Méthodes Numériques pour l'Ingénieur
Examen final

Bruno Lombard

10 mai 2024

Prénom et nom de l'étudiant : ....

Recommandations

- L'examen est un questionnaire à choix multiples (QCM). Il est composé de 20 questions indépendantes. Sa durée est de 2 heures.
- Pour chaque question, il y a une seule bonne réponse. Une bonne réponse donne 1 point ; une mauvaise réponse coûte 1 point de pénalité ; ne donner aucune réponse n'apporte aucun point et n'en coûte aucun. En cas de doute, il peut être judicieux de ne pas répondre !
- Les documents de cours et de TD sont autorisés. L'accès à Internet est interdit.

Questions

1. Soit $f(x) = \cos x$. Le polynôme d'interpolation de Lagrange de f relativement aux points $x_0 = 0$ et $x_1 = \pi$ est :

   A. $p_1(x) = 1 + \dfrac{2}{\pi}x$

   B. $p_1(x) = 1 - \dfrac{2}{\pi}x$

   C. $p_1(x) = \dfrac{2}{\pi}x - 1$

   Solution : réponse B

2. Le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points $(-1, 0)$, $(1, 2)$, $(2, 0)$ et $(3, 2)$ est:

   A. $\dfrac{1}{4}\,(x+1)\,(x-2)\,(3x-7)$

   B. $\dfrac{1}{3}\,x\,(x+1)\,(x+2)$

   C. $\dfrac{1}{2}\,x^2\,(x-2)$

   Solution : réponse A

3. Soit $f(x) = \cos x$ et $p_2(x)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de f relativement aux points $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/2$ et $x_2 = \pi$. L'erreur théorique $|f(x) - p_2(x)|$ sur $[x_0, x_2]$ est bornée par :

A. $\dfrac{7\sqrt{5}\,\pi^5}{2024}$

B. $\dfrac{\sqrt{2}\,\pi^4}{712}$

C. $\dfrac{\sqrt{3}\,\pi^3}{216}$

Solution : réponse C

4. Les points du polynôme Tchebychev de degré 4 sont :

   A. $\left\{\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\}$

   B. $\left\{\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right\}$

   C. $\left\{\pm\cos\left(\frac{\pi}{8}\right), \pm\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)\right\}$

   Solution : réponse C

5. Soit un ensemble de points de coordonnées $(1,2)$, $(3,6)$, $(-2,-4)$ et $(4,8)$. La droite minimisant l'écart à ces points, au sens des moindres carrés, a pour pente

   A. 1

   B. 2

   C. 3

   Solution : réponse B

6. On souhaite concevoir un virage d'une voie de chemin de fer entre les points $(0,0)$ et $(1,1)$. Le virage est décrit par une courbe de la forme $y = f(x)$ qui satisfait $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. De plus, pour assurer une transition en douceur, la pente de la courbe doit satisfaire $f'(0) = 0$ et $f'(1) = 0.3$. Le polynôme assurant ces conditions est un :

   A. polynôme de Hermite de degré 3

   B. polynôme de Lagrange de degré 4

   C. polynôme de Tchebychev de degré 5

   Solution : réponse A

7. On considère la relation de récurrence

$$u_n = 111 - \frac{1130}{u_{n-1}} + \frac{3000}{u_{n-1}\,u_{n-2}},$$

dont la solution générale s'écrit

$$u_n = \frac{\alpha\,100^{n+1} + \beta\,6^{n+1} + \gamma\,5^{n+1}}{\alpha\,100^n + \beta\,6^n + \gamma\,5^n}.$$

Les valeurs des paramètres $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ dépendent des données initiales. Pour $u_0 = 2$ et $u_1 = -4$, leurs valeurs exactes sont $\alpha = 0$, $\beta = -3$ et $\gamma = 4$, et on a $\ell = \lim\limits_{+\infty} u_n = 6$. On note $\tilde{\ell}$ la limite de u_n si l'on commet une erreur de 10^{-7} sur chacun des paramètres (α, β, γ). Cette limite en $n \to +\infty$ est :

A. $\tilde{\ell} = 6$

B. $\tilde{\ell} = 6 - 10^{-7}$

C. $\tilde{\ell} = 100$

Solution : réponse C

8. Soit

$$I = \int_0^1 \exp(-x^2)\, dx.$$

En appliquant la méthode de Simpson (formule simple), on obtient au quatrième chiffre significatif :

A. $I_1 = 0.7358$

B. $I_1 = 0.7560$

C. $I_1 = 0.7471$

Solution : réponse C

9. On considère la formule de quadrature

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = \lambda_0\, f\left(-\frac{1}{3}\right) + \lambda_1\, f\left(+\frac{1}{3}\right).$$

