UNIVERSITÉ DE PAU ET DES PAYS DE L'ADOUR

U.F.R SCIENCES ET TECHNIQUES
Département d'Informatique
B.P. 1155
64013 PAU CEDEX
Téléphone secrétariat : 05.59.40.79.64
Télécopie : 05.59.40.76.54

II- OPTIMISATION DANS UN RESEAU DE FLOT

I-Eléments d'optimisation
II-Algorithme de Ford & Fulkerson
III-Complexité
IV-Exemple d'application

I- Eléments d'optimisation

L'algorithme qui sera présenté va **construire progressivement** un flot compatible vérifiant le théorème:

$$v = \sum_{(i,j) \in (S,\bar{S})} u_{ij}$$

Où :

- v est le flot **compatible maximal**,
- et [s, $\overline{s}$] est une coupe de **capacité minimale**.

Le problème est donc ramené à la construction d'une st-coupe

$$[s, \overline{s}]$$

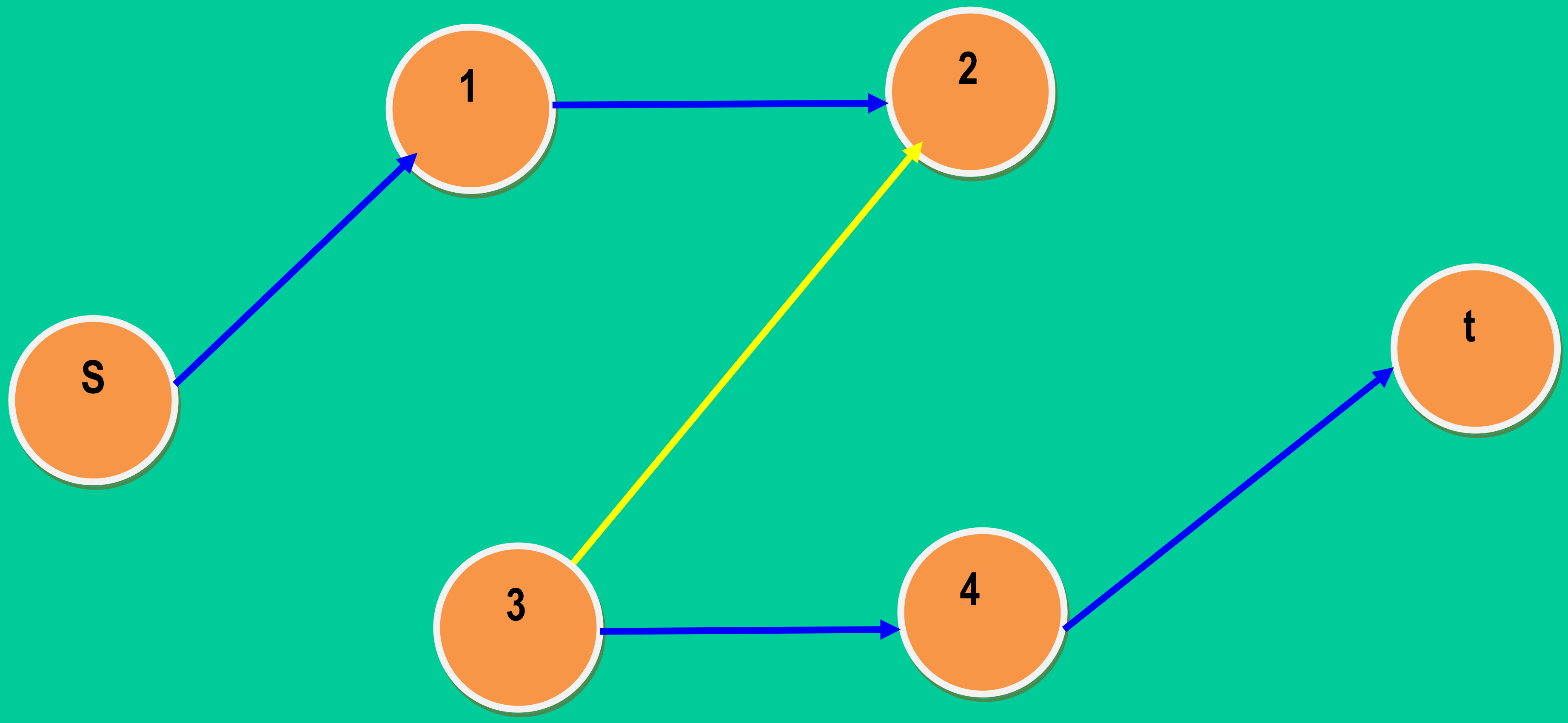
de **capacité minimale.**

Définition d'une chaîne augmentante du flot

Une chaîne **μ** est une suite d'arcs qui ne sont pas nécessairement dans le même sens.

On distingue :

- les arcs **u** dans le **sens direct** notés **$u \in \mu^+$**
- et ceux de **sens inverse** notés **$u \in \mu^-$.**



$u_{s1}, u_{12}, u_{34}, u_{4t}, \in \mu^{+}$

$u_{23} \in \mu^{-}$

Soient un flot compatible **v** sur le réseau et **μ** une chaîne de la source **s** au puits **t**.

La chaîne **μ** est dite **augmentante** si :

1-pour tous les arcs **u** de sens direct (**u** $\in \mu+$) le flux est **inférieur strictement** à la capacité supérieure $\mathbf{C_u}$:

$$\forall\, u \in \mu+ \quad \bullet \quad x_u < c_u$$

Dans ce premier cas, le flux peut augmenter.

2-pour tous les arcs **u** de sens inverse (**u** $\in \mu^-$) le flux est **strictement positif** :

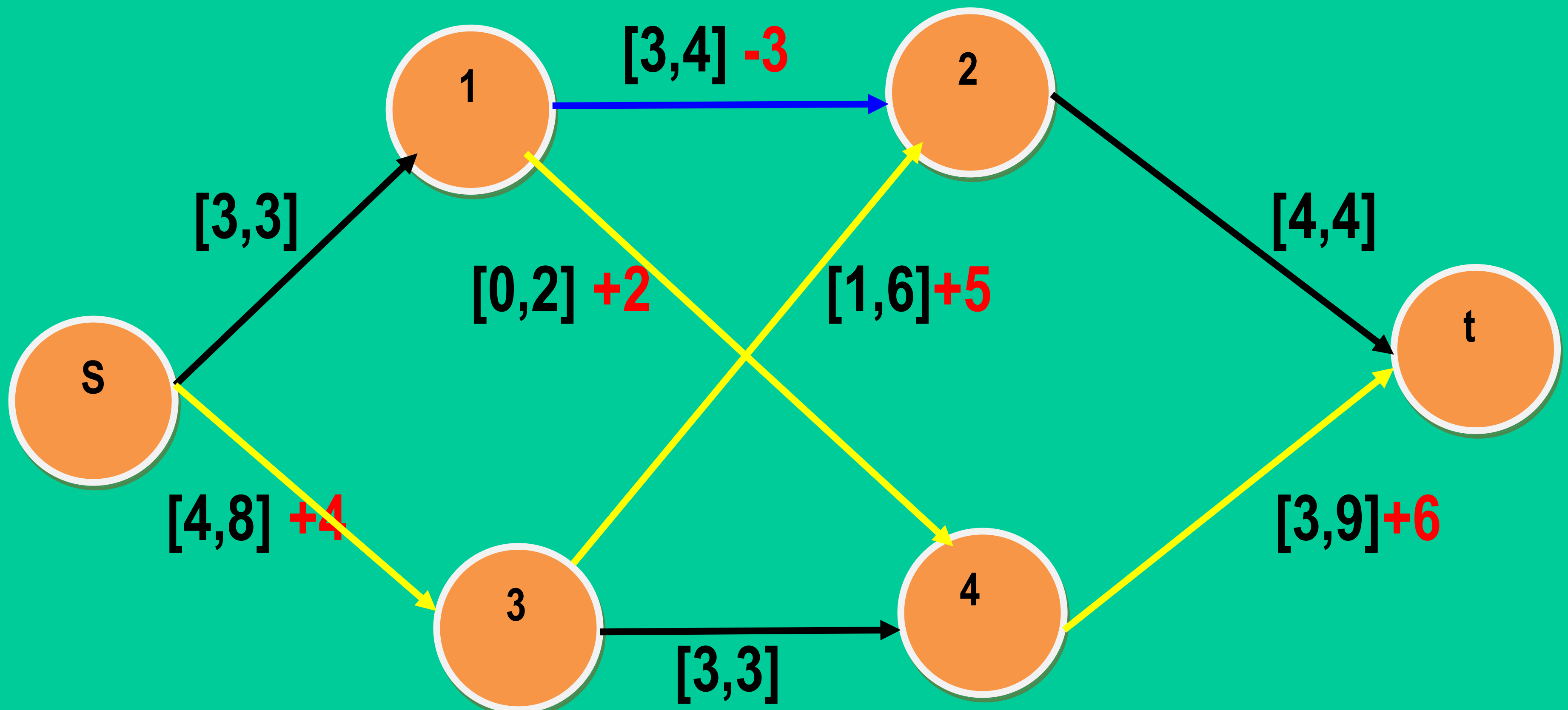
$$\forall\, u \in \mu^- \bullet \; x_u > 0$$

Dans ce deuxième cas, le flux peut diminuer.

Donc la chaîne μ est **augmentante** si et seulement si:

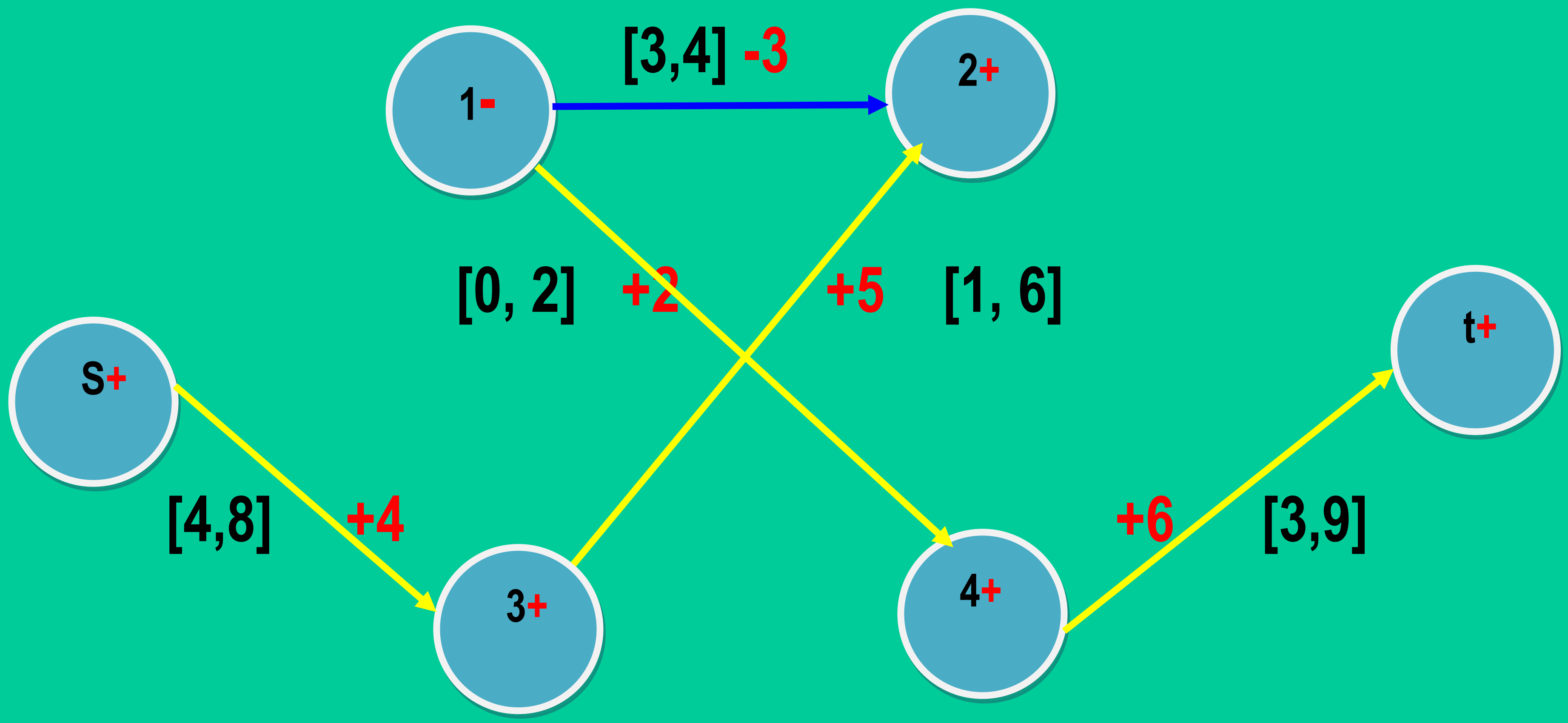
$$\forall\, u \in \mu^+ \bullet \; x_u < c_u \quad \wedge \quad \forall\, u \in \mu^- \bullet \; x_u > 0$$

Soit le réseau ci-dessous :

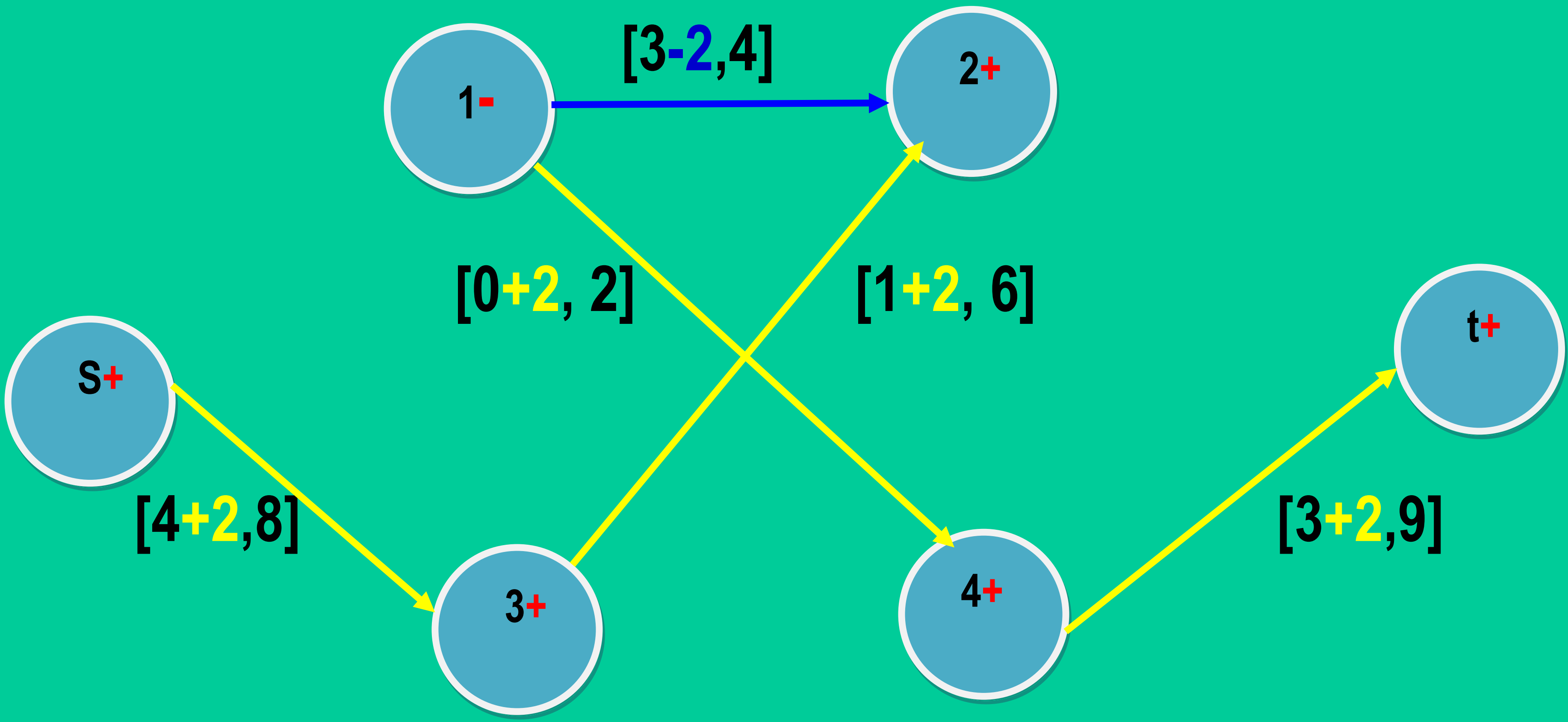


Partant de **s**, on peut marquer **t** en parcourant le chaîne **augmentante**:

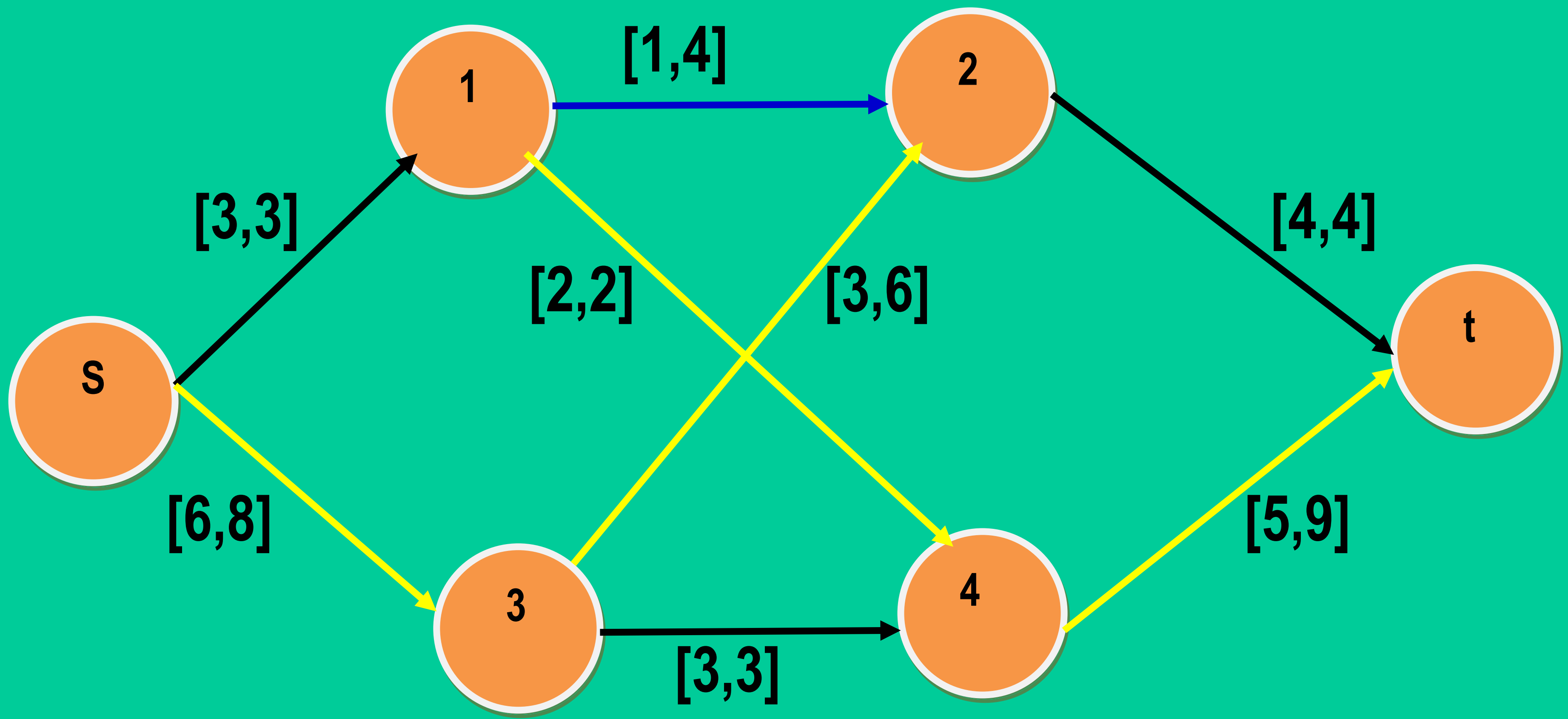
[s,3,2,1,4,t]



L’arc (1,4) limite la variation à 2 unités sur la chaîne [s,3,2,1,4,t]



On augmente donc le flot de s vers t de 2 unités :



