上面的命题中的 1 和 3 的结果：

1. 当 $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ 时，则 $x = y + 2k\pi$，则 $y = x - 2k\pi$；
2. 当 $x \in \left[\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$ 时, 则 $x = \pi - y + 2k\pi$, 则 $y = (\pi - x) - 2k\pi$.

由上面讨论的结果，得到函数 $y = \arcsin(\sin x)$ 的图象是折线的形状，如图 5.4 所示.

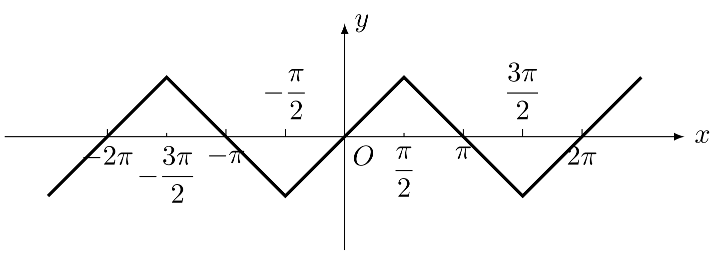


图 9.4

习题 9.1

1. 用反三角函数表示下面等式中的角.

(a) $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(b) $\sin\frac{5\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

(c) $\sin\frac{7\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(d) $\sin(-2.314)=-0.04038$

2. 当 $\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，求函数 $y=x\arcsin x$ 的最大值和最小值.

3. 不求值，确定下面差的符号：

(a) $\arcsin 0.7-\arcsin 0.5$

(b) $\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)-\arcsin\left(-\frac{3}{4}\right)$

(c) $\arcsin\left(\sqrt{2}-1\right)-\arcsin\left(\sqrt{5}-2\right)$

4. 求下列各式的值：

(a) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$

(b) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(c) $\arcsin 0$

(d) $\arcsin(-1)$

(e) $\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)$

(f) $\arcsin 0.7841$

5. 计算下列各式的值：

(a) $\tan\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(b) $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$

(c) $\arcsin\left[\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right]$

(d) $\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

(e) $\arcsin(\cos 1)$

6. 计算下列各式的值：

(a) $\cot\left(2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(b) $\cos\left(2\arcsin\frac{1}{3}\right)$

(c) $\sin\left(3\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

(d) $\tan\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3}\right)$

7. 讨论函数 $y=x\arcsin(\sin x)$ 的图象，并作草图.

8. 画出 $f(x)=\sin(3\arcsin x)$ 的图象.

第二节 反余弦函数

由余弦函数 $y = \cos x$ 的图象（图 9.5）看出，函数 $y = \cos x$ 在闭区间 $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ 上，由 1 下降到 -1, 而在闭区间 $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$ 上，由 -1 上升到 1; 因此，对于上述每一个单调区间，函数 $y = \cos x$ 都带来一个反函数.

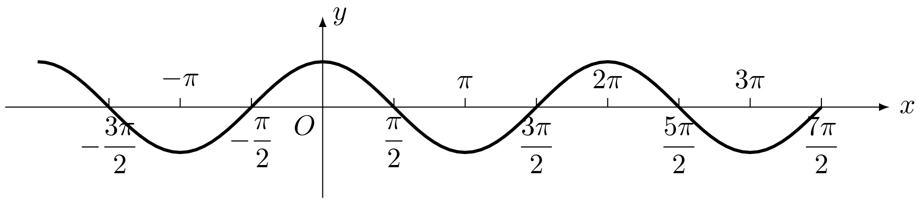


图 9.5

定义 2

函数 $y = \cos x$ 在闭区间 $[0, \pi]$ 上的反函数叫做**反余弦函数**或**反余弦**，记作

$$x = \arccos y$$

它的定义域是闭区间 $[-1, 1]$.

用几何名词来叙述这个定义，便是（互换字母 x、y 的位置）：在闭区间 $-1 \leq x \leq 1$ 上，数 x 的反余弦 $y = \arccos x$ 是在闭区间 $[0, \pi]$ 的一个角或弧，它的余弦值等于 x, 即 $\cos y = x$.

例 9.5 求下列各式的值（口答）：

1. $\arccos \dfrac{1}{2}$
2. $\arccos \left(-\dfrac{1}{2}\right)$
3. $\arccos 1$
4. $\arccos 0$

解：

1. $\arccos \dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{3}$，因为 $\cos \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$，而且 $0 < \dfrac{\pi}{3} < \pi$.
2. $\arccos \left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$，因为 $\cos \dfrac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$，而且 $0 < \dfrac{2\pi}{3} < \pi$.
3. $\arccos 1 = 0$，因为 $\cos 0 = 1$ 而且 0 不出 $[0, \pi]$ 的界限.

4. $\arccos 0 = \dfrac{\pi}{2}$，因为 $\cos\dfrac{\pi}{2} = 1$，而且 $0 < \dfrac{\pi}{2} < \pi$.

由反余弦函数的定义和反函数的定理得到反余弦的性质如下：

1. $\arccos(\cos y) = y,\ 0 \le y \le \pi,\qquad \cos(\arccos x) = x,\ -1 \le x \le 1$
2. 函数 $f(x) = \arccos x$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上，由 π 下降到 0, 且连续.
3. 我们知道互补的两个角 α 和 $\pi - \alpha$ 的余弦是相反数，即

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$

反之，在区间 $[-1,1]$ 内的相反数的反余弦互为补角，即

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x, \qquad x \in [-1,1]$$

4. 反余弦函数 $y = \arccos x$ 的图象如图 9.6 所示.

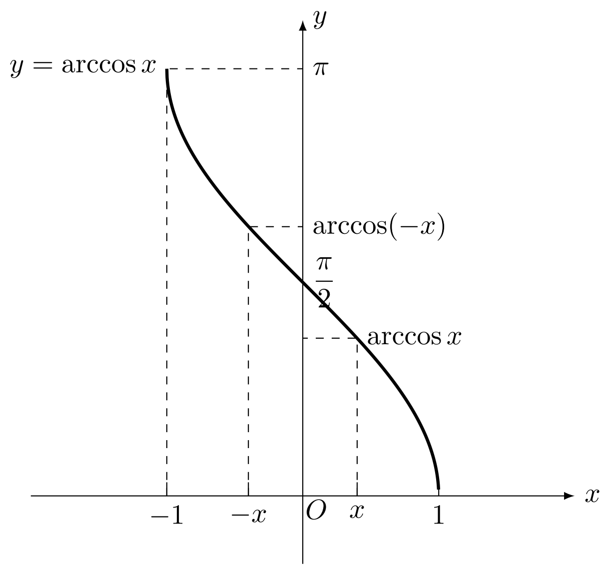


图 9.6

证明： 因为 $0 \le \arccos(-x) \le \pi$, 又 $0 \le \pi - \arccos x \le x$ 而且

$$\cos(\pi - \arccos x) = -\cos(\arccos x) = -x$$

由余弦函数在 $[0,\pi]$ 上是单调的，得到

$$\pi - \arccos x = \arccos(-x)$$

例 9.6 求下列各式的值：$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$， $\arccos(-0.9695)$

解：

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\pi-\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$$

$$\begin{aligned}\arccos(-0.9695)&=180^\circ-\arccos 0.9695\\&=180^\circ-14^\circ11'=165^\circ49'\approx 165.82^\circ\\&\approx 0.9212\pi\approx 2.894\text{弧度}\end{aligned}$$

例 9.7 求 $\tan\left[\arccos\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\right]$ 的值.

解： 设 $\arccos\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=\alpha$，其中 $0\le\alpha\le\pi$，那么，$\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$，由于 $0\le\alpha\le\pi$ 和 $\cos\alpha<0$. 可以知道 α 是第二象限的角，所以

$$\tan\alpha=-\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}-1}=-\sqrt{\frac{9}{8}-1}=-\sqrt{\frac{1}{8}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

例 9.8 证明：若 $|x|\le 1$，则 $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$

证明： $\because\quad \sin\left(\frac{\pi}{2}-\arccos x\right)=\cos(\arccos x)=x$

又 $\sin(\arcsin x)=x$, 且

$$0\le\arccos x\le\pi,\qquad -\frac{\pi}{2}\le\frac{\pi}{2}-\arccos x\le\frac{\pi}{2}$$

$\therefore\quad \arcsin x$ 和 $\frac{\pi}{2}-\arccos x$ 是 $\sin x$ 在单调区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的角.

根据 $\sin x$ 在这区间上的单调性，有 $\arcsin x=\frac{\pi}{2}-\arccos x$ 即：

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$$

例 9.9 证明：$\arcsin\frac{4}{5}+\arccos\frac{12}{13}+\arcsin\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}$

证明：

$$\arcsin\frac{4}{5}+\arccos\frac{12}{13}=\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{16}{65}$$
$$=\arccos\frac{16}{65}$$

令 $\alpha=\arcsin\frac{4}{5}$，则 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\cos\alpha=\frac{3}{5}$.
令 $\beta=\arccos\frac{12}{13}$，则 $\cos\beta=\frac{12}{13}$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$，$\sin\beta=\frac{5}{13}$.
因此：

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\&=\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13}-\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13}=\frac{16}{65}\end{aligned}$$

$\because\quad 0<\alpha+\beta<\pi$, $\therefore\quad \alpha+\beta=\arccos\frac{16}{65}$，即：

$$\arcsin\frac{4}{5}+\arccos\frac{12}{13}=\arccos\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{16}{65}$$

$$\therefore\quad \arcsin\frac{4}{5}+\arccos\frac{12}{13}+\arcsin\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}$$

在余弦函数的其它单调区间内，其反函数可按下列方式去找：

命题 1

1. 在闭区间 $[2k\pi,(2k+1)\pi]$ 上，$y=\cos x$ 由 1 下降到 -1, 在这些闭区间上的反函数是

$$x=\arccos y+2k\pi$$

事实上，角 $x\in[2k\pi,(2k+1)\pi]$, 而且它的余弦等于 y.

2. 在闭区间 $[(2k-1)\pi,2k\pi]$ 上，$y=\cos x$ 的反函数是

$$x=-\arccos y+2k\pi$$

证明相仿.

例 9.10 讨论函数 $y=\arccos(\cos x)$ 的图象.

解： 因为 $\cos x$ 的周期是 2π, 函数 $\arccos(\cos x)$ 也是周期函数，周期是 2π, 且

$$\cos y = \cos[\arccos(\cos x)]$$

即：$\cos y = \cos x$, 这里 $0 \le y \le \pi$, $x \in \mathbb{R}$ 根据上面的命题，知道：

1. 当 $x \in [2k\pi, (2k+1)\pi]$ 时，$x = y + 2k\pi$, 即 $y = x - 2k\pi$;
2. 当 $x \in [(2k-1)\pi, 2k\pi]$ 时，$x = -y + 2k\pi$, 即 $y = -x + 2k\pi$.

函数 $y = \arccos(\cos x)$ 的图象是折线（图 5.7).

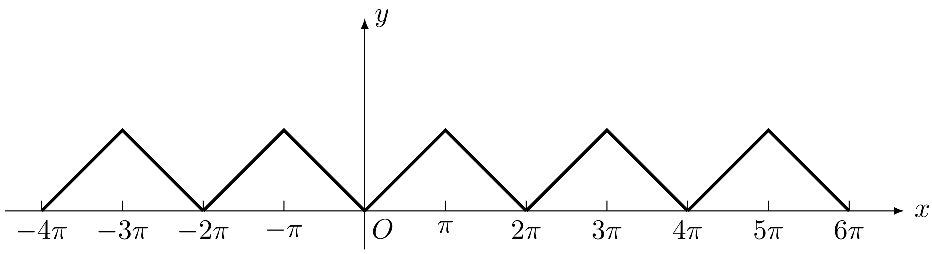


图 9.7

习题 9.2

1. 用反余弦的形式表示下列各式的角（$x \in [0, \pi]$).

   (a) $\cos \pi = 1$

   (b) $\cos \dfrac{5\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$

   (c) $\cos(-3) = -0.9900$

   (d) $\cos \dfrac{7\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

   (e) $\cos x = -0.8065$

   (f) $\cos x = -1$

2. 决定下面差的符号：

   (a) $\arccos 0.7 - \arccos 0.5$

   (b) $\arccos\left(-\dfrac{3}{5}\right) - \arccos\left(-\dfrac{3}{4}\right)$

   (c) $\arccos\left(\sin\dfrac{\pi}{12}\right) - \arccos\left(\sin\dfrac{\pi}{13}\right)$

3. 不作计算，确定下列各比的符号：

(a) $\dfrac{\arcsin 0.85-\arcsin 0.8}{\arccos 0.85-\arccos 0.8}$

(b) $\dfrac{\pi-2\arcsin(0.9)}{\pi-2\arccos(0.1)}$

(c) $\dfrac{\arcsin(0.4)+\dfrac{\pi}{6}}{\arcsin(0.6)-\dfrac{\pi}{3}}$

4. 在同一个坐标系中，作函数 $y=\arccos x$ 和函数 $y=\arccos\dfrac{x}{2}$ 的图象，试根据函数图象说明当 x 为何值时，函数的差 $\arccos\dfrac{x}{2}-\arccos x$ 取最大值、最小值、等于零.

5. 计算下列各式的值：

(a) $\sin\left(\arccos\dfrac{1}{2}\right)$

(b) $\sin\left(\arccos\dfrac{3}{5}\right)$

(c) $\tan\left(\arccos\dfrac{5}{13}\right)$

(d) $\arcsin(\cos 1)$

(e) $\arccos(\cos 2\pi)$

(f) $\arccos\left(-\cos\dfrac{36}{7}\pi\right)$

(g) $\sin\left(\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1}{2}\right)$

(h) $\sin\left[3\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$

(i) $\sin\left[2\arccos\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)\right]$

(j) $\cos\left(\arcsin\dfrac{3}{5}-\arccos\dfrac{5}{13}\right)$

(k) $\sin\left[2\left(\arcsin\dfrac{\sqrt{5}}{3}-\arccos\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)\right]$

(l) $\tan\left(\arcsin\dfrac{1}{2}+\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

6. 证明下面的恒等式：

(a) 若 $0<x<1$, 则：$\arcsin x=\arccos\sqrt{1-x^2}$

(b) 若 $0<x<1$, 则：$\arccos x=\arcsin\sqrt{1-x^2}$

(c) 若 $-1\le x\le 0$, 则：$\arcsin x=-\arccos\sqrt{1-x^2}$

(d) 若 $-1\le x\le 0$, 则：$\arccos x=\pi-\arcsin\sqrt{1-x^2}$

7. 解下面的方程：

(a) $\arccos x=\dfrac{\pi}{3}$

(b) $\arccos 2x=0.5$

(c) $\arcsin x=\arccos x,\ |x|\le 1$

(d) $\arcsin x+\arcsin(1-x)=\arccos x$

(e) $\arcsin x - \arccos x = \arcsin(3x-2)$

8. 当 $-\dfrac{1}{2} \leq x \leq 0$ 时，求 $f(x) = \arccos x + x^2$ 的最小值.

第三节 反正切函数

由正切函数 $y = \tan x$ 的图象（图 9.8）可以看出，函数 $\tan x$ 在每个开区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ 内，由 $-\infty$ 上升到 $+\infty$. 所以在每个这样的开区间里能带来一个反函数.

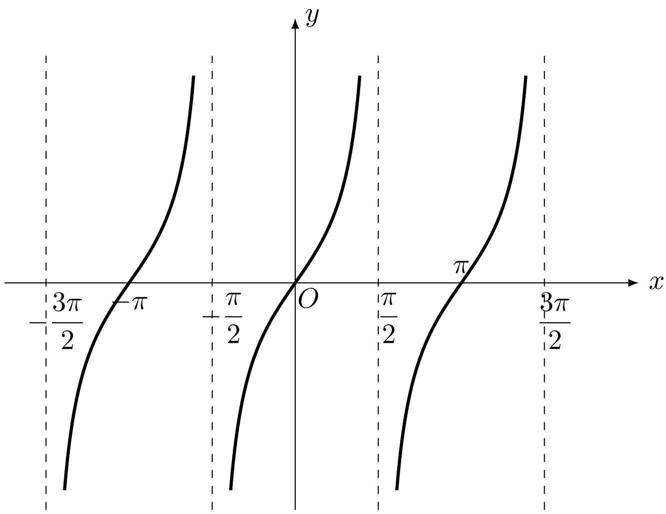


图 9.8

定义 3

函数 $y = \tan x$ 在开区间 $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ 内的反函数叫做反正切函数或反正切，记作

$$x = \arctan y$$

因为任何实数都可以作为正切的值，所以反正切定义域是开区间 $-\infty < y < +\infty$

用几何名词来叙述反正切的定义就是：在开区间 $(-\infty, +\infty)$ 内，数 y 的反正切 $x = \arctan y$ 是在开区间 $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ 内的一个角或弧，它的正切等于 y，即：$\tan x = y$.

由定义和反函数定理直接得到反正切的性质如下：

1. $\arctan(\tan x) = x, \qquad -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$

   $\tan(\arctan y) = y, \qquad -\infty < x < +\infty$

2. $y = \arctan x$，$x \in \mathbb{R}$ 是单调递增的并且连续；

3. $\arctan x$ 是奇函数，即

$$\arctan(-x) = -\arctan x$$

   证明留给同学们去完成.

4. 反正切函数 $y = \arctan x$，$-\infty < x < +\infty$ 的图象如图 5.9 所示.

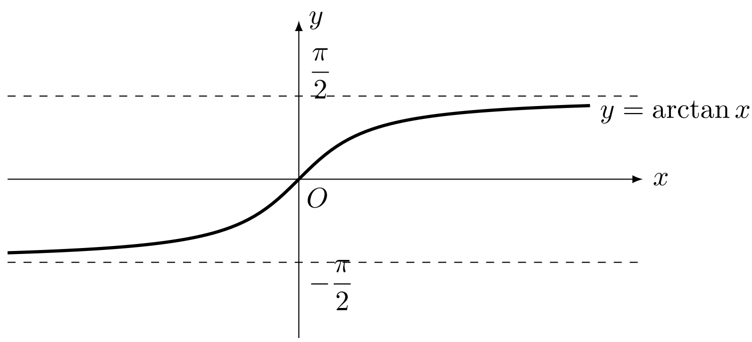


图 9.9

例 9.11 求下列各式的值（口答）:

1. $\arctan 1$
2. $\arctan(-1)$
3. $\arctan\sqrt{3}$
4. $\arctan(-\sqrt{3})$

解:

1. $\arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$，因为 $\tan\dfrac{\pi}{4} = 1$，而且 $-\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\pi}{2}$
2. $\arctan(-1) = -\dfrac{\pi}{4}$，因为 $\tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -1$，而且 $-\dfrac{\pi}{2} < -\dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\pi}{2}$
3. $\arctan\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$，因为 $\tan\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$，而且 $-\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{\pi}{3} < \dfrac{\pi}{2}$
4. $\arctan(-\sqrt{3}) = -\dfrac{\pi}{3}$，因为 $\tan\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$，而且 $-\dfrac{\pi}{2} < -\dfrac{\pi}{3} < \dfrac{\pi}{2}$

例 9.12 求 $\cos\left[\arctan\left(-\dfrac{3}{4}\right)\right]$

解： 设 $\alpha=\arctan\left(-\dfrac{3}{4}\right)$，其中 $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，则 $\tan\alpha=-\dfrac{3}{4}$.

