中学数学实验教材
第四册（上）

中学数学实验教材编写组编

1984 年 6 月

前　言

这一套中学数学实验教材，内容的选取原则是精简实用，教材的处理力求深入浅出，顺理成章，尽量作到使人人能懂，到处有用.

本教材适用于重点中学，侧重在满足学生将来从事理工方面学习和工作的需要.

本教材的教学目的是：使学生切实学好从事现代生产、特别是学习现代科学技术所必需的数学基础知识；通过对数学理论、应用、思想和方法的学习，培养学生运算能力，思维能力，空间想象力，从而逐步培养运用数学的思想和方法去分析和解决实际问题的能力；通过数学的教学和学习，培养学生良好的学习习惯，严谨的治学态度和科学的思想方法，逐步形成辩证唯物主义世界观.

根据上述教学目的，本教材精选了传统数学那些普遍实用的最基础的部分，这就是在理论上、应用上和思想方法上都是基本的、长远起作用的通性、通法.比如，代数中的数系运算律，式的运算，解代数方程，待定系数法；几何中的图形的基本概念和主要性质，向量，解析几何；分析中的函数，极限，连续，微分，积分；概率统计以及逻辑、推理论证等知识. 对于那些理论和应用上虽有一定作用，但发展余地不大，或没有普遍意义和实用价值，或不必要的重复和过于繁琐的内容，如立体几何中的空间作图，几何体的体积、表面积计算，几何难题，因式分解，对数计算等作了较大的精简或删减.

全套教材共分六册. 第一册是代数. 在总结小学所学自然数、小数、分数基础上，明确提出运算律，把数扩充到有理数和实数系. 灵活运用运算律解一元一次、二次方程，二元、三元一次方程组，然后进一步系统化，引进多项式运算，综合除法，辗转相除，余式定理及其推论，学到根式、分式、部分分式.第二册是几何. 由直观几何形象分析归纳出几何基本概念和基本性质，通过集合术语、简易逻辑转入欧氏推理几何，处理直线形，圆、基本轨迹与作图，三角比与解三角形等基本内容. 第三册是函数. 数形结合引入坐标，研究多项式函数，指数、对数、三角函数，不等式等. 第四册是代数. 把数扩充到复数系，进一步加强多项式理论，方程式论，讲线性方程组理论，概率（离散的）统计

的初步知识. 第五册是几何. 引进向量，用向量和初等几何方法综合处理几何问题，坐标化处理直线、圆、锥线，坐标变换与二次曲线讨论，然后讲立体几何，并引进空间向量研究空间解析几何初步知识. 第六册是微积分初步. 突出逼近法，讲实数完备性，函数，极限，连续，变率与微分，求和与积分.

本教材基本上采取代数、几何、分析分科，初中、高中循环排列的安排体系. 教学可按初一、初二代数、几何双科并进，初三学分析，高一、高二代数(包括概率统计)、几何双科并进，高三学微积分的程序来安排.

本教材的处理力求符合历史发展和认识发展的规律，深入浅出，顺理成章. 突出由算术到代数，由实验几何到论证几何，由综合几何到解析几何，由常量数学到变量数学等四个重大转折，着力采取措施引导学生合乎规律地实现这些转折，为此，强调数系运算律，集合逻辑，向量和逼近法分别在实现这四个转折中的作用. 这样既遵循历史发展的规律，又突出了几个转折关头，缩短了认识过程，有利于学生掌握数学思想发展的脉络，提高数学教学的思想性.

这一套中学数学实验教材是教育部委托北京师范大学、中国科学院数学研究所、人民教育出版社、北京师范学院、北京景山学校等单位组成的领导小组组织“中学数学实验教材编写组”，根据美国加州大学伯克利分校数学系项武义教授的《关于中学实验数学教材的设想》编写的. 第一版印出后，由教育部实验研究组和有关省市实验研究组指导在北京景山学校、北京师院附中、上海大同中学、天津南开中学、天津十六中学、广东省实验中学、华南师院附中、长春市实验中学等校试教过两遍，在这个基础上编写组吸收了实验学校老师们的经验和意见，修改成这一版《中学数学实验教材》，正式出版，内部发行，供中学选作实验教材，教师参考书或学生课外读物. 在编写和修订过程中，项武义教授曾数次详细修改过原稿，提出过许多宝贵意见.

本教材虽然试用过两遍，但是实验基础仍然很不够，这次修改出版，目的是通过更大范围的实验研究，逐步形成另一套现代化而又适合我国国情的中学数学教科书. 在实验过程中，我们热忱希望大家多提意见，以便进一步把它修改好.

中学数学实验教材编写组
一九八一年三月

目 录

第一章　两角和与差的三角函数

我们已经学习了任意角的三角函数及其性质、图象，这一章我们将要进一步学习两角和、差以及倍角、半角的三角函数，并将学习三角式的和差化积、积化和差变形和简单的三角方程.

第一节　两角和与差的三角函数

一、两角的和与差

设 α、β 为两个任意实数，它们分别表示两个角的数量. 那么实数 $\alpha+\beta$ 就表示这两个角的和角的数量. 两个角的和角可以做加法得到，即，以角 α 的终边为始边，再旋转出一个角 β(若 $\beta>0$, 按逆时针方向旋转；若 $\beta<0$, 按顺时针方向旋转)，这时，以 α 角的始边为始边，以 β 角的终边为终边的角，就是角 $\alpha+\beta$. 两个角的差角可以由减法得出，角的减法是加法的逆运算，即 $(\alpha-\beta)+\beta=\alpha$.

两个角的差角，也可以表示成和角的形式，如 $\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$.

两个弧的和与差可按它们所对应的圆心角的和与差的法则来完成.

练习

试画图表示出以下的和角、差角：

$$\alpha=30^\circ,\quad \beta=45^\circ;\qquad \alpha=\frac{\pi}{3},\quad \beta=-\frac{3\pi}{4}$$

二、两角和与差的余弦

两角和与差的余弦函数，可以利用每个单角的三角函数来表示.

定理 1

两个任意角 α, β 的和（或差）的余弦，等于这两个角的余弦的乘积减去（或加上）这两个角的正弦的乘积. 即

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \tag{1.1}$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \tag{1.2}$$

证明： 我们先来证公式 (1.2).

设 α, β 为任意两个给定的角（不论大小及正负），把它们的始边都放在 x 轴正半轴，而终边与单位圆的交点分别为 P_1, P_2(图 1.1).

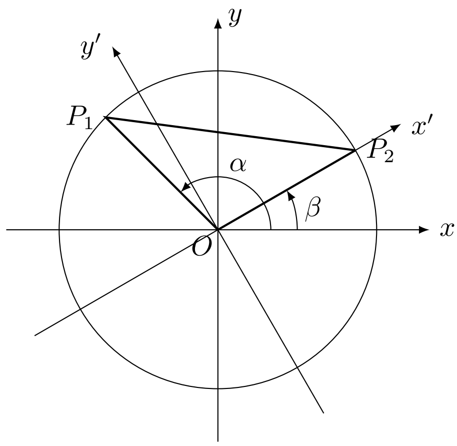


图 1.1

把 Ox 轴旋转到 β 的终边位置而成 Ox' 轴，Oy 轴旋转同样的角而成 Oy' 轴，我们用两种方法计算弦长 P_1, P_2.

在 $x'Oy'$ 坐标系中，P_1, P_2 的坐标是

$$P_1\ (\cos(\alpha-\beta), \sin(\alpha-\beta))\,, \qquad P_2\ (1,0)$$

利用两点间距离公式，得：

$$\begin{aligned}|P_1P_2|^2&=[\cos(\alpha-\beta)-1]^2+[\sin(\alpha-\beta)-0]^2\\&=\cos^2(\alpha-\beta)-2\cos(\alpha-\beta)+1+\sin^2(\alpha-\beta)\\&=2-2\cos(\alpha-\beta)\end{aligned} \tag{1.3}$$

在 xOy 坐标系中，P_1, P_2 的坐标是

$$P_1\ (\cos\alpha, \sin\alpha), \qquad P_2\ (\cos\beta, \sin\beta)$$

利用两点间距离公式，得：

$$
\begin{aligned}
|P_1P_2|^2 &= (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 \\
&= \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta \quad (1.4) \\
&= 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)
\end{aligned}
$$

在两个坐标系下，弦长是不变的，比较 (1.3) 式和 (1.4) 式，即得

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

这就是我们所要证明的.

既然公式 (1.2) 对任意 α, β 都成立，则以 $-\beta$ 代替 β, 也必成立

$$\cos[\alpha - (-\beta)] = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta)$$

再注意三角函数的奇偶性，就得到

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

这就是我们所要证明的公式 (1.1).

例 1.1　不查表，求 $\cos 15^\circ, \cos 75^\circ$ 的值.

解： 由于：$15^\circ = 45^\circ - 30^\circ, \qquad 75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$

$$\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

所以：

$$
\begin{aligned}
\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) &= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\
&= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \approx 0.9659
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) &= \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\
&= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \approx \frac{2.4495 - 1.4142}{4} \\
&\approx 0.2588
\end{aligned}
$$

例 1.2 已知 $\sin\alpha=\dfrac{2}{3}$, $\cos\beta=-\dfrac{3}{4}$, 并且 α 是第二象限的角，β 是第三象限的角，求 $\cos(\alpha-\beta)$ 的值（准确到 0.01）.

解： 因为 α 是第二象限的角，所以

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=-\frac{\sqrt{5}}{3}$$

因为 β 是第三象限的角，所以

$$\sin\beta=-\sqrt{1-\cos^2\beta}=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=-\frac{\sqrt{7}}{4}$$

因此：

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta)&=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\\&=\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)+\frac{2}{3}\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)\\&=\frac{3\sqrt{5}-2\sqrt{7}}{12}\\&\approx\frac{3\times2.236-2\times2.646}{12}\approx0.12\end{aligned}$$

例 1.3 证明对于任何角 α，以下公式成立

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha,\qquad\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$$

证明： 利用公式 (1.2)，可得：

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cdot\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{2}\cdot\sin\alpha$$

但是

$$\cos\frac{\pi}{2}=0,\qquad\sin\frac{\pi}{2}=1$$

所以 $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$

又因为上式中的 α 为任意角，所以，若把公式中的 $\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ 换成 α，就可得

$$\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

即：$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$

练习

1. 等式 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha+\cos\beta$ 成立吗？为什么？试举例说明

2. 不查表，求下列各式的值：

(a) $\cos 135^\circ$

(b) $\cos\left(\dfrac{-61\pi}{12}\right)$

(c) $\cos 1950^\circ$

(d) $\cos\dfrac{4\pi}{9}\cos\dfrac{\pi}{9}\sin\dfrac{4\pi}{9}\sin\dfrac{\pi}{9}$

(e) $\cos^2 15^\circ-\sin^2 15^\circ$

3. 已知 $\cos\theta=-\dfrac{5}{13}$, θ 为 II 象限角，试求 $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)$, $\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的值.

4. 证明：α 为任意角时，下式成立.

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha,\qquad \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$$

三、两角和与差的正弦

定理 2

两个任意角 α 和 β 的和（差）的正弦等于第一个角的正弦乘以第二个角的余弦的积加上（减去）第一角的余弦乘以第二个角的正弦的乘积. 即

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \tag{1.5}$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \tag{1.6}$$

证明： 因为已经知道

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha,\qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$$

所以

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= -\cos\left[\frac{\pi}{2}+(\alpha+\beta)\right] \\
&= -\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\beta\right] \\
&= -\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos\beta-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin\beta\right] \\
&= -(-\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta) \\
&= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta
\end{aligned}
$$

以 $(-\beta)$ 替换公式 (1.5) 中的 β，得到

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta) \\
&= \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta
\end{aligned}
$$

例 1.4 求 $\sin 15^\circ$ 和 $\sin 75^\circ$.（不查表）

解：

$$
\begin{aligned}
\sin 15^\circ &= \sin(45^\circ-30^\circ) \\
&= \sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} \\
&= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}
$$

(这就是 $\cos 75^\circ$ 的值).

$$
\begin{aligned}
\sin 75^\circ &= \sin(45^\circ+30^\circ) \\
&= \sin 45^\circ\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\sin 30^\circ \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} \\
&= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}
$$

(这就是 $\cos 15^\circ$ 的值).

例 1.5 已知 $\cos\phi=\dfrac{3}{5}$，且 ϕ 是第四象限角，试求 $\sin\left(\phi-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的值.

解： 因为 ϕ 为第四象限角，所以

$$
\sin\phi = -\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5}
$$

于是

$$\begin{aligned}\sin\left(\phi-\frac{\pi}{6}\right)&=\sin\phi\cos\frac{\pi}{6}-\cos\phi\sin\frac{\pi}{6}\\&=-\frac{4}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\\&=-\frac{4\sqrt{3}+3}{10}\end{aligned}$$

例 1.6　求证：$\dfrac{\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta}=\cot^2\beta-\cot^2\alpha$

证明：

$$\begin{aligned}\text{等式左边}&=\frac{(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)}{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta}\\&=\frac{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\beta-\cos^2\alpha\cdot\sin^2\beta}{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta}\\&=\cot^2\beta-\cot^2\alpha=\text{等式右边}\end{aligned}$$

例 1.7　求证 $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$

证明： 可用不同方法证之.

证法 1：

$$\begin{aligned}\text{左边}&=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\right)\\&=\sqrt{2}\left(\sin\theta\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\cos\theta\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)\\&=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\text{右边}\end{aligned}$$

证法 2：

$$\begin{aligned}\text{右边}&=\sqrt{2}\left(\sin\theta\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\cos\theta\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)\\&=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\right)\\&=\sin\theta+\cos\theta=\text{左边}\end{aligned}$$

练习

1. 你能知道当 α, β 取何值时，等式 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta$ 能够成立呢？

2. 不查表，求下式的值

   (a) $\sin 105^\circ$

   (b) $\sin\left(-\dfrac{5\pi}{12}\right)$

   (c) $\tan 15^\circ$

   (d) $\sin 14^\circ\cdot\cos 16^\circ+\cos 14^\circ\cdot\sin 16^\circ$

   (e) $\sin 79^\circ\cdot\cos 25^\circ-\sin 20^\circ\cdot\sin 25^\circ$

3. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{2}{3}$, $\cos\beta=-\dfrac{3}{4}$，且 α, β 都是第二象限角试求 $\sin(\alpha+\beta)$ 与 $\cos(\alpha-\beta)$ 的值.

4. 求证：

   (a) $\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}-\phi\right)+\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}+\phi\right)=\cos\phi$

   (b) $2\cos(60^\circ-\alpha)-\sqrt{3}\sin\alpha=\cos\alpha$

四、两角和与差的正切

定理 3

两个角 α 与 β 的和（或差）的正切，等于一个分式，其分子为这两角正切的和（或整），其分母为 1 与这两个角的正切乘积的差（或和）. 即

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \tag{1.7}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \tag{1.8}$$

注意：在这两个公式中，必须保证 $\tan\alpha, \tan\beta$ 及 $\tan(\alpha\pm\beta)$ 都有意义，因而，当且仅当 $\alpha, \beta, \alpha\pm\beta$, 都不等于 $\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$ 时，公式才能成立.

证明：对于公式 (1.7) 利用公式 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$，和关于正弦函数与

余弦函数的加法定理，得：

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

用 $\cos\alpha\cos\beta$ 除右端的分子和分母，得：

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta)&=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}\\&=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}\\&=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\end{aligned}$$

对于公式 (1.8)，

$$\begin{aligned}\tan(\alpha-\beta)&=\tan[\alpha+(-\beta)]\\&=\frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\tan(-\beta)}\\&=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\end{aligned}$$

例 1.8　求 $\tan 15^\circ$ 和 $\tan 75^\circ$ 的值.

解：

$$\begin{aligned}\tan 15^\circ&=\tan(60^\circ-45^\circ)\\&=\frac{\tan 60^\circ-\tan 45^\circ}{1+\tan 60^\circ\tan 45^\circ}\\&=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}\\&=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan 75^\circ&=\tan(45^\circ+30^\circ)\\&=\frac{1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\\&=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}\end{aligned}$$

例 1.9 求两角和及差的余切公式.

解: 因为余切是正切的倒数，则用 $\tan\alpha$ 和 $\tan\beta$ 表示 $\cot(\alpha+\beta)$ 和 $\cot(\alpha-\beta)$ 的公式，可以从 (1.7) 和 (1.8) 中交换第一个分子和分母的位置而得，我们得出公式:

$$\cot(\alpha+\beta)=\frac{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}$$

等式右边的分子、分母同除以 $\tan\alpha\cdot\tan\beta\neq 0$ 得到

$$\cot(\alpha+\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\alpha+\cot\beta}\tag{1.9}$$

以 $(-\beta)$ 替换上面等式中的 β，得到

$$\cot(\alpha-\beta)=\frac{\cot\alpha\cot(-\beta)-1}{\cot\alpha+\cot(-\beta)}=\frac{\cot\alpha\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha}$$

所以

$$\cot(\alpha-\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha}\tag{1.10}$$

式中 $\alpha,\beta,\alpha\pm\beta$ 都不等于 $k\pi$.（k 为任何整数）

例 1.10 已知 $\tan\alpha=\dfrac{1}{3}, \cot\beta=-\dfrac{1}{2}$，试求:

1. $\cot(\alpha-\beta)$ 的值.
2. $\alpha+\beta$ 的值，其中 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{3},\quad \dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$

解:

1. 因为 $\tan\alpha=\dfrac{1}{3}, \tan\beta=\dfrac{1}{\cot\beta}=-2$，以及

   $$\cot(\alpha-\beta)=\frac{1}{\tan(\alpha-\beta)}=\frac{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}$$

   所以

   $$\cot(\alpha-\beta)=\frac{1-\dfrac{2}{3}}{\dfrac{1}{3}+2}=\frac{1}{7}$$

2. 由于 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}=-1$，而且 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$，因而可得 $\dfrac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\dfrac{3\pi}{2}$

   在 $\dfrac{\pi}{2}$ 与 $\dfrac{3\pi}{2}$ 之间，只有 $\tan\dfrac{3\pi}{4}=-1$，所以

   $$\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$$

例 1.11　求证 $\dfrac{1+\tan 75^\circ}{1-\tan 75^\circ}=-\sqrt{3}$

分析： 如果利用 $\tan 45^\circ=1$ 这个等式，再考虑等式左边可变形为

$$\frac{\tan 45^\circ+\tan 75^\circ}{1-\tan 45^\circ\cdot\tan 75^\circ}$$

这样，利用两角和的正切公式经过化简，正好是一个特殊角 120° 的正切，它的值可求得.

证明： 注意 $1=\tan 45^\circ$，所以

$$\text{左边}=\frac{\tan 45^\circ+\tan 75^\circ}{1-\tan 45^\circ\cdot\tan 75^\circ}=\tan 120^\circ=-\sqrt{3}=\text{右边}$$

例 1.12　已知：$\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=m$，求 $\tan\alpha$ 的值.

解： **解法 1：** 由已知，$\alpha\neq\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$. 不然的话，$\alpha+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{pi}{2}+k\pi$，$\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$ 就没有意义了.

所以 $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=\dfrac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=m$

由于 $1-\tan\alpha\neq 0$，所以由上式可得

$$1+\tan\alpha=m-m\tan\alpha$$

即：$(m+1)\tan\alpha=m-1$ 所以：$\tan\alpha=\dfrac{m-1}{m+1}$,　$(m\neq -1)$

解法 2： 因为 $\alpha=\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)-\dfrac{\pi}{4}$，所以

$$\begin{aligned}\tan\alpha&=\tan\left[\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\frac{\pi}{4}\right]\\&=\frac{\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)-\tan\dfrac{\pi}{4}}{1+\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)\cdot\tan\dfrac{\pi}{4}}\\&=\frac{m-1}{m+1}\quad(m\neq -1)\end{aligned}$$

例 1.13　设 $\cot\alpha,\cot\beta$ 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$　$(a\neq c\neq 0)$ 的两个根，试求 $\tan(\alpha+\beta)$ 的值.

解： 由韦达定理知

$$\cot\alpha+\cot\beta=-\frac{b}{a},\qquad \cot\alpha\cdot\cot\beta=\frac{c}{a}$$

即：

$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha\cdot\tan\beta}=-\frac{b}{a},\qquad \frac{1}{\tan\alpha\cdot\tan\beta}=\frac{c}{a}$$

由此两式可以求得

$$\tan\alpha+\tan\beta=-\frac{b}{c},\qquad \tan\alpha\cdot\tan\beta=\frac{a}{c}$$

所以：

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}=\frac{-\frac{b}{c}}{1-\frac{a}{c}}=\frac{b}{a-c}$$

练习

1. 不查表，求值：
   (a) $\tan 435^\circ$
   (b) $\cot 105^\circ$
   (c) $\dfrac{\tan 17^\circ+\tan 28^\circ}{1+\tan 17^\circ\cdot\tan 152^\circ}$
   (d) $\dfrac{1+\tan 15^\circ}{\tan 15^\circ-1}$
2. 已知 $\tan\alpha=2$，且 $\alpha\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$，试求 $\tan\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的值.
3. 若 α,β 都是锐角，且 $\tan\alpha=2$, $\cot\beta=\dfrac{1}{3}$. 求证：$\alpha+\beta=135^\circ$.

习题 1.1

1. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{15}{17}$, $\cos\beta=-\dfrac{5}{13}$, 且 α, β 都是第二象限角，试求 $\cos(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$ 的值.
2. 在 $\triangle ABC$ 中，$\cos A=\dfrac{4}{5}$, $\cos B=\dfrac{12}{13}$, 试求 $\cos C$ 的值.
3. 求证：
   (a) $\cos(\alpha+60^\circ)+\cos(\alpha-60^\circ)=\cos\alpha$
   (b) $\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos\beta+\sin\beta\cdot\sin(\alpha+\beta)=\cos\alpha$
   (c) $\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha+\cos^2\beta-1$
4. 化简下列各式：

(a) $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$

(b) $\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\cdot\sin\beta}$

(c) $\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}$

(d) $\cos 25^\circ\cdot\cos 29^\circ-\sin 24^\circ\cdot\sin 29^\circ$

(e) $\cos(36^\circ+x)\cdot\cos(54^\circ-x)\sin(36^\circ+x)\cdot\sin(54^\circ-x)$

5. 已知 $\cos\alpha=\cos\beta=m, \sin\alpha=\sin\beta=n$, 试求 $\cos(\alpha+\beta)$ 及 $\cos(\alpha-\beta)$ 的值，并求出 m 与 n 的关系式.

6. 求下列各函数的值（不查表）:

$$\sin 150^\circ, \qquad \sin 195^\circ, \qquad -\tan 195^\circ$$

7. 已知 $\cos\alpha=-\frac{8}{17}, \cos\beta=\frac{4}{5}$, 且 α 是第二象限角，β 是第四象限角，试求 $\sin(\alpha+\beta)$

8. 若 $\cos\alpha=-\frac{3}{15}, \sin\beta=\frac{8}{17}$, 且 $a\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right), \beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, 试求 $\sin(\alpha-\beta)$.

9. 若 $\cos\alpha=\frac{1}{7}, \cos(\alpha+\beta)=-\frac{11}{14}$, 且 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. 试求角 β 的值.

10. 化简下列各式:

(a) $\sin 13^\circ\cdot\cos 17^\circ+\cos 13^\circ\cdot\sin 163^\circ$

(b) $\sin 70^\circ\cdot\sin 65^\circ-cos70^\circ\cdot\sin 25^\circ$

(c) $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$

(d) $\frac{\sin(\beta-\gamma)+\sin(\beta+\gamma)}{\sin(\beta+\gamma)-\sin(\beta-\gamma)}$

(e) $\frac{\sin(\beta-\gamma)}{\cos\beta\cdot\cos\gamma}+\frac{\sin(\gamma-\alpha)}{\cos\gamma\cdot\cos\alpha}+\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$

11. 已知 $\sin\alpha=\frac{3}{4}$, 且 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，求 $\tan\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$

12. (a) 已知 $\tan x=\frac{1}{4}, \tan y=-3$, 求 $\tan(x+y)$ 的值;

(b) 已知 $\tan\alpha=2k+1, \tan\beta=2k-1$, 求 $\cot(\alpha-\beta)$ 的值.

13. 求证:

(a) $\tan(x+y)\cdot\tan(x-y)=\dfrac{\tan^2 x-\tan^2 y}{1-\tan^2 x\cdot\tan^2 y}$

(b) $\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}=\cot\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$

(c) $\dfrac{\tan x+\tan y}{\tan x-\tan y}=\dfrac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)}$

14. 已知 θ,ϕ 都是锐角，且 $\tan\theta=\dfrac{1}{2}$, $\tan\phi=\dfrac{1}{3}$, 求证：$\theta+\phi=45°$.

15. 如图 1.2，矩形 $ABCD$ 被划分成三个全等的正方形. 求证：

(a) $\angle\theta=\angle\gamma$

(b) $\alpha+\beta+\gamma=90°$

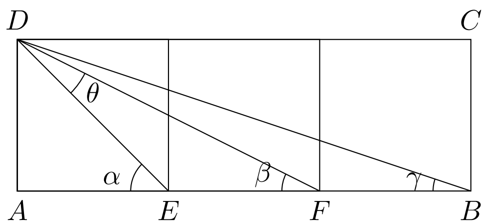


图 1.2

16. 若 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$, $\tan\beta=-\dfrac{1}{2}$. $90°<\alpha<180°$, $90°<\beta<180°$，求证：

(a) $\tan(\alpha+\beta)=-1$

(b) $\alpha+\beta=315°$

17. 已知 $\cot\alpha=\dfrac{3}{4}$, $\cot\beta=\dfrac{1}{7}$, 且 α,β 都是锐角，

求证：$1+\beta=135°$.

18. 已知 $\tan\alpha$ 与 $\tan\beta$ 是方程 $x^2+6x+7=0$ 的两个根.

求证：$\sin(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+\beta)$

19. 已知 $a\cdot\sin(\theta+x)=b\sin(\theta+y)$, 求证：

$$\tan\theta=\frac{b\sin y-a\sin x}{a\cos x-b\cos y}$$

第二节　二倍角的正弦、余弦和正切

一、二倍角的正弦、余弦和正切

在两角和的正弦、余弦和正切的公式中，令 $\beta=\alpha$，则得到

$$\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha$$

即

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha \tag{1.11}$$

$$\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha$$

即

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha \tag{1.12}$$

若在公式 (1.12) 中，用 $1-sin^2\alpha$ 代换 $\cos^2\alpha$, 或用 $1-\cos^2\alpha$ 代换 $\sin^2\alpha$, 则对于 $\cos 2\alpha$ 又得到两个公式

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha \tag{1.13}$$

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1 \tag{1.14}$$

$$\tan(\alpha+\alpha)=\frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha}$$

即:

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \tag{1.15}$$

注意:

1. 二倍角的三角函数的公式是把任意角的三角函数与小一半的角的三角函数联系起来，它们可以写成下面的各种形式的等式. 例如

$$\sin 4\alpha=\sin 2\cdot(2\alpha)=2\sin 2\alpha\cos 2\alpha$$
$$\sin\alpha=\sin 2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$
$$\cos\frac{\alpha}{2}=\cos^2\frac{\alpha}{4}-\sin^2\frac{\alpha}{4}$$
$$\tan 3\alpha=\frac{2\tan\frac{3\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{3\alpha}{2}}$$

2. 在二倍的正切公式 (1.15) 中，除了 $\alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi$ 和 $\alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, $(k\in\mathbb{Z})$ 诸值之外，对 α 的其余一切值都成立，因为当所指定的那些 α 值，$\tan\alpha$ 和 $\tan 2\alpha$ 都不存在.

3. 在使用二倍角三角函数的公式作恒等变形时，不仅要掌握从等式的左端的式子变换到右端的式子，而且也要熟练地掌握从等式的右端的式子变换到左端的式子.

例 1.14 化简下面的式子

1. $4\sin 15^\circ \cos 15^\circ$
2. $\dfrac{1}{2}\sin 15^\circ \sin 255^\circ$
3. $\cos^2 \dfrac{\pi}{8} - \sin^2 \dfrac{\pi}{8}$
4. $\cos^2 15^\circ - \dfrac{1}{2}$
5. $\dfrac{\tan 75^\circ}{1-\tan^2 75^\circ}$

解:

1. $4\sin 15^\circ \cos 15^\circ = 2\sin 30^\circ = 1$
2. $\dfrac{1}{2}\sin 15^\circ \sin 255^\circ = -\dfrac{1}{2}\sin 15^\circ \cos 15^\circ = -\dfrac{1}{4}\sin 30^\circ = -\dfrac{1}{8}$
3. $\cos^2 \dfrac{\pi}{8} - \sin^2 \dfrac{\pi}{8} = \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
4. $\cos^2 15^\circ - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2\cos^2 15^\circ - 1}{2} = \dfrac{\cos 30^\circ}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$
5. $\dfrac{\tan 75^\circ}{1-\tan^2 75^\circ} = \dfrac{1}{2}\dfrac{2\tan 75^\circ}{1-\tan^2 75^\circ} = \dfrac{1}{2}\tan 150^\circ = -\dfrac{1}{2}\tan 30^\circ = -\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

例 1.15 已知 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, $0^\circ < \beta < 90^\circ$, $\tan\alpha = \dfrac{1}{7}$，$\sin\beta = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

求证：$\alpha + 2\beta = 45^\circ$

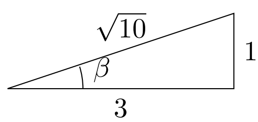


图 1.3

解：因为 β 是锐角，所以 $\tan\beta = \dfrac{1}{3}$，由 $\tan\beta < 1$ 知 $0^\circ < \beta < 45^\circ$，同理 $0^\circ < \alpha < 45^\circ$.

又 $\tan 2\beta = \dfrac{\dfrac{2}{3}}{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2} = \dfrac{3}{4} < 1$

所以 $0^\circ < 2\beta < 45^\circ$，并且

$$\tan(\alpha+2\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan 2\beta}{1-\tan\alpha\tan 2\beta}=\frac{\dfrac{1}{7}+\dfrac{3}{4}}{1-\dfrac{1}{7}\cdot\dfrac{3}{4}}=1$$

所以 $\alpha+2\beta=45^\circ+k\cdot 180^\circ\ (k\in\mathbb{Z})$，但是因为 $0^\circ<\alpha<45^\circ$，$0^\circ<2\beta<45^\circ$，所以 $0^\circ<\alpha+2\beta<90^\circ$，因此，$k$ 只能取 0，因而：

$$\alpha+2\beta=45^\circ$$

例 1.16　用 α 角的三角函数表示 $\sin 3\alpha$, $\cos 3\alpha$ 和 $\tan 3\alpha$.

解：

1.

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha &= \sin(\alpha+2\alpha)=\sin\alpha\cos 2\alpha+\cos\alpha\sin 2\alpha\\ &=\sin\alpha(1-2\sin^2\alpha)+2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)\\ &=\sin\alpha-2\sin^3\alpha+2\sin\alpha-2\sin^3\alpha\\ &=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha &= \cos(\alpha+2\alpha)=\cos\alpha\cos 2\alpha-\sin\alpha\sin 2\alpha\\ &=\cos\alpha(2\cos^2\alpha-1)-2\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)\\ &=2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2\cos\alpha+2\cos^3\alpha\\ &=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\tan 3\alpha=\tan(\alpha+2\alpha) &= \frac{\tan\alpha+\tan 2\alpha}{1-\tan\alpha\tan 2\alpha}\\ &=\frac{\tan\alpha+\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}}{1-\tan\alpha\cdot\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}}\\ &=\frac{\tan\alpha-\tan^3\alpha+2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha-2\tan^2\alpha}\\ &=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}\end{aligned}$$

例 1.17 求证：

1. $[\sin\alpha(1-\sin\alpha)+\cos\alpha(1-\cos\alpha)]\times[\sin\alpha(1+\sin\alpha)+\cos\alpha(1+\cos\alpha)]=\sin 2\alpha$

2. $\sin 50^\circ\left(1+\sqrt{3}\tan 10^\circ\right)=1$

证明：

1.

$$\begin{aligned}
\text{左边} &= (\sin\alpha-\sin^2\alpha+\cos\alpha-\cos^2\alpha)\times(\sin\alpha+\sin^2\alpha+\cos\alpha+\cos^2\alpha)\\
&=(\sin\alpha+\cos\alpha-1)(\sin\alpha+\cos\alpha+1)\\
&=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1\\
&=2\sin\alpha\cos\alpha\\
&=\sin 2\alpha=\text{右边}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\text{左边} &= \sin 50^\circ\left(1+\frac{\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}\right)\\
&=\sin 50^\circ\frac{2\left(\dfrac{1}{2}\cos 10^\circ+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ\right)}{\cos 10^\circ}\\
&=2\sin 50^\circ\cdot\frac{\cos 60^\circ\cdot\cos 10^\circ+\sin 60^\circ\cdot\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}\\
&=\frac{2\sin 50^\circ\cdot\cos 50^\circ}{\cos 10^\circ}\\
&=\frac{\sin 100^\circ}{\cos 10^\circ}\\
&=\frac{\cos 10^\circ}{\cos 10^\circ}=1=\text{右边}
\end{aligned}$$

练习

1. 不查表，求下列各式的值：

(a) $2\sin 12^\circ 30' \cdot \cos 12^\circ 30'$

(b) $\cos^2 \dfrac{\pi}{12} - \sin^2 \dfrac{\pi}{12}$

(c) $2\cos^2 67^\circ 30' - 1$

(d) $2\sin^2 75^\circ - 1$

(e) $\dfrac{2\tan 22.5^\circ}{1-\tan^2 22.5^\circ}$

(f) $\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ$

(g) $1-2\sin^2 750^\circ$

(h) $\dfrac{2\tan 150^\circ}{1-\tan^2 150^\circ}$

2. 化简：

(a) $(\sin x - \cos y)^2$

(b) $\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}$

(c) $\cos^4\theta - \sin^4\theta$

(d) $\dfrac{1}{1-\tan\theta} - \dfrac{1}{1+\tan\theta}$

3. 已知 $\cos\alpha = -\dfrac{12}{13}$, $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$, 试求：$\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\tan 2\alpha$ 的值.

4. 试推导出 $\tan 3\alpha$ 的公式（用 $\tan\alpha$ 表示）.

5. 证明以下各等式：

(a) $\sin^2\theta = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$

(b) $\cos^2\theta = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$

(c) $2\sin(\pi+\alpha)\cos(\pi-\alpha) = \sin 2\alpha$

(d) $\cos^4\dfrac{x}{2} - \sin^4\dfrac{x}{2} = \cos x$

(e) $1+2\cos^2\alpha = 2+\cos 2\alpha$

(f) $\dfrac{1}{\sin\alpha} - \dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha} = 2\sin\alpha$

(g) $\tan 2\alpha = \dfrac{2\cot\alpha}{\cot^2\alpha - 1}$

(h) $\dfrac{\sin^2\theta}{1-\cos^2\theta} = \cot\theta$

(i) $\cot x - \cot 2x = \dfrac{1}{\sin 2x}$

(j) $\dfrac{\sin\beta\cdot\cos\beta}{\sin^2\beta - \cos^2\beta} = -\dfrac{1}{2}\tan 2\beta$

二、万能公式——用 $\tan\dfrac{\alpha}{2}$ 分别表示任意角 α 的三角函数

定理

若 $\alpha \neq (2k+1)\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$，则 $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ 和 $\tan\alpha$ 可以表示成 $\tan\dfrac{\alpha}{2}$ 的有理式，即：

$$\sin\alpha = \frac{2\tan\dfrac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\alpha}{2}} \tag{1.16}$$

$$\cos\alpha = \frac{1-\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\alpha}{2}} \tag{1.17}$$

$$\tan\alpha = \frac{2\tan\dfrac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\alpha}{2}} \tag{1.18}$$

证明： 根据倍角公式有：

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$
$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

或者

$$\sin\alpha = \frac{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}+\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}, \qquad \cos\alpha = \frac{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}+\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$$

上面两个等式的分母恒等于 1, 因为 $\alpha \neq \pi + 2k\pi$，则 $\dfrac{\alpha}{2} \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$, 因而 $\cos\dfrac{\alpha}{2} \neq 0$.

上两式右边的分子、分母同除以 $\cos^2\dfrac{\alpha}{2} \neq 0$, 得

$$\sin\alpha = \frac{2\tan\dfrac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}, \qquad \cos\alpha = \frac{1-\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}$$

这两个式子相除就得到

$$\tan\alpha = \frac{2\tan\dfrac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}$$

上述三个公式通常叫做万能公式，应用它，就可以将 α 角的任一种三角函数化为以 $\tan\dfrac{\alpha}{2}$ 为变量的有理函数，这对问题的解决往往是有益的.

例 1.18 已知 $\sin\alpha = 0.8$, 且 $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, 求 $\sin 2\alpha$, $cos2\alpha$

解： 除用倍角公式求解外，我们应用万能公式给出另解一种解法如下：

因为 $\sin\alpha = 0.8,\ 90^\circ < \alpha < 180^\circ$，所以 $\tan\alpha = -\dfrac{4}{3}$

$$\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{-\dfrac{8}{3}}{1+\dfrac{16}{9}} = -\frac{24}{25}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1-\left(-\dfrac{4}{3}\right)^2}{1+\left(\dfrac{4}{3}\right)^2} = -\frac{7}{25}$$

例 1.19 已知 $\cot\alpha = -2,\ 90^\circ < \alpha < 180^\circ$,

求 $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$.

解： 因为 $\cot\alpha = -2,\ 90^\circ < \alpha < 180^\circ$，所以 $\tan\alpha = -\dfrac{1}{2}$

$$\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{2\left(-\dfrac{1}{2}\right)}{1+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2} = -\frac{4}{5}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1-\dfrac{1}{4}}{1+\dfrac{1}{4}} = \frac{3}{5}$$

例 1.20 求证：$\dfrac{\cos A}{\cot\dfrac{A}{2}-\tan\dfrac{A}{2}} = \dfrac{1}{2}\sin A$

证明：

$$\begin{aligned}
\text{左边} &= \frac{\tan\dfrac{A}{2}\cdot\cos A}{1-\tan^2\dfrac{A}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\tan A\cdot\cos A \\
&= \frac{1}{2}\sin A = \text{右边}
\end{aligned}$$

练习

1. 已知 $\cos A=\dfrac{4}{5}$，且 $\dfrac{3}{2}\pi<A<2\pi$，试用万能公式求 $\tan\dfrac{A}{2}$.

2. 应用万能公式求证：$\tan\dfrac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$

3. 求证：

   (a) $\dfrac{1}{4}\sin 2\alpha=\dfrac{\cos^2\alpha}{\cot\dfrac{\alpha}{2}-\tan\dfrac{\alpha}{2}}$

   (b) $\dfrac{\sin 2x}{1+\cos 2x}\cdot\dfrac{\cos x}{1+\cos x}=\tan\dfrac{x}{2}$

三、半角的正弦、余弦和正切

用 α 角的三角函数来表示 $\dfrac{\alpha}{2}$ 的角的三角函数的公式称为**半角三角函数公式**. 在倍角公式：

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha,\qquad \cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$

里，用 $\dfrac{\alpha}{2}$ 代替 α, 就得到

$$\cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2},\qquad \cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1$$

所以

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2},\qquad \cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$$

由于 $0\le\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\le 1$，$0\le\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\le 1$，故知

$$0\le\frac{1\pm\cos\alpha}{2}\le 1$$

两边开平方，得

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\qquad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

当 $\alpha\ne(2k+1)\pi$ 时，$\cos\dfrac{\alpha}{2}\ne 0$ 且 $\cos\alpha\ne-1$; 上面两个等式的两边相除，得到

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

下面三个公式称为半角的三角函数公式：

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \tag{1.19}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \tag{1.20}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \tag{1.21}$$

其中：$\alpha \neq (2k+1)\pi$. 至于根号前正号或负号的选取是依半角的终边位于什么象限内而定.

例 1.21 已知，$\cos\alpha = 0.6$, $270^\circ < \alpha < 360^\circ$

求 $\sin\dfrac{\alpha}{2}$, $\cos\dfrac{\alpha}{2}$ 和 $\tan\dfrac{\alpha}{2}$.

解： 因为已知 $270^\circ < \alpha < 360^\circ$，所以 $135^\circ < \dfrac{\alpha}{2} < 180^\circ$ 这时可以肯定 $\dfrac{\alpha}{2}$ 角是第一象限的角，所以 $\sin\dfrac{\alpha}{2}$ 的值是正的，$\cos\dfrac{\alpha}{2}$ 和 $\tan\dfrac{\alpha}{2}$ 的值是负的，因此得到

$$\begin{aligned}
\sin\frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-0.6}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \\
\cos\frac{\alpha}{2} &= -\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = -\sqrt{\frac{1+0.6}{2}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\
\tan\frac{\alpha}{2} &= -\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = -\sqrt{\frac{1-0.6}{1+0.6}} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

例 1.22 已知 $\cos\alpha = -\dfrac{1}{3}$，求 $\sin\dfrac{\alpha}{2}$.

解： 因为 $\cos\alpha = -\dfrac{1}{3} < 0$, 所以 α 角是第二或第三象限的角，即

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \alpha < \pi + 2k\pi \tag{1.22}$$

或者

$$\pi + 2k\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \tag{1.23}$$

从而由不等式 (1.22) 知道

$$\frac{\pi}{4} + k\pi < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

当 k 为正、负偶数时，$\dfrac{\alpha}{2}$ 角是第一象限的角；当 k 为正、负奇数时，$\dfrac{\alpha}{2}$ 角是第三象限的角，因此，尽管知道 α 是第二象限的角，也不能确定 $\dfrac{\alpha}{2}$ 是第几象

限的角，它可能是第一象限的角，也可能是第三象限的角，所以 $\sin\dfrac{\alpha}{2}$ 的值取符号“+”号或“−”号不能确定.

同理，由不等式 (1.23) 知道

$$\frac{\pi}{2}+k\pi<\frac{\alpha}{2}<\frac{3\pi}{4}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$$

当 k 为正负偶数时，$\dfrac{\alpha}{2}$ 是第二象限角；当 k 为正负奇数时，$\dfrac{\alpha}{2}$ 是第二象限角，因此，当 α 是第三象限的角时，$\dfrac{\alpha}{2}$ 可能是第二象限的角或第四象限的角，所以 $\sin\dfrac{\alpha}{2}$ 的值的符号不能确定.

根据上面的讨论知道

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1+\frac{1}{3}}{2}}=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$$

从上面的两个例子，可以知道，如果能确定 α 角在哪一个固定的区间，就可以确定角 $\dfrac{\alpha}{2}$ 在哪一个固定的区间，这时公式 (1.19)、(1.20)、(1.21) 就能够选取固定的“+”号或“−”号；如果只知道角 α 所在象限，而不知道它在哪一个固定的区间时，就不能确定角 $\dfrac{\alpha}{2}$ 在哪一个固定的区间，这时公式 (1.19)、(1.20)、(1.21) 中，就应该保留“±”号.

例 1.23 利用半角公式求 $\cos\dfrac{\pi}{8}$ 的值（准确到 0.001）

解： 因为 $\dfrac{\pi}{8}$ 是第一象限的角，把它作为 $\dfrac{\pi}{4}$ 的半角，使得

$$\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\approx 0.924$$

例 1.24 求证：$\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

证明： 因为 $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)$ ，所以：

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

又 $\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$，因此：

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} \tag{1.24}$$

我们来说明，当 α 是锐角时，这个公式的几何意义，如图 1.4 所示.

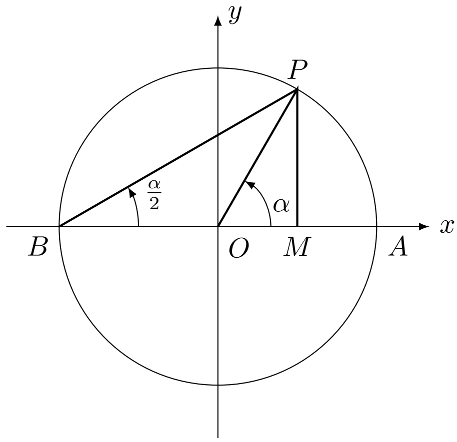


图 1.4

在单位圆中，半径 $|OA|=|OP|=|OB|=1$, $\angle POA=\alpha$ (弧度).

于是，$\overline{MP}=\sin\alpha$, $\overline{OM}=\cos\alpha$, $\angle PBA=\dfrac{\alpha}{2}$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\overline{MP}}{\overline{BM}}=\frac{\overline{MP}}{\overline{BO}+\overline{OM}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

例 1.25　求 $\tan 15^\circ$ 的值.

解： 解法 1: $\tan 15^\circ=\dfrac{1-\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ}=\dfrac{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{1}{2}}=2-\sqrt{3}$

解法 2:

$$\begin{aligned}\tan 15^\circ&=\sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{1+\cos 30^\circ}}=\sqrt{\frac{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}}\\&=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}=\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}\\&=2-\sqrt{3}\end{aligned}$$

由这两种解法看出，如果已知 $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ 的值，那么求 $\tan\dfrac{\alpha}{2}$ 时，用公式 (1.24) 要比公式 (1.23) 方便一些，其中尤以 $\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ 更方便.

例 1.26　求证：

1. $\tan\left(45^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$

2. $\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} = \cot\left(45^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right)$

3. $\dfrac{\cos^2 A}{\cot\dfrac{A}{2} - \tan\dfrac{A}{2}} = \dfrac{1}{4}\sin 2A$

证明:

1.

$$\begin{aligned}\tan\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) &= \tan\frac{90^\circ-\alpha}{2}\\ &= \frac{\sin(90^\circ-\alpha)}{1+\cos(90^\circ-\alpha)}\\ &= \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} &= \frac{\sin(90^\circ-\alpha)}{1-\cos(90^\circ-\alpha)}\\ &= \frac{1}{\tan\dfrac{90^\circ-\alpha}{2}} = \cot\frac{90^\circ-\alpha}{2}\\ &= \cot\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\frac{\cos^2 A}{\cot\dfrac{A}{2}-\tan\dfrac{A}{2}} &= \frac{\cos^2 A}{\dfrac{1+\cos A}{\sin A}-\dfrac{1-\cos A}{\sin A}}\\ &= \frac{\sin A\cos^2 A}{2\cos A}\\ &= \frac{1}{2}\sin A\cdot\cos A\\ &= \frac{1}{4}\sin 2A\end{aligned}$$

练习

1. 已知 $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$，求 $\sin\dfrac{\alpha}{2}$, $\cos\dfrac{\alpha}{2}$, $\tan\dfrac{\alpha}{2}$.

2. 已知 $\sin x = -\dfrac{4}{5}$，且 $\dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi$，求 $\sin\dfrac{x}{2}$, $\cos\dfrac{x}{2}$, $\tan\dfrac{x}{2}$.

3. 已知 $\cos A = \dfrac{4}{5}$，且 A 是第四象限角，试求 $\tan\dfrac{A}{2}$.

4. 求证：

(a) $\sin^2\frac{x}{4}=\frac{1-\cos\frac{x}{2}}{2}$

(b) $1+\sin\alpha=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$

(c) $1-\sin\beta=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)$

(d) $\sin 4\alpha=\frac{4\sin\alpha(1-\tan^2\alpha)}{\sec\alpha(1+\tan^2\alpha)}$

习题 1.2

1. 不查表计算下列的值

(a) $\sin 15^\circ\sin 75^\circ$

(b) $\sin\frac{\pi}{8}\sin\frac{3\pi}{8}$

(c) $\dfrac{\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}$

(d) $\dfrac{1-\tan^2 15^\circ}{1+\tan^2 15^\circ}$

(e) $\cot\frac{\pi}{8}-\tan\frac{\pi}{8}$

(f) $\sin^4 105^\circ+\cos^4 75^\circ$

2. 化简下面的式子

(a) $2-2\sin^2\alpha+\cos 2\alpha$

(b) $\cos 4\alpha+2\sin^2 2\alpha$

(c) $1-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

(d) $\left(\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-\sin^2\alpha\right)^2$

3. 证明：

(a) 若 $0<\alpha<\pi$, 则 $\sin 2\alpha<2\sin\alpha$

(b) 若 $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$, 则 $\tan 2\alpha<2\tan\alpha$

4. 已知 $\sin\alpha=\frac{7}{25}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, 求 $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ 和 $\tan 2\alpha$.

5. 已知 $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{2n}{1+n^2}$，求 $\sin\alpha$ 和 $\tan\alpha$.

6. 已知 $\sin\alpha=0.8$, $\cos\beta=-\frac{5}{13}$，并且 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$，求：

(a) $\sin(\alpha+2\beta)$

(b) $\cos(2\alpha-\beta)$

(c) $\tan[2(\alpha-\beta)]$

7. 设方程 $x^2-(\tan\theta+\cot\theta)x+1=0$ 的一个限是 $2+\sqrt{3}$，求 $\sin 2\theta$.

8. 设 $\tan\theta, \tan\phi$ 是方程 $7x^2+3x+1=0$ 的二根，求 $\tan\dfrac{\theta+\phi}{2}$ 的值.

9. 若 $\tan^2\alpha-a\tan\alpha+1=0, \quad (a>0)$，求 $\cos 2\alpha$.

   (a) 当 $0^\circ<\alpha<45^\circ$

   (b) 当 $45^\circ<\alpha<90^\circ$

10. 如图 1.5, 半径为 R 的圆木料，要截成横截面为长方形的木料，问怎样截取，才可以使长方形截面的面积最大?

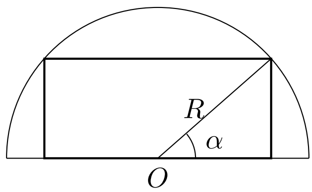


图 1.5

11. 直角三角形的面积为 12, 一锐角为 β, 求它的外接圆面积，又当 β 是多少度时? 外接圆面积最小.

12. 设 $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$, 求 $\sin 2\alpha$, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\cos\dfrac{\alpha}{2}$, $\sin\dfrac{\alpha}{2}$.

13. (a) 已知 $\cos\alpha=\dfrac{119}{169}$，求 $\sin\dfrac{\alpha}{2}$, $\cos\dfrac{\alpha}{2}$ 和 $\tan\dfrac{\alpha}{2}$.

    (b) 已知 $\cos\phi=\dfrac{1}{3}$，且 $\phi\in(270^\circ,360^\circ)$，求 $\sin\dfrac{\phi}{2}$, $\cos\dfrac{\phi}{2}$ 及 $\tan\dfrac{\phi}{2}$.

14. 已知 $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$，且 $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$，求 $\tan\dfrac{\alpha}{2}$.

15. 已知，等腰三角形顶角的余弦等于 $\dfrac{7}{25}$, 求底角的正弦、余弦和正切.

16. (a) 已知 $\tan\alpha=\dfrac{4}{5}$, $180^\circ<\alpha<270^\circ$. 求 $\tan\dfrac{\alpha}{2}$, $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\tan 2\alpha$.

    (b) 已知 $2\sin x+3\cos x=2$, 求 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的值.