Recherche de chaîne augmentante par marquage

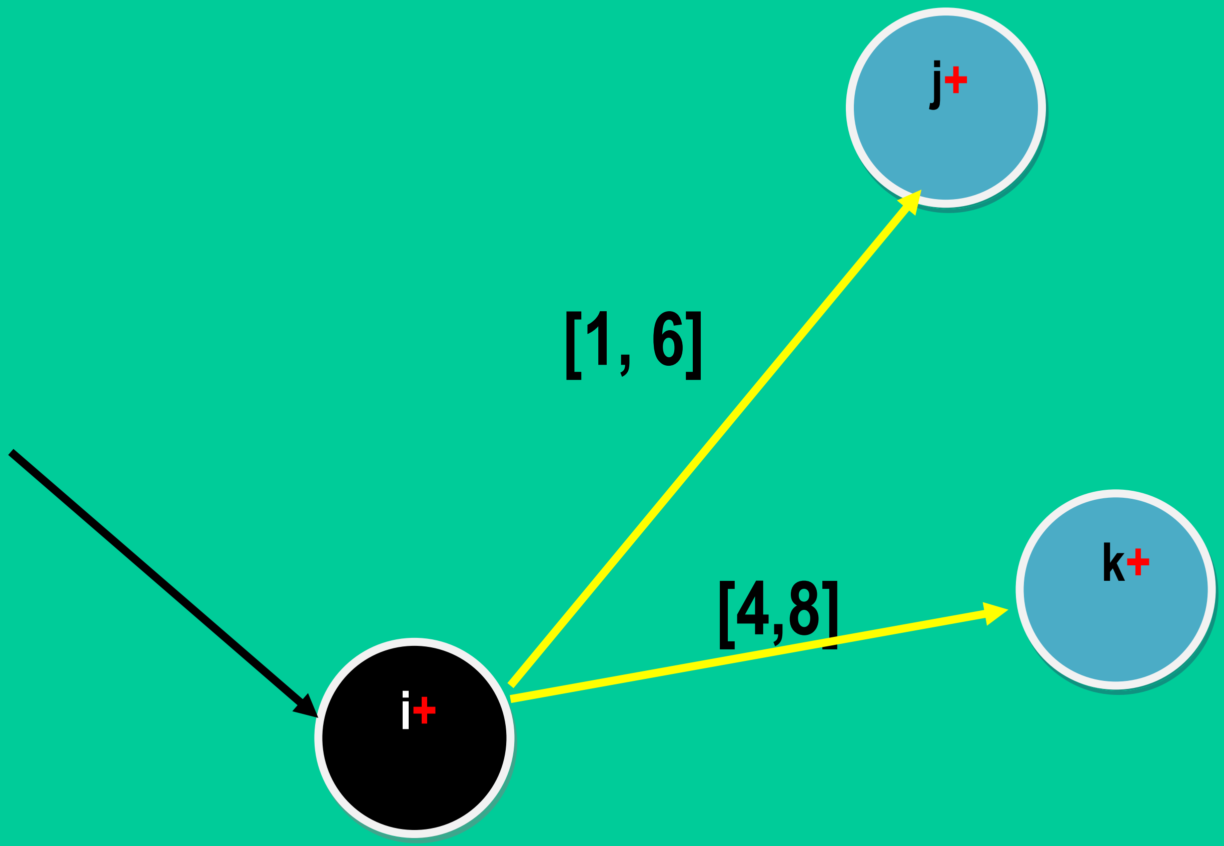
La recherche d'une chaîne **augmentante** utilise une **procédure de marquage.**

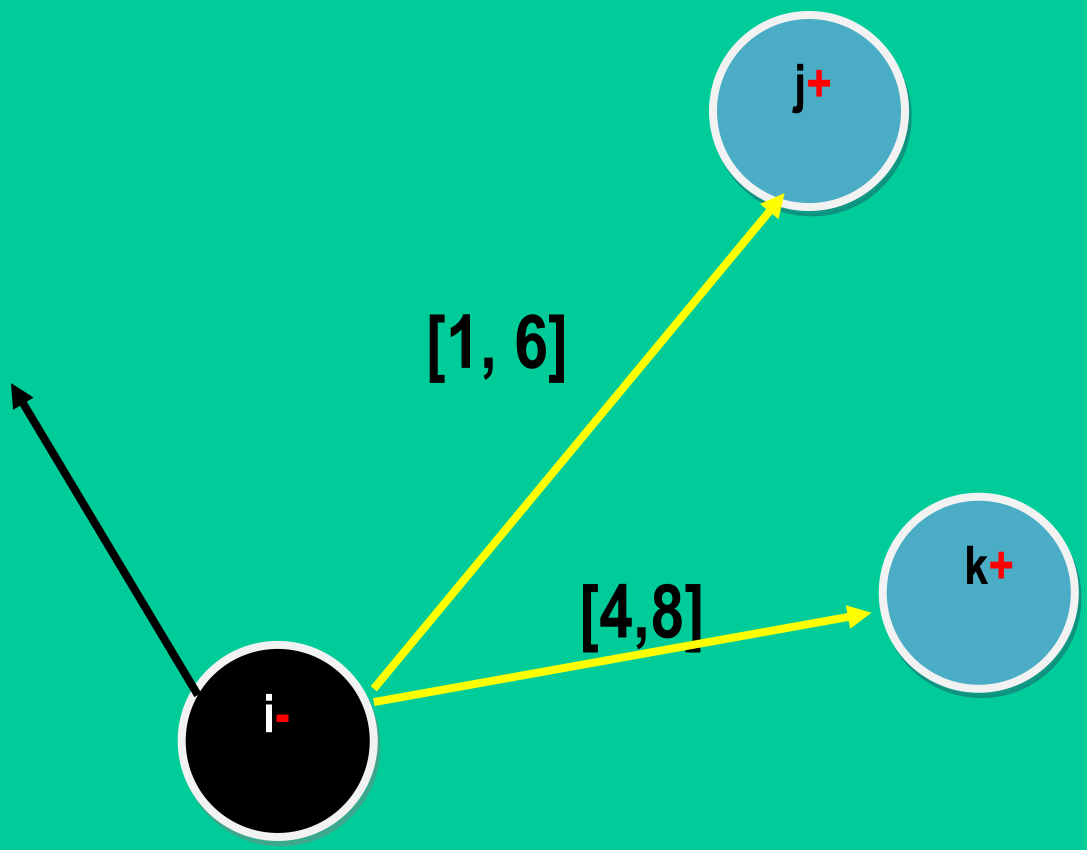
Le principe du marquage est le suivant:

1- Commencer par marquer "**+**" le sommet **s**

2- Marquer "**+**" tout sommet non marqué **extrémité** d'un arc **u** dont l'**origine** est marquée et sur lequel le flux peut augmenter: $\mathbf{u} \in \mu^{+}$

$$x_u < c_u$$

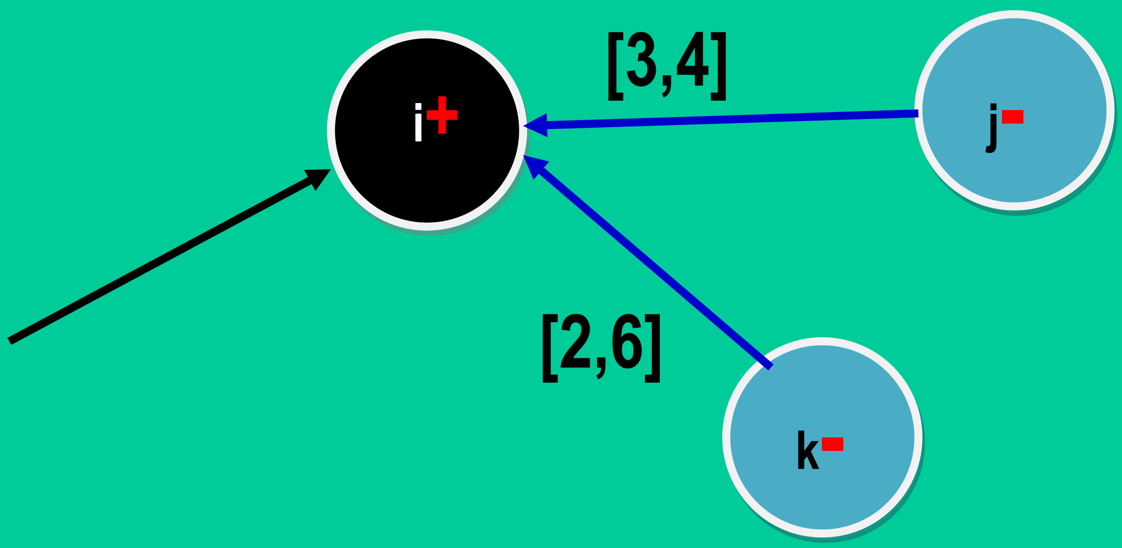


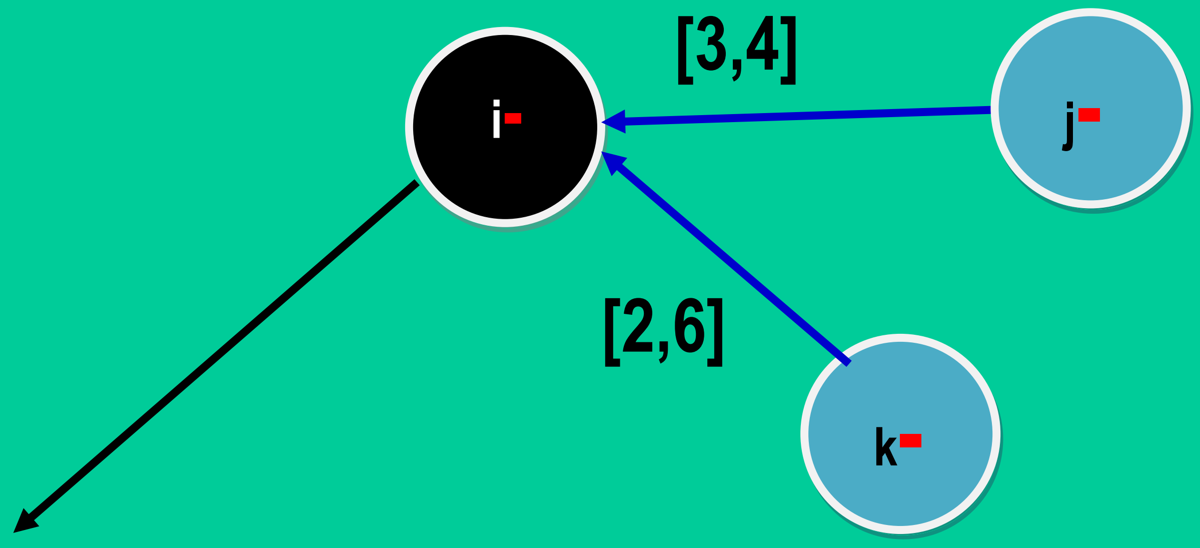


j+
[1, 6]
k+
[4,8]
i-

3- Marquer "–" tout sommet non marqué **origine** d'un arc **u** dont l'**extrémité** est marquée et sur lequel le flux peut diminuer: **u**∈μ-

$$x_u > 0$$




[3,4]
i
j
[2,6]
k

Principe de recherche de chaîne augmentante

-Marquer **s** de "+"

-TANT QUE "il existe des sommets **marquables**" ET "**t** non marqué"

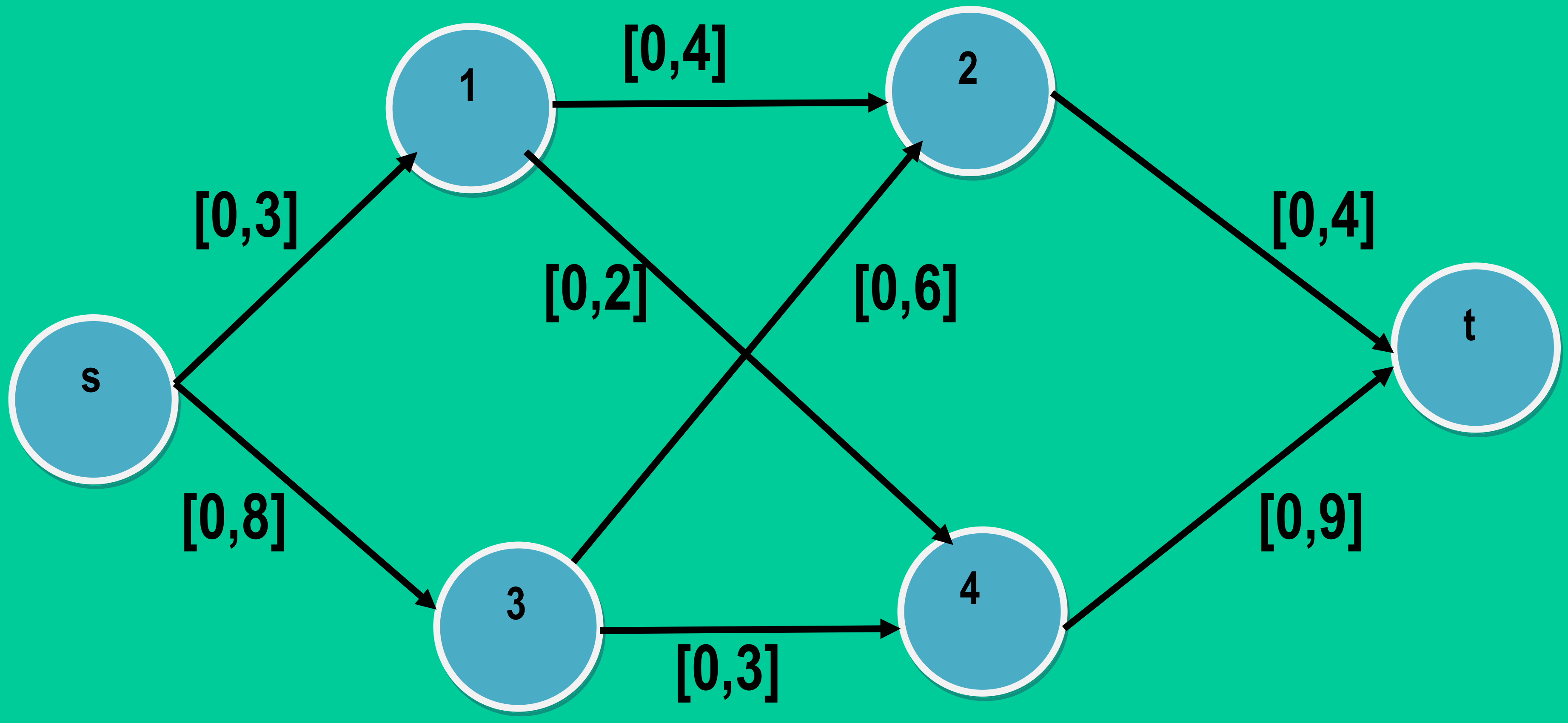
- choisir un sommet "marquable"
- marquer ce sommet

FinTq

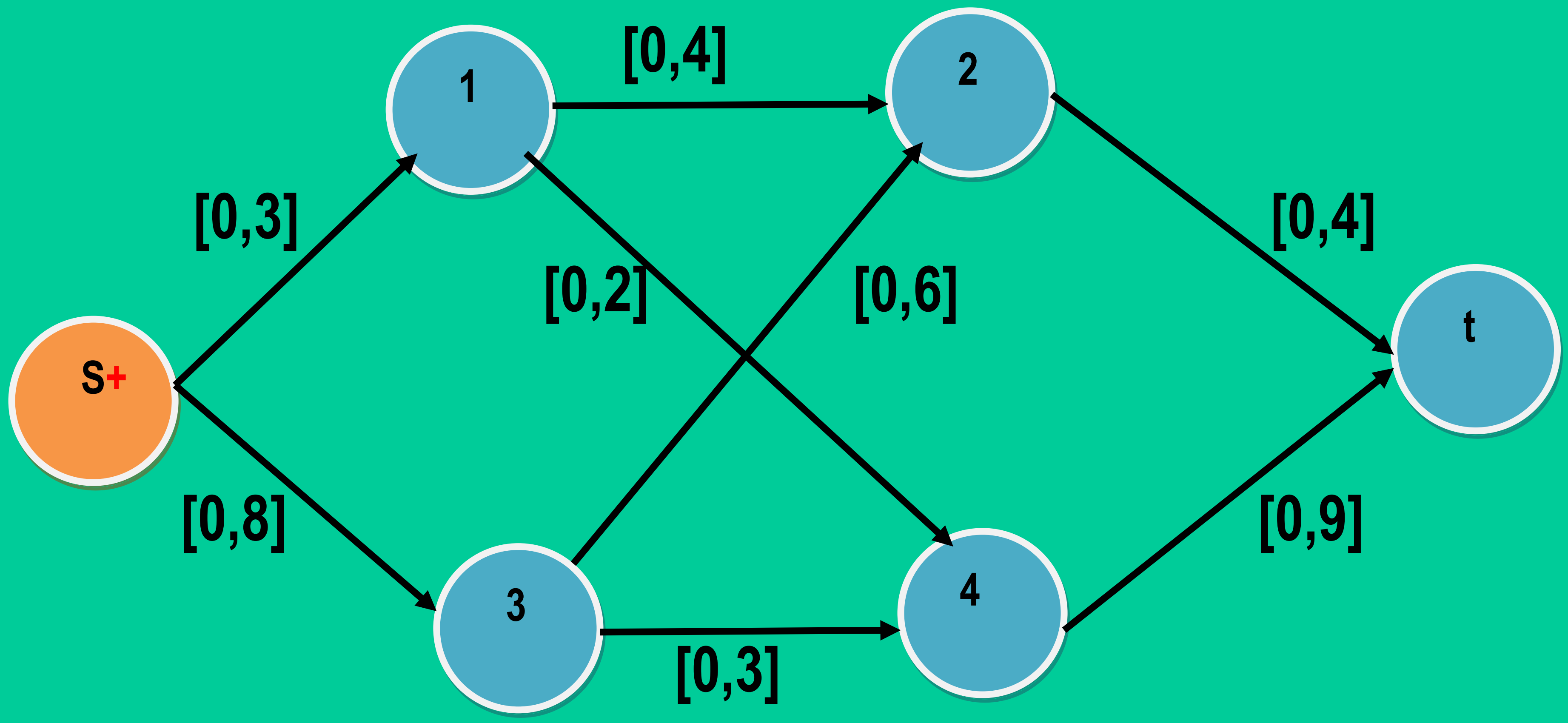
-Si **t** non marqué alors pas de chaîne augmentante.

Exemple

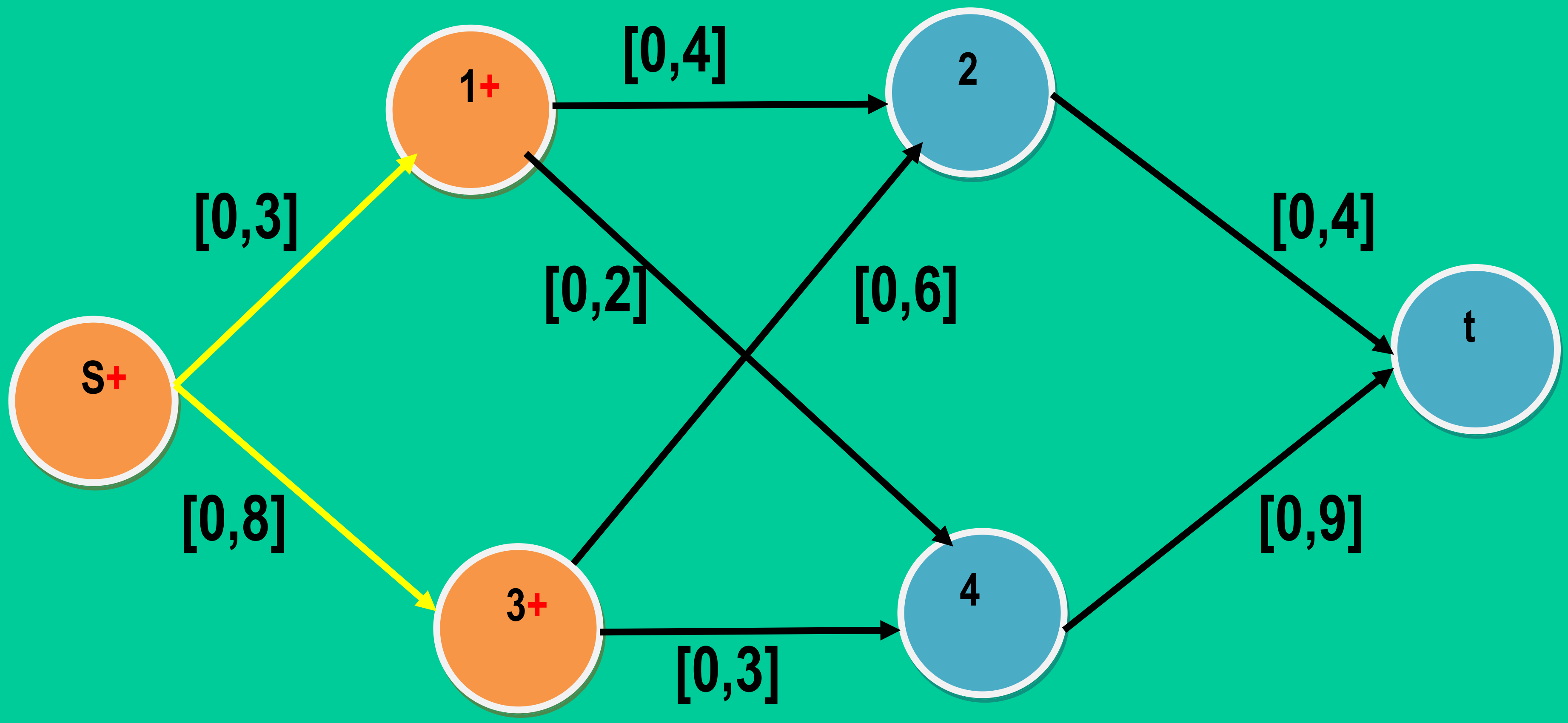
Soit le réseau G ci-dessous.