由于 $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ 和 $\tan\alpha<0$，可以知道 α 是第四象限的角．所以

$$\sec\alpha=\sqrt{1+\tan^2\alpha}=\sqrt{1+\frac{9}{16}}=\frac{5}{4}$$
$$\cos\alpha=\frac{4}{5}$$

就是

$$\cos\left[\arctan\left(-\frac{3}{4}\right)\right]=\cos\alpha=\frac{4}{5}$$

关于 $y=\tan x$ 在其它单调区间内的反函数，请看下面命题.

命题

在开区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)$，$k\in\mathbb{Z}$ 内 $y=\tan x$ 由 $-\infty$ 上升到 $+\infty$，在这些区间上的反函数是 $x=\arctan y+k\pi$.

事实上，$x\in\left(-\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)$ 而且

$$\tan x=\tan(\arctan y+k\pi)=\tan(\arctan y)=y$$

例 9.13　求 $\arctan 2+\arctan 3$ 的值.

解： $\because$　$\dfrac{\pi}{4}=\arctan 1<\arctan 2<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{4}=\arctan 1<\arctan 3<\dfrac{\pi}{2}$，

$\therefore$　$\dfrac{\pi}{2}<\arctan 2+\arctan 3<\pi$．而且

$$\begin{aligned}\tan(\arctan 2+\arctan 3)&=\frac{\tan(\arctan 2)+\tan(\arctan 3)}{1-\tan(\arctan 2)\cdot\tan(\arctan 3)}\\&=\frac{2+3}{1-2\times 3}=-1\end{aligned}$$

由于 $\arctan(-1)\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$，于是

$$\arctan 2+\arctan 3=\arctan(-1)+\pi=-\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{3\pi}{4}$$

例 9.14　讨论 $y=\arctan(\tan x)$ 的图象.

解： 函数 $\arctan(\tan x)$ 的定义域是除去 $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbb{Z}$ 的实数集 $\mathbb{R}$，也就是无数个开区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)$，$k\in\mathbb{Z}$ 所组成的一个并集．因此函数 $y=\arctan(\tan x)$ 的图象在 $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbb{Z}$ 这些点处间断．由于

$$\tan y=\tan[\arctan(\tan x)]$$

即：$\tan y=\tan x$，这里 $-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}$，$x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$．

所以，当 $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)$ 时，$x=y+k\pi$，也就是 $y=x-k\pi$．于是：

- 当 $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$y=x$；
- 当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 时，$y=x-\pi$；
- 当 $x\in\left(\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{5\pi}{2}\right)$ 时，$y=x-2\pi$；
- ………………
- 当 $x\in\left(-\dfrac{3\pi}{2},-\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$y=x+\pi$；
- ………………

现在考虑间断点的情形：

当 $\dfrac{\pi}{2}+(k-)\pi<x<\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ 时，$y=x-k\pi$，于是当 x 取每一个数列 $\{x_n\}$ 从左边趋近 $\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ 时，记作 $x_n\to\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)^{-}$，便有

$$\lim_{x_n\to\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^{-}}y=\lim_{x_n\to\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^{-}}(x_n-k\pi)=\frac{\pi}{2}+k\pi-k\pi=\frac{\pi}{2}$$

当 $\dfrac{\pi}{2}+k\pi<x<\dfrac{\pi}{2}+(k+1)\pi$ 时，$y=x-(k+1)\pi$．于是当 x 取每一个数列 $\{x_n\}$ 从右边趋近 $\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ 时，记作 $x_n\to\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)^{+}$，便有

$$\lim_{x_n\to\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^{+}}y=\lim_{x_n\to\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^{+}}[x_n-(k+1)\pi]=\frac{\pi}{2}+k\pi-k\pi-\pi=-\frac{\pi}{2}$$

因之，函数 $\arctan(\tan x)$ 在间断点 $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ 处的左、右极限存在，其左极限等于 $\dfrac{\pi}{2}$ 右极限等于 $-\dfrac{\pi}{2}$，函数图象在这些间断点处，有一个等于 π 的跃度，它的图象如图 9.10.

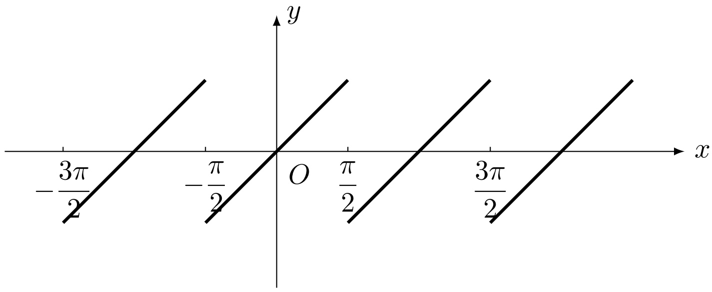


图 9.10

第四节　反余切函数

由余切函数 $y = \cot x$ 的图象可以看出函数 $\cot x$ 在每个开区间 $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ 内，由 $+\infty$ 递减到 $-\infty$, 所以在每个这样的开区间里，反函数是存在的.

定义 4

函数 $y = \cot x$ 在开区间 $(0, \pi)$ 内的反函数叫 **反余切函数或反余切**，记作

$$x = \arctan y$$

它的定义域是开区间 $-\infty < y < +\infty$.

用几何名词来叙述反余切的定义便是：在开区间 $-\infty < y < +\infty$ 内，数 y 的反余切 $x = \text{arccot}\, y$ 是开区间 $0 < x < \pi$ 内的一个角或弧，它的余切等于 y, 即 $\cot x = y$.

由反余切的定义和反函数定理得到反余切的性质如下：

1. $\text{arccot}\,(\cot x) = x$, $0 < x < \pi$, $\qquad \cot(\text{arccot}\, y) = y$, $-\infty < y < +\infty$

2. 反余切是递减的函数并且连续；

3. $\text{arccot}\,(-x) = \pi - \text{arccot}\, x$.

   这是因为 $\text{arccot}\, x$ 和 $\text{arccot}\,(-x)$ 都属于 $(0, \pi)$ 内的角，且

$$0 = \pi - \pi < \pi - \text{arccot}\, x < 0 + \pi = \pi$$

   又 $\cot(\pi - \text{arccot}\, x) = -\cot(\text{arccot}\, x) = -x$，所以

$$\pi - \text{arccot}\, x = \text{arccot}\,(-x)$$

即

$$\operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot} x$$

4. 反余切 $y = \operatorname{arccot} x$，$-\infty < x < +\infty$ 的图象如图 9.11 所示.

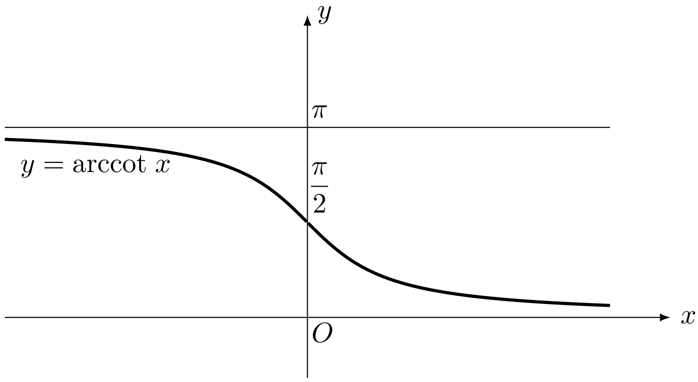


图 9.11

例 9.15　求下列各式的值：（口答）

1. $\operatorname{arccot} 1$
2. $\operatorname{arccot}(-1)$
3. $\operatorname{arccot}\sqrt{3}$
4. $\operatorname{arccot}\left(-\sqrt{3}\right)$

解：

1. $\operatorname{arccot} 1 = \dfrac{\pi}{4}$，因为 $\cot\dfrac{\pi}{4} = 1$，而且 $0 < \dfrac{\pi}{4} < \pi$.
2. $\operatorname{arccot}(-1) = \pi - \operatorname{arccot} 1 = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$
3. $\operatorname{arccot}\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{6}$，因为 $\cot\dfrac{\pi}{6} = \sqrt{3}$，而且 $0 < \dfrac{\pi}{6} < \pi$.
4. $\operatorname{arccot}\left(-\sqrt{3}\right) = \pi - \operatorname{arccot}\sqrt{3} = \pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6}$

例 9.16　求 $\sin\left[\operatorname{arccot}\left(-\dfrac{1}{3}\right)\right]$ 的值

解： 设 $\operatorname{arccot}\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \alpha$，其中 $0 < \alpha < \pi$，那么 $\cot\alpha = -\dfrac{1}{3}$.

由于 $0<\alpha<\pi$，$\cot\alpha<0$，可以知道 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

$$\csc\alpha=\sqrt{1+\cot^2\alpha}=\sqrt{1+\frac{1}{9}}=\sqrt{\frac{10}{9}}=\frac{\sqrt{10}}{3}$$
$$\sin\alpha=\frac{1}{\csc\alpha}=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\therefore\quad \sin\left[\operatorname{arccot}\left(-\frac{1}{3}\right)\right]=\sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

例 9.17 求证：对于任何实数 x 有

$$\arctan x+\operatorname{arccot} x=\frac{\pi}{2}$$

解： 设 $\arctan x=\alpha$，其中 $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，则 $\tan\alpha=x$.

又 $\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha=x$，而 $0<\frac{\pi}{2}-\alpha<\pi$，所以 $\frac{\pi}{2}-\alpha=\operatorname{arccot} x$.

将 $\alpha=\arctan x$ 代入上式，得到

$$\frac{\pi}{2}-\arctan x=\operatorname{arccot} x$$

所以：$\arctan x+\operatorname{arccot} x=\frac{\pi}{2},\quad x\in\mathbb{R}$

例 9.18 证明 $\arctan 3+\operatorname{arccot}\left(-\frac{1}{5}\right)=\pi-\arctan\frac{1}{8}$

解： 设 $\alpha=\arctan 3$，其中 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，则 $\tan\alpha=3$.

又设 $\beta=\operatorname{arccot}\left(-\frac{1}{5}\right)$，其中 $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$，则：

$$\cot\beta=-\frac{1}{5},\qquad \tan\beta=-5$$

$$\begin{aligned}\tan\left[\arctan 3+\operatorname{arccot}\left(-\frac{1}{5}\right)\right]&=\tan(\alpha+\beta)\\&=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}\\&=\frac{3+(-5)}{1-3(-5)}=-\frac{1}{8}\end{aligned}$$

而且 $\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\frac{3\pi}{2}$，

$$\therefore\quad \arctan 3+\operatorname{arccot}\left(-\frac{1}{5}\right)=\arctan\left(-\frac{1}{8}\right)+\pi=\pi-\arctan\frac{1}{8}$$

习题 9.3

1. 用反三角函数表示下面等式中的角.

(a) $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1$

(b) $\tan\left(\frac{7\pi}{4}\right)=-1$

(c) $\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

(d) $\tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=1$

(e) $\cot\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$

(f) $\cot\left(-\frac{5\pi}{4}\right)=-1$

(g) $\cot(-1)=-0.6421$

2. 指出下列各函数哪些是偶函数? 哪些是奇函数? 哪些既不是奇函数也不是偶函数.

(a) $y=\arcsin x+2\arctan x$

(b) $y=\arccos x+\arctan x$

(c) $y=\dfrac{\arcsin x}{\arccos x}$

(d) $y=\dfrac{\arctan x}{x}-x\arcsin x$

3. 计算下列各式的值:

(a) $\cos[\arctan(-\sqrt{3})]$;

(b) $\sin(\arctan 2)$;

(c) $\arctan(\tan 2)$

(d) $\arctan(\tan 0.7\pi)$

(e) $\tan\left(\arctan\frac{1}{4}-\operatorname{arccot}5\right)$

(f) $\sin\left(\arctan\frac{8}{15}-\arcsin\frac{7}{18}\right)$

(g) $\tan\left[2\arctan\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$

(h) $\cos\left[2\arctan\frac{1}{4}+\arccos\frac{3}{5}\right]$

4. 检验下列各等式是否正确.

(a) $\arcsin\frac{15}{17}=\arccos\frac{8}{17}$

(b) $\arcsin\frac{4}{5}=\operatorname{arccot}\frac{3}{4}$

(c) $\arcsin\left(-\frac{7}{25}\right)=-\arctan\frac{7}{24}$

(d) $\arccos\left(-\frac{9}{41}\right)=\pi-\arcsin\frac{40}{41}$

(e) $\arctan\frac{2}{3}+\arctan\frac{1}{5}=\frac{\pi}{4}$

(f) $\operatorname{arccot}\dfrac{1}{9}+\operatorname{arccot}\dfrac{4}{5}=\dfrac{3}{4}\pi$

(g) $2\arctan\dfrac{1}{3}+\arctan\dfrac{1}{4}=\arctan\dfrac{16}{13}$

(h) $\arcsin\dfrac{7}{25}+\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{7}{25}=\arccos\dfrac{3}{5}$

5. 证明下面恒等式:

(a) 若 $0<x<1$, 那么

$$\arcsin x=\arccos\sqrt{1-x^2}=\arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\operatorname{arccot}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

(b) 若 $0<x<1$, 那么

$$\arccos x=\arcsin\sqrt{1-x^2}=\arctan\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}=\operatorname{arccot}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

(c) 若 $x>0$, 那么

$$\arctan x=\operatorname{arccot}\frac{1}{x}=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

(d) 若 $x>0$, 那么

$$\operatorname{arccot}x=\arctan\frac{1}{x}=\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

(e) 若 $|x|\leq 1$, 那么 $\arcsin x=\arctan\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

若 $-1\leq x\leq 0$, 那么 $\arcsin x=-\arccos\sqrt{1-x^2}$

若 $-1\leq x<0$, 那么 $\arcsin x=\arctan\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\pi$

(f) 若 $-1\leq x\leq 0$, 那么 $\arccos x=\pi-\arcsin\sqrt{1-x^2}$

若 $-1\leq x<0$, 那么 $\arccos x=\pi+\arctan\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

若 $|x|\leq 1$, 那么 $\arccos x=\arctan\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

(g) 若 $x<0$, 那么 $\arctan x=\operatorname{arccot}\dfrac{1}{x}-\pi$

若 $x<0$, 那么 $\operatorname{arccot}x=\pi+\arctan\dfrac{1}{x}$

(h) 若 $x\geq 0$, $\dfrac{1}{2}\arccos(2x^2-1)=\arccos x$

(i) 若 $x\geq 1$, $2\arctan x+\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}=\pi$

6. 作函数 $y=x-\arctan(\tan x)$ 的草图.

7. 解下列方程:

(a) $\arctan x = \dfrac{\pi}{4}$

(b) $\arctan x = \dfrac{\pi}{2}$

(c) $\arctan x = -\dfrac{\pi}{2}$

(d) $\arctan x^2 = 3$

(e) $\arctan 2x + \arctan 3x = \dfrac{3\pi}{4}$

(f) $\sin\left\{2\arccos\left[\cot(2\arctan x)\right]\right\} = 0$

8. 若 $\arctan x + \arctan y + \arctan z = \pi$, 求证：$x + y + z = xyz$.

9. 求证：

$$\arctan x + \arctan\frac{1-x}{1+x} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4}, & x > -1 \\ -\dfrac{3\pi}{4}, & x < -1 \end{cases}$$

第五节　最简单的三角方程

下列方程 $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\tan x = a$, $\cot x = a$ 中的 a 为已给的实数，x 是未知数，是最简单的三角方程．适合其中某个方程的 x 值叫做这个方程的解或根．例如，诸角：$x = 30°$; $x = 150°$; $x = 390°$; $x = 510°$ 等等，为三角方程 $\sin x = \dfrac{1}{2}$ 的解，因为，

$$\sin 30° = \sin 150° = \sin 390° = \sin 510° = \frac{1}{2}$$

解三角方程就是求它的一切解，根据前一节内容知道，已知三角函数值 a 所对应的角的值，如果存在的话，有无穷多个，所以每一个三角方程都有无穷多个解，它的所有解简称为通解.

在本节中，我们来解上面所示的最简单三角方程，从以后的例子即将明白，解三角方程归根到底化为解最简单的三角方程.

一、最简单三角方程的解

(一) $\sin x = a$ 的解

分 $|a| \le 1$ 和 $|a| > 1$ 的情形来考虑：

第一种情形： $0 < a < 1$

在坐标系 x-O-y 中，以原点 O 为圆心作一单位圆，在 Oy 轴上作出纵坐标等于 a 的 Q 点，并过 Q 点引平行于 Ox 轴的直线，交单位圆周于 A 和 B 二点，如图 9.12, P_0 为 $(1,0)$, $\angle P_0OA = \arcsin a$ 和 $\angle P_0OB = \pi - \arcsin a$ 的正弦都等于 a, 所以 $\arcsin a$ 和 $\pi - \arcsin a$ 是方程 $\sin x = a$ 的特解，为求方

程 $\sin x = a$ 的通解，可将 $2k\pi$ 加于此两角中的每一个而得到，其中 $k \in \mathbb{Z}$. 因此，原方程的通解是

$$x_1 = 2k\pi + \arcsin a$$
$$x_2 = 2k\pi + \pi - \arcsin a = (2k+1)\pi - \arcsin a$$

合并起来，可写成

$$x = k\pi + (-1)^k \arcsin a, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

我们约定，在三角方程的通解中，“$k \in \mathbb{Z}$”以后不再交代.

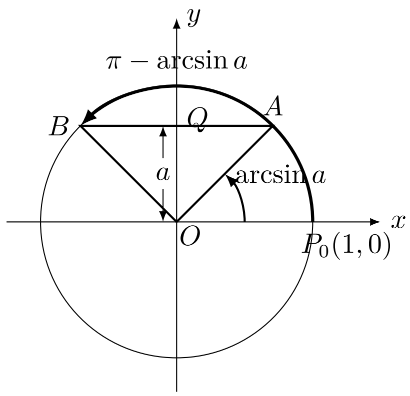


图 9.12

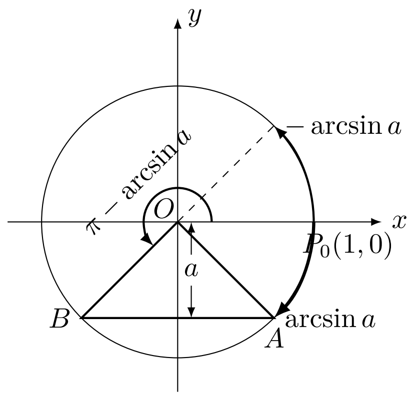


图 9.13

第二种情形： $-1 < a < 0$

用同样的方法作图，如图 9.13 所示：$\angle P_0OA = \arcsin a$ 和 $\angle P_0OB = \pi - \arcsin a$ 是方程 $\sin x = a$, $-1 < a < 0$ 的特解，因此，原方程的通解仍是

$$x_1 = 2k\pi + \arcsin a$$
$$x_2 = 2k\pi + \pi - \arcsin a = (2k+1)\pi - \arcsin a$$

合并起来，可写成

$$x = k\pi + (-1)^k \arcsin a$$

第三种情形： $a = 1$

方程 $\sin x = 1$ 的特解是 $x = \dfrac{\pi}{2}$，因此，原方程的通解是

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad 或者 \quad x = 90^\circ + k \cdot 360^\circ$$

第四种情形： $a = -1$

$$\sin x = -1$$

特解：$x = -\dfrac{\pi}{2}$（或 $x = -90^\circ$），

通解：$x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$　（或 $x = -90^\circ + k \cdot 360^\circ$）.