17. 求证:

    (a) $\left(\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}\right)^2=1-\sin x$

    (b) $\tan\alpha-\cot\alpha=-2\cot 2\alpha$

(c) $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=2\tan\alpha$

(d) $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1+\sin 2\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$

(e) $\sin\alpha(1+\cos 2\alpha)=\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha$

(f) $2\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\cos 2x$

(g) $\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$

(h) $\frac{1+\sin 2\theta-\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta+\cos 2\theta}=\tan\theta$

(i) $\frac{2\sin x-\sin 2x}{2\sin x+\sin 2x}=\tan^2\frac{x}{2}$

(j) $\frac{\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan\frac{\alpha}{2}}+\frac{\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan\frac{\alpha}{2}}=\tan\alpha$

18. 利用 $45°$, $30°$ 的三角函数值，求 $\cos 22°30'$; $\sin 22°30'$; $\cos 15°$, $\sin 15°$ 的值.

19. (a) 求 $\sin 18°$ 的值;

(b) 求证 $\cos 36°-\cos 72°=\frac{1}{2}$.

20. 求证:

(a) $\sin\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

(b) $\tan 67.5°=\sqrt{2}+1$

(c) $\tan 7°30'=\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$

21. 证明下列恒等式

(a) $2\sin\theta+\sin 2\theta=4\sin\theta\cdot\cos^2\frac{\theta}{2}$

(b) $\tan 15°+\cot 15°=4$

(c) $\cos^2\alpha-2=\cos 2\alpha\cdot\csc^2\alpha$

(d) $\sin(n\pi+x)\cos(n\pi-x)=\frac{1}{2}\sin 2x, \quad (n\in\mathbb{Z})$

(e) $\cos\alpha(\cos\alpha-\cos\beta)+\sin\alpha(\sin\alpha-\sin\beta)=2\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$

(f) $\frac{\cos\alpha}{\sec\frac{\alpha}{2}+\csc\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)$

(g) $\cos^4\theta = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{4}\cos^2 2\theta$

(h) $\sin^4\theta = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{8}\cos 4\theta$

22. 求证下列条件等式:

(a) 若 $\tan x = \frac{b}{a}$, 则 $a\cos 2x + b\sin 2x = a$

(b) 若 $\tan \alpha\frac{\alpha}{2} = \frac{m}{n}$, 则 $\sin\alpha + \frac{m}{n}\cos\alpha = 1$

(c) 若 $1 + 2\tan^2 x = \tan^2 y$, 则 $\sin^2 x + \cos 2y = 0$

(d) 若 $x + y = 3 - \cos 4\alpha, x - y = 4\sin 2\alpha$, 则 $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = 2$

(e) 若 $2\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, 则

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1-\sin\beta}{2}}, \qquad \cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\sin\beta}{2}}$$

第三节　三角函数的和差化积与积化和差

一、三角函数的和差化积

根据两角和差的正弦函数的定理有:

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$$
$$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$$

由这两个等式左、右两端相加和相减得:

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x\cos y \tag{1.25}$$
$$\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2\cos x\sin y \tag{1.26}$$

设 $x + y = \alpha, x - y = \beta$, 那么

$$x = \frac{\alpha+\beta}{2}, \qquad y = \frac{\alpha-\beta}{2} \tag{1.27}$$

因此, 上面两个等式 (1.25) 和 (1.26) 就变成

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{I}$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{II}$$

根据两角和差的余弦函数的定理有:

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$$
$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$$

由这两个等式左、右两端相加和相减得:

$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cos y \tag{1.28}$$
$$\cos(x+y)-\cos(x-y)=-2\sin x\sin y \tag{1.29}$$

以等式 (1.27) 代入上式得:

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{III}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{IV}$$

利用上面得到的四个公式；即

和差化积公式

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{I}$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{II}$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{III}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{IV}$$

可以把某些三角函数的和或差化成积的形式.

例 1.27　把下列各式化成积的形式

1. $1+\sin\alpha$
2. $1-2\sin\alpha$
3. $\sin\frac{\pi}{5}+\cos\frac{\pi}{5}$
4. $\cos 22^\circ-\sin 66^\circ$

解:

1. 方法 1:

$$\begin{aligned}
1+\sin\alpha &= \sin 90^\circ + \sin\alpha \\
&= 2\sin\frac{90^\circ+\alpha}{2}\cos\frac{90^\circ-\alpha}{2} \\
&= 2\sin\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right) \\
&= 2\sin^2\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)
\end{aligned}$$

方法 2:

$$\begin{aligned}
1+\sin\alpha &= 1+\cos(90^\circ-\alpha) \\
&= 2\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
1-2\sin\alpha &= 2\left(\frac{1}{2}-\sin\alpha\right) \\
&= 2(\sin 30^\circ - \sin\alpha) \\
&= 2\times 2\cos\frac{30^\circ+\alpha}{2}\sin\frac{30^\circ-\alpha}{2} \\
&= 4\cos\left(15^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(15^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\sin\frac{\pi}{5}+\cos\frac{\pi}{5} &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)+\cos\frac{\pi}{5} \\
&= \cos\frac{3\pi}{10}+\cos\frac{\pi}{5} \\
&= 2\cos\frac{\frac{3\pi}{10}+\frac{2\pi}{10}}{2}\cos\frac{\frac{3\pi}{10}-\frac{2\pi}{10}}{2} \\
&= 2\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{20} \\
&= \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{20}
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\cos 22^\circ - \sin 66^\circ &= \cos 22^\circ - \cos(90^\circ - 66^\circ) \\
&= \cos 22^\circ - \cos 24^\circ \\
&= -2\sin\frac{46^\circ}{2}\sin\left(-\frac{2^\circ}{2}\right) \\
&= 2\sin 23^\circ \sin 1^\circ
\end{aligned}$$

例 1.28　把 $\sin^2\alpha-\sin^2\beta$ 化为乘积形式.

解： 方法 1:

$$\begin{aligned}\sin^2\alpha-\sin^2\beta&=(\sin\alpha+\sin\beta)(\sin\alpha-\sin\beta)\\&=\left(2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\left(2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\&=\left(2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\&=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)\end{aligned}$$

方法 2: 利用公式 $\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$ 进行替换，得到

$$\begin{aligned}\sin^2\alpha-\sin^2\beta&=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}-\frac{1-\cos 2\beta}{2}\\&=\frac{1}{2}(\cos 2\beta-\cos 2\alpha)\\&=\frac{1}{2}\times(-2)\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha)\\&=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)\end{aligned}$$

例 1.29　引入辅助角把下面各式化为两角和的正弦函数.

1. $3\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha$
2. $3\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha$
3. $\cos 2x-4\sin 2x$

解：

1.

$$\begin{aligned}3\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha&=\sqrt{3}\left(\sqrt{3}\cos\alpha+\sin\alpha\right)\\&=2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha\right)\\&=2\sqrt{3}\left(\sin 60^\circ\cos\alpha+\cos 60^\circ\sin\alpha\right)\\&=2\sqrt{3}\sin(60^\circ+\alpha)=2\sqrt{3}\sin(\alpha+60^\circ)\end{aligned}$$

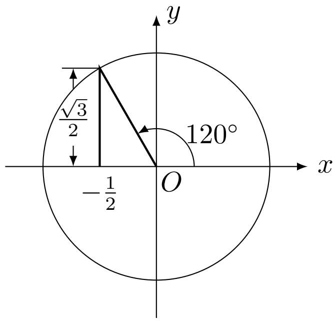


图 1.6

2.

$$
\begin{aligned}
3\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha &= 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha\right) \\
&= 2\sqrt{3}\,(\sin 120^\circ\cos\alpha + \cos 120^\circ\sin\alpha) \\
&= 2\sqrt{3}\sin(120^\circ + \alpha) = 2\sqrt{3}\sin(\alpha + 120^\circ)
\end{aligned}
$$

3. 配一个正系数 k，使得

$$\cos 2x - 4\sin 2x = k\left(\frac{1}{k}\cos 2x - \frac{4}{k}\sin 2x\right)$$

并且引入一个辅助角 θ，满足下面两个等式：

$$\sin\theta = \frac{1}{k}, \qquad \cos\theta = -\frac{4}{k}$$

k 的值可由等式 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = \dfrac{1 + (-4)^2}{k^2} = 1$ 确定，于是有：

$$k = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}$$

于是 $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{17}}$, $\cos\theta = -\dfrac{4}{\sqrt{17}}$. θ 是第二象限角，它的值可由 $\tan\theta = -\dfrac{1}{4} = -0.25$ 求出，得到

$$\theta = 180^\circ - 14^\circ 2' = 165^\circ 58'$$

因此：

$$
\begin{aligned}
\cos 2x - 4\sin 2x &= \sqrt{17}\,(\sin 165^\circ 58'\cos 2x + \cos 165^\circ 58'\sin 2x) \\
&= \sqrt{17}\sin(2x + 165^\circ 58')
\end{aligned}
$$

例 1.30 化 $a\sin x + b\cos x$ 为积的形式.

分析: 仿照例 1.29 可以引入一个辅助角 θ, 并配上一个正系数 k, 我们来分析如何确定 k, θ:

假设 $a = k\cdot\cos\theta$, $b = k\cdot\sin\theta$, 原式就变为

$$\begin{aligned} a\sin x + b\cos x &= k(\sin x\cdot\cos\theta + \cos x\cdot\sin\theta) \\ &= k\cdot\sin(x+\theta) \end{aligned}$$

由于 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, 因而 $\left(\dfrac{a}{k}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{k}\right)^2 = 1$

$$\therefore \quad k = \sqrt{a^2+b^2}$$

于是就得出

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

从而得

$$\tan\theta = \frac{b}{a}$$

这样, 由 a, b 就可以确定 k, θ 的值了.

解:

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)$$

令 $\cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, 则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \sqrt{a^2+b^2}(\cos\theta\cdot\sin x + \sin\theta\cdot\cos x) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta) \end{aligned}$$

其中, θ 角所在的象限由 a, b 的符号确定, θ 角的值由 $\tan\theta = \dfrac{b}{a}$ 确定.

例 1.31 若 $A+B+C = 180^\circ$, 求证 $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A\sin B\sin C$

证明:

$$\begin{aligned}
&\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C\\
=&2\sin(A+B)\cos(A-B)+2\sin C\cos C\\
=&2\sin C\cos(A-B)+2\sin C\cos C \qquad (\sin(A+B)=\sin C)\\
=&2\sin C[\cos(A-B)+\cos C]\\
=&2\sin C[\cos(A-B)-\cos(A+B)] \qquad (\cos C=-\cos(A+B))\\
=&2\sin C[-2\sin A\sin(-B)]\\
=&4\sin A\sin B\sin C
\end{aligned}$$

注意: 在证明满足条件 $A+B+C=180^\circ$ 的三个角 A、B、C 的三角函数恒等式时，要特别注意互为余角与互为补角的三角函数的性质，例如：从任何两个角的和是第三个角的补角这一类关系，得到

$$\sin(B+C)=\sin A,\qquad \cos(A+B)=-\cos C,\qquad \tan(C+A)=-\tan B$$

$$\cos B=-\cos(C+A),\qquad \sin C=\sin(A+B),\qquad \cot A=-\cot(B+C)$$

又从任何两个角的和的一半是第三个角的一半的余角这一关系得到

$$\cos\frac{A+B}{2}=\sin\frac{C}{2},\qquad \sin\frac{C+A}{2}=\cos\frac{B}{2},\qquad \tan\frac{B+C}{2}=\cot\frac{A}{2}$$

$$\cos\frac{C}{2}=\sin\frac{A+B}{2},\qquad \sin\frac{A}{2}=\cos\frac{B+C}{2},\qquad \tan\frac{B}{2}=\cot\frac{C+A}{2}$$

例 1.32 把 $1+\sin\theta+\cos\theta$ 化成积的形式.

解:

$$\begin{aligned}
1+\sin\theta+\cos\theta&=(1+\cos\theta)+\sin\theta\\
&=2\cos^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}\\
&=2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right)\\
&=2\cos\frac{\theta}{2}\left[\sin\left(90^\circ-\frac{\theta}{2}\right)+\sin\frac{\theta}{2}\right]\\
&=2\cos\frac{\theta}{2}\cdot 2\sin 45^\circ\cdot\cos\left(45^\circ-\frac{\theta}{2}\right)\\
&=2\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\left(45^\circ-\frac{\theta}{2}\right)
\end{aligned}$$

练习

1. 把下列各式化为积的形式（口答）

   (a) $\sin 24^\circ + \sin 20^\circ$

   (b) $\sin 75^\circ - \sin 15^\circ$

   (c) $\cos 3x + \cos 2x$

   (d) $\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2} - \cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

2. 求值：

   (a) $\dfrac{\sin 20^\circ - \sin 40^\circ}{\cos 20^\circ - \sin 40^\circ}$

   (b) $\sin 20^\circ + \sin 40^\circ - \sin 80^\circ$

3. 求证：

   (a) $\dfrac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} = \tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cot\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

   (b) $\dfrac{\sin x + \sin y}{\cos x - \cos y} = \cot\dfrac{y-x}{2}$

   (c) $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C$，其中 $A + B + C = \pi$

4. 将下列各式化为两角和（差）的三角函数：

   (a) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \dfrac{1}{2}\sin x$

   (b) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x$

   (c) $\sqrt{2}\cos x + \sqrt{2}\sin x$

   (d) $\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta$

   (e) $4\sin\alpha + 3\cos\alpha$

   (f) $3\cos\beta - \sqrt{7}\sin\beta$

二、三角函数的积化和差

将公式 (1.25)、(1.26)、(1.28)、(1.29) 的两边同除以 2，便得到如下公式：

积化和差公式

$$\sin x\cdot\cos y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)] \tag{V}$$
$$\cos x\cdot\sin y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)-\sin(x-y)] \tag{VI}$$

$$\cos x\cdot\cos y=\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)] \tag{VII}$$
$$\begin{aligned}\cos x\cdot\sin y&=-\frac{1}{2}[\cos(x+y)-\cos(x-y)]\\&=\frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)]\end{aligned} \tag{VIII}$$

若 $x=y$，由此可推出倍角公式，即有

$$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x,\qquad \cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x),\qquad \sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

例 1.33 化乘积 $\sin 35^\circ\cos 55^\circ$ 为和的形式.

解： 解法 1:

$$\sin 35^\circ\cos 55^\circ=\frac{1}{2}[\sin 90^\circ+\sin(-20^\circ)]=\frac{1}{2}[1-\sin 20^\circ]$$

解法 2:

$$\sin 35^\circ\cos 55^\circ=\sin^2 35^\circ=\frac{1-\cos 70^\circ}{2}=\frac{1-\sin 20^\circ}{2}$$

例 1.34 不查表，求下列各式的值：

1. $\sin\dfrac{5\pi}{12}\cdot\cos\dfrac{\pi}{12}$
2. $\cos^2 73^\circ+\cos^2 47^\circ+\cos 73^\circ\cos 47^\circ$

解：

1. 解法 1:

$$\begin{aligned}\sin\frac{5\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{12}&=\frac{1}{2}\left[\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{3}\right]\\&=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{4}(2+\sqrt{3})\end{aligned}$$

解法 2:

$$\begin{aligned}\sin\frac{5\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{12}&=\cos\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{12}\\&=\cos^2\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{6}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{4}\left(2+\sqrt{3}\right)\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=1+\frac{\cos 146^\circ}{2}+\frac{1+\cos 94^\circ}{2}+\frac{\cos 120^\circ+\cos 26^\circ}{2}\\&=1+\frac{\cos 146^\circ+\cos 94^\circ}{2}-\frac{1}{4}+\frac{\cos 26^\circ}{2}\\&=\frac{3}{4}+\frac{2\cos 120^\circ\cos 26^\circ}{2}+\frac{\cos 26^\circ}{2}\\&=\frac{3}{4}-\frac{\cos 26^\circ}{2}+\frac{\cos 26^\circ}{2}\\&=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

例 1.35　化简 $\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha$ 并求 $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$ 的值.

解:

$$\begin{aligned}\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha&=\frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha}{2\sin\alpha}\\&=\frac{\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha}{2\sin\alpha}\\&=\frac{\sin 4\alpha\cdot\cos 4\alpha}{2^2\sin\alpha}\\&=\frac{\sin 8\alpha}{2^3\sin\alpha}=\frac{\sin 8\alpha}{8\sin\alpha}\end{aligned}$$

$$\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}=\frac{\sin\frac{8\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{-\sin\frac{\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{1}{8}$$

例 1.36　求证:

1. $\sin 15^\circ\cdot\sin 30^\circ\cdot\sin 75^\circ=\frac{1}{8}$
2. $\cos 10^\circ\cdot\cos 30^\circ\cdot\cos 50^\circ\cdot\cos 70^\circ=\frac{3}{16}$

证明:

1. 证法 1:

$$\begin{aligned}
\text{左边} &= \frac{1}{2}\sin 15^\circ \cdot \sin 75^\circ \\
&= -\frac{1}{4}[\cos 90^\circ - \cos(-60^\circ)] \\
&= -\frac{1}{4}(0 - \cos 60^\circ) \\
&= -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} = \text{右边}
\end{aligned}$$

证法 2:

$$\begin{aligned}
\text{左边} &= \frac{1}{2}\sin 15^\circ \cdot \sin 75^\circ \\
&= \frac{1}{2}\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ \\
&= \frac{1}{4}\sin 30^\circ = \frac{1}{8} = \text{右边}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\text{左边} &= \cos 10^\circ \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}[\cos 120^\circ + \cos(-20^\circ)] \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}\cos 10^\circ \left(-\frac{1}{2} + \cos 20^\circ\right) \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{8}\cos 10^\circ + \frac{\sqrt{3}}{4}\cos 10^\circ \cdot \cos 20^\circ \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{8}\cos 10^\circ + \frac{\sqrt{3}}{8}[\cos 30^\circ + \cos 10^\circ] \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{8}\cos 10^\circ + \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{8}\cos 10^\circ \\
&= \frac{3}{16} = \text{右边}
\end{aligned}$$

例 1.37 求证：$\cos^3 2\alpha = \sin 3\alpha \cdot \sin^3 \alpha + \cos 3\alpha \cdot \cos^3 \alpha$

证明:

$$
\begin{aligned}
\text{右边} &= \sin^2\alpha(\sin 3\alpha\cdot\sin\alpha)+\cos^2\alpha(\cos 3\alpha\cdot\cos\alpha)\\
&= \frac{1}{2}\big[\sin^2\alpha(\cos 2\alpha-\cos 4\alpha)+\cos^2\alpha(\cos 4\alpha+\cos 2\alpha)\big]\\
&= \frac{1}{2}\big[\cos 2\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+\cos 4\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\big]\\
&= \frac{1}{2}\big[\cos 2\alpha+\cos 4\alpha\cdot\cos 2\alpha\big]\\
&= \frac{1}{2}\cos 2\alpha(1+\cos 4\alpha)\\
&= \frac{1}{2}\cos 2\alpha\cdot 2\cos^2 2\alpha\\
&= \cos^3 2\alpha = \text{左边}
\end{aligned}
$$

例 1.38 已知在 $\triangle ABC$ 中，$\sin B\cdot\sin C=\cos^2\dfrac{A}{2}$. 求证这个三角形是等腰三角形.

证明: 由于 $\sin B\cdot\sin C=\cos\dfrac{A}{2}=\dfrac{1+\cos A}{2}$ 且 $A=\pi-(B+C)$, $\cos A=-\cos(B+C)$, 因而就有

$$\sin B\cdot\sin C=\frac{1}{2}[1-\cos(B+C)]$$

所以

$$-\frac{1}{2}\ \cos(B+C)-\cos(B-C)]=\frac{1}{2}\ 1-\cos(B+C)]$$

化简上式，得 $\cos(B-C)=1$.

又由 $-180^\circ<B-C<180^\circ$，所以 $B-C=0^\circ$，即 $B=C$，这证明了 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

例 1.39 若 $A+B+C=\pi$, 求证:

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}=4\cos\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{\pi-B}{4}\cos\frac{\pi-C}{4}$$

证明：

$$
\begin{aligned}
&4\cos\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{\pi-B}{4}\cos\frac{\pi-C}{4}\\
&=2\cos\frac{\pi-A}{4}\left[\cos\frac{2\pi-(B+C)}{4}+\cos\frac{B-C}{4}\right]\\
&=2\cos\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{\pi+A}{4}+2\cos\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{B-C}{4}\\
&=\left(\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)+2\cos\frac{B+C}{4}\cos\frac{B-C}{4}\\
&=\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}
\end{aligned}
$$

练习

1. 先将各式化为和差形式，再查表求值：

   (a) $2\sin 70^\circ\cdot\cos 20^\circ$

   (b) $\cos 80^\circ\cdot\sin 120^\circ$

   (c) $\cos 68^\circ\cdot\cos 52^\circ$

   (d) $\sin 121^\circ\cdot\sin 50^\circ$

2. 不查表求值：

   (a) $\sin 105^\circ\cdot\cos 75^\circ$

   (b) $2\cos 37.5^\circ\cdot\cos 22.5^\circ$

   (c) $2\cos\frac{9\pi}{13}\cdot\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}$

   (d) $\sin^2 10^\circ+\cos^2 40^\circ+\sin 10^\circ\cdot\cos 40^\circ$

3. 求证：

   (a) $2\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin 2x$

   (b) $\sin 20^\circ\cdot\cos 70^\circ+\sin 10^\circ\cdot\sin 50^\circ=\frac{1}{4}$

   (c) $\cos 2\alpha\cdot\cos\alpha-\sin 5\alpha\cdot\sin 2\alpha=\cos 4\alpha\cdot\cos 3\alpha$

   (d) $\cos 4x\cdot\cos 2x-\cos^2 3x=-\sin^2 x$

   (e) $\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=2\tan 2x$

习题 1.3

1. 将函数的和化为乘积形式

(a) $\sin 12^\circ + \sin 20^\circ$

(b) $\sin 40^\circ - \sin 16^\circ$

(c) $\cos 50^\circ + \cos 30^\circ$

(d) $\cos 17^\circ - \cos 13^\circ$

(e) $\sin 24^\circ + \cos 55^\circ$

(f) $\sin\dfrac{\pi}{5} - \cos\dfrac{2\pi}{5}$

(g) $\tan 10^\circ + \tan 20^\circ$

(h) $\tan 12^\circ - \cot 40^\circ$

(i) $\tan\alpha + \cot\alpha$

(j) $\cos\alpha - \sin\alpha$

2. 化函数的和式为乘积

(a) $\cos^2\alpha - \cos^2\beta$

(b) $\tan^2\alpha - \tan^2\beta$

(c) $1 + \sin\alpha + \cos\alpha$

(d) $\sin 16^\circ + \sin 24^\circ + \sin 40^\circ$

(e) $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha$

(f) $\sin^2 x - \sin^2 y$

3. 化简下面式子

(a) $I\sin\omega t + I\sin\left(\omega t + \dfrac{2\pi}{3}\right) + I\sin\left(\omega t - \dfrac{2\pi}{3}\right)$

(b) $\cos^2 3 + \cos^2 1 - \cos 4\cdot\cos 2$

(c) $\sec\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right)\cdot\sec\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)$

(d) $\dfrac{\tan(45^\circ + x) - \tan(45^\circ - x)}{\tan(45^\circ + x) + \tan(45^\circ - x)}$

(e) $\dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha}$

4. 引入辅助角将下面式子化为乘积形式:

(a) $1 + \sin\alpha$

(b) $\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \sin\alpha$

(c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \cos\alpha$

(d) $\dfrac{3}{4} - \sin^2\alpha$

(e) $\dfrac{1}{4} - \cos^2\alpha$

(f) $3 - \tan^2\alpha$

(g) $\sqrt{3} + 2\cos\alpha$

(h) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \dfrac{1}{2}\cos x$

(i) $4\sin x - 3\cos x$

(j) $7\sin 2t - 6\cos 2t$

5. 不查表，计算下面各式的值

(a) $\sin 52°30' \cos 7°30'$

(b) $\cos 97°30' \sin 37°30'$

(c) $2\cos 165° \cos 135°$

(d) $\tan 10° \cdot \tan 50° \cdot \tan 70°$

(e) $\cos 20° \cos 40° \cos 60° \cos 90°$

(f) $\cos 20° + \cos 100° + \cos 140°$

(g) $\sin 20° \sin 40° \sin 60° \sin 80°$

(h) $\cos 40° \cdot \cos 80° \cdot \cos 160° + \cos 160° \cdot \cos 40°$

6. 化简下列各式

(a) $2\sin 2\alpha \sin \alpha + \cos 3\alpha$

(b) $2\cos \dfrac{9\pi}{13} \cos \dfrac{\pi}{13} + \cos \dfrac{5\pi}{13} + \cos \dfrac{3\pi}{13}$

7. 证明下列各等式：

(a) $\dfrac{\sin A + \sin 3A + \sin 5A}{\sin 3A + \sin 5A + \sin 7A} = \dfrac{\sin 3A}{\sin 5A}$

(b) $\dfrac{\sin x - \sin y}{\sin(x+y)} = \dfrac{\sin \frac{1}{2}(x-y)}{\sin \frac{1}{2}(x+y)}$

(c) $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \dfrac{\cos 2\alpha + \cos 2\beta}{1 + \cos 2(\alpha+\beta)}$

(d) $\sin \dfrac{\alpha}{2} \cdot \sin \dfrac{7\alpha}{2} + \sin \dfrac{3\alpha}{2} \cdot \sin \dfrac{11\alpha}{2} = \sin 2\alpha \cdot \sin 5\alpha$

(e) $(\sin x + \cos x)(\sin 2x + \cos 2x) = \sin 3x + \cos x$

8. 若 $A+B+C=\pi$，求证：

(a) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin \dfrac{A}{2} \sin \dfrac{B}{2} \sin \dfrac{C}{2}$

(b) $\sin^2 \dfrac{A}{2} + \sin^2 \dfrac{B}{2} + \sin^2 \dfrac{C}{2} = 1 - 2\sin \dfrac{A}{2} \sin \dfrac{B}{2} \sin \dfrac{C}{2}$

(c) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

(d) $\tan \dfrac{A}{2} \tan \dfrac{B}{2} + \tan \dfrac{B}{2} \tan \dfrac{C}{2} + \tan \dfrac{C}{2} \tan \dfrac{A}{2} = 1$

9. 若一三角形的边和角适合条件：

$$(a^2+b^2)\sin(A-B) = (a^2-b^2)\sin(A+B)$$

试证：此三角形为直角三角形或等腰三角形.

提示：用正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

10. 若 A、B、C、D 均在 0 与 π 之间，求证：

(a) $\sin\dfrac{A+B}{2}\geq\dfrac{1}{2}(\sin A+\sin B)$

(b) $\sin\dfrac{A+B+C+D}{4}\geq\dfrac{1}{4}(\sin A+\sin B+\sin C+\sin D)$

(c) $\sin\dfrac{A+B+C}{3}\geq\dfrac{1}{3}(\sin A+\sin B+\sin C)$

提示：在 (b) 中令 $D=\dfrac{A+B+C}{3}$ 推导出 (c).

11. 求下列各式的最大值与最小值：

(a) $\sin x\cdot\cos x$

(b) $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)$

(c) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+2\theta\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-2\theta\right)$

(d) $6\cos x+8\sin x$

第四节　简单三角方程

在初中我们曾经学习过这样的问题：已知三角函数值求角. 如，已知 $\sin x=\dfrac{1}{2}$，求 x 的值，像这样条件等式 $\sin x=\dfrac{1}{2}$ 的样子，我们把**含有未知数的三角函数的等式，叫做三角方程**. 例如：$\sin x-1=-\dfrac{1}{2}$，$2\sin^2x+3\cos x=0$，$\sin 5x=\cos 4x$，等等都是三角方程.

解三角方程就是求出未知数的一切能适合下方程的值，或证明方程无解.

三角方程的一般理论和解法，留待以后学习，本节仅就几种特殊类型的简单三角方程的具体解法加以讨论.

一、最简单的三角方程

三角方程中，$\sin x=a$, $\cos x=a$, $\tan x=a$, $\cot x=a$ 就叫做最简单的三角方程. 它们的求解是其它三角方程求解的基础.

最简单的三角方程求解的方法是相同的，正像在初中已经学过的那样：首先求出，已知方程在 $0\leq x<2\pi$ 区间内的解，如果这个区间内有两个解：$x=\alpha_1$ 和 $x=\alpha_2$，那么原方程的所有解就是 $x=\alpha_1+2k\pi$ 和 $x=\alpha_2+2k\pi\quad(k\in\mathbb{Z})$；如果在这个区间内只有一个解：$x=\alpha$，那么原方程的解就是 $x=\alpha+2k\pi$；如果在这个区间没有解，那么原方程也没有解. 可见，最简单的三角方程或有无限多解，或没有解.

例 1.40 解方程 $\sin x=\dfrac{1}{2}$.

解： 已知在 $(0,2\pi)$ 内解为 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 和 $x=\dfrac{5\pi}{6}$, 所以方程的解集为

$$\left\{x\middle|x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\right\}\bigcup\left\{x\middle|x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right\}$$

例 1.41 解方程 $\cos x=0$

解： 已知在 $(0,2\pi)$ 内，$x=\dfrac{\pi}{2}$ 和 $x=\dfrac{3\pi}{2}$，所以方程的解为

$$\begin{aligned}&\left\{x\middle|x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\right\}\bigcup\left\{x\middle|x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi=\frac{\pi}{2}(2k+1)\pi\right\}\\=&\left\{x\middle|x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\right\}\end{aligned}$$

例 1.42 解方程 $\sin x=-1$

解： 解集为 $\left\{x\middle|x=\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\right\}$

例 1.43 解方程 $\cos x=2$

解： 由于任意角 α 的余弦具有性质 $|\cos\alpha|<1$, 因此，方程 $\cos x=2$ 无解，即解集为 $\emptyset$.

例 1.44 解方程 $\tan x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

解： 由查表可知在 $[0,2\pi)$ 内，$x=40°54'$ 和 $x=220°54'$. 所以方程的解为

$$\begin{aligned}&\left\{x\middle|x=40°54'+k\cdot360°\right\}\cup\left\{x\middle|x=220°54'+k\cdot360°\right\}\\=&\left\{x\middle|x=40°54'+k\cdot180°,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\end{aligned}$$

一般地，可以概括出：

- 方程 $\sin x=a$ 与 $\cos x=a$, 当 $|a|\leq1$ 时有解；当 $|a|>1$ 时无解；
- 方程 $\tan x=a$ 与 $\cot x=a$，当 a 为任意实数时，都有解.

练习

解下列最简单三角方程

1. $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\sin x = 0$
3. $\cos x = -1$
4. $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
5. $\tan x = 0.5$
6. $\cot x = -2.3016$
7. $\sqrt{2}\sin x + 1 = 0$
8. $\tan x = 2\sqrt{2} - 1$

二、简单的三角方程

有几类特殊而简单的三角方程，可以通过三角恒等变形或利用代数中解方程的方法，将它们化成一个或几个最简单的三角方程，从而求出它们的解集.

例 1.45 解方程

1. $2\cos 2x = 1$
2. $\tan(x + 15^\circ) + 1 = 0$
3. $\sqrt{2}\sin(3x - 9^\circ) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
4. $\cos^2 x - 4\cos x + 2 = 0$

分析： 这几个三角方程的共同特点是：只含有同一个未知数的同名三角函数. 因此可以将这个含有未知数的三角函数视为一元，用代数方法先求出它的值，从而归结为最简单的三角方程求解.

解：

1. 原方程化为 $\cos 2x = \dfrac{1}{2}$

$$2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

所以解集是 $\left\{x \middle| x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$

2. 原方程化为 $\tan(x + 15^\circ) = -1$

$$x + 15^\circ = -45^\circ + k \cdot 180^\circ, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

所以解集是 $\left\{x \middle| x = -60^\circ + k \cdot 180^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$

3. 原方程化为 $\sin(3x-9^\circ)=\dfrac{1}{2}$

$$3x-9^\circ=30^\circ+k\cdot 360^\circ,\quad 3x-9^\circ=150^\circ+k\cdot 360^\circ,\qquad (k\in\mathbb{Z})$$

所以解集为

$$\left\{x\middle|x=13^\circ+k\cdot 120^\circ,\quad k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{x\middle|x=53^\circ+k\cdot 120^\circ,\quad k\in\mathbb{Z}\right\}$$

4. 原方程是关于 $\cos x$ 的二次方程，解这个方程，得

$$\cos x=2+\sqrt{2},\qquad \cos x=2-\sqrt{2}$$

因为 $2+\sqrt{2}>1$, 所以 $\cos x=2+\sqrt{2}$ 无解；从 $\cos x=2-\sqrt{2}$, 可以解得：$x=\pm 54^\circ 9'+k\cdot 360^\circ$, $(k\in\mathbb{Z})$.

所以原方程的解集是 $\left\{x\middle|x=\pm 54^\circ 9'+k\cdot 360^\circ,\quad k\in\mathbb{Z}\right\}$

例 1.46 解方程 $2\sin^2 x+3\cos x=0$.

分析: 利用三角公式, 可以化为只含同一个未知数的同名函数的三角方程求解.

解: 原方程化为 $2(1-\cos^2 x)+3\cos x=0$，即

$$2\cos^2 x+3\cos x-2=0$$

解这个关于 $\cos x$ 的二次方程，得

- $\cos x=2$，它的解集为 $\emptyset$;
- $\cos x=-\dfrac{1}{2},\quad x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi,\quad (k\in\mathbb{Z})$

所以原方程的解集是 $\left\{x\middle|x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\right\}$.

例 1.47 解方程 $\sin^2 x-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin x\cdot\cos x-\cos^2 x=0$.

分析: 方程的每一项中, 关于 $\sin x$ 与 $\cos x$ 的次数都相同 (这里都是二次), 我们叫做关于 $\sin x$ 与 $\cos x$ 的齐次方程, 这种特点的方程可直接观察知道 $\cos x=0$ 的 x 值，不会是方程的解、因此，这类方程可以两边同除以 $\cos x$ 的某次幂而不会使方程增根或丢根的，这样就可以归结为含有未知数正切函数的方程求解了.

解: 原方程两边同除以 $\cos^2 x$ 得：$\tan^2 x-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\tan x-1=0$

解这个关于 $\tan x$ 的二次方程，得

- $\tan x=\sqrt{3},\qquad x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi,\quad (k\in\mathbb{Z})$
- $\tan x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\qquad x=-\dfrac{\pi}{6}+k\pi,\quad (k\in\mathbb{Z})$

所以原方程的解集是

$$\left\{x\middle|x=\frac{\pi}{3}+k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{x\middle|x=-\frac{\pi}{6}+k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\right\}$$

例 1.48　解方程 $\sin x=2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)$

解： 由和角公式

$$\sin x=2\left(\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos x-\cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin x\right)=\sqrt{3}\cos x-\sin x$$

所以 $2\sin x=\sqrt{3}\cos x$，两边同除以 $2\cos x$，得

$$\tan x=\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0.8660$$

查表可得：$x=40°54'+k\cdot 180°\quad (k\in\mathbb{Z})$

所以原方程的解集是 $\left\{x\middle|x=40°54'+k\cdot 180°,\quad k\in\mathbb{Z}\right\}$

例 1.49　解方程 $\sqrt{3}\sin x=\dfrac{6}{\sqrt{3}}\cos^2\dfrac{x}{2}$

解： 利用倍角公式变形

$$2\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}-\frac{6}{\sqrt{3}}\cos^2\frac{x}{2}=0$$

即：$\cos\dfrac{x}{2}\left(\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}\right)=0$

所以，原方程可分解为下面两个方程解

$$\cos\frac{x}{2}=0,\qquad \sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}=0$$

- 若 $\cos\dfrac{x}{2}=0$，则 $\dfrac{x}{2}=\pm\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，所以 $x=\pm\pi+4k\pi,\quad (k\in\mathbb{Z})$
- 若 $\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}=0$，可变形为 $\tan\dfrac{\pi}{2}=1$，则 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$，所以 $x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\quad (k\in\mathbb{Z})$

因此原方程的解集是

$$\left\{x\middle|x=\pm\pi+4k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{x\middle|x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\right\}$$

练习

解下列三角方程:

1. $2\sin\dfrac{2x}{3}=1$, $\quad 3\tan\dfrac{x+20^\circ}{3}=\sqrt{3}$

2. $\sin^2 x-2\sin x-3=0$

3. $4\cos^2 x-4\sin x=1$

4. (a) $2\sin x-5\cos x=0$

   (b) $3\sin^2 x+2\sin x\cos x-5\cos^2 x=0$

5. (a) $\sin\dfrac{x}{2}-\sqrt{3}\cos\dfrac{x}{4}=0$

   (b) $4\cos\dfrac{x}{2}-5\cos x=5$

6. (a) $\cos 3x+\cos 2x=0$

   (b) $6\sin x+8\cos x=5$

习题 1.4

解下列三角方程:

1. $2\cos 2x=1$

2. $\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

3. $2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+45^\circ\right)=1$

4. $\tan 2x-\sqrt{3}=0$

5. $\dfrac{1}{2}\cot(x+25^\circ)-2=0$

6. $2\cos^2 x-3\cos x+1=0$

7. $\sin^2 2x=\sin 2x$

8. $3\sin x-2\cos^2 x=0$

9. $2\sin^2 x=1$

10. $\sin^2 x-7\sin x\cdot\cos x+6\cos^2 x=0$

11. $\sin x\cdot\cos x=\dfrac{1}{4}$

12. $\sin 3x=\sin x$

13. $3\sin^2 x-\sin 2x-\cos^2 x=0$

14. $\sin 2x=\cos 3x$

15. $\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=0$

16. $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=0$

17. $5\cos 2x+2\sin 2x=0$

18. $\cos^2 x-3\sin^2 2x=0$

19. $\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}=1$

20. $4\sin x+3\cos x=3$

本章内容要点

一、本章内容主要包括两角和、差、倍、半的三角函数公式，以及三角函数的和差化积、积化和差的公式．这些公式的推导和变化，在数学和其它工程技术中都有广泛应用，要熟练地掌握．

二、掌握这些公式，主要应以两角和（差）的余弦公式为基础，掌握和理解这些公式之间的内在联系和推导线索（见附表所列），这样可以帮助记忆．

三、除附表中所列主要公式外，还有

1. 万能公式——用 $\tan\dfrac{\alpha}{2}$ 的有理式表示 α 角的任何三角函数．即

$$\sin\alpha=\frac{2\tan\dfrac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\alpha}{2}},\quad \cos\alpha=\frac{1-\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\alpha}{2}},\quad \tan\alpha=\frac{2\tan\dfrac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}$$

2. $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(x+\theta)$

   其中，辅助角 θ 由 a、b 的符号确定象限，由 $\tan\theta=\dfrac{a}{b}$ 确定数值．

四、应用这些公式时，必须注意：凡使公式中某式子没有意义的角，都不适合公式；必须另加讨论．在使用半角公式时，必须考察半角所在的象限，从而确定公式中根号前的符号．

五、本章还包括了简单三角方程及其解法的内容，主要是应用三角公式和代数方法解一些特殊类型的三角方程．其中有

1. 最简单的三角方程

   - $\sin x=a$, $\cos x=a$, 当 $|a|\le 1$ 时有解；
   - $\tan x=a$, $\cot x=a$, a 为任意实数都有解．

2. 简单三角方程，其中包括只含有一个未知数的同名三角函数，关于 $\sin x$ 及 $\cos x$ 是齐次式、可变形为因式乘积的等特殊类型，一般都用解代数方程的方法，归结为解最简单的三角方程来求解．

复习题一

1. 求值：

   (a) 已知 $\cos 2\alpha=\dfrac{3}{5}$，求 $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha$ 的值．

(b) 已知 $\tan x = \dfrac{7}{24}$，求 $\cos 2x, \cot\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ 的值.

(c) 已知 $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{2}{3}$，求 $\sin 2\theta$ 的值.

(d) 已知 $\sin\phi \cdot \cos\phi = \dfrac{60}{169}$，且 $\dfrac{\pi}{4} < \phi < \dfrac{\pi}{2}$，求 $\sin\phi$.

(e) 已知 $\sin\alpha - \cos\alpha = m$，求 $\sin 2\alpha$ 的值.

2. 在 $\triangle ABC$ 中

(a) 如果 $\cos A = \dfrac{15}{17}, \cos B = \dfrac{9}{41}$，求 $\cos C$；

(b) 如果 $\tan A = 2, \tan B = 3$，求 $\tan C$；

(c) 如果 $\sin A = \dfrac{3}{5}, \cos B = \dfrac{5}{13}$，求 $\cos C$；

(d) 如果 $\sin A = \dfrac{4}{5}, \cos B = \dfrac{12}{13}$，求 $\sin C$.

3. (a) 等腰三角形底角的正弦为 $\dfrac{13}{5}$，求顶角的正弦、余弦和正切；

(b) 等腰三角形顶角的余弦为 $\dfrac{7}{25}$，求底角的正弦；

(c) 等腰三角形中，腰为底的 2 倍，求顶角的正弦、余弦.

4. 证明下列各恒等式

(a) $\cos^4 A - \sin^4 A + 1 = 2\cos^2 A$

(b) $(\sin A + \cos A) \cdot (1 - \sin A \cos A) = \sin^3 A + \cos^3 A$

(c) $\dfrac{1 - \tan A}{1 + \tan A} = \dfrac{\cot A - 1}{\cot A + 1}$

(d) $\dfrac{\cos A}{1 - \tan A} + \dfrac{\sin A}{1 - \cot A} = \sin A + \cos A$

(e) $\dfrac{\cot A \cos A}{\cot A + \cos A} = \dfrac{\cot A - \cos A}{\cot A \cos A}$

(f) $\dfrac{1 + 2\sin A \cos A}{\sin^2 A - \cos^2 A} = \dfrac{\tan A + 1}{\tan A - 1}$

(g) $\dfrac{\cos A + \cos B}{\sin A - \sin B} + \dfrac{\sin A + \sin B}{\cos A - \cos B} = 0$

(h) $\cot^2 A - \cot^2 B = \dfrac{\sin^2 B - \sin^2 A}{\sin^2 A \sin^2 B}$

5. 求证:

(a) $2\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin(\pi - \alpha) = \sin 2\alpha$

(b) $\left(\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}\right)^2=1-\sin A$

(c) $\cot\alpha-\tan\alpha=2\cot 2\alpha$

(d) $\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=2\tan 2x$

(e) $1+\sin\alpha=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$

6. 把下列各式化为乘积的形式：

(a) $1+\sin 2A$

(b) $\frac{1}{2}-\cos x$

(c) $\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$

(d) $\sin\alpha-\cos\beta$

(e) $\sin^2\alpha-\sin 2\beta$

(f) $\cos^2\alpha-\cos^2\beta$

(g) $\sin\alpha-\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)$

(h) $1+\cos\theta+\cos\frac{\theta}{2}$

(i) $\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 3\theta$

(j) $1-\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha-\sin^2\beta-\cos^4\alpha$

7. (a) 当 α 是多少度时，方程 $2x^2+2\sqrt{2}x+\tan\alpha=0$ 有两个相等的实数根.（$0^\circ\le\alpha\le 360^\circ$）

(b) $x^2-\cos\alpha x+\frac{1}{4}\sin 2\alpha=0$, $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ 为关于 x 的二次方程，当 α 为何值时，方程有两个相等的实数根，它的根是什么？

8. 若方程 $5x^2-10x\cos\alpha+7\cos\alpha+6=0$ 的两根相等，试求两邻边之和为 6, 且夹角为 α 的平行四边形的最大面积.

9. 已知 A、B 是一个直角三角形的两个锐角，而且 $\sin A$ 和 $\sin B$ 是方程 $4x^2+kx+\sqrt{3}=0$ 的两个根，求 A、B 和 k 的值.

10. $\triangle ABC$ 的三个内角分别是 α、β、γ, 而 $\tan\alpha$、$\tan\beta$ 是方程 $x^2-5x+6=0$ 的两个根，求 γ.

11. 确定 x 为何值时下列等式有意义

$$\sin x=\sqrt{1-\cos^2 x},\qquad \cot\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1-\cos x}$$

12. 已知 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，求证 $\sin\alpha+\cos\alpha>1$.

13. 已知 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$，
问 $\sin(\alpha+\beta)$ 和 $\sin\alpha+\sin\beta$ 哪个大？

14. 证明下列恒等式:

(a) $\tan 20^\circ + \tan 40^\circ + \sqrt{3}\tan 20^\circ \cdot \tan 40^\circ = \sqrt{3}$

(b) $\dfrac{\sin(2x+y)}{\sin x} - 2\cos(x+y) = \dfrac{\sin y}{\sin x}$

(c) $\sec\theta = \sqrt{\dfrac{\sec^4\theta - \tan^4\theta}{2\sin^2\theta + \cos^2\theta}}, \quad \left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$

(d) $\dfrac{3 - 4\cos 2A + \cos 4A}{3 + 4\cos 2A + \cos 4A} = \tan^4 A$

(e) $\dfrac{1 + \cos A + \cos 2A + \cos 3A}{2\cos^2 A + \cos A - 1} = 2\cos A$

(f) $\tan 3\theta - \tan 2\theta - \tan\theta = \tan 3\theta \cdot \tan 2\theta \cdot \tan\theta$

(g) $\sin x + \sin y + \sin z - \sin(x+y+z) = 4\sin\dfrac{x+y}{2} \cdot \sin\dfrac{y+z}{2} \cdot \sin\dfrac{z+x}{2}$

(h) $\cos x + \cos y + \cos z + \cos(x+y+z) = 4\cos\dfrac{x+y}{2} \cdot \cos\dfrac{y+z}{2} \cdot \cos\dfrac{z+x}{2}$

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 求证:

(a) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$

(b) $\dfrac{\cos A}{\sin B \cdot \sin C} + \dfrac{\cos B}{\sin A \cdot \sin C} + \dfrac{\cos C}{\sin A \cdot \sin B} = 2$

(c) $\dfrac{\cos 2A}{a^2} - \dfrac{\cos 2B}{b^2} = \dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2}$

(d) $(a^2 - b^2 - c^2)\tan A + (a^2 - b^2 + c^2)\tan B = 0$

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 证明:

(a) 若 $\sin A = 2\cos B \cdot \sin C$，则 $\triangle ABC$ 为等腰三角形;

(b) 若 $a^2 = b(b+c)$，则 $A = 2B$;

(c) 若 $\lg\sin A - \lg\cos B - \lg\sin C = \lg 2$，则 $\triangle ABC$ 是等腰三角形;

(d) 若 $\sin C = \dfrac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B}$，则 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

17. 求下列函数的周期:

(a) $y = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$

(b) $y = 2\cos^2\alpha - 1$

(c) $y = 4\cos 2\theta \sin^2\theta$

(d) $y = \sqrt{3}\sin 2\theta - \cos 2\theta$

18. 求函数 $x = \tan\theta + \cot\theta$ 的极值，并求 θ 为何值时达到这个极值.

19. 求下列函数的最大值与最小值

(a) $y = \sin 3x \cdot \cos 3x$

(b) $y = \sin(x - 30^\circ)\cos x$

(c) $y = \sin x - \sqrt{3}\cos x$

(d) $y = \sin x + \cos x$

(e) $y = a\sin x + b$

(f) $y = \cos^4 x - \sin^4 x$

20. 求函数 $y = 3\cos 2x + 3\sqrt{3}\sin 2x - 1$ 的振幅、周期、极大值和极小值.

21. 解下列三角方程:

(a) $4\sin^2 x + (2\sqrt{3} - 2)\cos x - (4 - \sqrt{3}) = 0$

(b) $\sec^2 x = 1 + \tan x$

(c) $\cos 2x + \sin 3x = 0$

(d) $\cos 3x + 2\cos x = 0$

(e) $\tan 3x = \tan 4x$

(f) $\dfrac{\sin 2x}{\cos x} = \dfrac{\cos 2x}{\sin x}$

(g) $5\cos x + 12\sin x = 13$

(h) $\sin 6x \cdot \cos x = \sin 4x \cdot \cos 3x$

(i) $\sin x \cdot \sin 7x = \sin 3x \cdot \sin 5x$

(j) $\sin 5x - \sin 3x = \sqrt{2}\cos 4x$

22. 求证:

(a) 方程 $\sin^2 x = \sin^2 \alpha$ 的解集是 $\{x | x = \pm\alpha + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$;

(b) 方程 $\tan^2 x = \tan^2 \alpha$ 的解集是 $\{x | x = \pm\alpha + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

第二章　线性方程组

在初中我们已经学习了二元一次，三元一次及一些四元一次方程组的概念与解法. 一次方程也叫做线性方程，一次方程组也叫做线性方程组，它是代数学中最基本、应用最广泛的内容之一. 本章将进一步研究线性方程组的消元法解的程序，引进行列式及其性质，并应用行列式理论对线性方程的求解作一般性的讨论，从而对线性方程组的理论有较系统、完整的了解.

第一节　高斯消元法

我们已经知道，解线性方程组的基本思想是消元，而且已经掌握了代入消元法和加减消元法. 但这两种消元法在应用中所采取的具体步骤和顺序，往往因人而异、因题而异，尤其是在解未知数较多的线性方程组时，计算程序很麻烦，消元的顺序又不只一个途径. 这就启示我们，对于任一个线性方程组，如果能有比较统一的消元程序，在解的过程中就可以充分运用现代的电子计算机，提高解题效率，也便于人们在应用中掌握. 因而就有高斯消元法.

一、高斯消元法

高斯消元法实质上也是加减消元法，只是具有明确清晰的计算程序、统一的规格，便于掌握，便于使用电子计算机.

我们先从熟悉的例子分析起.

例 2.1　解方程组

$$\begin{cases} 3x+5y=11 & (2.1) \\ 4x-3y=5 & (2.2) \end{cases}$$

解： $(2.1)\times\dfrac{1}{3}$ 得

$$\begin{cases} x+\dfrac{5}{3}y=\dfrac{11}{3} & (2.3)\\ 4x-3y=5 & (2.2)\end{cases}$$

$(2.2)-(2.3)\times 4$ 得

$$\begin{cases} x+\dfrac{5}{3}y=\dfrac{11}{3} & (2.3)\\ -\dfrac{29}{3}y=-\dfrac{29}{3} & (2.4)\end{cases}$$

$(2.4)\times\left(-\dfrac{3}{29}\right)$ 得

$$\begin{cases} x+\dfrac{5}{3}y=\dfrac{11}{3} & (2.3)\\ y=1 & (2.5)\end{cases}$$

(2.5) 代入 (2.3) 得：$\begin{cases} x=2\\ y=1\end{cases}$ 所以原方程组的解集为 $\{(x,y)\}=\{(2,1)\}$.