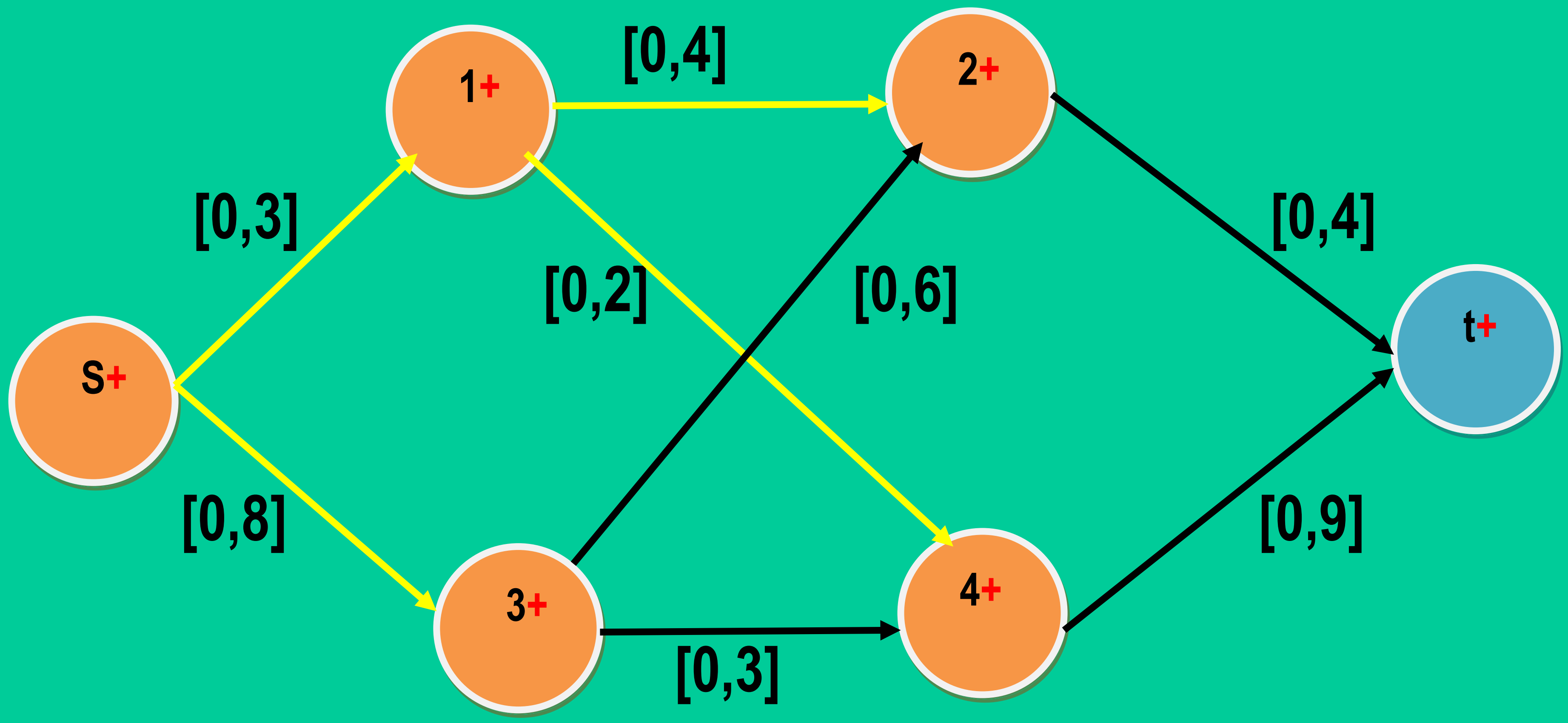
On commence par marquer + le sommet **s** :



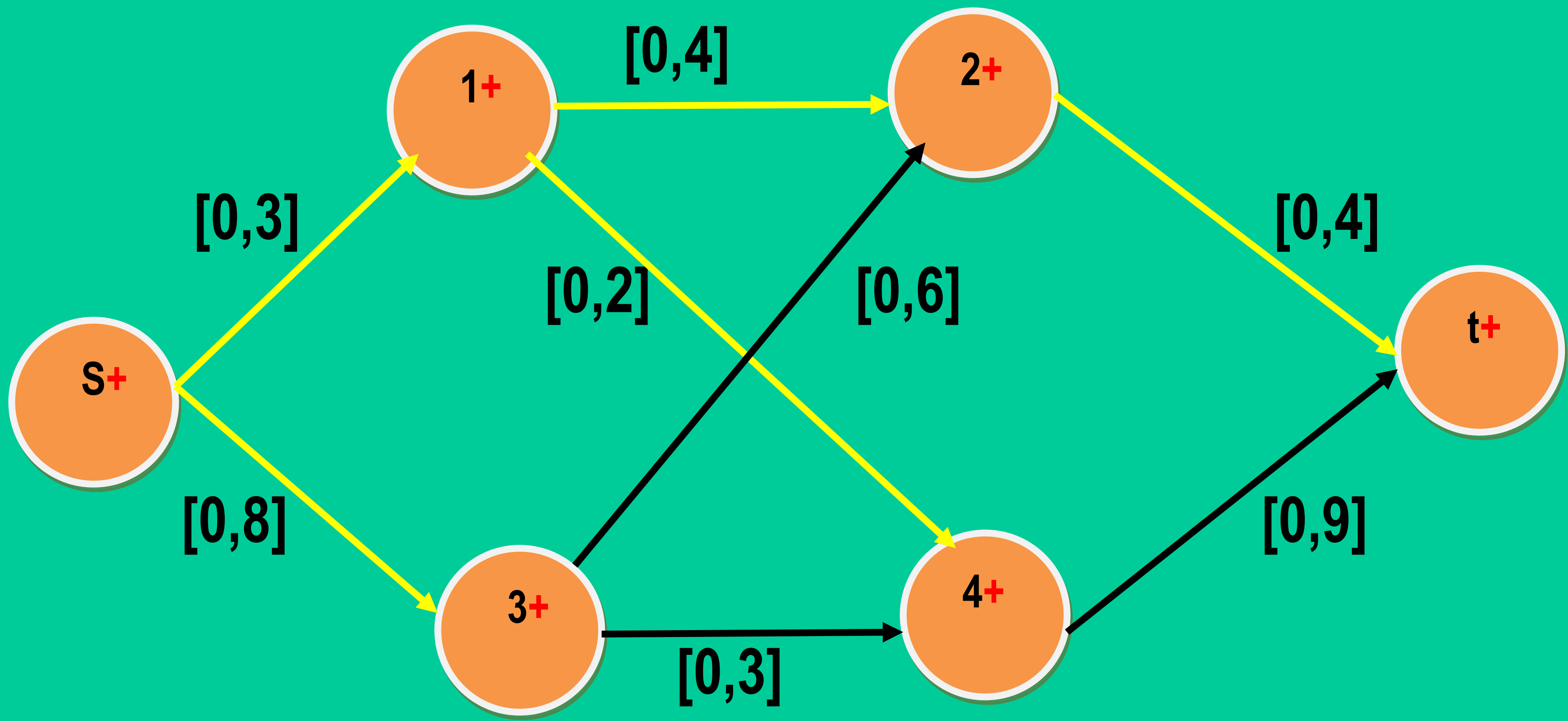
Ensuite marquer + les sommets **1** et **3** partant de **s.**



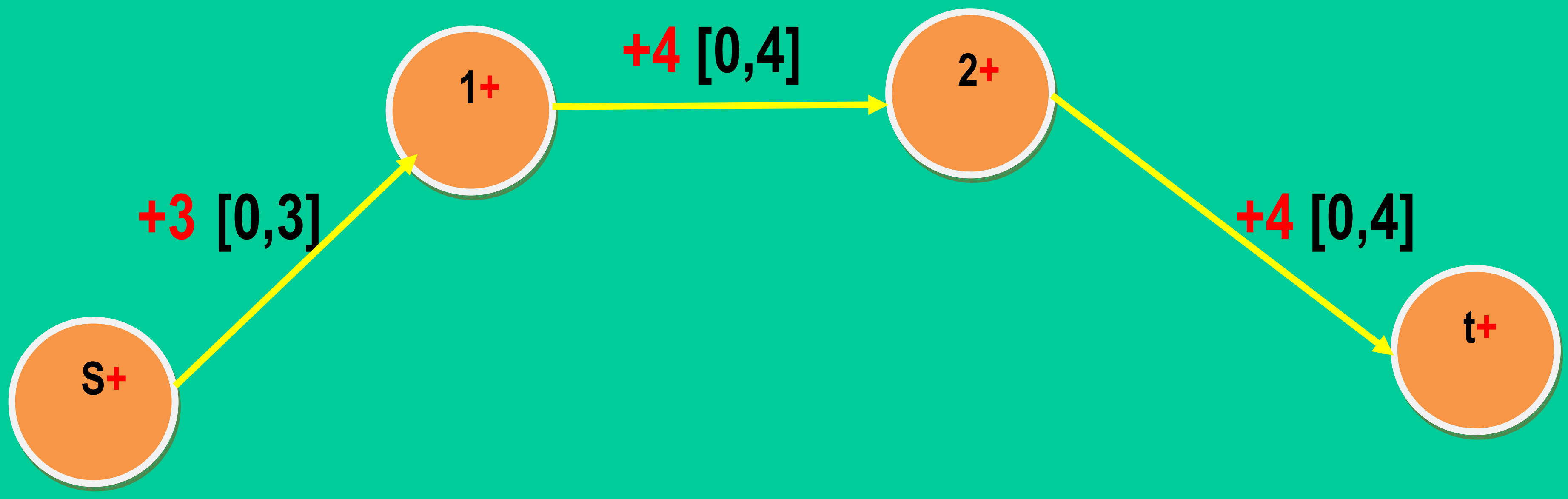
Ensuite + les sommets **2** et **4** partant de **1.**

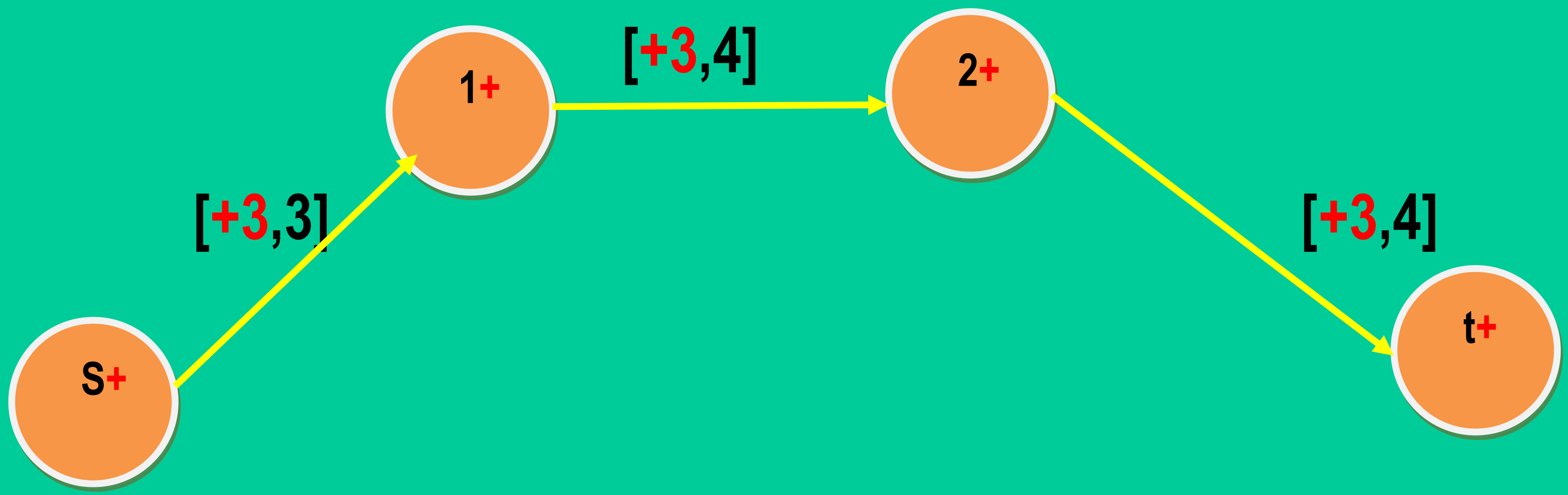


Enfin marquer **+** le sommet **t** partant de **2.**



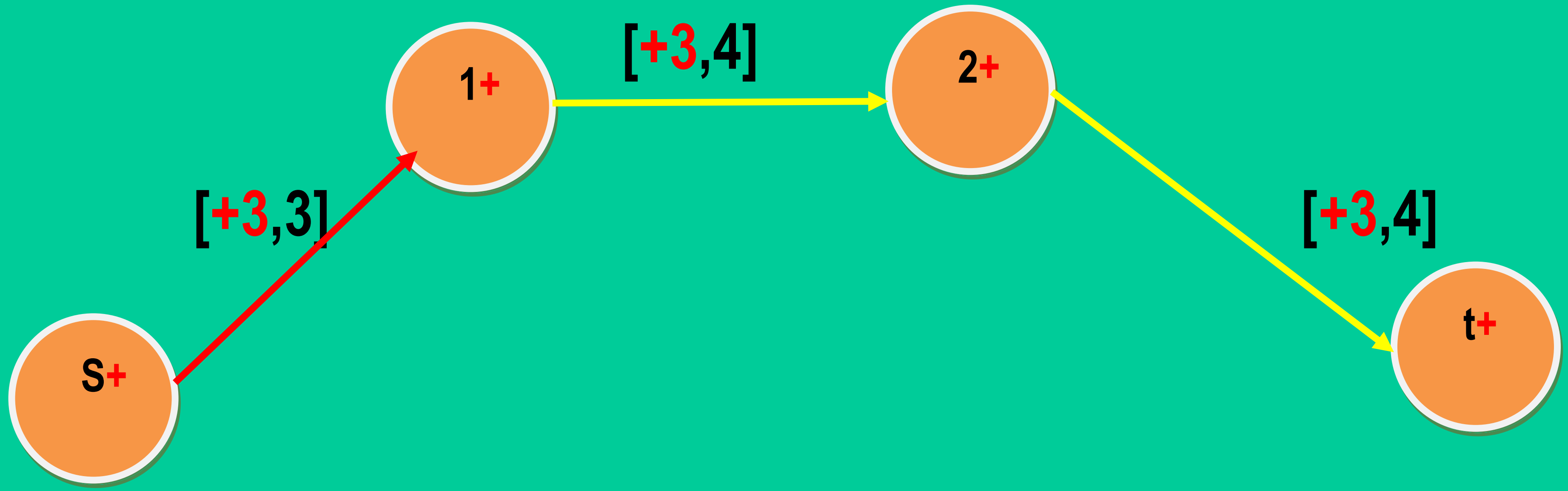
On a trouvé une chaîne **augmentante :** [s,1,2,t]


S+
1+
2+
t+
+3 [0,3]
+4 [0,4]
+4 [0,4]

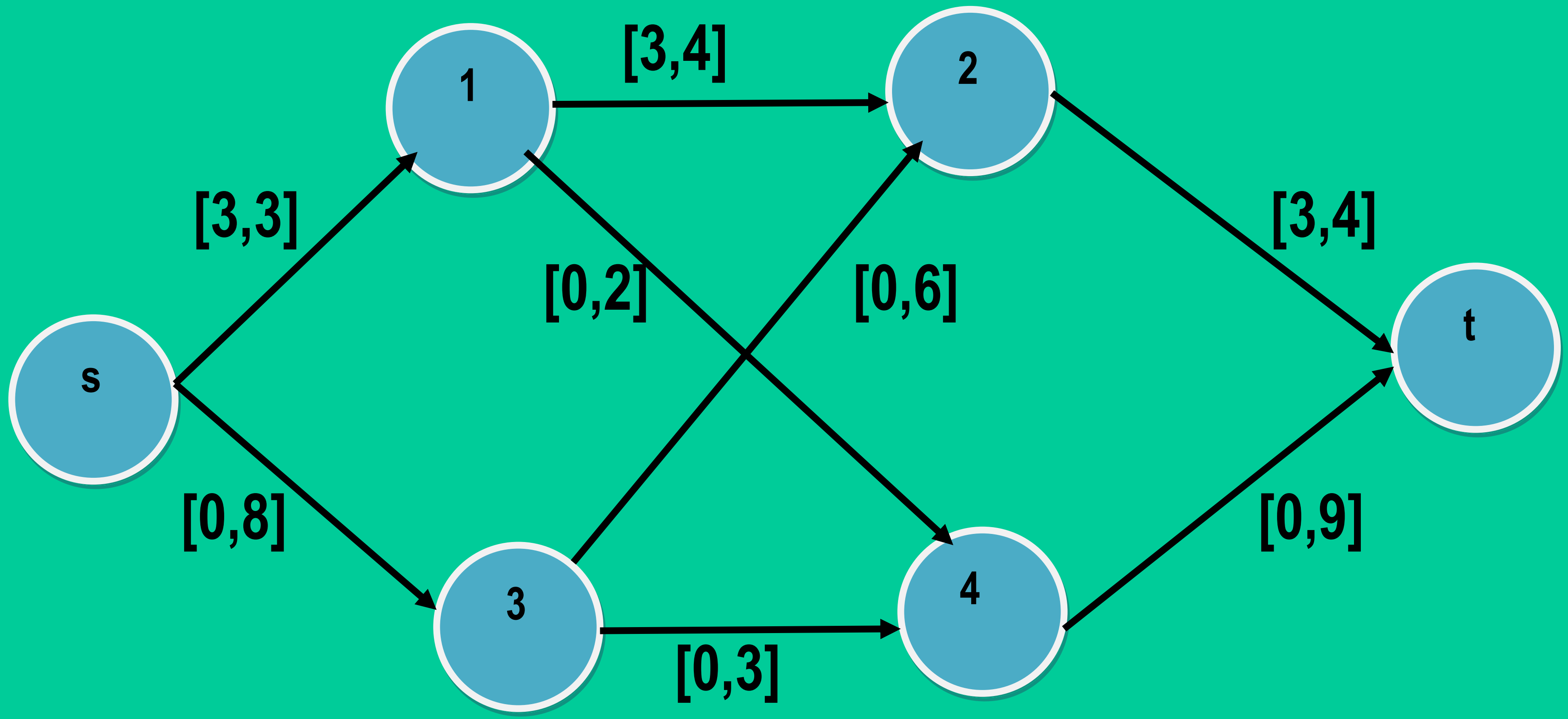


[+3,4]
1+
2+
[+3,3]
[+3,4]
S+
t+

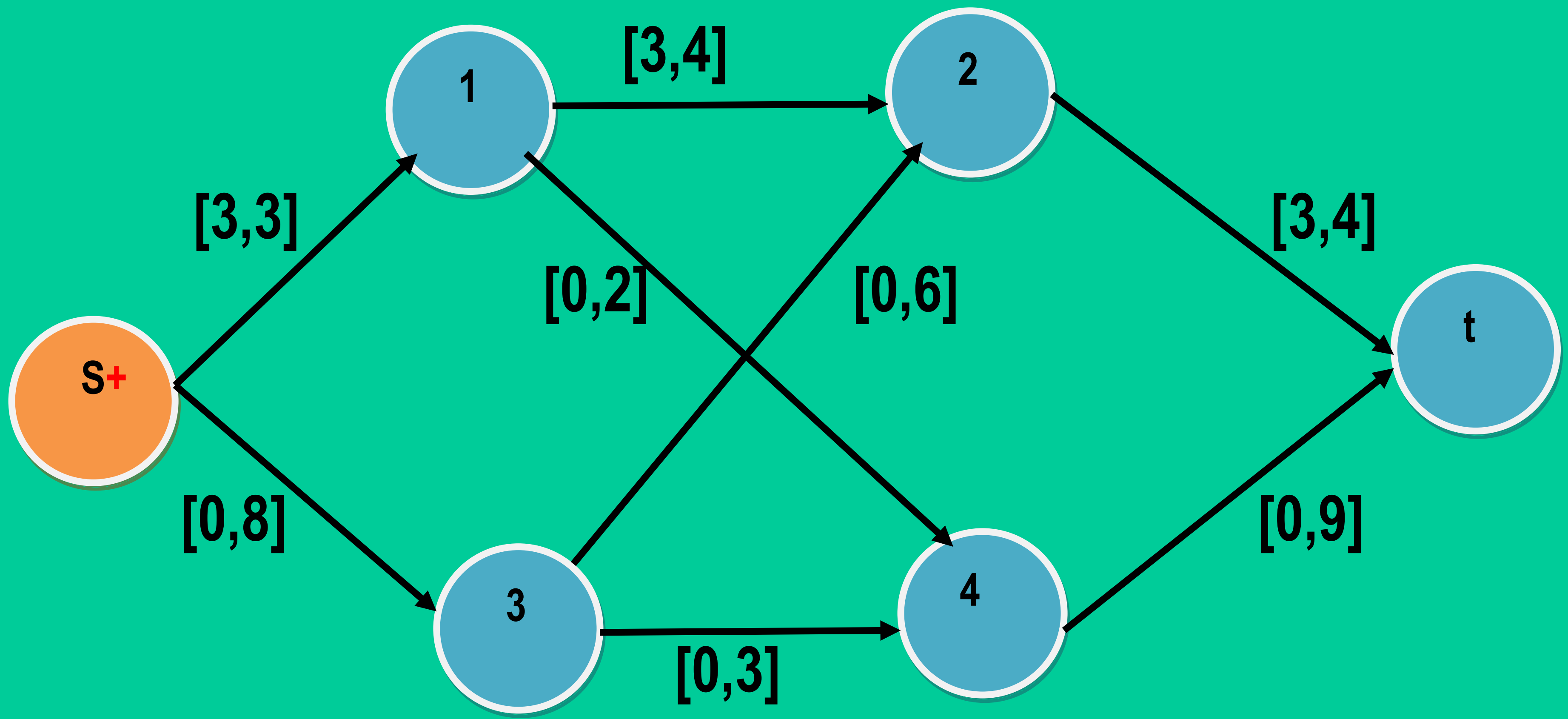
L’augmentation du flot le long de cette chaîne (+3) **est limitée** par la capacité C_{s1} de l'arc (s,1).