第五种情形： $a = 0$

$$\sin x = 0$$

特解：$x_1 = 0$ 和 $x_2 = \pi$.

通解：$x_1 = 2k\pi$ 和 $x_2 = \pi + 2k\pi = (2k+1)\pi$, 合并成：

$$x = k\pi$$

第六种情形： $|a| > 1$

在这种情形下，$\sin x = a$ 没有解.

将结果总结于下表内

a 的数值	方程 $\sin x = a$ 的解
$-1 < a < 0,\ 0 < a < 1$	$x = k\pi + (-1)^k \arcsin a$
$a = -1$	$x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$
$a = 0$	$x = k\pi$
$a = 1$	$x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$
$\|a\| > 1$	方程无解

例 9.19　解方程 $\sin x = \dfrac{1}{2}$

解：

$$x = k\pi + (-1)^k \arcsin\frac{1}{2} = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6}$$

或者

$$x = k \cdot 360^\circ + (-1)^k \cdot 30^\circ, \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

例 9.20　解方程 $\sin x = -\dfrac{1}{2}$

解：

$$x = k\pi + (-1)^k \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = k\pi + (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}$$

或者

$$x = k \cdot 360^\circ + (-1)^{k+1} \cdot 30^\circ, \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

例 9.21 解方程 $\sin(2x-1) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

解：

$$\begin{aligned} 2x - 1 &= k\pi + (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2x &= k\pi + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{3} + 1 \\ x &= k \cdot \frac{\pi}{2} + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}, \qquad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

（二）$\cos x = a$ 的解

第一种情形： $0 < a < 1$ 在 Ox 轴上作出横坐标等于 a 的 P 点，并过 P 点作平行于 Oy 轴的直线交单位圆周于 C 和 D 二点，P_0 为 $(1,0)$（图 9.14）. $\angle P_0OC = \arccos a$ 和 $\angle P_0OD = -\arccos a$ 的余弦等于 a, 故它们是方程的解，原方程的通解是

$$x = 2k\pi \pm \arccos a$$

第二种情形： $-1 < a < 0$ 作类似的图形，如图 9.15 同样可得原方程的通解是

$$x = 2k\pi \pm \arccos a$$

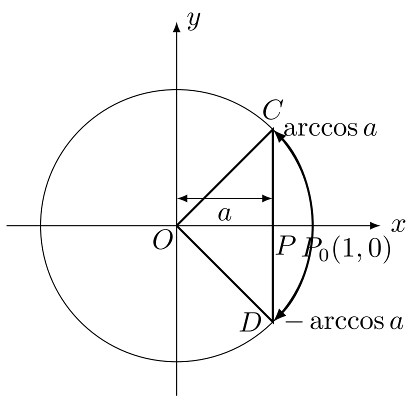


图 9.14

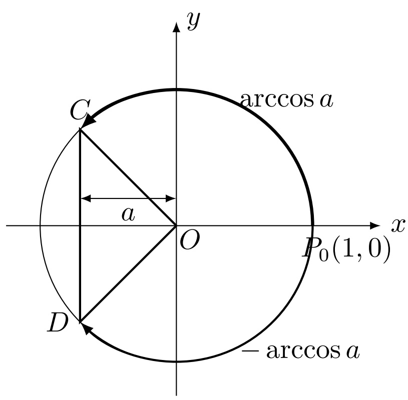


图 9.15

第三种情形： $a=1$

$$\cos x=1$$

方程的特解：$x=0$, 方程的通解：$x=2k\pi$.

第四种情形： $a=-1$

$$\cos x=-1$$

方程的特解：$x=\pi$, 方程的通解：$x=\pi+2k\pi=(2k+1)\pi$.

第五种情形： $a=0$

$$\cos x=0$$

方程的特解：$x_1=\dfrac{\pi}{2}$ 和 $x_2=-\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}-\pi$.

方程的通解：$x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$.

第六种情形： $|a|>1$

在这种情形下，方程 $\cos x=a$ 无解.

将结果综合于下表内：

a 的数值	方程 $\cos x=a$ 的解
$-1<a<0,\ 0<a<1$	$x=2k\pi\pm\arccos a$
$a=-1$	$x=(2k+1)\pi$
$a=0$	$x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$
$a=1$	$x=2k\pi$
$\lvert a\rvert>1$	方程无解

例 9.22　解方程 $2\cos x+1=0$

解： 化简为 $\cos x=-\dfrac{1}{2}$，通解如下：

$$\begin{aligned}x&=2k\pi\pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\\&=2k\pi\pm\left(\pi-\arccos\frac{1}{2}\right)\\&=2k\pi\pm\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\\&=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}\end{aligned}$$

例 9.23　解方程 $\cos\left(\dfrac{x}{4}+\dfrac{\pi}{5}\right)=0$

解：

$$\begin{aligned}\frac{x}{4}+\frac{\pi}{5}&=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ \frac{x}{4}&=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}+k\pi=\frac{3\pi}{10}+k\pi\\ x&=4\left(\frac{3\pi}{10}+k\pi\right)=\frac{6\pi}{5}+4k\pi\end{aligned}$$

（三） $\tan x = a$ 的解

如图 9.16 所示，$\angle P_0OA=\arctan a$ 和 $\angle P_0OB=\pi+\arctan a$ 是方程的解，因为它们的正切等于 a. 原方程的通解是

$$x=k\pi+\arctan a$$

例 9.24 解方程 $\tan x=-1$

解：

$$x=k\pi+\arctan(-1)=k\pi-\arctan 1=k\pi-\frac{\pi}{4}$$

（四） $\cot x = a$ 的解

如图 9.17 所示，$\angle P_0OA=\operatorname{arccot} a$ 和 $\angle P_0OB=\pi+\operatorname{arccot} a$ 是方程的特解，因为它们的余切等于 a. 原方程的通解是

$$x=k\pi+\operatorname{arccot} a,\qquad (k\in\mathbb{Z})$$

例 9.25 解方程 $9\cot^2 2x-25=0$

解：

$$\begin{aligned}\cot^2 2x&=\frac{25}{9}\\ \cot 2x&=\pm\frac{5}{3}\approx\pm 1.6667\end{aligned}$$

由 $\cot 2x=1.6667$，得：

$$2x=30^\circ 58'+k\cdot 180^\circ$$

$$x=15^\circ 29'+k\cdot 90^\circ$$

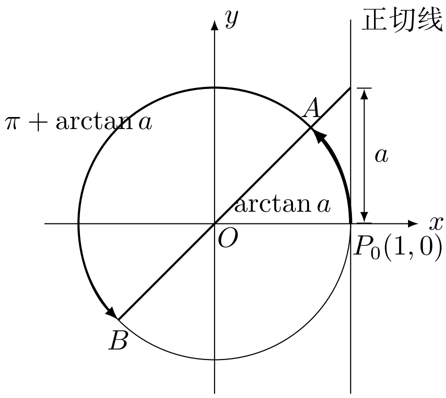


图 9.16

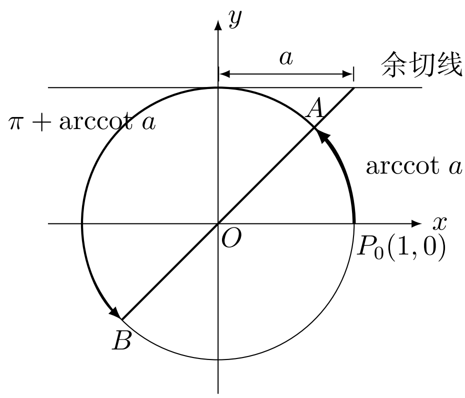


图 9.17

由 $\cot 2x = -1.6667$，得：

$$2x = (180° - 30°58') + k\cdot 180°$$

$$2x = 149°2' + k\cdot 180°$$

$$x = 74°31' + k\cdot 90°$$

$\therefore$　原方程的近似解是：

$$x = 15°29' + k\cdot 90° \quad 和 \quad x = 74°31' + k\cdot 90°$$

二、解简单三角方程的例子

在本节中，我们来研究某些三角方程的解法．解这些方程时，一般是应用三角函数的恒等变形和解代数方程的一般知识把它归结成解一个或几个最简单的三角方程，从而求出所有解．在解三角方程的过程中，应当避免作可能破坏方程同解性的变形，如果这类变形不可避免，则需研究哪些根会失掉，哪些根是增根，对最终方程的诸解，应当进行检验，确定它们是否是原方程的解．下面通过例子来阐明．

（一）含有同角的同名三角函数的方程

例 9.26　解方程 $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

解： 把方程看作关于未知数为 $\cos x$ 的二次方程，按照二次方程的解法，可得

$$\cos x = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1\pm 3}{4}$$

由此得：$\cos x=\dfrac{1}{2}$ 或 $\cos x=-1$.

由 $\cos x=\dfrac{1}{2}$，得：$x=2k\pi+\dfrac{\pi}{3}$；由 $\cos x=-1$，得：$x=(2k+1)\pi$.

$\therefore$ 原方程的解集是

$$\left\{x \middle| x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}\right\}\cup\left\{x|x=(2k+1)\pi\right\}$$

例 9.27 解方程 $2\sin^2 x+2\sin x-\sqrt{3}\sin x=\sqrt{3}$

解： 解法 1： 把一切项都移至左端，得：$2\sin^2 x+\left(2-\sqrt{3}\right)\sin x-\sqrt{3}=0$ 解关于 $\sin x$ 的二次方程，得

$$\begin{aligned}\sin x&=\frac{-2+\sqrt{3}\pm\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2+8\sqrt{3}}}{4}\\&=\frac{-2+\sqrt{3}\pm\sqrt{4+4\sqrt{3}+3}}{4}\\&=\frac{-2+\sqrt{3}\pm\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}}{4}\\&=\frac{-2+\sqrt{3}\pm\left(2+\sqrt{3}\right)}{4}\end{aligned}$$

由此得

$$\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad 或\quad \sin x=-1$$

由 $\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 得：$x=k\cdot 180^\circ+(-1)^k\cdot 60^\circ$.

由 $\sin x=-1$ 得：$x=-90^\circ+k\cdot 360^\circ$.

$\therefore$ 原方程的解集是

$$\left\{x|x=k\cdot 180^\circ+(-1)^k\cdot 60^\circ\right\}\cup\left\{x|x=-90^\circ+k\cdot 360^\circ\right\}$$

这里 $k\in\mathbb{Z}$.

解法 2： 把一切项都移至左端得：$2\sin^2 x+2\sin x-\sqrt{3}\sin x-\sqrt{3}=0$

方程左端可以分解因式：

$$\begin{aligned}2\sin x(\sin x+1)-\sqrt{3}(\sin x+1)&=0\\(\sin x+1)\left(2\sin x-\sqrt{3}\right)&=0\end{aligned}$$

若两个因式的乘积等于零，则至少有一个因式等于零，同时应当满足下列条件：对于使第一个因式为零的解，应当使方程的第二个因式有确定的值．上面的方程可分为这样的两个方程：

$$2\sin x-\sqrt{3}=0 \quad \text{或} \quad \sin x+1=0$$

分别由 $\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 和 $\sin x=-1$，得到：

$$x=k\pi+(-1)^k\cdot\frac{\pi}{3} \quad \text{和} \quad x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

把 $x=k\pi+(-1)^k\cdot\dfrac{\pi}{3}$ 代入 $\sin x+1$ 中，有确定值，同样把 $x=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ 代入 $2\sin x-\sqrt{3}$ 中，也有确定值，所以原方程的解集是

$$\left\{x\middle|x=k\pi+(-1)^k\cdot\frac{\pi}{3}\right\}\bigcup\left\{x\middle|x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right\}$$

一般的情况下，在三角方程中，不只有一个三角函数，我们可以利用同一个角的各三角函数值之间的关系式，把方程中未知角的各三角函数都用某一个三角函数表示出来，这样，就把所解的三角方程先归结到多项式方程的问题.

例 9.28　解方程 $\sin^2 x+\cos x+1=0$

解： $\because \quad \sin^2 x=1-\cos^2 x, \qquad \therefore$　原方程可化为：

$$\cos^2 x-\cos x-2=0$$

$$\cos x=\frac{1\pm 3}{2}$$

由此得到

$$\cos x=2 \quad \text{或} \quad \cos x=-1$$

$\because \quad \cos x=2>1, \qquad \therefore$　方程无解.

由 $\cos x=-1$，得：$x=(2k+1)\pi$

$\therefore$　原方程的解集是 $\{x|x=(2k+1)\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$.

例 9.29　解方程 $\cos x-\sin x=0$

解： 如果用 $\cos x$ 表示 $\sin x$ 或用 $\sin x$ 表示 $\cos x$, 那么我们就得到根式方程，为了避免这点，可以用 $\cos x$ 去除方程的两边，得到

$$1-\tan x=0$$

因为原方程的解不含有 $\cos x=0$ 的解，所以我们有根据这样做．事实上，由 $\cos x=0$, 得到 $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, 代入 $\cos x-\sin x$ 中，有

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)-sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=0-(-1)^k\sin\frac{\pi}{2}=(-1)^{k+1}\neq 0$$

不满足原方程.

因此，用 $\cos x$ 去除原方程的两边，得到和原方程同解的方程

$$\tan x=1$$

由此，$x=k\pi+\dfrac{\pi}{4}$.

所以原方程的解集是 $\left\{x\middle|x=k\pi+\dfrac{\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

注意： 当解 $\cos x-\sin x=0$ 时，也可以把 $\cos x$ 提出括号之外，而不用 $\cos x$ 去除两端，原方程可写成下面的形式

$$\cos x(1-\tan x)=0$$

由此得到

$$\cos x=0\quad 或\quad \tan x=1$$

但是使 $\cos x=0$ 的解：$x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ 却使因式 $1-\tan x$ 无意义，这就表示 $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ 是原方程的增根，因此必须舍去，同样我们得到原方程的同解方程 $\tan x=1$.

对于例 9.29 这种方程的解法还可以应用到下面更一般的类型上去.

左端是关于 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的齐次多项式右端是零的方程，称为**齐次方程**，例 9.29 的方程是齐次方程的一个特例.

例 9.30 解齐次方程 $2\sin^2 x-7\sin x\cos x+6\cos^2 x=0$

解： 用 $\cos^2 x$ 除原方程的两端，得

$$2\tan^2 x-7\tan x+6=0$$

由此得 $\tan x=2$ 或 $\tan x=1.5$

由 $\tan x=2$ 得

$$x\approx k\cdot 180^\circ+63^\circ 26'$$

由 $\tan x=1.5$ 得

$$x\approx k\cdot 180^\circ+56^\circ 19'$$

$\therefore$　原方程的解集是:

$$\left\{x\middle|x=k\cdot 180^\circ+63^\circ 26'\right\}\cup\left\{x\middle|x=k\cdot 180^\circ+56^\circ 19'\right\}$$

或者

$$\left\{x\middle|x=k\pi+\arctan 2\right\}\bigcup\left\{x\middle|x=k\pi+\arctan\frac{3}{2}\right\}$$

又这样的方程 $2\sin^2 x+5\sin x\cos x+\cos^2 x=4$ 也可以归入齐次方程，因为原方程可写成

$$2\sin^2 x+5\sin x\cos x+\cos^2 x-4(\cos^2 x+\sin^2 x)=0$$

化简得

$$2\sin^2 x-5\sin x\cos x+3\cos^2 x=0$$

例 9.31　解方程 $8\sin^2\dfrac{x}{2}+3\sin x-4=0$

解: 原方程可以变形为齐次方程

$$8\sin^2\frac{x}{2}+6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-4\left(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)=0$$

化简得: $2\sin^2\dfrac{x}{2}+3\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}-2\cos^2\dfrac{x}{2}=0.$

两边除以 $\cos^2\dfrac{x}{2}$, 得

$$2\tan^2\frac{x}{2}+3\tan\frac{x}{2}-2=0$$

所以 $\tan\dfrac{x}{2}=-2$　或　$\tan\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{2}$.

由 $\tan\dfrac{x}{2}=-2$ 得:

$$\frac{x}{2}=-\arctan 2+k\pi$$

$$x=-2\arctan 2+2k\pi$$

由 $\tan\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{2}$ 得:

$$\frac{x}{2}=\arctan\frac{1}{2}+k\pi$$

$$x=2\arctan\frac{1}{2}+2k\pi$$

因为原方程的解不含有 $\cos^2\dfrac{x}{2}=0$ 的解，所以，这样解不会丢根，由此知原方程的解是

$$\{x|x=-2\arctan 2+2k\pi\}\cup\left\{x\middle|x=2\arctan\frac{1}{2}+2k\pi\right\}$$

（二）一边为零，另一边可以分解为因式的乘积的方程

例 9.32 解方程 $1-\cos x=\tan x-\sin x$

解： 原方程可变形为：$1-\cos x=\tan x(1-\cos x)$

如果方程的两边除以 $1-\cos x$, 那么，原方程中就会丢掉 $1-\cos x=0$ 的根. 为了不致丢掉这些根，把因式 $1-\cos x$ 提出，方程就变形为：

$$(1-\cos x)(1-\tan x)=0$$

于是

$$1-\cos x=0 \quad \text{或} \quad 1-\tan x=0$$

由 $\cos x=1$ 得到 $x=2k\pi$, 由 $\tan x=1$ 得到 $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$.