例 2.2 解方程组

$$\begin{cases} 3x+y-5z=18 & (2.6)\\ x-3y+2z=3 & (2.7)\\ 5x-11y-8z=-13 & (2.8)\end{cases}$$

解： 先将 (2.6)、(2.7) 互换，得

$$\begin{cases} x-3y+2z=3 & (2.7)\\ 3x+y-5z=18 & (2.6)\\ 5x-11y-8z=-13 & (2.8)\end{cases}$$

$(2.6)-(2.7)\times 3$ 且 $(2.8)-(2.7)\times 5$，得

$$\begin{cases} x-3y+2z=3 & (2.7)\\ 16y-11z=10 & (2.9)\\ 4y-18z=-28 & (2.10)\end{cases}$$

$(2.10)\times\dfrac{1}{4}$ 后，再与 (2.9) 互换，得

$$\begin{cases} x-3y+2z=3 & (2.7)\\ y-\dfrac{9}{2}z=-7 & (2.11)\\ 16y-11z=10 & (2.9)\end{cases}$$

$(2.9)-(2.11)\times 16$ 后，再乘以 $\dfrac{1}{61}$，得

$$\begin{cases} x-3y+2z=3 & (2.7) \\ y-\dfrac{9}{2}z=-7 & (2.11) \\ z=2 & (2.12) \end{cases}$$

(2.12) 代入 (2.11)，再代入 (2.7)，整理可得：

$$\begin{cases} x=5 \\ y=2 \\ z=2 \end{cases}$$

所以原方程组的解集为 $\{(x,y,z)\}=\{(5,2,2)\}$.

通过以上两例可以知道，解线性方程组的消元法是可按一定顺序进行的.

第一步：将 x 的系数较小的方程换到第一个，并将 x 的系数化为 1, 消去后几个方程中的 x; 再把第二个方程中 y 的系数化为 1, 消去它后边几个方程中的 y;⋯⋯直到最后一个方程中最后一个未知数的系数化为 1.

第二步：将最后一个未知数的值，分别回过头代入前边各方程中去，逐步可以得出方程组的解.

以三元线性方程组为例，上面两步消元求解的过程就是：

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases} \overset{\text{第一步}}{\Longrightarrow} \begin{cases} x+b_1'y+c_1'z=d_1' \\ \qquad\quad y+c_2'z=d_2' \\ \qquad\qquad\quad z=d_3' \end{cases} \overset{\text{第二步}}{\Longrightarrow} \begin{cases} x=d_1'' \\ y=d_2'' \\ z=d_3' \end{cases}$$

在这一过程中，就是反复将方程组施行了三种基本变换：

1. 互换两个方程的位置；

2. 用一个非零常数乘以一个方程两边；

3. 用一个非零常数乘以一个方程后，加到另一个方程上.

必须指出，变换方程组是为了消元求解，因此，变换前后的方程组应该有相同的解集 (这时我们就说这两个方程组是同解的). 那么，上述三种基本变换是否能保证方程组的同解性呢？我们肯定：经过上述三种基本变换，方程组的解集保持不变 (同解的).

对于变换 1、2, 结论显然是正确的；以下以三元一次方程组为例来证明对于变换 3, 结论是正确的，我们证明方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases} \tag{2.13}$$

与

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ (a_2+ka_1)x+(b_2+kb_1)y+(c_2+kc_1)z=d_2+kd_1 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases} \tag{2.14}$$

是同解的.

证明： 设 (α,β,γ) 是 (2.13) 的任一个解，则应有：

$$\begin{cases} a_1\alpha+b_1\beta+c_1\gamma=d_1 \\ a_2\alpha+b_2\beta+c_2\gamma=d_2 \\ a_3\alpha+b_3\beta+c_3\gamma=d_3 \end{cases}$$

把第一个等式的 k 倍加到第二等式上，得

$$\begin{cases} a_1\alpha+b_1\beta+c_1\gamma=d_1 \\ (a_2+ka_1)\alpha+(b_2+kb_1)\beta+(c_2+kc_1)\gamma=d_2+kd_1 \\ a_3\alpha+b_3\beta+c_3\gamma=d_3 \end{cases}$$

这说明 (α,β,γ) 也是 (2.14) 的一个解. 用类似的方法可以证明，方程组 (2.14) 的任一个解也是方程组 (2.13) 的解，因此 (2.13) 与 (2.14) 是同解的.

注意，我们讨论的只是一般情形的消元过程，还有一些特殊的情形，我们将在以后系统讨论分析. 这些特殊的情形在解题中都有可能出现，需要我们灵活处理.

例 2.3 解方程组

$$\begin{cases} 3y+2z=5 \\ -x+2y-3z=2 \\ x+4y+7z=0 \end{cases}$$

解： 运用例 2.1、例 2.2 相同的高斯消元法，逐步将原方程组施以三种基本变换，可得

$$\text{原方程组} \Rightarrow \begin{cases} x+4y+7z=0 \\ -x+2y-3z=2 \\ 3y+2z=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+4y+7z=0 \\ 6y+4z=2 \\ 3y+2z=5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+4y+7z=0 \\ y+\dfrac{2}{3}z=\dfrac{1}{3} \\ 3y+2z=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+4y+7z=0 \\ y+\dfrac{2}{3}z=\dfrac{1}{3} \\ 0z=4 \end{cases}$$

到此就会发现，方程 $0\cdot z=4$ 无解，亦无法回代其余方程，因此，原方程组无解，或说原方程组的解集为空集 $\emptyset$.

例 2.4 解方程组

$$\begin{cases} 3y+2z=1 \\ -x+2y-3z=2 \\ x+4y+7z=0 \end{cases}$$

解：

$$\text{原方程组} \Rightarrow \begin{cases} x+4y+7z=0 \\ -x+2y-3z=2 \\ 3y+2z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+4y+7z=0 \\ 6y+4z=1 \\ 3y+2z=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+4y+7z=0 \\ y+\dfrac{2}{3}z=\dfrac{1}{3} \\ 3y+2z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+4y+7z=0 \\ y+\dfrac{2}{3}z=\dfrac{1}{3} \\ 0\cdot z=0 \end{cases}$$

至此可知，方程 $0\cdot z=0$ 有无限多个解（z 可取任意实数），设 $z=t$, 回代各方程中，可以得出

$$\begin{cases} x=-\dfrac{4}{3}-\dfrac{13}{3}t \\ y=\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{3}t \\ z=t \end{cases}$$

所以原方程组有无限多个解，其解集为

$$\{(x,y,z)\}=\left\{\left(-\frac{4}{3}-\frac{13}{3}t,\ \frac{1}{3}-\frac{2}{3}t,\ t\right)\right\},\quad t\text{为任意数}$$

练习

用高斯消元法解下列线性方程组

1. $\begin{cases} 5x - 2y = 8 \\ -7x + 10y = 4 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 8 \\ 5x - y - 8z = -21 \\ 3x + 5y - 7z = -8 \end{cases}$

3. $\begin{cases} y + 2z = 4 \\ x - 3y = -8 \\ 4x - 5z = 7 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 7x - y + 2z = 1 \\ 5y - 3z = 0 \\ 14x - 2y + 4z = 1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x - 7y = 2 \\ y - z = 1 \\ 12x - 28y = 8 \end{cases}$

二、一般二元一次方程组解的公式讨论

利用高斯消元法，我们对一般的二元一次方程组

$$\text{(I)}\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & (2.15) \\ a_2x + b_2y = c_2 & (2.16) \end{cases}$$

求解，并讨论它的各种情形.

在方程组 (I) 中，我们假定 a_1 与 b_1，a_2 与 b_2，a_1 与 a_2，b_1 与 b_2 分别不同时为零，因为，如若不然，不论上述哪一种情形发生，方程组的解将是容易讨论的，同学们不妨试着自行讨论一下.

在这个假定下，利用高斯消元法（假定 $a_1 \neq 0$），可得

$$\begin{cases} x + \dfrac{b_1}{a_1}y = \dfrac{c_1}{a_1} & (2.17) \\ \dfrac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1}y = \dfrac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1} & (2.18) \end{cases}$$

再将 (2.18) 变形后，可得

$$\begin{cases} x + \dfrac{b_1}{a_1}y = \dfrac{c_1}{a_1} & (2.17) \\ (a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1 & (2.19) \end{cases}$$

由方程出发，可分别讨论如下：

1. 当 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ 时，由 (2.19) 并代入 (2.17) 可以得出方程组 (I) 唯一的一个解

$$\begin{cases} x=\dfrac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1} \\ y=\dfrac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1} \end{cases}$$

这就是原方程组的解的公式.

2. 当 $a_1b_2-a_2b_1=0$ 时，由 (2.19) 又可以分为两种情形讨论：

   (a) 若 $a_1c_2-a_2c_1\neq 0$，方程 (2.19) 变为一个矛盾方程，共解集是空集，因而原方程组也就无解，其解集仍是空集.

   (b) 若 $a_1c_2-a_2c_1=0$, 则方程 (2.19) 变为：$0y=0$, y 可取任意实数 t, 代入 (2.17) 得：

$$x=\frac{c_1}{a_1}-\frac{b_1}{a_1}t$$

   这时方程组 (I) 有无限多解，解集为

$$\{(x,y)\}=\left\{\left(\frac{c_1-b_1t}{a_1}\right),\quad t\text{ 为任意实数}\right\}$$

定理

方程组 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ 其中 a_1 与 b_1, a_2 与 b_2, b_1 与 b_2 分别不同时为零.

1. 当 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$，它有唯一解；

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1},\qquad y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

2. 当 $a_1b_2-a_2b_1=0$，且 $a_1c_2-a_2c_1\neq 0$（或 $c_1b_2-c_1b_1\neq 0$），它无解；

3. 当 $a_1b_2-a_2b_1=0$，且 $a_1c_2-a_2c_1=0$，$c_1b_2-c_1b_1=0$，它有无限多个解.

例 2.5 讨论方程组

$$\begin{cases} (a-b)x+(a+b)y=2(a^2-b^2) \\ (a+b)x+(a-b)y=2(a^2+b^2) \end{cases}$$

的解的情况.

解： 设

$$a_1 = a - b, \quad b_1 = a + b, \quad c_1 = 2(a^2 - b^2)$$

$$a_2 = a + b, \quad b_2 = a - b, \quad c_2 = 2(a^2 + b^2)$$

则

$$a_1b_2 - a_2b_1 = -4ab,\ a_1c_2 - a_2c_1 = -4ab(a-b),\ b_2c_1 - b_1c_2 = -4ab(a+b)$$

所以

1. 若 $a \neq 0$ 且 $b \neq 0$, 则方程组有唯一解:

$$x = a + b, \qquad y = a - b$$

2. 若 $a = 0$ 或 $b = 0$, 则方程组有无限多个解.

   (a) 在 $a = 0, b \neq 0$ 时，方程组的解集为:

   $$\{(x, y)\} = \{(2b + t, t) | t \text{ 为任意数}\}$$

   (b) 在 $a = 0, b = 0$ 时，方程组解集为

   $$\{(x, y)\} = \{(2a - t, t) | t \text{ 为任意数}\}$$

3. 若 $a = b = 0$, 则原方程组成为:

$$\begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$$

显然两个方程组都是恒等式，x, y 都可取任何数，因此方程组的解集是:

$$\{(x, y)\} = \{(s, t) | s, t \text{ 为任意数}\}$$

注意：本题不存在无解的情况.

例 2.6 有一个三位数，已知其十位数字等于其个位数字与百位数字之和，其个位数字与十位数字之和为 a, 如果把三个数字的顺序倒过来，则所得新的三位数比原三位数大 99. 求原三位数，并问参数 a 可取哪些值?

解： 设原三位数的个位字为 x, 百位数字为 y, 由题目可知十位数字就是 $a-x$. (其中 x, y 都是 $1, 2, \ldots, 9$ 这几个数字之一； $a-x$ 是 $0, 1, \ldots, 9$ 这十个数字之一). 显然，$3 \le a \le 18$. 依题意有：

$$\begin{cases} x+y=a-x \\ 100x+10(a-x)+y=100y+10(a-x)+x+99 \end{cases}$$

将上述方程组变换为：

$$\begin{cases} 2x+y=a \\ x-y=1 \end{cases}$$

由消元法可得出：$\begin{cases} x=\dfrac{1}{3}(a+1) \\ y=x-1 \end{cases}$ 由上面这两个等式，不难断定：$a+1$ 须是 3 的倍数. 所以，a 只可能取 $5, 8, 11, 14, 17$ 之中的一个值，直接计算可得：

- $a=5$ 时，则 $x=2$, $y=1$, $a-x=8$, 可得出所求三位数为 232;
- $a=8$ 时，则 $x=3$, $y=2$, $a-x=5$, 可得出所求三位数为 253;
- $a=11$ 时，则 $x=4$, $y=8$, $a-x=7$, 可得出所求三位数为 374;
- $a=14$ 时，则 $x=5$, $y=4$, $a-x=9$, 可得出所求三位数为 495,
- $a=17$ 时，虽可求出 $x=6$, $y=5$, 但 $a-x=11$ 已不符合题意，因此，这种情形不可能出现.

所以，参数 a 分别取值 5, 8, 11, 与 14, 相应的三位数为：132, 253, 374, 495.

练习

试判别和讨论下列线性方程组的解的情形.

1. $\begin{cases} 3x-5y=20 \\ 6x-10y=15 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x-y=8 \\ 2x+ay=7 \end{cases}$

3. $\begin{cases} mx+y=m+1 \\ x+my=2m \end{cases}$

习题 2.1

1. 用高斯消元法解下列方程组:

(a) $\begin{cases} 2x+8y-5z=3 \\ x-2y+z=0 \\ x+y+3z=7 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x+y+2z=4 \\ 2x-y+3z=4 \\ x+y+2z=3 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x+2y-8z=5 \\ 8x-2y+z=4 \\ -3x-6y+9z=15 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x+2y-3z=5 \\ -2x-4y+6z=-10 \\ \dfrac{1}{2}x+y-\dfrac{3}{2}z=\dfrac{5}{2} \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x_1+8x_2+5x_3+7x_4=12 \\ 8x_1+5x_2+7x_3+x_4=0 \\ 5x_1+7x_2+x_3+3x_4=4 \\ 7x_1+x_2+3x_3+5x_4=16 \end{cases}$

2. 讨论下列各方程组的解的情况:

(a) $\begin{cases} x+y=12 \\ x+ay=4 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 6x-5y=25 \\ 4x+ay=b \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x=by \\ px=qy \end{cases}$

(d) $\begin{cases} ax+by=a^2+2a+b^2 \\ bx+ay=a^2+2b+b^2 \end{cases}$

3. 一个两位数的两数字之和为 a, 若颠倒这两个数字的顺序，所得新的两位数比原数小 36, 问 a 可能取那些值? 原来的两位数是什么?

4. 试判断 m 取何值时，下列方程组有唯一解:

(a) $\begin{cases} (m-1)x-(m+1)y=m+1 \\ m^2x-(m+1)y=m-1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x-(m^2-5)y=-1 \\ (m+1)x-(m+1)^2y=1 \end{cases}$

5. 高斯消元法对方程组的三种基本变换中，若把变换改为“用任一个常数乘一个方程.” 删去“非零”二字行吗? 为什么? 举例说明.

第二节 二阶行列式与二元线性方程组

本节我们将从二元线性方程组的解的公式入手，引进二阶行列式的概念，从而学习二元线性方程组的行列式解法，并应用行列式讨论它的解的各种情形.

一、二阶行列式

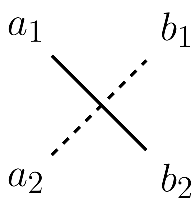
一般的二元线性方程组

$$
(\mathrm{I})\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 & (2.20)\\ a_2x+b_2y=c_2 & (2.21)\end{cases}
$$

当 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ 时，有唯一解，即

$$
\begin{cases} x=\dfrac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}\\ y=\dfrac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}\end{cases} \tag{2.22}
$$

分析公式 (2.22) 可以看出，两个分母都是 $a_1b_2-a_2b_1$, 其中只含有未知数的系数. 如果把方程组 (I) 中未知数的系数分离出来，按照它们原有的位置排列成一个正方形，即



那么可以看到 $a_1b_2-a_2b_1$ 是这样两项的和：一项是正方形中实线所示的对角线（称为主对角线）上两个数的积，取正号；另一项是正方形中虚线所示的对角线（称为副对角线）上两个数的积，取负号.

为了便于记忆，我们将排正方形的四个数的两侧各加一条竖直线，表示成

$$
\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}
$$

并规定这个符号就是 $a_1b_2-a_2b_1$ 即：

$$
\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1 \tag{2.23}
$$

这时，(2.23) 式的左边，就叫做二阶行列式；而 (2.23) 式的右边就是二阶行列式的展开式.

二阶列行式中，四个数称为它的元素；四个元素排成两横排（称为行）两竖排（称为列），因而二阶行列共有二行二列.

所以，二阶行列式是一个值，它可按照 (2.23) 用对角线法则展开并计算出来.

例 2.7 展开并计算下列行列式：

1. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -8 \end{vmatrix}$
2. $\begin{vmatrix} 0 & -7 \\ -3 & 10 \end{vmatrix}$
3. $\begin{vmatrix} m+1 & m+2 \\ m & m+1 \end{vmatrix}$
4. $\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix}$

解： 由对角线法则可得，

1. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -8 \end{vmatrix} = 2\times(-8) - 3\times(-5) = -1$

2. $\begin{vmatrix} 0 & -7 \\ -3 & 10 \end{vmatrix} = -21$

3. $\begin{vmatrix} m+1 & m+2 \\ m & m+1 \end{vmatrix} = (m+1)^2 - m(m+2) = 1$

4. $\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} = \sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x$

练习

1. 展开并计算下列行列式的值：

(a) $\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix} \log_a x & \log_a x \\ m & n \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} a & a^2 \\ b & b^2 \end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix} \sin x & \tan x \\ \cos x & \cot x \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} -3 & 21 \\ -1 & 7 \end{vmatrix}$ (g) $\begin{vmatrix} 1-\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 1+\sqrt{2} \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} 6a-b & 2b \\ 3a & b \end{vmatrix}$ (h) $\begin{vmatrix} x-1 & x^3 \\ 1 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$

2. 试试看，你能把下列各式分别用几个二阶行列式表示出来吗?

$$am-bn, \qquad am+bn, \qquad a_1b_2-a_2b_1$$

3. 求证: $\begin{vmatrix} a_1+ka_2 & b_1+kb_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

二、二元线性方程组解的行列式表示及讨论

在二元线性方程组的解的公式中，仔细观察可以发现，两分母，分子都可以很有规律地用行列式表示出来，即

$$a_1b_2-a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$c_1b_2-c_2b_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$a_1c_2-a_2c_1 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

这样，二元线性方程组解的公式就可以表示为:

当 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ 时,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

为简便起见，通常把上述三个二阶行列式分别记为

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \qquad D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \qquad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

其中 D 的元素由方程组的未知数系数按顺序组成，就叫做这个方程组的系数行列式；D_x 的元素由 D 将第一列元素（x 的系数）分别换成相应的常数项组成；D_y 的元素由 D 将第二列元素（y 的系数）分别换成相应的常数项组成.

这样二元线性方程组 (I) 的解的公式，就可简化为：当 $D \neq 0$ 时，

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} \\ y = \dfrac{D_y}{D} \end{cases}$$

即：二元线性方程组 (I) 的解集为

$$\{(x, y)\} = \left\{\left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right)\right\}$$

例 2.8 用行列式法解方程组 $\begin{cases} 11x - 2y + 5 = 0 \\ 8x + 7y + 24 = 0 \end{cases}$

解： 先将所给方程组写为一般形式

$$\begin{cases} 11x - 2y = -5 \\ 8x + 7y = -24 \end{cases}$$

再计算行列式 D, D_x, D_y:

$$D = \begin{vmatrix} 11 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 83 \neq 0, \quad D_x = \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ -24 & 7 \end{vmatrix} = -83, \quad D_y = \begin{vmatrix} 11 & -5 \\ 3 & -24 \end{vmatrix} = -249$$

根据解的公式，得

$$x = \frac{D_x}{D} = -1, \qquad y = \frac{D_y}{D} = -3$$

所以，原方程组的解集为 $\{(x, y)\} = \{(-1, -3)\}$.

在使用行列式方法解二元线性方程组时，如果出现 $D = 0$ 时，解的公式不适用，这时可以仿照前文中对方程组解的讨论，得到以下结论：

- 当 $D = 0$, 且 $D_x \neq 0$(或 $D_y \neq 0$) 时，方程组的解集是空集 $\emptyset$;
- 当 $D = 0$, 且 $D_x = D_y$ 0 时，方程组有无限多个解，它的解集可引进一个参数表示.

注意，我们这里所指的二元线性方程组，限定其中的 a_1 与 a_2，a_1 与 b_1，a_2 与 b_2，b_1 与 b_2 不同时为 0.

例 2.9 用行列式法解下列方程组，并讨论：

$$\begin{cases} mx + y - m - 1 = 0 \\ x + my - 2m = 0 \end{cases}$$

解： 先将原方程化为一般形式：

$$\begin{cases} mx + y = m + 1 \\ x + my = 2m \end{cases}$$

再计算各行列式：

$$D = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1 = (m+1)(m-1)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} m+1 & 1 \\ 2m & m \end{vmatrix} = m(m+1) - 2m = m(m-1)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & m+1 \\ 1 & 2m \end{vmatrix} = 2m^2 - (m+1) = (2m+1)(m-1)$$

所以

- 当 $m \neq -1, m \neq 1$ 时，$D \neq 0$ 方程组有唯一解，它的解集为
$$\{(x, y)\} = \left\{\left(\frac{m}{m+1}, \frac{2m+1}{m+1}\right)\right\}$$
- 当 $m = -1$ 时，$D = 0$, $D_x \neq 0$, 方程组无解，它的解集为 $\emptyset$.

- 当 $m=1$ 时，$D=D_x=D_y=0$ 方程组有无限多个解，这时由于原方程组变为 $\begin{cases} x+y=2 \\ x+y=2 \end{cases}$ 实际上就是 $x+y=2$, 若令 $x=t$, 则 $y=2-t$, 因此，方程组的解集可表示为：

$$\{(x,y)\}=\{(t,2-t)|t \text{ 为任意数}\}$$

注意，在上述参数表示法中，可以有不同的表示法，如若令 $y=a$, 则 $x=2-a$, 解集就应表示为 $\{(x,y)\}=\{(2-a,a)|a \text{ 为任意数}\}$.

练习

1. 用行列式法解下列方程组

   (a) $\begin{cases} x-8y=10 \\ 6x-7y-11=0 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} 14b-6y=-1 \\ 3x+7y-6=0 \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} mx+ny=1 \\ nx+my=-1, \quad (m\neq n) \end{cases}$

   (d) $\begin{cases} x\cos A-y\sin A=\cos B \\ x\sin A+y\cos A=\sin B \end{cases}$

2. 解下列方程组，并讨论

   (a) $\begin{cases} x+(m-1)y=1 \\ (m-1)x+y=2 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} mx+y=1 \\ 4x+my-m=0 \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} kx+(2a-1)y=a^2+2a-1 \\ x+ay=2a \end{cases}$

习题 2.2

1. 计算下列行列式的值

$$\begin{vmatrix} \sqrt{6} & \sqrt{4} \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \log_a b & 4 \\ 3 & \log_b a \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} e^{x+y} & e^x - 1 \\ e^x + 1 & e^{x-y} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\tan^2\alpha & 1 \end{vmatrix}$$

2. 求证：

(a) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 \\ b_1 & a_2 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} ka_1 & \ell a_1 \\ ka_2 & \ell a_2 \end{vmatrix} = 0$

(e) $\begin{vmatrix} a_1 + a' & b_1 + b' \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

3. 用行列式解下列方程组：

(a) $\begin{cases} 13x - 7y - 10 = 0 \\ 19x + 15y - 2 = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \dfrac{7}{m} + \dfrac{9}{n} = 3 \\ \dfrac{17}{m} + \dfrac{7}{n} = 5 \end{cases}$

4. 解下列关于 x, y 的方程组，并讨论.

(a) $\begin{cases} mx + y = 2m + 1 \\ x - my = 2 - m \end{cases}$

(b) $\begin{cases} mx + y = -1 \\ 8mx - my = 2m + 3 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} (a-1)x - (a^2-1)y = 1 \\ (a^2-1)x + (a-1)y = 2 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} kx + y = k + 1 \\ x + ky = 2k \end{cases}$

5. 当 k 为何值时，方程组 $\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ kx + (k-2)y = 3 \end{cases}$ 的解中，x 与 y 的值取异号?

第三节 三阶行列式与三元线性方程组

一、三阶行列式

仿照二阶行列式，我们可以把九个数排成三行三列的正方形，并在两侧各加一竖直线. 如

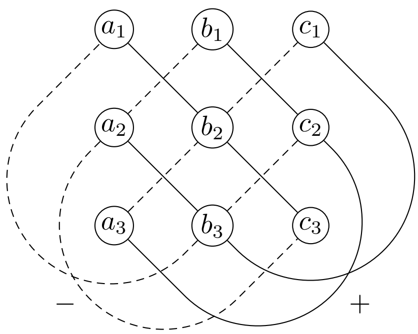
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \tag{2.24}$$

并规定它表示一个数

$$a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2 \tag{2.25}$$

这时我们就把 (2.24) 叫做一个三阶行列式，(2.25) 式就叫做这个三阶行列式的展开式（或这三阶行列式的值.）

三阶行列式共有九个元素，它的值也可以按下图所示的对角线法则计算出来：



实线所连三元素的乘积都取正号，共三项；虚线所连三元素乘积，都取负号，共三项.

例 2.10 用对角线法则计算下列三阶行列式：

1. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & 7 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$

解： 由对角线法则可得：

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot 4\cdot(-1)+2\cdot 0\cdot 5+3\cdot 3\cdot 8-3\cdot 4\cdot 5-2\cdot 3\cdot(-1)-1\cdot 0\cdot 8$$

$$= -4+0+77-60+6-0=14$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & 7 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)\cdot 2+4\cdot 5\cdot 1+(-1)\cdot(-3)\cdot 7-(-1)\cdot(-1)\cdot 1-4\cdot(-3)\cdot 2-2\cdot 5\cdot 7$$

$$= -4+20+21-1+24-70=-10$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} = x^3+y^3+z^3-3xyz$$

练习

1. 计算下列三阶行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ -a & 1 & c \\ -b & -c & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & d & e \\ 0 & b & d \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$$

2. 先计算行列式的值，再比较结果找出各组中两行列式之间的关系：

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} ak & k & 2k \\ 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{vmatrix}$

二、三阶行列式的性质

为了简化行列式的计算，更好地掌握这一工具，我们进一步学习行列式的性质.

定理 1

如果把一个行列式的每一行 (列), 同时改为同号数的列 (行), 那么, 所得的行列式与原行列式的值相等.

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}=\Delta'$$

证明: 由对角线法则知

$$\Delta=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2$$
$$\Delta'=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2$$

所以 $\Delta=\Delta'$

由定理 1 可知: 对于行列式的行成立的性质对于列也一定成立; 反过来, 对于列成立的性质对于行也一定成立, 所以今后关于行列式的性质, 只需对行证明就行了.

定理 2

如果把一个行列式的任意两行（列）对调, 那么, 所得的行列式与原行列式的绝对值相等, 符号相反.

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_2&b_2&c_2\\a_1&b_1&c_1\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=-\Delta'$$

证明: 只要以对调第一、二行为例证明结论, 其它行（列）对调的证明是类似的. 仍由三阶行列式的对角线法则可得

$$\begin{aligned}\Delta&=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2\\&=-(a_2b_1c_3+a_1b_3c_2+a_3b_2c_1-a_3b_1c_2-a_1b_2c_3-a_2b_3c_1)\\&=-\Delta'\end{aligned}$$

所以 $\Delta=-\Delta'$

定理 3

如果一个行列式中，有两行（列）元素完全对应相同，那么，这个行列式的值必须等于零.

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ a_1 & a_2 & a_3\end{vmatrix}=0$$

证明： 只要将行列式中相同的两行（列）对调，则所得行列式仍为 $-\Delta$, 但根据定理 2 又可知，对调后应得 $-\Delta$. 于是就有，

$$\Delta=-\Delta$$

所以可得：$\Delta=0$.

定理 4

如果把一个行列式的某一行（列）的所有元素同乘以任一数 k, 那么，所得行列式的值就等于原行列式值的 k 倍.

$$\Delta'=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ ka_2 & kb_2 & kc_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=k\cdot\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=k\Delta$$

证明： 由对角线法则将它们展开、比较，就可直接证明结论 $\Delta'=k\Delta$ 是正确的.

定理 5

如果在行列式中，某一行（列）各元素有公因子时，则可以把公因子提到行列式的外边.

$$\begin{vmatrix}ka_1 & kb_1 & kc_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=k\cdot\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$$

这定理的证明可由定理 4 直接得出，这里不再重述，但要指出，这个定理

可以使行列式计算简化，在应用中很重要．例如，运用它可这样计算行列式：

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & -1 \\ \frac{5}{2} & \frac{4}{3} & 0 \\ \frac{9}{2} & \frac{7}{3} & 1 \end{vmatrix} = (-1) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ 9 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \left(-\frac{1}{6}\right) \times (-7) = 1\frac{1}{6}$$

定理 6

如果一个行列式中有一行（列）的元素全为零，则这个行列式的值等于零．

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

证明： 由定理 5 与零的运算特性可得

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \cdot a_1 & 0 \cdot b_1 & 0 \cdot c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

定理 7

如果一个行列式中有两行（或两列）的对应元素成比例，则这个行列式等于零．

$$\begin{vmatrix} ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

证明： 由定理 5 及定理 8 可以知道：

$$\begin{vmatrix} ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \cdot 0 = 0$$

定理 8

如果行列式某一行（或一列）的元素都是二项式之和的形式，则这个行列式等于两个行列式之和.

$$\begin{vmatrix} a_1+a_1' & b_1+b_1' & c_1+c_1' \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1' & b_1' & c_1' \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

证明要点：用三阶行列式的对角线法则，将左边的行列式展开，再由乘法对加法的分配律、交换律即可证明其结果与右边两个行列式的和展开后的结果是一样的．同学们可以自证.

定理 9

如果把行列式的某一行（列）所有的元素同乘以同一个数 k 后，加到另一行（列）的对应元素上，则所得行列式与原行列式是相等的.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+a_1k & b_2+b_1k & c_2+c_1k \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

证明： 由定理 8 可得：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+a_1k & b_2+b_1k & c_2+c_1k \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1k & b_1k & c_1k \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

又由定理 7 可知：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1k & b_1k & c_1k \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

所以

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+a_1k & b_2+b_1k & c_2+c_1k \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

有了行列式的这些性质，只要在计算中充分灵活地使用，就会很简捷地得到结果.

例 2.11　计算行列式 $\Delta = \begin{vmatrix} 234 & 3 & 4 \\ 125 & 2 & 5 \\ 476 & 7 & 6 \end{vmatrix}$ 的值.

解： 由定理 8 可知

$$\Delta = \begin{vmatrix} 200 & 3 & 4 \\ 100 & 2 & 5 \\ 400 & 7 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 30 & 3 & 4 \\ 20 & 2 & 5 \\ 70 & 7 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 5 \\ 6 & 7 & 6 \end{vmatrix}$$

又由定理 7 与定理 3 可知，第二个行列式与第三个行列式的值均为零，而由定理 5 可知，第一个行列式的第一列各数的公因数 100 可提到行列式外边，所以，

$$\Delta = 100 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 100 \cdot (-8) = -800$$

例 2.12　计算行列式 $\Delta = \begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ c & c+1 & c+2 \end{vmatrix}$ 的值.

解： 由定理 8 可知

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a & 2 \\ b & b & 2 \\ c & c & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ b & 1 & b \\ c & 1 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ b & 1 & 2 \\ c & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

又由定理 3 可知，前三个行列式的值均为零，而由定理 7 可知，第四个行列式的值也为零．所以，$\Delta = 0$.

例 2.13　利用行列式性质计算：

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 8 & 10 & 9 \\ 6 & -2 & 21 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 10 & -2 & 7 \\ -15 & 3 & 2 \\ -5 & 4 & 9 \end{vmatrix}$$

分析： 计算三阶行列式的值，除按对角线法则展开进行计算外，一般地可以先利用性质定理 5 提取某行（列）的公因子将行列式化简；再利用性质定理 9 将行列式化简为包含较多 0 作为元素的行列式．这样计算方便、简捷.

解:

$$
\begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 8 & 10 & 9 \\ 6 & -2 & 21 \end{vmatrix} = 2 \times 3 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & -1 & 7 \end{vmatrix} \qquad (\text{定理 } 5)
$$

$$
= 2 \times 3 \times \begin{vmatrix} 3 & 1+2 & 2 \\ 7 & 5+3 & 3 \\ 6 & -1+7 & 7 \end{vmatrix} \qquad (\text{定理 } 9)
$$

$$
= 2 \times 3 \times \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 8 & 8 & 3 \\ 6 & 6 & 7 \end{vmatrix}
$$

$$
= 6 \times 0 \qquad (\text{定理 } 3)
$$

$$
= 0
$$

$$
\begin{vmatrix} 10 & -2 & 7 \\ -15 & 3 & 2 \\ -5 & 4 & 9 \end{vmatrix} = -5 \times \begin{vmatrix} -2 & -2 & 7 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} \qquad (\text{定理 } 5)
$$

$$
= -5 \times \begin{vmatrix} -2+(-1)\times(-2) & -2 & 7 \\ 3+(-1)\times 3 & 3 & 2 \\ 1+(-1)\times 4 & 4 & 9 \end{vmatrix} \qquad (\text{定理 } 9)
$$

$$
= -5 \times \begin{vmatrix} 0 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & 2 \\ -3 & 4 & 9 \end{vmatrix} = -5 \times (12+63) = -375
$$

例 2.14　利用行列式性质，求证:

$$
\begin{vmatrix} a+b & c & -a \\ a+c & b & -c \\ b+c & a & -b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & a & c \\ a & c & b \\ c & b & a \end{vmatrix}
$$

证明:

$$\begin{vmatrix} a+b & c & -a \\ a+c & b & -c \\ b+c & a & -b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c & -a \\ a & b & -c \\ c & a & -b \end{vmatrix} \quad (\text{定理 } 9)$$

$$= -\begin{vmatrix} b & c & a \\ a & b & c \\ c & a & b \end{vmatrix} \quad (\text{定理 } 5)$$

$$= \begin{vmatrix} b & a & c \\ a & c & b \\ c & b & a \end{vmatrix} \quad (\text{定理 } 2)$$

所以原等式成立.

练习

1. 利用行列式性质，计算:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 10 & 1 & 11 \\ 7 & 1 & 8 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 3 & 49 & 4 \\ 2 & 28 & 4 \\ 4 & 35 & 8 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 10 & 8 & 2 \\ 15 & 12 & 3 \\ 20 & 32 & 12 \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

(e) $\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 3 \\ 7 & 5 & 4 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{4}{15} \end{vmatrix}$

(f) $\begin{vmatrix} -ac & ab & ad \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$

(g) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}$

(h) $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$

(i) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}$

(j) $\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix}$

2. 利用性质，求证下列行列式等式：

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & q & p+q \\ q & p & 0 \end{vmatrix} = 0$

(b) $\begin{vmatrix} -x+y+z & x-y+z & x-y-z \\ x & y & z \\ -y & -z & -x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & z & x \\ x & y & z \\ z & x & y \end{vmatrix}$

三、余子式与代数余子式

我们已经学习了二、三阶行列式及其性质，这些行列式实质上都是由一些数作为它的元素而排列成的正方形，它们都代表着这些元素进行规定的运算后所得的值，而这些运算又是我们很熟悉的四则运算. 为了进一步讨论行列式的一般性质和它们之间的关系，我们今后对行列式的各个元素都采用双足码表示，如元素 a1s 表示行列式中第一行、第三列的元素，其中第一足码表示元素所在的行数，第二足码表示元素所在的列数. 这样一来，二、三阶行列式可以一般地表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad 与 \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

还可以简记为

$$|a_{ij}| \quad (i=1,2;\ j=1,2)$$

与

$$|a_{ij}| \quad (i=1,2,3;\ j=1,2,3)$$

到底二阶行列式与三阶行列式之间有什么联系呢？我们先引进余子式、代数余子式的概念，然后再作讨论.

定义 1

把一个行列式中某一个元素所在的行和列的所有元素划去以后，将其余元素按它们在原行列式中的顺序排成的低一阶行列式，就叫做原行列式中对应于这一元素的余子式.

例如，在行列式 $\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$ 中，

对应于元素 a_{21} 的余子式是二阶行列式 $\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$

定义 2

行列式中，元素 a_{ij} 的余子式乘以 $(-1)^{i+j}$ 所得的式子，叫做元素 a_{ij} 的代数余子式，并记作 A_{ij}

例如，在行列式 Δ 中，元素 a_{21} 的代数余子式是

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

比较定义 1 与 2 可以发现，某一元素的代数余子式与余子式就差一个符号，这个符号由这一元素所在的行和列数而定：若所在行与列数之和为偶数，取正号；若所在行与列数之和为奇数，取负号．以三阶行列式为例，它的各个元素所对应的代数余子式的符号可由下图表示：

$$\begin{vmatrix}+ & - & +\\ - & + & -\\ + & - & +\end{vmatrix}$$

例 2.15　试写出行列式 $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 5\\ 8 & 9 & 0\\ -2 & 3 & 7\end{vmatrix}$ 中，各元素的代数余子式，并求出值来.

解： 由代数余子式的定义，可知：

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}9 & 0\\ 3 & 7\end{vmatrix}=63$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}8 & 0\\ -2 & 7\end{vmatrix}=-56$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}8 & 9\\ -2 & 3\end{vmatrix}=42$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & 5\\ 3 & 7\end{vmatrix}=1$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 17$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -7$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 9 & 0 \end{vmatrix} = 45$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 40$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -7$$

有了代数余子式的概念，就可以通过下面两个性质定理进一步了解三阶行列式与二阶行列式的联系.

定理 10

行列式等于它的任意一行（列）的所有各元素与它们名自的代数余子式的乘积的和. 这就是说，行列式可以按其中一行（列）的元素展开.

如三阶行列式 $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 可以展开成:

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} \\ &= a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23} \\ &= a_{31} \cdot A_{31} + a_{32} \cdot A_{32} + a_{33} \cdot A_{33} \end{aligned}$$

证明: 我们只证明，$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$，其余证明类同，由对角线法则可知

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{22}) \end{aligned}$$

但是

$$A_{11} = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}, \quad A_{12} = a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}, \quad A_{13} = a_{21}a_{33} - a_{31}a_{22}$$

所以 $\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$

这就启示我们，三阶行列式可以转化为二阶行列式来计算，如果结合前边所学定理 9 的性质，在实际应用中，将显得更具优越性.

例 2.16 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

解:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2+(-2)\cdot 1 & 4+(-2)\cdot 3 & 8+(-2)\cdot 5 \\ 3+(-3)\cdot 1 & 0+(-3)\cdot 3 & -1+(-3)\cdot 5 \end{vmatrix} && \text{(定理 5)} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -9 & -16 \end{vmatrix} \\ &= 1\cdot \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -9 & -16 \end{vmatrix} - 0\cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -9 & -16 \end{vmatrix} + 0\cdot \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} && \text{(定理 10)} \\ &= 32-18=14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 3+(-3)\cdot 1 & 1 & -2+2\times 1 \\ 5+(-3)\cdot(-2) & -2 & 7+2\times(-2) \\ 3+(-3)\cdot 4 & 4 & 2+2\times 4 \end{vmatrix} && \text{(定理 9)} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 11 & -2 & 3 \\ -9 & 4 & 10 \end{vmatrix} \\ &= 0\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} - 1\cdot \begin{vmatrix} 11 & 3 \\ -9 & 10 \end{vmatrix} + 0\cdot \begin{vmatrix} 11 & -2 \\ -9 & 4 \end{vmatrix} && \text{(定理 10)} \\ &= -(110+27)=-137 \end{aligned}$$

定理 11

行列式某一行（列）的所有各元素与另一行（列）对应元素的代数余子式的乘积的和恒等于零.

证明： 我们只证明在三阶行列式中，第一行的各元素与第二行各对应元素的代数余子式的乘积和恒等于零，即

$$a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=0$$

由定理 10 可知，

$$\begin{aligned}a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}&=-a_{11}\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{12}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{13}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\end{aligned}$$

又由定理 3 可知，$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=0$

所以 $a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=0$

综合定理 10、定理 11 的内容，我们可以得到三阶行列式的一个重要等式，这就是

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+a_{i3}A_{k3}=\begin{cases}\Delta & i=k\\0 & i\neq k\end{cases}$$

以及

$$a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+a_{3j}A_{3k}=\begin{cases}\Delta & j=k\\0 & j\neq k\end{cases}$$

这些重要等式，将在三元线性方程组的求解公式中起重要作用.

练习

1. 试应用定理 9、10，计算下列行列式

$$\begin{vmatrix}2&1&8\\5&0&7\\4&-3&-2\end{vmatrix}\qquad\begin{vmatrix}5&0&-5\\3&2&7\\-4&3&9\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -6 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 4 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 6 & 7 \\ -3 & 8 & 8 \\ -5 & 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ x & y & 1 \\ y & 1 & x \end{vmatrix}$$

2. 解下列方程

$$\begin{vmatrix} 2 & x+2 & 6 \\ 1 & x & 3 \\ 1 & 3 & x \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a & a & x \\ 1 & 1 & 1 \\ b & x & b \end{vmatrix} = 0$$

3. 求证下列等式

(a) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$$

(b) $$\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} = (a+2b)(a-b)^2$$

(c) $$\begin{vmatrix} 1 & p & p^3 \\ 1 & q & q^3 \\ 1 & r & r^3 \end{vmatrix} = (p-q)(q-r)(r-p)(p+q+r)$$

四、三元线性方程组的公式解及讨论

三元线性方程组的一般形式可以写成

$$(\mathrm{II})\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 & (2.26) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 & (2.27) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 & (2.28) \end{cases}$$

这时，我们仍称三阶行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

为方程组 (II) 的系数行列式，并把这个行列式中各个元素 a_{ij} 的代数余子式表为 A_{ij}.

利用关于行列式性质的定理 10、定理 11，可以导出方程组 (II) 的解:

分别以 A_{11}、A_{21}、A_{31}、乘以方程 (2.26), (2.27), (2.28), 得

$$\begin{cases} a_{11}A_{11}x_1 + a_{12}A_{11}x_2 + a_{13}A_{11}x_3 = b_1A_{11} \\ a_{21}A_{21}x_1 + a_{22}A_{21}x_2 + a_{23}A_{21}x_3 = b_2A_{21} \\ a_{31}A_{31}x_1 + a_{32}A_{31}x_2 + a_{33}A_{31}x_3 = b_3A_{31} \end{cases}$$

再将三式相加，得

$$\begin{aligned} &(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31})x_1 + (a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{31}A_{32})x_2 \\ &\qquad + (a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31})x_3 \\ &= b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_2A_{31} \end{aligned}$$

显然，这个等式的右边，正好是一个三阶行列式

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

的展开式，而这个行列式就是在 Δ 中以方程组右端的常数代替同一方程中 x_1 的系数而得出的. 在这个等式的左边，由定理 10 及 11 可知:

$$a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} = \Delta$$

$$a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31} = 0$$

$$a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31} = 0$$

从而，上面的等式就可写成: $\Delta \cdot x_1 = \Delta_1$

同理，用 A_{12}, A_{22}, A_{32} 分别乘以第一、二、三个方程，然后相加，并设

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

可得: $\Delta \cdot x_2 = \Delta_2$

用 A_{13}, A_{23}, A_{33} 分别乘以第一、二、三个方程，然后相加，并设

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

可得：$\Delta \cdot x_3 = \Delta_3$

因此，便得到一个新的方程组

$$
\text{(III)} \begin{cases} \Delta \cdot x_1 = \Delta_1 \\ \Delta \cdot x_2 = \Delta_2 \\ \Delta \cdot x_3 = \Delta_3 \end{cases}
$$

方程组 (III) 是由方程组 (II) 的各方程乘以常数后相加而得到的，所以，(II) 的解必能满足 (III).

但方程组 (III) 的解，是否存在？如果存在是否也能是 (II) 的解？我们可对 (III) 分三种情形分别讨论于后：

一、若 $\Delta \neq 0$，则方程组 (III) 有唯一解

$$
\begin{cases} x_1 = \Delta_1/\Delta \\ x_2 = \Delta_2/\Delta \\ x_3 = \Delta_3/\Delta \end{cases} \tag{2.29}
$$

可以证明，(2.29) 也是方程组 (II) 的解；将 (2.29) 代入方程组 (II) 的方程 (2.26)，得

$$
\begin{aligned}
\text{左边} &= a_{11}\frac{\Delta_1}{\Delta} + a_{12}\frac{\Delta_2}{\Delta} + a_{13}\frac{\Delta_3}{\Delta} \\
&= \frac{1}{\Delta}\left(a_{11}\Delta_1 + a_{12}\Delta_2 + a_{13}\Delta_3\right) \\
&= \frac{1}{\Delta}\big[a_{11}(b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_2A_{31}) + a_{12}(b_1A_{12} + b_2A_{22} + b_2A_{32}) \\
&\qquad\quad + a_{13}(b_1A_{13} + b_2A_{23} + b_3A_{33})\big] \\
&= \frac{1}{\Delta}\big[b_1(a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}) + b_2(a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23}) \\
&\qquad\quad + b_3(a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33})\big] \\
&= \frac{1}{\Delta}\big[b_1\Delta + b_2 0 + b_3 0\big] \qquad \text{(定理 10, 11)} \\
&= b_1 = \text{右边}
\end{aligned}
$$

这就是说，满足方程组 (II) 的方程 (2.26); 同理可以证明 (2.29) 也是满足方程组 (II) 的方程 (2.27) 与 (2.28). 因此，(2.29) 是方程组 (II) 的一个解.

综合上述，我们可以得到一个重要结论：如果线性方程组 (II) 的系数行列式 $\Delta \neq 0$, 那么，这个线性方程组有且只有一个解

$$
x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}
$$

其中 Δ_1，Δ_2，Δ_3，是 Δ 中把未知数 x_1, x_2, x_3 的系数列分别换成方程组 (II) 的常数项列所成的行列式．这一结论，对二元线性方程组 (I) 显然也是成立的，实际上，这一结论对 n 元线性方程组都是成立的．一般把这一结论称为**克莱姆法则**．利用这一法则，可以由系数行列式判定方程组是否有唯一解．若有，还可以求出解来．

例 2.17 解方程组

$$\begin{cases} 3x + 7y - 5z = 19 \\ x - 3y + 2z = 3 \\ 5x - 11y - 8z = -13 \end{cases}$$

解：因为

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 7 & -5 \\ 1 & -3 & 2 \\ 5 & -11 & -8 \end{vmatrix} = 244 \neq 0$$

所以方程组有唯一解．由于

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 19 & 7 & -5 \\ 3 & -3 & 2 \\ -13 & -11 & -8 \end{vmatrix} = 1220$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 19 & -5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & -13 & -8 \end{vmatrix} = 488$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 19 \\ 1 & -3 & 3 \\ 5 & -11 & -13 \end{vmatrix} = 488$$

所以方程组的唯一解是

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 5, \qquad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2, \qquad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 2$$

即原方程组的解集为 $\{(x, y, z)\} = \{(5, 2, 2)\}$

二、若 $\Delta = 0$，且 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ 中至少有一个不为零，则方程组 (III) 无解，从而方程组 (II) 也无解．

例 2.18　解方程组

$$\begin{cases} 3x - y + 5z = 16 \\ x + 2y + 3x = 14 \\ 5x + 3y + 11z = 40 \end{cases}$$

解： 因为 $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 11 \end{vmatrix} = 0$，且 $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 16 & -1 & 5 \\ 14 & 2 & 3 \\ 40 & 3 & 11 \end{vmatrix} = 52 \neq 0$

所以原方程组无解，其解集为 $\emptyset$.

三、若 $\Delta = 0$, 且 $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$, 这时方程组 (III) 有无限多个解，但方程组 (II) 的解的情况却还不能确定，它可能无解，也可能有无限多个解.

我们通过以下三个例题来说明：

例 2.19　解方程组

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

解： 在这一方程组中，显然有 $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$（因为这四个行列式中都至少有两列元素相同）；可是，这又是一个矛盾方程组，因而无解.

事实上，由于这个方程组的系数行列式的各个元素的代数余子式 A_{ij} 全等于零，因而，不论原方程组是否有解，用代数余子式相乘各方程后再相加的办法消元，得到方程组

$$\begin{cases} \Delta x = \Delta_1 \\ \Delta y = \Delta_2 \\ \Delta z = \Delta_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0x = 0 \\ 0y = 0 \\ 0z = 0 \end{cases}$$

总是有无限多个解的．但对原方程组的解的情况，却无法判定.

例 2.20　解方程组

$$\begin{cases} 3x - y + 5z = 16 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 5x + 3y + 11z = 44 \end{cases}$$

解： 可以算出 $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$，同时还可看出，方程组中第二个方程两边乘以 2 后与第一个方程组相加正好是第三个方程．这说明原方程组的三个

方程只有两个是独立的．事实上，凡满足第一、二两个方程的解，一定也满足第三个方程．因而，原方程组可以改写成

$$\begin{cases} 3x-y+5z=16 \\ x+2y+3z=14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-y=16-5z \\ x+2y=14-3z \end{cases}$$

把未知数 z 看作参数（可任意取值），令 $z=t$, 进一步解二元线性方程组

$$\begin{cases} 3x-y=16-5t \\ x+2y=14-3t \end{cases}$$

得出：

$$x=\frac{1}{7}(46-13t), \qquad y=\frac{1}{7}(26-4t), \qquad z=t$$

由于 t 的任意性，因而原方程组有无限多个解，其解集可以表为

$$\{(x,y,z)\}=\left\{\left(\frac{46-13t}{7},\frac{26-4t}{7},t\right)\middle|t \text{ 为任意值}\right\}$$

应该指出，这个方程组的解的形式不是唯一的，同样可以将 y 或 x 看作参数，得出另外两种解的表达形式，但实际效果是相同的，即解集是相等的．

例 2.21 解方程组

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+2y+2z=4 \\ 3x+3y+3z=6 \end{cases}$$

解： 因为行列式 Δ 的各元素的代数余子式都等于零，显然有 $\Delta=\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=0$, 由于后两个方程都可直接由第一个方程推出，所以，这个方程组只有一个方程是独立的，事实上，凡是满足第一个方程的任一个解，也满足后两个方程．第一方程可写成 $x=2-y-z$.

令 $y=R$, $z=t$, 就有

$$\begin{cases} x=2-R-t \\ y=R \\ z=t \end{cases}$$

t,R 可取任意值，由于 R,t 的任意性，方程组有无限多个解．

这里的“无限多个解”与例 2.48 的“无限多个解”是有差别的，例 2.48 的解的表达式只含一个参数 t, 这里则含有两个参数 R 和 t.