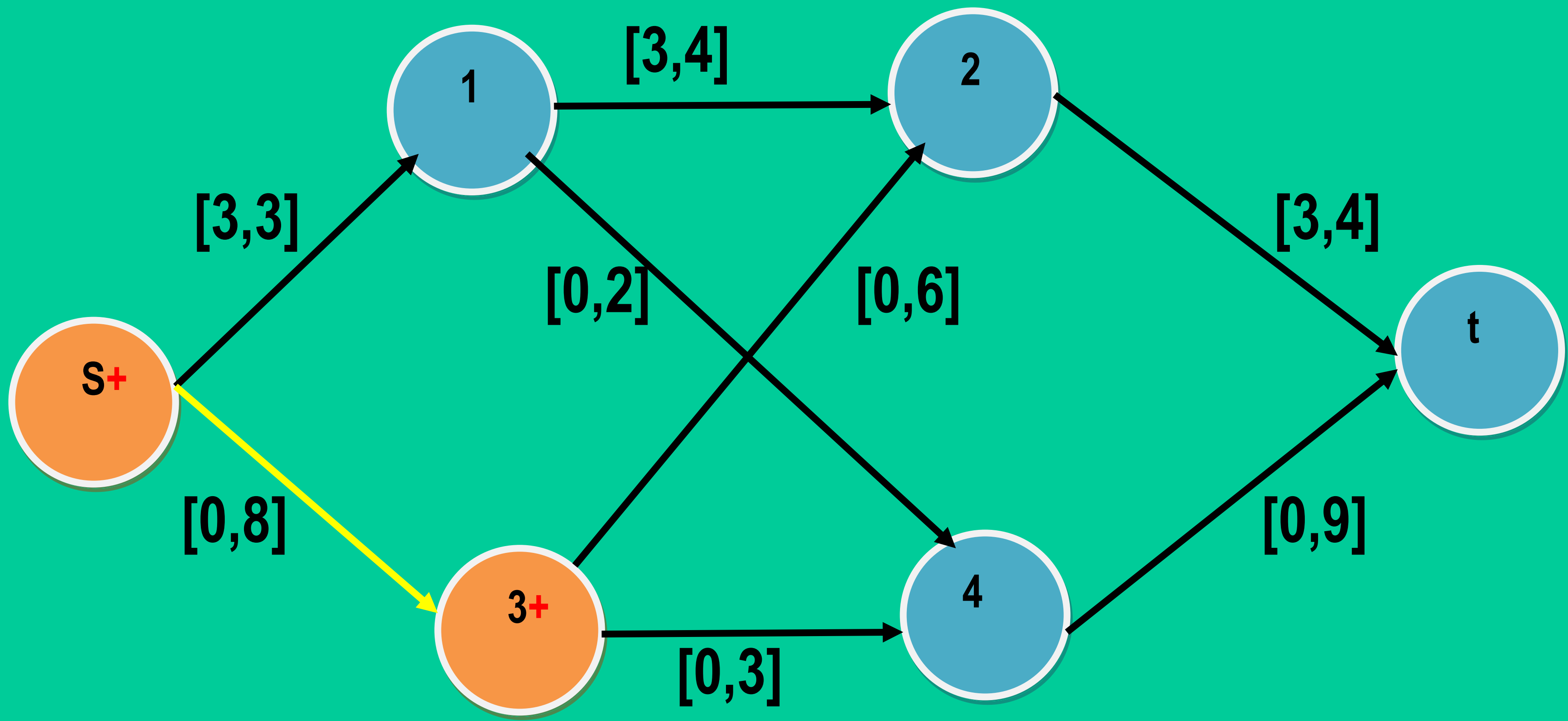
On réitère la recherche d'une chaîne **augmentante** avec le **nouveau** flot.



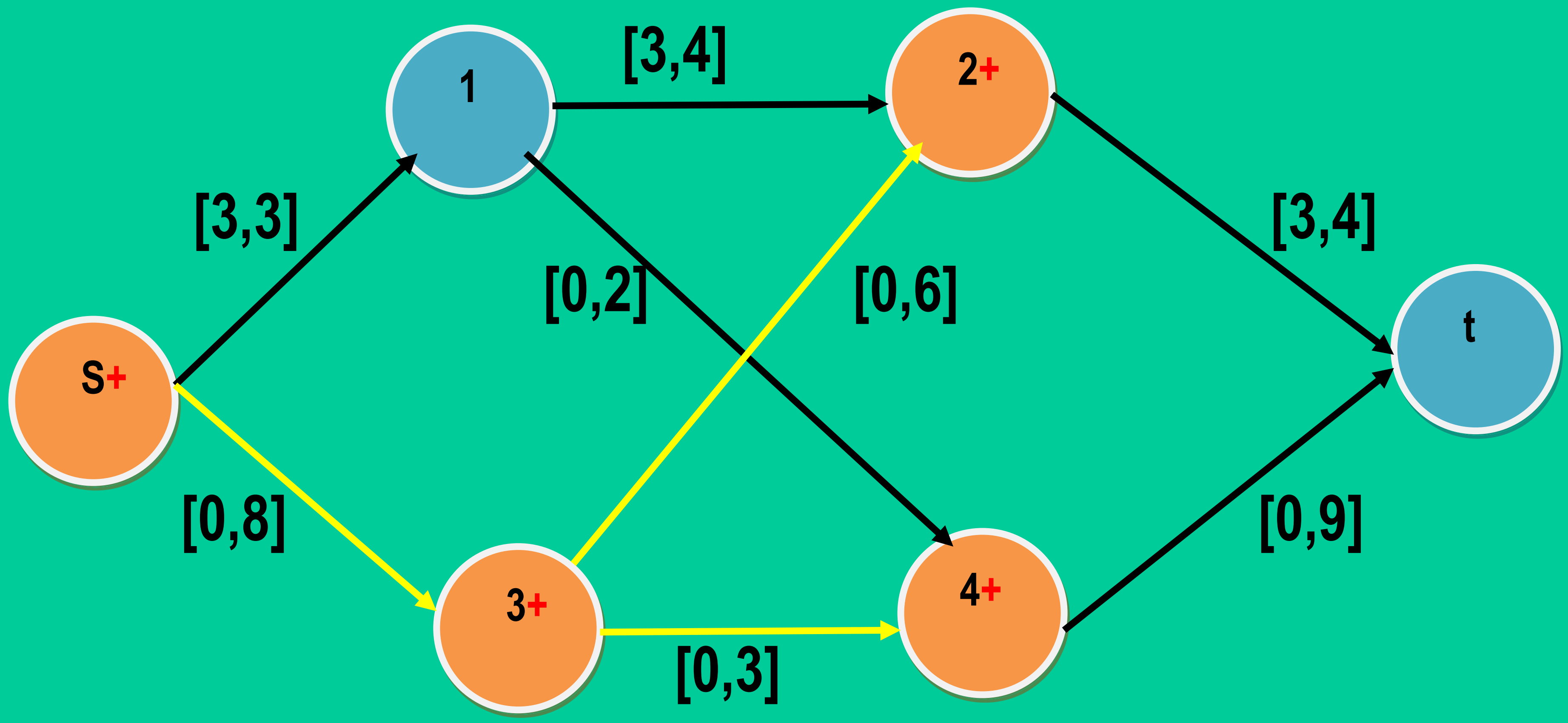
Marquer + **s**



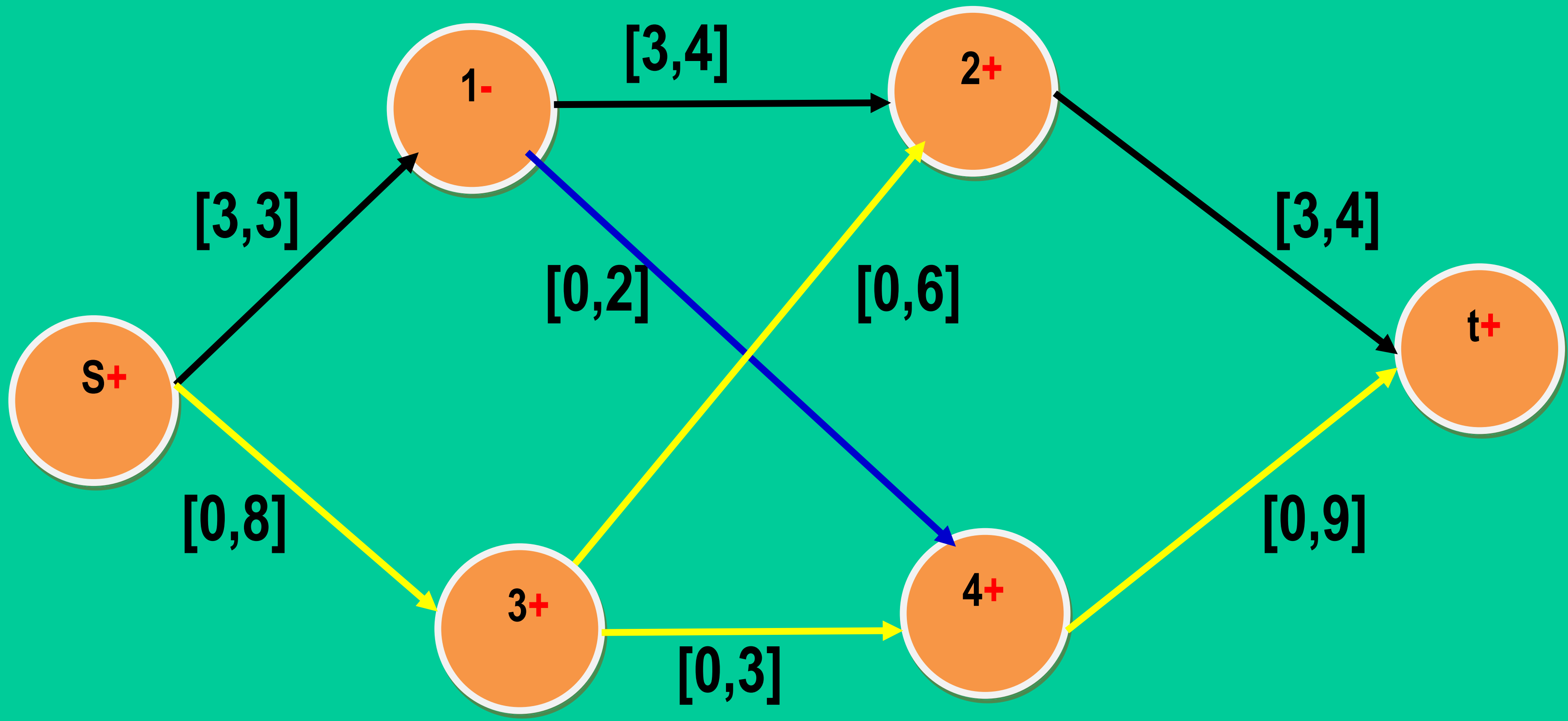
Marquer + le sommet **3** partant de **s.**



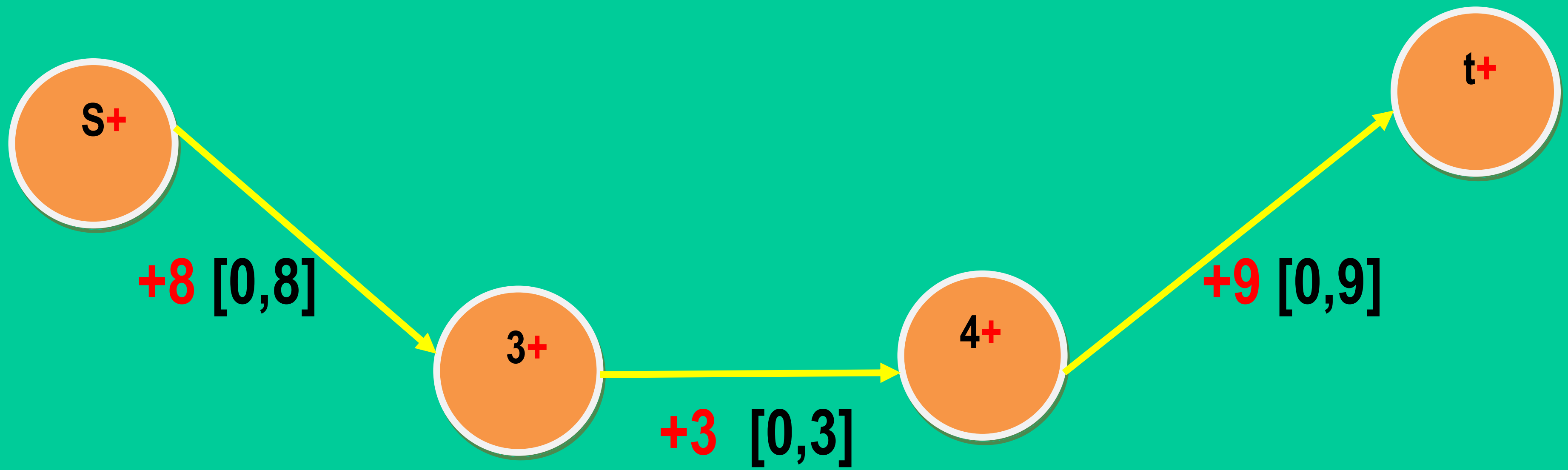
Marquer + ensuite les sommets **2** et **4**

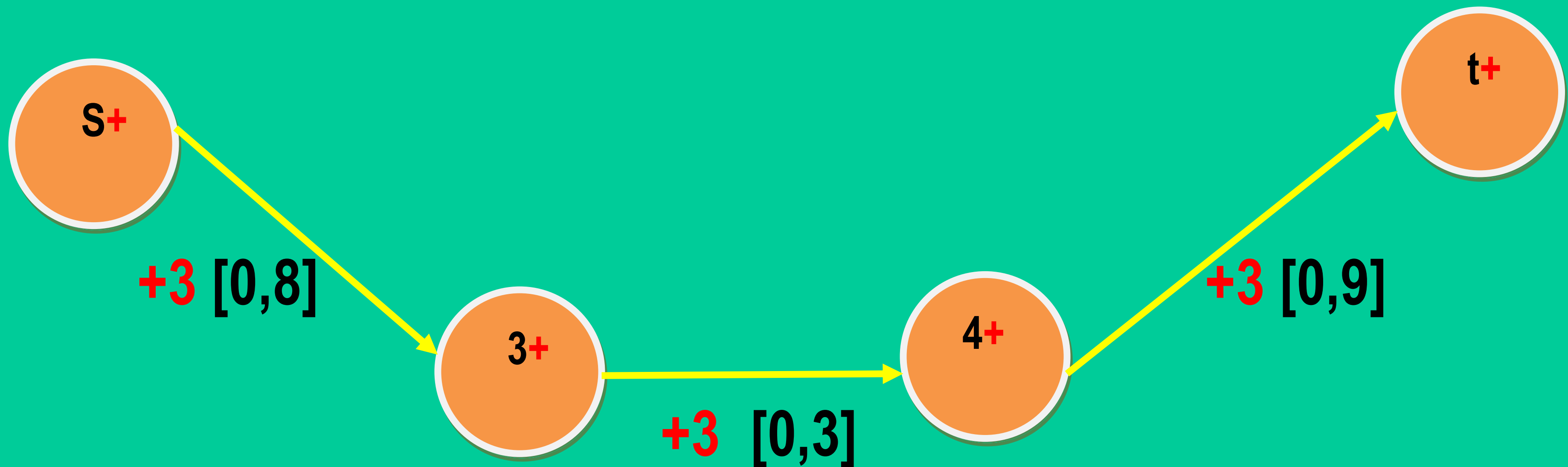


Marquer - le sommet 1 et + le sommet **t** en partant de **4**

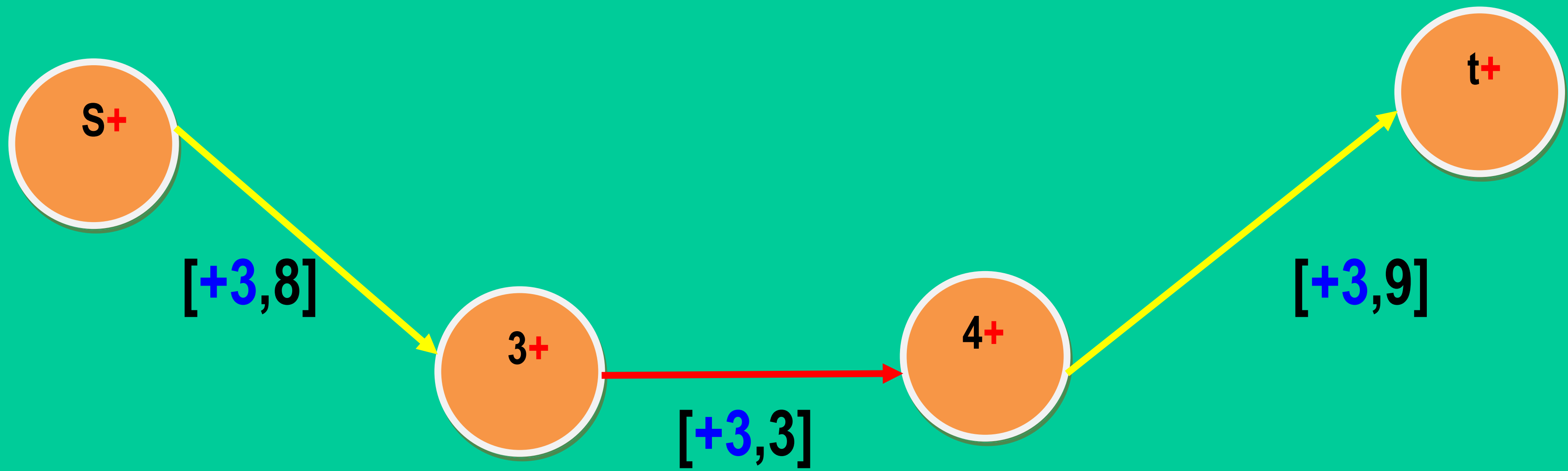


t étant marqué, la chaîne [s,3,4,t] est **augmentante**.