由于方程 $\cos x=1$ 的解使因式 $1-\tan x$ 有确定值，而方程 $\tan x=1$ 的解也使因式 $1-\cos x$ 有确定值，所以原方程的解集是

$$\{x|x=2k\pi\}\cup\left\{x\middle|x=\frac{\pi}{4}+k\pi\right\}$$

例 9.33 解方程 $\tan x+\tan 2x-\tan 3x=0$

解： 原方程可写成 $\tan 3x(1-\tan x\cdot\tan 2x)-\tan 3x=0$

化简得：$\tan x\cdot\tan 2x\cdot\tan 3x=0$，由此得：

$$\tan x=0 \quad \text{或} \quad \tan 2x=0 \quad \text{或} \quad \tan 3x=0$$

由 $\tan x=0$ 得 $x=k\pi$；由 $\tan 2x=0$ 得 $x=\dfrac{k\pi}{2}$；由 $\tan 3x=0$ 得 $x=\dfrac{k\pi}{3}$

把各方程的解标在单位圆上，得到满足各方程的角的终边，如图 9.18 所示.

$$\because \quad \tan x=0 \text{ 的解 } x=k\pi=3k\cdot\frac{\pi}{3}\in\{x|tan3x=0\}=\left\{x\middle|x=k\cdot\frac{\pi}{3}\right\}$$

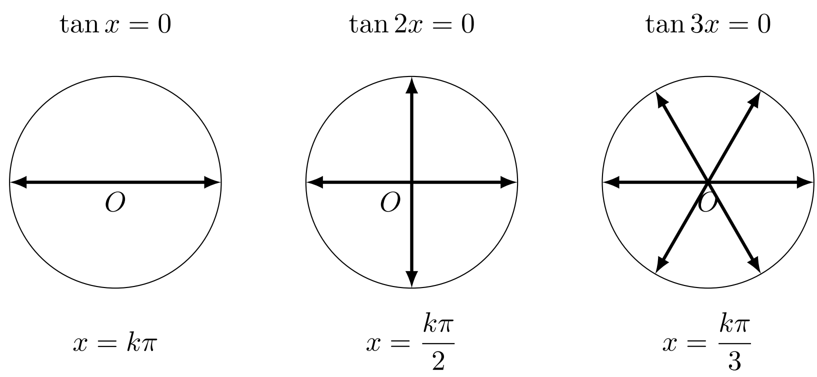


图 9.18

又 $\tan 2x=0$ 的解 $x=k\cdot\dfrac{\pi}{2}$ 中，当 $k=2n+1$ 时，使 $\tan x$ 没有确定值，必须舍去；又当 $k=2n$ 时，

$$x=n\pi=3n\cdot\frac{\pi}{3}\in\left\{x\middle|x=k\cdot\frac{\pi}{3}\right\}=\{x|\tan 3x=0\}$$

因此，所求方程的解集是 $\left\{x\middle|x=k\cdot\dfrac{\pi}{3},\quad k\in\mathbb{Z}\right\}$

例 9.34 解方程 $\sin x+\tan x=\sec x-\cos x$

解： 两边同乘以 $\cos x$, 得到 $\sin x\cos x+\sin x=1-\cos^2 x$ 移项，提取公因式得

$$\sin x(\cos x+1-\sin x)=0$$

由此得

$$\sin x=0\quad\text{或}\quad\cos x+1-\sin x=0$$

由 $\sin x=0$, 得 $x=k\pi$.

由 $\sin x-\cos x=1$，变形为 $\sin x-\sin(90^\circ-x)=1$，即：

$$2\cos 45^\circ sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1$$

即 $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

由此得：

$$x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2k\pi\quad\text{或}\quad x-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$$

即

$$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\quad\text{或}\quad x=(2k+1)\pi$$

这样，我们由已知方程得到 3 组解：

$$x = k\pi \tag{9.1}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \tag{9.2}$$

$$x = (2k+1)\pi \tag{9.3}$$

因为 $\{x|x=(2k+1)\pi\} \subset \{x|x=k\pi\}$，又 $x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ 使 $\cos x = 0$，因此对于 x 的这些值，原方程中的函数 $\tan x$ 及 $\sec x$ 无意义，这就是说 $x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ 是增根，必须舍去，所以原方程的解集是 $\{x|x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$.

例 9.35 解方程 $\sin 7x = \sin 5x$

解： 解法 1：移项，得 $\sin 7x - \sin 5x = 0$，利用和差化积公式得

$$2\cos 6x \sin x = 0$$

由此得

$$\cos 6x = 0 \quad 或 \quad \sin x = 0$$

由 $\cos 6x = 0$，得：

$$6x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$
$$x = \frac{\pi}{12} + k\cdot\frac{\pi}{6}$$

由 $\sin x = 0$，得：$x = k\pi$.

所求方程的解集是

$$\left\{x\middle|x=\frac{\pi}{12}+k\cdot\frac{\pi}{6}\right\} \cup \left\{x\middle|x=k\pi\right\}$$

解法 2：利用二角正弦相等条件有

$$7x = 5x + 2k\pi \quad 或 \quad 7x = \pi - 5x + 2k\pi$$

由 $7x = 5x + 2k\pi$ 得 $2x = 2k\pi$，因此：$x = k\pi$.
由 $7x = \pi - 5x + 2k\pi$ 得 $12x = \pi + 2k\pi$, 因此：$x = \dfrac{\pi}{12} + k\cdot\dfrac{\pi}{6}$
$\therefore$ 方程的解集是

$$\left\{x\middle|x=k\pi\right\} \cup \left\{x\middle|x=\frac{\pi}{12}+k\cdot\frac{\pi}{6}\right\}$$

我们得到与第一种解法相同的结果.

(三) $a\sin x+b\cos x=c$ 型的方程

第一种方法　引入辅助角 φ，让方程的两端除以 $\sqrt{a^2+b^2}$, 得到

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

令 $\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，　$\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，由点 (a,b) 所在的象限定出角 φ 是第几象限角, 可由 $\tan\varphi=\dfrac{b}{a}$ 求出 φ 的值, 于是原方程可写成

$$\sin x\cos\varphi+\cos x\sin\varphi=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

即 $\sin(x+\varphi)=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

解出

$$x+\varphi=2k\pi+\arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \tag{9.4}$$

或

$$x+\varphi=2k\pi+\pi-\arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \tag{9.5}$$

由此得到

$$x=2k\pi+\arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}-\varphi$$

或

$$x=(2k+1)\pi-\arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}-\varphi$$

讨论：原方程有解的必要且充分条件是 $\left|\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\leq 1$，即 $\dfrac{c^2}{a^2+b^2}\leq 1$，由此得到 $a^2+b^2\geq c^2$.

例 9.36　解方程 $-\sqrt{3}\sin x+\cos x=1$

解： 原方程两边除以 $\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1}=2$, 得到

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x=\frac{1}{2}$$

令 $\cos\varphi=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}<0$，　$\sin\varphi=\dfrac{1}{2}>0$，则角 φ 是第一象限角，

$$\varphi=\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$$

于是，原方程可写成

$$\sin x\cos\frac{5\pi}{6}+\cos x\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

即：$\sin\left(x+\dfrac{5\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$.

$\therefore\quad x+\dfrac{5\pi}{6}=2k\pi+\dfrac{\pi}{6}$　或　$x+\dfrac{5\pi}{6}=2k\pi+\left(\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)$

由此：$x=2k\pi-\dfrac{2\pi}{3}$　或　$x=2k\pi$.

$\therefore$　原方程的解集是

$$\left\{x\middle|x=2k\pi-\frac{2\pi}{3}\right\}\cup\{x|x=2k\pi\}$$

例 9.37　解方程 $2\sin x-3\cos x=\sqrt{13}$

解：方程两边除以 $\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$, 得到

$$\frac{2}{\sqrt{13}}\sin x+\frac{(-3)}{\sqrt{13}}\cos x=1$$

令 $\cos\varphi=\dfrac{2}{\sqrt{13}}>0,\quad \sin\varphi=\dfrac{-3}{\sqrt{13}}<0$ 则角 φ 是第四象限角，且由 $\tan\varphi=-\dfrac{3}{2}=-1.5$, 查表得出 $\varphi=\arctan(-1.5)\approx-56°18'$, 于是原方程可写成

$$\sin x\cos(-56°18')+\cos x\sin(-56°18')=1$$

即：$\sin(x-56°18')=1$，由此：

$$x-56°18'=k\cdot 360°+90°$$
$$x=k\cdot 360°+146°18'$$

$\therefore$　原方程的解集是 $\{x|x=k\cdot 360°+146°18'\}$.

第二种方法　利用 $\tan\dfrac{x}{2}$ 表 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的公式（“万能公式”），

$$\sin x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}},\qquad \cos x=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

例如，$-\sqrt{3}\sin x+\cos x=1$，可写成

$$\frac{-\sqrt{3}\cdot 2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}+\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=1$$

化简得

$$2\tan^2\frac{x}{2}+2\sqrt{3}\tan\frac{x}{2}=0$$
$$2\tan\frac{x}{2}\left(\tan\frac{x}{2}+\sqrt{3}\right)=0$$

$\therefore\quad \tan\frac{x}{2}=0$　或　$\tan\frac{x}{2}+\sqrt{3}=0$

由 $\tan\frac{x}{2}=0$ 得 $\frac{x}{2}=k\pi$, $\therefore\quad x=2k\pi$

由 $\tan\frac{x}{2}=-\sqrt{3}$ 得 $\frac{x}{2}=k\pi+\arctan(-\sqrt{3})$

$\therefore\quad x=2k\pi+2\left(-\frac{\pi}{3}\right)=2k\pi-\frac{2\pi}{3}$

因为原方程不含使 $\tan\frac{x}{2}$ 失去意义的解 $x=(2k+1)\pi$, 所以用万能公式进行代换不会丢根.

$\therefore$　原方程的解集是

$$\left\{x\middle|x=2k\pi-\frac{2}{3}\pi\right\}\cup\left\{x\middle|x=2k\pi\right\}$$

所得结果与例 9.36 第一种解法相同.

第三种方法　化为 $\sin\frac{x}{2}$ 和 $\cos\frac{x}{2}$ 的二次齐次方程, 例如 $-\sqrt{3}\sin x+\cos x=1$, 可写成

$$-2\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}$$

化简为

$$-2\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-2\sin^2\frac{x}{2}=0$$
$$-2\sin\frac{x}{2}\left(\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)=0$$

由 $\sin\frac{x}{2}=0$, 得到 $\frac{x}{2}=k\pi$, $\therefore\quad x=2k\pi$

由 $\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}=0$, 两边除以 $\cos\frac{x}{2}$ 得:

$$\sqrt{3}+\tan\frac{x}{2}=0$$
$$\tan\frac{x}{2}=-\sqrt{3}$$
$$\frac{x}{2}=k\pi-\frac{\pi}{3}$$
$$x=2k\pi-\frac{2\pi}{3}$$

$\therefore$　原方程的解集是

$$\left\{x\middle|x=2k\pi\right\}\cup\left\{x\middle|x=2k\pi-\frac{2}{3}\pi\right\}$$

所得结果与例 9.36 第一种解法相同.

第六节 三角不等式的解法

定理

若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上到处连续且对于任何一个 $x \in (a,b)$, $f(x) \neq 0$, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 上保持相同符号.

证明: 用反证法, 假设 $f(x)$ 在 (a,b) 内的值有相异的符号, 即存在 x_1 和 x_2 满足 $a < x_1 < x_2 < b$ 且使 $f(x_1)f(x_2) < 0$, 于是根据连续函数中间值定理, 必存在一个介于 x_1 和 x_2 之间的常数 c, 使得 $f(c) = 0$. 这和已知条件: 对于任何一个 $x \in (a,b)$, $f(x) \neq 0$ 矛盾, 因此, $f(x)$ 在 (a,b) 内保持相同符号.

我们举例说明如何应用这个定理解不等式.

例 9.38 解不等式 $\sin x > a$

解: 移项, 化为 $\sin x - a > 0$

设 $f(x) = \sin x - a$, $f(x)$ 是周期等于 2π 的函数, 先讨论在长度等于一个周期的区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ 内的 $f(x)$ 的符号:

1. 若 $|a| \leq 1$, 求 $f(x)$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ 内的零点. $\sin x = a$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ 内的解是

$$x_1 = \arcsin a \quad 和 \quad x_2 = \pi - \arcsin a$$

把解的终边画在单位圆上, 如图 9.19 且由图 9.19 看出:

当 $\arcsin a < x < \pi - \arcsin a$ 时, $f(x) = \sin x - a > 0$ 成立;

当 $-\dfrac{\pi}{2} < x < \arcsin a$ 或 $\pi - \arcsin a < x < \dfrac{3\pi}{2}$ 时, $f(x) = \sin x - a < 0$ 成立, 因此, 在 $|a| \leq 1$ 的场合, $\sin x > a$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ 内的解满足条件:

$$\arcsin a < x < \pi - \arcsin a$$

由于 $f(x) = \sin x - a$ 是周期等于 2π 的函数, 因此 $\sin x > a$ 的一切解满足条件:

$$2k\pi + \arcsin a < x < (2k+1)\pi - \arcsin a, \quad k \in \mathbb{Z}$$

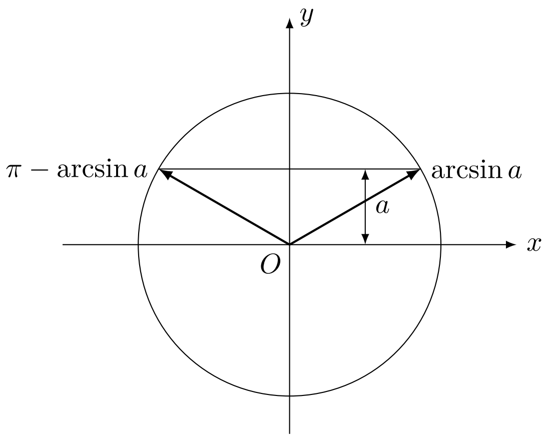


图 9.19

2. 若 $a > 1$, 则对于任何 $x \in \mathbb{R}$, 有 $f(x) = \sin x - a < 0$, 因此，不等式 $\sin x > a$ 没有解.

3. 若 $a < -1$, 则对于任何 $x \in \mathbb{R}$, 有 $f(x) = \sin x - a > 0$, 因此，不等式 $\sin x > a$ 的解集是实数集 $\mathbb{R}$.

总之:

1. 当 $|a| \le 1$ 时，所求不等式的解集是

$$\{x|2k\pi + \arcsin a < x < (2k+1)\pi - \arcsin a\}$$

2. 当 $a > 1$ 时，所求不等式的解集是空集 $\emptyset$;

3. 当 $a < -1$ 时，所求不等式的解集是实数集 $\mathbb{R}$.

例 9.39　解不等式 $\cos x < a$

解: 移项，化为 $\cos x - a < 0$

设 $f(x) = \cos x - a$, $f(x)$ 是周期等于 2π 的函数，先讨论在长度等于一个周期的区间 $[-\pi, \pi]$ 内的 $f(x)$ 的符号:

1. 若 $|a| \le 1$, $f(x) = \cos x - a$ 在 $[-\pi, \pi]$ 内的解是

$$x_1 = \arccos a \quad \text{和} \quad x_2 = -\arccos a$$

把解的终边画在单位圆上，如图 9.20 且由图 9.20 容易看出:

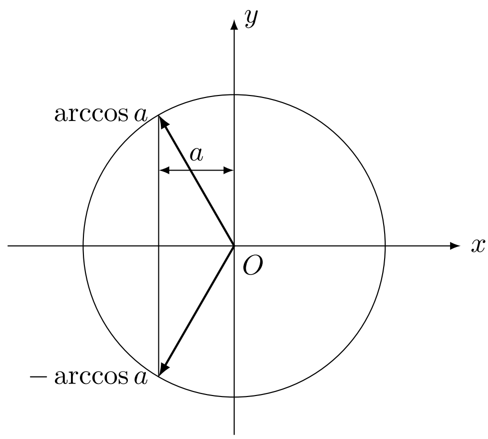


图 9.20

当 $\arccos a < x < \pi$ 或 $-\pi < x < -\arccos a$ 时，$f(x) = \cos x - a < 0$ 成立，而且仅在此时成立，又因为 $f(x) = \cos x - a$ 的周期是 2π, 所以，$\cos x < a$ 的一切解，满足

$$2k\pi + \arccos a < x < (2k+1)\pi \tag{9.6}$$

或

$$(2k-1)\pi < x < 2k\pi - \arccos a \tag{9.7}$$

又 (9.7) 也可以写成

$$(2k+1)\pi < x < (2k+2)\pi - \arccos a \tag{9.8}$$

再将 (9.6), (9.8) 合并为

$$2k\pi + \arccos a < x < (2k+2)\pi - \arccos a \tag{9.9}$$

因此，在 $|a| \leq 1$ 的场合，$\cos x < a$ 的一切解满足 (9.9).

2. 若 $a > 1$, 则对于任何 $x \in \mathbb{R}$, 有 $f(x) = \cos x - a < 0$ 成立，因此，不等式 $\cos x < a$ 的解集是实数集 $\mathbb{R}$.

3. 若 $a < -1$, 则对于任何 $x \in \mathbb{R}$, 有 $f(x) = \cos x - a > 0$ 成立，因此，不等式 $\cos x < a$ 没有解.

总之，

1. 当 $|a| \leq 1$ 时，所求不等式的解集是

$$\{x | 2k\pi + \arccos a < x < (2k+2)\pi - \arccos a\}$$

2. 当 $a > 1$ 时，所求不等式的解集是实数集 $\mathbb{R}$.

3. 当 $a < -1$ 时，所求不等式的解集是空集 $\emptyset$.

例 9.40 解不等式 $2cos^2 2x < 1$

解： 移项，化简为 $\cos 4x < 0$. 设 $f(x) = \cos 4x$, 它是周期等于 $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ 的函数.

$f(x) = \cos 4x$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 内的零点为 $\frac{\pi}{8}$，$\frac{3\pi}{8}$.

显然，当 $0 \le x < \frac{\pi}{8}$ 时，$f(x) = \cos 4x > 0$；当 $\frac{\pi}{8} < x < \frac{3\pi}{8}$ 时，$f(x) = \cos 4x < 0$；当 $\frac{3\pi}{8} < x \le \frac{\pi}{2}$ 时，$f(x) = \cos 4x > 0$.

$\therefore$ $\cos 4x < 0$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 内的部分解满足条件：$\frac{\pi}{8} < x < \frac{3\pi}{8}$

又 $f(x)$ 的周期是 $\frac{\pi}{2}$.