练习

判断下列方程组解的情况，若有唯一解，应用克莱姆法则求出来；若有无限多个解，用参数形式表示出来：

1. $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 3x+y-2z=0 \\ 7x+6y+7z=100 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x-2y+3z=11 \\ 4x-3y+2z=9 \\ 5y-4y+z=7 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x+3y+4z=2 \\ 3x+5y+7z=-3 \\ x+2y+3z=4 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x-3y+z=6 \\ 2x+y+2z=-2 \\ 4x-5y+6z=10 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x-2y+2z=2 \\ \frac{1}{4}x-\frac{1}{4}y+\frac{1}{4}z=\frac{1}{4} \end{cases}$

6. $\begin{cases} 5x+2y+3z-2=0 \\ 3x-4y+2z-1=0 \\ 19x-7y+11z=7 \end{cases}$

习题 2.3

1. 用对角线法则计算下列行列式：

(a) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 2 & 3 & -6 \\ -7 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} 0 & \cos\alpha & \cos\beta \\ -\cos\alpha & 0 & \cos r \\ -\cos\beta & -\cos r & 0 \end{vmatrix}$

(e) $\begin{vmatrix} a & n & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$

(f) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$

2. 解方程：

(a) $\begin{vmatrix} 0 & x-1 & 1 \\ x-1 & 0 & x-2 \\ 1 & x-2 & 0 \end{vmatrix} = 0$　　(c) $\begin{vmatrix} 2 & x+4 & 5 \\ 1 & x & 0 \\ -7x & 3 & 10 \end{vmatrix} = 0$

(b) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ 1 & x-1 & 1 \\ 1 & 1 & x-1 \end{vmatrix} = 0$　　(d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & a & b \\ x^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix} = 0$

(e) $\begin{vmatrix} x & a & b+c \\ x & a+b & c \\ a+b & b-c & a+c \end{vmatrix} = 0, \qquad b(a+b) \neq 0$

3. 求证:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & \sin 3\theta & \cos 3\theta \\ 1 & \sin 2\theta & \cos 2\theta \\ 2 & \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = 2\sin\theta(1-\cos\theta)$

(b) $\begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix} = \dfrac{\sin 4\theta}{\sin\theta}, \qquad \theta \neq \kappa\pi, k \in \mathbb{Z}$

(c) $\begin{vmatrix} (q+r)^2 & pq & pr \\ pq & (r+p)^2 & qa \\ pr & qr & (p+q)^2 \end{vmatrix} = 2pqr\,(p+qr)^3$

4. 利用行列式的性质，计算:

(a) $\begin{vmatrix} 10 & 8 & -2 \\ 15 & 12 & -3 \\ 25 & 32 & 7 \end{vmatrix}$　　(d) $\begin{vmatrix} -ab & bd & bf \\ ac & -cd & cf \\ ae & de & -ef \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 12 & 24 & 36 \\ -5 & -4 & -3 \end{vmatrix}$　　(e) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & 3a+2b & 4a+3b+2c \\ 3a & 6a+3b & 10a+9b+3c \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 554 & 427 & 327 \\ 586 & 443 & 343 \\ 711 & 504 & 404 \end{vmatrix}$

5. 利用行列式性质, 求证:

(a) $\begin{vmatrix} a & a+3x & a+6y \\ a+x & a+4x & a+7x \\ a+2x & a+5x & a+8x \end{vmatrix} = 0$

(b) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_3 & b_3 & a_3 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ c_1 & b_1 & a_1 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 0 & am & -abn \\ -e & 0 & bn \\ e & -m & 0 \end{vmatrix} = 0$

(d) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x+b_1y+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x+b_2y+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x+b_3y+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

(e) $\begin{vmatrix} 0 & (a-b)^3 & (a-c)^3 \\ (b-a)^3 & 0 & (b-c)^3 \\ (c-a)^3 & (c-b)^3 & 0 \end{vmatrix} = 0$

6. 求证:

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & \cos 3\theta & \sin 3\theta \\ \cos\theta & \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \sin\theta\sin 4\theta$$

7. 试指出下列行列式变形中的错误, 并改正过来:

(a) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+ka_2 & b_1+kb_2 \\ a_2-\ell a_1 & b_2-\ell b_1 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & ka_1+\ell c_1 \\ a_2 & b_2 & ka_2+\ell c_2 \\ a_3 & b_3 & ka_3+\ell c_3 \end{vmatrix}$

8. 证明行列式 Δ 中，第二列元素与第一列对应元素的代数余子式的乘积的和为零.

9. 证明三阶行列式的值与按某一行（列）展开时所选择的行（列）无关.

10. 解下列方程组:

(a) $\begin{cases} 2x+y+3z-4=0 \\ 3x-2y-5z=11 \\ 1-5x+4y+z=0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 4x-y-2z=4 \\ 2x+y-4=8 \\ x+2y+z-1=0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x-y+z=a \\ x+y-z=b \\ -x+y+z=c \end{cases}$

(d) $\begin{cases} bx-ay=-2ab \\ -2cy+3bz=bc \\ cx+az=0 \end{cases}$
$(abc \neq 0)$

11. 当参数 a, b, c 取何值时，下列方程组有唯一解

(a) $\begin{cases} x+y+tz=1 \\ y+z=t \\ x+y+z=t^2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} ay+bz=c \\ cx+az=b \\ bx+cz=a \end{cases}$

12. 当 (1) $\lambda=1$, (2) $\lambda=-2$, (3) $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$ 时, 分别解方程组

$$\begin{cases} x+y+\lambda z=\lambda-3 \\ x+\lambda y+z=-2 \\ \lambda x+y+z=-2 \end{cases}$$

13. 当 a 取何值时，下列方程组有唯一解；无解；有无限多个解?

$$\begin{cases} 3ax+(2a+1)y+(a+1)z=a \\ (2a-1)x+(2a-1)y+(a-2)z=a+1 \\ (4a-1)x+3ay+2az=1. \end{cases}$$

14. (a) 试试看，请你自行设计一个数字系数的三元线性方程组，使它有无限多个解，并且解的表达式含有两个参数.

(b) 改动你设计的方程组的一个数字，使这个方程组无解；

(c) 改动你设计的方程组的另一个数字，使方程组仍有无限多个解，但解的表达式中只含有一个参数.

第四节　四阶行列式与四元线性方程组

我们已经学了二阶、三阶行列式的概念、性质和应用.

从形式上看，行列式只是由一些数排成正方形，两边画上一条竖线而组成，从其实际意义上看，都有明确的定义：

二阶行列式：$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$

三阶行列式：$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2$

这样看来，对于四阶行列式，甚至更高阶的行列式的定义就会越来越繁，需要另辟新的途径.

一、四阶行列式及其性质

回顾上一节所学行列式的性质定理 10, 可以知道，一个三阶行列式可以用三个二阶行列式来表示，如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\cdot a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+1}a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{3+1}\cdot a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

由于二阶行列式已有确定定义，因而三阶行列式也就完全可用上述等式右边的式子来定义，这样定义的结果和曾经有的对角线法则定义是一致的. 而这种用低一阶的行列式来定义高一阶行列式的方法更有普遍性.

仿照这样，我们可以用三阶行列式来给出四阶行列式的定义：用四个三阶行列式分别与四个数相乘积的代数和，就叫做一个四阶行列式. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\cdot a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + (-1)^{2+1}\cdot a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + (-1)^{3+1}a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + (-1)^{4+1}\cdot a_{41}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

由每个三阶行列式有 6 项，每一项是三个元素的乘积，可知四阶行列式有 24 项，每一项是四个元素的乘积. 在每一项的四个元素中，各行都有一个元素且只有一个元素出现，各列也都有一个元素且仅有一个元素出现.

类似地，还可以用四阶行列式来定义五阶行列式，…… . 一般地说，可以用 n 阶行列式来定义 $n+1$ 阶行列式.

必须注意，如果把对二阶行列式与三阶行列式用到的对角线法则用到四阶行列式来，就只能得到 8 项而不是 24 项. 可见对角线法则不能推广到四阶行列式以及高阶行列式.

例 2.22 计算行列式 $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 3 & 4\\ 0 & 5 & 1 & 7\\ -1 & 0 & 0 & 3\end{vmatrix}$

解： 按照四阶行列式的定义

$$\begin{aligned}\Delta &= 1\begin{vmatrix}-1 & 3 & 4\\ 5 & 1 & 7\\ 0 & 0 & 3\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}2 & 0 & 0\\ 5 & 1 & 7\\ 0 & 0 & 3\end{vmatrix}+0-(-1)\begin{vmatrix}2 & 0 & 0\\ -1 & 3 & 4\\ 5 & 1 & 7\end{vmatrix}\\ &= -48-12+34=-26\end{aligned}$$

对于这样定义的四阶行列式中的各个元素，可以和三阶行列式中的各个元素一样的定义各个元素的余子式及代数余子式，并仍把元素的代数余子式记作

$$A_{ij} \qquad (i=1,2,3,4 \quad j=1,2,3,4)$$

可以证明，第三节中关于三阶行列式的性质定理 1—11，对于四阶行列式（高阶行列式）都是成立的.

这些定理是：

定理 1

把（四阶）行列式的行改为同号数的列，列改为同号数的行，行列式的值不变.

定理 2

把（四阶）行列式的两行元素（或两列）对调，行列式的绝对值不变，但符号改变.

定理 3

有两行（或两列）元素相同的（四阶）行列式等于零.

定理 4

把一个（四阶）行列式的某一行（某一列）的所有元素同乘以某一个数 k 的结果，等于以数 k 乘这个行列式.

定理 5

一个（四阶）行列式某一行（或某一列）各元素的公因子可以提到行列式外边.

定理 6

如果一个（四阶）行列式中有一行（或一列）各元素全为零，则这个行列式等于零.

定理 7

如果一个（四阶）行列式中有两行（或两列）的对应元素成比例，则这个行列式等个零.

定理 8

如果（四阶）行列式中某一行（或某一列）都是两个数的和，则这个行列式就等于两个行列式的和，这两个行列式分别以这两个数中的前一个数与后一个数为这一行（这一列）的元素，而除去这一行（这一列）以外，这两个行列式的其它各行（其它各列）与原来行列式的对应各行（对应各列）都是相同的.

定理 9

把（四阶）行列式的某一行（或某一列）所有的元素，乘以同一个数后，再加到另一行（另一列）的对应元素上，行列式的值不变.

定理 10

（四阶）行列式等于它的任意一行（或列）的各个元素与它们的对应代数余子式的乘积的和.

定理 11

（四阶）行列式集一列（或某一行）的各元素与另一列（或另一行）的对应元素的代数余子式的乘积的和恒等于零.

定理 10 与 11 同样可以结合起来表示为

$$a_{1i}A_{1k} + a_{2i}A_{2k} + a_{3i}A_{3k} + a_{4i}A_{4k} = \begin{cases} \Delta & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

或者

$$a_{j1}A_{k1} + a_{j2}A_{k2} + a_{j3}A_{k3} + a_{j4}A_{k4} = \begin{cases} \Delta & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}$$

以上这些定理的证明完全与第三节中相应的定理证明类似，只要注意：由四阶行列式的定义可首先导出定理 10, 验证行列式可以按任一行（或列）的元素展开. 再据此来证明其余定理. 这里仅举一例，其余同学们可自行练习.

例 2.23 试证明定理 4.

证明： 设四阶行列式 $\Delta = |a_{ij}|$ $(i = 1, 2, 3, 4;\ j = 1, 2, 3, 4)$，并设 Δ 的第 1 行的所有元素都乘以 k 就得到行列式 Δ'，我们要证明

$$\Delta' = k \cdot \Delta$$

由于

$$\Delta = \begin{vmatrix} | & | & | & | \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & a_{i4} \\ | & | & | & | \end{vmatrix}, \qquad \Delta' = \begin{vmatrix} | & | & | & | \\ ka_{i1} & ka_{i2} & ka_{i3} & ka_{i4} \\ | & | & | & | \end{vmatrix}$$

并且将这两个行列式都按第 i 行展开，根据定理 10 可得

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} + a_{i4}A_{i4} \\ \Delta' &= ka_{i1}A_{i1} + ka_{i2}A_{i2} + ka_{i3}A_{i3} + ka_{i4}A_{i4} \\ &= k(a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} + a_{i4}A_{i4}) \\ &= k\Delta \end{aligned}$$

利用行列式的性质，可以有效的简化计算.

例 2.24　计算行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

分析： 由于第三列的元素中出现的零较多，且非零元素中有 1, 所以选择按第三列展开较为简便.

解： 将第一行各元素乘以 2, 分别加到第四行对应各元素之上，再按第三列展开可得

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 8 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & 8 & -1 \end{vmatrix} = 69$$

例 2.25　计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$

解： 利用四阶行列式的性质定理 1 一定理 11，所以

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a & d-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3 & d^3-a^3 \end{vmatrix}$$

由四阶行列式定义，按第一行展开，有

$$
\begin{aligned}
\Delta &= \begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ b^3-a^3 & c^3-a^3 & d^3-a^3 \end{vmatrix} \\
&= (b-a)(c-a)(d-a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+a & c+a & d+a \\ b^2+ba+a^2 & c^2+ca+a^2 & d^2+da+a^2 \end{vmatrix} \\
&= (b-a)(c-a)(d-a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & b+a & b^2+ba+a^2 \\ 0 & c-b & c^2+ca-b^2-ba \\ 0 & d-b & d^2+da-b^2-ba \end{vmatrix} \\
&= (b-a)(c-a)(d-a) \cdot \begin{vmatrix} c-b & d-b \\ (c-b)(c+b+a) & (d-b)(d+b+a) \end{vmatrix} \\
&= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c) \\
&= (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)
\end{aligned}
$$

练习

1. 计算下列行列式

(a) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 5 & 8 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 2 & 3 \\ x^2 & 1 & 4 & 6 \\ x^3 & 1 & 8 & 27 \end{vmatrix}$

2. 求证：

$$
\begin{vmatrix} a_3 & -1 & 0 & 0 \\ a_2 & x & -1 & 0 \\ a_1 & 0 & x & -1 \\ a_0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0
$$

二、四元线性方程组

四阶行列式可以用来解四元线性方程组.

对于四元线性方程组

$$(\mathrm{IV})\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+a_{34}x_4=b_3 \\ a_{41}x_1+a_{42}x_2+a_{43}x_3+a_{44}x_4=b_4 \end{cases}$$

采用与三元线性方程组一样的办法，同样可以得到克莱姆法则. 即当系数行列式 $\Delta\neq 0$ 时，方程组 (IV) 有且仅有一个解：

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\qquad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}\qquad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta},\qquad x_4=\frac{\Delta_4}{\Delta}$$

其中，Δ_j $(j=1,2,3,4)$ 表示在行列式 Δ 中用方程组的常数项列取代 x_j 的系数列所成的行列式.

例 2.26 用克莱姆法则，解四元线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3+x_4=8 \\ x_1-3x_2-6x_4=9 \\ 2x_2-x_3+2x_4=-5 \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0 \end{cases}$$

解： 首先计算系数行列式 Δ 及 Δ_j，得：

$$\Delta=27,\qquad \Delta_1=81,\qquad \Delta_2=-108,\qquad \Delta_3=-27,\qquad \Delta_4=27$$

再根据克莱姆法则，可以得出

$$x_1=3,\qquad x_2=-4,\qquad x_3=-1,\qquad x_4=1$$

所以原方程组的解集为

$$\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\}=\{(3,-4,-1,1)\}$$

在解四元线性方程组时，若系数行列式 $\Delta=0$, 同样可以断定方程组无解或有无限多个解，但是情形复杂，我们不去详细论述了.

一般地，对于 n 个方程组成的 n 元线性方程组，同样有以下克莱姆法则：

当系数行列式 $\Delta \neq 0$ 时，方程组有且仅有唯一的解：

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

其中，Δ_j 是在 Δ 中用方程组右边的常数项列取代 x_j 的系数列所成的 n 阶行列式.

例 2.27 解方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ x_2 + 2x_3 + x_5 = 3 \\ x_1 + x_3 + x_5 = 3 \\ x_1 + 2x_5 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 3 \end{cases}$$

解： 先计算系数行列式 Δ 及 Δ_j：

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 6$$

$$\Delta_1 = 6, \qquad \Delta_2 = 0, \qquad \Delta_3 = 6, \qquad \Delta_4 = 0, \qquad \Delta_5 = 6$$

所以原方程组的解集为

$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)\} = \{(1, 0, 1, 0, 1)\}$$

练习

用克莱姆法则解下列方程组:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \end{cases}$$

习题 2.4

1. 已知行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -6 & 5 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

(a) 把它按第三行展开;

(b) 把它按第二列展开，并算出结果.

2. 利用行列式性质，计算:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 6 & 8 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c & 1 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a_3 \end{vmatrix}$

(e) $\begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 & a+3 \\ a+1 & a+2 & a+3 & a+4 \\ b & b+1 & b+2 & b+3 \\ b+1 & b+2 & b+3 & b+4 \end{vmatrix}$

(f) $\begin{vmatrix} 1 & a & b & d+c \\ a & b & c & a+d \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix}$

3. 求证：

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix} = \cos 4\theta$$

4. 解下列线性方程组

$$\text{(a)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8 \end{cases} \qquad \text{(c)} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$$

$$\text{(b)} \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 2 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4 \end{cases} \qquad \text{(d)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_3 + 2x_4 = 8 \\ x_4 + 2x_5 = 11 \\ 2x_1 + x_5 = 4 \end{cases}$$

第五节　特殊的线性方程组

除以上学习的一般线性方程组外，在实际应用中常常还会遇到一些特殊的线性方程组，进一步学习这些特殊情形，无论在理论上和应用上都有重要的作用.

本节研究三种类型的特殊线性方程组，即：方程的个数多于未知数个数的线性方程组；方程的个数少于未知数个数的线性方程组；方程组中，各个方程的常数项都是零的线性方程组——齐次线性方程组.

一、方程个数多于未知数个数的线性方程组

这种方程组，我们早已在初中学习过了，要求这种方程组的解，其关键是：从中任选取和未知数个数一样多的方程组成部分方程组，求出部分方程组的解以后，再代入其余方程中检验，从而确定原方程组的解集.

例 2.28　解方程组

$$\begin{cases} x+y=5 & (2.30) \\ x-y=1 & (2.31) \\ 3x+2y=1 & (2.32) \end{cases}$$

解： 先解由 (2.30)、(2.31) 组成的方程组，得：

$$x=3, \qquad y=2$$

再将 x,y 值代入 (2.32), 能满足.

所以方程组的解集是 $\{(x,y)\}=\{(3,2)\}$.

例 2.29　解方程组

$$\begin{cases} x+y=5 & (2.33) \\ x-y=1 & (2.34) \\ 3x+2y=14 & (2.35) \end{cases}$$

解： 由 (2.33), (2.34) 仍得

$$x=3, y=2$$

代入 (2.35) 却不能满足. 因此，方程组无解，或者说解集为空集.

例 2.30　解方程组

$$\begin{cases} 2x+3y-5z=3 & (2.36) \\ x-2y+2=0 & (2.37) \\ 7x-7z=6 & (2.38) \\ 3x+y+3z=7 & (2.39) \end{cases}$$

解： 先解由 (2.36)，(2.37)，(2.38) 组成的方程组. 由于

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 1 \\ 7 & 0 & -7 \end{vmatrix}=0$$

再由计算得：$\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=0$.

所以由 (2.36)，(2.37)，(2.38) 组成的方程组应有无限多个解. 我们可以把它的解写出来，就是

$$(x,y,z)=\left(t,t-\frac{3}{7},t-\frac{6}{7}\right)$$

这里 t 为参数，可以取任意数.

再将这个解代入 (2.39), 可得

$$3t+t-\frac{3}{7}+3t-\frac{18}{7}=7 \quad \Rightarrow \quad t=\frac{10}{7}$$

因此，方程组的解集为：

$$\{(x,y,z)\}=\left\{\left(\frac{10}{7},1,\frac{4}{7}\right)\right\}$$

例 2.31 解方程组

$$\begin{cases} 2x+3y-5z=3 & (2.40)\\ x-2y+z=0 & (2.41)\\ 7x-7z=6 & (2.42)\\ 4x-y-3z=3 & (2.43)\end{cases}$$

解： 先解由 (2.40)，(2.41)，(2.42) 组成的方程组，得

$$(x,y,z)=\left(x,t-\frac{3}{7},t-\frac{6}{7}\right)$$

其中 t 为参数.

再将 $(x,y,z)=\left(t,t-\frac{3}{7},t-\frac{6}{7}\right)$ 代入 (2.43), 得

$$4t-t+\frac{3}{7}-3t+\frac{18}{7}=3 \quad \Rightarrow \quad 0t=0$$

这就是说，t 为任意数时，(x,y,z) 满足 (2.43), 因此，原方程组的解集为

$$\{(x,y,z)\}=\left\{\left(t,t-\frac{3}{7},t-\frac{6}{7}\right)\middle| t \text{ 为任意数}\right\}$$

综上所述，t 对于方程的个数多于未知数个数的线性方程组求解，一般地可以先取与未知数个数相等的几个方程组成“部分方程组”求解，再作以下几种情形的解决：

1. 当“部分方程组”无解时，原方程组也就无解，即集解为空集 $\emptyset$；

2. 当“部分方程组”有唯一解时，就将这一解代入其余各个方程中去检验.

   (a) 若每个方程都能被满足，则这唯一解也就是原方程组的唯一解（如例 2.28）；

(b) 若至少有一个方程不能被满足，则原方程组就无解（如例 2.29）.

3. 当“部分方程组”有无限多个解时，就将它的解用参数形式表示，并代入其它各方程中去，得到几个关于参数的方程.

(a) 若参数无论取什么值，都无法同时满足其它各方程，则原方程组无解；

(b) 若参数无论取什么值，都能同时满足其它各方程，则原方程组有无限多个解，“部分方程组”的解就是原方程组的解（如例 2.31）；

(c) 若参数只有取某个特定值，才能同时满足其它各方程，则由参数的这个特定值所确定的“部分方程组”解集中的特定解，才能是原方程组的解（如例 2.30）.

练习

解下列方程组：

1. $\begin{cases} 3x+2y=13 \\ x-3y=-3 \\ -7x+10y=-1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y=2a \\ x-y=2b \\ 2x+3y=5a-b \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x+y+5z=4 \\ 4x-y+z=4 \\ x-2y-3z=-1 \\ 2x-y+2z=0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x+y-z=5 \\ x-3y+z=7 \\ 4x-3y-7z=1 \\ 5x-5y-10z=-1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x-4y=7 \\ -x+3y=1 \\ 2x-5y=0 \\ x+2y=7 \end{cases}$

二、方程的个数少于未知数个数的线性方程组

这种类型的方程组，我们在前面的讨论中也已经见到，以三元线性方程组为例，这种特殊方程组的一般形式可写成

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+a_2y+c_2z=d_2 \end{cases}$$

这种特殊方程组的求解，关键是选取和方程个数一样多的未知数后，将其余未知数作为参数都移到方程右边，组成一个新方程组求解，进而得到原方程组的解.

例 2.32 解方程组

$$\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ x+7y+4z=7 \end{cases}$$

解： 注意到由未知数 x, y 的系数作成的二阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} \neq 0$$

我们就把含 z 的项移到等号右边，把方程组看成是两个未知数 x, y 的二元一次方程组

$$\begin{cases} x+2y=6-3z \\ x+7y=7-4z \end{cases}$$

解得

$$x=\frac{1}{5}(28-13z), \qquad y=\frac{1}{5}(1-z)$$

令 $z=t$，（t 为参数）则方程组的解集是

$$\{(x,y,z)\}=\left\{\left(\frac{27-13t}{5},\frac{1-t}{5},t\right)\Big|t \text{ 为任意数}\right\}$$

由于 t 的任意性，因此方程组有无限多个解.

例 2.33 解方程组

$$\begin{cases} x+2y+5z=8 & (2.44) \\ 2x+4y+10z=16 & (2.45) \end{cases}$$

解： 注意到由 x, y 的系数或由 x, z 的系数或由 x, z 的系数所组成的二阶行列式都等于零，因而，原方程组就无法应用克莱姆法则求解.

事实上，直接可以看出，方程 (2.44) 乘以 2 就得到方程 (2.45), 原方程组实质上就是一个独立的三元方程 (2.44). 由于方程 (2.44) 的解可以引进两个参数 R, t, 表示为 $(x,y,z)=(8-2R-5t,R,t)$, 因此，原方程组的解集为

$$\{(x,y,z)\}=\{(8-2R-5t,R,t)|t,R \text{ 均为任意数}\}$$

例 2.34 解方程组

$$\begin{cases} x+2y+5z=8 & (2.46) \\ 2x+4y+10z=10 & (2.47) \end{cases}$$

解: 与例 2.33 一样, 由于未知数组成的二阶行列式都为零, 因而, 无法应用克莱姆法则求解.

事实上, 可以将 (2.45) 变形为

$$x+2y+5z=5 \tag{2.48}$$

比较 (2.46)、(2.48) 就可知, 原方程组是矛盾方程组, 其解集为空集.

一般地, 对于方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \end{cases}$$

我们讨论如下:

1. 若三个二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$ 中至少有一个不为零时, 由于未知数的顺序可以改变, 所以不失一般性, 可假定 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ 把含有 z 的项移到等号右侧, 方程组可看成由 x, y 为未知数组成的二元一次方程组, 应用克莱姆法则, 就可解出 x, y 的关于 z 的表达式

$$x=x(z), \qquad y=y(z)$$

若引进参数令 $x=t$, 则方程组的解集为

$$\{(x,y,z)\}=\{(x(t),y(t),t) | t \text{ 为任意数}\}$$

由于 t 的任意性, 原方程组就有无穷个解.

2. 若上述三个二阶行列式都是零时, 由于 a_1, b_1, c_1 不能同时为零, 不妨假定 $a_1 \neq 0$. 则因为

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0, \quad \text{且} \quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=0$$

所以, 就有

$$b_2=\frac{a_2}{a_1}b_1, \qquad c_2=\frac{a_2}{a_1}c_1$$

令 $a_2=ka_1$，就有 $b_2=kb_1$， $c_2=kc_1$. 由第一个方程解得

$$x=\frac{1}{a_1}(d_1-b_1y-c_1z)$$

代入第二个方程

$$\begin{aligned}a_2x+b_2y+c_2z&=ka_1x+kb_1y+kc_1z\\&=k(d_1-b_1y-c_1z)+kb_1y+kc_1z\\&=kd_1\end{aligned}$$

所以，当 $d_2=kd_1$ 时，方程组有无穷多个解，解集为：

$$\{(x,y,z)\}=\left\{\left(\frac{d_1-b_1L-c_1t}{a_1},\ L,\ t\right)\middle|L,t\ \text{为任意数}\right\}$$

当 $d_2\neq kd_1$ 时，方程组无解，解集为空集.

综合前两节所述，方程个数与未知数个数不等的线性方程组求解，总是以方程个数等于未知数个数的方程组作为基础来考虑的：方程多了，先舍去一些方程，解一个部分方程组，解出后，再对其他各方程逐步验证；未知数多了，移一些未知数到等号右边，解出后引进参数，写出解集. 由此可见，主要关键仍在求解方程个数等于未知数个数的线性方程组.

练习

解方程组：

1. $\begin{cases}x+2y+5z=10\\3x-4y+7z=2\end{cases}$

2. $\begin{cases}a(a-1)x+2y+3z=a\\4x+4y+6z=4\end{cases}$

三、齐次线性方程组

常数项都是零的线性方程组，叫做齐次线性方程组. 反之，若常数项至少有一个不等于零的线性方程组，就叫做非齐次线性方程组.

以下我们主要研究三个方程、三个未知数的齐次线性方程组. 即

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=0\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=0\end{cases}\tag{2.49}$$

容易看到，$(x_1,x_2,x_3)=(0,0,0)$ 满足方程组 (2.49), 因而是 (2.49) 的一个解．这个解称为齐次线性方程组的零解．反之，在一个解中若至少有一个未知数的值不等于零，则这个解叫做齐次线性方程组的非零解．我们主要研究的是一个齐次线性方程组有没有非零解．

令 Δ 是方程组 (2.49) 的系数行列式．

(一) $\Delta\neq 0$ 的情形

在 $\Delta\neq 0$ 的情况下，由克莱姆法则可知：方程组 (2.49) 有且仅有唯一解．但已知 $(0,0,0)$ 是它的解，因而方程 (2.49) 没有非零解．

例 2.35　解方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=0\\ 3x_1-x_2+2x_3=0\\ 3x_1-3x_2-x_3=0\end{cases}$$

解： 由于系数行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&2&1\\3&-1&2\\2&-3&-1\end{vmatrix}=14\neq 0$$

所以方程组只有零解，没有非零解．

(二) $\Delta=0$ 的情形

在 $\Delta=0$ 的情况下，问题比较复杂．我们再分两种情形来进行讨论．

令 $A_{11},A_{12},\ldots,A_{33}$ 分别表示系数行列式 Δ 的各个元素 $a_{11},a_{12},\ldots,a_{33}$ 的代数余子式．

1. 若 $\Delta=0$ 而 $A_{11},A_{12},\ldots,A_{33}$ 中至少有一个不为零. 由于方程的编号可以改变，未知数的编号也可以改变，因此，不失一般性，可以假定 $A_{33}\neq 0$.

   把 (2.49) 的前两个方程改写成

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=-a_{13}x_3\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=-a_{23}x_3\end{cases}$$

   解得：$x_1=\dfrac{A_{31}}{A_{33}}x_3,\quad x_2=\dfrac{A_{32}}{A_{33}}x_3$

代入第二个方程，得：

$$
\begin{aligned}
a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 &= \frac{x_3}{A_{33}}(a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}) \\
&= \frac{x_3}{A_{33}}\cdot\Delta=0
\end{aligned}
$$

可见这个解满足第三个方程，因而是方程组 (2.49) 的解．由于 x_3 取值的任意性，可知方程组有无限多个非零解.

2. 若 $\Delta=0$，且 Δ 的所有元素的代数余子式都是零，但 Δ 的元素中至少有一个不为零．不失一般性，可假定 $a_{11}\neq 0$.

   由 (2.49) 的第一个方程，可得

$$
x_1=-\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2-\frac{a_{13}}{a_{11}}x_3
$$

代入第二、第三个方程，得

$$
\begin{aligned}
&a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 \\
=&-\frac{1}{a_{11}}(a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22})x_2-\frac{1}{a_{11}}(a_{13}a_{21}-a_{11}a_{23})x_3 \\
=&\frac{A_{33}}{a_{11}}x_2+\frac{A_{32}}{a_{11}}x_3
\end{aligned}
$$

由于所给条件为所有 $A_{ij}=0\ (1\le i\le 3,\ 1\le j\le 3)$, 所以，

$$
a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=0
$$

$$
\begin{aligned}
&a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 \\
=&-\frac{1}{a_{11}}(a_{12}a_{31}-a_{11}a_{32})x_2-\frac{1}{a_{11}}(a_{13}a_{31}-a_{11}a_{33})x_3 \\
=&\frac{A_{23}}{a_{11}}x_2+\frac{A_{22}}{a_{11}}x_3=0
\end{aligned}
$$

可见这个解同时满足三个方程，即不论 x_2,x_3 取什么值，

$$
\left(-\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2-\frac{a_{13}}{a_{11}}x_3,\ x_2,\ x_3\right)
$$

都是方程组 (2.49) 的解．所以方程组 (2.49) 有无限多个非零解：

$$
\{(x_1,x_2,x_3)\}=\left\{\left(-\frac{a_{12}}{a_{11}}L-\frac{a_{13}}{a_{11}}t,\ L,\ t\right)\Big|L,t\ \text{为任意数}\right\}
$$

例 2.36 下列方程组有没有非零解，如果有，求出它的全部非零解.

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ 3x_1-x_2+2x_3=0 \\ x_1-3x_2=0 \end{cases}$$

解： 由于系数行列式 $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}=0$，且 $A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-4\neq 0$

所以可将第一、第二两方程化成

$$\begin{cases} x_1+x_2=-x_3 \\ 3x_1-x_2=-2x_3 \end{cases}$$

解得 $x_1=-\dfrac{3}{4}x_3,\quad x_2=-\dfrac{1}{4}x_3.$

令 $x_3=-4k$，则方程组的解集为

$$\{(x_1,x_2,x_3)\}=\{(3k,k,-4k)|k \text{ 为任意数}\}$$

因此方程组有无限多个非零解.

例 2.37 解方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ 2x_1+2x_2+2x_3=0 \\ 3x_1+3x_2+3x_3=0 \end{cases}$$

解： 显然有

$$\Delta=0,\quad A_{11}=A_{12}=\cdots=A_{33}=0$$

由第一个方程可得：$x_1=-x_2-x_3$

令 $X_2=L$, $x_3=t$，则可得方程组的解集为

$$\{(x_1,x_2,x_3)\}=\{(-L-t,L,t)|L,t \text{ 为任意数}\}$$

如果方程组 (2.49) 中 $\Delta=0$, 且所有 $A_{ij}=0$, 而且所有元素也为零，则方程组为

$$\begin{aligned} 0x_1+0x_2+0x_3=0 \\ 0x_1+0x_2+0x_3=0 \\ 0x_1+0x_2+0x_3=0 \end{aligned}$$

显然，这些都是恒等式，无论 x_1, x_2, x_3 取什么值，等式都成立. 这样，方程组当然有无限多个非零解.

综合上述各种情况，可以得出如下的结论：

定理

齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解的必要充分条件是这个方程组的系数行列式 Δ 为零.

例 2.38 试讨论下列齐次线性方程组有没有非零解?

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 0 \end{cases}$$

解： 计算系数行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 3a + 2 = (a-1)^2(a+2)$$

- 若 $a \neq 1$, $a \neq -2$, 则方程组没有非零解，
- 若 $a = 1$ 或 $a = -2$, 则方程组有无限多个非零解.

注意： $a = 1$ 或 $a = -2$ 尽管方程组有无限多个非零解，但程度有所不同.

- 当 $a = -2$ 时，代数余子式 $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$. 所以，解的表达式只有一个参数，方程组的解集为

$$\{(x_1, x_2, x_3)\} = \{(1, t, t) | t \text{ 为任意数}\}$$

- 当 $a = 1$ 时，所有的代数余子式全为零. 所以，解的表达式中应有两个参数，方程组的解集为

$$\{(x_1, x_2, x_3)\} = \{(-L - t, L, t) | L, t \text{ 为任意数}\}$$

例 2.39 求非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \\ a_3x+b_3y+c_3=0 \end{cases}$$

有解的必要条件.

解： 如果这个方程组有解，那么至少存在一个有序数组 (x_0,y_0), 能够使方程组中每一个方程都被满足，即

$$\begin{cases} a_1x_0+b_1y_0+c_1=0 \\ a_2x_0+b_2y_0+c_2=0 \\ a_3x_0+b_3y_0+c_3=0 \end{cases}$$

再加以改写，得

$$\begin{cases} a_1x_0+b_1y_0+c_1\cdot 1=0 \\ a_2x_0+b_2y_0+c_2\cdot 1=0 \\ a_3x_0+b_3y_0+c_3\cdot 1=0 \end{cases}$$

这就告诉我们，这个三元齐次线性方程组有一个非零解 $(x_0,y_0,1)$.

但由于齐次线性方程组有非零解的必要条件是它的系数行列式等于零，因而可以推出

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

所以原方程组有解的必要条件是 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$

练习

1. 想想看，能不能把例 2.39 中的必要条件改为充分条件？为什么？

2. 判定下列齐次线性方程组是否有非零解？如果有，求出它们各自的解集来.

(a) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y+3z=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 5x-6y-4z=0 \\ x+2y+4z=0 \\ 3x+2y+6z=0 \end{cases}$

习题 2.5

1. 解下列方程组:

(a) $\begin{cases} 2x+4y-3=7 \\ x-y+2z=-1 \\ 3x-7y+3z=10 \\ -4x+3y-5z=-4 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3-x_4=1 \\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4=1 \\ 2x_1+2x_2+2x_3-x_4=1 \\ 5x_1+5x_2+2x_3=2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} -x+3y-2z=-8 \\ 7x+y-2=4 \\ 5x-5y+3z=16 \\ -x-2y+z=0 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=3 \\ 3x+2x-2z=1 \\ 5x-y-2=0 \\ x-2y+3z=6 \end{cases}$

2. 解下列方程组:

(a) $\begin{cases} 2x+y-z=8 \\ x-3y-2z=1 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=10 \\ 2x_1+3x_2-x_3=5 \\ 2x_2+x_3-2x_4=-1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x+3y+z=10 \\ x-4y+2z=8 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3-3x_4=5 \\ 2x_1+3x_2+3x_3+x_4=2 \\ x_1+x_2+x_3-7x_4=6 \end{cases}$

3. 解下列方程组:

(a) $\begin{cases} 2x+3y+z=0 \\ x+2y-3z=0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 4x-5y-z=0 \\ 3x+7y-6z=0 \end{cases}$

4. 判断下列齐次线性方程组有没有非零解?

(a) $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=0 \\ 4x_1-2x_2+5x_3=0 \\ 2x_1-x_2+4x_3=0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+6x_3=0 \\ x_1+2x_2+4x_3=0 \\ 5x_1-6x_2-4x_3=0 \end{cases}$

5. 求出下列齐次线性方程组的非零解:

(a) $\begin{cases} 5x=8y \\ 10x-16y=0 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x_1-3x_2+x_3=0 \\ 2x_1+x_2+2x_3=0 \\ -5x_1+2x_2-5x_3=0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x_1+5x_2+3x_3=0 \\ 3x_1-x_2-4x_3=0 \\ -x_1+6x_2+7x_3=0 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+7x_4=0 \\ 3x_1-4x_2-x_3-8x_4=0 \\ x_1+x_2-x_3=0 \\ x_1-x_2-x_4=0 \end{cases}$

6. 参数 a 为何时值时，下列齐次线性方程组有非零解?

(a) $\begin{cases} x_1+x_2+ax_3=0 \\ -3x_1+5x_2+x_3=0 \\ x_2+2x_3=0 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} ax+3y+z=0 \\ x+4y-3z=0 \\ ax+y+3z=0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} -5x_1-9x_2+7x_3=0 \\ ax_1-4x_2+3x_3=0 \\ -8x_1-5x_2+4x_3=0 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} 4x-2y+az=0 \\ ax-y+z=0 \\ 6x-3y+(a+1)z=0 \end{cases}$

7. 解下列方程组，并求出 $x:y:z$

(a) $\begin{cases} x+2y+2=0 \\ x-y-2z=0 \\ -2x-y+z=0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x-5y=0 \\ 4y+z=0 \\ 4x+5z=0 \end{cases}$

8. 已知方程组

$$\begin{cases} ax_1+bx_2+cx_3=0 \\ cx_1+bx_2+ax_3=0 \\ bx_1+ax_2+cx_3=0 \end{cases}$$

有非零解，求证：$a=b$, 或 $a=c$, 或 $a+b+c=0$

9. 求证：齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+px_2+qx_3+(r+s)x_4=0 \\ x_1+qx_2+rx_3+(s+p)x_4=0 \\ x_1+rx_2+sx_3+(p+q)x_4=0 \\ x_1+sx_2+px_3+(q+r)x_4=0 \end{cases}$$

必有非零解.

本章内容要点

一、本章主要内容是线性方程组的高斯消元法，行列式（重点是二，三阶行列式）及其重要性质．二、三元线性方程组的解的讨论；用克莱姆法则求线性方程组的唯一解；齐次线性方程组有非零解的充要条件等．同时，还学习了四元线性方程组以及方程个数与未知数个数不等的线性方程组.

二、高斯消元法实质上就是加减消元法，只是运用三种基本变换进行有一定程序的消元，便于计算，便于运用电子计算机.

三、行列式是解线性方程组的一种新的工具．二、三阶行列式的定义是:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2-a_2b_1$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2$$

这就是二、三阶行列式展开的对角线法则，对高阶行列式不适用.

四、行列式中的元素可采用双足码表示，两个足码分别表示这个元素所在的行数与列数，如三阶行列式可表为

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

也可以简化表示为

$$\Delta = |a_{i,j}| \qquad i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3.$$

余子式与代数余子式是两个重要的概念，尤其是代数余子式，在进行行列式的恒等变形和计算中有广泛的应用.

某个元素 a_{ij} 的代数余子式是一个低一阶的行列式，用 $A_{i,j}$ 表示，如，在三阶行列式中，元素 a_{23} 的代数余子式为

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

三阶行列式可以用二阶行列式定义:

$$\begin{aligned} \Delta &= (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \end{aligned}$$

四阶行列式就是借助于三阶行列式定义的；一般地，n 阶行列式可以借助于 n 个 $n-1$ 阶行列式定义. 这种定义，我们称为行列式的归纳定义.

行列式的性质定理 1—11 也是简化计算、进行变形的主要依据，在本章中都是以三阶行列式为例来证明的，但它们对任意阶行列式都适用.

五、二元线性方程组

$$\begin{cases} a_1 + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases} \qquad (a_1, a_2; b_1, b_2 \text{ 不同时为零})$$

的解可以分如下几种情形讨论:

1. 当系数行列式 $D \neq 0$ 时，方程组有唯一解

$$(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D} \right)$$

2. 当 $D=0$, 且 D_x, D_y 不全为零时，方程组无解；

3. 当 $D=0$, 且 $D_x=D_y=0$ 时，方程组有无穷多个解，这时可引入参数 t, 方程组的解就表示为

$$(x,y)=(t,\varphi(t)), \qquad \text{或} \qquad (x,y)=(f(t),t) \quad (t\ \text{为任意数})$$

六、三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \qquad (a_{ij}\ \text{不全为零})$$

的解可以按以下几种情形讨论：

1. 当系数行列式 $\Delta\neq 0$ 时，方程组有唯一解

$$(x_1,x_2,x_3)=\left(\frac{\Delta_1}{\Delta},\frac{\Delta_2}{\Delta},\frac{\Delta_3}{\Delta}\right)$$

2. 当 $\Delta=0$, 且 $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3$ 不全为零时，方程组无解；

3. 当 $\Delta=\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=0$ 时，方程组有无限多个解，这时可引入一个或两个参数，方程组的解可表为含有一个或 2 个参数的形式.

七、n 个方程 n 个未知数的线性方程组求解的克莱姆法则：

当系数行列式 $\Delta\neq 0$ 时，方程组有唯一解

$$(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\left(\frac{\Delta_1}{\Delta},\frac{\Delta_2}{\Delta},\ldots,\frac{\Delta_n}{\Delta}\right)$$

其中 Δ_i, $(i=1,2,\ldots,n)$ 是将 Δ 中第 i 列换成方程组的常数项列而组成的 n 阶行列式.

八、齐次线性方程组（以三元为例）

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=0 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=0 \end{cases}$$

的解可分以下情形讨论：

1. 当系数行列式 $\Delta\neq 0$ 时，方程组有唯一的零解 $(x_1,x_2,x_3)=(0,0,0)$;

2. 当 $\Delta = 0$ 时，方程组除有零解外，还有无限多个非零解.

若引进参数（一或两个），其解可表为含参数形式. 一般地，齐次线性方程组有非零解的充要条件是系数行列式 $\Delta = 0$.

九、未知数个数与方程个数不等的线性方程组的求解，一般都是转化为方程个数与未知数个数相等的方程组求解. 因而，线性方程组的求解与理论，关键还在于后者.

复习题二

1. 用高斯消元法解下列方程组

(a) $\begin{cases} x+2y-3z=3 \\ 3x-5y+7z=19 \\ 5x-8y-11z=-13 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 5x_2+x_3-4x_4=17 \\ 3x_2+x_4=12 \\ 4x_1-3x_3+x_4=9 \\ x_1+2x_2+3x_4=8 \end{cases}$

(c) $\dfrac{x+1}{20}=\dfrac{y+1}{21}=\dfrac{x+y}{17}$

2. 解下列方程组，并画出图象说明.

(a) $\begin{cases} x+y=2 \\ 4x-y=3 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x+4y=10 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x-y=5 \\ 2x-2y=7 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} y=3x+2 \\ y=3x \end{cases}$

3. 解下列关于 x, y 的方程组，并讨论.

(a) $\begin{cases} (a+1)x-(2a-1)y=3a \\ (3a+1)x-(4a-1)y=5a+4 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} (a-1)x+(a+1)y=2(a^2-1) \\ (a^2-1)x+(a^2+1)y=2(a^3-1) \end{cases}$

(c) $\begin{cases} (a+5)x+(2a+3)y-(3a+2)=0 \\ (3a+10)x+(5a+6)y-(2a+4)=0 \end{cases}$

4. 已知方程组 $\begin{cases} 2x+ay=4 \\ x+4y=8 \end{cases}$ 只有一个正数解，试求参数 a 的取值范围.

5. 试用三种不同的方法，计算以下行列式的值：

$$\begin{vmatrix} 13 & 22 & 17 \\ 14 & -11 & 16 \\ 10 & 0 & 18 \end{vmatrix}$$

6. 已知 276, 345, 391 都能被 23 整除，不计算行列式的值求证：以下行列式也能被 23 整除.

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 9 & 1 \end{vmatrix}$$

7. 计算下列行列式：

(a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos\beta & \sin\beta \\ \sin(\alpha-\beta) & \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$

8. 不求行列式的值，只利用行列式的定义与性质求 $f(x)$ 中 x^4 及 x^3 的系数：

$$f(x) = \begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

9. 求证：

(a) $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^2$

(b) $\begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

10. 解下列方程:

(a) $\begin{vmatrix} 1+x & 2 & 3 \\ 1 & 2+x & 3 \\ 1 & 2 & 3+x \end{vmatrix} = 0$　　(b) $\begin{vmatrix} \sin x & 1 & \sin x \\ \cos x & 0 & \sin x \\ \cos x & 1 & \cos x \end{vmatrix} = 0$

11. 解不等式

$$\begin{vmatrix} x-a & b & c \\ a & x-b & c \\ -a & b & x-c \end{vmatrix} > 0$$

12. 求证:

(a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = a^3+b^3+c^3-3abc$

(b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

(c) 若 $\triangle ABC$ 三边 a, b, c 满足条件 $a^3+b^3+c^3=3abc$，则 $\triangle ABC$ 必为一个等边三角形.

13. 解下列方程组:

(a) $\begin{cases} 7x-4\dfrac{1}{2}y=9\dfrac{1}{2} \\ 2x+3y+7\dfrac{1}{2}z=22 \\ -\dfrac{2}{3}x+2\dfrac{1}{2}z=3\dfrac{2}{3} \end{cases}$　　(c) $\begin{cases} ax-aby+bz=b \\ x+ay-z=-1 \\ by+z=1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{y}+\dfrac{4}{z}=11 \\ \dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{y}-\dfrac{5}{z}=-20 \\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}-\dfrac{8}{z}=6 \end{cases}$　　(d) $\begin{cases} \ell a=my=nz \\ ax+by+cz=d \\ (amn+bn\ell+cm\ell\neq 0) \end{cases}$

14. 确定参数 λ 的值，使下列方程组解出 x 的值与 y 的值相等.

$$\begin{cases} 2\lambda x + 8y = 3\lambda + 1 \\ 3x - (\lambda - 8)y = \lambda - 3 \end{cases}$$

15. 解下列齐次线性方程组

(a) $$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + 7x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

16. a, b, c 都是非零数，判断下列齐次线性方程组有没有非零解?

$$\begin{cases} (b-c)x + by - cz = 0 \\ -ax + (c-a)y + cz = 0 \\ ax - by + (a-b)z = 0 \end{cases}$$

17. 参数 λ 取什么值时，下列齐次线性方程组有非零解? 若有非零解，求出其全部非零解:

(a) $$\begin{cases} x + y = \lambda x \\ 6x + 2y = \lambda y \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} 11x - 6y + 2z = \lambda x \\ -6x + 10y - 4z = \lambda y \\ 2x - 4y + 6z = \lambda z \end{cases}$$

18. 已知 $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ 与 $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ 都是以下齐次线性方程组的解

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$$

的解. 求证:

(a) k 是任意数，$(k\alpha_1, k\beta_1, k\gamma_1)$ 也是方程组的解.

(b) $(\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2, \gamma_1 + \gamma_2)$ 也是方程组的解.

19. 下列方程组中，x, y 是未知数，a, b 是已知常数，m, p 是参数．若已知方程组有无限多个解求参数 m, p.

$$\begin{cases}(3m-5p+b)x+(8m-3p-a)y=1\\(2m-3p+b)x+(4m-p)y=2\end{cases}$$

20. 已知下列方程组有解，求参数 λ.

$$\begin{cases}3x-4x=\lambda(\lambda^2+12)\\5x-6y=2\lambda(\lambda+3)\\7x-8y=12(4-\lambda)\end{cases}$$

21. x, y, z 是未知数，a, b 是参数，下列方程组在什么条件下有唯一解；无解；有无限多个解.

$$\begin{cases}ax+y+z=4\\x+by+z=3\\x+2by+z=4\end{cases}$$

22. 已知 $a^2+b^2+c^2=1$, 下列关于 x, y 的方程组是否有解?

$$\begin{cases}(b^2+c^2)x+aby=ac\\abx+(c^2+a^2)y=bc\\cax+bcy=a^2+b^2\end{cases}$$

23. 求下列关于 x, y, z 的三元线性方程组有唯一解的条件，并求出在这一条件下的解

(a) $$\begin{cases}(\lambda+3)x+y+2z=\lambda\\\lambda x+(\lambda-1)y+2=2\lambda\\3(\lambda+1)+\lambda y+(\lambda+3)z=3\end{cases}$$

(b) $$\begin{cases}x+y+z=0\\ax+by+cz=0\\bcx+cay+abz=(b-c)(c-a)(a-b).\end{cases}$$

24. 论证：若行列式主对角线左下方（或右上方）的元素全为零，则行列式的值就等于主对角线上各元素的连乘积.

25. 求证 $\triangle ABC$ 为等腰三角形的充要条件是

$$\begin{vmatrix} \cos^2 A & \sin A & 1 \\ \cos^2 B & \sin B & 1 \\ \cos^2 C & \sin C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

26. 已知 $2x+5y+4z=0$, $3x+y-7z=0$, 求证：$x+y-z=0$.

27. 已知 a,b,c 是互不相同的数，且设

$$p(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

(a) 证明 $p(x)$ 是关于 x 的三次多项式；

(b) 利用行列式性质，求出 $p(x)$ 的根.

第三章　多项式的基础理论

在初中我们已经学习过多项式及其四则运算，并着重学习了一元多项式的带余除法、余式定理和多元多项式的乘法公式，因式分解．这都是重要的基础知识，在数学和实际中都有广泛的应用，本章将从理论和应用上对多项式的基础知识作进一步的研究、提高，我们研究的重点仍然是一元多项式.

第一节　多项式及其代数运算

多项式的概念我们并不陌生，尤其是一元多项式，每个人都能举出不少例子．它的四则运算也会用各种方法进行．总括我们已经学过的知识，可以一般地系统整理如下：

一、多项式的概念

定义 1

形如 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 的式子，叫做 x 的一元多项式（简称多项式）．其中，$a_i\ (i=0,1,2,\ldots,n)$ 是已知实数，n 是已知非负整数.

．一元多项式一般简记为 $f(x)$ 或 $g(x)$ 等，即

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

在多项式 $f(x)$ 中，$a_ix^i\ (i=0,1,2,\ldots,n)$ 叫做 $f(x)$ 的 i 次项，a_i 叫做 i 次项的系数；当 $a_i\neq 0$ 时，多项式 $f(x)$ 称为一元 i 次多项式，并把它的次数记作 $\deg f(x)=i$.