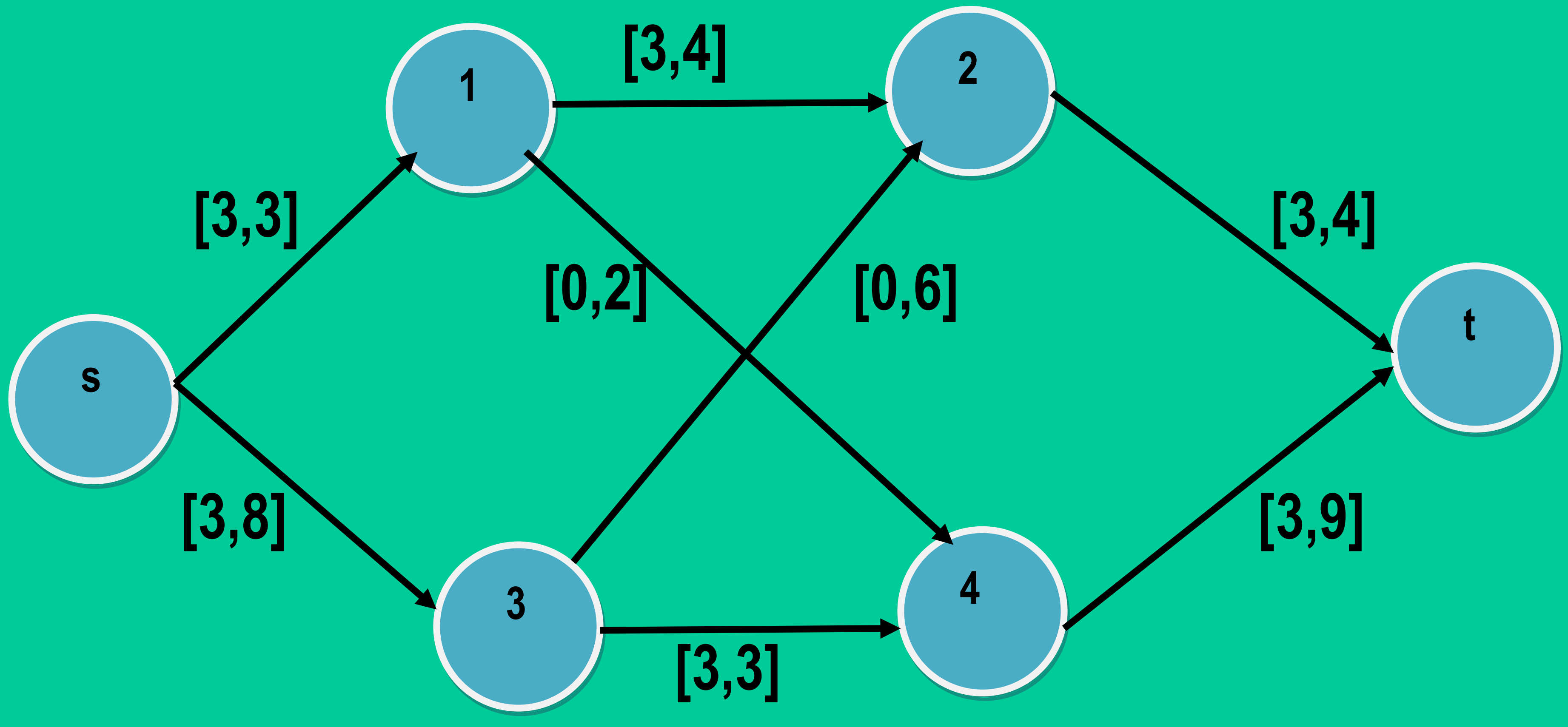



S+
+3 [0,8]
3+
+3 [0,3]
4+
+3 [0,9]
t+

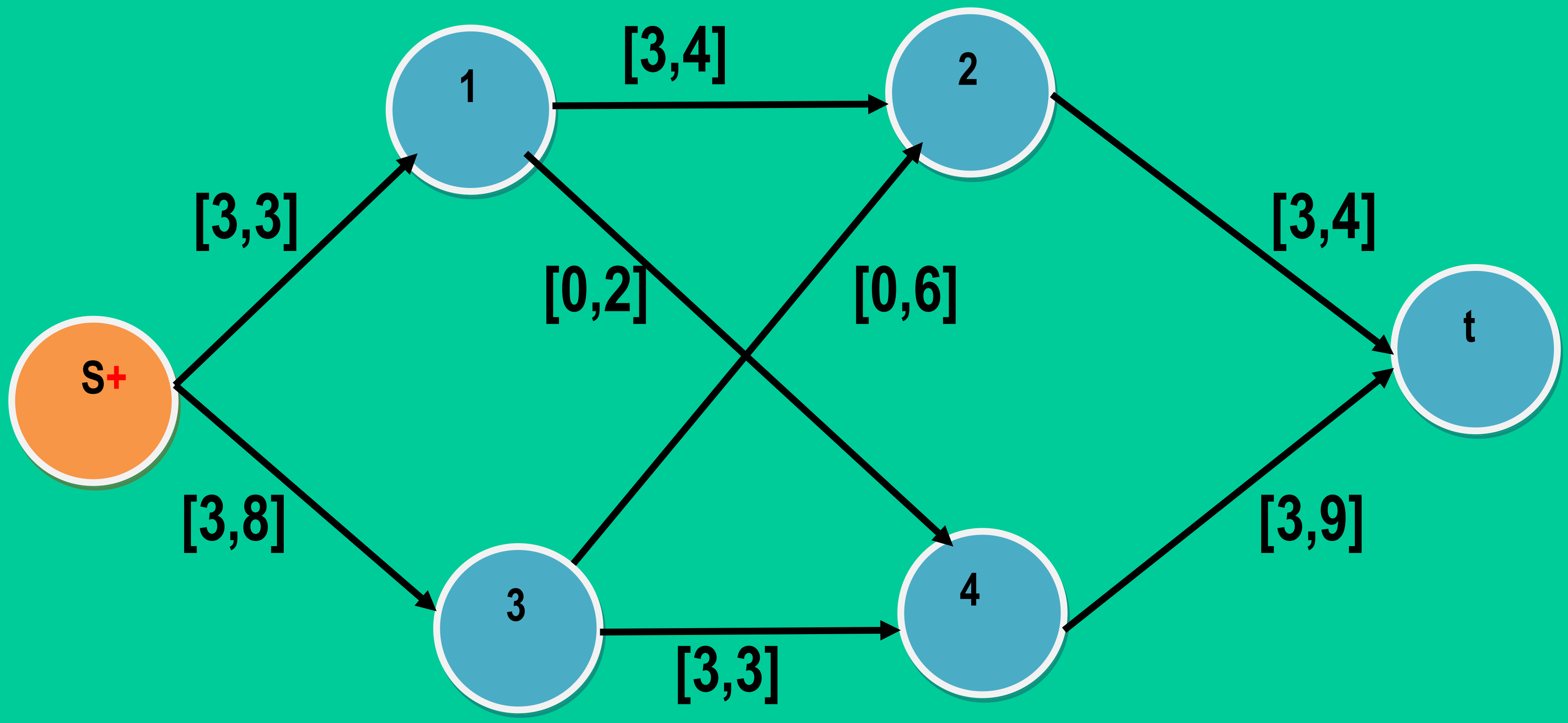
Et l’augmentation du flot le long de cette chaîne de **3** unités est limitée par la capacité C_{34} de l'arc (3,4).



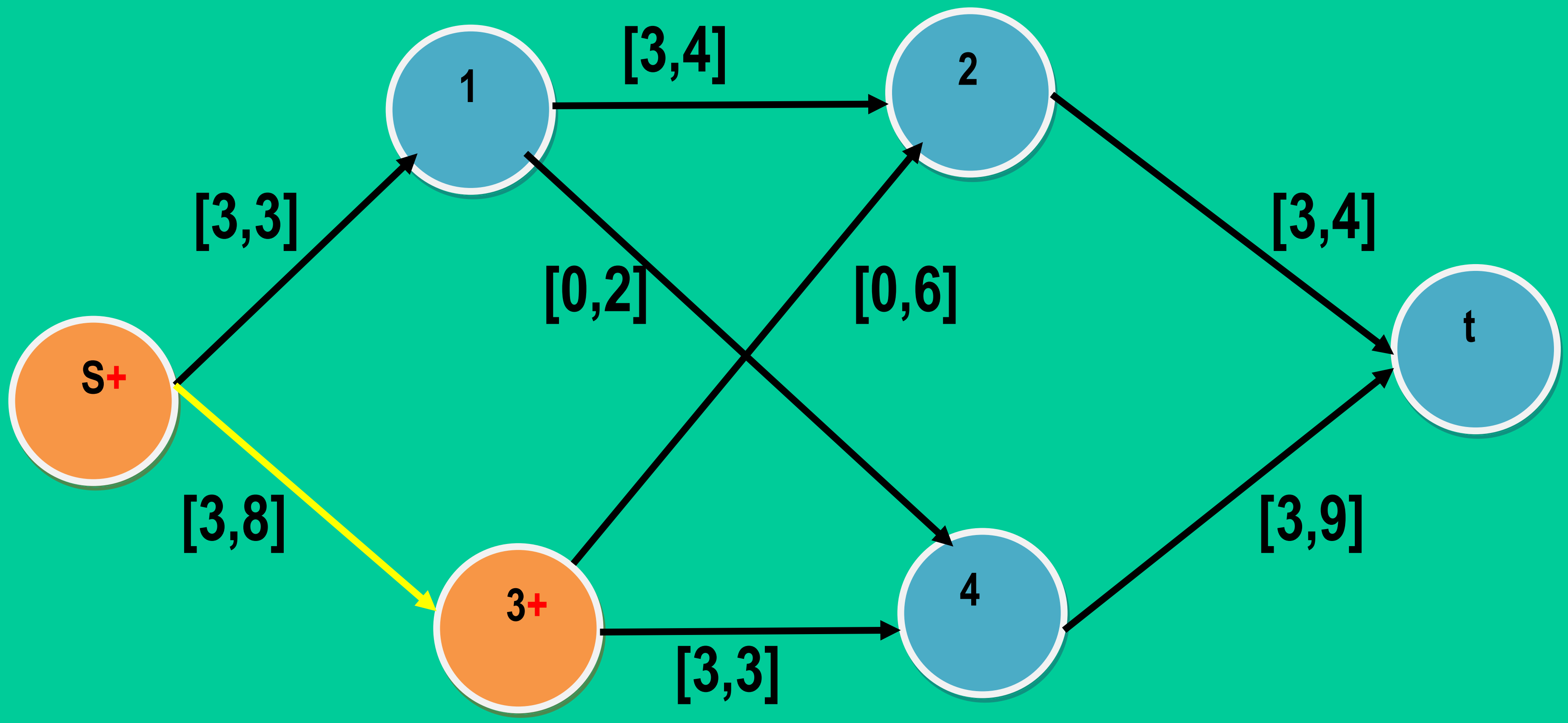
On réitère la recherche d’une chaîne **augmentante** avec le nouveau flot.



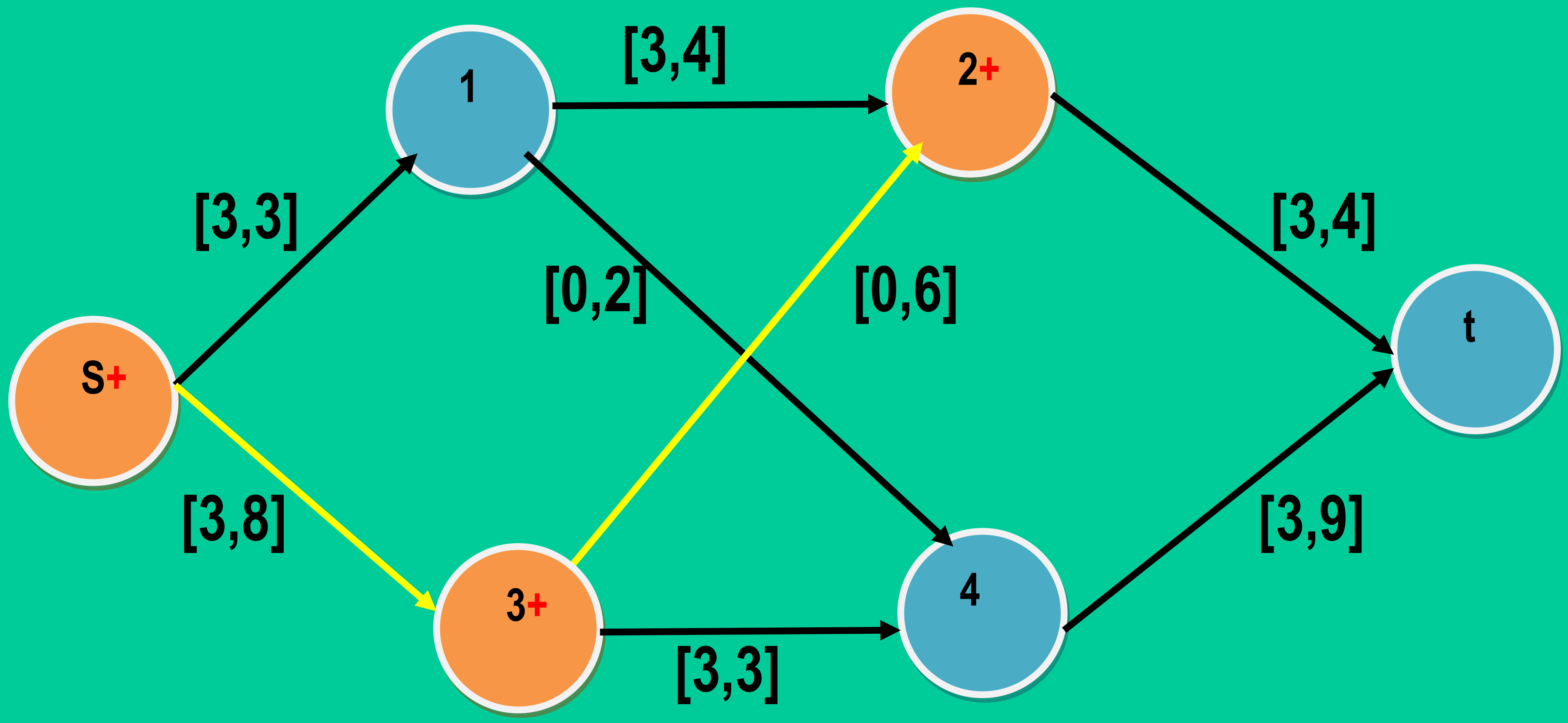
Marquer + s



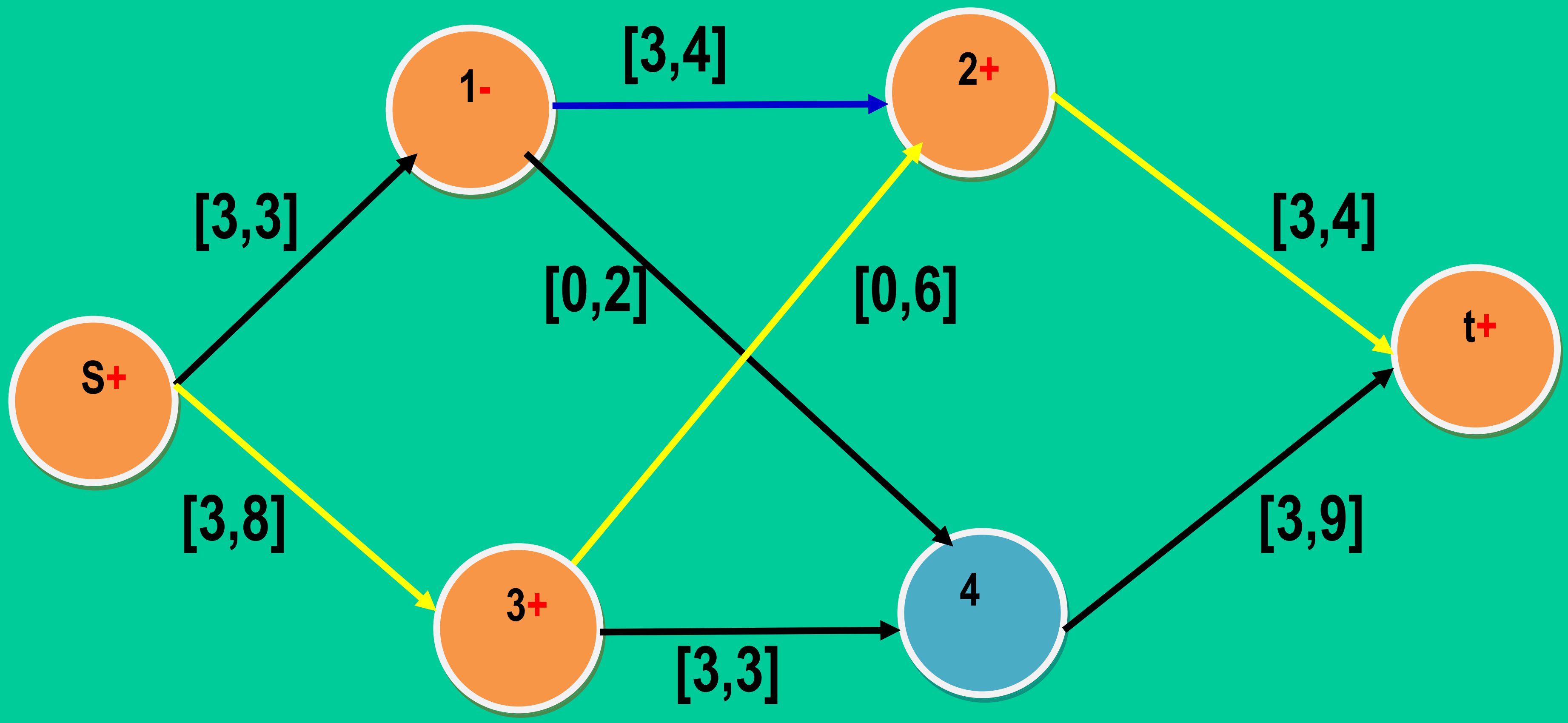
Marquer + le sommet **3** partant de **s**



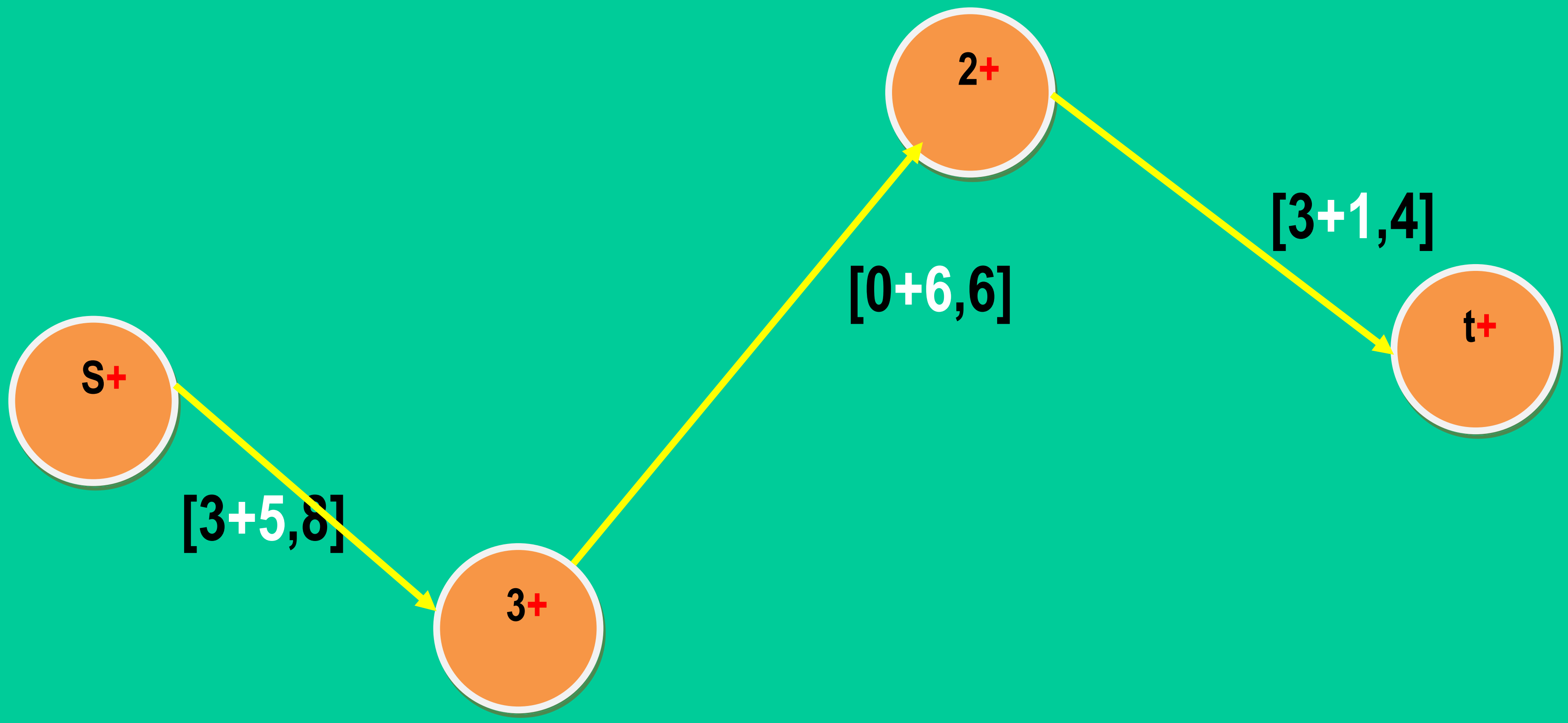
Marquer + le sommet **2** en partant de **3.**



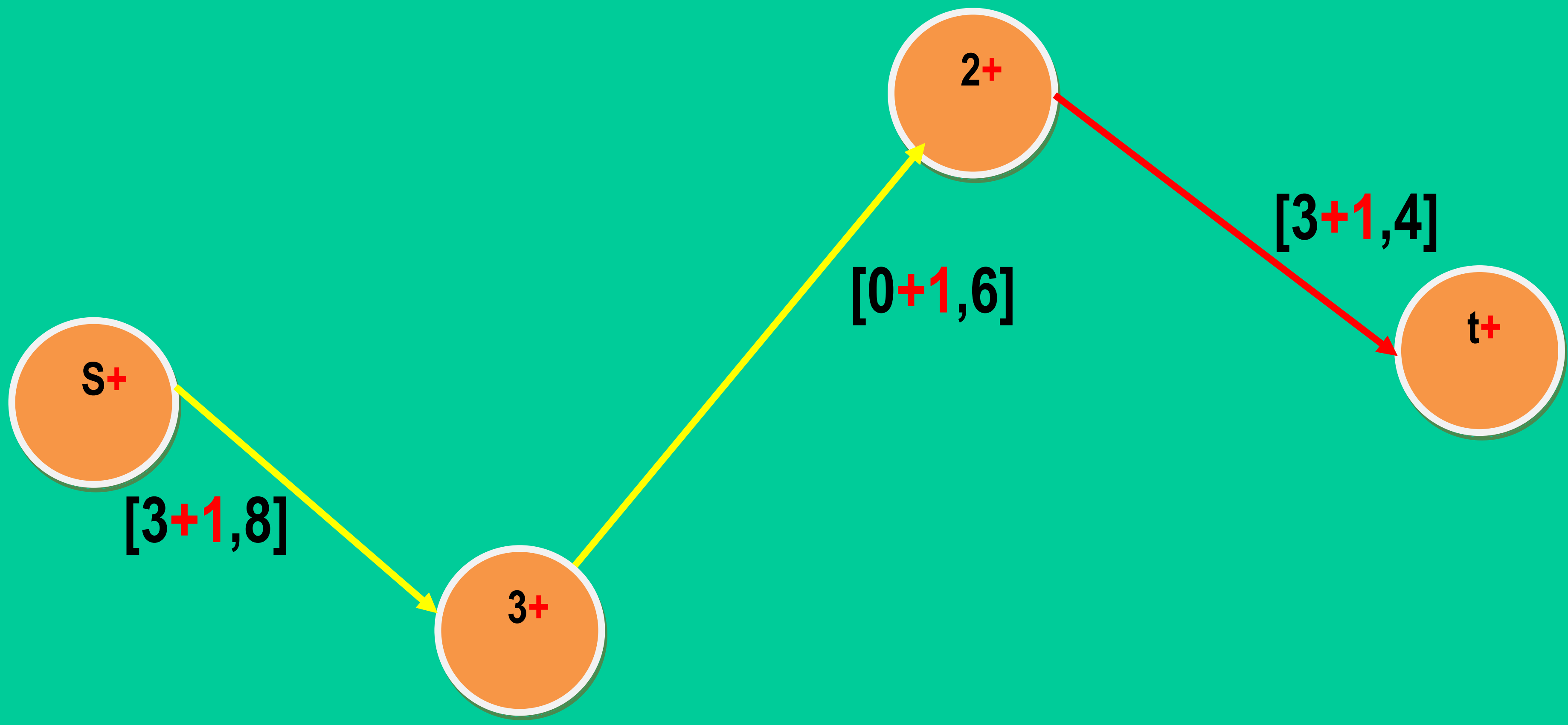
Marquer - le sommet 1 et + le sommet **t**