$\therefore$ $\cos 4x < 0$ 的一切解满足条件

$$\frac{\pi}{8} + n \cdot \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{8} + n \cdot \frac{\pi}{2} \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

$\therefore$ $2\cos^2 2x < 1$ 的解集是

$$\left\{x \middle| \frac{\pi}{8} + n \cdot \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{8} + n \cdot \frac{\pi}{2}\right\}$$

例 9.41 解不等式 $\frac{\cos 2x + \cos x - 1}{\cos 2x} > 2, \quad (0 < x < 2\pi)$

解： 移项，并将 $\cos 2x = 2cos^2 x - 1$ 代入得

$$\frac{\cos x(1 - 2\cos x)}{2cos^2 x - 1} > 0$$

因为原不等式的解使 $\cos 2x \ne 0$（即 $2cos^2 x - 1 \ne 0$），两边乘以 $(2\cos^x - 1)^2$, 得到同解不等式

$$\cos x(1 - 2\cos x)(2\cos^2 x - 1) > 0$$

即

$$\left(\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cos x\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)\left(\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) < 0$$

上面不等式右端的函数式 $f(x)$ 的零点依大小排列是 $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$. 由此得知，仅当

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} < \cos x < 0 \tag{9.10}$$

或

$$\frac{1}{2} < \cos x < \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{9.11}$$

时，$f(x) = \cos x(1 - 2\cos x)(2\cos^2 x - 1) < 0.$

由于 $\cos x$ 在区间 $[0, \pi]$ 内是递减的，在区间 $[\pi, 2\pi]$ 内是递增的，所以由不等式 (9.10), 得（图 9.21）：

$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4}, \qquad \frac{5\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{2}$$

由不等式 (9.11), 得（图 9.22）：

$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{3}, \qquad \frac{5\pi}{3} < x < \frac{7\pi}{4}$$

因此，原不等式在区间 $0 < x < 2\pi$ 内的解集是

$$\left\{x \middle| \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{3}\right\} \bigcup \left\{x \middle| \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4}\right\} \bigcup \left\{x \middle| \frac{5\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{2}\right\} \bigcup \left\{x \middle| \frac{5\pi}{3} < x < \frac{7\pi}{4}\right\}$$

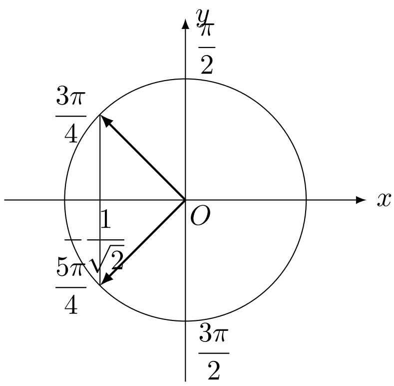


图 9.21

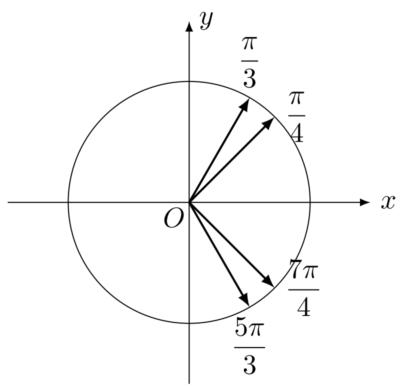


图 9.22

习题 9.4

1. 解下列方程：

(a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(b) $\sin x = 1$

(c) $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

(d) $\sin x = 0$

(e) $\cos x = 0$

(f) $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$

(g) $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(h) $\cos x=1$

(i) $\tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-1$

(j) $\cot\dfrac{2x}{3}-1=0$

(k) $\tan\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$

(l) $\cot x=0$

2. 解下列各方程（用反三角函数符号表示各方程的解）:

(a) $\sin 2x=0.7$

(b) $\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{5}$

(c) $\tan 3x=3$

(d) $\cot\dfrac{x}{4}=\dfrac{1}{4}$

(e) $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)=0.1$

(f) $\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{10}\right)=0.85$

(g) $\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{5}\right)=\dfrac{1}{8}$

(h) $\cot(2x-1)=\sqrt{2}$

3. 解下列各方程:

(a) $2\sin\dfrac{x+1}{4}+1=0$

(b) $4\sin^2 4x-3=0$

(c) $2\sin^2 x-3\sin x+1=0$

(d) $\tan^2 3x=2\tan 3x$

(e) $\cot^2\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{8}\right)+3\cot\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{8}\right)-4=0$

(f) $4\cos^2 x+\sin x=1$

(g) $\tan x+5\cot x=6$

(h) $2\cot 3x+\tan 3x+3=0$

4. a,b,c 满足什么条件，方程 $a\sin^2 x+b\cos^2 x=c$ 有解.

5. 解下列各方程:

(a) $\sin x(1+2\cos x)=0$

(b) $\sin 2x\cos 3x=0$

(c) $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)=0$

(d) $\cos 5x(1+\cos 2x)=0$

(e) $\cot x-\cos x=1-\sin x$

(f) $1+\sin x\cos 3x+\sin x+\cos 3x=0$

(g) $\dfrac{\cos x}{1+\sin x}=2-\tan x$

(h) $\sin 3x\cdot\cot x=0$

6. 解下列各方程:

(a) $\sin 3x=\cos 3x$

(b) $\sin^2 3x=3\cos^2 3x$

(c) $5\cos x+2\sin x=5\cos x\cos 2x+2\sin x\cos 2x$

(d) $\sin x\tan x+\cos x\cdot\cot x=\sin x+\cos x$

(e) $\sin^2 x+5\sin x\cos x+4\cos^2 x=0$

(f) $3\sin^2 x-7\sin x\cos x+6\cos^2 x=1$

(g) $\dfrac{\sin x+2\cos x}{\sin x-2\cos x}=3$

(h) $\dfrac{2\sin^2 x-4\cos^2 x}{\sin^2 x+3\sin x\cos x+6\cos^2 x}=1$

7. a,b 满足什么条件, 方程 $\dfrac{a^2\sin x^2+b\cos x^2}{b^2\sin^2 x+a\cos x}=1$ 有解.

8. 解下列各方程:

(a) $\sin 3x\cos x=\cos 3x\sin x$

(b) $\cos 7x\cos 3x=\cos 4x$

(c) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\cos 2x+\sin(2x-\pi)\sin x=0$

(d) $\sin\dfrac{3\pi-x}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-3x\right)=\cos(3x-\pi)\cos\dfrac{3\pi+x}{2}$

(e) $\tan x\cdot\tan\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)=1$

(f) $\sin x\cos x=\dfrac{1}{4}$

(g) $\sin(34^\circ+x)\sin(56^\circ-x)=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

(h) $\cos^4 x-\sin^4 x=1$

(i) $\cos^2(x+30^\circ)-\sin^2(x+30^\circ)=\dfrac{1}{2}$

(j) $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{10}\right)\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}-x\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

(k) $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=2\cos x$

(l) $1-\tan^2 x=2\tan x\tan 2x$

(m) $2\cos 2x=7\sin x$

(n) $\sin 2x+\sqrt{2}\sin x=0$

(o) $2\sin^2 x+\sin^2 2x=2$

(p) $\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}=0$

(q) $\sin 4x=2\cos^2 x-1$

(r) $\sin x\cos x\cos 2x=\frac{1}{8}$

(s) $\cot x-\tan x=\tan 2x$

(t) $2-\sin\frac{x}{2}=2\cos\frac{x}{2}$

9. 解下列各方程:

(a) $\sin 2x=\sin 3x$

(b) $\cos(2x+15^\circ)=\cos(4x-15^\circ)$

(c) $\tan\left(\frac{x}{2}+30^\circ\right)=\tan(2x+60^\circ)$

(d) $\cos 3x=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$,

(e) $\tan\left(\frac{\pi}{8}-x\right)=\cot\left(\frac{\pi}{4}+3x\right)$

(f) $\sin 2x=-\sin\frac{x}{2}$

(g) $\tan 3x+\cot\frac{x}{3}=0$

(h) $\sin 3x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x=\frac{1}{2}\cos 2x$

(i) $\cos x-\sin x=1$

(j) $\cos(2x+15^\circ)+\cos(2x-15^\circ)=\frac{1}{2}$

(k) $\sin x+\cos x=2\sqrt{2}\sin x\cos x$

(l) $\sin 3x\cos x=\sin 7x\cos 5x$

(m) $2\cos(x+20^\circ)\cos x=\cos 40^\circ$

(n) $\sin\left(2x+\frac{\pi}{18}\right)\cos\left(2x-\frac{\pi}{9}\right)=-\frac{1}{4}$

(o) $\sin(x+15^\circ)\sin(x-30^\circ)=\sin(50^\circ+x)\cos(85^\circ-x)$

10. 解下列各方程:

(a) $\cos 7x+\cos x=\cos 4x$

(b) $\tan x+\tan 2x=\sin 3x\cos x$

(c) $\cos 8x+\cos 6x=\sqrt{3}\cos x$

(d) $1-\cos 2x=4\sin x$

(e) $\sin 2x+2\sin x=\sin\frac{x}{2}$

(f) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0$

(g) $\cos x+\cos 2x-\cos 3x=1$

(h) $\tan x+\tan 2x=\tan 3x$

(i) $1+\cos 2x+\sin x=2\cos^2\dfrac{x}{2}$

11. 解下列各方程：

(a) $\sin^2(x+10°)-\sin^2 x=\dfrac{1}{2}\sin 20°$

(b) $\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x=\dfrac{3}{2}$

(c) $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x=1$

(d) $\sin^2 2x+\sin^2 4x=\dfrac{3}{2}$

(e) $\sqrt{3}\cos x+\sin x=\sqrt{3}$

(f) $4\sin x+3\cos x=2$

(g) $\sin 3x+2\cos 2x=1$

(h) $5\cos(2x+18°)-12\sin(2x+18°)=13$

(i) $(4\sin x-5\cos x)^2-13(4\sin x-5\cos x)+42=0$

12. 解下列方程：

(a) $\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}=1+\sin 2x$

(b) $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}=2-\cot x$

(c) $\sin 2x=\cos 2x-\sin^2 x+1$

(d) $(\cos 5x+\cos 7x)^2=(\sin 5x+\sin 7x)^2$

13. 设关于 x 的方程 $\sin x+\sqrt{3}\cos x+a=0$ 在区间内有相异二解 α,β. 试求常数 a 的取值范围和 $\tan(\alpha+\beta)$ 的值.

14. 解下列各方程组：

(a) $\begin{cases}\sin x\sin y=\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\\ \tan x\cdot\tan y=\dfrac{1}{3}\end{cases}$

(b) $\begin{cases}x+y=\dfrac{\pi}{4}\\ \tan x+\tan y=1\end{cases}$

(c) $\begin{cases}\sin(2x+\sin^2 y)=0\\ x-3\sin^2 y=-2\end{cases}$

15. 解下列的不等式：

(a) $\sin(2\pi\cos x) > 0$

(b) $\lg\sin x \leqslant 0$

(c) $\cos^2 x + 7\sin^2 x < 8\sin x\cos x$

(d) $2\cos^2(x+30^\circ) - 3\sin(60^\circ - x) + 1 > 0$

(e) $\sin x + \sqrt{3}\cos x > 1$

16. 求下列各函数的定义域:

(a) $y = \arccos\dfrac{3}{x}$

(b) $y = \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$

(c) $y = \sqrt{\sin x}$

(d) $y = \sqrt{4\cos^2 2x - 3}$

第十章　指数函数与对数函数

第一节　有理指数函数

在本教材第三册中，已经把指数幂的定义范围从正整指数逐步推广到“负整数”，“正、负分数”，在逐步推广过程中，我们始终遵守的指导原则是保有指数法则：

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \qquad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

指数在有理数系 $\mathbb{Q}$ 内，我们有下面的指数幂的定义：

$$\begin{aligned} a^n &= \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n\text{ 个 }a}, && (n \in \mathbb{N}) \\ a^0 &= 1, && (a \neq 0) \\ a^{-n} &= \frac{1}{a^n}, && (a \neq 0) \\ a^{\frac{m}{n}} &= \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m, && (a \geq 0,\ m, n \in \mathbb{N}) \\ a^{-\frac{m}{n}} &= \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}, && (a > 0) \end{aligned}$$

采用上面定义后，我们在第三册中也证明了正实数 a 和 b 的有理指数幂依然满足指数运算法则：

$$a\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}, \qquad (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}, \qquad (a \cdot b)^\alpha = a^\alpha \cdot b^\alpha$$

这里 $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$.

这样一来，函数 a^x $(a > 0)$ 对于任意有理数 x 都有定义了. 我们称它为有理指数函数，这个函数具有上面所说的三个性质. 下面将进一步研讨这个函数的其它重要性质：

性质 1

1. 若 $a>1$, 当有理数 $x>0$ 时，则 $a^x>1$, 当有理数 $x<0$ 时，则 $a^x<1$.
2. 若当 $0<a<1$, 有理数 $x>0$ 时，则 $a^x<1$, 当有理数 $x<0$ 时，则 $a^x>1$.

证明:

1. 若 $a>1$,
   (a) 设 $x=\dfrac{m}{n}>0$, $(m,n\in\mathbb{N})$, 则 $a^x=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$, 因为 $a>1$, 所以 $a^m>1$ （幂函数 $f(x)=x^m$ 在 $[0,+\infty)$ 上是严格递增的），又 $\sqrt[n]{a^m}>1$ （幂函数 $f(x)=x^{\frac{1}{n}}$ 在 $[0,+\infty)$ 上是严格递增的），即 $a^x>1$.
   (b) 设 $x<0$, $x=-x_1$, $(x_1>0)$, 则 $0<a^x=a^{-x_1}=\dfrac{1}{a^{x_1}}<1$, $(\because a^{x_1}>1)$.
2. 若 $0<a<1$,
   (a) 设 $a=\dfrac{1}{a_1}$, $a_1>1$, 则当 $x>0$, $a^x=\left(\dfrac{1}{a_1}\right)^x=\dfrac{1}{a_1^x}<1$, $(\because a_1^x>1)$.
   (b) 设 $x<0$, $x=-x_1$, $(x_1>0)$ 则 $a^x=a^{-x_1}=\dfrac{1}{a^{x_1}}>1$, $(\because a^{x_1}<1)$.

性质 1 的几何意义表明：当 $a>1$ 时，有理指数函数 $y=a^x$ 的图象上的点在有单斜线的区域 I 和 II 的部分；当 $0<a<1$ 时，$y=a^x$ 的图象上的点在有双斜线的区域 III 和 IV 的部分（图 6.1).

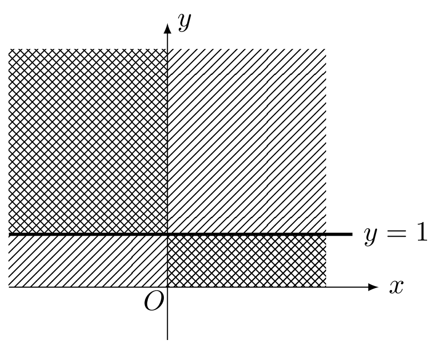


图 10.1

性质 2

1. 若 $a>1$, $x_1<x_2$，则 $a^{x_1}<a^{x_2}$, 即底数大于 1 的有理指数函数 a^x 是递增的；
2. 若 $0<a<1$, $x_1<x_2$，则 $a^{x_1}>a^{x_2}$，即底数小于 1 的正数的有理指数函数 a^x 是递减的.

证明： 若 $a>1$ 和 $x_1<x_2$, 那么

$$a^{x_2}-a^{x_1}=a^{x_1}\left(\frac{a^{x_2}}{a^{x_1}}-1\right)=a^{x_1}\left(a^{x_2-x_1}-1\right)$$

因为 $x_2-x_1>0$, $a>1$, 所以 $a^{x_2-x_1}>1$, 又 $a^{x_1}>0$. 因此，$a^{x_2-x_1}>0$, 即 $f(x)=a^x$, $(a>1)$ 是递增的.

若 $0<a<1$ 和 $x_1<x_2$, 那么

$$a^{x_2}-a^{x_1}=a^{x_1}\left(a^{x_2-x_1}-1\right)$$

因为 $x_2-x_1>0$, $0<a<1$, 所以 $a^{x_2-x_1}<1$, 又 $a^{x_1}>0$, 因此 $a^{x_2-x_1}<0$, 即 $f(x)=a^x$, $(0<a<1)$ 是递减的.

我们现在的任务是要把有理指数函数开拓为一个定义在实数集上的连续函数. 能否做到这一点的关键是如何对全体无理点补充定义，使得指数函数在整个实数轴 $\mathbb{R}$ 上处处连续. 为此，我们先说明有理指数函数的一个极限性质.

性质 3

设 $a>0$，则当 $n\to+\infty$ 时，数列 $\left\{a^{\frac{1}{n}}\right\}$ 的极限是 1，即

$$\lim_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=1$$

证明：

1. 当 $a=1$ 时，结论自然成立.
2. 当 $a>1$ 时，因为 $\frac{1}{n}>0$, 所以 $a^{\frac{1}{n}}>1$ (性质 1), 设 $a^{\frac{1}{n}}=1+h$, 其中 $h>0$, 两边 n 次方，得到

$$a=(1+h)^n$$

由贝努力不等式得

$$a=(1+h)^n>1+nh$$

所以，$0 < h < \dfrac{a-1}{n}$，　$1 < 1+h < 1+\dfrac{a-1}{n}$，即：

$$1 < a^{\frac{1}{n}} < 1+\frac{a-1}{n}$$

再令 $n \to +\infty$, 由上式就得到

$$1 \le \lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} \le 1$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$$

3. 当 $0 < a < 1$ 时，令 $a = \dfrac{1}{b}$, 则 $b > 1$, 由上面的证明得到

$$\lim_{n\to\infty} b^{\frac{1}{n}} = 1$$

于是

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{b^{\frac{1}{n}}}\\ &= \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{1} = 1\end{aligned}$$

性质 3 可以进一步推广到下面的推论：

推论

若 $a > 0$ 且 $a \ne 1$, 有理数数列 $\{h_i\}$, $i = 1, 2, 3, \dots$, 以 0 为极限，即 $\lim\limits_{i\to\infty} h_i = 0$, 那么

$$\lim_{i\to\infty} a^{h_i} = 1$$

证明： 先设 $a > 1$, 因为 $\lim\limits_{i\to\infty} h_i = 0$, 必定存在这样的自然数 N, 使得当 $i \ge N$ 时，$|h_i| < 1$, 从而 $\dfrac{1}{|h_i|} > 1$. 用 m_i 表示 $\left[\dfrac{1}{|h_i|}\right]$, 即不大于 $\dfrac{1}{|h_i|}$ 的最大整数，于是

$$m_i = \left[\frac{1}{|h_i|}\right] \le \frac{1}{|h_i|} < m_i + 1 \tag{10.1}$$

所以，当 $i \ge N$ 时，有

$$\frac{1}{m_i+1} < |h_i| \le \frac{1}{m_i}$$

由 $h \to 0$ 知，$\dfrac{1}{|h_i|} \to \infty$. 从而由 $m_i + 1 > \dfrac{1}{|h_i|}$ 知，$m_i \to \infty$. 根据有理指数幂的单调性，得

$$1 < a^{|h_i|} < a^{\frac{1}{m_i}}, \qquad (a > 1)$$

仿照性质 3 的证明，令 $b_i = a^{\frac{1}{m_i}} - 1 > 0$, 于是，

$$\begin{aligned} a^{\frac{1}{m_i}} &= (1 + b_i) \\ a &= (1 + b_i)^{m_i} > 1 + m_i b_i \\ 0 &< b_i < \frac{a-1}{m_i} \end{aligned}$$

当 $i \to 0$ 时，$m_i \to \infty$,

$\therefore \quad b_i \to 0$, 即 $a^{h_i} \to 1$, 从而当 $i \to \infty$ 时, $|h_i| \to 0$, $a^{|h_i|} \to 1$, 即 $a^{h_i} \to 1$.

若 $0 < a < 1$, 令 $b = \dfrac{1}{a} > 1$, 于是

$$\lim_{i \to \infty} a^{h_i} = \lim_{i \to \infty} \left(\frac{1}{b}\right)^{h_i} = \frac{1}{\lim\limits_{i \to \infty} b^{h_i}} = \frac{1}{1} = 1$$

应用这个推论，我们可以说明当有理数 x 的变化够小时，有理指数函数 $f(x) = a^x$ 的变化可以任意小.

性质 4

当指数 x 的变化够小时，有理指数函数 $f(x) = a^x$ 的变化可以任意小.

证明： 设指数 x 从有理数 x_1 变化到有理数 $x_2 = x_1 + h_i$，(h_i 是有理数)，且当 $(x_2 - x_1) \to 0$ 时，数列 $\{h_i\}$ 以 0 为极限，于是

$$\begin{aligned} \lim_{x_2 \to x_1} (a^{x_2} - a^{x_1}) &= \lim_{i \to \infty} \left(a^{x_1 + h_i} - a^{x_1}\right) \\ &= a^{x_1} \cdot \lim_{i \to \infty} (a^{x_i} - 1) = 0 \end{aligned}$$

这就是说，只要 $|h_i|$ 够小，那么 $|a^{x_2} - a^{x_1}|$ 就小于任意给定的正数 ε.