特别地，当 $n=0$ 时，多项式成为 $f(x)=a$，这时，若 $a_0\neq 0$, 就叫做零次多项式；若 $a_0=0$ 就叫做零多项式，它的次数不定义.

例如，$f_1(x)=7x^3-1$ 叫做一元三多项式，$f_2(x)=-5$ 叫做零次多项式，$f_3(x)=0$ 叫做零多项式，它不定义次数.

注意： 在初中我们把多项式中的字母．称为未知数，也称为元．现在我们还可以用函数的观点把它称为自变数，甚至可以更一般地称为不定元．它和数作运算时满足数系运算通性，即满足加法和乘法的结合律、交换律以及乘法对加法的分配律；同时，零与 1 的运算特性、指数运算律仍然适合.

这样一来，任何一个 n 次多项式，经过整理合并同类项，总可以写成标准形式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \quad (a_n\neq 0) \tag{3.1}$$

或者

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n \quad (a_n\neq 0) \tag{3.2}$$

其中 (3.1) 称为多项式 $f(x)$ 的降幂标准式，(3.2) 称为多项式 $f(x)$ 的升幂标准式.

例如，多项式 $g(x)=5x-7x^2+13x^4-8x-x^3+10x^2-1$ 经过整理后，可以写成降幂或升幂两种标准形式

$$g(x)=13x^4-x^3+3x^2-3x-1$$

或者

$$g(x)=-1-3x+3x^2-x^3+13x^4$$

定义 2

如果用一个已知数 b 去代替多项式中的元 x, 就得到

$$f(b)=a_nb^n+a_{n-1}b^{n-1}+\cdots+a_1b+a_0$$

那么，数 $f(b)$ 就叫做当 $x=b$ 时 $f(a)$ 的值.

例 3.1 已知 $f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0 \quad (a_3\neq 0)$, 试求 $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$, $f(m)$.

解：

$$\begin{aligned} f(0)&=a_0\\ f(1)&=a_3+a_2+a_1+a_0\\ f(-1)&=-a_3+a_2-a_1+a_0\\ f(m)&=a_3m^3+a_2m^2+a_1m+a_0 \end{aligned}$$

例 3.2　已知 $f(x)=x^2+2x+8$, 求 $f(-x)$, $f(x+1)$.

分析：由于 $-x$, $x+1$ 都不是已知数，因而所求的 $f(-x)$, $f(x+1)$ 也不会是一个已知数值，严格地说题目已不是求值问题．但我们可以理解为要求用 $-x$ 与 $x+1$ 分别代替 $f(x)$ 中的 x 所得的新多项式．实际上就是换元，其运算程序与求多项式的值是相同的.

解：

$$\begin{aligned}
f(-x) &= (-x)^2+2(-x)+3=x^2-2x+3\\
f(x+1) &= (x+1)^2+2(x+1)+3\\
&= x^2+2x+1+2x+2+3=x^2+4x+6
\end{aligned}$$

定义 3

两个多项式

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\\
g(x) &= b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0.
\end{aligned}$$

如果它们的各同次项系数对应相等，即 $a_k=b_k$ (k 为非负整数）我们就说这两个多项式相等，记作 $f(x)=g(x)$.

不难知道，两个非零多项式相等的必要条件是它们的次数相等，即如果 $f(x)=g(x)$, 那么 $\deg f(x)=\deg g(x)$.

应该指出，如果把多项式看作一个函数式，那么两个多项式相等就可推出当自变数取任意允许值时，两个多项式的值都是相等的．在这种意义下，我们把两个多项式相等也可以说成“恒等”.

例 3.3　已知多项式

$$f(x)=x^3+(a+3)x^2+bx-1$$

与多项式

$$g(x)=x^3-(1-b)x^2+(10-a)x-1$$

相等，试求 a,b 的值.

解：设 $f(x)=g(x)$, 且都已是降幂标准式，所以它们的各同次项系数对应相等．因而有

$$\begin{cases} a+3=-(1-b)\\ b=10-a \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} a-b=-4\\ a+b=10 \end{cases}$$

所以

$$a = 3, \qquad b = 7$$

例 3.4 已知一个恒等式:

$$-11x^2 + 23x = a(3+x)(3-x) + b(2x-1)(3-x) + c(3+x)(2x-1)$$

试求 a, b, c.

分析: 如果设

$$\begin{aligned} f(x) &= -11x^2 + 23x \\ g(x) &= a(3+x)(3-x) + b(2x-1)(3-x) + c(3+x)(2x-1) \end{aligned}$$

由题目知 $f(x) = g(x)$, 再根据定义 3, 将 $g(x)$ 的表达式展开并整理成降幂排列的标准式，写出含有 a, b, c 的方程组，从而解出 a, b, c; 这样的方法可行，但太繁. 还可以从函数的观点出发，由于 $f(x) = g(x)$, 所以给 x 代以任意实数 t, 都有 $f(t) = g(t)$. 本题中只要恰当选择 x 的值，就可以简便地求出 a, b, c.

解: 由已知恒等式右边式子的特点，我们可以分别选取 $x = \dfrac{1}{2}, -3, 3$ 代入，得

$$\begin{cases} \dfrac{35}{4} = \dfrac{35}{4}a \\ -168 = -42b \\ -30 = -45c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

练习

1. 什么叫零次多项式? 什么叫零多项式? 它们的区别是什么?
2. 把下列多项式整理成降幂标准式，并分别求出 x=1, 10，t 时的值
   (a) $f(2) = \dfrac{1}{2}x^3 - \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{3}{4}x^2 - \dfrac{1}{2}x - 7 + \dfrac{1}{6}x^3$
   (b) $g(x) = 7 + 6x + 4x^3 + 5x^2 + 3x^4 + x^6 + 2x^5$
3. 试求下列等式成立的充要条件
   (a) $x^2 + b_{n+1}x^{n-1} + \cdots + b_1x + b_0 = x^n - 3x - 1$;
   (b) $x^2 + b_{n+1}x^{n-1} + \cdots + b_1x + b_0 = x^m + 1$

二、多项式的加法与乘法

关于多项式的加法与乘法，我们在初中就已经学过．两个多项式进行加法运算的要点是合并同类项，其运算结果叫做这两个多项式的和；两个多项式进行乘法运算的要点是利用分配律和指数运算律，其运算结果叫做这两个多项式的积.

回忆已学过的多项式加法与乘法运算，我们可系统归纳如下：

（一）加法与乘法的封闭性

系数在同一个数系范围内的两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的和 $f(x)+g(x)$ 与积 $f(x)g(x)$ 仍然是一个多项式，而且它们的系数仍在原来数系范围内．这就是多项式加法与乘法的封闭性.

例如，两个有理系数多项式

$$f(x)=2x^3+\frac{1}{2}x^2-x+1,\qquad g(x)=3x^2+2x-3$$

的和与积

$$f(x)+g(x)=2x^3+\frac{7}{2}x^2-5x-2$$
$$f(x)g(x)=6x^5+\frac{11}{2}x^4-26x^3-\frac{25}{2}x^2+23x-3$$

都是有理系数多项式.

（二）多项式的加法与乘法的基本性质

对于一元多项式的加法与乘法，有以下性质：

1. 满足结合律，即对于任意多项式 $f(x),g(x),h(x)$ 总有

$$[f(x)+g(x)]+h(x)=f(x)+[g(x)+h(x)]$$
$$[f(x)\cdot g(x)]\cdot h(x)=f(x)\cdot g(x)\cdot[h(x)]$$

这就使我们在进行加或乘法的运算中，可以省略括号而按任何顺序进行.

2. 满足交换律，即

$$f(x)+g(x)=g(x)+f(x)\qquad f(x)\cdot g(x)=g(x)\cdot f(x)$$

这就使我们在进行加或乘法的运算中，可以任意交换参加运算的多项式的位置.

3. 满足乘法对加法的分配律，即

$$f(x) \cdot [g(x) + h(x)] = f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot h(x)$$

或者

$$[f(x) + g(x)] \cdot h(x) = f(x) \cdot h(z) + g(x) \cdot h(x)$$

4. 存在零多项式. 与零次多项式 1, 对任意多项式 $f(x)$, 它们满足以下特性:

$$0 + f(x) = f(x) + 0 = f(x)$$
$$0 \cdot f(x) = f(x) \cdot 0 = 0$$
$$1 \cdot f(x) = f(x) \cdot 1 = f(x)$$

.

5. 对于任意多项式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

总存在一个多项式 $-f(x)$,

$$-f(x) = -a_n x^n + (-a_{n-1}) x^{n-1} + \cdots + (-a_1) x + (-a_0)$$

使得 $[-f(x)] + f(x) = f(x) + [-f(x)] = 0$，我们把这个多项式 $-f(x)$ 称为多项式 $f(x)$ 的负多项式.

例如，多项式 $g(x) = \sqrt{2} x^2 - x^3$ 的负多项式就是

$$-g(x) = -\sqrt{2} x^2 + x^3$$

（三）两多项式的和与积的次数

设 $f(x)$ 是 n 次多项式，$g(x)$ 是 m 次多项式，那么它们的和 $f(x) + g(y)$ 也是一个多项式，这个多项式的次数 p 有以下几种情形:

- 当 $m \neq n$ 时，$p = \max\{m, n\}$
- 当 $m = n$ 时，$p \leq n$

特别地，当 $f(x) = -g(x)$ 时，$f(x) + g(x)$ 为零多项式，它不定义次数.

两多项式的积 $f(x) \cdot g(x)$ 也是一个多项式，这个多项式的次数 $q = m + n$; 特别地，当 $f(x), g(x)$ 之中至少有一为零多项式时，$f(x) \cdot g(x) = 0$, 它不定义次数.

（四）两个多项式的减法

两多项式的减法运算结果，叫做两多项式的差，记为 $f(x)-g(x)$, 其意义为

$$f(x)-g(x)=f(x)+[-g(x)]$$

由于负多项式 $-g(x)$ 的存在及多项式加法封闭性，因而 $f(x)-g(x)$ 仍是一个多项式，所以多项式对减法也是封闭的．又因为，

$$[f(x)-g(x)]+g(x)=f(x)$$

所以，多项式的减法是加法的逆运算.

以上各条可知，系数在指定数系范围内的多项式集合，对加、减、乘三种运算都是封闭的，而且对加、乘运算也有着像数系运算通性那样的良好性质，这就大大方便了运算.

对于多元多项式也可以作类似的整理，归纳，这里仅着重指出：

1. 多元多项式的每一项的次数，是指所含各个元的指数之和；一个多项式的次数，是指所含各项次数中的最大数.

2. 如果一个多元多项式的各项次数都相等，那么，这个多项式就叫做齐次多项式.

   例如：$f(x,y)=x^3-2x^2y+3y^3$ 叫二元三次齐次多项式；$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$ 叫做三元二次齐次多项式.

3. 两个齐次多项式的乘积，仍是一个齐次多项式；但两个齐次多项式的和，却不一定还是齐次多项式.

练习

1. 已知 $f(x)$ 是 n 次多项式，$g(x)$ 是 m 次多项式，（m,n 都是非负整数），试问：

   (a) $f(x),g(x)$ 分别最多有几项？最少又有几项？

   (b) 它们的和 $f(x)+g(x)$ 与积 $f(x)\cdot g(x)$ 最多各有几项？最少各有几项？

2. 计算下列各式：

   (a) $(x+a)^4$

   (b) $(x+a)(x^3-ax^2+a^2x-a^3)$

(c) $(x-b)(x^n+bx^{n-1}+\cdots+b^{n-1}x+b^n)$

(d) $(x+y+z)^3$

(e) $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

3. 不求出乘积的所有各项，你能直接写出下列乘积中的 x^3, x^5 与 x^8 的系数来吗?

$$(2x^5-3x^4+x^3+2x-7)\cdot(x^4-x^2+x-1)$$

4. 证明:

(a) 若 $f(x)\cdot g(x)=0$, 则 $f(x),g(x)$ 中至少有一个零多项式;

(b) 若 $(x+p)(x+2q)+(x+2p)(x+q)$ 是一个多项式的完全平方，则 $9p^2-14pq+9q^2=0$.

5. 若 $f(x)=x^n+nx^{n-1}+1$, $g(x)=x^m+mx^{m-1}-1$, 试证明: $f(x)\cdot g(x)=g(x)\cdot f(x)$

三、多项式的带余除法

多项式集合对于加、减、乘法都是封闭的，但对于乘法的逆运算——除法却是不封闭的. 例如，多项式 $f(x)=1$, $g(x)=x$ 就找不出一个多项式 $q(x)$, 能使 $f(x)=q(x)\cdot g(x)$.

这个性质与整数集合很相似. 正因为这样，在初中我们曾学习了一元多项式的带余除法，并且学习了用长除法，分离系数法，综合除法以及待定系数法去求两个非零多项式的商式和余式.

正和整数的带余除法相似，一元多项式的带余除法，就是由 $f(x), g(x)\neq 0$ 而求出 $q(x)$, $r(x)$, 使它们满足

$$f(x)=q(x)\cdot g(x)+r(x)$$

其中，$\deg r(x)<\deg g(x)$ 或 $r(x)=0$. 并把 $f(x)$, $g(x)$, $q(x)$ 和 $r(x)$ 分别称为被除式、除式、商式和余式.

例 3.5 已知 $f(x)=2x^4+x^3+x^2+x+1$, $g(x)=3x^2+2x+3$, 试求 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的商式、余式.

解: 用分离系数法，作长除法如下:

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 2+1+1+1+1 & 3+2+3 \\ \cline{3-3}
-) & 2+\frac{4}{3}+2 & \frac{2}{3}-\frac{1}{9}-\frac{7}{27}\cdots\cdots\text{商式} \\ \cline{1-2}
 & -\frac{1}{3}-1+1 & \\
-) & -\frac{1}{3}-\frac{2}{9}-\frac{1}{3} & \\ \cline{1-2}
 & -\frac{7}{9}+\frac{4}{3}+1 & \\
-) & -\frac{7}{9}-\frac{14}{27}-\frac{7}{9} & \\ \cline{1-2}
 & +\frac{50}{27}+\frac{16}{9} & \cdots\cdots\text{余式}
\end{array}
$$

因此:

$$
\begin{aligned}
&\text{商式}\quad q(x)=\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{9}x-\frac{7}{27}\\
&\text{余式}\quad r(x)=\frac{50}{27}x+\frac{16}{9}
\end{aligned}
$$

例 3.6 试求 $f(x)=4x^4+8x^3-3x^2-7x$ 除以 $g(x)=2x+3$ 所得的商式 $q(x)$,余式 $r(x)$.

解: 选用综合除法求解,因为 $2x+3=2\left[x-\left(-\frac{3}{2}\right)\right]$,所以用分离系数法作综合除法如下:

$$
\begin{array}{r|l}
4+8-3-7+0 & -\frac{3}{2} \\ \cline{2-2}
-6-3+9-3 & \\ \hline
4+2-6+2\boxed{-3} &
\end{array}
$$

所以 $f(x)$ 除以 $\left(x+\frac{3}{2}\right)$ 得商式 $4x^3+2x^2-6x+2$,余式 -3. 即所求的商式为 $q(x)=4x^3+2x^2-6x+2$,余式为 $r(x)=-3$.

容易看出以上两个例子中所得的结果,都符合带余除法恒等式

$$f(x)=q(x)\cdot g(x)+r(x)$$

一般地,多项式带余除法,有以下重要定理:

定理

对于任意两个多项式 $f(x)$, $g(x) \neq 0$, 总是存在唯一的两个多项式 $q(x), r(x)$, 使得等式 $f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$ 成立, 并且满足 $\deg r(x) < \deg g(x)$ 或 $r(x) = 0$.

分析： 这个定理的内容既指出了 $q(x), r(x)$ 的存在性——可以找到，又指出了 $q(x), r(x)$ 对于给定的 $f(x), g(x) \neq 0$ 是唯一的——没有第二个. 因而，证明理应从这两个方面进行.

证明： 先证存在性，可按 $f(x), g(x)$ 的次数分为三种情况考虑.

1. 若 $f(x) = 0$, 则不论 $g(x)$ 是什么样的非零多项式,都可以取 $q(x) = r(x) = 0$, 显然满足
$$f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x), \quad 且 r(x) = 0$$
2. 若 $f(x) \neq 0$, 且 $\deg f(x) < \deg g(x)$，则可取 $q(x) = 0$, $r(x) = f(x)$. 同样满足
$$f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x), \quad 且 \deg r(x) < \deg g(x)$$
3. 若 $f(x) \neq 0$, 且 $\deg f(x) \geq \deg g(x)$，则可以按下面的方法求出 $q(x), r(x)$:
首先用 $g(x)$ 的最高次项去除 $f(x)$ 的最高次项，可得到商 $q_1(x)$ 与余 $f_1(x)$，使等式
$$f(x) = q_1(x) \cdot y(x) + f_1(x) \tag{3.3}$$
成立，其中 $f_1(x)$ 至少比 $f(x)$ 降低一次，即 $\deg f_1(x) < \deg f(x)$，或 $f_1(x) = 0$. 这时可能有两种情况出现:
(a) 若 $\deg f_1(x) < \deg g(x)$，或 $f_1(x) = 0$，我们就取
$$q(x) = q_1(x), \qquad r(x) = f_1(x)$$
显然定理条件被满足;
(b) 若 $\deg f_1(x) \geq \deg g(x)$, 我们就对 $f_1(x)$ 与 $g(x)$ 两个多项式去做上述同样的运算.

其次用 $g(x)$ 的最高次项去除 $f_1(x)$ 的最高次项，可得到商式 $q_2(x)$ 与余式 $f_2(x)$, 使等式
$$f_1(x) = q_2(x) \cdot g(x) + f_2(x) \tag{3.4}$$
成立，其中 $f_2(x)$ 的次数又至少比 $f_1(x)$ 的次数降低一次，即 $\deg f_2(x) < \deg f_1(x)$，或 $f_2(x) = 0$，这时，

(a) 若 $\deg f_2(x) < \deg g(x)$，或 $f_2(x) = 0$，由 (3.3)、(3.4) 式得

$$f(x) = [q_1(x) + q_2(x)] \cdot g(x) + f_2(x)$$

我们就取 $q(x) = q_1(x) + q_2(x)$,　$r(x) = f_2(x)$. 定理显然被满足;

(b) 若 $\deg f_2(x) \geq \deg g(x)$，就对 $f_2(x)$ 与 $g(x)$ 做上述同样运算，同样可以将 $f_2(x)$ 的次数降低至少一次，得到商式 $q_3(x)$ 与余式 $f_3(x)$,⋯⋯ 作上述同样的分析、处理.

再次，由于 $\deg f(x)$ 是一个非负整数，经过有限次的逐次至少减一，总会有一次（设第 k 次）达到 $\deg f_k(x) < \deg g(x)$ 或 $f_k(x) = 0$. 于是，我们可得等式

$$f_{k-1}(x) = q_k(x) \cdot g(x) + f_k(x) \tag{k}$$

综上所述，由等式 (3.3)、(3.4)、⋯⋯(k)，就可以得到

$$\begin{aligned} f(x) &= q_1(x) \cdot g(x) + f_1(x) \\ &= [g_1(x) + q_2(x)] \cdot g(x) + f_2(x) \\ &= \cdots\cdots \\ &= [q_1(x) + q_2(x) + \cdots + q_k(x)] \cdot g(x) + f_k(x) \end{aligned}$$

其中，$\deg f_k(x) < \deg g(x)$ 或 $f_k(x) = 0$.

这时，我们就取

$$\begin{aligned} q(x) &= q_1(x) + q_2(x) + \cdots + q_k(x) \\ r(x) &= f_k(x) \end{aligned}$$

显然，这样定理的条件被满足. 存在性证毕.

下面再证 $q(x)$ 与 $r(x)q$ 的唯一性. 假设除 $q(x), r(x)$ 外，还存在另外一组 $q'(x), r'(x)$ 也满足

1. $f(x) = q'(x) \cdot g(x) + r'(x)$，且 $\deg r'(x) < \deg g(x)$ 或 $r'(x) = 0$. 结合已有的 $q(x)$, $r(x)$ 满足.

2. $f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$，且 $\deg r(x) < \deg g(x)$ 或 $r(x) = 0$ 就可以得出

$$q(x) \cdot g(x) + r(x) = q'(x) \cdot g(x) + r'(x)$$

所以

$$[q(x) - q'(x)] \cdot g(x) = r'(x) - r(x)$$

在此等式中，如果 $q(x)-q'(x)\neq 0$，则有

$$\deg\{[q(x)-q'(x)]\cdot g(x)\}\geq \deg g(x)$$

但是，由上面的情形又有 $\deg[r'(x)-r(x)]<\deg g(x)$ 或 $[r'(x)-r(x)]$ 不定义次数，这是不可能的．所以

$$q'(x)-q(x)=0 \quad \Rightarrow \quad q'(x)=q(x)$$

又由于 $g(x)\neq 0$, 因而 $r'(x)-r(x)=0$, 即 $r'(x)=r(x)$. 因此, $q'(x)=q(x)$, $r'(x)=r(x)$．唯一性证毕.

带余除法是一元多项式的特有运算，但对于二元齐次多项式，我们也可以把其中的一元看作常数来进行带余除法．但是，当余式不为零时，由于选作常数的元的不同，商式与余式也会不同的.

例 3.7 已知 $f(x,y)=2x^3+7x^2y+13xy^2+5y^3$, $g(x,y)=2x+y$, 试求：

1. 把 y 看作常数时
2. 把 x 看作常数时

$f(x,y)$ 除以 $g(x,y)$ 所得的商式 $q(x,y)$ 与余式 $r(x,y)$.

解：

$$\begin{array}{r|l} 2+7+13+5 & -\dfrac{1}{2} \\ -1-3-5 & \\ \hline 2\ \boxed{2+6+10}+0 & \\ 1+3+5 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 5+13+7+2 & -2 \\ -10-6-2 & \\ \hline 5+3+1+0 & \end{array}$$

1. $q(x,y)=x^2+3xy+5y^2$, $\qquad r(x,y)=0$
2. $q(x,y)=5y^2+3xy+x^2$, $\qquad r(x,y)=0$

例 3.8 已知 $f(x,y)=2x^3+7x^2y+13xy^2+y^3$, $g(x,y)=2x+y$．要求同例 3.7.

解：

$$
\begin{array}{r|l}
2+7+13+1 & -\dfrac{1}{2} \\
-1-3-5 & \\
\hline
\multicolumn{1}{r}{2\ \boxed{2+6+10}-4} & \\
\multicolumn{1}{r}{1+3+5\quad\ } &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
1+13+7+2 & -2 \\
-2-22+30 & \\
\hline
\multicolumn{1}{r}{1+11-15+32} &
\end{array}
$$

1. $q(x,y)=x^2+3xy+5y^2,\qquad r(x,y)=-4y^3$

2. $q(x,y)=y^2+11xy-15x^2,\qquad r(x,y)=32x^3$

练习

1. 若 n 次多项式 $f(x)$ 除以 m 次多项式 $g(x)$, 试确定所得商式和余式的次数.
2. 求 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的商式 $q(x)$ 及余式 $r(x)$
   (a) $f(x)=x^3+3x^2-x+7,\quad g(x)=x+2$
   (b) $f(x)=x^3+3x^2-x+7,\quad g(x)=2x+1$
   (c) $f(x)=4x^4+4x^3+5x^2+2x+1,\quad g(x)=2x^2+x+1$
   (d) $f(x)=x^5+30a^5,\quad g(x)=x+2a$
   (e) $f(x)=x^3+3ax^2+(2a^2-a)x+(a-1),\quad g(x)=x+a-1$
   (f) $f(x)=42x^9-13x^7-104x^5+84x^3+9x,\quad g(x)=6x^4+11x^2+1$
3. 若已知除式 $g(x)=2x^2-x+3$, 商式 $q(x)=x^2-5$, 余式 $r(x)=3x+1$, 试求被除式 $f(x)$.
4. 试任选一元作常数，求下列 $f(x,y)$ 除以 $g(x,y)$ 所得的商式与余式：
   (a) $f(x,y)=2x^4-x^3y-2x^2y^2-2xy^3-y^4,\quad g(x,y)=2x^2+xy+y^2$
   (b) $f(x,y)=2x-x^3y-2xy^3-y^4,\quad g(x,y)=2x^2+xy+y^2$
5. 求 $a^3-b^3+c^3+3abc$ 除以 $a-b+c$ 所得的商式与余式.

习题 3.1

1. 试求证

$$\begin{vmatrix} a_1+x & b_1+x & c_1+x \\ a_2+x & b_2+x & c_2+x \\ a_3+x & b_3+x & c_3+x \end{vmatrix}$$

是一个次数不大于 1 的多项式或一个零多项式，并求出 $p(1)$ 的值.

2. 不求乘积的各项，只计算下列乘积中 x^{20}、x^{12} 两项的系数

$$(a_{13}x^{13}+a_{12}x^{12}+\cdots+a_1x+a_0)(b_9x^9+b_8x^8+\cdots+b_1x+b_0)$$

3. 证明恒等式

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(bx-ay)^2$$

4. 已知 $f(x)=x^7+\dfrac{1}{128}$, $g(x)=2x+1$，求 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 所得的商式 $q(x)$ 及余式 $r(x)$.

5. 求 $f(x,y)=x^2y+xy^2+xy-x-y-1$ 除以 $g(x,y)=xy-1$ 所得的商式与余式.

6. 已知

$$\begin{aligned} h(x)&=x^2+px+q \\ f(x)&=px^3+(p^2+q)x^2+(2pq+r)x+q^2+s \\ g(x)&=px^3+(p^2-q)x^2+rx-q^2+s \end{aligned}$$

试求证：$f(x)$ 除以 $h(x)$, $g(x)$ 除以 $h(x)$ 分别得到的余式或同时为零，或同时不为零.

7. 如果已知 $f(x)=q(x)\cdot g(x)+r(x)$, 且 $\deg r(x)>\deg g(x)$ 或 $r(x)=0$，k 是非零常数，试问：

   (a) $kf(x)$ 除以 $g(x)$ 的商式、余式各是什么？

   (b) $f(x)$ 除以 $k\cdot g(x)$ 商式、余式又是什么？

   (c) $kf(x)$ 除以 $k\cdot g(x)$ 的商式、余式各是什么？

8. 已知 $f(x)=x^3-2x^2-x+3$,

   试求：$f(-1)$, $f(0)$, $f(x+1)-f(x)$, $f(x^2+1)$.

9. 已知 $f(x)=x^4+4x^3+6ax^2+4bx+c$ 除以 $g(x)=x^3+3x^2+9x+3$ 时的余式 $r(x)=0$, 试求 a,b,c 以及商式 $q(x)$.

10. 已知 $f(x)=x^3+2x^2+3x+2$ 除以整系数多项式 $g(x)$ 所得的商式和余式都是 $h(x)$, 试求 $g(x)$ 与 $h(x)$ （其中 $h(x)$ 为非常数的整系数多项式).

第二节　余式定理与因式定理

在初中代数中已经学习过余式定理，它是直接由带余除法引出来的一个重要定理，在代数学中有一系列的理论和应用价值，本节将进一步学习和推广这一定理.

一、余式定理

对多项式的讨论，可以从形式上作带余除法，从而求得商式及余式；也可以从函数观点求得在 x 取某一值时的值，这两种观点有什么联系呢？要沟通这两种观点的方法，就是余式定理.

余式定理

用一次多项式 $x-\alpha$ 去除多项式 $f(x)$ 所得的余式是一个常数，这个常数就等于 $f(\alpha)$.

证明： $f(x)$ 除以 $x-\alpha$，由带余除法得：

$$f(x)=(x-\alpha)\cdot q(x)+r$$

令 $x=\alpha$，即得 $f(\alpha)=r$，所以

$$f(x)=q(x)\cdot(x-\alpha)+f(\alpha)$$

这样一来，我们若要求 $f(x)$ 除以一次式 $x-\alpha$ 的余式时，除用带余除法外，还可以用余式定理直接求出多项式的值 $f(\alpha)$. 两种观点，两种方法的效果是一样的.

例 3.9 试求 $f(x)$ 除以 $g(x)=k(x+\alpha)$ 所得的余式.

解： 除式 $g(x)=k\left[x-\left(-\dfrac{\alpha}{k}\right)\right]$

如果设 $g_1(x)=x-\left(-\dfrac{\alpha}{k}\right)$，则 $g(x)=k\cdot g_1(x)$，由余式定理可知 $f(x)$ 除以 $g_1(x)$ 所得的余式为

$$r_1=f\left(-\frac{\alpha}{k}\right)$$

又根据习题 3.1 中第 7 题的结论：除式乘以一个非零数 k 时，余式不变，所以 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 所得的余式就等于 $f(x)$ 除以 $g_1(x)$ 所得的余式．所以

$$r=r_1=f\left(-\frac{\alpha}{k}\right)$$

例 3.10　试求 $f(x)$ 除以 $g(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$ 的余式.

解：设 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 所得的商式为 $q(x)$，余式为 $r(x)$，则有

$$f(x)=q(x)(x-\alpha)(x-\beta)+r(x) \tag{3.5}$$

其中，$0\le \deg r(x)<2$ 或 $r(x)=0$.

因而可进一步设 $r(x)=ax+b$，代入 (3.5) 得

$$f(x)=q(x)(x-\alpha)(x-\beta)+ax+b \tag{3.6}$$

令 $x=\alpha$，由 (3.6) 得

$$f(\alpha)=a\alpha+b \tag{3.7}$$

令 $x=\beta$，由 (3.6) 得

$$f(\alpha)=a\beta+b \tag{3.8}$$

将 (3.7), (3.8) 联立可以解出

$$a=\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta},\qquad b=\frac{\alpha f(\beta)-\beta f(\alpha)}{\alpha-\beta}$$

所以，所求的余式为

$$r(x)=\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}x+\frac{\alpha f(\beta)-\beta f(\alpha)}{\alpha-\beta}$$

练习

1. 设 $f(x)=x^5-6x^3+x^2-20x+24$，试求 $f(x)$ 除以下列各式的余

数：

$$x-1;\qquad x+1;\qquad 2x+1;\qquad 3x-2$$

2. 试求

(a) $k\cdot f(x)$ 除以 $x-\alpha$ 的余式；

(b) $(x^2+1)f(x)$ 除以 $x+\beta$ 的余式；

(c) $k(x^2-1)f(x)+3x-1$ 除以 $x-m$ 的余式.

3. 如果 $f(x)$ 除以 -2 的余式为 2, 除以 $x+3$ 的余式为 4, 那么 $f(x)$ 除以 x^2+x-6 的余式是什么?

二、因式定理

两个多项式做带余除法时，如果 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 所得的余式 $r(x)=0$, 即

$$f(x)=q(x)\cdot g(x)$$

我们就说 $f(x)$ 能被 $g(x)$ 整除，也可以说 $g(x)$ 整除 $f(x)$ 或 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的一个因式，$f(x)$ 是 $g(x)$ 一个倍式. 显然，它们的商式 $q(x)$ 也是 $f(x)$ 的一个因式，而 $f(x)$ 也是 $q(x)$ 的一个倍式.

由余式定理可以推证出下列因式定理:

因式定理

$(x-\alpha)$ 是 $f(x)$ 的一个因式的必要充分条件是 $f(\alpha)=0$.

证明： 先证必要性. 由于 $(x-\alpha)$ 是 $f(x)$ 的一个因式，因而有

$$f(x)=(x-\alpha)\cdot q(x)$$

这就是说，$f(x)$ 除以 $x-\alpha$ 时，余式 $r=0$.

但由余式定理知，$f(x)$ 除以 $x-\alpha$ 的余式为 $f(\alpha)$, 因此，$f(\alpha)=0$.

再证充分性. 由于 $f(\alpha)=0$, 因而根据余式定理可以得出

$$f(x)=q(x)\cdot(x-\alpha)+f(\alpha)$$

即

$$f(x)=q(x)(x-\alpha)$$

因此 $x-\alpha$ 是 $f(x)$ 的因式.

我们已经知道，若在 $x=\alpha$ 时，$f(x)$ 的值 $f(\alpha)=0$, 则称 α 是 $f(x)$ 的一个根，或者说，α 是 $f(x)$ 的一个零点. 如，$f(x)=2x^2-7x+3$, 由于 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=f(3)=0$, 因而就说 $\dfrac{1}{2}, 3$ 都是 $f(x)$ 的根.

这样一来，因式定理又可以叙述为：$(x-\alpha)$ 是 $f(x)$ 的一个因式的充要条件是 α 为 $f(x)$ 的一个根.

因式定理还可以推广到一般，这就是：

若 $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_k)$ 是 $f(x)$ 的因式的必要充分条件是 $f(\alpha_1)=f(\alpha_2)=\cdots=f(\alpha_k)=0$. 也就是 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ 都是 $f(x)$ 的根（其中 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ 两两不等).

证明：必要性是显然的，因为若对于两两不等的数 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ 来说，$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_k)$ 都是 $f(x)$ 的因式，则有

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_k)\cdot q(x)$$

所以 $f(\alpha_1)=f(\alpha_2)=\cdots=f(\alpha_k)=0$

即 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ 为 $f(x)$ 的 k 个不同的根.

再证充分性，由于 $f(\alpha_1)=0$, 因而根据因式定理可有

$$f(x)=(x-\alpha_1)\cdot q_1(x) \tag{3.9}$$

将 $x=\alpha_2$ 代入上式，得

$$f(\alpha_2)=(\alpha_2-\alpha_1)\cdot q_1(\alpha_2)$$

其中，因 $f(\alpha_2)=0$, $\alpha_2-\alpha_1\neq 0$, 所以

$$q_1(\alpha_2)=0$$

再根据因式定理，就得出 α_2 是 $g_1(x)$ 的根，即

$$q_1(x)=(a-\alpha_2)\cdot q_2(x) \tag{3.10}$$

将 (3.10) 代入 (3.9) 得

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot q_2(x) \tag{3.11}$$

就这样逐步推下去，我们可以得到

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_{k-1})\cdot q_{k-1}(x) \tag{3.12}$$

将 $x = \alpha_k$ 代入 (3.11) 式，得

$$f(\alpha_k) = (\alpha_k - \alpha_1)\cdots(\alpha_k - \alpha_{k-1}) \cdot q_{k-1}(\alpha_k)$$

其中，已知 $f(\alpha_k) = 0$, 且 $(\alpha_k - \alpha_1), (\alpha_k - \alpha_2), \ldots, (\alpha_k - \alpha_{k-1})$ 都不等于零，因而有 $q_{k-1}(\alpha_k) = 0$.

由因式定理可知 α_k 为 $q_{k-1}(x)$ 的一个根，即

$$q_{k-1}(x) = (x - \alpha_k) \cdot q_k(x) \tag{3.13}$$

将 (3.13) 式代入 (3.12) 式，就得出所证结论：

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_{k-1})(x - \alpha_k) \cdot q_k(x)$$

即：$(x - \alpha_1), (x - \alpha_2), \ldots, (x - \alpha_k)$ 都是 $f(x)$ 的因式.

因式定理及推广在沟通两种观点研究多项式的问题上，作用更为突出. 数 α 是多项式的一个零点（根）、一次式 $(x - \alpha)$ 是 $f(x)$ 的一个因式、一次式 $(x - \alpha)$ 能够整除 $f(x)$、$f(\alpha) = 0$ 都是同一件事情的不同说法，在多项式理论的学习中是很重要的.

例 3.11　证明恒等式

$$a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = (a-b)(b-c)(c-a)$$

证明: 等式左边是一个三元多项式, 可以分别将 a, b, c 看作元, 同时将 b, c; a, c; b, a 看作常数，依次将 $a = b$, $b = c$, $c = a$ 代入，分别得到

$$b^2(b-c) + b^2(c-b) + c^2(b-b) = 0$$
$$a^2(c-c) + c^2(c-a) + c^2(a-b) = 0$$
$$a^2(b-a) = b^2(a-a) + a^2(a-b) = 0$$

因此，根据因式定理可得

$$a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = k(a-b)(b-c)(c-a)$$

由多项式恒等不难断定 $k = 1$. 所以

$$a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = (a-b)(b-c)(c-a)$$

例 3.12　已知 $f(x) = x^3 + px^2 + qx + 6$ 含有因式 $(x-3)(x-1)$, 试求 p, q 的值及 $f(x)$ 的另一个一次因式.

解： 由已知可设 $f(x)$ 的另一个一次因式为 $ax+b$，因此：

$$f(x)=x^3+px^2+qx+6=(x-3)(x-1)(ax+b)$$

即：

$$x^3+px^2+qx+6=ax^3+(-4a+b)x^2+(3a-4b)x+3b$$

由待定系数法，可以求出

$$a=1,\qquad b=2,\qquad p=-2,\qquad q=-5$$

所以，$f(x)$ 的另一个一次因式为 $x+2$.

练习

1. 用因式定理分解因式

   (a) x^3-3x+2　　(b) $2x^3-x^2-5x-2$

2. 已知 $f(x)=3x^3+mx^2+nx-2$ 含有因式 $3x-2$，且 $f(-1)=-20$，试求 m,n 的值.

3. 试证明恒等式

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc=(a+b)(b+c)(c+a)$$

三、余式定理、因式定理的推论

在余式定理与因式定理的基础上，对一元多项式，还有下面两个重要推论：

推论 1

一元 n 次多项式 $f(x)$ 最多只能有 n 个不相同的根.

证明： 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\quad(a_n\neq 0)$，若已知两两不等的 n 个数 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 都是 $f(x)$ 的根，则由因式定理可知

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)\cdot q(x)\tag{3.14}$$

但由于 $\deg f(x)=n$，且 $\deg[(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)]=n$，所以 (3.14) 式中 $q(x)$ 只能是零次多项式，即 $\deg g(x)=0$，再由多项式相等的定义，可知

$$q(x)=a_n\neq 0$$

若再选任一个与 α_i, $(i=1,2,\ldots,n)$ 都不相等的数 α_{n+1} 代入 (3.14) 式，得

$$f(\alpha_{n+1})=(\alpha_{n+1}-\alpha_1)(\alpha_{n+1}-\alpha_2)\cdots(\alpha_{n+1}-\alpha_n)\cdot\alpha_n$$

其中，由 α_i, $(i=1,2,\ldots,n,n+1)$ 都不相等，可知

$$\alpha_{n+1}-\alpha_i\neq 0\ (i=1,2,\ldots,n),\quad 且\quad a_n\neq 0$$

$\therefore\quad f(\alpha_{n+1})\neq 0$

因此，α_{n+1} 不是 $f(x)$ 的根，所以，$f(x)$ 最多只有 n 个不同根.

推论 2

如果多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的次数都不大于 n, 且有 $n+1$ 个两两不相等的数 $\alpha1,\alpha2,\ldots,a_{n+1}$ 能使这两个多项式相应的值相等，即

$$f(\alpha_i)=g(\alpha_i)\quad(i=1,2,\ldots,n,n+1)$$

那么，这两个多项式必定相等，即 $f(x)=g(x)$.

证明： 用反证法．假设，$f(x)\neq g(x)$, 则多项式 $F(x)=f(x)-g(x)$ 就是一个次数不大于 n 的多项式．但是由已知条件知道

$$F(\alpha_i)=f(\alpha_i)-g(\alpha_i)=0,\quad(i=1,2,\ldots,n,n+1)$$

这就是说，$F(x)$ 有 $n+1$ 个不同的根．这与推论 1 的结论是矛盾的．所以 $f(x)=g(x)$.

例 3.13 不用乘法展开下式，求证：

$$x(x-1)(x-2)(x-3)+1=(x^2-3x+1)^2$$

证明： 设 $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)+1$, $g(x)=(x^2-3x+1)^2$．由于它们都是 4 次多项式，因而根据推论 2，只要验证当 x 取任意五个不同的数时，这两个多项式对应的值都相等就可以了，

分别取 $x=0,1,2,3,4$, 则可得：

$$f(0)=1=g(0);\qquad f(1)=1=g(1);\qquad f(2)=1=g(2)$$

$$f(3)=1=g(3);\qquad f(4)=25=g(4)$$

所以 $f(x)=g(x)$，即：

$$x(x-1)(x-2)(x-3)+1=(x^2-3x+1)^2$$

例 3.14 已知 $f(x)$ 是一个五次多项式, 且可被 x^2-2 整除, 且 $f(1)=f(-1)=0$, 试确定这个多项式 $f(x)$ 的各项系数间的关系.

解: 设 $f(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f$, 由已知及因式定理可知

$$f(x)=(x^2-2)(x+1)(x-1)\cdot q(x)$$

又由于 $f(x)$ 是五次多项式, 因而 $q(x)$ 必定是一次式, 不妨设为: $q(x)=mx+n\ (m\neq 0)$. 所以

$$ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f=(x^2-2)(x+1)(x-1)(mx+n)$$

即

$$ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f=mx^5+nx^4-3mx^3-3nx^2+2mx+2n$$

由多项式相等的定义可得:

$$\begin{cases} a=m \\ b=n \\ c=-3m \\ d=-3n \\ e=2m \\ f=2n \end{cases} \qquad (m\neq 0)$$

由此方程组可消去 m,n, 就得

$$\begin{cases} a=-\dfrac{1}{3}x=\dfrac{1}{2}e\neq 0 \\ b=-\dfrac{1}{3}d=\dfrac{1}{2}f \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} 6a=-2c=3e\neq 0 \\ 6b=-2d=3f \end{cases}$$

这就是 $f(x)$ 的各系数之间的关系.

练习

1. 已知 $f(1)=f(3)=0$, $f(2)=-4$, 试求二次多项式 $f(x)$.
2. 已知 $f(-1)=f(-4)=2$, $f(-3)=8$, $f(-2)=4$. 试求三次多项式 $f(x)$.

3. 一个三次多项式 $f(x)$, 已知 $f(x)+1$ 可被 $(x+1)^2$ 整除; 又 $3-f(x)$ 有一个根为 -2, 并含有一个因式为一次二项式的平方. 试求 $f(x)$.

习题 3.2

1. 已知 $f(x)=x^3+3x^2+x+1$, 求 $f(x-1)$, $f(x+1)$, $f(-x^2)$

2. 已知 $f(x-1)=x^3+3x^2+x-1$, 求 $f(x)$, $f(-x)$.

3. 已知 $f(x)=x^3+ax^2+5x-4$, 且 $f(2)=f(-3)$, 试求 a 及 $f(2)$.

4. 若有一多项式 $g(x)$, 已知 $g(-1)=1$, $g(4)=11$, 试求 $f(x)$ 被 $(x+1)(x-4)$ 除后的余数.

5. 如果 $f(x)$ 被 $2x-3$ 除以后余数为 4, 试求多项式 $(x^2+1)\cdot f(x)+7$ 被 $2x-3$ 除的余数.

6. 已知恒等式

$$x^3+x^2+x+1=a+b(x+1)+c(x+1)(x+3)\ d(x+1)(x+3)(x+5)$$

试求 a,b,c,d 的值.

7. 用余式定理及其推论证明:

$$\begin{aligned}(b-c)(x-b)(x-c)+(c-a)(x-c)(x-a)&\\+(a-b)(x-a)(z-b)+(a-b)(b-c)(c-a)&=0\end{aligned}$$

8. 证明 $2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$ 能被 $(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$ 整除，并求其商式.

9. 若 $f(x)=x^3+kx^2-20x+6$ 能被 $x-3$ 整除，试求常数 k.

10. 若 $f(x)=2x^3-x^2+ax+b$ 能被 $(x+2)(x-4)$ 整除，试求常数 a,b.

11. $f(x)=2x^3-ax+1$, $g(x)=x^3+5x+b$ 能不能有四个不同的数 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha 4$, 使得 $f(\alpha_i)=g(\alpha_i)\quad(i=1,2,3,4)$，为什么?

12. 利用因式定理，分解因式

(a) x^3-3x+2

(b) $x^3-(a+2b)x^2+b(2a+b)x-ab^2$

13. 如果 $x^2+5xy+ay^2+x-y-2=f(x,y)$ 可以分解为 x,y 的一次因式的积，试求 a 的值.

第三节 最高公因式与辗转相除法

关于两个多项式的公因式、最高公因式的概念，我们在初中代数中已经学过，同时，我们还学习过用辗转相除、分解因式两种方法去求最高公因式，还学习了两个多项式的公倍式与最低公倍式以及求最低公倍式的方法，并得出了最低，公倍式与最高公因式之间的关系

$$[f(x),g(x)]=\frac{k\cdot f(x)\cdot g(x)}{(f(x)\cdot g(x))}$$

由于最高公因式与辗转相除法在多项式理论中占有重要地位，本节将重点进一步加深学习这两个内容.

一、最高公因式

首先，我们在已经学习的基础上，较严格地给出最高公因式的定义：

定义

对给定的非零多项式 $f(x),g(x)$, 如果有一个多项式 $d(x)$, 能满足以下三个条件：

1. $d(x)$ 的首项系数为 1,
2. $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式,
3. $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的其它任何一个公因式 $\ell(x)$ 的倍式，即 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的任一公因式 $\ell(x)$ 是 $d(x)$ 的因式. 那么，$d(x)$ 就叫做多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最高公因式，一般记作 $(f(x),g(x))=d(x)$

上述的条件 1 是为了保证 $(f(x),g(x))$ 的唯一性而提出的. 事实上，若 $d(x)$, $d_1(x)$ 都是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最高公因式，则由条件 2、3 就可得出 $d(x)$ 与 $d_1(x)$ 能互相整除，这就有 $d(x)=kd_1(x)$, 再由条件 1 就得到 $d(x)=d_1(x)$. 这就说明，$(f(x),g(x))$ 如果存在，一定是唯一的.

我们还知道，若 $f(x),g(x)$ 都已分解成不可约的因式的乘积，则在 $f(x),g(x)$ 的所有公因式中，取每一个公因式的指数较小者，这些因式的乘幂的乘积，再

乘以一个能使其首项系数为 1 的常数，就是 $(f(x), g(x))$. 这就是我们常用的求最高公因式的视察法.

例 3.15 $f(x) = x(2x-1)^4(x+3)^3$，$g(x) = x^2(2x-1)^2(x+2)^2$

试求 $(f(x), g(x))$

解： 公因式为 $x, 2x-1$，x 的指数 $f(x)$ 中的 1，$2x-1$ 的指数取 $g(x)$ 中的 2，得：

$$(f(x), g(x)) = k \cdot x(2x-1)^2$$

k 是待定系数，为使 $(f(x), g(x))$ 的首期系数为 1，显然应取 $k = \dfrac{1}{4}$，所以

$$(f(x), g(x)) = \frac{1}{4}x(2x-1)^2$$

例 3.16 $f(x) = x^2 - 3x + 2$, $g(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 8x + 5$

试求 $(f(x), g(x))$

解： 由视察知，$f(x) = (x-1)(x-2)$，因而 $(f(x), g(x))$ 不可能有 $(x-1)$, $(x-2)$ 外的因式，再由因式定理，求得 $g(1) = 0$, $g(2) \neq 0$，所以 $x-1$ 是 $f(x), g(x)$ 唯一的公因式. 所以

$$(f(x), g(x)) = x - 1$$

定理 1

给定非零多项式 $f(x), g(x)$，对于任意两个多项式 $u(x), v(x)$ 来说，$f(x), g(x)$ 的公因式也一定是 $u(x) \cdot f(x) + v(x) \cdot g(x)$ 的因式.

证明： 设 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个公因式，则

$$f(x) = d(x) \cdot f_1(x), \qquad g(x) = d(x) \cdot g_1(x)$$

所以

$$u(x) \cdot f(x) + v(x) \cdot g(x) = d(x)[u(x) \cdot f_1(x) + v(x) \cdot g_1(x)]$$

即 $d(x)$ 也是 $u(x) \cdot f(x) + v(x) \cdot g(x)$ 的一个因式.

例 3.17 已知 $f(x) = x^4 - x^3 + 3x^2 - 4x - 12$, $g(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 + 3x - 22$. 求 $(f(x), g(x))$.

分析： 应用定理 1 的结论，我们可以取 $u(x)=1, v(x)=-1$，从而可得 $f(x)-g(x)=x^2-7x+10$. 只要从 $x^2-7x+10$ 的因式中就可以找出 $f(x), g(x)$ 的公因式的范围，再应用因式定理即可确定 $(f(x), g(x))$.

解： 因为 $f(x)-g(x)=x^2-7x+10=(x-2)(x-5)$，所以 $f(x), g(x)$ 的一次公因式只可能是 $x-2$ 与 $x-5$，于是由因式定理，求得 $f(2)=g(2)=0$，但 $f(5)\neq 0$. 所以 $(f(x), g(x))=x-2$.

例 3.18 已知 $f(x)=2x^3-3x^2-3x+2$, $g(x)=3x^3-2x^2-7x-2$. 求 $(f(x), g(x))$.

解： 因为 $f(x)+g(x)=5x^3-5x^2-10x=5x(x+1)(x-2)$ 其中 x 显然不是 $f(x), g(x)$ 的公因式，再用综合除法求得

$$x+1|f(x),\qquad x+1|g(x),\qquad x-2|f(x),\qquad x-2|g(x)$$

所以

$$(f(x), g(x))=(x+1)(x-2)$$

练习

求下列各组多项式的最高公因式：

1. $f(x)=x^3-1,\quad g(x)=x^4+2x^3+3x^2+2x+1$
2. $f(x)=2x^3-3x^2-11x+6,\quad g(x)=4x^3+3x^2-9x+2$
3. $f(x)=2x^4-5x^3-2x+1,\quad g(x)=2x^4-7x^3+6x^2-4x+1$

二、辗转相除法

辗转相除法的理论基础在于多项式的带余除法及本节的定理 1.

定理 2

对于非零多项式 $f(x), g(x), r(x)$, 若存在多项式 $q(x)$ 使得 $f(x)=q(x)\cdot g(x)+r(x)$, 则有

$$\big(f(x),\ g(x)\big)=\big(g(x),\ r(x)\big)$$

证明： 设 $\big(g(x),\ r(x)\big)=d(x)$，则

1. $d(x)$ 首项系数是 1;

2. $d(x)$ 是 $g(x), r(x)$ 的公因式，由定理 1 可知，$d(x)$ 也是 $f(x)$ 的因式，因而也是 $f(x), g(x)$ 的公因式;

3. 再设 $f(x)$, $g(x)$ 的任一个公因式为 $\ell(x)$, 由于 $r(x)=f(x)-q(x)\cdot g(x)$, 所以，$\ell(x)$ 也是 $r(x)$ 的一个因式，因而 $\ell(x)$ 就是 $g(x)$,$r(x)$ 的公因式，再由最高公因式的定义知，$\ell(x)$ 是 $d(x)$ 的因式. 所以

$$\big(f(x), g(x)\big) = d(x) = \big(g(x), r(x)\big)$$

这样一个定理对于求两个已知多项式的最高公因式起到一些什么作用呢? 两个多项式中总有一个多项式的次数不大于另一个多项式的次数，不妨设 $g(x)$ 设的次数不大于 $f(x)$ 的次数，则因在带余除法中，$r(x)$ 的次数小于 $g(x)$ 的次数或 $r(x)=0$. （注意，定理 2 并不要求 $r(x)$ 满足带余除法中对余式的要求，但带余除法中的余式满足定理 2 中 $r(x)$ 的条件）这就说明 $r(x)$ 的次数小于 $f(x)$ 的次数，把求 $\big(f(x), g(x)\big)$ 转化为求 $\big(g(x), r(x)\big)$ 实际上是一个降次的过程.