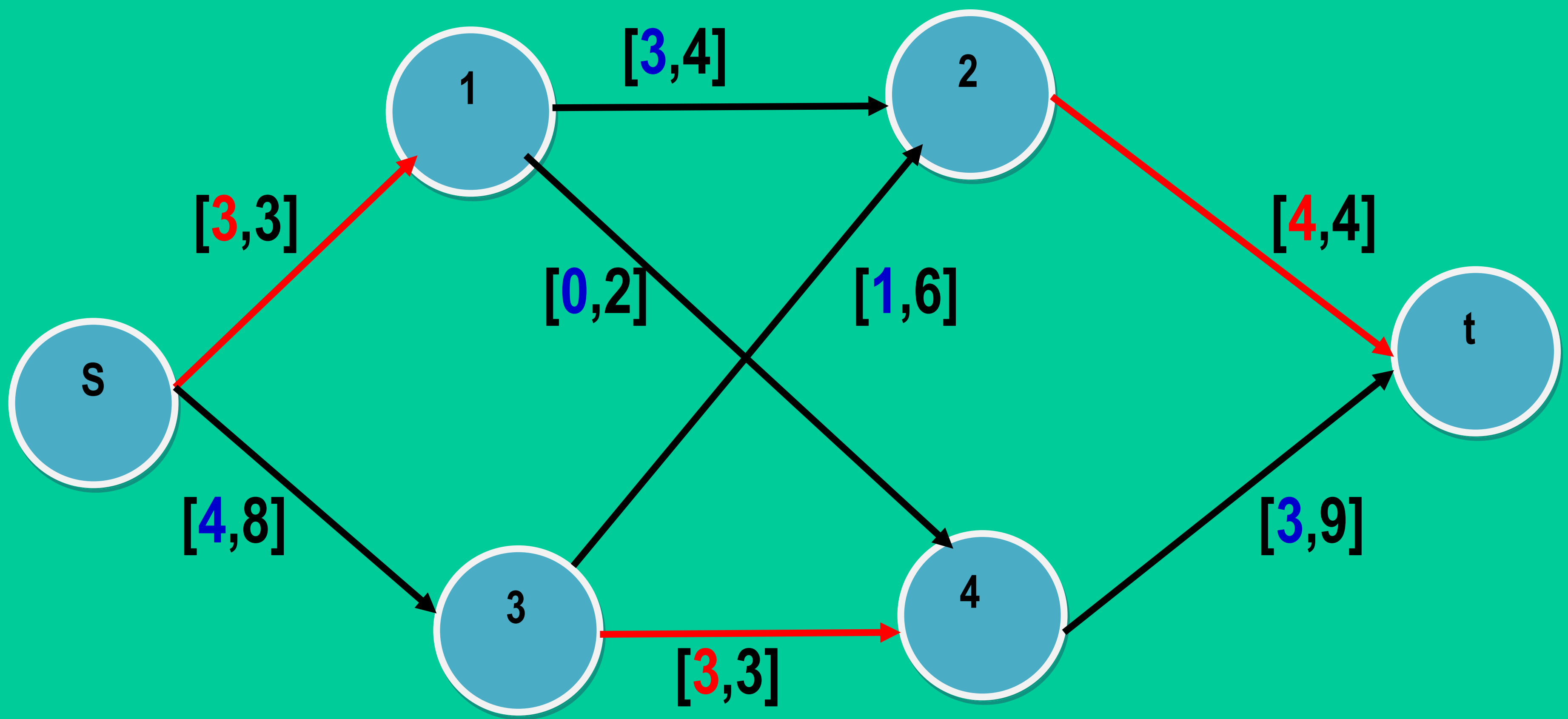
t étant marqué, la chaîne [s,3,2,t] est **augmentante**:



L'augmentation du flot le long de cette chaîne est limitée par la capacité résiduelle r_{2t} (de valeur 1) de l'arc (2,t).



D’où le nouveau flot:



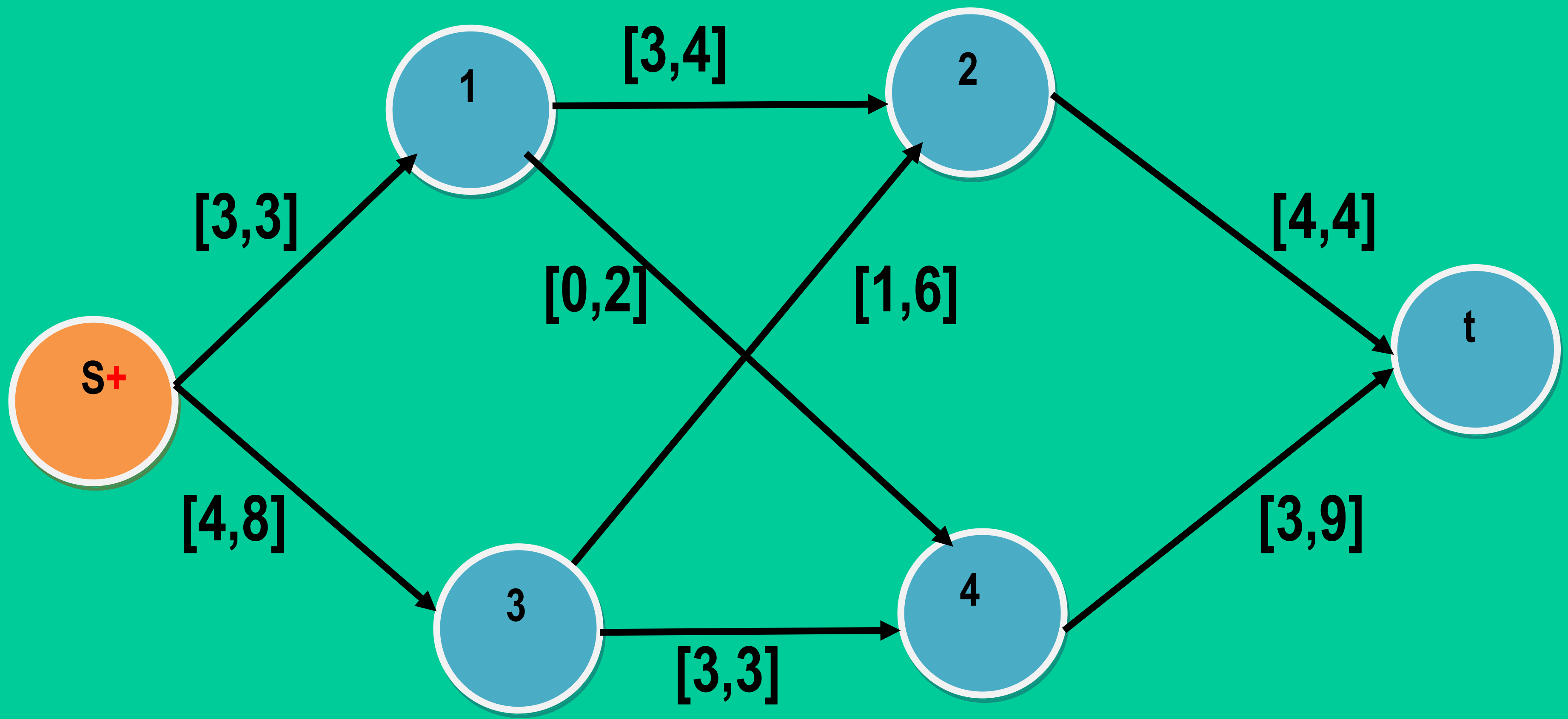
On remarque que sur chaque **chemin** de **s** à **p**, il existe un arc **u** dont la capacité $\mathbf{C_u}$ est **saturée**.

On dit alors que le flot est **complet**.

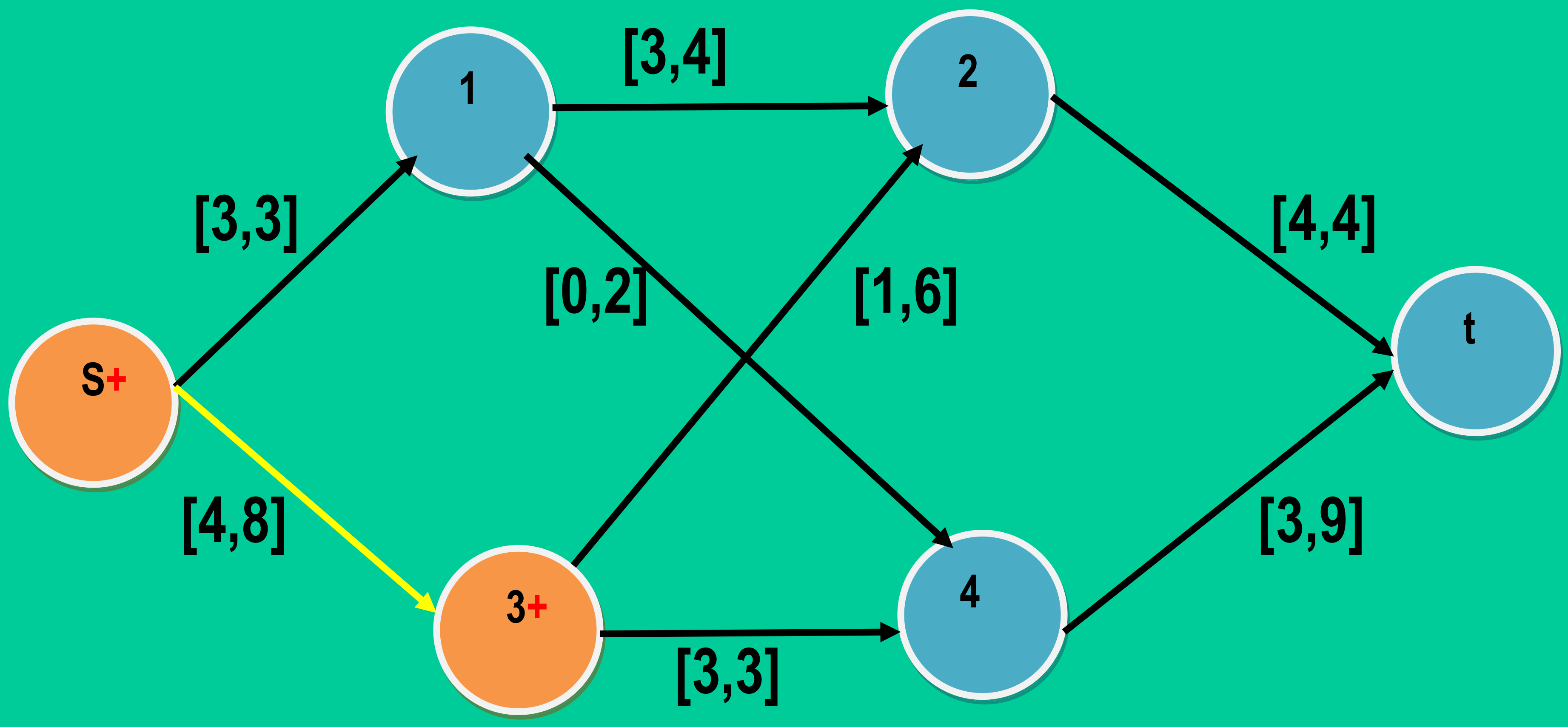
Pour autant le flot **est-il optimal** ?

La réponse est NON !
On réitère la recherche d'une chaîne **augmentante** sur le nouveau flot.

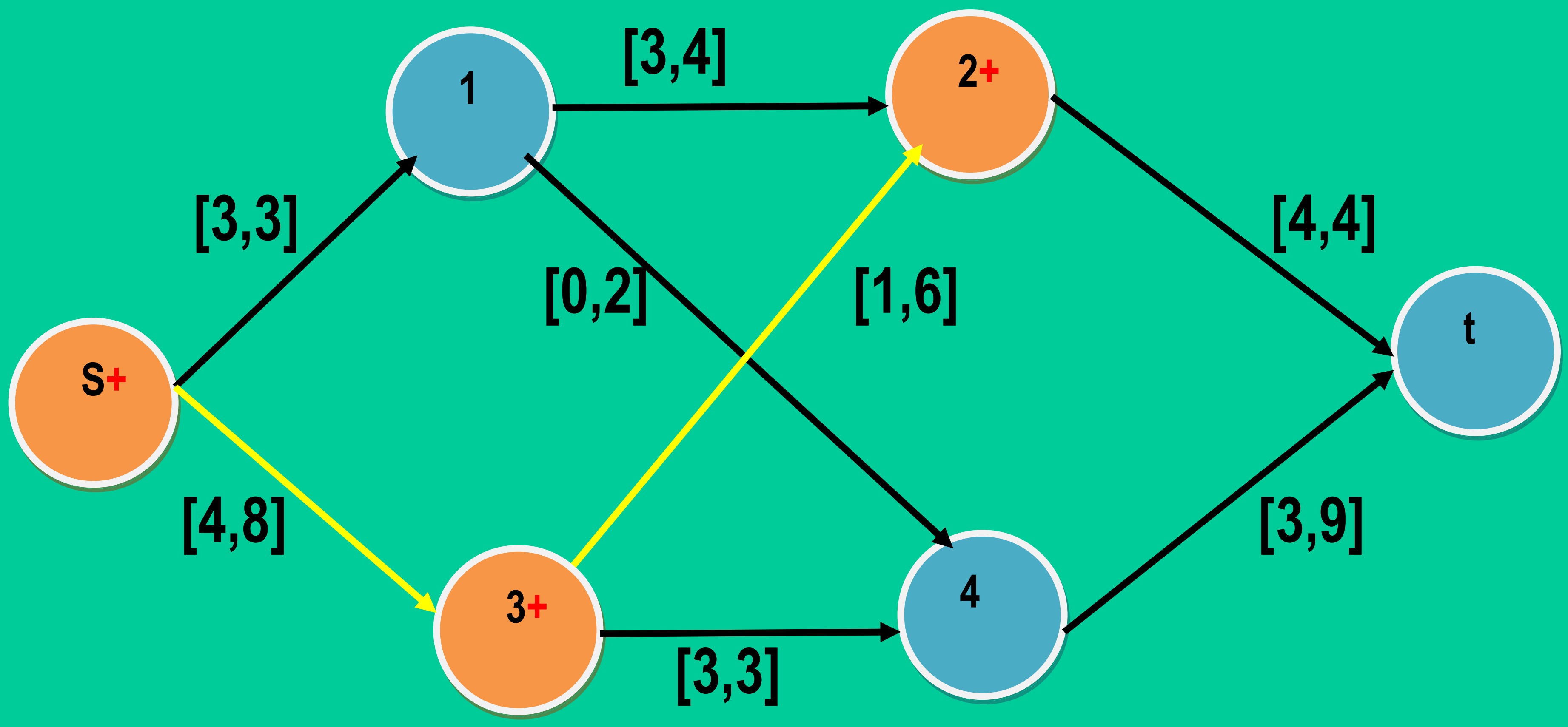
Marquer + le sommet **s**



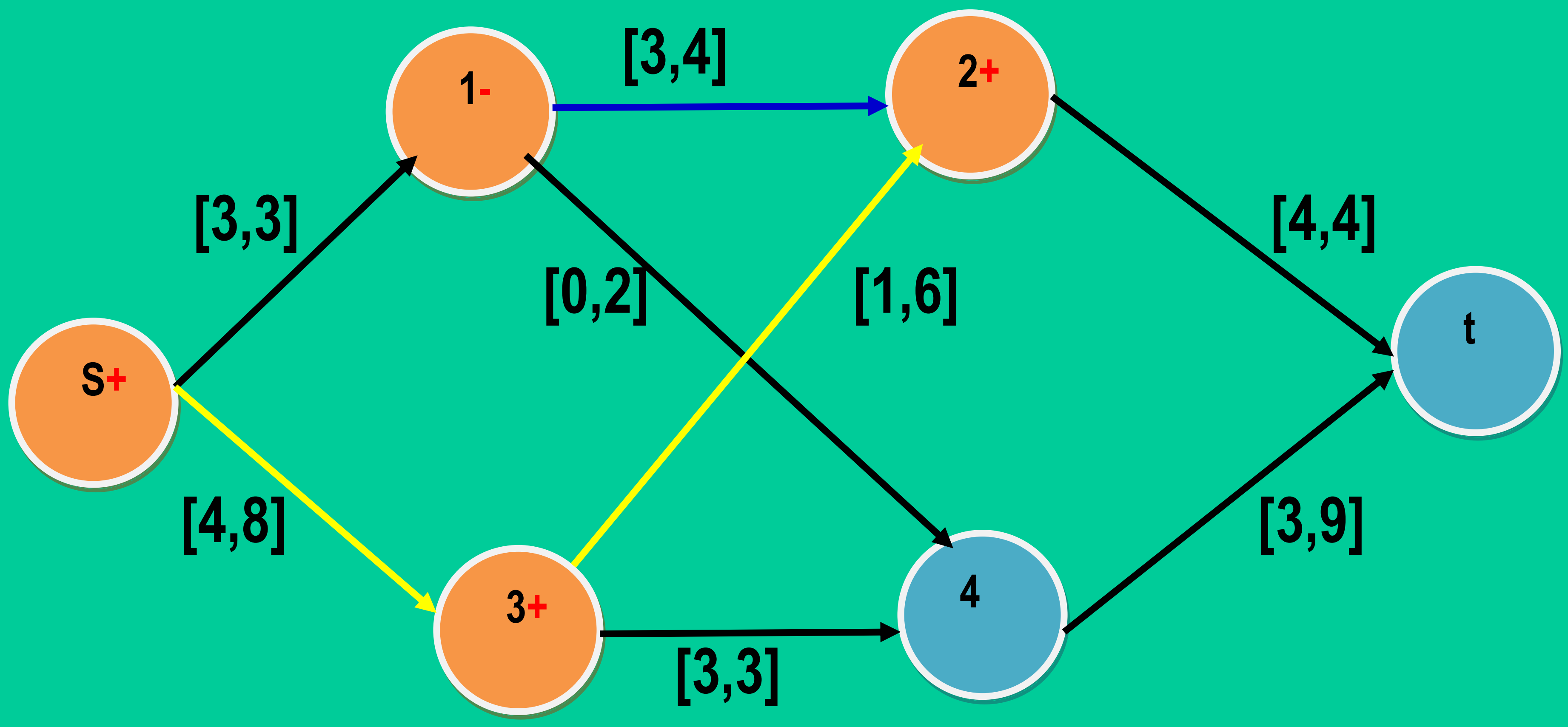
On marque + le sommet **3** partant de **s**



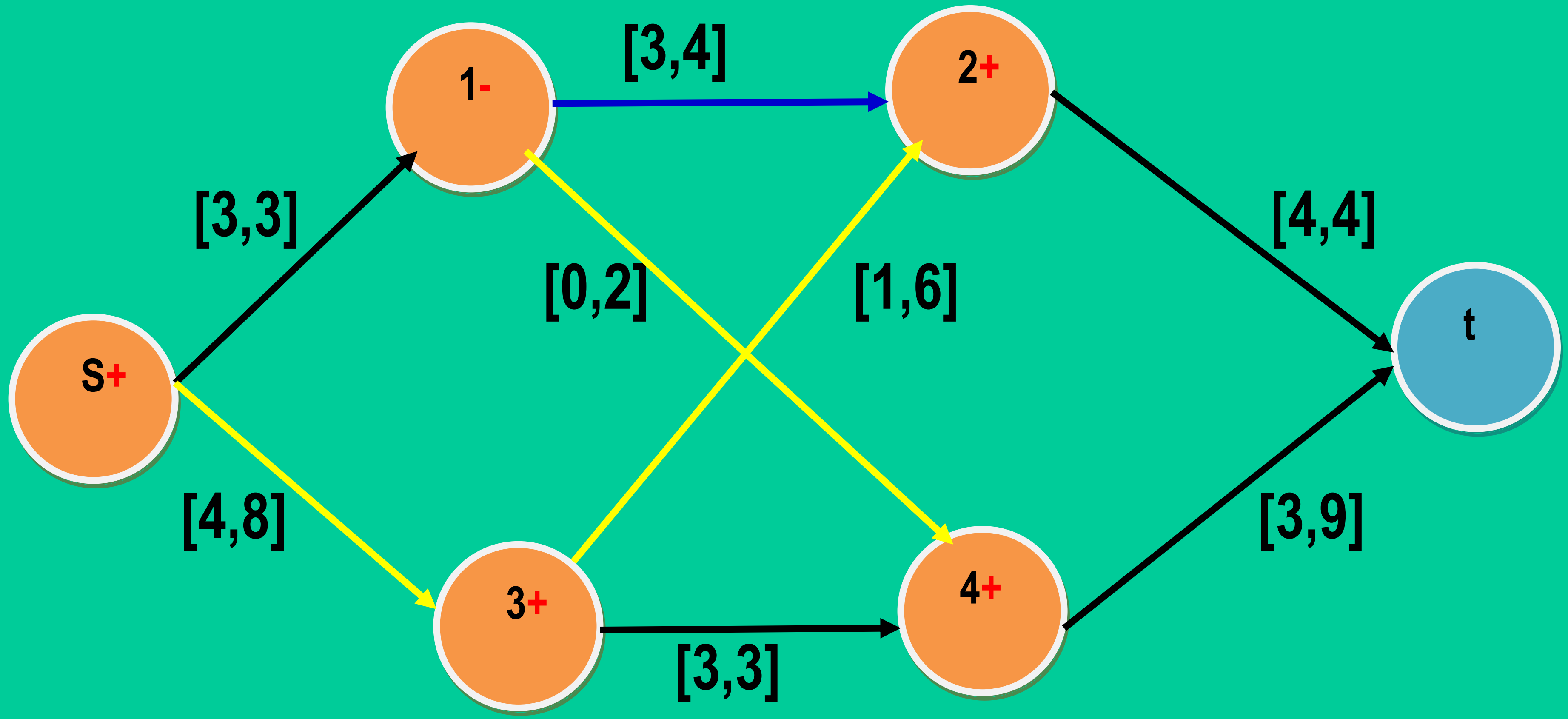
Ensuite, **+** le sommet **2** partant de **3.**