综合有理指数函数的性质，我们可以想象出 $y = a^x$ $(a > 1)$ 的图象如图 10.2 所示，但是我们不能用一条连续不断的曲线把它画出来，因为指数 x 取无理数时，a^x 还没有意义，因而在有理指数函数的图象上，处处有空隙. 下一节将由有理指数函数的单调性和性质 4，适当给无理指数幂补充定义使得指数函数在 $\mathbb{R}$ 上处处连续.

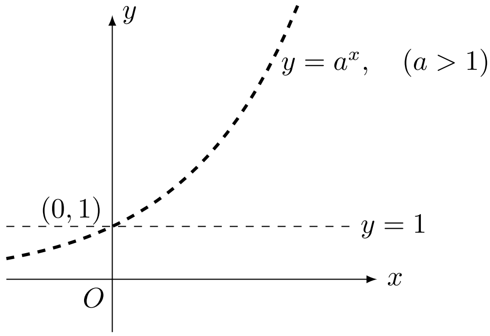


图 10.2

习题 10.1

1. 计算下列各式的值:

(a) $25^{3/2} \cdot 8^{4/3}$

(b) $(0.09)^{1/2} + 64^{2/3} + 0.125^{2/3} - \dfrac{1}{16^{-3/2}}$

(c) $64^{1.5} \cdot (32)^{0.4} \div \left(\dfrac{9}{25}\right)^{-3/2}$

(d) $\left(\dfrac{81}{16}\right)^{-0.25} \left(5^2 - 0.1^2 \cdot \left(\dfrac{1}{4}\right)^{-3}\right)^2$

(e) $\left[\dfrac{3}{9} - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1}\right]^{-1}$

(f) $(\sqrt{2})^{1.5} + \left(11 + \dfrac{\sqrt[5]{5}}{5^{-0.8}}\right)^{-1/4}$

(g) $\left[\left(\dfrac{3}{4}\right)^0\right]^{-0.5} - 7.5(\sqrt{4})^2 - (-2)^{-4} + 81^{0.25}$

(h) $\left[\dfrac{1}{4}\left(0.027^{2/3} + 15 \times 0.0016^{3/4} + 1\right)\right]^{-1/2}$

(i) $6\left[\sqrt{3}\left(\sqrt{3} + 2\sqrt{2} + \dfrac{2}{3^{1/2}}\right)\right] \times \left(3^{1/2} + 2^{1/2}\right)^{-2} \times (3^{-1} + 2^{-1})$

(j) 若 $a = (2 + \sqrt{3})^{-1}, \quad b = (2 - \sqrt{3})^{-1}$, 计算 $(a + 1)^{-1} + (b + 1)^{-1}$

2. 化简下列各式:

(a) $b^{1/2}b^{1/3}$

(b) $b^{1/2}b^{-1/3}$

(c) $b^{-2/3}b^{3/5}$;

(d) $b^{-2/3}b^{3/5}$;

(e) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[5]{a}$

(f) $\left[1-\left(a^{-1}b^{-1}\right)^{-1}\right]^{-2}$

(g) $\left[a^{-1/2}b^{-1/2}+a^{-1/6}\left(b^{-5/6}-a^{-1/3}b^{-1/2}\right)\right]^{-3/2}$

(h) $\dfrac{\left(a^{-1}+b^{-1}\right)(a+b)^{-1}}{\sqrt[6]{a^4\sqrt[5]{a^{-2}}}}$

(i) $\dfrac{a^2+a^{-2}-2}{a^2-a^{-2}}$

(j) $\left(a^{3/4}+b^{3/4}\right)\left(a^{3/4}-b^{3/4}\right)/\left(a^{1/2}-b^{1/2}\right)$

(k) $\left(e^{3/2}+2+e^{-3/2}\right)\left(e^{3/2}-2+e^{-3/2}\right)$

(l) $\left(a^{1/3}+a^{-1/3}\right)\left(a^{2/3}-1+a^{2/3}\right)$

(m) $\dfrac{m-n}{m^{1/2}-n^{1/2}}+\dfrac{m^{3/2}+n^{3/2}}{m^{1/2}+n^{1/2}}$

(n) $\dfrac{x^{2p(q+1)}-y^{2q(p-1)}}{x^{p(q+1)}-y^{q(p-1)}}$

(o) $\left(a^{4/3}-2+a^{-4/3}\right)\left(a^{2/3}-a^{-2/3}\right)$

(p) $\dfrac{m-n}{m^{1/2}-n^{1/2}}+\dfrac{m^{3/2}+n^{3/2}}{m^{1/2}+n^{1/2}}$

(q) $\left[\dfrac{4a-9a^{-1}}{2a^{1/2}-3a^{-1/2}}+\dfrac{a-4+3a^{-1}}{a^{1/2}-a^{-1/2}}\right]^2$

3. 解下列各方程:

(a) $\sqrt{2x-3}=4-x$

(b) $\sqrt{2x+8}+\sqrt{x+5}=7$

(c) $x^{-1/4}+x^{-1/2}-6=0$

(d) $x^{1/2}+x^{-1/2}-\dfrac{10}{3}=0$

(e) $\sqrt[n]{(x+1)^2}+\sqrt[n]{(x-1)^2}=4\sqrt[n]{x^2-1}$

4. 设 $h_i=\dfrac{100}{2i+1}$, $\quad m_i=\left[\dfrac{1}{h_i}\right]=\left[\dfrac{2i+1}{100}\right]$

(a) 求证数列 $\{h_i\}=\left\{\dfrac{100}{2i+1}\right\}$ 递减，并求使 $h_i=\dfrac{100}{2i+1}<1$ 的 i 的范围；

(b) 当 $i=10,49,50,100,1000$ 时，求 m_i 的值；

(c) 求证当 $i\geq 50$ 时，不等式 $1<100^{\frac{100}{2i+1}}<100^{\frac{1}{m_i}}$ 成立；

(d) 求证：$\lim\limits_{i\to\infty}\left(100^{\frac{1}{m_i}}-1\right)=0$, $\quad\lim\limits_{i\to\infty}100^{h_i}=1$.

第二节　无理指数幂的定义

要把指数幂的定义由有理数推广到实数，自然又得用逼近法.

设 β 是一个无理数，我们可以用两个有理数列 $\{r_n\}$, $\{s_n\}$ 去左、右夹逼，即 $r_n \to \beta \leftarrow s_n$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \beta$. 现在的问题是数列 $\{a^{r_n}\}$，$\{a^{s_n}\}$，（这里 $a > 0$）的极限是否存在？如果存在的话，我们就可以定义

$$a^{\beta} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{s_n}$$

从而就可以把有理指数函数 a^x 开拓为在 β 点连续的函数：

$$a^x\ (a > 0,\ x \in \mathbb{Q} \cup \{\beta\}) = \begin{cases} a^x\ (x \in \mathbb{Q}) \\ a^{\beta} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{s_n} \end{cases}$$

引理

设 $r_n \to \beta \leftarrow s_n$，则

1. 当 $a > 1$ 时，$a^{r_1} \le a^{r_2} \le \cdots \le a^{r_n} \le \cdots \le a^{s_n} \le \cdots \le a^{s_2} \le a^{s_1}$，且 $(a^{r_n} - a^{s_n}) \to 0$

   当 $0 < a < 1$ 时，$a^{r_1} \ge a^{r_2} \ge \cdots \ge a^{r_n} \ge \cdots \ge a^{s_n} \ge \cdots \ge a^{s_2} \ge a^{s_1}$，且 $(a^{r_n} - a^{s_n}) \to 0$

2. $\lim a^{r_n} = \lim a^{s_n} = A$ (即极限存在)

证明： $a > 1$ 和 $0 < a < 1$ 这两种情形是完全相似的，只是不等式方向反过来罢了，所以下面只讨论 $a > 1$ 的情形，（$a = 1$ 时它的任何方幂都是 1, 所以 $1^{\beta} = 1$）. 我们只需证明下述两点：

1. $a > 1$, $s > r$ 时，则 $a^s > a^r$，（性质 2）.

2. $\because$　当 $n \to \infty$ 时，$s_n - r_n = h_n \to 0$,

   $\therefore$　由性质 4 得

$$a^{s_n} - a^{r_n} \to 0$$

由实数完备性，存在一个唯一实数

$$A = \lim a^{s_n} = \lim a^{r_n}$$

定义

设 β 是一任意无理数，$r_n \to \beta \leftarrow s_n$ 是 β 的左、右夹逼数列，并且 $u>0$, 则定义

$$a^\beta = \lim a^{r_n} = \lim a^{s_n}$$

我们要说明这个定义的合理性，即上述定义和 β 的夹逼有理数列的选取无关.

设 $r'_n \to \beta \leftarrow s'_n$ 是另外一对夹逼数列，则

$$r'_n \to \beta \leftarrow s_n, \qquad r_n \to \beta \leftarrow s'_n$$

由上述引理就有

$$\lim a^{r'_n} = \lim a^{s_n} = \lim a^{r_n} = \lim a^{s'_n}$$

在实数轴 $\mathbb{R}$ 上，对每一个无理点，都补充这样的定义，于是我们就把有理指数函数开拓为一个在实数轴上处处有定义的指数函数 a^x, $(a>0,\ x\in\mathbb{R})$.

下面我们将证明这样定义的无理指数幂仍满足指数法则.

定理

指数法则 $a^\beta \cdot a^\gamma = a^{\beta+\gamma}$, $\left(a^\beta\right)^\gamma = a^{\beta\cdot\gamma}$, $(ab)^\beta = a^\beta \cdot b^\beta$ 对于任何实数 β, γ 都成立.

证明： 当 β, γ 是有理数时，上述等式已在本教材第三册第一章给出证明，所以我们只要说明 β, γ 是无理数的情形.

设 $r_n \to \beta \leftarrow s_n$, $c_n \to \gamma \leftarrow d_n$ 分别是 β, γ 的左、右夹逼数列，于是

$$(r_n + c_n) \to \beta + \gamma \leftarrow (s_n + d_n)$$

$$\begin{aligned} a^{\beta+\gamma} &= \lim a^{r_n + c_n} = \lim a^{r_n} \cdot a^{c_n} \\ &= \lim a^{r_n} \cdot \lim a^{c_n} = a^\beta a^\gamma \end{aligned}$$

现在让我们来证明 $(a^\beta)^\gamma = a^{\beta\cdot\gamma}$(为了讨论的方便,我们只讨论 $a>1$, $\beta,\gamma>0$ 的情形),

设 $r_n \to \beta \leftarrow s_n$, $\quad c_n \to \gamma \leftarrow d_n$, $r_n, s_n, c_n, d_n > 0$, 则有

$$r_n \cdot c_n \to \beta_\gamma \leftarrow s_n \cdot d_n$$

根据正分指数的幂函数与有理指数函数的单调性有

$$(a^{r_n})^{c_n} < (a^\beta)^{c_n} < (a^\beta)^\gamma < (a^\beta)^{d_n} < (a^{s_n})^{d_n}$$

所以由有理指数法则，得到

$$a^{r_n\cdot c_n}=(a^\beta)^{c_n}<(a^\beta)^\gamma<(a^{s_n})^{d_n}=a^{s_n\cdot d_n}$$

$$60+(u,.u,p-pus)$$

$\therefore$　由引理知，存在唯一的极限

$$(a^\beta)^\gamma=\lim a^{r_n\cdot c_n}=\lim a^{s_n\cdot d_n}=a^{\beta\cdot\gamma}$$

最后证明：$(ab)^\beta=a^\beta\cdot b^\beta$, 只讨论 $a>1$, $b>1$ 的情形.

$\because$　$a>1,b>1$

$\therefore$　$ab>1$, 于是

$$a^{r_n}b^{r_n}=(ab)^{r_n}<(ab)^\beta<(ab)^{s_n}=a^{s_n}b^{s_n}$$

$$(ab)^{s_n}-(ab)^{r_n}\to 0$$

因此，$(ab)^\beta=\lim a^{r_n}b^{r_n}=\lim a^{r_n}\cdot\lim b^{r_n}=a^\beta\cdot b^\beta$

例 10.1　1. $10^{\sqrt{2}}\cdot 10^{\sqrt{3}}=10^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

2. $\left[\left(\sqrt[3]{2}\right)^{\sqrt{8}}\right]^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2^{\frac{1}{3}\times 2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=2^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{4}$

3. $\left(5^{-\sqrt{2}}a^{\sqrt{8}}b^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=5^{-1}a^2b^{\frac{1}{2}}=\dfrac{a^2\sqrt{b}}{5}$

第三节　实指数函数

总结上节推广的结果，就得到一个对任意实数 x 都有定义的**实指数函数**：

$$f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}^+,\qquad \text{这里}f(x)=a^x,\ (a>0,\ \text{且}a\neq 1)$$

这个函数就叫做**以 a 为底的指数函数**. 上节还说明了指数函数是一个满足下面两个性质的连续函数：

1. $f(x_1+x_2)=a^{x_1+x_2}=a^{x_1}\cdot a^{x_2}=f(x_1)\cdot f(x_2)$

2. $f(kx)=a^{kx}=(a^x)^k=[f(x)]^k$

现在，我们还须验证实指数幂保有有理指数幂的一切性质，并且实指数函数是连续的.

性质 1

1. 若 $a>1$, 当 $x>0$ 时，则 $a^x>1$；当 $x<0$ 时，则 $a^x<1$.

2. 若 $0<a<1$, 当 $x>0$ 时，则 $a^x<1$；当 $x<0$ 时，则 $a^x>1$.

证明： 如果 x 是有理数，我们在第一节中给过证明，这里不再重述，所以我们只要证明 x 是无理数的情形，设 $x>0$, 且 $c_n\to x\leftarrow d_n$ 是 x 的有理数夹逼数列. 在数列 $\{c_n\}$ 中一定存在某一项 c_N 和它后面的一切项都是正数，不然的话，如果对于所有的 n, 有 $c_n\leq 0$, 于是 $\lim c_n\leq 0$ 即 $x\leq 0$, 这和已知的 $x>0$ 矛盾.

令 $c_N>0$, 则 $a^{C_N}>a^0=1$, 而 $a^x>a^{c_N}>1$, 这就证明了 $a^x>1$.

设 $x<0$, $x=-y$, 则 $y>0$, $a^x=a^{-y}=\dfrac{1}{a^y}$

$\because\quad a^y>1,\qquad\therefore\quad a^x=\dfrac{1}{a^y}<1$

$0<a<1$ 的情形，留给同学证明.

性质 2

1. 若 $a>1$ 且 $x_2>x_1$, 则 $a^{x_2}>a^{x_1}$

2. 若 $0<a<1$ 且 $x_2>x_1$, 则 $a^{x_2}<a^{x_1}$

证明： 设 $a>1$ 且 $x_2>x_1$,

$$a^{x_2}-a^{x_1}=a^{x_1}\left(a^{x_2-x_1}-1\right)$$

因为 $x_2-x_1>0$, 于是 $a^{x_2-x_1}>1$, 因此 $a^{x_2}-a^{x_1}>0$.

设 $0<a<1$ 且 $x_2>x_1$,

$$a^{x_2}-a^{x_1}=a^{x_1}\left(a^{x_2-x_1}-1\right)$$

因为 $x_2-x_1>0$, 则 $a^{x_2-x_1}<1$, 因此 $a^{x_2}-a^{x_1}<0$.

性质 3

$$\lim_{x\to 0}a^x=1$$

对这个极限的证明可以仿照第一节中性质 3 的推论的证法去证. 利用性质 3, 容易证明实指数函数处处连续.

性质 4

当 x 无限增大时，a^x，$(a>1)$ 也无限增大，可以写成 $\lim\limits_{x\to\infty} a^x=+\infty$（注意这个表达式并不表示此极限存在，而是说 a^x 可以超过任何一个指定的正数），若 $0<a<1$, 则 $\lim\limits_{x\to\infty} a^x=0$

证明： 为确定起见，设 $a>1$, 令 $a=1+h$ $(h>0)$, 因为

$$(1+h)^n>1+nh,\qquad (n\in\mathbb{N})$$

可得：$a^n>1+n(a-1)$.

对于任意给定的一个正数 M, 当 $n>\dfrac{M-1}{a-1}$ 时，则

$$a^n>1+n(a-1)>1+\frac{M-1}{a-1}(a-1)=M$$

所以，当 $x>n$ 时，便有 $a^x>a^n>M$.

这就是说，当 $x\to+\infty$ 时，$\lim a^x=\infty$.

设 $0<a<1$, $a=\dfrac{1}{b}$, 则 $b>1$, $a^x=\left(\dfrac{1}{b}\right)^n=\dfrac{1}{b^n}$，任给 $\varepsilon=\dfrac{1}{M}>0$, 则 $M=\dfrac{1}{\varepsilon}$, 依前段，当 $x>n>\dfrac{M-1}{a-1}$ 时，有 $b^x>M$. 于是 $a^x=\dfrac{1}{b^x}<\dfrac{1}{M}=\varepsilon$. 这就证明了当 $x\to\infty$ 时，$\lim a^x=0$, $(0<a<1)$.

性质 5

1. 若 $a>1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0$.
2. 若 $0\le a<1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=+\infty$.

证明： 为确定起见，设 $a>1$, 令 $x=-y$, $(y>0)$, 则当 $x\to-\infty$ 时，$y\to+\infty$, 所以

$$\lim_{x\to-\infty} a^x=\lim_{y\to+\infty} a^{-y}=\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{a^y}=\frac{1}{\lim\limits_{y\to+\infty} a^y}=0$$

$0<a<1$ 的情形，证明留给读者.

总结上面的讨论，指数函数有下面的主要性质：

定理

指数函数 $f:(-\infty,+\infty)\mapsto(0,+\infty)$, 这里 $f(x)=a^x$, $(a>0$ 且 $a=1)$, 满足下列三个性质：

2. $f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$

2. $f(x)$ 是严格单调的，$a>1$ 时，递增；$0<a<1$ 时，递减

3. $f(x)$ 是连续的

指数函数的图象如图 10.3 所示：

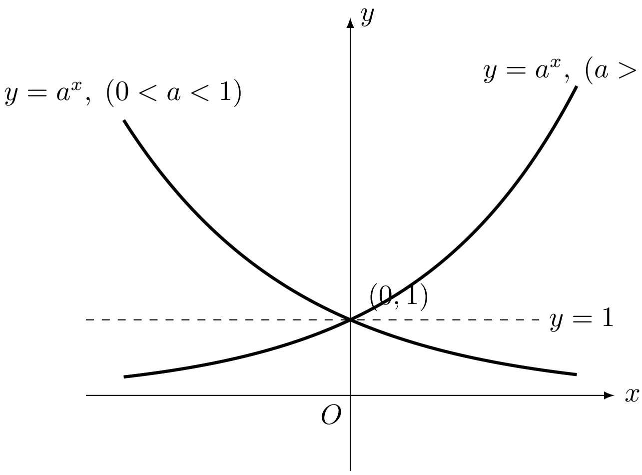


图 10.3

逆定理

任何一个满足上述性质 1 和 2 的函数 $f(x)$ 必定是一个指数函数，其底为 $a=f(1)$.