Pour que cette formule soit d'ordre 1, les coefficients sont :

A. $\lambda_0 = +1$, $\lambda_1 = +1$

B. $\lambda_0 = -1$, $\lambda_1 = +1$

C. $\lambda_0 = -\frac{1}{3}$, $\lambda_1 = +\frac{1}{3}$

Solution : réponse A

10. On calcule l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

par la méthode des trapèzes (formule simple). L'erreur commise est bornée par :

A. $1/48$

B. $1/96$

C. $1/200$

Solution : réponse A

11. On cherche à évaluer l'intégrale

$$I = \int_0^{\pi} \sin x\, dx$$

par la méthode de Newton de degré 3. On utilise une méthode composée à N sous-intervalles de pas constant. Le nombre minimal de pas N pour assurer une erreur inférieure à 10^{-4} est :

A. 5

B. 10

C. 15

Solution : réponse A

12. On cherche à évaluer l'intégrale
$$I = \int_{-1}^{1} \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$
grâce au polynôme de Gauss-Tchebychev de degré 2. A 4 chiffres significatifs, I vaut :

    A. 2.5709

    B. 3.9602

    C. 4.2429

    Solution : réponse B

13. Soit l'équation différentielle ordinaire
$$\begin{cases} \dot{u} = -10\,u, \qquad t \in [0,1] \\ u(0) = 1, \end{cases}$$
que l'on résout par la méthode d'Euler explicite à pas constant. On souhaite assurer une erreur inférieure à 10 %. Pour cela, le nombre minimal d'itérations doit être supérieur à :

    A. $50\,e^{10}$

    B. $50\,e^{11}$

    C. $50\,e^{12}$

    Solution : réponse A

14. On résout l'équation différentielle ordinaire
$$\begin{cases} \dot{u} = 5\,u + 10, \\ u(0) = 0, \end{cases}$$
par la méthode d'Euler implicite à pas constant $h = 0.1$. Au bout de 3 itérations, on obtient :

    A. $u_3 = 6$

    B. $u_3 = 14$

    C. $u_3 = 20$

    Solution : réponse B

15. On résout l'équation différentielle $\dot{x} = f(t,x)$ par le schéma d'Adams-Moulton à 2 pas :
$$x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{h}{12}\left(5\,f_{n+2} + 8\,f_{n+1} - f_n\right),$$
où on note f_n l'approximation de $f(t_n, x_n)$. L'ordre de cette méthode est :

    A. 2

    B. 3

    C. 4

    Solution : réponse B

16. Soit l'équation différentielle $\dot{x} = (-2 + 3\,i)\,x$. La valeur limite du pas h que l'on peut utiliser pour que Euler explicite soit absolument stable est :

    A. $4/13$

    B. $8/25$

    C. $16/49$

    Solution : réponse A

17. La dynamique d'un pendule linéaire avec frottement s'écrit

$$\ddot{\theta} + \varepsilon\,\dot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = 0, \qquad \varepsilon > 0.$$

    Appliqué à cette équation différentielle, le schéma d'Euler explicite à pas constant h est absolument stable :

    A. jamais

    B. pour $h > \varepsilon\,\omega_0$

    C. pour $h < \dfrac{\varepsilon}{\omega_0^2}$

    Solution : réponse C

18. Les coefficients du schéma de Heun explicite sont donnés dans le tableau de Butcher suivant :

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ \hline & 1/4 & 0 & 3/4 \end{array}$$

    Pour ce schéma de Heun, la troisième valeur intermédiaire s'écrit :

    A. $k_3 = f\left(u_n + \dfrac{1}{3}\,h_n\,k_2,\; t_n + \dfrac{1}{3}\,h_n\right)$

    B. $k_3 = f\left(u_n + \dfrac{1}{3}\,h_n\,k_2,\; t_n + \dfrac{2}{3}\,h_n\right)$

    C. $k_3 = f\left(u_n + \dfrac{2}{3}\,h_n\,k_2,\; t_n + \dfrac{2}{3}\,h_n\right)$

    Solution : réponse C

19. Les coefficients d'une méthode de Runge-Kutta sont donnés dans le tableau de Butcher :

$$\begin{array}{c|cc} 1/2-\gamma & 1/4 & 1/4-\gamma \\ 1/2+\gamma & 1/4+\gamma & 1/4 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

    Pour $\gamma = 1/3$, cette méthode est-elle :

    A. explicite

    B. implicite

C. ni l'une ni l'autre

Solution : réponse B

20. Le schéma de Heun (dont le tableau est donné en question 18) est absolument stable :

    A. oui

    B. non

    C. oui, mais uniquement sur $]-2,0[$

    Solution : réponse B