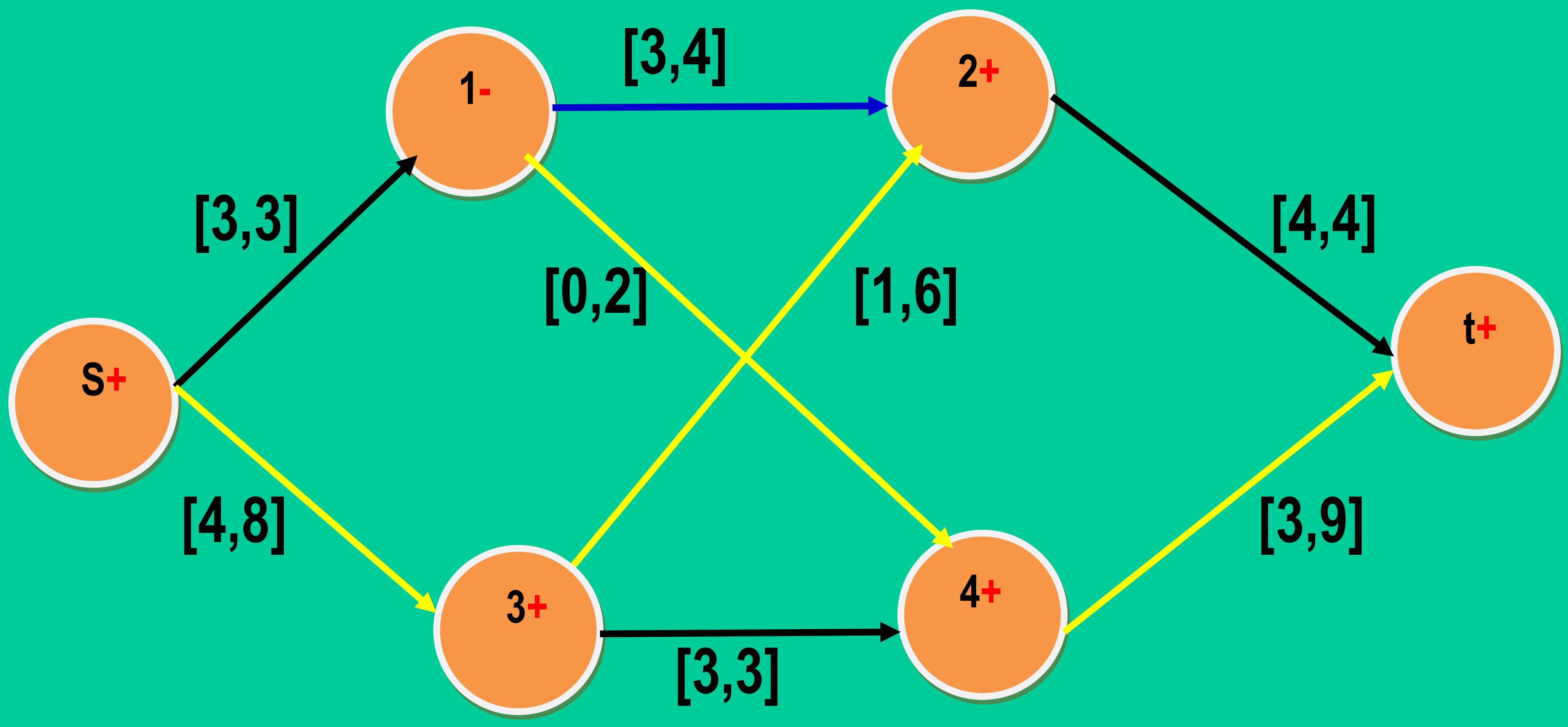
Ensuite, **-** le sommet **1** partant de **2.**



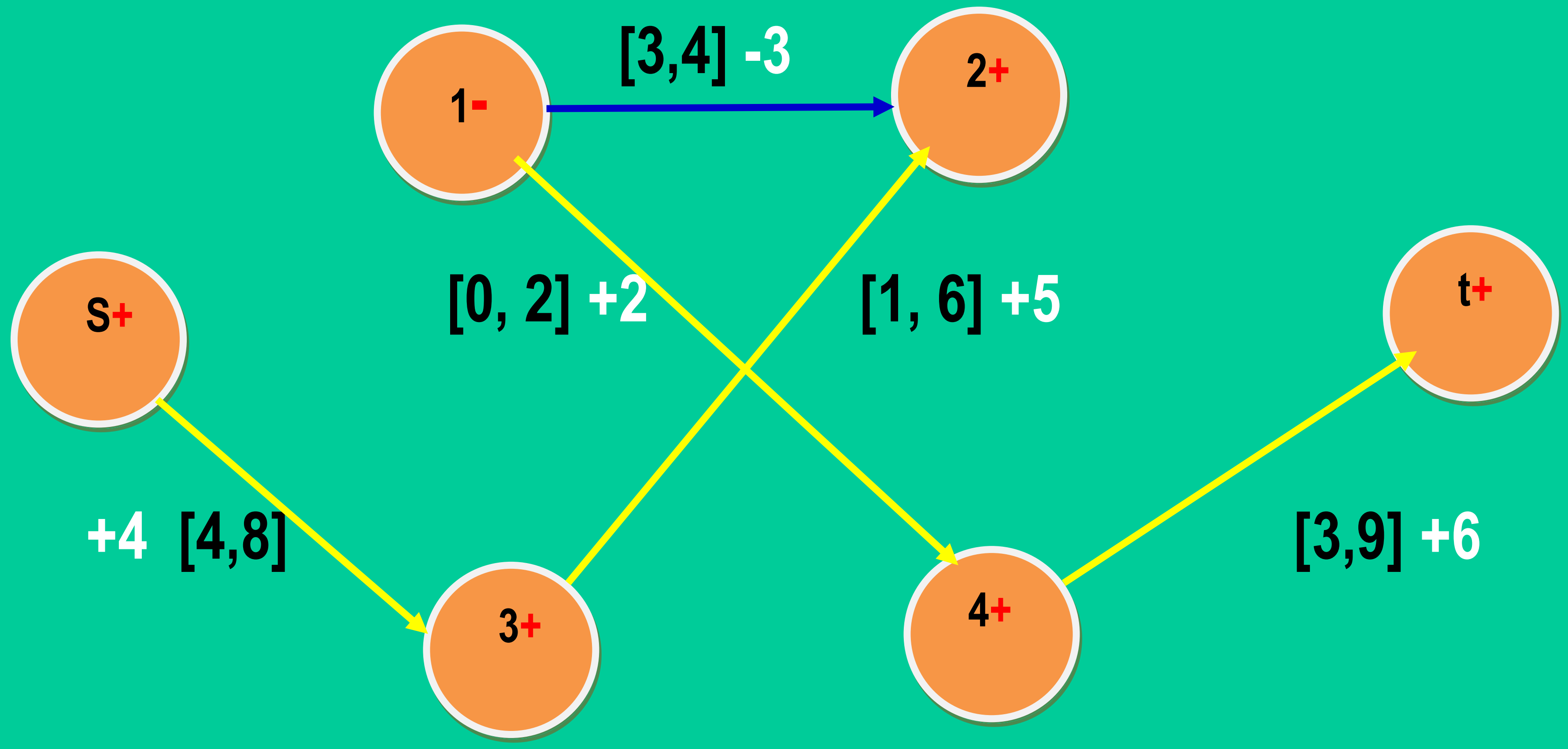
Ensuite, **+** le sommet **4** partant de **1.**



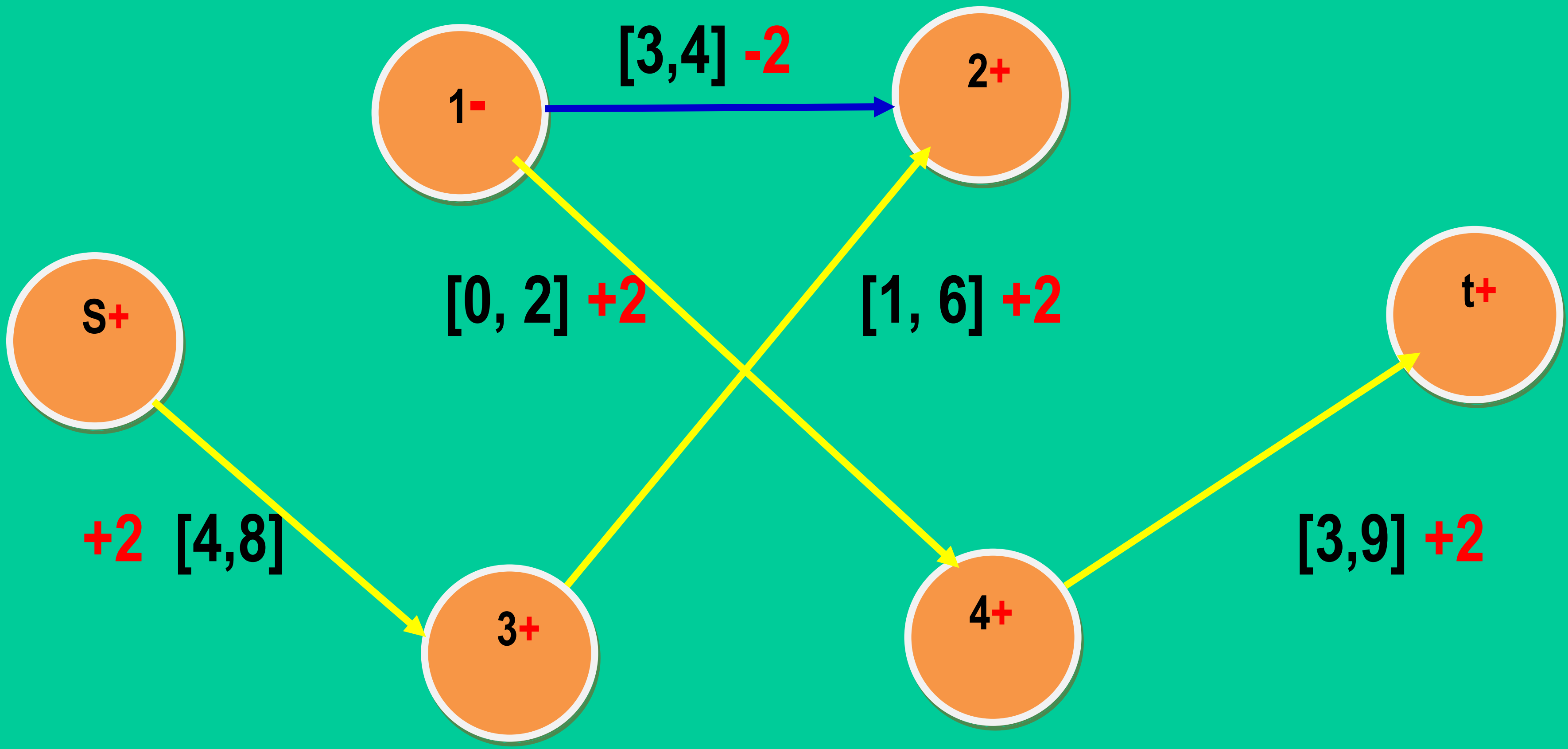
On peut enfin marquer + le sommet **t** partant de **4.**

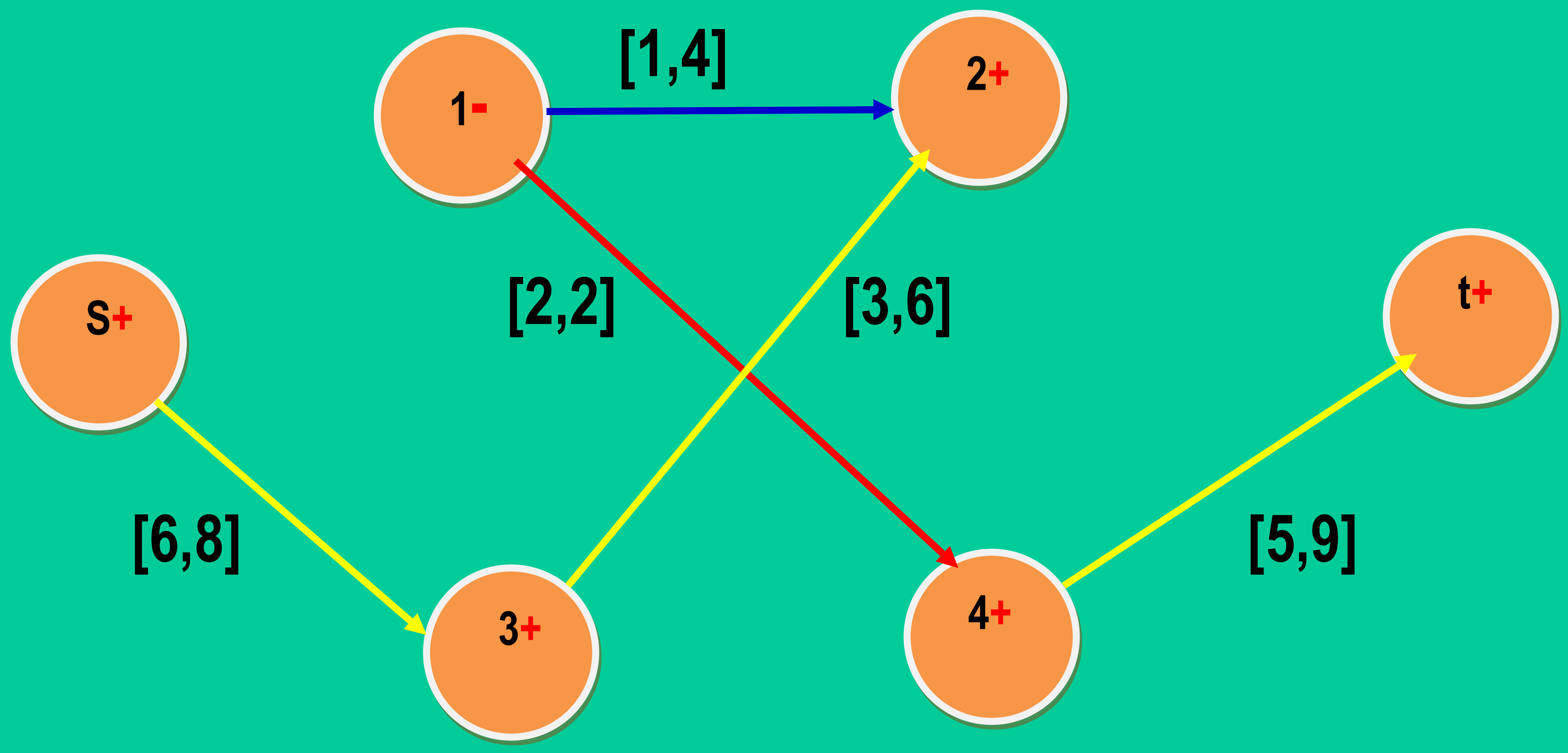


On a trouvé une chaîne **augmentante**: [s,3,2,1,4,t]



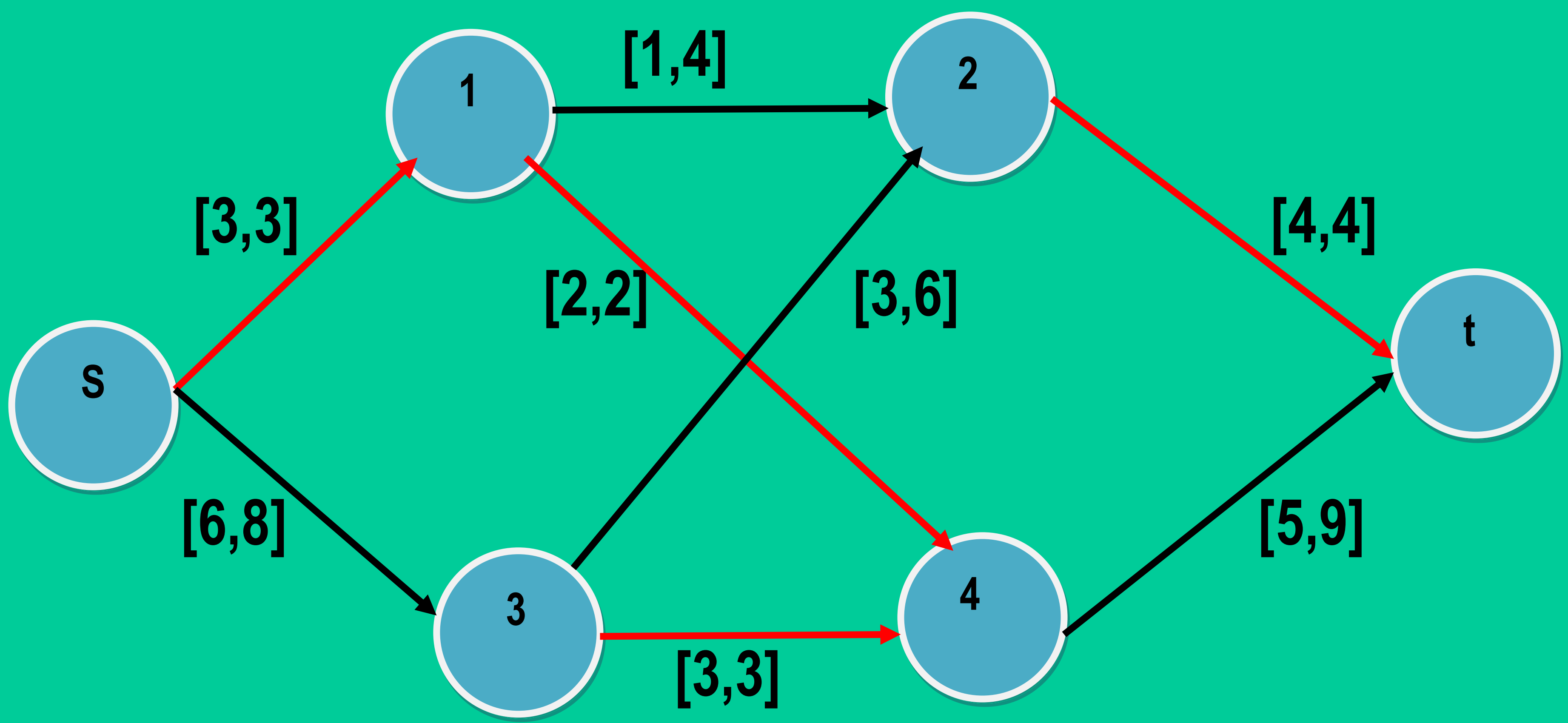
L'augmentation du flot le long de cette chaîne (2)est limitée par la capacité résiduelle r_{14} (de valeur **2**) de l'arc (1,4).