证明： 由性质 1, 对于任何实数 x, 有

$$f(0)f(x)=f(0+x)=f(x)$$

即得，$f(0)=1$. 当 $f(x)$ 递增时，$f(1)=a>f(0)=1$，而当 $f(x)$ 递减时，$f(1)=a<f(0)=1$.

由性质 1：

$$\begin{aligned}f(m)&=f\big((m-1)+1\big)=f(m-1)\cdot f(1)\\&=f(m-2)\cdot\big(f(1)\big)^2=f(m-3)\cdot\big(f(1)\big)^3\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&=\big(f(1)\big)^m=a^m\end{aligned}$$

又因为

$$\left[f\left(\frac{m}{n}\right)\right]^n = f\overbrace{\left(\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\cdots+\frac{m}{n}\right)}^{n\text{个}}$$
$$= f(m) = a^m$$

所以：$f\left(\dfrac{m}{n}\right) = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

因为 $f\left(\dfrac{m}{n}\right)f\left(-\dfrac{m}{n}\right) = f\left(\dfrac{m}{n}-\dfrac{m}{n}\right) = f(0) = 1$

所以 $f\left(-\dfrac{m}{n}\right) = \dfrac{1}{f\left(\dfrac{m}{n}\right)} = \dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = a^{-\frac{m}{n}}$

所以，$f(r) = a'$, 对于正、负分数 r 都成立.

再由单调性，和实指数幂的定义，就可以说明 $f(x) = a^x$ 对于任何实数都成立.

设 $x \in \mathbb{R}$ 为一任意实数，$r_n \to x \leftarrow s_n$ 是 x 的左、右夹逼有理数列，即

$$r_1 \le r_2 \le \cdots \le r_n \le \cdots \le x \le \cdots \le s_n \le \cdots \le s_2 \le s_1 \tag{10.2}$$

并且 $\lim(s_n - r_n) = 0$.

由不等式 (10.2) 和 $f(x)$ 的递增性（递减性），得到

$$f(r_1) \le f(r_2) \le \cdots \le f(r_n) \le \cdots \le f(x) \le \cdots \le f(s_n) \le \cdots \le f(s_2) \le f(s_1) \tag{10.3}$$

r_n, s_n 都是有理数.（若 $f(x)$ 递减，我们得到不等式 (10.3) 的反向不等式）.

不等式 (10.3) 可改写成

$$a^{r_1} \le a^{r_2} \le \cdots \le a^{r_n} \le \cdots \le a^x \le \cdots \le a^{s_n} \le \cdots \le a^{s_2} \le a^{s_1} \tag{10.4}$$

而上节实数指数定义中，a^x 是唯一能满足 (10.4) 的实数，所以 $f(x) = a^x$.

在上面的讨论中，x 是一个任意的实数，因此，$f(x) = a^x$, 对于任何实数 x 恒成立.

例 10.2　设 a, b 是不等的正实数，试证

$$a^a b^b > (ab)^{\frac{a+b}{2}} > a^b b^a$$

证明： 不妨设 $a > b$, 则 $\dfrac{a}{b} > 1$, $a - b > 0$. 于是，根据实指数幂性质 1，可得：

$$\frac{a^a b^b}{(ab)^{\frac{a+b}{2}}} = a^{\frac{a-b}{2}} \cdot b^{\frac{b-a}{2}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{2}} > 1$$

由于 $a>0,\ b>0 \Rightarrow ab>0$, 因此，$(ab)^{\frac{a+b}{2}}>0$, 所以，有

$$a^a b^b > (ab)^{\frac{a+b}{2}}$$

另外，根据同样的道理，有

$$\frac{(ab)^{\frac{a+b}{2}}}{a^b b^a} = a^{\frac{a-b}{2}} \cdot b^{\frac{b-a}{2}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{2}} > 1$$

又 $a^b>0,\ b^a>0$. 所以 $(ab)^{\frac{a+b}{2}}>a^b b^a$, 这就证明了

$$a^a b^b > (ab)^{\frac{a+b}{2}} > a^b b^a$$

习题 10.2

1. 利用实指数幂的性质，指出下列不等式中，a 是大于 1, 还是大于 0 而小于 1?

   (a) $a^{\sqrt{2}} < a^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

   (b) $a^{-\sqrt{3}} > a^2$

   (c) $a^{-\sqrt{5}-\sqrt{7}} > a^{-5}$

   (d) $a^{1+\sqrt{5}} < a^{2+\sqrt{2}}$

   (e) $a^{\sqrt{7}+\sqrt{2}} < a^{\sqrt{6}+\sqrt{3}}$

2. 作下列各函数的图象:

   (a) $y=3^x$

   (b) $y=3^{-x}$

3. (a) 证明 $f(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}$ 是偶函数，并作出它的图象；

   (b) 当 x 为何值时，$f(x)$ 有最小值，并求最小值.

4. 设 a,b,c 是不等的正数，证明:

   (a) $a^{2a}b^{2b}c^{2c} > a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}$

   (b) $a^a b^b c^c > (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$

   （提示：利用例 10.2 的结果）

5. 证明:

   (a) 当 n 是 1 或不小于 5 的自然数时，总有 $2^n > n^2$；

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n} = \infty$.

第四节　对数函数

由实数幂的定义，我们得知指数函数

$$a^x,\quad (a>0,\ a\neq 1),\qquad x\in\mathbb{R}$$

的值都是正的，现在还要进一步说明指数函数的值域是正实数集，也就是必须证明下面的命题.

命题

给定不等于 1 的正实数 a, 对于任意正数 b, 一定存在唯一的一个实数 c, 满足下列方程

$$a^c=b$$

证明： 为确定起见，设 $a>1$, 依实指数函数的性质 5, $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=0$, 可以找出这样一数 c_1 以使 $a^{c_1}<b$, 依 a^x, $(a>1)$ 是增函数且 $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty$, 可以找出这样的数 $c_2>c_1$, 以使 $a^{c_2}>b$, 现在由连续函数中间值定理知道，在 c_1 与 c_2 之间有实数 c 以使 $a^c=b$, 再由单调性知道这个数是唯一的. 类似地可以证明 $0<a<1$ 的场合，这个证明留给同学补全.

现在我们根据第八章第五节反函数定理可以说由指数函数得到一个定义在正实数变域上的反函数，称为对数函数，记作 $f:\mathbb{R}^+\mapsto\mathbb{R}$, 这里 $f(x)=\log_a x$, 它是连续的单调函数. 正式定义如下：

定义

若 $a>0$ 且 $a\neq 1$, 那么 $y=\log_a x$, 当且仅当 $x=a^y$. 我们称 y 是以 a 为底的对数，函数 $f:\mathbb{R}^+\mapsto\mathbb{R}$, 这里 $f(x)=\log_a x$ 称为**对数函数**.

这个定义导致下面有用的结果：

1. $a^{\log_a x}=x,\qquad \log_a a^x=x$
2. $\log_a(xy)=1ogax+\log_a y$
3. $\log_a\dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$
4. $\log_a x^r=r\log_a x$
5. $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ （换底公式）.

证明过程请看第三册第一章.

从函数的图象来说：$y = \log_a x$,（$x \in \mathbb{R}$）的图象能由 $y = a^x$,（$x \in \mathbb{R}$）的图象经 $y = x$ 的反射而得到，如图 10.4.

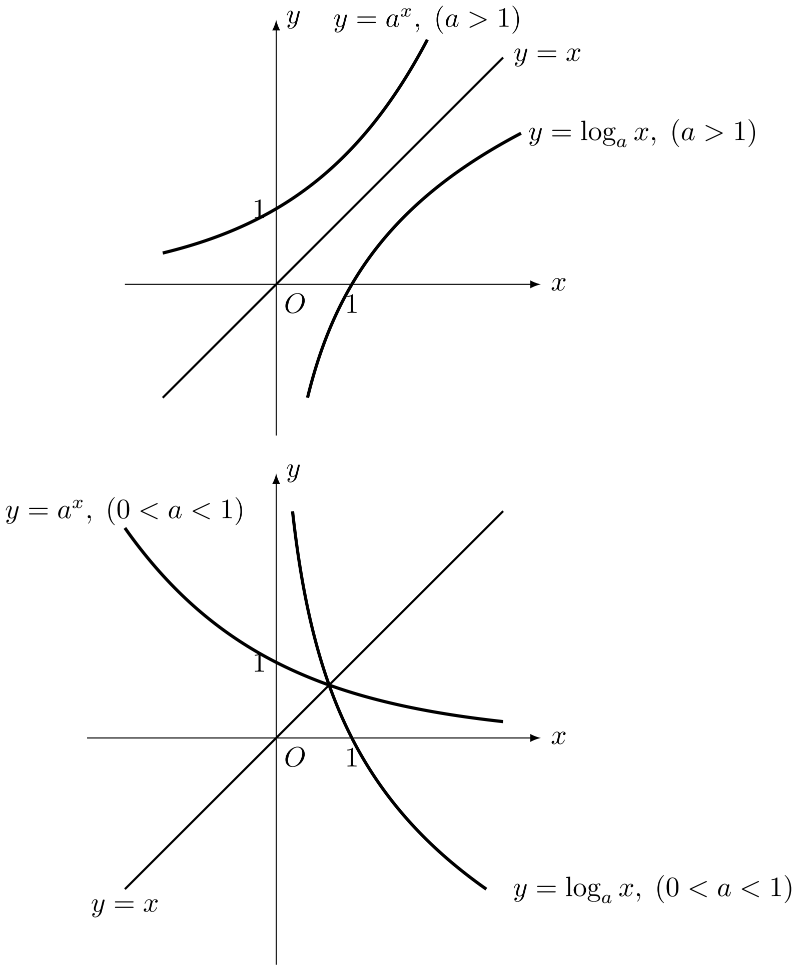


图 10.4

由于 x 轴是指数函数图象的渐近线，故 y 轴是对数函数图象的渐近线. 相应于指数函数的极限值：

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0, \qquad a > 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0, \qquad 0 < a < 1$$

有对数函数的极限值:

$$\lim_{x\to 0^+}\log_a x=\begin{cases}-\infty, & a>1\\ +\infty, & 0<a<1\end{cases}$$

相应于指数函数的特征性质，也就有对数函数的特征性质:

1. $\log_a(x_1\cdot x_2)=\log_a x_1+\log_a x_2$
2. 单调性. 当 $a>1$ 递增; 当 $0<a<1$ 递减.
3. 连续性. 即在 $(0,+\infty)$ 内处处连续. 同样地，对应于第三节中的定理，总结成下面的定理.

定理

对数函数 $f(x)=\log_a x$ 满足下列性质:

1. $f(x_1\cdot x_2)=f(x_1)+f(x_2)$
2. 单调性. $a>1$ 时，递增; $0<a<1$ 时，递减.
3. 在 $x>0$ 半直线上，处处连续.

逆定理

任何一个满足性质 1、2 的函数 $f(x)$ 一定是一个对数函数，即存在适当的 a, 使得 $f(x)=\log_a x$.

证明: 由性质 1, $f(x_1)=f(x_1\cdot 1)=f(x_1)+f(1)$. 因此 $f(1)=f(x_1)-f(x_2)=0$.

我们先任取一常数 $A>1$, 则由性质 2 知

$$f(A)\neq f(1)=0$$

再由性质 1

$$f(A^m)=\underbrace{f(A)+f(A)+\cdots+f(A)}_{m\text{ 项}}=mf(A),\qquad m\in\mathbb{N}$$

又

$$\begin{aligned}mf(A)=f(A^m)&=f\left(\left((A)^{\frac{m}{n}}\right)^n\right)\\&=\underbrace{f\left(A^{\frac{m}{n}}\right)+\cdots+f\left(A^{\frac{m}{n}}\right)}_{n\text{ 项}}=nf\left(A^{\frac{m}{n}}\right)\end{aligned}$$

$\therefore \quad f\left(A^{\frac{m}{n}}\right) = \dfrac{m}{n} f(A), \qquad m, n \in \mathbb{N}$

又 $\because \quad f\left(A^{\frac{m}{n}}\right) + f\left(A^{-\frac{m}{n}}\right) = f\left(A^{\frac{m}{n}} \cdot A^{-\frac{m}{n}}\right) = f(A^0) = f(1) = 0$

$\therefore \quad f\left(-A^{\frac{m}{n}}\right) = -f\left(A^{\frac{m}{n}}\right) = -\dfrac{m}{n} f(A)$

综合上面所证，所以对于所有有理数 $r \in \mathbb{Q}$, 都有

$$f(A^r) = r f(A)$$

从此不难用单调性和极限过程，导出

$$f(A^\beta) = \beta f(A), \qquad \beta \in \mathbb{R} \tag{10.5}$$

令 $A^\beta = x$, 则 $\beta = \log_A x$, 于是 (10.5) 可写成

$$f(x) = f(A) \cdot \log_A x \tag{10.6}$$

这样我们得到一个连续的单调的对数型函数 (10.6). 为了化去常数因子 $f(A)$, 我们要用一些技巧如下：令 $a = A^{\frac{1}{f(A)}}$, 于是

$$1 = \log_a a = \log_a A^{\frac{1}{f(A)}} = \frac{1}{f(A)} \cdot \log_a A$$

即：$f(A) = \log_a A$, 代入 (10.6), 得到:

$$f(x) = \log_A x \cdot \log_a A = \log_a x$$

习题 10.3

1. 求下列各函数的定义域与值域，如果它们是可逆的，写出以 x 为自变数的反函数.

   (a) $y = \log_2(x-2)$
   (b) $y = \log_2 \dfrac{1}{x}$
   (c) $y = e^{-x}$
   (d) $y = \sqrt{\lg \cos 2\pi x}$

2. 计算下列各式的值:

(a) $2^{\log_4 9}$

(b) $5^{\log_{0.2} 7}$

(c) $3^{\log_{\sqrt{2}} 6}$

(d) $6^{1+\log_6 5}$

(e) $25^{\frac{1}{3}\log 5^{27}-\log_5 4}$

(f) $10^{\lg\sqrt{100}}$

(g) $\log_{\sqrt{4-\sqrt{15}}}\sqrt{4+\sqrt{15}}$

(h) $4-\lg 8-3\lg 5$

(i) $\lg^2 5+\lg 2\lg 50$

(j) $\dfrac{3\lg 1728}{1+\frac{1}{2}\lg 0.36+\frac{1}{3}\lg 8}$

(k) $\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c d$

(l) $(\log_2 3+\log_4 9)(\log_3 4+\log_9 2)$

3. 证明下面的恒等式：

(a) $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

(b) $\log_a b\cdot\log_b a=1$

(c) $\dfrac{\log_a x}{\log_{ab} x}=1+\log_a b$

(d)

$$\frac{1}{(\log_x 2)(\log_x 4)}+\frac{1}{(\log_x 4)(\log_x 8)}+\frac{1}{(\log_x 8)(\log_x 16)}+\cdots+\frac{1}{(\log_x 2^{n-1})(\log_x 2^n)}=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{\log_x 2}\right)^2$$

4. (a) 已知 $\lg 2=a$, $\lg 7=b$, 求 $\log_8 9.8$;

(b) 已知 $\log_{18} 9=a$, $\log_{18} 5=b$, 求 $\log_{36} 45$;

(c) 已知 $\lg 198=2.2966$, $\lg 2=0.3010$, $\lg 3=0.4771$, 求 $\lg 11$;

(d) 已知 $\log_{12} 7=m$, $\log_{12} 3=n$, 求 $\log_{18} 63$.

5. 已知 $\lg 3=0.4771$, 问 $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{20}$ 表成小数时，不等于 0 的第一个有效数字出现在哪里?

6. 证明下面不等式：

(a) $|\log_a b|+|\log_b a|\geqslant 2$

(b) $\dfrac{1}{\log_2\pi}+\dfrac{1}{\log_\pi 2}>2$

(c) 若 $a>b>0$ 且 $c>1$, 则 $\log_c\dfrac{b}{a}<\log_c\dfrac{1+b}{1+a}$.

(d) 若 $t>-1$, $\varphi(t)=-\lg(1+t)$, 则 $\varphi\left(\dfrac{t_1+t_2}{3}\right)<\dfrac{\varphi(t_1)+\varphi(t_2)}{2}$

7. 当 $2x+5y=20$ 时, 求 $\log_2 x+\log_2 y$ 的最大值.

8. 设 $x>1$, $y>1$ 且 $2\log_x y-2\log_y x+3=0$, 那么 x^2-4y^2 的最小值是多少?

9. 设 $x>2$, $y>2$, 比较下列各式的大小:

$$\log_2\frac{x+y}{2};\qquad \frac{1}{2}\log_2(x+y);\qquad \frac{1}{2}\left(\log_2 x+\log_2 y\right)$$

10. 求证等比数列的各项的对数组成等差数列.

11. 有等比数列, 它的公比为 2, 项数为 10, 如果各项取以 2 为底的对数, 它们的和是 25, 求这等比数列的和.

12. 试问数列

$$\lg 100,\ \lg\left(100\sin\frac{\pi}{4}\right),\ \lg\left(100\sin^2\frac{\pi}{4}\right),\ \ldots,\ \lg\left(100\sin^{n-1}\frac{\pi}{4}\right),\ \ldots$$

的前多少项的和的值最大？并求出最大值（这里取 $\lg 2=0.3010$).

第五节　指数方程与对数方程

指数中含有未知数的方程叫做**指数方程**. 下面我们介绍几种常见的指数方程及其解法.

一、可化为 $\alpha^{f(x)}=\alpha^{g(x)}$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 的指数方程

对于这类方程, 我们根据指数函数的单调性得到 $\alpha^{f(x)}=\alpha^{g(x)}$ 成立的必要充分条件是 $f(x)=g(x)$. 因此，指数方程 $\alpha^{f(x)}=\alpha^{g(x)}$ 在 $a>0$ 且 $a\neq 1$ 的条件下就可以转化为代数方程 $f(x)=g(x)$ 来解.

例 10.3　解方程 $5^{-x}\cdot 50^x=\dfrac{1}{1000(10^{2x-1})^{-3}}$

解： 原方程化简为 $(5^{-1}\cdot 50)^x=\dfrac{10^{6x-3}}{10^3}$，即:

$$10^x=10^{6x-6}$$

由于底数 $a=10>0$ 且 $\neq 1$, 得到

$$x=5x-6\quad\Rightarrow\quad x=\frac{6}{5}$$

所以原方程的解集是 $\left\{\dfrac{6}{5}\right\}$.

例 10.4 解方程 $17^{3x^2+x-2}=1$

解： $\because \quad 1=17^0$，原方程可写成

$$17^{3x^2+x-2}=17^0$$

于是根据指数函数的单调性，得到

$$3x^2+x-2=0$$

由此

$$x_1=\frac{2}{3}, \qquad x_2=-1$$

所以原方程的解集是 $\left\{-1,\frac{2}{3}\right\}$.

二、可化为形如 $a^{f(x)}=b^{g(x)}$ 的指数方程

这里（$a>0$, $b>0$, $a\neq 1$, $b\neq 1$），一般用两边取对数的方法来解.