次数是降低了，那么有没有把握求出 $\big(g(x), r(x)\big)$ 呢? 现在可以对 $g(x)$, $r(x)$ 再进行带余除法，求出又一个余式 $r_2(x)$（为了易于辨别，我们把第一次余式记为 $r_1(x)$，类似地把第一次第二次所得的商式分别记为 $q_1(x)$, $q_2(x)$, 以后以此类推)，循此以往，可得到一系列的带余除法:

$$\begin{aligned}
f(x) &= q_1(x)g(x)+r_1(x), \quad \deg r_1(x)<\deg g(x)\\
g(x) &= q_2(x)r_1(x)+r_2(x), \quad \deg r_2(x)<\deg r_1(x)\\
r_1(x) &= q_3(x)r_2(x)+r_3(x), \quad \deg r_3(x)<\deg r_2(x)\\
r_2(x) &= q_4(x)r_3(x)+r_4(x), \quad \deg r_4(x)<\deg r_3(x)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
r_{i-1}(x) &= q_{i+1}(x)r_i(x)+r_{i+1}(x), \quad \deg r_{i+1}(x)<\deg r_i(x)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
r_{s-1}(x) &= q_{s+1}(x)r_s(x)
\end{aligned} \tag{3.15}$$

最后一个等式表示 $r_s(x)$ 整除 $r_{s-1}(x)$, 或者说 $r_{s+1}(x)=0$. 此时就有

$$\begin{aligned}
\big(f(x), g(x)\big) &= \big(g(x), r_1(x)\big) = \big(r_1(x), r_2(x)\big) = \cdots\\
&= \big(r_i(x), r_{i+1}(x)\big) = \cdots\\
&= \big(r_{s-1}(x), r_s(x)\big)
\end{aligned}$$

显然有 $\big(r_{s-1}(x), r_s(x)\big) = \dfrac{1}{c} r_s(x)$，其中：$c$ 是 $r_s(x)$ 首项系数. 因此：

$$\big(f(x), g(x)\big) = \frac{1}{c} r_s(x)$$

自然会提出这样一个问题，如果始终不能整除，怎么办？我们来证明不会出现始终不能整除的情况.

设 $\deg g(x)$ 是一个有限的非负整数 m. 若 $r_1(x) \neq 0$，令 $\deg r_i(x) = m_i$，则

$$m > m_1 > m_2 > \cdots > m_i > \cdots > m_{s-1} > m_s$$

注意到 m 和所有 m_i 都是非负整数，而数列 $m, m_1, m_2, \ldots, m_i, \ldots$ 是一个严格递减的数列，则这个数列一定是有限的. 例如 $m = 100$ 时，数列最多不会超过 101 项. 在某种情形下，若 $m_s = 0$，即 $r_s(x)$ 是一个非零常数时，$r_s(x)$ 就整除 $r_{s-1}(x)$ 了. 在这种情况下，$\big(f(x), g(x)\big) = 1$，我们说 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互质. 这就说明，即使 $f(x)$, $g(x)$ 互质，它们的最高公因式 1 仍可由上述累次的带余除法求得，由此我们得到：

定理 3（辗转相除法定理）

任给两个非零多项式 $f(x)$, $g(x)$ 进行 (3.15) 式所给出的辗转相除，通过有限次的运算总可求出唯一存在的 $\big(f(x), g(x)\big)$.

存在性已在前面叙述，至于唯一性则在给出 $\big(f(x), g(x)\big)$ 的定义后即已阐明.

例 3.19 $f(x) = 6x^5 - 4x^4 - 11x^3 - 3x^2 - 3x - 1$,

$g(x) = 4x^4 + 2x^3 - 18x^2 + 3x - 5$

求 $\big(f(x), g(x)\big)$

解：

$$\begin{array}{r|r}
 & 6-4-11-3-3-1 \\
 & \times 2 \\
\hline
 & 12-8-22-6-6-2 \\
3 & 12+6-54+9-15 \\
\hline
 & -14+32-15+9-2 \\
 & \times(-2) \\
\hline
 & 28-64+30-18+4 \\
7 & 28+14-126+21-35 \\
\hline
-39 & -78+156-39+39 \\
\hline
 & 2-4+1-1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
4+2-18+3-5 & \\
4-8+2-2 & 2 \\
\hline
10-20+5-5 & \\
10-20+5-5 & 5 \\
\hline
\end{array}$$

所以 $\big(f(x),g(x)\big)=\dfrac{1}{2}(2x^3-4x^2+x-1)$.

在习题 3.1 第 7 题中，我们知道对被除式 $f(x)$ 乘以非零常数 k, 给予 $r(x)$ 的影响也不过是乘一个常数 k, 而我们所求的最后的 $r_s(x)$ 本来就得乘以 $\dfrac{1}{c}$（c 是 $r_s(x)$ 的首项系数）才成为 $\big(f(x),g(x)\big)$, 所以实际上对 $\big(f(x),g(x)\big)$ 完全没有影响，即使对部分余式 $f_1(x)$(如例 3.19) 的 $-14x^4+3x^3-15x^2+9x-2$ 乘以非零常数 k, 对 $\big(f(x),g(x)\big)$ 也没有影响，因为 $\big(f(x),g(x)\big)=\big(f_1(x),g(x)\big)$ 在辗转相除法中，实际上我们已把求 $\big(f(x),g(x)\big)$ 转化为求 $\big(f_1(x),g(x)\big)$, (注意在定理 2 中，并未要求 $\deg r(x)<\deg g(x)$，所以 $f_1(x)$ 又起一个被除式的角色，因而乘以非零常数 k，对于所得的 $r(x)$ 仍不过相关一个常数因子，而这一点上面已说明对 $\big(f(x),g(x)\big)$ 不会有影响的.

辗转相除法是一个运算过程较繁的方法. 如果 $f(x)$, $g(x)$ 很容易分解因式，或者说如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 这两个多项式中至少有一个很容易分解成不可约因式的乘积，我们当然宁愿用分解因式的方法来求这两个多项式的最高公因式. 但是多项式的因式分解并不总能做到. 例如把一个三次多项式与一个四次多项式相乘，求出作为乘积的七次多项式是轻而易举的；但反过来，给出一个七次多项式，要求分解成两个次数较低的多项式的乘积，一般是很难做到的. 相比之下，辗转相除法尽管较繁，却是有效、能算，总能求出两个多项式的最高公因式. 再进一步考察任何一个多项式的不可约因式分解的表达式，是否总存在. 如果存在，是否唯一，我们在以前的学习中并未作出结论. 将来的进一步学习可以对这个问题作出肯定的答案. 而这个结论要通过一系列命题的推导才能得出，辗转相除法之有效、能算恰恰是推导这一系列命题的基础之一. 因此，从理论上来，辗转相除法是不可替代的重要的数学方法.

我们还可以看到，用辗转相除法求两个多项式的最高公因式的过程实际上是不断地进行带余除法的过程，而带余除法的运算只包括多项式的加法、减法，乘法及非零数之间的除法以及单项式相除的指数运算律. 这些在以有理数为系数的多项式集合中或是在以实数为系数的多项式集合中都是封闭的. 因此，我们不难得出这样的结论：两个有理系数多项式的最高公因式仍是一个有理系数多项式，两个实系数多项式的最高公因式仍是一个实系数多项式.

例 3.20　$f(x)=x^4-10x^2+1$,　$g(x)=x^4-4\sqrt{2}x^3+6x^2+4\sqrt{2}x+1$

求 $\big(f(x),g(x)\big)$

解：

$$
\begin{array}{r|l}
1 & 1+\quad 0-\ 10+\ \ 0+\ \ 1 \\
 & 1-4\sqrt{2}+\ 6+4\sqrt{2}+1 \\
\hline
 & 4\sqrt{2}\ \big|\ 4\sqrt{2}-16-4\sqrt{2}+0 \\
1 & \qquad 1-2\sqrt{2}-\ 1+\ \ 0 \\
 & \qquad 1-2\sqrt{2}-\ 1 \\
\hline
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l|l}
1-4\sqrt{2}+6+4\sqrt{2}+1 & 1 \\
1-2\sqrt{2}-1+0 & \\
\hline
-2\sqrt{2}+7+4\sqrt{2}+1 & \\
-2\sqrt{2}+8+2\sqrt{2}+0 & -2\sqrt{2} \\
\hline
-1\ \big|\ -1+2\sqrt{2}+1 & \\
\quad 1-2\sqrt{2}-1 & \\
\end{array}
$$

所以 $\big(f(x), g(x)\big) = x^2 - 2\sqrt{2}x - 1$.

练习

求 $\big(f(x), g(x)\big)$:

1. $f(x) = x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18$

   $g(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 20x - 24$

2. $f(x) = x^4 - 7x^3 - 22x^2 + 139x + 105$

   $g(x) = x^4 - 8x^3 - 11x^2 + 116x + 70$

3. $f(x) = x^3 + x^2 + x + 2, \quad g(x) = x^3 - x - 1$

习题 3.3

1. $f(x) = 2x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 4x + 3, \quad g(x) = 2x^4 - 5x^3 - 6x^2 - 12x - 9$

   求：$\big(f(x), g(x)\big)$ 及 $\big[f(x), g(x)\big]$. 其中 $\big[f(x), g(x)\big]$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最低公倍式.

2. $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 13x - 6, \quad g(x) = 2x^4 - x^3 + 2x^2 + 3x - 2$

   $h(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 5x + 6$

   求：$\big(f(x), g(x), h(x)\big)$

3. $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1, \qquad g(x) = x^3 + bx^2 + ax + 1$

   求证：$(f, g) = 1$，除非 $a = b$ 或 $a + b + 2 = 0$.

4. $f(x) = 2x^2 - 3x + 1, \qquad g(x) = 3x^2 - 2x + 1$

利用辗转相除法中关系式 (3.15) 的逆推，找出两个多项式 $\mu(x)$, $\nu(x)$ 使下式成立：

$$\mu(x)\cdot f(x)+\nu(x)\cdot g(x)=(f,g)$$

5. $f(x)=2x^2-x+2,\qquad g(x)=x^2+x+1$

   试求两个多项式 $\mu(x)$, $\nu(x)$ 使下式成立：

$$\mu(x)\cdot f(x)+\nu(x)\cdot g(x)=1$$

6. m,n 是大于 1 的自然数，求 $f(x)=x^m-1$ 及 $g(x)=x^n-1$ 的最高公因式.

第四节　插值公式

如果 n 次多项式 $f(x)$ 在取 $n+1$ 个不同值时的函数值已给出，应用余式定理推论 2 就可以求出唯一的多项式函数 $f(x)$. 在 $f(x)$ 是一次多项式时，$y=ax+b$ 的图象是一条直线，推论 2 对于这个一次函数的论断的几何意义就是“两点确定一直线”. 在一般情形下，一个 n 次多项式函数 $y=f(x)$ 的曲线，由其所过的 $n+1$ 个点所唯一确定，反之，仅给 $n+1$ 个横坐标不同的点，总可以唯一确定一个次数不大于 n 的多项式函数 $y=f(x)$ 的曲线. 在数学中，这样的唯一性定理常常是计算问题解决问题的基本依据. 这一节就讨论这样一些问题.

一、余式定理推论的应用举例

例 3.21　已知 $f(2)=8$, $f(3)=f(4)=f(5)=0$, 求次数不大于 3 的多项式 $f(x)$.

分析： 如果设 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, 用 $x=2,3,4,5$ 四个数相继代入，然后解四元一次方程组求出 a,b,c,d. 虽然肯定可以求出来，但计算量太大. 现已知中有有利条件：$f(3)=f(4)=f(5)=0$, 我们就可以应用因式定理把问题简化.

解： 由已知 $f(3)=f(4)=f(5)=0$, 因而可以设 $f(x)=(x-3)(x-4)(x-5)q(x)$.

由于 $(x-3)(x-4)(x-5)$ 已是 3 次，而 $f(x)$ 的次数不大于 3, 所以 $q(x)$ 应为常数，即

$$f(x)=a_3(x-3)(x-4)(x-5)$$

再以 $x=2$ 代入，得 $3=-6a_3$，因此：$a_3=-\dfrac{1}{2}$

$$\therefore \quad f(x)=-\frac{1}{2}(x-3)(x-4)(x-5)$$

例 3.22 已知：$f_1(2)=3$, $f_1(3)=f_1(4)=f_1(5)=0$, $f_2(3)=6$, $f_2(2)=f_2(4)=f_2(5)=0$, $f_3(4)=-3$, $f_3(2)=f_3(3)=f_3(5)=0$, $f_4(5)=12$, $f_4(2)=f_4(3)=f_4(4)=0$

求四个次数不大于 3 的多项式 $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$.

解： 解法同例 3.21，可得

$$\begin{aligned}
f_1(x)&=-\frac{1}{2}(x-3)(x-4)(x-5)\\
f_2(x)&=3(x-2)(x-4)(x-5)\\
f_3(x)&=\frac{3}{2}(x-2)(x-3)(x-5)\\
f_4(x)&=2(x-2)(x-3)(x-4)
\end{aligned}$$

以上两例说明在已知函数值有若干个为零时，充分应用因式定理可以减少对待定系数的繁杂的计算量.（若一开始就令 $f(x)=a_3a^3+a_2x^2+a_1x+a_0$, 就得解关于待定系数 a_3,a_2,a_1,a_0 的四元一次方程组）. 在已知函数值中没有零，或者很少为零的情况下，我们可以把所求的多项式 $f(x)$ 分解为若干个多项式的和其中每一个多项式的函数值只有一个非零数.

例 3.23 已知 $f(2)=3$, $f(3)=6$, $f(4)=-3$, $f(5)=12$, 求次数不大于 3 的多项式 $f(x)$.

分析： 实际上 $f(x)$ 正是例中四个多项式的和.

解： 令 $f_1(x),f_2(x),f_3(x),f_4(x)$ 分别如例 3.22 中的已知条件所述，$F(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+f_4(x)$, 则

$$F(2)=f_1(2)+f_2(2)+f_3(2)+f_4(2)=3+0+0+0=3$$

同样可求得 $F(3)=6$, $F(4)=-3$, $F(5)=12$, 可见：

$$\begin{aligned}
f(x)=F(x)=&-\frac{1}{2}(x-3)(x-4)(x-5)+3(x-2)(x-4)(x-5)\\
&+\frac{3}{2}(x-2)(x-3)(x-5)+2(x-2)(x-3)(x-4)
\end{aligned}$$

例 3.24　已知 $\alpha_i\ (i=1,2,3,4)$ 是四个两两不等的数．$c_i\ (i=1,2,3,4)$ 是另外四个数．试求次数不大于 3 的多项式 $f(x)$, 使得 $f(\alpha_i)=c_i$, $(i=1,2,3,4)$

解：与例 3.23 的处理方法相类似，可假设四个多项式 $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)$，$f_i(\alpha_j)=\delta_{ij}c_i$

此处

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}\quad (i,j=1,2,3,4)$$

则显然有 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+f_4(x)$．还可以简记为

$$f(x)=\sum_{i=1}^{4}f_i(x)$$

其中，$f_i(x)=k(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)$

$\because\quad f_1(\alpha_1)=c_1$

$\therefore\quad k_1=\dfrac{c_1}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)}$

$$\therefore\quad f_1(x)=\frac{c_1(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)}$$

同理可求得：

$$f_2(x)=\frac{c_2(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)}$$
$$f_3(x)=\frac{c_3(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_4)}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)}$$
$$f_4(x)=\frac{c_4(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)}{(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)}$$

因此：

$$\begin{aligned}f(x)=&\frac{c_1(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)}+\frac{c_2(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)}\\&+\frac{c_3(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_4)}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)}+\frac{c_4(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)}{(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)}\end{aligned}$$

还可以简单记为：

$$f(x)=\sum_{i=1}^{4}c_i\frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_{i-1})(x-\alpha_{i+1})\cdots(x-\alpha_4)}{(\alpha_i-\alpha_1)(\alpha_i-\alpha_2)\cdots(\alpha_i-\alpha_{i-1})(\alpha_i-\alpha_{i+1})\cdots(\alpha_i-\alpha_4)}$$

例 3.25 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 表三个两两不等的数，试用 $f(\alpha_1)$，$f(\alpha_2)$，$f(\alpha_3)$ 来表示 $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)$ 除多项式 $f(x)$ 所得的余式.

解：

$$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)q(x) + r(x)$$

并且：$\deg r(x) \leq 2$ 或 $r(x) = 0$，则

$$r(\alpha_1) = f(\alpha_1), \qquad r(\alpha_2) = f(\alpha_2), \qquad r(\alpha_3) = f(\alpha_3)$$

仿照上例可得：

$$\begin{aligned} r(x) = {} & f(\alpha_1)\frac{(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)} + f(\alpha_2)\frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)} \\ & + f(\alpha_3)\frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)} \end{aligned}$$

练习

1. 已知 $f(1) = f(2) = f(3) = 2$，$f(0) = -16$. 求三次多项式 $f(x)$.
2. 已知 $f(-3) = 42$，$f(-2) = 6$，$f(-1) = 0$，$f(0) = 0$，$f(1) = 6$. 求四次多项式 $f(x)$.

二、插值公式

把上述例题所得的结果予以推广，应有下列定理：

定理

设 $f(x)$ 是一个次数不大于 n 的多项式，α_i $(i = 1, 2, \ldots, n, n+1)$ 表示 $n+1$ 个两两不等的数，b_i $(i = 1, 2, \ldots, n, n+1)$ 是任意 $n+1$ 个数，而且 $f(\alpha_i) = b_i$，$(i = 1, 2, \ldots, n, n+1)$，则：

$$\begin{cases} f(x) = \sum_{i=1}^{n+1} f_i(x) \\ f_i(x) = b_i\dfrac{(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_{i-1})(x-\alpha_{i+1})\cdots(x-\alpha_{n+1})}{(\alpha_i-\alpha_1)\cdots(\alpha_i-\alpha_{i-1})(\alpha_i-\alpha_{i+1})\cdots(\alpha_i-\alpha_{n+1})} \end{cases}$$

证明： 令 $f_i(x)$ 是由下列条件所唯一确定的次数不大于 n 的多项式：

$$f_i(\alpha_j) = \delta_{ij} b_i, \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n+1)$$

则由因式定理可知

$$f_i(x)=c_i(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_{i-1})(x-\alpha_{i+1})\cdots(x-\alpha_{n+1})$$

由 $f_i(\alpha_i)=b_i$ 定出 c_i 的值，可得

$$c_i=\frac{b_1}{(\alpha_i-\alpha_1)\cdots(\alpha_i-\alpha_{i-1})(\alpha_i-\alpha_{i+1})\cdots(\alpha_i-\alpha_{n+1})}$$

$$\therefore\quad f_i(x)=b_i\frac{(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_{i-1})(x-\alpha_{i+1})\cdots(x-\alpha_{n+1})}{(\alpha_i-\alpha_1)\cdots(\alpha_i-\alpha_{i-1})(\alpha_i-\alpha_{i+1})\cdots(\alpha_i-\alpha_{n+1})}$$

显然有 $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{n+1}f_i(x)$.

上述公式叫做拉格朗日的插值公式.

例 3.26 令 $g_n(x)$ 为一个 n 次多项式，它在 $0,1,\ldots,n-1,n$ 时的值分别为 $0,0,\ldots,0,1$, 求 $g_n(x)$.

解： 由插值公式直接得出

$$\begin{aligned}g_n(x)&=\frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)}{1\cdot 2\cdots n}\\&=\frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}\end{aligned}$$

$n!$ 对非负整数 n 都有定义, 读作“n 阶乘”, 当 $n>0$ 时, $n!=1\times2\times\cdots\times n$, 并规定 $0!=1$.

注意 $g_n(x)$ 是应用插值公式最容易求出的多项式，我们以后将会有意识地引进这样的多项式.

例 3.27 已知 $f(x)$ 是一个次数不大于 3 的多项式，$f(0)=1$, $f(1)=4$, $f(2)=15$, $f(3)=40$, 不求出 $f(x)$, 直接计算 $f(1.5)$.

解： 由插值公式可知

$$\begin{aligned}f(1.5)=&1\cdot\frac{(1.5-1)(1.5-2)(1.5-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)}+4\cdot\frac{(1.5-0)(1.5-2)(1.5-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)}\\&+15\cdot\frac{(1.5-0)(1.5-1)(1.5-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)}+40\cdot\frac{(1.5-0)(1.5-1)(1.5-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)}\\=&8.125\end{aligned}$$

例 3.28　某人身旁没有三角函数表（或带有三角函数的计算器），却需要计算 $\sin 23°$，他记得一些特殊角的三角函数：

$$\sin 0° = 0, \qquad \sin 15° = \frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2}) = 0.259, \qquad \sin 30° = 0.5$$

$$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707, \qquad \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$$

他根据这些数据把函数 $y = f(x) = \sin x$ 近似地看成一个次数不大于 4 的多项式，问如此计算出来的 $\sin 23°$ 是多少？

解： 由已知 $f(0) = 0$, $f(15) = 0.259$, $f(30) = 0.5$, $f(45) = 0.707$, $f(60) = 0.866$, 求 $f(23)$.

方法同例 3.26

$$\begin{aligned} f(23) = 0.259 &\times \frac{23(23-30)(23-45)(23-60)}{15(15-30)(15-45)(15-60)} \\ &+ 0.5 \times \frac{23(23-15)(23-45)(23-60)}{30(30-15)(30-45)(30-60)} \\ &+ 0.707 \times \frac{23(23-15)(23-30)(23-60)}{45(45-15)(45-30)(45-60)} \\ &+ 0.866 \times \frac{23(23-15)(23-30)(23-45)}{60(60-15)(60-30)(60-45)} \\ \approx &\ \frac{23}{15^4} \times (246+814-244+44) \approx 0.391 \end{aligned}$$

实际上从三角函数表上$\boxed{\text{F}}$出的 $\sin 23°$ 如果要求精确到 0.001 也是 0.391.

关于一个函数为什么可以近似地用多项式来代替，在什么条件下才可以近似地用多项式来代替，我们到学习微积分时再加以研究．这里只说明插值公式有这样一个“插值”的应用.

练习

1. 已知 $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 3$, $f(4) = 4$, 试求一个次数不大于 4 的多项式 $f(x)$.

2. 已知 $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 3$, $f(4) = 4$, 若求一个多项式 $f(x)$, 没有说明其次数不大于 4, 能否得出 $f(x) = x$ 的结论？为什么？举一个反例.

3. 已知 $f(x)$ 是一个二次多项式，$f(1) = 3$, $f(2) = 6$, $f(8) = 13$, 计算 $f(1.5)$.

4. 为了计算 $\sqrt{26}$, 只记得 $\sqrt{2}=1.414$, $\sqrt{3}=1.732$, 因而算得 $\sqrt{24}=4.898$, $\sqrt{25}=5$, $\sqrt{27}=5.196$, 试由这三个数据近似地计算出 $\sqrt{26}$ (精确到 0.001).

习题 3.4

1. 已知 $f(4)=0$, $f(6)=-12$, $f(7)=-20$, $f(8)=-18$, 求次数尽可能小的多项式 $f(x)$, 然后计算 $f(12)$.

2. 当 $x=2,3,4,5$ 时，$f(x)$ 的值分别为 $5,4,-7,-34$, 求三次多项式 $f(x)$.

3. 已知 $5x^2+19x+18=\dfrac{a}{2}(x-2)(x-3)-b(x-3)(x-1)+\dfrac{c}{2}(x-1)(x-2)$, 计算 a,b,c 这三个数对多项式 $5x^2+19x+18$ 来说有些什么意义?

4. a,b,c 是两两不等的三个数，已知 $f(a)=bc$, $f(b)=ca$, $f(c)=ab$, 求次数不超过 2 的多项式 $f(x)$.

5. a,b,c 是两两不等的三个数, 已知 $f(a)=b+c$, $f(b)=c+a$, $f(c)=a+b$, 求次数不超过 2 的多项式 $f(x)$.

第五节　多项式的导数与换元展开式

在本节里，我们将引进多项式的导数概念及其简单性质．并学习多项式的换元展开式，进一步把余式定理推广，为今后研究多项式函数在某定点邻近的区域内的局部性质打下一定基础.

一、多项式的导数

导数概念是微积分学中的重要概念，这里仅就多项式来讨论，我们规定:

定义 1

对任意的非负整数 n, 单项式 ax^n 的导数就是单项式 nax^{n-1}.

定义 2

对任意的非零多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 的导数就是各项导数的代数和，记作

$$f'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_1$$

同样，$f'(x)$ 的导数，记作

$$f''(x)=n(n-1)a_nx^{n-2}+(n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3}+\cdots+a_2$$

叫做多项式 $f(x)$ 的二阶导数；$f''(x)$ 的导数，记作 $f'''(x)$，叫做 $f(x)$ 的三阶导数，也是 $f'(x)$ 的二阶导数；一般地，$f'(x)$ 的 $k-1$ 阶导数，就是 $f(x)$ 的 k 阶导数，记作 $f^{(k)}(x)$，即：

$$\left[f^{(k-1)}(x)\right]'=f^{(k)}(x)$$

例 3.29 求 $f(x)=2x^3-8x^2+5x-4$ 的各阶导数.

解:

$$\begin{aligned}
f'(x)&=6x^2-16x+5\\
f''(x)&=12x-16\\
f'''(x)&=12\\
f''''(x)&=f^{(5)}(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=0, \qquad (n\geq 4)
\end{aligned}$$

显然，一元 n 次多项式的 n 阶导数是一个非零常数（零次多项式），从 $n+1$ 阶系数开始，以后各高阶导数都是零；特别地，零次多项式的导数等于零；而零多项式的各阶导数仍是零.

总之，多项式的导数仍然是多项式. 而且对于系数在整数，有理数，实数范围内的各多项式集合，求导数这种运算也是封闭的.

例 3.30 求多项式 $f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0 \quad (a_3\neq 0)$ 的各阶导数，并求出各阶导数在 $x=x_0$ 时的值.

解:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1 & f'(x_0) &= 3a_3x_0^2 + 2a_2x_0 + a_1 \\
f''(x) &= 6a_3x + 2a_2 & f''(x_0) &= 6a_3x_0 + 2a_2 \\
f'''(x) &= 6a_3 & f'''(x_0) &= 6a_3
\end{aligned}$$

$$f^{(4)}(x) = f^{(5)}(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = 0$$

$$f^{(4)}(x_0) = f^{(5)}(x_0) = \cdots = f^{(n)}(x_0) = 0$$

容易证明，多项式的导数有以下性质：

性质 1

多项式 $f(x)$ 与常数 k 乘积的导数等于 $f(x)$ 的导数与 k 的乘积，即

$$[kf(x)]' = k \cdot f'(x)$$

证明： 设 $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$，则

$$kf(x) = ka_nx^n + ka_{n-1}x^{n-1} + \cdots + ka_1x + ka_0$$

因此：

$$\begin{aligned}
[kf(x)]' &= kna_nx^{n-1} + k(n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + ka_1 \\
&= k\left[na_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1\right] \\
&= kf'(x)
\end{aligned}$$

性质 2

两多项式 $f(x), g(x)$ 和的导数等于这两个多项式的导数和，即

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

证明： 设 $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$，$g(x) = b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1x + b_0$，不失一般性，不妨设 $n > m$，则有

$$f(x) + g(x) = a_nx^n + \cdots + (a_m + b_m)x^m + \cdots + (a_1 + b_1)x + a_0 + b_0$$

因此:

$$\begin{aligned}[f(x)+g(x)]' &= na_nx^{n-1}+\cdots+m(a_m+b_m)x^{m-1}+\cdots+a_1+b_1\\ &= (na_nx^{n-1}+\cdots+ma_mx^{m-1}+\cdots+a_1)+(mb_mx^{m-1}+\cdots+b_1)\\ &= f'(x)+g'(x)\end{aligned}$$

综合性质 1, 2, 就可以得出: 对任意的两个常数 μ, λ 和多项式 $f(x), g(x)$, 下述等式是成立的, 即

$$[\mu\cdot f(x)+\lambda\cdot g(x)]' = \mu f'(x)+\lambda g'(x)$$

性质 3

两个多项式 $f(x), g(x)$ 的乘积的导数等于 $f(x)$ 的导数乘以 $g(x)$ 与 $g(x)$ 的导数乘以 $f(x)$ 的和, 即

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$$

性质 4

一个多项式 $f(x)$ 的 m 次方的导数为

$$[f^m(x)]' = mf^{m-1}(x)f'(x)$$

性质 3, 4 的证明亦可以像前两个性质一样通过实际计算进行, 但较繁, 这里略去不证, 同学们可通过练习验证.

例 3.31 求下列多项式的导数:

1. $f(x)=g(x)h(x)$
2. $f(x)=g^2(x)+2g(x)h(x)+h^2(x)$

这里 $g(x)=3x^2-1$, $h(x)=8x^3+2x-1$

解:

1. $f(x)=(3x^2-1)(8x^3+2x-1)$

$$\begin{aligned}f'(x) &= (3x^2-1)'(8x^3+2x-1)+(8x^3+2x-1)'(3x^2-1)\\ &= 6x(8x^3+2x-1)+(24x^2+2)(3x^2-1)\\ &= 48x^4+12x^2-6x+72x^4-18x^2-2\\ &= 120x^4-6x^2-6x-2\end{aligned}$$

2. $f(x)=g^2(x)+2g(x)h(x)+h^2(x)=[g(x)+h(x)]^2=(8x^3+3x^2+2x-2)^2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(8x^3+3x^2+2x-2)(8x^3+3x^2+2x-2)' \\ &= 2(8x^3+3x^2+2x-2)(24x^2+6x+2) \\ &= 384x^5+240x^4+164x^3-60x^2-16x-8 \end{aligned}$$

练习

1. 求下列各多项式的各阶导数

   (a) $f(x)=3x^2+x-2$

   (b) $f(x)=ax^2+bx+c$

   (c) $f(x)=\dfrac{4\cdot 3}{2!}a^2x^2$

2. 对于 $f(x)=a_3x^3+a_2x^2+ax+a_0$, $g(x)=b_2x^2+b_1x+b_0$

   验证导数的性质 3 是成立的.

3. 求下列各多项式的导数:

   (a) $f(x)=\varphi^2(x)+1$

   (b) $f(x)=\varphi(x)g(x)$

   (c) $f(x)=\varphi^3(x)g(x)$

   (d) $f(x)=\varphi^2(x)-g^2(x)$

   这里 $\varphi(x)=x-2$, $g(x)=3x^3+5x-1$.

4. 试试看：你能证明 “如果 $(x-a)^k$ 能够整除 $f(x)$, 那么 $(x-a)^{k-1}$ 一定能够整除 $f'(x)$ 吗”?

二、多项式的换元展开式——泰勒公式

在初中代数中，我们曾经学习过用综合除法的方法，将任一个非零次多项式 $f(x)$ 展开成 $(x-a)$ 的幂的形式. 如果令 $x-a=t$ 则 $x=a+t$ 将它代入 $f(x)$ 后，即可将 $f(x)$ 展开成元 $t=(x-a)$ 的幂的形式，按升幂排列成:

$$f(x)=f(a+t)=c_0+c_1t+c_2t^2+\cdots+c_nt^n$$

就叫做多项式 $f(x)$ 在 $x=a$ 点的换元展开式.

这里的待定系数 c_i, $(i=0,1,2,\ldots,n)$ 显然只与 $f(x)$ 和所选定的点 a 有关. 以下我们就复习用综合除法确定这些系数的方法，并进一步研究这些系数的一般规律，得出一般公式.

例 3.32 用综合除法，将 $f(x) = 2x^2 - x - 2$ 展开成 $x-1$ 的幂的形式.

解: 用 $x-1$ 去连续除 $f(x)$, 由综合除法得

$$
\begin{array}{lll|}
2 & -1 & -2 \\
 & +2 & +1 \\
\hline
2 & +1 & \multicolumn{1}{|l}{-1\cdots\cdots c_0} \\
 & +2 & \multicolumn{1}{|l}{} \\
\cline{1-2}
2 & \multicolumn{1}{|l}{3\cdots\cdots c_1} & \\
\cline{1-1}
2\cdots\cdots c_2 & &
\end{array}
$$

$$\therefore \quad f(x) = -1 + 3(x-1) + 2(x-1)^2$$

或

$$f(1+t) = -1 + 3t + 2t^2, \qquad (x-1=t)$$

例 3.33 已知 $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, 试求:

1. $f(1+t)$
2. $f(x_0+t)$

解:

1. 这就是要求当 $x = 1+t$, 即 $t = x-1$ 时 $f(x)$ 的换元展开，可以用综合除法

$$
\begin{array}{llll|}
a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\
 & a_3 & a_2+a_3 & a_1+a_2+a_3 \\
\hline
a_3 & a_2+a_3 & a_1+a_2+a_3 & \multicolumn{1}{|l}{a_0+a_1+a_2+a_3\cdots\cdots c_0} \\
 & a_3 & a_2+2a_3 & \multicolumn{1}{|l}{} \\
\cline{1-3}
a_3 & a_2+2a_3 & \multicolumn{1}{|l}{a_1+2a_2+3a_3\cdots\cdots c_1} & \\
 & a_3 & \multicolumn{1}{|l}{} & \\
\cline{1-2}
a_3 & \multicolumn{1}{|l}{a_2+3a_3\cdots\cdots c_2} & & \\
\cline{1-1}
a_3\cdots\cdots c_3 & & &
\end{array}
$$

因此:

$$f(x) = (a_0 + a_1 + a_2 + a_3) + (a_1 + 2a_2 + 3a_3)(x-1) \\ + (a_2 + 3a_3)(x-1)^2 + a_3(x-1)^3$$

$$f(1+t) = (a_0 + a_1 + a_2 + a_3) + (a_1 + 2a_2 + 3a_3)t \\ + (a_2 + 3a_3)t^2 + a_3t^3$$

2. 直接换元，令 $x = x_0 + t$ 代入 $f(x)$, 并展开整理成 t 的升幂排列形式

$$\begin{aligned} f(x_0+t) &= a_3(x_0+t) + a_2(x_0+t)^2 + a_1(x_0+t) + a_0 \\ &= (a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + a_3x_0^3) + (a_1 + 2a_2x_0 + 3a_3x_0^2)t \\ &\quad + (a_2 + 3a_3x_0)t^2 + a_3t^3 \end{aligned}$$

为了找出换元展开式中待定系数 c_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ 的一般规律，我们对例 3.33(2) 分析并验证如下:

换元展开式中的常数项 $a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + a_3x_0^3$ 正好是 $x = x_0$ 时，多项式 $f(x)$ 的值 $f(x_0)$. 例 3.32 及例 3.33(1) 也是如此；$c_0 = f(x_0)$.

换元展开式中的一次项系数 $a_1 + 2a_2x_0 + 3a_3x_0^2$ 正好是 $x = x_0$ 时多项式 $f(x)$ 的导数 $f'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$ 的值 $f'(x_0) = a_1 + 2a_2x_0 + 3a_3x_0^2$. 例 3.32 及例 3.33(1) 也是如此；$c_1 = f'(x_0)$.

换元展开式中的二次项系数 $a_2 + 3a_3x_0$ 正是 $x = x_0$ 时，$f(x)$ 的二阶导数 $f'(x) = 6a_3x + 2a_2$ 的值的一半：$\dfrac{1}{2}f''(x_0) = a_2 + 3a_3x_0$. 例 3.32 及例 3.33(1) 也是如此；$c_2 = \dfrac{1}{2}f''(x_0)$.

换元展开式中的三次项系数 c_3, 也容易分析出它正是当 $x = x_0$ 时，$f(x)$ 的三阶导数 $f'''(x) = 6a_1$ 的值的六分之一，$\dfrac{1}{6}f'''(x_0) = a_3$, 可验证例 3.33(1) 也是如此；$c_3 = \dfrac{1}{6}f'''(x_0)$.

这样一来，利用导数概念，换元展开式就可以写成:

$$f(x_0+t) = f(x_0) + f'(x_0)t + \frac{1}{2}f''(x_0)t^2 + \frac{1}{6}f'''(x_0)t^3$$

进而可写成更有规律、便于记忆的形式

$$f(x_0+t) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}t + \frac{f''(x_0)}{2!}t^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}t^3$$

同样，例 3.33(1) 的换元展开写成

$$f(1+t) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}t + \frac{f''(1)}{2!}t^2 + \frac{f'''(1)}{3!}t^3$$

例 3.32 也可以写成

$$f(1+t)=f(1)+\frac{f'(1)}{1!}t+\frac{f''(1)}{2!}t^2=-1+3t-2t^2$$

实际上，这正是多项式换元展开式的一般规律，推广到 n 次多项式就得到重要的泰勒定理.

定理（泰勒定理）

一元 n 次多项式 $f(x)$ 在点 x_0 的换元展开式为

$$f(x_0+t)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}t+\frac{f''(x_0)}{2!}t^2+\cdots+\frac{f'''(x_0)}{n!}t^n \tag{3.16}$$

定理的一般证明这里略去，但容易验证，这个定理的内容对于零多项式、零次多项式都是适合的；对二、三次多项式我们从例 3.32 和例 3.33 也已验证过是适合的，对于其它高次多项式以后再给出确切证明，现在可以应用.

例 3.34 已知 $f(x)=x^4-2x^2+3x+5$，试求 $f(x)$ 在 $x=1$ 点的展开式.

解：

$$\begin{array}{lll}
f(x)=x^4-2x^2+3x+5 & f(1)=7 & \\
f'(x)=4x^3+4x+3 & f'(1)=3 & \\
f''(x)=12x^2-4 & f''(1)=8 & \frac{8}{2}=4 \\
f'''(x)=24x & f'''(1)=24 & \frac{24}{3!}=4 \\
f''''(x)=24 & f''''(1)=24 & \frac{24}{4!}=1
\end{array}$$

$\therefore\quad f(1+t)=7+3t+4t^2+4t^3+t^4$. 又由于 $x=a+(x-a)$，因此：

$$\begin{aligned}
f(x)&=f[a+(x-a)]\\
&=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n
\end{aligned} \tag{3.17}$$

(3.17) 式叫做多项式 $f(x)$ 在点 $x=a$ 的换元展开式.

(3.16) 与 (3.17) 本质上是相同的，都叫做泰勒公式，只是 (3.16) 式中的 t 相当于 (3.17) 式中的 $x-a$ 罢了，不过在今后应用更多的是 (3.17) 式.

例 3.35 已知 $f(x)=x^5+2x^4-2x^3+7x-5$，试将 $f(x)$ 展开成 $x+1$ 的升幂多项式.

解：

$$\begin{array}{lll}
f(x)=x^5+2x^4-x^3+7x-5 & f(-1)=-10 & \\
f'(x)=5x^4+8x^3-3x^2+7 & f'(-1)=1 & \\
f''(x)=20x^3+24x^2-6x & f''(-1)=10 & \dfrac{10}{2!}=5 \\
f'''(x)=60x^2+48x-6 & f'''(-1)=6 & \dfrac{6}{3!}=1 \\
f^{(4)}(x)=120x+48 & f^{(4)}(-1)=-72 & \dfrac{-72}{4!}=-3 \\
f^{(5)}(x)=120 & f^{(5)}(-1)=120 & \dfrac{120}{5!}=1
\end{array}$$

$$\therefore\quad f(x)=-10+(x-1)+5(x-1)^2+(x-1)^3-3(x-1)^4+(x-1)^5$$

还可以用连续作综合除法的方法，得出同样的结果．同学们可以验证一下．

练习

1. 试用秦勒公式将下列多项式在给定点展开成升幂形式：

   (a) $g(x)=7x^3-3x^2+4x-1$，在 $x=2$ 点；

   (b) $f(x)=9x^5-188$，在 $x=-2$ 点；

   (c) $h(x)=x^4-x^2-1$，在 $x=-1$ 点．

2. 试用泰勒公式将下列多项式展开成指定一次式的升幂形式：

   (a) $f(x)=2x-2x^2+x^3$, 展成 $x-1$ 的幂；

   (b) $g(x)=2x^3+24x^2+34x+30$, 展成 $x+2$ 的幂；

   (c) $h(x)=28x-27+x^3-9x^2$ 展成 $x-3$ 的幂．

三、余式定理的推广

泰勒公式，实际上就是通过多项式的恒等变形，把一个以 x 为元的多项式变换为一个以 $x-a$ 为元的升幂多项式．

有了泰勒公式，我们可以更深刻，更一般地去理解余式定理．

由泰勒公式

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

可以直观看出：

1. 若用 $x-a$ 去除 $f(x)$, 所得余式为 $r_1(x)=f(a)$, 这正是我们在第二节所学的余式定理的内容；

2. 若用 $(x-a)^2$ 去除 $f(x)$, 所得的余式为

$$r_2(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)$$

这就要比余式定理的内容进一步了;

3. 一般地，若用 $(x-a)^k$ $(k\leq n)$ 除 $f(x)$, 所得的余式为

$$r_k(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\cdots+\frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1}$$

这就是余式定理推广的结论.

例 3.36 试求 $f(x)=x^4-2x^2+8x+5$ 除以 $g(x)=(x-1)^3$ 所得的余式 $r(x)$.

解:

$$\begin{aligned}
&f(x)=x^4-2x^2+8x+5 \quad && f(1)=12\\
&f'(x)=4x^3-4x+8 && f'(1)=8\\
&f''(x)=12x^2-4 && f''(1)=8 \quad \frac{8}{2!}=4
\end{aligned}$$

$\therefore$ $f(x)$ 除以 $g(x)$ 所得的余式为

$$\begin{aligned}
r(x)&=f(1)+\frac{f'(1)}{1!}(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2\\
&=12+8(x-1)+4(x-1)^2\\
&=12-8+8x+4x^2-8x+4\\
&=4x^2+8
\end{aligned}$$

例 3.37 已知一个首项系数是 2 的三次多项式 $g(x)$ 除以 $(x-2)^3$ 所得的余式为 $2x^2+x-1$, 试求这个多项式 $g(x)$.

解: 设 $g(x)=f(2)+\dfrac{f'(2)}{1!}(x-2)+\dfrac{f''(2)}{2!}(x-2)^2+\dfrac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3$
由已知，$g(x)$ 的首项（最高次项）系数为 2, 可得

$$\frac{f'''(2)}{3!}=2 \quad\Rightarrow\quad f'''(2)=12$$

又由 $g(x)$ 除以 $(x-2)^3$ 所得余式为 $2x^2+x-1$, 可以得

$$f(2)+\frac{f'(2)}{1!}(x-2)+\frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2=2x^2+x-1$$

即：

$$\frac{1}{2}f''(2)x^2+[f'(2)-2f''(2)]x+[f(2)-2f'(2)+2f''(2)]=2x^2+x-1$$

根据多项式恒等的定义，可得：

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}f''(2)=2\\ f'(2)-2f''(2)=1\\ f(2)-2f'(2)+2f''(2)=-1\end{cases}$$

解出方程组，得：

$$f''(2)=4,\qquad f'(2)=9,\qquad f(2)=9$$

因此：

$$\begin{aligned}g(x)&=9+9(x-2)+\frac{4}{2!}(x-2)^2+\frac{12}{3!}(x-2)^3\\&=9+9(x-2)+2(x-2)^2+2(x-2)^3\\&=2x^3-10x^2+25x-17\end{aligned}$$

练习

1. 试求 $f(x)=x^4+x^3+x+1$ 除以下列各式所得的余式分别是什么？

$$x-1;\quad (x-1)^2;\quad (x-1)^3;\quad (x-1)^4$$

2. 已知 $f(x)$ 的首项系数为 3，$\deg f(x)=4$，而且 $f(x)$ 分别除以 $(x+2)$, $(x+2)^2$, $(x+2)^3$, $(x+2)^4$ 所得余式的常数项各是 $-5,-13,-25,-41$，试求 $f(x)$.

3. 多项式 $x^4+ax^3-3x^2+bx+3$ 除以 $(x-1)^2$ 所得的余式为 $x+1$，试求 a,b 的值.

习题 3.5

1. 求下列多项式的一、二、三阶导数：

   (a) $f(x)=7x^5+5x^3+3x+1$

(b) $g(x) = x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} - 4, \quad (n \geq 3)$

(c) $h(x) = 4!x^4 - 3!x^3 - 2!x^2 - 1!x - 0!$

2. 已知 $f(2) = (x-2)^2 + 1$, $g(x) = (x^2 + \sqrt{2})^3$. 试求下列各多项式的导数:

(a) $f(x) + g(x)$ (c) $f(x)g(x)$

(b) $g(x) - f(x)$ (d) $g^n(x)$

3. 已知 $f(x) = (x+1)^3(2x-1)$, 试求:

(a) $f'(x)$ (b) $\big(f(x), f'(x)\big)$

4. 已知 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_x + a_0$, $g(x) = bx^m, \quad (a, b \neq 0)$.
求证: $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$

5. 试求 $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$ 的一阶导数.

6. 将下列多项式展开成指定的一次式的幂的形式:

(a) $f(x) = 10x^4 - 12x^3 - 9x^2 - 2x - 1$, 展成 $x - 1$ 的幂;

(b) $y(x) = 7x^5 + 1$, 展成 $x + 2$ 的幂.

7. 如果 $f(x)$ 分别除以 $x-3$, $(x-3)^2$, $(x-3)^3$ 所得的余式各为 2, $2x-4$, $x^2 - 4x + 5$, 且 $f(x)$ 的首项系数为 $\dfrac{1}{2}$, 试求 f(x).

8. 求 f(x):

(a) 已知 $f'(x) = 10x^4 - 12x^3 - 9x^2 - 2x - 1$, 且 $f(1) = 2$;

(b) 已知 $f'(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, 且 $f(0) = 7$;

(c) 已知 $f'(x) = ax^2 + bx + c$, 且 $f(-1) = \dfrac{b}{2} - c$.

9. 试把 $f(x) = x^6 + 5x^4 + 3x^2 - 7$ 写成 $x^2 + 2$ 的幂的展开式.

(a) 用特定系数法 (b) 用泰勒公式法 (c) 用综合除法

10. 试求 $f(x) = x^6 + 5x^4 + 3x^2 - 7$ 分别除以 $x+3$, $(x+3)^2$, $(x+3)^3$, $(x+3)^4$, $(x+3)^5$ 所得的余式.

11. 若多项式 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 除以 $(x-1)^2$, 则得余式 $9x - 10$; 若 $f(x)$ 除以 $(x+1)^2$, 则得余式 $-11x - 10$，试求 a, b, c, d.

12. 已知 $f(x) = (x+1)^3(x-2)^2(3x+1)$, 试求:

(a) $f'(x)$

(b) $\big(f(x), f'(x)\big)$

(c) $\dfrac{f(x)}{\big(f(x), f'(x)\big)}$

(d) $\dfrac{f(x)}{\big[f(x), f'(x)\big]}$ 除以 $(x-2)^2$ 所得的余式.

本章内容要点

一、本章的主要内容是一元多项式的基础理论，其中包括:

1. 形如 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, $(a_n\neq 0)$ 的式子，叫做一元 n 次多项式（简称多项式).

   一元 n 次多项式还可以按元的升幂排列，其标准式为 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$, $(a_n\neq 0)$.

2. 两个多项式当且仅当它们的同次项系数对应相等时，这两个多项式相等. 也可以说，当两个多项式在它们的元取任意允许值时，它们的值都对应相等，这两个多项式就恒等（相等).

3. 在多项式集合内（系数在同一个数系范围内)，加、减、乘（乘方）运算是封闭的，而且满足运算通性（满足运算律、0 与 1 的运算特性及指数运算律)；一元多项式还有独特的带余除法运算，与整数除法类似，对于任意多项式 $f(x)$ 与非零多项式 $g(x)\neq 0$, 可以找到唯一的 $q(x)$, $r(x)$, 满足

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x)\quad \text{且}\quad \deg r(x)<\deg g(x)\quad \text{或}\quad r(x)=0$$

   其中，$f(x)$ 叫被除式，$g(x)$ 叫除式，$q(x)$ 叫商式，$r(x)$ 叫余式.

4. 余式定理与因式定理是由带余除法直接推导出来的两个应用广泛的重要内容，它们还有两个重要推论，必须牢固掌握，灵活应用.

5. 最高公因式与辗转相除法在理论和实用上都有重要作用，应该理解其原理，掌握其方法.

6. 多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 的导数是一种形式定义，即

$$f'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_1$$

   它与微积分学中所定义的导数概念是一致的，但这种形式定义仅对多项式适用.

二、余式定理、因式定理及它们的推论，从内容上讲，它们沟通了两种观点研究多项式，把多项式含有一次因式 $x-a$ 与多项式在 $x=a$ 这一点的值为零看作一件事的两种说法. 这样一来，在多项式的研讨中，以下几种说法就可是互通，等价的了，即

$$\begin{aligned} f(x)\text{ 含有 } x-a \text{ 的因式} &\Longleftrightarrow f(x)\text{ 可被 } x-a \text{ 整除}\\ &\Longleftrightarrow f(a)=0\\ &\Longleftrightarrow a\text{ 是 } f(x)\text{ 的一个根}\end{aligned}$$

三、由余式定理及因式定理的推论，可以推导出插值公式——拉格朗日公式:

若已知 $f(\alpha_i)=b_i$, $(i=1,2,\ldots,n,n+1)$, 则 n 次多项式 $f(x)$ 的表达式为

$$\begin{aligned} f(x)=&\, b_1\frac{(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots(x-\alpha_{n+1})}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)\cdots(\alpha_1-\alpha_{n+1})}\\ &+b_2\frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)\cdots(x-\alpha_{n+1})}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)\cdots(\alpha_2-\alpha_{n+1})}\\ &+\cdots+b_n\frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_{n-1})(x-\alpha_{n+1})}{(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)\cdots(\alpha_n-\alpha_{n-1})(\alpha_n-\alpha_{n+1})}\\ &+b_{n+1}\frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)}{(\alpha_{n+1}-\alpha_1)(\alpha_{n+1}-\alpha_2)\cdots(\alpha_{n+1}-\alpha_n)}\end{aligned}$$

或简记为:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n+1}b_i\frac{(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_{i-1})(x-\alpha_{i+1})\cdots(x-\alpha_{n+1})}{(\alpha_i-\alpha_1)\cdots(\alpha_i-\alpha_{i-1})(\alpha_i-\alpha_{i+1})\cdots(\alpha_i-\alpha_{n+1})}$$

有了插值公式，就可以由多项式在 $n+1$ 个点的 $n+1$ 个值，确定 n 次多项式的表达式，进而求出多项式在任何一点的值来.

四、应用多项式的导数概念及求法，结合初中学习过的综合除法，就可以推导出多项式的换元展开式（泰勒公式）

泰勒公式有两种形式:

1. 多项式 $f(x)$ 在 x_0 点的展开式

$$f(x_0+t)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}t+\frac{f''(x_0)}{2!}t^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}t^n$$

2. 多项式 $f(x)$ 在 $x=a$ 点的展开式

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

两种形式，本质上是一样的，2 应用较多.