例 10.5 解方程 $17^x=300$

解： 两边取常用对数，得到

$$x\lg 17=\lg 300$$
$$x=\frac{\lg 300}{\lg 17}\approx\frac{2.4771}{1.2304}\approx 2.0132$$

例 10.6 解方程 $5^{2x}-7x-35\cdot 5^{2x}+35\cdot 7^x=0$

解： 原方程化简为 $7^x(35-1)=5^{2x}(35-1)$

两边除以 34, 得到：$5^{2x}=7^x$

两边取常用对数

$$2x\lg 5=x\lg 7$$
$$x(2\lg 5-\lg 7)=0$$

$\because \quad 2\lg 5-\lg 7=\lg 25-\lg 7\neq 0, \qquad \therefore \quad x=0$

因此，原方程的解集是 $\{0\}$.

三、可化为一元二次方程的指数方程

例 10.7 解方程 $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=4$

解: 注意到 $\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{4-3}=1$,原方程的两边乘以 $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x$,得到

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{2x}+1=4\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x$$

即 $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{2x}-4\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+1=0$

$\therefore\quad \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=2+\sqrt{3}$ 或 $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=2-\sqrt{3}$

即:

$$\left(2-\sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}}=\left(2-\sqrt{3}\right)^{-1} \quad 或 \quad \left(2-\sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}}=2-\sqrt{3}$$

$\therefore\quad x=-2$ 或 $x=2$

$\therefore$ 原方程的解集是 $\{-2,2\}$.

未知数前面有对数符号的方程称为对数方程. 解对数方程一般常用的方法是根据对数定义直接把对数式的等式写成指数形式的等式. 也有时根据对数函数的单调性把对数方程化为代数方程来解. 但是必须注意在解对数方程之前,应该先确定使方程中的对数都有意义的定义域,由此便确定了方程的根的上、下界. 在求得对数方程之解后,应该舍去在根的上、下界之外的增根,换言之,把那些使真数或底数为非正数或使底数等于 1 的根舍去,下面介绍几种常见的对数方程.

四、形如 $\log_{f(x)}g(x)=c$ (其中 c 是常数)的对数方程

可以根据对数定义将它化为指数形式的等式去解.

例 10.8 解方程 $\log_{x-5}(3x^2-16x+29)=2$

解: 方程中的对数有意义必须

$$\begin{cases} x>5 \quad 且 \quad x-5\neq 1 \\ 13x^2-16x+29>0 \end{cases}$$

根据对数定义得到

$$3x^2-16x+29=(x-5)^2$$

解得: $x_1=1,\qquad x_2=2$.

由于 1 和 2 都小于 5, 所以原方程没有解,即原方程的解集是空集.

例 10.9　解方程 $\log_3[3+2\lg(1+x)]=0$

解： 根据对数定义得到 $3+2\lg(1+x)=1$, 即：

$$\lg(1+x)=-1$$

再由对数定义有

$$\begin{aligned}1+x&=10^{-1}\\x&=-0.9\end{aligned}$$

经验算可知原方程的解集是 $\{-0.9\}$.

五、可以化成形如 $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ 的对数方程

由对数函数的单调性知道，上面方程成立的充分必要条件是

$$\begin{cases}f(x)>0\\g(x)>0\\f(x)=g(x)\end{cases}$$

因此对数方程可化为代数方程和不等式来解.

例 10.10　解方程 $\lg x+\lg(x^2-4)=\lg 3+\lg(x+2)$

解： 方程中的对数有意义，必须

$$\begin{cases}x>0\\x^2-4>0\quad\Rightarrow\quad x>2\\x+2>0\end{cases}$$

原方程化为 $\lg x(x^2-4)=\lg 3(x+2)$，由此得到

$$x(x^2-4)=3(x+2)$$

即：$(x-2)(x^2-2x-3)=0$，解得：

$$x_1=2,\qquad x_2=-1,\qquad x_3=3$$

其中只有 $x_3=3>2$, 所以原方程的解集是 $\{3\}$.

根据指数函数与对数函数的单调性也可以解相应的一些不等式. 由于作对数变形时, 也有可能把原来数的定义域缩小了, 这时就会丢掉解, 因此, 作对数

变形时,应该避免这种情形发生.例如,解 $\lg x = 1$, 如果利用等式: $\lg x^2 = 2\lg x$, 把原方程变形为 $2\lg x = 1$, 这时由这个方程只能解出 $x = \sqrt{10}$, 丢失了原方程的一个根 $-\sqrt{10}$.

例 10.11 解不等式 $\log_{\frac{1}{3}}[\log_4(x^2-5)] > 0$

解: 原不等式等价于 $0 < \log_4(x^2-5) < 1$,由此 $1 < x^2 - 5 < 4$,即:

$$6 < x^2 < 9$$

$\therefore \quad \sqrt{6} < |x| < 3$ 从而:

$$\sqrt{6} < x < 3 \quad 或 \quad -3 < x < -\sqrt{6}$$

例 10.12 解 $\log_a x > 6\log_x a - 1, \qquad (0 < a < 1)$

解: 原不等式可写成

$$\log_a x > \frac{6}{\log_a x} - 1 \tag{10.7}$$

分两种情形来解:

1. 设 $0 < x < 1$, 则 $\log_a x > 0, \quad (0 < a < 1)$.

   由 (10.7) 得 $\log_a^2 x + \log_a x - 6 > 0$,由此得:

   $$\log_a x < -3 \tag{10.8}$$

   或

   $$\log_a x > 2 \tag{10.9}$$

   由 (10.8) 得 $x > \dfrac{1}{a^3} > 1$, 这与前设 $0 < x < 1$ 矛盾. 所以 (10.8) 无解.

   由 (10.9) 得 $0 < x < a^2 < 1$, 因此由 (10.7) 得: $0 < x < a^2$

2. 设 $x > 1$, 则 $\log_a x < 0, \quad (0 < a < 1)$.

   由 (10.7) 得 $\log_a^2 x + \log_a x - 6 < 0$, 由此得:

   $$-3 < \log_a x < 2$$

   $\because \quad 0 < a < 1, \qquad \therefore \quad a^2 < 1 < x < a^{-3}$

   因此,由 (10.7) 可得,$1 < x < \dfrac{1}{a^3}$.

   $\therefore$ 原不等式的解集是 $\{x|0 < x < a^2\} \cup \left\{x \middle| 1 < x < \dfrac{1}{a^3}\right\}$

例 10.13　解不等式 $\dfrac{1}{\log_2 x} - \dfrac{1}{\log_2 x - 1} < 1$

解： 原不等式可化简为 $\dfrac{1 + \log_2 x(\log_2 x - 1)}{\log_2 x(\log_2 x - 1)} > 0$，即：

$$\frac{\left(\log_2 x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}}{\log_2 x(\log_2 x - 1)} > 0$$

由此得：$\log_2 x(\log_2 x - 1) > 0$，因此：

$$\log_2 x < 0 \quad 或 \quad \log_2 x > 1$$

即：$0 < x < 1$　或　$x > 2$.

由此原不等式的解集是 $\{x|0 < x < 1\} \cup \{x|x > 2\}$.

例 10.14　求函数 $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{x}{x^2 - 1}}$ 的定义域.

解：

$$\begin{aligned}
&函数\ f\ 有意义 \Longleftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{x^2-1} 有意义 \Longleftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{x^2-1} \geq 0 \\
&\Longleftrightarrow 0 < \frac{x}{x^2-1} \leq 1 \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{x^2-1} > 0 \\ \dfrac{x^2 - x - 1}{x^2-1} \geq 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 0 \quad 或 \quad x > 1 \\ x < -1 \quad 或 \quad \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < x < 1 \quad 或 \quad x > \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 0 \\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < x < 1 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x > 1 \\ x > \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < 1 \quad 或 \quad x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

故函数 f 的定义域为

$$\left\{x \middle| \frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < 1\right\} \bigcup \left\{x \middle| x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$$

例 10.15　解方程 $\log_{\sin 3x}(\cos x - \cos 2x) = 1$

解： 要使方程中的对数有意义，x 必须满足条件：

$$\begin{cases} \sin 3x \quad 且 \quad \sin 3x \neq 1 \\ \cos x - \cos 2x > 0 \end{cases} \tag{10.10}$$

由原方程得 $\cos x - \cos 2x = \sin 3x$，即：

$$\sin \frac{3x}{2}\left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{3x}{2}\right) = 0$$

由此得：

$$\sin \frac{3x}{2} = 0 \quad 或 \quad \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{3x}{2} = 0$$

因为 $\sin \dfrac{3x}{2} = 0$ 的解，根据 $\sin 3x = 2\sin \dfrac{3x}{2}\cos \dfrac{3x}{2}$，知道一定也使 $\sin 3x = 0$ 成立，而这与 x 满足的条件：$\sin 3x > 0$ 不合，因此，方程 $\sin \dfrac{3x}{2} = 0$ 的解应该舍去.

由 $\sin \dfrac{x}{2} - \cos \dfrac{3x}{2} = 0$，得：

$$\sin \frac{x}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3x}{2}\right)$$

根据两角正弦相等条件，有

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{3x}{2} + 2k\pi \quad 或 \quad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{3x}{2} + 2k\pi$$

即：

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \tag{10.11}$$

或

$$x = -\frac{\pi}{2} - 2k\pi \tag{10.12}$$

在单位圆上，分别作出 (10.11) 中和 (10.12) 中的诸角的终边，如图 10.5.

显然 (10.11) 又可写成

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \tag{10.13}$$

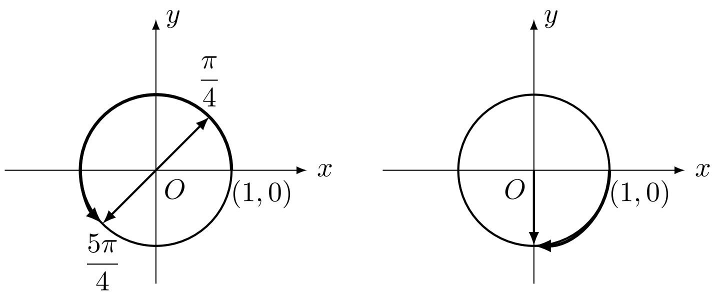
和

$$x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \tag{10.14}$$

再由 (10.12), (10.13), (10.14) 容易看出角 $3x$ 与角 $-\dfrac{3\pi}{2}$, $\dfrac{3\pi}{4}$ 和 $-\dfrac{\pi}{4}$ 有相同的终边，所以若将式 (10.12) 和式 (10.14) 代入 $\sin 3x$ 中，便得到

$$\sin 3\left(-\frac{\pi}{2} - 2k\pi\right) = \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = -\sin\frac{3\pi}{2} = 1$$

$$\sin 3\left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right) = \sin\frac{15\pi}{4} = \sin\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0$$



$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$　　　$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

图 10.5

因此这两组解是增解，应该舍去，经检验知 $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ 满足不等式组, 所以方程的解集是 $\left\{x \middle| x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$

习题 10.4

1. 解下列各指数方程:

(a) $3^{2x-1} = 81$

(b) $\sqrt{5^x} = \sqrt[3]{25}$

(c) $\sqrt[4]{7^x} = \sqrt[5]{343}$

(d) $\sqrt[4]{a^{x+1}} = \sqrt[3]{a^{x-3}}$
$(a > 0,\ a \neq 1)$

(e) $\sqrt{2^x}\sqrt{3^x} = 36$

(f) $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^5$

(g) $\left(\frac{4}{9}\right)^4 = \left(\frac{3}{2}\right)^x$

(h) $\left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{9}{8}\right) = \frac{27}{64}$

(i) $4^{\sqrt{x+1}} = 64 \cdot 2^{\sqrt{x+1}}$

(j) $(0.25)^{x-2} = \frac{256}{2^{x+3}}$

(k) $\left(\frac{4}{9}\right)^x\left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{2}{3}$

(l) $2^x \cdot 5^4 = 0.1\left(10^{x-1}\right)^5$

2. 解下列各指数方程:

(a) $3^{x+2} + 3^{x-1} = 28$

(b) $5^{x+1} - 5^{x-1} = 24$

(c) $3^{2x-1} + 3^{2x-2} - 3^{2x-4} = 315$

(d) $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 5^{x+1} + 5^{x+2}$

(e) $4^x + 2^{x+1} = 80$

(f) $3^{x+2} + 9^{x+1} - 810 = 0$

(g) $3^{2x+5} = 3^{x+2} + 2$

(h) $3^{4\sqrt{x}} - 4.3^{2\sqrt{x}} + 3 = 0$

(i) $4.9^{\sqrt{x}-2} - 3.15^{\sqrt{x}-2} = 25^{\sqrt{x}-2}$

(j) $4^{2x} - 2.18^{2x} = 3.81^{28}$

(k) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^{x}+\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^{x}=\dfrac{10}{3}$

3. 求最小整数指数 x, 使

(a) $\left(\dfrac{4}{5}\right)^{x}<0.000001$

(b) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{x}<0.0001$

(c) $\left(\dfrac{10}{9}\right)^{x}>1000000$

(d) $\left(\dfrac{4}{5}\right)^{x}>10000000$

4. 解下列各不等式

(a) $3^{3-5x}-\dfrac{1}{81}>0$

(b) $(0.3)^{2x^2+5x+2}<1$

(c) $8^{x}+16^{\frac{3}{4}x+1}<34$

(d) $\dfrac{(0.5)^{3x^2+10x+6}}{100}<0.00125$

(e) $2^{x+1}\cdot 5^{2x-3}<\dfrac{24}{25}$

(f) $5^{2x}-30.5^{x}+125<0$

(g) $2^{3x}-2^{x+1}<2^{3}$

(h) $\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{10}\right)^{y}-1}\leqslant\dfrac{2}{\left(\dfrac{1}{100}\right)^{y}-10}$

(i) $\dfrac{1}{2^{x}-1}\geqslant\dfrac{1}{4^{x}-3}$

(j) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{x-2}\left(\dfrac{4}{3}\right)^{\frac{1}{x}}>\dfrac{9}{16}$

5. 解下列各对数方程:

(a) $\lg x=2-\lg 5$

(b) $\lg(x+6)-\dfrac{1}{2}\lg(2x-3)=2-\lg 25$

(c) $\dfrac{2\lg x}{\lg(5x-4)}=1$

(d) $\dfrac{\lg x}{1-\lg x}=2$

(e) $\log_{x-1}(x^2-5x+10)=2$

(f) $2\lg x=-\lg\left(6-x^2\right)$

(g) $\dfrac{1}{5-\lg x}+\dfrac{1}{1+\lg x}=1$

(h) $0.5\lg(2x-1)+\lg\sqrt{x-9}=1$

(i) $\log_2\log_3\log_4 x=0$

(j) $\lg 9^{-1}+x\lg\sqrt[3]{3^{5x-7}}=0$

(k) $\lg 10^{\lg\left(x^2+21\right)}-1=\lg x$

6. 解下列各对数方程:

(a) $2\log_4 x+2\log_x 4=5$

(b) $\log_2(x-1)^2-\log_{0.5}(x-1)=9$

(c) $\log_8 x+\log_4 x+\log_2 x=7$

(d) $\log_x(5x^2)\cdot(\log_5 x)^2=1$

(e) $\sqrt{\log_x 5\sqrt{5}+\log_{\sqrt{5}}5\sqrt{5}}\cdot\log_{\sqrt{5}}x=-\sqrt{6}$

(f) $\sqrt{\log_x\sqrt{3x}}\cdot\log_3 x=-1$

(g) $\log_{3x}\left(\dfrac{3}{x}\right)+\log_3^2 x=1$

(h) $\dfrac{\lg\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\lg\sqrt[3]{x-40}}=3$

7. 解下列各方程:

(a) $(0.4)^{\lg^2 x+1}=(6.25)^{2-\lg x^3}$

(b) $x^{\lg x+2}=1000$

(c) $\sqrt{x^{\lg\sqrt{x}}}=10$

(d) $\lg 2+\lg(4^{x-2}+9)=1+\lg(2^{x-2}+1)$

(e) $\log_2(9^{x-1}+7)=2+\log_2(3^{x-1}+1)$

(f) $\lg x+\lg\sqrt[3]{x}+\lg\sqrt[9]{x}+\cdots=3$

(g) $\log_9 x+(\log_9 x)^2+(\log_9 x)^3+\cdots=1,$

(h) $1+\log_x\dfrac{4-x}{x}=(\lg\lg n-1)\log_x 10$

8. 解下列各方程组:

(a) $\begin{cases}2^{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=512\\ \lg\sqrt{xy}=1+\lg 2\end{cases}$

(b) $\begin{cases}\log_x\log_2\log_x y=0\\ \log_y 9=1\end{cases}$

(c) $\begin{cases}2^{\frac{x-y}{2}}-2^{\frac{x-y}{4}}=2\\ 3^{\lg(2y-x)}=1\end{cases}$

(d) $\begin{cases}xy=40\\ x^{12y}=4,\end{cases}$

(e) $\begin{cases}3.2^x-\log_2 y=2\\ 2^x\cdot\log_2 y=1\end{cases}$

(f) $\begin{cases}7^y\cdot\log_5 x=2\\ 4.7^y+\log_5 x=2\end{cases}$

(g) $\begin{cases}\lg^2 x+\lg^2 y=5\\ \lg x-\lg y=1\end{cases}$

(h) 求 $\begin{cases}x^{x+y}=y^{12}\\ y^{x+y}=x^3\end{cases}$ 的整数解

9. 解下列各不等式:

(a) $\lg x > 3$

(b) $\lg(-x) > 3$

(c) $\lg x^2 > 3$

(d) $\lg^2 x > 3$

(e) $\lg x < 2\lg x$

(f) $\lg x > 2\lg x$

(g) $\log_{\frac{1}{2}}(3x-5) < 3$

(h) $\lg x + \lg(x-3) > 1$

(i) $\lg(4x^2-9) > \lg(2x-3)+2$

(j) $\lg(3-x) - 1 > \lg(2-x)$

(k) $\log_{\sqrt{0.5}}(26x) > \log_{\sqrt{0.5}}(5x^2+5)$

(l) $\log_{\sqrt{2}}(x^2-2x+8) + 2\sqrt{\log_2(x^2-2x+8)} \geq 12$

(m) $x^{\log_a x+1} > ax^2, \qquad (a > 1)$

10. 求解

(a) 试求满足不等式 $2(\log_{0.5} x)^2 + 9\log_{0.5} x + 9 \leq 0$ 的 x 的范围；

(b) x 在 1 中求得的范围内变动时，试求 $f(x) = \left(\log_2 \dfrac{x}{3}\right)\left(\log_2 \dfrac{x}{4}\right)$ 的最大值 M 和最小值 L.

11. 解下列方程：

(a) $\log_{\sqrt{2}\sin x}(1+\cos x) = 2$

(b) $\log_{\frac{1}{8\cos^2 x}} \sin x = \dfrac{1}{2}$

(c) $\dfrac{2}{\lg\left(\dfrac{1}{2}+\cos^2 x\right)} = \log_{\sin 2x} 10$

(d) $\arcsin(\lg x) = 0$

(e) $\lg(\arcsin x) = 0$

(f) $\arccos(\pi \log_3 \tan x) = 0$