五、由泰勒公式 2, 可得到余式定理及推广，这就是：

1. $f(x)$ 除以 $x-a$ 时，余式为 $f(a)$——余式定理；
2. $f(x)$ 除以 $(x-a)^2$ 时，余式为 $f(a)+\dfrac{f'(a)}{1!}(x-a)$;
3. $f(x)$ 除以 $(x-a)^k$ 时，得到的余式为

$$r_k(x)=f(x)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1}$$

六、作为多项式的基本内容，还应特别强调待定系数法的重要性，它的根据就是多项式相等的定义，它的方法要点就是引进待定系数、列出方程组解出来.

复习题三

1. 证明恒等式：

$$\begin{aligned}&\left(x+\frac{5}{2}a\right)^4-10a\left(x+\frac{5}{2}a\right)^3+35a^2\left(x+\frac{5}{2}a\right)^2-50a^3\left(x+\frac{5}{2}a\right)+24a^2\\&\quad=\left(x^2-\frac{1}{4}a^2\right)\left(x^2-\frac{9}{4}a^2\right)\end{aligned}$$

2. 若

$$\begin{aligned}(x-1)(x-2)(x-3)=p(x-1)(x+2)(x+3)+q(x+1)(x-2)(x+3)\\+r(x+1)(x+2)(x-3)\end{aligned}$$

试求 p,q,r 的值.

3. 已知 $f(x)=(x+a)(x+b)(x+c)$ 中 x^2 的系数为 0, $g(x)=(x-a)(x+b)(x+c)$ 中 x 的系数为 0, 且 $f(x)$ 中 x 的系数等于 $g(x)$ 中 x^2 的系数. 证明 a 等于 0 或 1.

4. 已知 $s=a+b+c$, 求证：

$$(as+bc)(bs+ac)(cs+ab)=(b+c)^2(c+a)^2(a+b)^2$$

5. 已知 $s=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$, 求证：

$$(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3+3abc=s^3$$

6. 分解因式：$x^3+(m+n+1)ax^2+(m+n+mn)a^2x+mna^3$

7. 若 $f_1(x)$ 除以 $g(x)$ 所得余式为 $r_1(x)$，$f_2(x)$ 除以 $g(x)$ 所得余式为 $r_2(x)$ 求证：$f_1(x)\cdot f_2(x)$ 除以 $g(x)$ 与 $r_1(x)\cdot r_2(x)$ 除以 $g(x)$ 所得余式相同.

8. 若 $x-a$ 能整除 $x^2+2ax-3b^2$, 求证：$a=\pm b$.

9. 若 $f(x)=px^3+qx^2+qx+p$ 能被 $g(x)=x^2-1$ 整除，试求 p,q 的关系.

10. 已知 $f(x)=x^4+3x^3+ax^2+bx+c$ 除以 $g(x)=(x^2-1)(x+1)$ 所得的余式为 0, 试求 a,b,c.

11. 若 ax^2+bx+c 与 cx^2+bx+a 只有一个一次公因式，求证：$a\pm b+c=0$

12. 已知 $f(x)=x^2+(k+b)x+4k+2$ 与 $g(x)=x^2+(k+2)x+2k$ 的最高公因式是一次式，试求 k.

13. 求证：$(y-z)^{2n+1}+(z-x)^{2n+1}+(x-y)^{2n+1}$ 可被 $(x-y)(y-z)(z-x)$ 整除.

14. 在下面等式中，求满足条件的 a,b,c.

    (a) $a(x-2(x-8)+b(x-3)(x-1)+c(x-1)(x-2)=5x^2+19x+18$

    (b) $a(x-3)(x-5)+b(x-5)(x-7)+c(x-7)(x-3)=8x-32$

15. $f(x)$ 是一个次数不大于 3 的多项式,a,b,c,d 是两两不等的数,已知 $f(a)=A$, $f(b)=B$, $f(c)=C$, $f(d)=D$, 求 $f(x)$.

16. 已知 $(x-1)^2$ 整除 $ax^{n+1}+bx^n+1$, 试求 a、b.

17. 已知 $a_1=1$, $a_2=x+y$, $a_3=x^2+xy+y^2$, …, $a_n=x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1}$, 试求 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ $(x\neq 1,\ y\neq 1,\ x\neq y)$.

18. 已知 $f''(x)=ax^2+bx+c$, 且 $f(0)=0$, $f(1)=1$, 求 $f(x)^n$.

19. 已知 $f(x)=x^2+ax+b$ 与 $g(x)=x^2+cx+d$ 的最高公因式是一个一次多项式，求证：

$$[f(x),g(x)]=x^3+\frac{ab-cd}{b-d}x^2+\left[ac-\left(\frac{b-d}{a-c}\right)^2\right]x+bd\cdot\frac{a-c}{b-d}$$

第四章　多项式的根

多项式的根是一个重要的概念，也是我们研究的主要问题之一，本章在复习的基础上，将系统地研究多项式的整数根，有理数根，实数根的存在、判定和计算方法.

第一节　多项式的根及求根公式

我们已经知道，如果当 $x=a$ 时，多项式的值 $f(a)=0$, 就把数值 a 叫做多项式 $f(x)$ 的一个根，或叫做多项式函数 $f(x)$ 的一个零点.

显然，零次多项式 $f(x)=b\neq 0$, 没有任何根；零多项式 $f(x)=0$ 有无限多个根（任意数都是它的根).

因此，一元 n 次多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \quad (a_n\neq 0)$$

的根，就是一元 n 次方程

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$$

的根. 求多项式的根，就是解相应的方程式.

要求多项式的根，首先应明确在那一个数系范围内，因为多项式和方程一样，同一个多项式在不同的数系范围内，可能会有不同的根存在.

在此，我们主要讨论和计算多项式的实数根，对其中更容易研究的有理系数多项式的有理根及整系数多项式的整数根更要特别讨论.

一、一元一、二次多项式的求根公式

一元一次、一元二次多项式的求根公式也就是一元一次、一元二次方程的求根的公式，我们早已在初中代数中学习过，现就一般形式总结如下：

1. 一元一次多项式 $f(x)=ax+b \quad (a\neq 0)$ 有且只有一个实数根：
$$x=-\frac{b}{a} \tag{4.1}$$

2. 一元二次多项式 $f(x)=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$ 当且仅当 $b^2-4ac\geq 0$ 时，有两个（不同或相同）实根
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{4.2}$$
当且仅当 $b^2-4ac<0$ 时，没有实数根.

(4.1), (4.2) 就是一次和二次多项式的求根公式，也叫做多项式的公式解，它显示了用多项式的各项系数通过加、减、乘（乘方）、除、开方运算，就可以求得它的根.

由求根公式 (4.1) 可以知道，对于一次多项式来说，它的根仅仅是系数进行减、除运算，因而，由有理数系对加、减、乘、除运算的封闭性就得出：

有理系数一次多项式，一定有一个有理数根，而由整数系对除法运算的不封闭性就得出：整系数一次多项式，不一定有整数根.

例如，$f(x)=3x-2$，有一个有理根 $x=\dfrac{2}{3}$，但没有整数根.

还应指出，对于系数为参数的多项式 $\varphi_1(x)=ax+b$ 的根，可进行一般性的全面讨论：

1. 当 $a\neq 0$ 时，不论 b 为任何数，$\varphi_1(x)$ 都有唯一实数根：$x=-\dfrac{b}{a}$；

2. 当 $a=0$, 但 $b\neq 0$ 时，$\varphi_1(x)$ 为零次多项式，它没有任何根；

3. 当 $a=b=0$ 时，$\varphi_1(x)=0$ 为零多项式，它有无限多个根.

例 4.1 试讨论 $g(x)=2(a+b)x-(a+b)^2$ 的根的情形，如有根存在，求出根.

解： 由多项式根的定义知，$2(a+b)a-(a+b)^2=0$ 即
$$2(a+b)x=(a+b)^2$$

- 当 $a+b\neq 0$ 时，$g(x)$ 有唯一实根：$x=\dfrac{a+b}{2}$；

- 当 $a+b=0$, 即 $a=-b$ 时，$g(x)=0$, 它有无限多个根，即任意实数都是它的根.

由求根公式 (4.2) 同样可以知道，对于二次多项式来说，它的根要通过系数的加、减、乘（乘方）、除法运算以及开平方运算而求出，因而，由有理数系对开平方运算的不封闭性，就得出：

有理系数二次多项式，不一定有有理数根存在. 更不一定有整数根存在.

事实上，即便是整系数二次多项式，也不一定有整数根或有理根，甚至没有实数根.

讨论一元二次多项式的根，和一元二次方程根的讨论一样，可由判别式 b^2-4ac 的符号分为三种情形：

1. 当 $b^2-4ac>0$ 时，$f(x)$ 有两个不同实根；
2. 当 $b^2-4ac=0$ 时，$f(x)$ 有两个相同实根；
3. 当 $b^2-4ac<0$ 时，$f(x)$ 没有实根.

同样地对于系数为参数的多项式 $\varphi_2(x)=ax^2+bx+c$ 的根，也可以系统全面的讨论如下：

1. 当 $a\neq 0$ 时，$\varphi_2(x)$ 为二次多项式，它的根可由上述三种不同情形分别讨论；
2. 当 $a=0$, 但 $b\neq 0$ 时，$\varphi_2(x)$ 为一次多项式，它有唯一实根；
3. 当 $a=b=0$, 但 $c\neq 0$ 时，$\varphi_2(x)$ 为零次多项式，它没有根；
4. 当 $a=b=c=0$ 时，$\varphi_2(x)=0$ 为零多项式，它有无限多个根.

对于一元二次多项式 $f(x)=ax^2+bx+c\quad(a\neq 0)$ 如果有两个根 α_1,α_2 存在，同样也满足韦达定理. 即

$$\alpha_1+\alpha_2=-\frac{b}{a},\qquad \alpha_1\cdot\alpha_2=\frac{c}{a}$$

例 4.2 若已知二次多项式 $f(x)$ 有两个实根

$$\alpha_1=\sin(\alpha+\beta),\qquad \alpha_2=\sin(\alpha-\beta)$$

试求这个二次多项式 $f(x)$.

解： 由韦达定理可知

$$f(x)=x^2-[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]x+\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)$$

所以

$$f(x)=x^2-2x\sin\alpha\cdot\cos\beta+\sin^2\alpha-\sin^2\beta$$

练习

1. 用配方法求 $f(x)=x^2-(a-b)x+ab-2b$ 的根.
2. 若多项式 $f(x)=x^2-(a+1)x+2a-1$ 有两个相同的实根，试确定 a 的值，并求出它的根来.
3. 全面讨论多项式 $f(x)=(a+3)x^2-4x+a$ 的根的情形.

二、一元三次和一元高次多项式的根

我们已经知道对于一个非零常数 $k\neq 0$, 方程 $f(x)=0$ 与 $k\cdot f(x)=0$ 具有完全相同的根，因此，相应地就可以知道多项式 $f(x)$ 与多项式 $k\cdot f(x)$ 也有完全相同的根，这就是说，在求一个多项式 $f(x)$ 的根时，可以用求另一个多项式 $kf(x)$ 的根来代替.

应用这个道理，对于一元三次多项式

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \qquad (a\neq 0) \tag{4.3}$$

求根，就可以转化为对于三次多项式

$$\varphi(x)=x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}$$

的求根问题，不妨把 $\varphi(x)$ 简记为

$$\varphi(x)=x^3+rx^2+sx+t \tag{4.4}$$

这叫做一元三次多项式的标准形式，其主要特点是首项系数为 1.

为了求出一元三次多项式 (4.4) 的根，我们还可以用换元的方法，进一步把它化简. 令 $x=y-\dfrac{r}{3}$, 代入 (4.4), 经展开整理后得

$$g(y)=y^3+\left(s-\frac{r^2}{3}\right)y+\left(t-\frac{rs}{3}+\frac{2r^3}{27}\right)$$

我们再把它简记为

$$g(y)=y^3+py+q=0 \qquad (p,q\text{为实数}) \tag{4.5}$$

并叫做一元三次多项式的简化形式. 其主要特点是首项系数为 1, 而且不含有二次项.

综上所述，只要求出三次多项式的简化形式 $g(y)$ 的根 α, 就可求得三次多项式的标准形式 $\varphi(x)$ 的根 $x=\alpha-\dfrac{r}{3}$, 进而求得三次多项式的一般形式 $f(x)$ 的根 $x=\alpha-\dfrac{b}{3a}$. 因此，一元三次多项式的求根问题，关键就在于求出简化形式三次多项式的根.

例 4.3 试求多项式 $f_1(x)=x^3-9x^2+33x-65$ 相应的简化式.

解: 令 $x=y+3$, 代入 $f(x)$ 表达式，得

$$\begin{aligned}g_1(y)&=(y+3)^3-9(y+3)^2+33(y+3)-65\\&=y^3+9y^2+27y+27-9y^2-54y-81+33y+99-65\\&=y^3+6y-20\end{aligned}$$

所以 $g_1(y)=y^3+6y-20$.

对于简化一元三次多项式 $g(y)=y^3+py+q$ 求根，我们可以采用以下方法:

首先，设它的根 $y_0=u+v$, 则可分别确定 u,v, 使得

$$(u+v)^3+p(u+v)+q=0 \tag{4.6}$$

即

$$u^3+v^3+q+(u+v)(3uv+p)=0$$

这是一个含有两个未知数的方程, 为了确定 u 与 v 的值, 我们可以选取一个条件，在此条件下将方程 (4.6) 转化为一个二元方程组求解.

我们选择条件，使 $3uv+p=0$, 即 $3uv=-p$, 就将方程 (4.6) 转化为方程组

$$\begin{cases}u^3+v^3+q=0\\3uv=-p\end{cases}$$

进一步变换方程组为

$$\begin{cases}(u^3+v^3)^2=q^2\\4u^3\cdot v^3=-4\left(\dfrac{p}{3}\right)^3\end{cases}$$

两式相减，得 $(u^3-v^3)^2=q^2+4\left(\dfrac{p}{3}\right)^3$，即:

$$u^3-v^3=\pm\sqrt{q^2+4\left(\dfrac{p}{3}\right)^3}$$

这样就得出方程组

$$\begin{cases} u^3+v^3=-q \\ u^3-v^3=\pm 2\sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2+\left(\dfrac{p}{3}\right)^3} \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$u^3=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3},\qquad v^3=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

其中，由于 u,v 在方程组中地位等同，所以我们仅取一组符号即可，所以

$$u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}},\qquad v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

这样，对于简化三次多项式 $g(y)=y^3+py+q$，就得出它的求根公式：

$$\begin{aligned} y_0&=u+v \\ &=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}} \end{aligned}$$

这就是著名的卡尔丹公式.

运用这个公式，一般可以求出三次多项式的至少一个实根.

例 4.4 求 $f(x)=x^3-9x^2+33x-65$ 的实根.

解： 由例 4.3 知，$f(x)$ 相应的简化形式，可利用代换 $x=y+3$ 得出

$$g(y)=y^3+6y-20$$

代入卡尔丹公式，求得

$$y=\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}$$

$\therefore$　$f(x)$ 的实根为

$$x=\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}+3$$

注意： 在卡尔丹公式中，二次根号下的式子，记作

$$\Delta=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3$$

叫做三次多项式根的判别式.

1. 当 $\Delta > 0$ 时，三次多项式有且只有一个实根；

2. 当 $\Delta \leq 0$ 时，三次多项式有三个实根.

详细讨论，需要学习复数后进行.

对于四次多项式的求根，也有一般的公式，然而它比三次多项式更要复杂得多，因而实用价值更小，我们这里就略去.

这里不禁要问：是否任何高次多项式的根都可以有一个求根公式呢？回答是否定的. 经过许多数学家的多年努力，于十九世纪廿年代证明了：一般五次以及更高次的多项式不存在求根公式（即不能用它的系数，经过加、减、乘（乘方）、除、开方运算把它的根表达出来）.

练习

1. 求出 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^3-3x^2+\dfrac{11}{2}x-3$ 的标准式，并通过造当代换，找出它相应的简化式，求出 $f(x)$ 的实根.

2. 用换元法求特殊四次多项式 $f(x)=4x^4-5x^2+1$ 的实根.

习题 4.1

1. 如果 $f(x)=a^2x^2-2a(a-1)x+a-1$ 有两个相同的实根，试求 a 和这个实根.

2. 试全面讨论多项式 $ax^2-2(a+b+c)x+2(b+c)$ 的根的情形.

3. 如果已知下列三个多项式中，至少有有一个实数根，试求出实数 a 的范围：

$$x^2+2ax-2a;\qquad x^2+4ax-4x+3;\qquad x^2+(a-1)x+a^2$$

4. 如果二次多项式 $x^2-(m-1)x+m$ 的两个根满足下列各关系，试分别求出 m 的值：

(a) 两根之比为 2:3　　(b) 两根之差为 1

5. 如果二次多项式 x^2-ax+a^2-4 有两个正根，试求 a 的取值范围；若只有一个正根时，a 又在什么范围内取值呢？

6. 如果两个多项式 $f(x)=x^2+ax+b$, $g(x)=x^2+bx+a$ 只有一个共同的根，试求这个根；并求它们另外的两个非共同根的和.

7. 用卡尔丹公式求出多项式 $x^3-12x+16$ 的一个实根，再用因式定理求出另外两个实根.

8. 如果多项式 $x^3-3x^2-12x+3ax+16$ 有一个正根 a, 试求 a 及另外两个根.

9. 如果多项式 $2x^3-7x^2+(k+5)x-k$ 有三个实根，其中两个根互为倒数，试求 k 及三个根.

第二节　有理系数多项式的整数根和有理根

对于有理系数多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \quad (a_n\neq 0) \tag{4.7}$$

我们可以取系数 a_i, $(i=0,1,2,\ldots,n)$ 的分母的最小公倍数 m, 遍乘多项式 $f(x)$ 各项，从而得到

$$mf(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0 \quad (b_n\neq 0) \tag{4.8}$$

(4.8) 显然就是一个整系数多项式，而且 (4.7) 与 (4.8) 具有相同的根，因而，我们只须讨论整系数多项式 $mf(x)$.

另一方面,对于整系数多项式 $g(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0 \quad (b_n\neq 0)$ 我们还可以提取各系数 b_i, $(i=0,1,2,\ldots,n)$ 的公因式 $d\neq 1$, 从而得到, $g(x)=d\cdot h(x)$, 其中

$$h(x)=c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_1x+c_0 \quad (c_n\neq 0) \tag{4.9}$$

(4.9) 显然仍是一个整系数多项式，但它的各系数是互质的，即

$$(c_n,c_{n-1},\ldots,c_1,c_0)=1$$

而且 (4.9) 与 (4.8) 的根是相同的. 因此，我们只须讨论简化了的整系数多项式 $h(x)$.

在本节中, 以下提到的整系数多项式, 都是指 (4.9) 式意义下的多项式, 不再声明了.

一、整系数多项式的整数根和有理数根

设整系数多项式

$$h(x)=c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_1x+c_0\quad(c_n\neq 0)$$

其中，$c_i\in\mathbb{Z}$, $(i=0,1,\ldots,n)$, 且 $(c_0,c_1,\ldots,c_n)=1$. 我们有以下定理:

定理 1

整数 α 是多项式 $h(x)=c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_1x+c_0$ 的根的必要条件是 α 能够整除 c_0.

证明: 由于 α 是 $h(x)$ 的根，所以 $h(\alpha)=0$, 即

$$c_n\alpha^n+c_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+c_1\alpha+c_0=0$$

$\therefore\quad c_0=-\alpha\left(c_n\alpha^{n-1}+c_{n-1}\alpha^{n-2}+\cdots+c_1\right)$

上式右边括号内整数的和、差、积与方幂，由整数的运算性质知，它们是整数，所以，整 α 除 c_0.

这个定理告诉我们，多项式 $h(x)$ 的整数根 α 要在 c_0 的因数中寻求；但要注意，定理仅是提供了 α 是整数根的必要条件，并不是充分条件. 因此，可以应用定理先确定 $h(x)$ 的整数根的范围，再运用综合除法或余式定理在这个范围内试除确定它的根.

例 4.5　试求 $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$ 的整数根.

解: 因为常数项 $c_0=-6$, 它的因数有 $\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$. 所以 $f(x)$ 的整数根可能是 $\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$.

再用综合除法或余式定理逐个试除，得出只有取 1, 2, 3 时，余式为 0, 因而 $x=1,2,3$ 都是多项式的根，共余的因数试除余式均不为零，因而都不是多项式的根，所以 $f(x)$ 的整数根为 1, 2, 3.

例 4.6　试求 $f(x)=x^3+x^2+x+2$ 的整数根.

解: 先判定整根的范围：由于常数项 $c_0=2$, 它的因数有 $\pm1,\pm2$. 所以 $f(x)$ 的整根可能是 $\pm1,\pm2$

再逐个试除求余，确定整数根：由直接计算，得

$$f(1)=5,\qquad f(-1)=1,\qquad f(2)=16,\qquad f(-2)=-4.$$

所以 $\pm1,\pm2$ 都不是 $f(x)$ 的根.

因此，多项式 $f(x)$ 没有整数根.

定理 2

既约分数 $\dfrac{p}{q}$ 是整系数多项式 $h(x)=c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_1x+c_0$ 的根的必要条件是 p 能整除 c_o, q 能整除 c_n.

证明： 由于 $\dfrac{p}{q}$ 是 $h(x)$ 的根，所以 $h\left(\dfrac{p}{q}\right)=0$, 即

$$c_n\left(\frac{p}{q}\right)^n+c_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}+\cdots+c_1\left(\frac{p}{q}\right)+c_0=0$$

因此，

$$c_0q^n=-p\left(c_np^{n-1}+c_{n-1}p^{n-2}q+\cdots+c_1q^{n-1}\right) \tag{4.10}$$

$$c_np^n=-q\left(c_{n-1}p^{n-1}+\cdots+c_1pq^{n-2}+c_0q^{n-1}\right) \tag{4.11}$$

由 (4.10) 得: $p|c_0q^n$ (表示 p 整除 c_0q^n), 但因为 $\dfrac{p}{q}$ 为既约分数, $(p,q)=1$, 所以 $(p,q^n)=1$, 因此就可有： $p|c_0$

再由 (4.11) 可得 $q|c_np^n$, 同样由于 $(p,q)=1$, 因而 $(p^n,q)=1$. 因此就有: $q|c_n$

这里同样应注意，定理仅给出 $\dfrac{p}{q}$ 是 $h(x)$ 的既约分数（有理数）根的必要条件，并不是充分条件. 因而，运用这个定理也只能判定 $h(x)$ 的根的范围，还须要借助综合除法或余式定理才能确定它的根.

例 4.7 试判断 $f(x)=6x^3+x^2-4x+1$ 可能有哪些有理数根?

解： 因为 $c_3=6$, 其因数为 $\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$; $c_0=1$, 其因数有 ±1, 所以，$f(x)$ 可能有的有理数根为 ±1, $\pm\dfrac{1}{2}$, $\pm\dfrac{1}{3}$, $\pm\dfrac{1}{6}$.

由定理 2, 不难得出以下推论:

推论

整系数多项式 $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 若有有理数根，则有理数根为整数.

如例 4.5, $f(x)$ 的有理根 1, 2, 3 都是整数；又如例 4.6, $f(x)$ 没有整数根，也就没有有理数根.

例 4.8 求 $6x^4+5x^3+3x^2-3x-2$ 的有理根.

解：先用定理 2 判定有理根的范围：因为 $c_n=6$, 它有因数 $\pm1,\pm2,\pm8,\pm6$; 又因 $c_0=-2$, 它有因数 ±1, ±2, 所以 $f(x)$ 可能有的有理数根为

$$\pm1,\pm2,\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{3},\pm\frac{2}{3},\pm\frac{1}{6}$$

再用余式定理或综合除法求余，从而确定有理根：由直接计算，得

$$f(1)\neq0,\qquad f(-1)\neq0,\qquad f(\pm2)\neq0,\qquad f\left(\frac{1}{2}\right)\neq0$$

所以 $\pm1,\pm2,\pm\dfrac{1}{2}$ 都不是 $f(x)$ 的根.

又用 $-\dfrac{1}{2}$ 试除

$$\begin{array}{r|l} 6+5+3-3-2 & -\dfrac{1}{2} \\ -3-1-1+2 & \\ \hline 6+2+2-4+\boxed{0} & \end{array}$$

所以 $-\dfrac{1}{2}$ 是 $f(x)$ 的根，由因式定理可得

$$f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)(6x^3+2x^2+2x-4)$$

令 $f_1(x)=6x^3+2x^2+2x-4$，则 $f(x)=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\cdot f_1(x)$

对 $f_1(x)$ 求有理根，试除后知 $f\left(\pm\dfrac{1}{3}\right)\neq0$，因而 $\pm\dfrac{1}{3}$ 不是 $f_1(x)$ 的根，当然也不是 $f(x)$ 的根，再用 $\dfrac{2}{3}$ 试除：

$$\begin{array}{r|l} 6+2+2-4 & \dfrac{2}{3} \\ 4+4+4 & \\ \hline 6+6+6+\boxed{0} & \end{array}$$

所以 $\dfrac{2}{3}$ 是 $f_1(x)$ 的根，也就是 $f(x)$ 的又一个根，因此

$$\begin{aligned} f(x)&=\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)(6x^2+6x+6)\\ &=6\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)(x^2+x+1) \end{aligned}$$

这里由于 x^2+x+1 的判别式 $\Delta<0$, 因而它没有实数根，更不会有有理根，所以 $f(2)$ 的有理根为 $-\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{2}{3}$.

练习

1. 求 $f(x)=6x^5+19x^4+22x^3+23x^2+16x+4$ 的有理根.
2. 证明：多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 有根 1 的必要充分条件是

$$a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0=0$$

二、多项式的正根与负根

对于实系数多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0, \qquad (a_n\neq 0)$$

的根，我们有以下判定有、无正根或负根的定理：

定理 3

如果实系数多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0, \qquad (a_n\neq 0)$$

的各项系数 a_i，$(i=n,n-1,\ldots,1,0)$ 都是非负数，那么这个多项式 $f(x)$ 就没有正数根.

证明：（用反证法）若 $\alpha>0$ 且 $f(\alpha)=0$, 则

$$a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_1\alpha+a_0=0$$

等号左边全是非负数，但由已知其中至少有首项系数不为零，所以它们的和不可能为零，而等号右边为零. 这是不可能的. 所以 $f(\alpha)=0$ 不成立，即 $f(x)$ 没有正根.

由于 $-f(x)$ 与 $f(x)$ 有完全相同的根，所以把 “$a_n,a_{n-1},\ldots,a_1,a_0$ 全是非负数” 改为 “$a_n,a_{n-1},\ldots,a_1,a_0$ 全是非正数”，则结论不变.

这样一来，如果要求一个各项系数符号统一的多项式的根，就可以不考虑正根了. 如练习中的 1 肯定不会有正根.

定理 4

如果实系数多项式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad (a_n \neq 0)$$

偶次项系数都为非负（或非正）数，而奇次项系数又都为非正（或非负）数．那么这个多项式 $f(x)$ 就没有负根.

同学们可以自己用反证法证明这个定理.

有了这两个定理，配合定理 1, 2 就可以进一步缩小求有理根时试除的范围.

例 4.9 求 $f(x) = 5x^6 - 7x^5 - 8x^4 - x^3 + 7x^2 + 8x + 4$ 的有理根.

解： $f(x)$ 可能有的有理数根是 $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm\frac{1}{5}, \pm\frac{2}{5}, \pm\frac{4}{5}$.

用 $x-1$ 试除得 $f(1) = 0$, 因而有

$$f(x) = (x-1)(5x^5 - 2x^4 - 10x^3 - 11x^2 - 4x + 4) = (x-1)f_1(x)$$

$f_1(x)$ 可能有的有理数根还是那几个，但再用 $x-1$ 试除 $f_1(x)$, 不能整除，用 $x-2$ 试除 $f_1(x)$, 得 $f_1(2) = 0$, 因而有

$$f_1(x) = (x-2)(5x^4 + 8x^3 + 6x^2 + x - 2) = (x-2)f_2(x)$$

$f_1(x)$ 所没有的根，$f_2(x)$ 当然也不会有．因此，$f_2(x)$ 可能有的有理数根是 $-1, \pm 2, \pm\frac{1}{5}, \pm\frac{2}{5}$. 但再用 $x-2$ 试除 $f_2(x)$ 不能整除，说明 $f_2(x)$ 已没有正整数根；用 $5x-1$ 试除 $f_2(x)$ 不能整除，再用 $5x-2$ 试除 $f_2(x)$, 得 $f_2\left(\frac{2}{5}\right) = 0$, 因而又有

$$f_2(x) = (5x-2)(x^3 + 2x^2 + 2x + 1) = (5x-2)f_3(x)$$

$f_3(x)$ 已没有正根，可能有的负根只是 $x = -1$; 用 $x+1$ 试除 $f_3(x)$ 得 $f_1(-1) = 0$, 因而有

$$f_5(x) = (x+1)(x^2 + x + 1) = (x+1)f_4(x)$$

$f_4(x)$ 已没有实数根，因而，说明 $f(x)$ 不再有有理数根．所以 $f(x)$ 的有理数的是 $1, 2, \frac{2}{5}, -1$.

练习

1. 求 $f(x)=x^3-4x^2+x+6$ 的有理根.
2. 解方程 $2x^4+x^3+12=7x^2+16x$（仅求有理根）.

习题 4.2

1. 求下列多项式的有理根：

(a) x^3-7x+6

(b) x^4-2x^2+3x-2

(c) $x^3-9x^2+26x-24$

(d) $10x^3-9x^2-3x+2$

(e) $2x^5-5x^2-2x+2$

(f) $5x^4+24x^3-15x^2-118x+24$

(g) $x^4-4a^3x+3a^4 \quad (a\in\mathbb{Q})$

(h) $x^3-ax^2-b^2x+ab^2 \quad (a,b\in\mathbb{Q})$

2. 分解因式：

(a) $6x^4+5x^3y+3x^2y^2-3xy^3-2y^4$

(b) $x^4-(a^2+b^2)x^2+a^2b^2$

(c) x^4-4x+3

3. 解下列方程：

(a) $4x^3-3x-1=0$

(b) $8x^4-6x^3-7x^2+6x-1=0$

4. 试证明：-1 为多项式 $f(x)$ 的根的必要充分条件是 $f(x)$ 的奇次项系数之和等于 $f(x)$ 的偶次项系数之和.

5. 证明：$f(x)=2x^3+2x-1$ 没有有理根.

6. 求 $g(x)=2x^5+3x^4-15x^3-26x^2-27x-9$ 的有理根，并分解因式.

第三节　两个多项式的公根与多项式的重根

公根和重根的问题，也是多项式理论中的基本问题，特别是多项式的重根问题，在下一节实根的讨论与计算中将起重要作用.

一、两多项式的公根

设多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都有一个根 α, 即 $f(\alpha)=0, g(\alpha)=0$, 则 α 就叫做多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公根.

由因式定理可以知道，多项式 $f(x)$ 有一个根 α 的充要条件是 $f(x)$ 含有一次因式 $x-\alpha$.

因此，对于两个多项式 $f(x), g(x)$ 的公根 α, 就有以下定理:

定理 1

两多项式 $f(x), g(x)$ 有一个公根的必要充分条件是这两个多项式必有一个一次公因式.

证明： 必要性. 设 $f(x), g(x)$ 有一个公根 α, 则由因式定理得

$$f(x)=(x-\alpha)\cdot f_1(x), \qquad g(x)=(x-\alpha)\cdot g(x)$$

显然，$f(x), g(x)$ 有一次公因式 $x-\alpha$.

充分性. 设 $f(x), g(x)$ 有一公因式 $x-\alpha$, 则有

$$f(x)=(x-\alpha)\cdot f_1(x), \qquad g(x)=(x-\alpha)\cdot g_1(x)$$

显然就有 $f(\alpha)=0, g(\alpha)=0$. 所以，α 就是 $f(x), g(x)$ 的一个公根.

又由于两个多项式的公因式都是它们的最高公因式的因式，因此，两多项式的公根必定都是它们的最高公因式的根. 反之，两多项式的最高公因式的根也必定是这两个多项式的公根.

这样一来，要求两个多项式的公根，只要先求出它们的最高公因式，再求这一公因式的根就可以了.

例 4.10 求 $f(x)=2x^3+x^2-5x-3$ 与 $g(x)=2x^3-5x^2\ x+3$ 的公根.

解： 先用辗转相除法求得 $\big(f(x), g(x)\big)=x^2-x-1$ 这一多项式的根为 $a=1\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. 所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公根为

$$x_1=1+\frac{\sqrt{5}}{2}, \qquad x_2=1-\frac{\sqrt{5}}{2}$$

如果能通过确定每个多项式有理根的范围首先将多项式进行因式分解，那么也一样可以求得两多项式的公根，这样也就省去辗转相除求最高公因式的繁杂计算了.

还可以先求出一个多项式的根，再去逐个代入另一多项式进行检验，凡能使第二个多项式的值为 0 的，就是公根；否则就不是.

例 4.11 试求 $f(x)=ax^2+bx+c$ 与 $g(x)=x^2-1$ 有一个公根的必要条件.

解: 因为 $g(x)=x^2-1=(x+1)(x-1)$, 所以 $g(x)$ 有两个根 $1,-1$, 因此, $f(x)$ 与 $g(x)$ 有一个公根只可能是 1 或 -1.

若公根为 1, 则 $a+b+c=0$; 若公根为 -1, 则 $a-b+c=0$. 所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有一个公根的必要条件是

$$a+b+c=0 \quad 或 \quad a-b+c=0$$

练习

1. 试求 $f(x)=4x^4+26x^4+51x^3-7x-24$ 与 $g(x)=3x^4+20x^3+32x^2-8x-32$ 的公根.
2. 试求 $f(x)=4x^5-5x^4+1$ 与 $g(x)=x^4-4x+3$ 的公根.
3. 如果 $f(x)=x^2+kx+1$ 与 $g(x)=x^2+x+k$ 且 $k\neq 1$, 并已知它们只有一个公根. 试求 k 的值及这一公根的值.

二、多项式的重根

对于多项式 $f(x)$, 如果有 $f(x)=(x-\alpha)^m\cdot q(x)$, 且 $q(\alpha)\neq 0$, $(m>1\in\mathbb{Z})$. 那么, 我们就说 α 是 $f(x)$ 的 m 重根.

重根的判定和排除, 是计算多项式的实数根时很注重的问题. 在此, 我们给出以下定理.

定理 2

如果 α 是多项式 $f(x)$ 的 m 重根 $(m>1)$, 那么 α 必定是 $f'(x)$ 的 $m-1$ 重根.

证明: 由定理条件知 $f(x)=(x-\alpha)^m\cdot q(x)$ 且 $q(\alpha)\neq 0$, 又由多项式乘积的求导数公式, 得

$$\begin{aligned} f'(x) &= m(x-\alpha)^{m-1}\cdot q(x)+(x-\alpha)^m\cdot q'(x) \\ &= (x-\alpha)^{m-1}\cdot[mq(x)+(x-\alpha)q'(x)] \end{aligned}$$

其中由于 $q(\alpha)\neq 0$, $m>1$, 因而 $m\cdot q(\alpha)\neq 0$, 所以 α 就是 $f'(x)$ 的 $m-1$ 重根.

定理 3

α 是多项式 $f(x)$ 的二重根的必要充分条件是 α 为 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的公根，且 $f''(\alpha) \neq 0$.

证明： 必要性：由泰勒公式，得

$$f(x) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!}(x-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n \quad (4.12)$$

由于 α 是 $f(x)$ 的二重根，根据因式定理，得

$$(x-\alpha)^2|f(x)$$

因而有：$f(\alpha) + \dfrac{f'(\alpha)}{1!}(x-\alpha) = 0$.

所以，$f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$, 且 $f''(\alpha) \neq 0$, α 是 $f(x)$, $f'(x)$ 的公根，对任意 x 都成立.

充分性：由 $f(x)$，$f'(x)$ 有公根 α, 且 $f''(\alpha) \neq 0$，则 $f(\alpha) = 0$，$f'(\alpha) = 0$. 再从泰勒公式 (4.12) 不难得出

$$(x-\alpha)^2|f(x)$$

所以，α 是 $f(x)$ 的二重根.

定理 3 完全可以类似地推广到 m 重根的情形，得到下述定理：

定理 4

α 是 $f(x)$ 的 m 重根的必要充分条件是 α 是 $f(x), f'(x), \ldots, f^{(m-1)}(x)$ 的公根，且 $f^{(m)}(\alpha) \neq 0$.

如果再结合定理 1、2 的内容，我们就可以得出：要判定 $f(x)$ 有没有重根，只要看 $f'(x), f(x)$ 的最高公因式就可以了，若最高公因式含有因式 $(x-\alpha)^{m-1}$，则可以断定 $f(x)$ 有 m 重根 α, 同时还可以断定 $f'(x)$ 有 $m-1$ 重根 α, $f''(x)$ 有 $m-2$ 重根 $\alpha, \ldots$

例 4.12　试求 $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ 的重根.

解： 先求出导数 $f'(x) = 5x^4 - 12x^3 + 6x^2 + 4x - 3$, 再用辗转相除法求出

$$\big(f(x), f'(x)\big) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3$$

所以，

$$(x-1)^3|f(x), \qquad (x-1)|f'(x)$$

即 $x=1$ 是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的公根. 因此，$f(x)$ 有重根 1（而且是 $f(x)$ 的 4 重根，$f'(x)$ 的 3 重根）.

例 4.13 求证方程 $x^4+2x^3-15x^2+4x+20=0$ 有二重根，并求出这个方程的根.

解： 设 $f(x)=x^4+2x^3-15x^2+4x+20$, $\quad f'(x)=4x^3+6x^2-30x+4$，由辗转相除法可求出 $\big(f(x),f'(x)\big)=x-2$, 这是一次式. 所以，$f(x)$ 有二重根 2, 也就是原方程有二重根 2, 再用因式定理，得：

$$f(x)=(x-2)^2(x^2+6x+5)=(x-2)^2(x+1)(x+5)$$

因此，原方程可变形为

$$(x-2)^2(x+1)(x+5)=0$$

所以原方程的各根为：$2,2,-1,-5$.

练习

1. 判定下列多项式是否有重根？若有，试求出重根来：

   (a) $f(x)=x^4-4x^3+8x+4$

   (b) $g(x)=4x^3+8x^2-8x+3$

2. 举例说明定理 2 的逆命题是不正确的.

习题 4.3

1. 求下列各组多项式的公根：

   (a) $f(x)=x^3+5x^2+3x-9$, $\quad g(x)=x^3+7x^2+15x+9$

   (b) $f(x)=x^3+3x^2-2x-6$, $\quad g(x)=x^3-3x^2-2x+6$

   (c) $f(x)=x^4-5x^2+4$, $\quad g(x)=x^2+x-2$

2. 已知 $f(x)=2x^2-(3m+2)x+12$ 与 $g(x)=4x^2-(9m-2)x+36$ 有一个公根，试求 m 的值.

3. 求下列多项式的重根：

   (a) $f(x)=9x^3+12x^2-11x+2$

(b) $f(x)=x^4+4x^2-4x-3$

(c) $f(x)=x^4-2x^3-x^2-4x+12$

(d) $g(x)=x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$

4. 若多项式 $f(x)=x^3-12x+a$ 有重根，试求 a.

5. 试求多项式 $g(x)=x^4-px^2+q$ 有重根的必要条件

6. 已知多项式 $f(x)=x^4-x^3-3x^2+4x-4$ 有两个互为相反数的根，试求出这两个根.

7. 试一试,举例验证:如果多项式 $f(x)$ 有重根,那么多项式 $g(x)=\dfrac{f(x)}{\big(f(x),f'(x)\big)}$ 就没有重根，但 $g(x)$ 与 $f(x)$ 有相同的根.

第四节 实系数多项式的实数根

对于实系数多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,\qquad (a_n\neq 0)$$

的根的讨论，要困难和复杂得多，因为多项式的根除了有理根之外，更多的是存在无理数根，而且五次以上的多项式，求根公式根本没有．因此，如何求出这些多项式的实根（如果存在的话）？特别是如何求出这些多项式的无理根的近似值？就成为我们急需讨论的内容了.

一、计算实根近似值的基本思想

求实系数多项式的实根的近似值，主要采用逼近法，其理论根据就是今后要详细学习的中间值定理，我们现在叙述和解释如下：

定理 1（中间值定理）

$f(x)$ 是一个实系数的多项式，$a<b$. 若 $f(a)$ 与 $f(b)$ 符号相反，则一定存在一实数 c，$a<c<b$ 使 $f(c)=0$.

我们从图象上来解释中间值定理．如图 4.1，由于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 符号相反，所以点 $\big(a,f(a)\big)$ 及点 $\big(b,f(b)\big)$ 分别在 x 轴的两侧，而曲线 $y=f(x)$ 是连续的．因此它从 x 轴的一侧运动到 x 轴的另一侧，至少要“穿过” x 轴一次．若在 $(c,0)$ 点穿过，就有 $f(c)=0$.

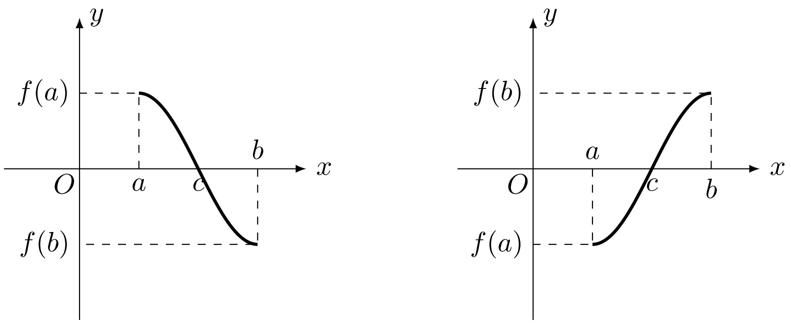


图 4.1

这样的解释尽管是直观形象的，但还不能算是严格证明．因为：什么叫连续？为什么多项式函数在 $(-\infty,+\infty)$ 是连续的？这些问题还没有确切的交待过．而且对于一般连续函数的这一中间值定理，我们也不满足于仅仅是几何解释．不过我们目前只是直观承认这一条定理的内容并初步应用它．以后在微积分学习中再详细证明．

例 4.14 判断多项式 $f(x)=x^3-3x+1$ 的实根介于哪些连续整数之间？

解： 显然，当 $x\leq -3$ 时，$f(x)<0$, 且有：

$$f(-2)=-1,\qquad f(-1)=+8,\qquad f(0)=+1,\qquad f(1)\ \ -1,\qquad f(2)=+3$$

$x>3$ 时，$f(x)>0$.

所以 $f(x)$ 在 $(-2,-1)$, $(0,1)$ 及 $(1,2)$ 各有一实根.

例 4.14 说明了中间定理的作用，但并没有告诉我们多项式实根如何定位的基本方法. 因为尽管在这一题中，$f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ 求出后，实根的位置是显然的，但是怎样想到用 $-2,-1,0,1,2$ 的函数值作为试探的目标呢? 万一 $f(x)$ 的根是一个很大的数, 例如 10^6 左右的数时, 岂不要试上 10^6 个函数值? 万一 $f(x)$ 只有一个实数根, 再找另两个根时不仅徒劳, 而且不知到什么时候才能明确另两个不是实根. 何况还可能有一些多项式根本没有实根.

这样看来，要寻求求多项式实根近似值的更完善的途径，必须解决以下三个问题：

1. 确定根的界限——求出一个区间，使多项式的实根在这一范围内；

2. 根的分离定位——判定多项式的实根的个数, 并使每个实根只包含在一个小区间内；

3. 根的计算——求出每一实根的近似值.

本节将系统解决这些问题，在着手解决这些问题之前，我们首先要明确逼近法的基本思想，即如何计算出 $f(x)$ 在 $(a\ b)$ 中的一个实根的近似值？使它能达到指定的精确度？

例 4.15 求 $f(2)=x^3-3x+1$ 在 $(1,2)$ 中的实根的近似值.（要求误差不超过 0.001）

解： 由中间值定理可知，在 $(1,2)$ 中 $f(x)$ 有一个实根，设为 α, 为了求出要求精度范围内的近似值，可以把区间 $(1,2)$ 十等分，将分点 1.1, $1.2,\dots$, 1.8, 1.9 分别代入 $f(x)$, 由于 $f(1.5)=-0.125$, $f(1.6)=+0.296$, 所以这个根 α 在 $(1.5,1.6)$ 中，即 α 精确到 0.1 的不足近似值为 1.5.

再把区间 $(1.5,1.6)$ 十等分，将分点 1.51, $1.52,\dots$, $1.58,1.59$ 分别代入 $f(x)$, 因为 $f(1.53)=-0.008423$, $f(1.54)=+0.03226$, 所以这个根 α 在 $(1.53,1.54)$ 中，即 α 精确到 0.01 的不足近似值为 1.53.

继续将 $(1.53,1.54)$ 十等分，计算各分点的多项式的值，因为 $f(1.532)=-0.00010$, $f(1.533)=+0.00369$, 所以，根 α 在 $(1.532,1.533)$ 中，它的精确到 0.001 的不足近似值为 $\alpha\approx1.532$.

如果继续这样做下去，只要细心、不嫌繁，就可以求出精确到任意水平的根的近似值.

例 4.15 说明是逼近法的基本思想，也是求实根的基本方法，它的主要依据就是中间值定理. 但方法繁，计算量大，现在已有不少更先进的算法，我们将在后边介绍一种改进了的方法.

练习

1. 利用中间值定理，判定下列多项式的实根在哪些连续整数之间：

   (a) $f(x)=x^4-6x^3+5x^2+12x-6$

   (b) $f(x)=2x^3-5x^2+5x-3$

2. 利用逼近法，试求 $f(x)=x^3-8x+1$ 在 $(0,1)$ 中的实根，（精确到 0.001）

二、实系数多项式实根的界和定位

我们已经知道，根据中间值定理，可以经过耐心细致的计算，首先确定多项式实根的位置在哪些连续整数之间，其次再用逼近法去求每一个实根的近似值. 但是，对某一些多项式，如果我们一开始就用一个整数进行试算，可能会

发生困难，一则难在应从哪一个整数试起呢？二则难在有些多项式用整数试算找不到实根存在的区间，中间值定理无能为力.

例 4.16 试判定下列多式项的实根在哪两个连续整数之间？

1. $f(x)=x^4-6x^2+10$
2. $g(x)=8x^2-8x+1$

解：

1. 由于 $f(x)=(x^2-3)^2+1$, 因此，无论用那一个整数 a 去试算，恒有 $f(a)>0$, 中间值定理无法判断.

   实际上，$f(x)$ 确实没有实根.

2. 一方面当我们用一个个整数 a 试算 $g(a)$ 的值时，会发现总有 $g(a)>0$, 好像可以断言 $g(x)$ 没有实根了；但另一方面，用求根公式可以求得 $g(x)$ 的两个根：$x=\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{4}$, 显然都是实根. 只不过这两个实根都在 $(0,1)$ 中间，其图象如图 4.2 所示.

   这样看来，尽管 $g(0)>0$, $g(1)>0$ 是同号的，但在 $(0,1)$ 中不是没有实根，而是有两个实根.

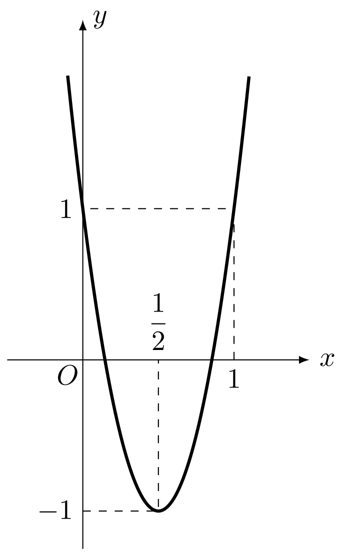


图 4.2

这就提醒我们注意，中间值定理所述的内容中 $f(a)$ 与 $f(b)$ 符号相反只是 $f(x)$ 在 (a,b) 中有实根的充分条件，但不是必要条件.

依据中间值定理, 运用逼近法求多项式的实根时, 由于会遇到以上困难, 因而我们就不得不进一步来探求新的更有效的方法. 史笃姆方法就是彻底解决实根个数及定位的有效方法.

史笃姆方法只是对没有重根的多项式来说的，因此可设多项式 $f(x)$ 没有重根.

又因为当多项式的首项系数 $a_n \neq 1$ 时，可用 a_n 去除这个多项式的每一项，从而得到一个首项系数为 1 的实系数多项式，它的零点（实根）不发生变化. 因此，我们就可设 $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是一个没有重根的实系数多项式.

（一）$f(x)$ 的根界

可以证明，$f(x)$ 的每一个根的绝对值都不会大于 $f(x)$ 的各项系数绝对值的和. 因此，我们可取

$$M=1+|a_{n-1}|+|a_{n-2}|+\cdots+|a_1|+|a_0|$$

作为 $f(x)$ 的根界. 即 $f(x)$ 的所有实根都在区间 $[-M,M]$ 中. 这里我们不加证明而引用这一结论.

例 4.17 写出多项式 $\varphi(x)=x^3-10x+2$ 的根界.

解： $\because$ $M=1+|-10|+2=13$

$\therefore$ $\varphi(x)$ 的所有根都在区间 $[-13,13]$ 之内.

（二）史笃姆函数序列

设没有重根的多项式 $f(x)$ 和它的导数 $f'(x)$, 则有 $\deg f(x)=\deg f'(x)+1$, 把 $f'(x)$ 记为 $f_1(x)$, 并作带余除法，得

$$f(x)=q_1(x)\cdot f_1(x)+r_1(x)$$

其中 $r_1(x)=0$ 或 $r_1(x)\neq 0$，$\deg r_1(x)<\deg f_1(x)$. 在这里只有 $f(x)$ 是一次多项式，从而 $f_1(x)$ 是零次多项式时，才能有 $r_1(x)=0$, 否则 $r_1(x)$ 不会等于零. 记 $f_2(x)=-r_1(x)$,（注意，式中的一个负号十分重要）.

又以 $f_2(x)$ 除 $f_1(x)$, 得 $f_1(x)=q_2(x)f_2(x)+r_2(x)$, 同样，只有 $f_2(x)$ 是零次多项式时，才有 $r_2(x)=0$, 否则 $r_2(x)\neq 0$, 记 $f_3(x)=-r_2(x)$. 如此继续

下来，直到可以整除为止．即得

$$
\begin{aligned}
f(x) &= q_1(x)f_1(x) - f_2(x)\\
f_1(x) &= q_2(x)f_2(x) - f_3(x)\\
f_2(x) &= q_3(x)f_3(x) - f_4(x)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
f_{k-1}(x) &= q_k(x)f_k(x) - f_{k+1}(x)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
f_{s-1}(x) &= q_s(x)f_s(x)
\end{aligned}
$$

容易看到，这些计算实际上是对两个多项式 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 进行辗转相除，只不过每一次的余式改变一个符号而已．由于非零数因子不影响辗转相除的结果，所以最后能整除的除式 $f_s(x)$ 就是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的最高公因式．但是我们已给出 $f(x)$ 没有重根这样一个条件，所以 $f_s(x)$ 只能是零次多项式，因而可记为 f_s.

$$f(x), f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x), \ldots, f_s$$

叫做多项式 $f(x)$ 的**史笃姆函数序列**.

例 4.18 试求 $f(x) = x^3 - 10x + 2$ 的史笃姆函数序列.

解:

$$f_1(x) = f'(x) = 3x^2 - 10$$

用 $f_1(x)$ 除 $f(x)$，得:

$$r_1(x) = -\frac{20}{3}x + 2$$

$\therefore \quad f_2(x) = -r_1(x) = \dfrac{20}{3}x - 2 = \dfrac{20}{3}\left(x - \dfrac{3}{10}\right)$

用 $f_2(x)$ 除 $f_1(x)$，得: $r_2(x) = -\dfrac{973}{100}$

$\therefore \quad f_3 = \dfrac{973}{100}$

因此，所求的史笃姆函数序列为:

$$x^3 - 10x - 2, \quad 3x^2 - 10, \quad \frac{20}{3}\left(x - \frac{3}{10}\right), \quad \frac{973}{100}$$

由于以下讨论史笃姆函数序列时，只考虑 x 取某一数值时，$f_k(x)$ 为零，为正还是为负，所以在任一个史笃姆函数列中，乘以一个正常数（注意必须是正

的）不影响讨论结果. 因此对于上述例题所得的史笃姆函数序列，可以写成：

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^3 - 10x + 2 \\
f_1(x) &= 3x^2 - 10 \\
f_2(x) &= 10x - 3 \\
f_3 &= 1
\end{aligned}
$$

对讨论结果不会有影响.

（三）实数列的变号数

在史笃姆函数序列中，以实数 a 代 x, 得到一系列实常数：

$$f(a), f_1(a), f_2(a), \ldots, f_k(a), \ldots, f_s$$

这些数有正、有负，也可能有零. 丢开那些具体数字，只考查各项的符号，就成为一系列符号的排列，例如

$$+ \quad + \quad + \quad - \quad - \quad + \quad - \quad - \quad + \quad - \quad + \quad - \quad - \quad + \tag{4.13}$$

如果在这个排列中，两个相邻的符号相反，我们就说这一排列有一个变号. 整个排列中变号的总数，就叫做它的变号数. (4.13) 的变号数是 6.

如果在实数列中含有零，那么，它的变号数就指去掉零以后，剩下的各数组成的数列的变号数. 例如

$$+ \quad + \quad - \quad 0 \quad + \quad + \quad 0 \quad + \quad - \quad + \quad - \quad - \tag{4.14}$$

的变号数，就是指

$$+ \quad + \quad - \quad + \quad + \quad + \quad - \quad + \quad - \quad - \tag{4.15}$$

的变号数，显然它们的变号数是 5.

给出一个多项式的史笃姆函数序列以后，用实数 a 代入，得实数列

$$f(a), f_1(a), f_2(a), \ldots, f_k(a), \ldots, f_s$$

我们把这一数列的变号的个数记为 $W(a)$.

（四）史笃姆定理及其证明

定理 2（史笃姆定理）

如果用 $-M, M$ 代入没有重根的多项式 $f(x)$ 的史笃姆函数序列，所得实数列的变号数分别为 $W(-M)$ 与 $W(M)$，那么，多项式 $f(x)$ 在 $[-M, M]$ 内就有 $W(-M) - W(M)$ 个实根.

例 4.19 求多项式 $f(x) = x^3 - 10x + 2$ 的实根个数及各个根所在的位置.

解： 由例 4.17 知 $f(a)$ 的根都在 $[-13, 13]$ 之内，又由例 4.18 知 $f(x)$ 的史笃姆函数序列为

$$f(x) = x^3 - 10x + 2, \quad f_1(x) = 3x^2 - 10, \quad f_2(x) = 10x - 8, \quad f_3 = 1$$

在根界 $[-13, +13]$ 内，取点计算变号数，变号的情况列表如下：

x	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	f_3	$W(x)$
-13	$-$	$+$	$-$	$+$	3
-4	$-$	$+$	$-$	$+$	3
-3	$+$	$+$	$-$	$+$	2
-2	$+$	$+$	$-$	$+$	2
-1	$+$	$-$	$-$	$+$	2
0	$+$	$-$	$-$	$+$	2
1	$-$	$-$	$+$	$+$	1
2	$-$	$+$	$+$	$+$	1
3	$-$	$+$	$+$	$+$	1
4	$+$	$+$	$+$	$+$	0
$+13$	$+$	$+$	$+$	$+$	0

从中根据史笃姆定理就可以断定，多项式 $f(x) = x^3 - 10x + 2$ 共有 $W(-13) - W(13) = 8$ 个实根；同时还可以进一步得出，这三个实根分别在 $(-4, -3)$, $(0, 1)$, $(3, 4)$ 三个区间之中.

以下我们分几个步骤来证明史笃姆定理.（以下供选学）

第一个问题：会不会出现类似以下的排列

$$+ \quad + \quad + \quad 0 \quad + \quad + \quad -$$

即中间有一个零，而其左右同号，如果有这种情况，这个零就不能随便算作正的或负的了．我们来证明这种情况不会产生，即：

史笃姆函数序列中以一个实常数代入，居中间出现一个零，则其左右必为一正一负，既不会出现相邻的两个零，也不会在零的左右出现两个同是正号或两个同是负号.

证明： 若以 a 代入 $f_k(x)$, 得 $f_k(a)$ 为零，则 $(x-a)|f_k(x)$.

此时如果又有 $f_{k+1}(x)=0$, 即 $(x-a)|f_{k+1}(x)$, 则 $x-a$ 为 $f_k(x)$ 与 $f_{k+1}(x)$ 的公因式，由此可知 $x-a$ 也是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的公因式，因而 a 是 $f(x)$ 的重根，这与假设矛盾. 所以 $f_{k+1}(a)\neq 0$. 同理 $f_{k-1}(a)\neq 0$.

又因为

$$f_{k-1}(x)=q_k(x)f_k(x)-f_{k+1}(x)$$

所以

$$f_{k-1}(a)=q_k(a)f_k(a)-f_{k+1}(a)$$

现在 $f_k(a)=0$，所以必然有

$$f_{k-1}(a)=-f_{k+1}(x)$$

如果在运算过程中，$f_{k-1}(x)$, $f_{k+1}(x)$ 乘过不同的正常数，可能使 $f_{k+1}(x)$ 与 $f_{k-1}(a)$ 的绝对值不等，但符号总是相反的. 可见一个零的左右的两个符号必相反.

第二个问题：怎么会产生变号个数的变化？当 x 经过某一个 $f_k(x)$ 的根而不是 $f(x)$ 的根时，变号的个数会不会有变化？

变号数的变化来源于各个符号的变化. 若 x 由 a 渐增到 b, 完全没有经过 $f(x)$ 及 $f_k(x)$ 的任一个根（如例 4.19 中 x 由 -3 增加到 -2, 或由 -1 增加到 0, 或由 2 增加到 3)，则所有的符号都没有变，因而变号个数也不会变.

关于 x 通过 $f_k(x)$ 的某一个根，但不是 $f(x)$ 的根的情况，我们来证明：

若 x 通过 $f_k(x)$ 的某一个根，但不是 $f(x)$ 的根时，史笃姆函数序列的值只改变变号的位置，不改变变号的个数.

如在例 4.19 中：x 从 -2 到 -1 通过 $f_1(x)$ 的根，史笃姆函数序列的值的符号，就从

$$+\quad +\quad -\quad +$$

改变为

$$+\quad -\quad -\quad +$$

变号的位置从第 2 到第 3 改变为从第 1 到第 2; 但变号的个数仍是 2.

证明: $f_k(x)$ 与 $f_{k+1}(x)$ 没有公共的根, 设 α 是 $f_k(x)$ 的一个根, 则 $f_{k-1}(\alpha) \neq 0$, $f_{k+1}(\alpha) \neq 0$. 我们考虑 x 从 $\alpha-\varepsilon$ 经过 α 变到 $\alpha+\varepsilon$ 的过程, ε 取得如此之小, 以至 $f_{k-1}(x)$, $f_{k+1}(x)$ 都没有一个根在 $(\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$ 内, 由中间值定理这总是可行的.

$f_k(\alpha)=0$, 已证明 $f_{k-1}(\alpha)$ 与 $f_{k-2}(\alpha)$ 异号, 因此可能有下列四种情况:

x	$f_{k-1}(x)$	$f_k(x)$	$f_{k+1}(x)$
$\alpha-\varepsilon$	$-$	$-$	$+$
α	$-$	0	$+$
$\alpha+\varepsilon$	$-$	$+$	$+$

x	$f_{k-1}(x)$	$f_k(x)$	$f_{k+1}(x)$
$\alpha-\varepsilon$	$-$	$+$	$+$
α	$-$	0	$+$
$\alpha+\varepsilon$	$-$	$-$	$+$

x	$f_{k-1}(x)$	$f_k(x)$	$f_{k+1}(x)$
$\alpha-\varepsilon$	$+$	$-$	$-$
α	$+$	0	$-$
$\alpha+\varepsilon$	$+$	$+$	$-$

x	$f_{k-1}(x)$	$f_k(x)$	$f_{k+1}(x)$
$\alpha-\varepsilon$	$+$	$+$	$-$
α	$+$	0	$-$
$\alpha+\varepsilon$	$+$	$-$	$-$

可以看到, 在任何一种情况下, 史笃姆函数序列只改变变号的位置, 不改变变号的个数.

第三个问题: 至此产生变号个数起变化的其他可能都已排除, 那就只有一个可能会改变变号个数: x 经过 $f(x)$ 的根. 因此我们就问: x 从小到大渐增地变化, 每经过 $f(x)$ 的一个根时, 变号的个数如何变化呢? 以下就解决并证明这一问题.

> x 从小到大渐地增变化, 每通过 $f(x)$ 的一个根时, 史笃姆函数序列的值的变号就减少一个.

证明: 我们只在 $f(x)$ 的根 α 邻近的一个区域 $(\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$ 内考虑 $f(x)$ 及 $f_1(x)$ (即 $f'(x)$) 的局部性质. 因为 $f(x)=0$, 则 $f'(x) \neq 0$. 我们取足够小的 ε, 使 $f'(x)$ 在 $(\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$ 内符号不变: $f'(x)>0$ 时, $f(x)$ 递增, 这说明 $f(x)$ 由负变正; 反之, $f'(x)<0$ 时, $f(x)$ 递减, 说明 $f(x)$ 由正变负. 情况列表如下:

x	$f(x)$	$f_1(x)$
$\alpha-\varepsilon$	$-$	$+$
α	0	$+$
$\alpha+\varepsilon$	$+$	$+$

x	$f(x)$	$f_1(x)$
$\alpha-\varepsilon$	$+$	$-$
α	0	$-$
$\alpha+\varepsilon$	$-$	$-$

可见在任何情况下, x 从小做大每经过 $f(x)$ 的一个根, 史笃姆函数序列的值总是减少一个变号.

综合以上三条，史笃姆定理即获证.

我们在叙述求实多项式实根位置的史笃姆方法及证明史笃姆定理时都强调这样一个假设：实多项式 $f(x)$ 没有重根. 对于这个条件的限制在应用上和理论上都会使我们感到不满足. 从应用上说，是否在使用史笃姆方法以前要验证 $f(x)$ 有没有重根? 从理论上说，如果 $f(x)$ 有重根，史笃姆定理会受到些什么损害?

我们来回答这两个问题.

第一，从应用上说，这个条件完全不会增加我们的计算量. 因为求史笃姆函数序列的过程实际是用辗转相除法求 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 的最高公因式过程. 如果 $f(x)$ 有重根，在上述运算中必然会看出. 发现重根以后，我们把有关因式除掉 (这些因式为零时的值就是 $f(x)$ 的重根)，再研究其没有重根部分的因式. 这时，多项式的次数至少降低二次，对运算更有利.

第二，从理论上讲，如果有重根，史笃姆定理的结论同样正确，不过这时 $f_s(x)$ 是一个次数不小于 1 的多项式，不可以写成 f_s' 而计算根的个数的时候，重根 α 不论是多少重根，只作为 1 个根计数. 即史笃姆函数序列的值在 x 由小到大经过 $f(x)$ 的 m 重根 α 时，变号数不是减少 m 个，而是只减少 1 个. 我们不另作详细证明，只举以下一例说明.

例 4.20　求多项式

$$f(x)=x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1=(x-1)^3(x+1)^2$$

的史笃姆函数序列中变号的变化情况.

解： 先求 $f(x)$ 的史笃姆序列及根界

$$f_1(x)=5x^4-4x^3-6x^2+4x+1=(x-1)^2(x+1)(5x+1)$$

$$f_2(x)=x^3-x^2-x+1=(x-1)^2(x+1)$$

$$f_3(x)=0$$

根界：$M=8,\qquad\therefore\quad f(x)$ 的根在 $[-8,+8]$ 中. 变号情况列表如下：

x	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$W(x)$
-8	$-$	$+$	$-$	2
-2	$-$	$+$	$-$	2
0	$-$	$+$	$+$	1
2	$+$	$+$	$+$	0
$+8$	$+$	$+$	$+$	0

可知 $f(x)$ 在 $(-2,0)$ 有一个根.（实际是二重根 -1）；在 $(0,2)$ 有一个根，(实际是三重根 1).

综上所述，我们可以看到史笃姆定理可以彻底地解决实系数多项式的实根的个数、定位等问题. 因而，史笃姆定理也被称为实数范围内的代数基本定理.

练习

1. 试求多项式 $f(x)=x^3+3x^2-4x+1$ 的实根界、实根个数及各个实根的位置.

2. 用史笃姆定理证明：n 次多项式 $f(x)$ 的实根个数不大于 n.

三、实系数多项式实根的计算

在前面我们已经根据中间值定理，运用逼近方法求过的实根的近似值，但太繁，计算量也很大，以下我们将利用两种换元变形，改进计算过程，从而得到多项式实根近似计算的秦九韶方法.

(一) 多项式的两种换元变形

第一种变形：令 $y=x-k$, 则 $x=y+k$, 于是

$$\begin{aligned}f(x)&=f(k)+\frac{f'(k)}{1!}(x-k)+\frac{f''(k)}{2!}(x-k)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(k)}{n!}(x-k)^n\\&=f(k)+\frac{f'(k)}{1!}y+\frac{f''(k)}{2!}y^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(k)}{n!}y^n\\&=g(y)=g(x-k)\end{aligned}$$

若 $g(y)$ 的一个根是 α, 即 $y=\alpha$ 时，$g(y)=0$. 也就是：$x-k=\alpha$ 时，$g(x-k)=0$. 但 $g(x-k)=f(x)$, 所以 $x=k+\alpha$ 时，$f(x)=0$. 这说明在求出 $g(y)$ 的一个根后，加上 k 就是 $f(x)$ 的根. 由于 k 可以自由选择，常可以使 α 比之 $k+\alpha$ 更易于计算.

利用这种变形，就可以把“求 $f(a)$ 在 (a,b) 内的一个实根”问题，转化为“求 $g(y)$ 在 $(a-k,b-k)$ 内的一个实根”问题．适当选择 k, 可以简化计算．

例如，求多项式 $f(x)=x^3-3x+1$ 的位于 $(1,2)$ 的根时，可令 $y=x-1$, 得

$$g(y)=-1+3y^2+y^3$$

只须先求 $g(y)$ 在 $(0,1)$ 的根．这时，只须计算 $g(0.5)$, $g(0.6)$ 等，比之计算 $f(1.5)$, $f(1.6)$ 等要简单一些．

为了把 $f(x)$ 改写成 $g(x-k)$, 可以应用泰勒公式；也可应用余式定理及其推论，采用综合除法；还可以用直接代入法．

第二种变形：令 $y=kx$, $(k\neq 0)$, 则 $x=\dfrac{y}{k}$, 于是

$$\begin{aligned}
f(x)&=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\\
&=a_n\left(\frac{y}{k}\right)^n+a_{n-1}\left(\frac{y}{k}\right)^{n-1}+\cdots a_1\left(\frac{y}{k}\right)+a_0\\
&=\frac{1}{k^n}\left(a_ny^n+a_{n-1}ky^{n-1}+\cdots+a_1k^{n-1}y+a_0k^n\right)\\
&=g_1(y)=\frac{1}{k^n}\cdot g(y)=\frac{1}{k^n}g(kx)
\end{aligned}$$

显然 $g_1(y)$ 与 $g(y)$ 有相同的根．

若 $g(y)$ 的一个根是 α, 则 $y=\alpha$ 时，$g(y)=0$. 也就是 $kx=\alpha$ 时，$g_1(kx)=0$, 但 $g_1(kx)=f(x)$, 所以 $x=\dfrac{\alpha}{k}$ 时，$f(x)=0$, 这说明在求出 $g(y)$ 的一个根以后，除以 k 就是 $f(x)$ 的根．由于 k 可以自由选择，就可以使 α 比之 $\dfrac{\alpha}{k}$ 更易于计算．

例如，已知 $f(x)=x^3+3x^2-1$ 一根在 $(0,1)$, 令 $y=10x$, 则 $x=\dfrac{y}{10}$, 于是

$$g(y)=y^3+30y^2-1000$$

对应的一根在 $(0,10)$. 为了求这个根，可以计算 $g(5),g(6),\ldots$ 等，求出 $g(y)$ 的误差不大于 1 的根的近似值后，除以 10 即得 $f(x)$ 的误差不大于 0.1 的近似根．这比之计算 $f(0.5),f(0.6),\ldots$ 等，可以避免小数的出现．

利用这种变形，就可以把“求 $f(x)$ 在 (a,b) 内的一个实根”，转化为“求 $g(y)$ 在 (ka,kb) 内的一个实根”．适当选择 k, 同样可以简化计算．

（二）秦九韶法

把以上两种变形交替使用，主要依靠中间值定理，我们就得到多项式实根近似计算的秦九韶方法．

例 4.21 求多项式 $f(x)=x^3-3x+1$ 在 $(1,2)$ 的实根近似值，要求误差不大于 10^{-8}.

解： 第一步：令 $y=x-1$, 并令 $z=10y$, 得 z 的多项式 z^3+30z^2-1000.

由于后面还要变形，文字变化太多很不方便，我们仍用 x 作为变数，只要是注意要求的是 $f_1(x)$ 在 $(1,2)$ 的根的小数点后第一位数字.

记 $f_1(x)=x^3+30x-1000$, 计算得出 $f_1(0)<0$, $f_1(5)=-125<0$, $f_1(6)=+296>0$, $f_1(10)>0$. 所以 $f_1(x)$ 的根在 $(5,6)$ 中，即 $f(x)$ 根在 $(1.5,1.6)$ 中.

第二步：在 $f_1(x)$ 中，使 $y=x-5$, $z=10y$, 写成 z 的多项式后，仍以 x 为变数，得

$$f_2(x)=x^3+450x^2+37500x-125000$$

$f_2(x)$ 的根在 $(0,10)$ 中，因而 x_3 的绝对值比之其他各项要小得多，x^2 项也比较小，对 $f(x)$ 为正或为负主要决定于后两项，因而估计 x 在 $(3,4)$ 中，计算结果确有 $f_2(3)<0$, $f_2(4)>0$. 所以 $f_2(x)$ 的根 $(3,4)$ 中，即 $f(x)$ 的根在 $(1.53,1.54)$ 中.

第三步：在 $f_2(x)$ 中使 $y=x-3$, $z=10y$ 仍写成 x 的多项式，得

$$f_3(x)=x^3+4590x^2+4022700x-8423000$$

由最后两项估计，根在 $(2,3)$ 中，试算结果确有 $f_3(2)<0$, $f_3(3)>0$, 所以 $f_3(x)$ 的根在 $(2,3)$ 中，即 $f(x)$ 的根一定在 $(1.532,1.533)$ 中.

第四步：在 $f(x)$ 中使，$y=x-2$, $z=10y$, 仍写成 x 的多项式，得

$$f_4(x)=x^3+45960x^2+404103200x-359236000$$

现在, 前两项起的作用更小了, 我们可以一次算出 x 应取值的三位数字, 然后再加以验算, 不必象前面那样一位数一位数地计算了, 把后两项系数相除, 得 $x=0.889$, 由此应得 $f(x)$ 的根在 $(1.532888,1.532889)$ 中, 验证得 $x\approx1.532889$, 误差小于 10^{-8}.

注意： 上述方法对多项式的正根与负根显然同样适用，但是计算负根时，出错的可能性比计算正根要大些，为此，我们可以利用第二种变形，令 $k=-1$, 就把计算负根改变为计算正根了. 例如为求 $f(x)=x^3-3x+1$ 在 $(-2,-1)$ 的根，可改为求 $g(y)=y^3-3y-1$ 在 $(1,2)$ 的根，求出后改变符号即得 $f(x)$ 在 $(-2,-1)$ 的根.

在常数项的绝对值比其他各系数的绝对值大许多倍时，可以先把中间两项略去，估计根有几位整数，然后从 $n\times10$, $n\times100$, 或开始试除. 若特大的系数

不是出现在常数项，而是出现在中间某一项，也可把除第一项与最大系数的那项以外的所有项先略去，估计根有几位数，按照上述方法试除.

例 4.22 估计多项式 $f(x)=x^3+x^2-10^7$ 的正根有几位整数.

解: 由方程 $x^3-10^7=0$ 可看到其正根是以百位数字为第一位数字. 因此用 $x=100$, $x=200$, $x=300,\ldots$ 来试算，得 $f(200)=-1960000$, $f(300)=+17090000$. 因而有一个根在 $(200,300)$ 中，即正根有 3 位整数.

若需要求这个根的近似值, 用前述方法, 先减去 200, 但不必乘 10, 得 $f_1(x)$ 的根在 $(0,100)$ 中，然后以 $n\times 10$ 试算. 以后再减去这个 $n\times 10$, 得 $f_2(x)$, 它的根在 $(0,10)$ 中，这样就与例 4.21 相类似了.

练习

1. 验证 $f(x)=x^3-5x^2+9x-11$ 在 $(3,4)$ 中有一个实根，并求一多项式 $g(y)$, 使 $g(y)$ 的每一个根都等于 $f(x)$ 的根减去 3.
2. 用秦九韶法求下列多项式在指定区间内的实根的近似值:

   (a) $f(x)=x^3+4x^2+6x-2$, 在 $(0,1)$ 内；(要求精确到 0.1)；

   (b) $f(x)=x^3-5x^2+9x-11$, 在 $(3,4)$ 内；(精确到 0.0001)；

   (c) $f(x)=x^3+5x^2+6x+9$, 在 $(-5,-4)$ 内；(精确到 0.01).

习题 4.4

1. 用逼近法求多项式 $f(x)=2x^3-x^2-9x+1$ 在区间 $(-2,-1)$ 中的实根的近似值 (精确到 0.01).
2. 求下列多项式的实根的界和位置:

   (a) $f(x)=x^3-6x^2+5x+13$

   (b) $f(x)=x^4-4x^3-5x^2+18x+20$
3. 求下列多项式实根的界和个数:

   (a) $f(x)=4x^3-2x-5$

   (b) $f(x)=x^n+1$
4. 用秦九韶方法，求下列多项式在指定区间的实根的近似值 (精确到 0.001)

(a) $f(x) = x^3 + 2x - 20$, 在 $(2, 3)$ 中；

(b) $f(x) = x^3 + x^2 - 2500$, 在正数范围内.

5. 用秦九韶方法，求 $\sqrt[3]{17}$ 的近似值（精确到 10^{-4}）.

第五节　二元二次方程组

前面几节，我们较系统地学习了多项式的求根问题，实际上，也是系统地学习一元方程的求解问题. 我们还系统地学习了线性方程组的求解. 归纳起来，在学习过的方程、方程组求解过程中，基本思想和方法就是：消元和降次.

在本节，我们将继续遵循这个基本思想，专门研究二元二次方程组及其解法.

一、二元二次方程与二元二次方程组

由二元二次多项式组成的方程，就叫做二元二次方程，其一般形式是

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \tag{4.16}$$

其中 a, b, c 不全为零；d, e, f 为任意实数；x, y 为二元.

凡满足方程 (4.16) 的有序数对 (x, y), 都叫做方程 (4.16) 的一个解.

二元二次方程的实数解，可有三种情况存在，即有唯一解，无解和无限多解，例如：

- 方程 $2x^2 + y^2 = 0$, 只有一个解 $(0, 0)$;
- 方程 $x^2 + 2y^2 + 1 = 0$, 就没有实数解；
- 方程 $x^2 + 2y^2 - 4 = 0$, 就有无限多个解.

由一个二元一次方程和一个二元二次方程组成的方程组以及两个二元二次方程组成的方程组，都称为二元二次方程组. 因此，二元二次方程组的一般形式有两种类型：

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \\ mx + ny + \ell = 0 \end{cases}$$

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2 + 2d_1x + 2e_1y + f_1 = 0 \\ a_2x^2 + 2b_2xy + c_2y^2 + 2d_2x + 2e_2y + f_2 = 0 \end{cases}$$

组成一个方程组的两个方程的公共解，就叫做这个方程组的解.

例如，方程组 $\begin{cases} 3x^2 - 11xy + 6y^2 = 0 \\ 5x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ 的解是 $(x, y) = (0, 0)$.

求出方程组的所有解或判定方程组无解的过程，叫做解方程组.

解二元二次方程组的基本思想方法，仍然是消元和降次.

我们已经学习过的消元方法有：加减消元法，代入消元法，公式消元法等，其中最根本的是加减消元法.

已经学习过的降次方法有：开平方法，配方法，因式分解法，公式法，换元法等，其中最根本的是因式分解和换元法.

练习

试用先消元，后降次和先降次，后消元两种办法，解方程组

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x + y = b \end{cases}$$

并讨论解的情况.

二、二元二次方程组类型 (I) 的解法

第 (I) 类型的二元二次方程组，指的是由一个二元一次方程和一个二元二次方程所组成的方程组，这种类型的方程组一般都可以用代入法来解. 但根据方程组的特点还可以灵活应用其它解法.

例 4.23　解方程组

$$\begin{cases} 5x - 2y = 7 & (4.17) \\ x^2 + y^2 = 25 & (4.18) \end{cases}$$

解： 由 (4.17) 得

$$y = \frac{1}{2}(5x - 7) \tag{4.19}$$

代入 (4.18), 整理后得：$29x^2 - 70x - 15 = 0$, 解出

$$x_1 = 3, \qquad x_2 = -\frac{17}{29}$$

代入 (4.19) 得

$$y_1 = 4, \qquad y_2 = -\frac{144}{29}$$

所以方程组的解集为

$$\{(x,y)\}=\left\{(3,4),\left(-\frac{17}{29},-\frac{144}{29}\right)\right\}$$

通过例 4.23, 我们可以得到以下一般情况:

对于方程组

$$\begin{cases} ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0 & (4.20)\\ mx+ny+\ell=0 & (4.21)\end{cases}$$

可以这样解，若 $n\neq 0$，由 (4.21) 解出

$$y=\frac{1}{n}(-mx-\ell) \tag{4.22}$$

代入 (4.20) 就可以消去 y 而得到 x 的一元二次方程, 求出 x 后, 再代入 (4.22), 从而求出相应的 y.

若 $m\neq 0$, 由 (4.21) 解出

$$x=\frac{1}{m}(-\ell-ny) \tag{4.23}$$

代入 (4.20) 也可以消去 x 而得到 y 的一元二次方程, 求出 y 后, 再代入 (4.23), 从而求出相应的 x.

这种解法就是代入消元法，它是解这种类型方程组的基本方法.

例 4.24 解方程组

$$\begin{cases} (3x-2y-5)(x-y+1)=0 & (4.24)\\ x+y=7 & (4.25)\end{cases}$$

分析: 这个方程组可以像例 4.23 一样用代入法求解，但由于其中的方程 (4.24) 具有特点: 方程左边的式子是两个一次因式的乘积，方程右边等于 0. 因此，原方程组可以改写成以下两个二元一次方程组

$$\begin{cases} 3x-2y-5=0 & (4.26)\\ x+y-7=0 & (4.27)\end{cases}\qquad \begin{cases} x-y+1=0 & (4.28)\\ x+y-7=0 & (4.29)\end{cases}$$

显然由 (4.26), (4.27) 组成的方程组的解及由 (4.28), (4.29) 组成的方程组的解都能满足由 (4.24), (4.25) 组成的方程组；反之，(4.24), (4.25) 的解至少能

满足 (4.26), (4.27) 及 (4.28), (4.29) 中的一个方程组，所以，只要分别出方程组 (4.26), (4.27) 与 (4.28), (4.29) 就可以了.

解： 将原方程组改写成为以下两个方程组

$$\begin{cases} 3x-2y-5=0 \\ x+y-7=0 \end{cases} \quad 及 \quad \begin{cases} x-y+1=0 \\ x+y-7=0 \end{cases}$$

解得:

$$\begin{cases} x=\dfrac{19}{5} \\ y=\dfrac{16}{5} \end{cases} \qquad \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$$

所以，原方程组的解集为

$$\{(x,y)\}=\left\{\left(\frac{19}{5},-\frac{16}{5}\right),(3,4)\right\}$$

一般地，方程组

$$\begin{cases} (a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)=0 \\ mx+ny+\ell=0 \end{cases}$$

可以转化为两个二元一次方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ mx+ny+\ell=0 \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} a_2x+b_2y+c_2=0 \\ mx+ny+\ell=0 \end{cases}$$

求解.

例 4.25 解方程组 $\begin{cases} x+y=15 \\ xy=56 \end{cases}$

分析： 这个方程组除可以用代入法求解外，还可以应用韦达定理，以 x,y 为两根，先做一个一元二次方程，再来求解.

解： 由已知方程可知，若设 x,y 为某一个一元二次方程的两个根，则由韦达定理可得出这一元二次方程为

$$z^2-15z+56=0$$

解出这个方程，得：$z_1=7$,　$z_2=8$，所以原方程组的解集为：

$$\{(x,y)\}=\{(7,8),\ (8,7)\}$$

一般地，方程组 $\begin{cases} x+y=a \\ xy=b \end{cases}$ 的解，可以建立一个一元二次方程

$$z^2-az+b=0$$

解出两根 $z_1=\alpha$，$z_2=\beta$，从而得出方程组的解集：

$$\{(x,y)\}=\{(\alpha,\beta),\ (\beta,\alpha)\}$$

综合例 4.23—4.25 的一般结论，我们还可以给出这种类型方程组解的几何意义如下：

一次方程表示直线，二次方程表示二次曲线，因此，这种类型方程组的一个解，就表示直线与二次曲线的一个交点.

显然，直线与二次曲线最多有两个交点，也可能有两个重合的交点，也可能没有交点. 相应地说明这种类型的二元二次方程组最多有两个解，也可能有两个相同的解，也可能没有解.

练习

解下列方程组

1. $\begin{cases} y^2=4x+4 \\ 3x-y=1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} (x+y+1)(x+y-3)=\beta \\ x-y=-1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=0 \\ xy=-5 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 6xy=1 \end{cases}$

三、二元二次方程组类型 (II) 的解法

第 (II) 类型的二元二次方程组指的是由两个二元二次方程组成的方程组，这种类型的方程组求解是比较复杂的，若用代入法，都要解四次方程，这里我们只讲一些特殊的方程组的解法，其要领仍是降次、消元.

(一) 可转化为第 (II) 类型的方程组

例 4.26 解方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2=20 & (4.30) \\ x^2-5xy+6y^2=0 & (4.31) \end{cases}$$

分析： 这个方程组的特点是：其中有一个方程 (4.31) 的左边可以分解为两个一次因式的乘积，右边等于 0. 因此，方程 (4.31) 可化为两个二元一次方程，从而原方程组就可以化为两个第 (I) 类型的二元二次方程组.

解： 由 (4.31) 得：$(x-2y)(x-3y)=0$，所以

$$x-2y=0 \quad \text{或} \quad x-3y=0$$

因此，原方程组可化为以下两个方程组：

$$\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ x-2y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+y^2=20 \\ x-3y=0 \end{cases}$$

解这两个方程组，即得到原方程组的解集为：

$$\{(x,y)\}=\left\{(4,2),\ (-4,-2),\ \left(3\sqrt{2},\sqrt{2}\right),\ \left(-3\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)\right\}$$

例 4.27　解方程组 $\begin{cases} x^2-y^2+2y-1=0 \\ 2x^2-3xy-2y^2+2x+6y-4=0 \end{cases}$

分析： 这个方程组的特点是：两个方程的左边都可以分解为一次式的乘积，右边都等于 0. 因此，原方程组就可以化为四个二元一次方程组来解.

解： 用待定系数法分别将两个方程左边进行因式分解，可得

$$\begin{cases} (x+y-1)(x-y+1)=0 & (4.32) \\ (2x+y-2)(x-2y+2)=0 & (4.33) \end{cases}$$

原方程组可化为以下四个线性方程组：

$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ 2x+y-2=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y-1=0 \\ x-2y+2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y+1=0 \\ 2x+y-2=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y+1=0 \\ x-2y+2=0 \end{cases}$$

解出这几个方程组，即可得原方程组的解集为：

$$\{(x,y)\}=\left\{(1,0),\ (0,1),\ \left(\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right),\ (0,1)\right\}$$

例 4.28 解方程组

$$\begin{cases} x^2+5xy-2x+3y+1=0 & (4.34)\\ 3x^2+15xy-7x+8y+4=0 & (4.35)\end{cases}$$

分析：这个方程组的特点是：两个方程中对应二次项系数成比例，这样，我们可以运用方程的变换，消去二次项得到一个二元一次方程，将原方程组转化为第 (I) 类型方程组求解.

解：由 $(4.35)-(4.34)\times 3$, 得

$$-x-y+1=0 \tag{4.36}$$

将原方程组化为 (4.34), (4.36) 组成的（或 (4.35), (4.36)）第 (I) 类型方程组

$$\begin{cases} x^2+5xy-2x+3y+1=0\\ -x-y+1=0\end{cases}$$

用代入法可以解出

$$\begin{cases} x_1=1\\ y_1=0\end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=-1\\ y_2=2\end{cases}$$

所以，原方程组的解集为

$$\{(x,y)\}=\{(1,0),(-1,2)\}$$

注意：解由 (4.35), (4.36) 组成的方程组，可得同样结果，但相比之下，计算要繁一些.

例 4.29 解方程组：

$$\begin{cases} 2x^2+xy+x-3y+3=0 & (4.37)\\ 3xy+y^2-2x+6y-6=0 & (4.38)\end{cases}$$

分析：这一方程组的特点是：两方程的左边虽不能分解因式，但这两个方程的非二次项系数是成比例的，因而，我们可以通过方程的变换，消去非二次项得到一个二元二次齐次式的方程，而这一方程的左边一般是可以分解因式的. 从而可以将方程组化为第 (I) 类型求解.

解：由 $(4.37)\times 2+(4.38)$, 得 $4x^2+5xy+y^2=0$, 即：

$$(4x+y)(x+y)=0 \tag{4.39}$$

这样，原方程组可转化为 (4.37), (4.39) 所组成的方程组，（或者 (4.38), (4.39) 所组成的方程组）再由例 4.24 的分析即可化为以下两个方程组求解：

$$\begin{cases} 2x^2+xy+x-3y+3=0 \\ 4x+y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x^2+xy+x-3y+3=0 \\ x+y=0 \end{cases}$$

分别解出，得

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{13+\sqrt{193}}{4} \\ y_1=-13-\sqrt{193} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=\dfrac{13-\sqrt{193}}{4} \\ y_2=-13+\sqrt{193} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3=-1 \\ y_3=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4=-3 \\ y_4=3 \end{cases}$$

所以，原方程组的解集为

$$\{(x,y)\}=\left\{\left(\frac{13+\sqrt{193}}{4},-13-\sqrt{193}\right),\ \left(\frac{13-\sqrt{193}}{4},-13+\sqrt{193}\right),\right.$$
$$\left.(-1,1),\ (-3,3)\right\}$$

综合例 4.26—4.29 的分析可以得出：对一些具有一定特点（如其中一或两个方程的一边可分解因式，另一边为 0; 两个方程相应的二次项系数成比例；两方程相应的非二次项系数成比例）的第 (II) 类型二元二次方程组，我们可以利用分解因式或方程的变换等方法，降低方程的次数，转化为第 (I) 类型方程组求解.

练习

解方程组：

1. $\begin{cases} x^2+2xy+y^2+2x+2y-3=0 \\ 2x^2-y^2+x-y+1=0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} (x-2y)^2-1=0 \\ (3x-2y+1)(2x+y-3)=0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2+y^2+7x+2y-11=0 \\ x^2+y^2+3x+4y-9=0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} xy - 3y + 1 = 0 \\ 2y - \dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{2}{3} = 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} xy + 2xy + y^2 = 25 \\ 9x^2 - 12xy + 4y^2 = 9 \end{cases}$

（二）可转化为含一元方程的方程组

例 4.30 解方程组

$$\begin{cases} 2x^2 - xy + y^2 - 3y + 2 = 0 & (4.40) \\ 6x^2 - 3xy - y^2 - y + 6 = 0 & (4.41) \end{cases}$$

分析： 这一方程组的特点是：两方程的左边不能分解因式，二次项或非二次项系数都无法消去，但其中含有同一个元 x 或 y 的相应各项系数是成比例的. 本题中含 a 的项有：$\dfrac{2}{6} = \dfrac{-1}{-3}$. 因而，我们可以利用方程的变换首先消去一元，得到一个一元方程，从而原方程组即可化为含有此一元方程的方程组求解.

解： 由 $(4.41) - (4.40) \times 3$, 得 $-4y^2 + 8y = 0$, 即：

$$4y(y-2) = 0 \tag{4.42}$$

这样，原方程组就可转化为由 (4.40), (4.42) 组成或由 (4.41), (4.42) 组成的方程组求解. 再由象例 4.26 的分析，原方程组就化为

$$\begin{cases} 2x^2 - xy + y^2 - 3y + 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x^2 - xy + y^2 - 3y + 2 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$$

直接用代入法即可解出：

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 2 \end{cases}$$

所以原方程组的解集为：

$$\{(x, y)\} = \{(0, 2),\ (1, 2)\}$$

练习

解方程组

1. $\begin{cases} -2xy+y^2+x+y+3=0 \\ 4xy-6y^2-2x+y+4=0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x^2+3xy+y^2+3x+4y-1=0 \\ x^2+6xy+2y^2+2x+8y-3=0 \end{cases}$

（三）可用换元法解的方程组

例 4.31　解方程组

$$\begin{cases} x^2-2xy+y^2+3x+3y-2=0 & (4.43) \\ 2x^2-2xy+2y^2-2x-2y+15=0 & (4.44) \end{cases}$$

分析: 这个方程组的特点是: 在两个方程中若 x, y 将位置互换, 方程式不变, 这种方程我们叫做轮换对称方程, 这种方程组一般可用换元的办法, 设 $x+y=s$, $x\cdot y=t$, 将方程组转化为关于 s,t 的方程组，解出 s,t 再进而解出 x,y.

解: 设

$$\begin{cases} x+y=s \\ xy=t \end{cases} \tag{4.45}$$

代入原方程组，得

$$\begin{cases} s^2-4t+3s-2=0 & (4.46) \\ 2s^2-6t-2f+15=0 & (4.47) \end{cases}$$

象例 4.30 一样，在 (4.46), (4.47) 中消去 t，由 $(4.46)\times 3-(4.47)\times 2$ 得: $-s^2+13s-36=0$，即:

$$(s-4)(s-9)=0$$

因此就有:

$$\begin{cases} s^2-4t+3s-2=0 \\ s-4=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} s^2-4t+3s-2=0 \\ s-9=0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} s=4 \\ \dfrac{13}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} s=9 \\ t=\dfrac{53}{2} \end{cases}$$

将上述两解代回 (4.45) 中，得

$$\begin{cases} x+y=4 \\ xy=\dfrac{13}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=9 \\ xy=\dfrac{53}{2} \end{cases}$$

这两方程组都无实数解.

所以，原方程组无实数解.

综合以上的解法讨论，我们同样可以给出这种类型方程组解的几何意义如下：

第 (II) 类型的二元二次方程组的解，就是它们两个方程所代表的两条二次曲线的交点.

两条二次曲线的交点最多有四个，也可能有两个，还可能没有交点. 相应地，第 (II) 类型的二元二次方程组最多四个解，也可能有两个解，还可能没有解.

练习

解下列方程组

1. $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=a \\ x\cdot y=b \end{cases} \qquad (a>0,\ b>0)$

2. $\begin{cases} x+y=12 \\ \sqrt{x+2}+\sqrt{y-1}=5 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2+y^2+2(x+y)=3(xy+1) \\ 2(x^2+y^2)-xy=6(x+y)-4 \end{cases}$

习题 4.5

1. 解下列方程组：

(a) $\begin{cases} xy+36=0 \\ x+y=5 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x-y=7 \\ x^2+y^2=85 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x^2 - y^2 - 3x + 2y = 10 \\ x + y = 7 \end{cases}$　(f) $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y-1} = 5 \\ x + y = 13 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} (x-2)^2 + (y+3)^2 = 9 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases}$　(g) $\begin{cases} \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{25}{y^2} = 25 \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{5}{y} = 1 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 4x^2 - 9y^2 = 15 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$　(h) $\begin{cases} \dfrac{y}{x} + \dfrac{2x}{y} = 3 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$

2. (a) m 取什么值时，方程组 $\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = 2x + m \end{cases}$ 有两个相等的实数解? 并求出这个解.

(b) 在什么情况下，关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} x + y = a \\ xy = b \end{cases}$ 有实数解？没有实数解?

3. 解方程组:

(a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y^2 = 4x \end{cases}$　(c) $\begin{cases} x^2 - y^2 + (x-y) - 6 = 0 \\ x^2 + 2xy + y^2 - 25 = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 101 \\ xy = -10 \end{cases}$　(d) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7 \\ 6x^2 - 5xy + y^2 = 0 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x^2 - 5xy + 6y^2 = 0 \\ (x-4)(y-1) + (x-3)(y-2) = 0 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} 2x^2 + 27xy + 6y^2 - 6x - 21y - 14 = 0 \\ 2x^2 - 9xy - 3y^2 - 6x + 6y + 4 = 0 \end{cases}$

4. 解方程组:

(a) $\begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 = 25 \\ 2(x-2)^2 - 3(y-1)^2 = 5 \end{cases}$　(b) $\begin{cases} (x+3)^2 + y^2 = 9 \\ 9(x-2)^2 + 4y^2 = 36 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x^2+y^2=8 \\ (x+1)^2=(y-1)^2 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} (x+y+1)^2+(x+y)^2=25 \\ x^2-y^2=8 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x^2-xy-2y^2+y=0 \\ x^2-xy-2y^2-3x+6y=0 \end{cases}$ (g) $\begin{cases} 2x^2-4xy+3y^2=36 \\ 3x^2-4xy+2y^2=36 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x^2+y^2=x+y+20 \\ xy+10=2(x+y) \end{cases}$ (h) $\begin{cases} 4x^2+9y^2=10 \\ 2xy=1 \end{cases}$

5. 解下列方程组:

(a) $\begin{cases} 2x^2-xy-y^2+3x+2y=3 \\ x^2-3x+2=0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x^2-15xy-3y^2+2x+9y-98=0 \\ 5xy+y^2-3y+21=0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x^2+y^2+3xy-4x-4y+3=0 \\ xy+2x+2y-5=0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} xy=3 \\ yz=6 \\ xz=2 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{z}}=\dfrac{5}{2} \\ x+y=10 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} 5x^2-6xy+5y^2=29 \\ 7x^2-8xy+7y^2=43 \end{cases}$

本章内容要点

一、本章主要内容是讨论实系数多项式的根，若 α 满足 $f(\alpha)=0$, 则 α 叫多项式 $f(x)$ 的根，多项式 $f(x)$ 的根就是方程 $f(x)=0$ 的根.

二、多项式 $f(x)$ 的求根，就是解方程 $f(x)=0$. 对于一元多项式 $f(x)$: 一次、二次、三次、四次多项式都有求根公式 (也称为根式解), 而五次以上的一元多项式没有求根公式 (不存在根式解).

三、有理系数多项式 $f(x)$ 若有有理根 $\dfrac{p}{q}$, $(p,q)=1$ 则必定有 p 能整除常数项 a_0, q 能整除首项系数 a_n. 特别地，若 $f(x)$ 有整数根 α, 则 $\alpha|a_0$.

因此，求有理系数多项式 $f(x)$ 的有理根时，就可以首先找出 a_n 与 a_0 的因数，配成以 a_n 的因数为分母，以 a_0 的因数为分子的各种应有形式的有理分数就是所求有理根的范围；其次再用余式定理与综合除法逐个试算，确定所求多项式的有理根，特别地，有理系数多项式的整数根，只要在 a_0 的所有因数中试算，即可确定.

四、同时满足 $f(\alpha)=0$, $g(\alpha)=0$ 的数 α, 叫做多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公根.

两多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有公根的充要条件是它们有一次公因式；求两多项式的公根，一般只要求它们的最高公因式的根就可以；也可以先求其中一个多项式的根，再逐个代入另一多项式去试算，凡满足的，就是公根，否则就不是公根.

五、如果 α 满足 $f(x)=(x-\alpha)^m\cdot q(x)$, 且 $q(\alpha)\neq 0$. 那么，α 就叫做 $f(x)$ 的 m 重根.

α 是 $f(x)$ 的二重根的充要条件是 α 为 $f(x)$, $f'(x)$ 的公根.

若 $(f(x),f'(x))$ 含有 $(x-\alpha)^{m-1}$ 的因式，则 α 就是 $f(x)$ 的 m 重根，也是 $f'(x)$ 的 $m-1$ 重根.

对于一个多项式 $f(x)$, 如果它有重根，那么，$(f(x),f'(x))$ 就是非零次多项式，且不为零多项式. 因而. $\dfrac{f(x)}{(f(x),f'(x))}=\varphi(x)$ 就是一个没有重根的多项式，而且 $\varphi(x)$ 与 $f(x)$ 有相同的根.

六、实系数多项式的实根，一般是用有理数近似值表示，求实根的近似值主要依据多项式函数的中间值定理，采用逼近的方法. 一般地要顺序解决以下几个问题:

1. 确定根界

   多项式 $f(x)=x^n\ a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 的所有根在 $[-M,M]$ 之中，$M=1+|a_{n-1}|+\cdots+|a_1|+|a_0|$;

2. 确定根的个数，根的定位

   计算史笃姆函数序列及变号数 $W(-M),W(M)$, 由克笃姆定理可确定: 没有重根的多项式 $f(x)$ 在 $[-M,M]$ 中有 $(W(-M)-W(M))$ 个实根，并可将每个根限定在一个确定的区间中.

3. 计算每一实根的近似值

   运用秦九韶法，可以计算出在 (a,b) 中的实根的任意精确度的近似值. 在具体计算过程中，主要使用了两种变换，方便和简化了运算.

七、二元二次方程组分为两种类型，第 (I) 类型是基础，它的求解主要是采用代入消元法；第 (II) 类型，我们仅讨论了一些具有特点的特殊方程组的解法，其中主要是：

1. 可转化为第 (I) 类型求解的方程组，其转化的主要方法是因式分解；消去二次项，消去非二次项、再分解因式，总之是降次.
2. 可转化为含有一元方程的方程组，其转化的主要方法是消去含有某一元的各项. 实际就是消元.
3. 可用换元法解的轮换对称方程组.

至于一般的由两个二元二次方程组的方程组，如果不具有以上这些特点，其解法繁难，我们先不予讨论. 以后可以使用几何法解决.

复习题四

1. 求下列多项式的有理根：

   (a) $x^3-x^2-8x+12$

   (b) $x^3-11x^2+18x-8$

   (c) $x^4-7x^3-7x^2+43x+42$

   (d) $x^5+4x^3+8x^2+32$

   (e) x^4-x^2+2x-1

   (f) $4x^4-9x^2+6x-1$

2. 如果多项式 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的二根之比为 $\dfrac{2}{3}$, 求证：$6b^2=25ac$.
3. 判别下列多项式有没有重根，若有，求出其重根.

   (a) $x^4-24x^2+64x-48$

   (b) $x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$

   (c) x^4+4x^2-4x-3

4. 证明：$f(x)=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}$ 没有重根.
5. 求 $f(x)=x^4+x^3-2x-4$ 与 $g(x)=x^4-x^3+2x-4$ 的公根.
6. 求多项式 x^3+px+q 有重根的条件.
7. (a) 若 a 为整数，但 $|a|\neq 2$, 试证：多项式 $f(x)=x^2+ax+1$ 没有有理根.

(b) 若 a, b, c 都是奇数，试证明 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 没有整数根.

8. $a \neq 0$, 求证多项式 $f(x) = x^n - a^n$ 没有重根.

9. 已知 $f(x) = 2x^4 - 8x^3 + 19x^2 - 12x + 24$ 有两个根分别是 $g(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2$ 的两个根的 2 倍，求这两个根.

10. 求多项式 $p(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 7$ 的正根的近似值，使误差小于 10^{-8}.

11. 求 98 的 5 次方根，使误差小于 10^{-6}（允许应用四位对数表求出前若干位数字）.

12. 求多项式 $f(x) = x^3 + x^2 + x - 10^{10}$ 的正根的近似值，使误差小于 1.

13. 将 $x^5 - 243$ 写成以 $x - 3$ 为元的多项式，将 $x^3 + x^2 + 1$ 写成以 $x + 1$ 为元的多项式.

14. 应用中间值定理，写出下列各多项式的实根在哪些连续整数之间.

    (a) $x^4 - 2x^3 - x^2 + 6x + 2$

    (b) $x^3 + x^2 - 2x + 1$

    (c) $x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 4x - 6$

15. 若三次多项式 $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 3$ 有三个根 α, β, γ，试求下列各式的值：

    (a) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$

    (b) $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$

    (c) $(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)$

    (d) $\alpha^2(\beta + \gamma) + \beta^2(\alpha + \gamma) + \gamma^2(\alpha + \beta)$

16. 应用多项式的第一种换元变形，使 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x + 7$ 变形为 $g(y)$ 后，$g(y)$ 中 y 的系数为零.

17. 应用多项式的第一种换元变形，使 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ $(a, \neq 0)$ 变形为 $g(y)$ 后，$g(y)$ 中 y^{n-1} 的系数为零.

18. 解方程组：

(a) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 48 \\ x - y - 8 = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 = 1 \\ 3x^2 + xy + 3y^2 = 13 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x - 2y + 3 = 0 \\ x^2 + 4xy - y^2 + 10y - 9 = 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x^2 - xy = 12 \\ xy - 2y^2 = 1 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{xy} = \dfrac{1}{a^2} \\ \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{xy} = \dfrac{1}{b^2} \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x^4 + y^4 = 97 \\ x + y = 5 \end{cases}$

(g) $2(x-y)+xy = 3xy-(x-y) = 7$