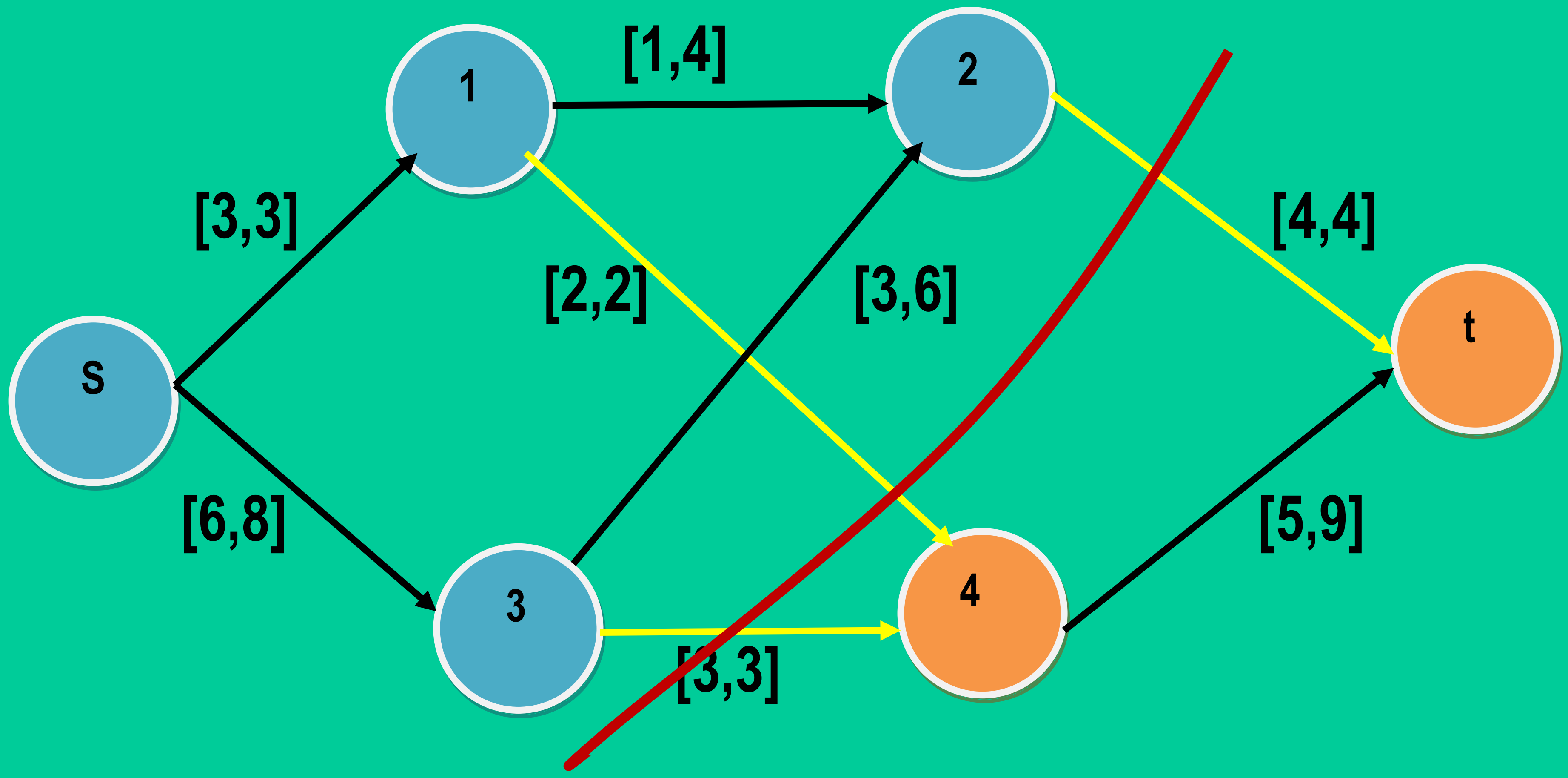
[1,4]
1-
2+
S+
[2,2]
[3,6]
t+
[6,8]
[5,9]
3+
4+

D’où le nouveau flot :



Soit la st-coupe $[S, \bar{S}]$ définie par :

$S = \{s,1,2,3\}$ et $\bar{S} = \{t,4\}$



Sa capacité est :

$$U_{[S,\,\bar{S}]} = C_{14} + C_{34} + C_{2t}$$
$$= 2 + 3 + 4 = 9$$

La capacité de la coupe est égale à la valeur **9** du flot .

D'après le théorème FlotMax/CoupeMin :

- le flot de valeur 9 est maximal
- la st-coupe [S, $\bar{S}$] est minimale.

La découverte de chaînes **augmentantes** de s à t, avait permis de :

- construire des flots successifs de valeur croissante :3,6,7,9
-de découvrir une st-coupe minimale

Procédure de recherche de chaîne augmentante

marquer(G,s,t)

1-Marquer **s** par [0; **+1** ; ∞], L = {s}. -- $\alpha_s = \infty$

2-Tant que L $\neq \emptyset$ et **t** non marqué :

- **Choisir i** $\in$ L et faire L= L- { **i** }.
- Pour tout **j** non marqué tel que (**i**,**j**) $\in$ A et $x_{ij} < u_{ij}$
  - marquer **j** par [**i**; **+1** ; α_j] avec $\alpha_j = \min(\alpha_i \,;\, u_{ij} - x_{ij})$
  - faire L= L+ { **j** }
- Pour tout **j** non marqué tel que (**j**,**i**) $\in$ A et $x_{ji} > 0$,
  - marquer **j** par [**i**; **-1** ; α_j] avec $\alpha_j = \min(\alpha_i \,;\, x_{ij})$ et
  - faire L= L+{ **j** }

3-Si **t** est non marqué alors «pas de chaîne augmentante».

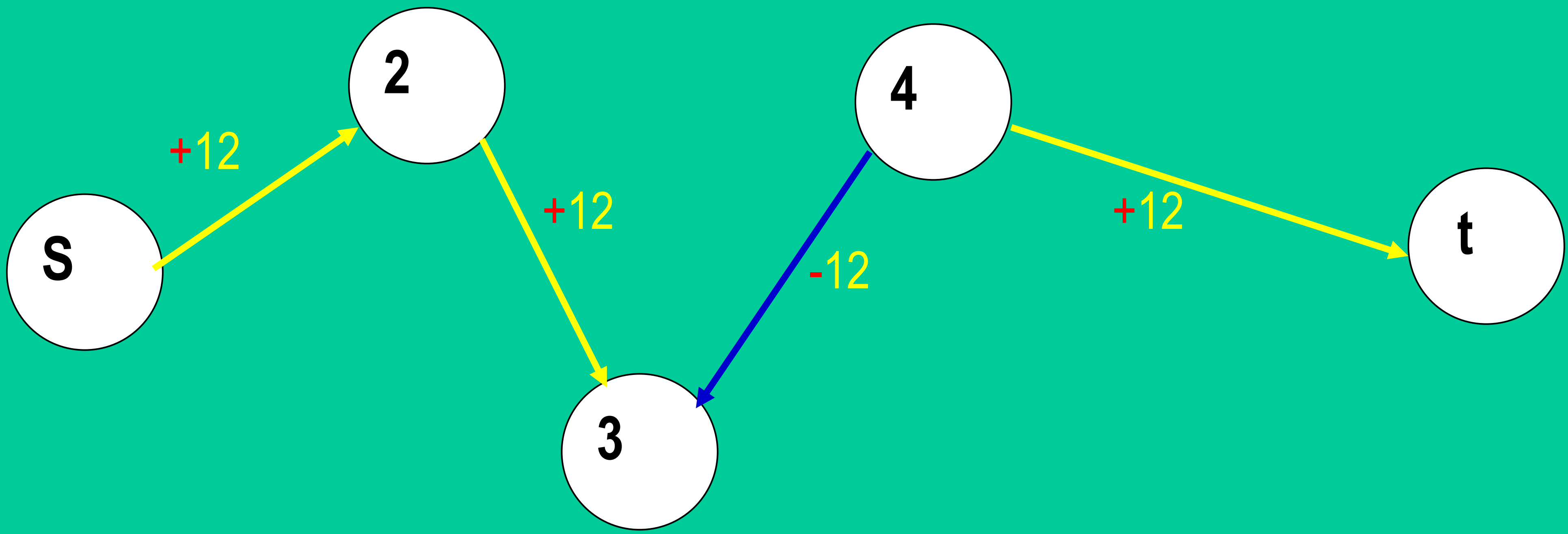
Augmentation de la valeur d'un flot

Soit **μ** une chaîne **augmentante** de **s** à **t**.

Si :

- on **augmente** le flux de α_u sur les arcs $u \in \mu+$,
- et qu'on le **diminue** de α_u pour les arcs $u \in \mu-$

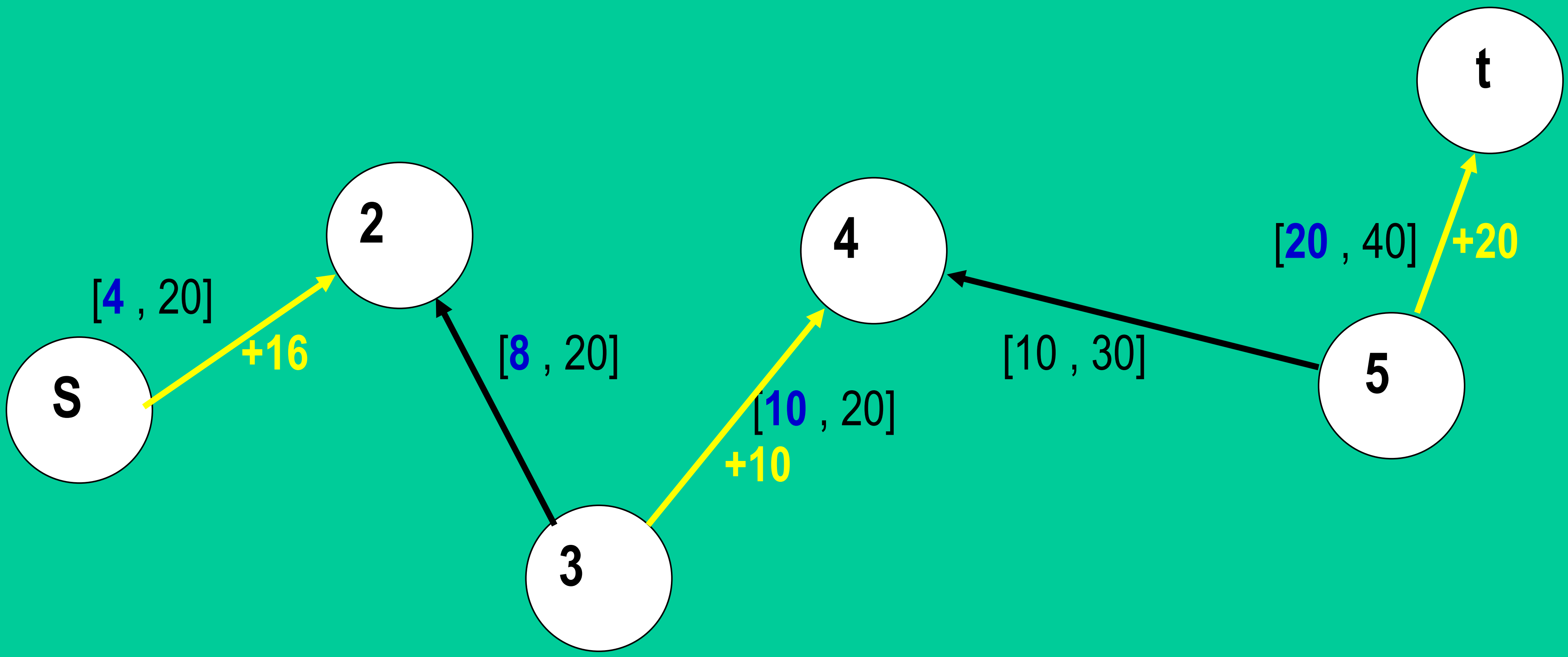
alors, il y **conservation du flot** : Il y a toujours égalité, en chaque sommet, entre ce qui **entre** ($\boldsymbol{\alpha_u}$) et ce qui en **sort** ($\boldsymbol{\alpha_u}$).



Mais entre **s** et **t,** le **flot augmente** de α_u =12

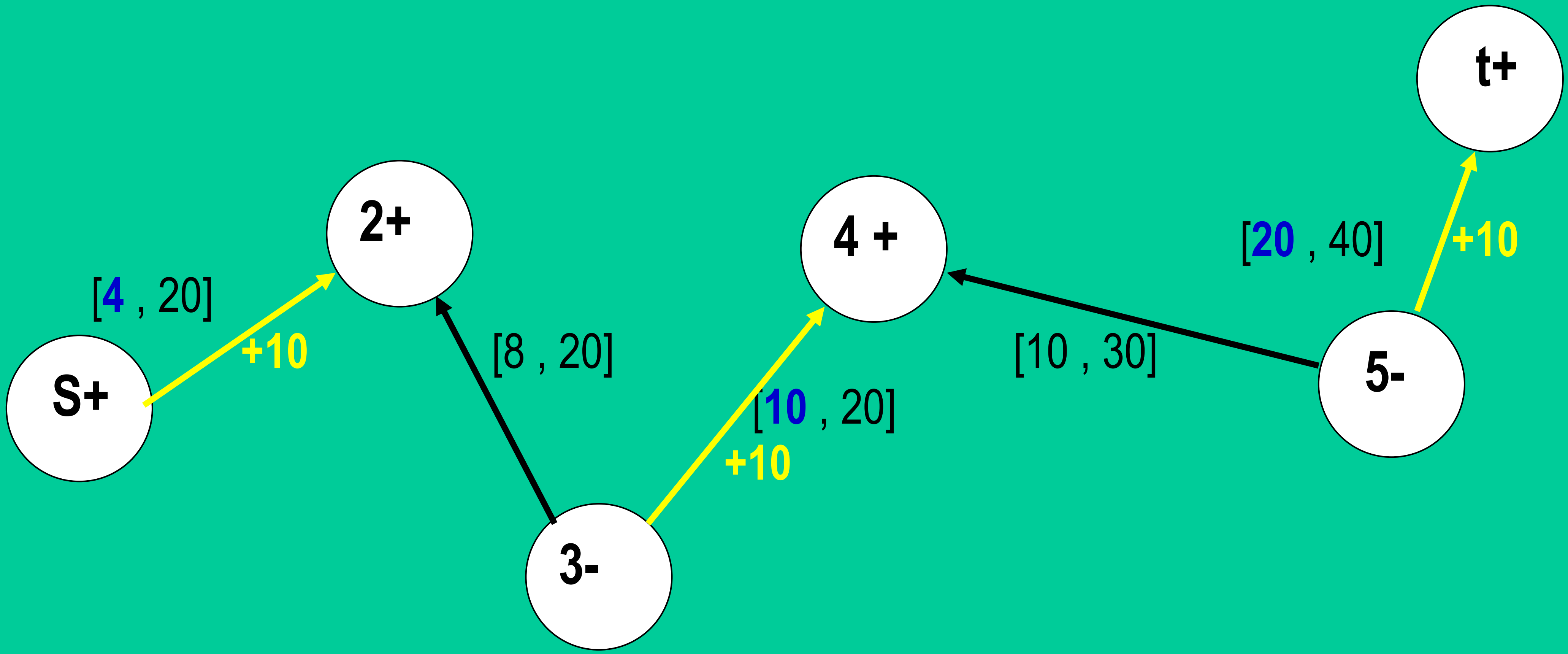
Sur les arcs u ∈ μ+ on peut **augmenter** au maximum de la plus petite **capacité résiduelle** :

$$r_u^+ = \min\,(c_u - x_u) \quad \text{pour } u \in \mu+$$



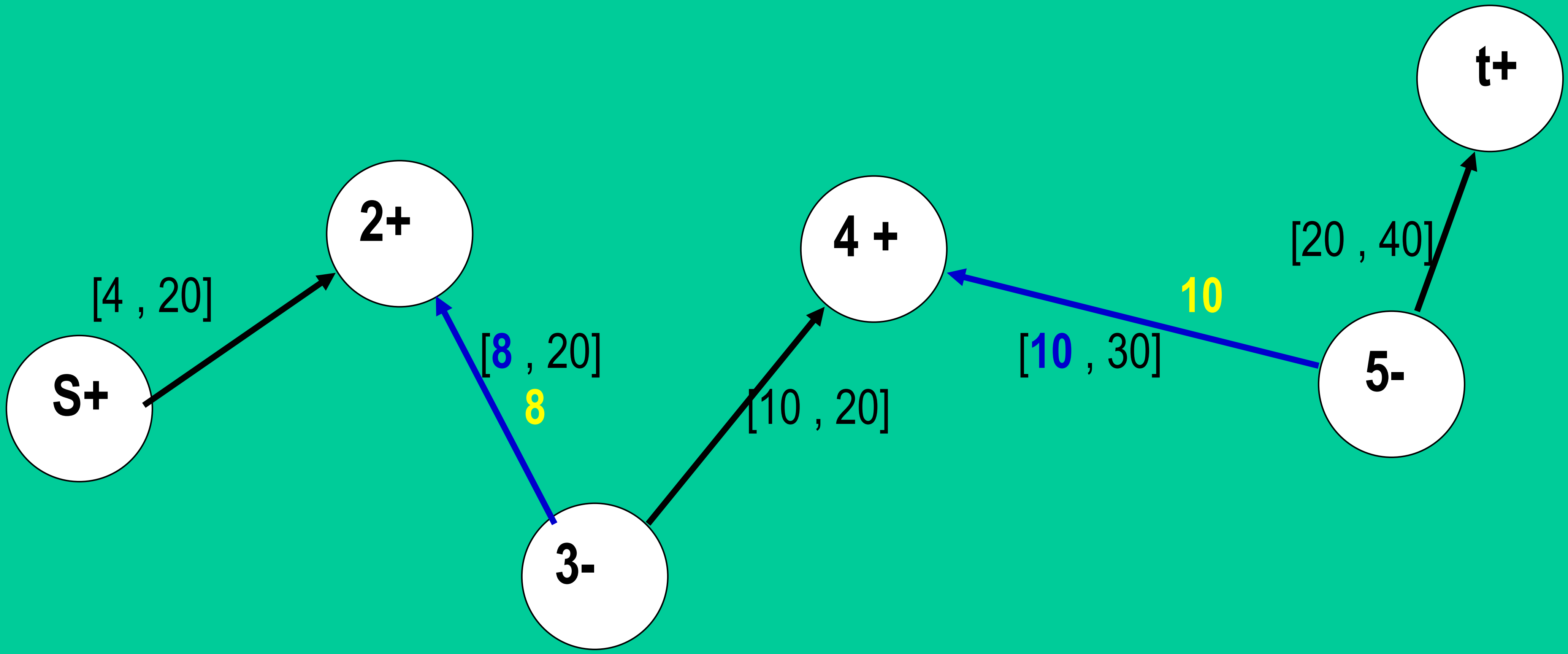
Potentiellement, le flot peut augmenter de:

$$r_u^+ = \min\{16,10,20\} = 10$$



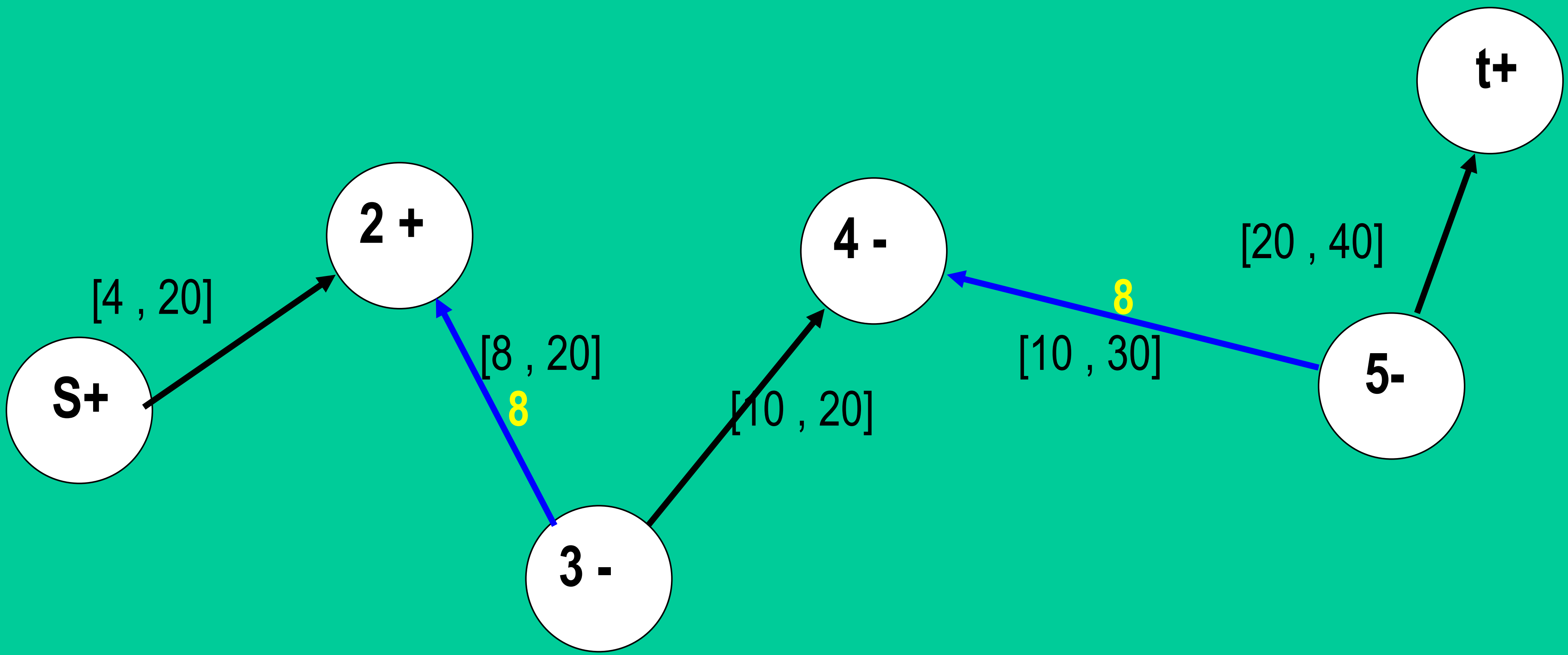
Sur les arcs u ∈ µ- on peut **diminuer** au maximum de la valeur du plus petit flux :

$$r_{u^-} = \min \{ x_u \bullet u \in \mu- \}$$



Potentiellement, le flot peut augmenter de :

$$r_{u^-} = \min\{8,10\} = 8$$

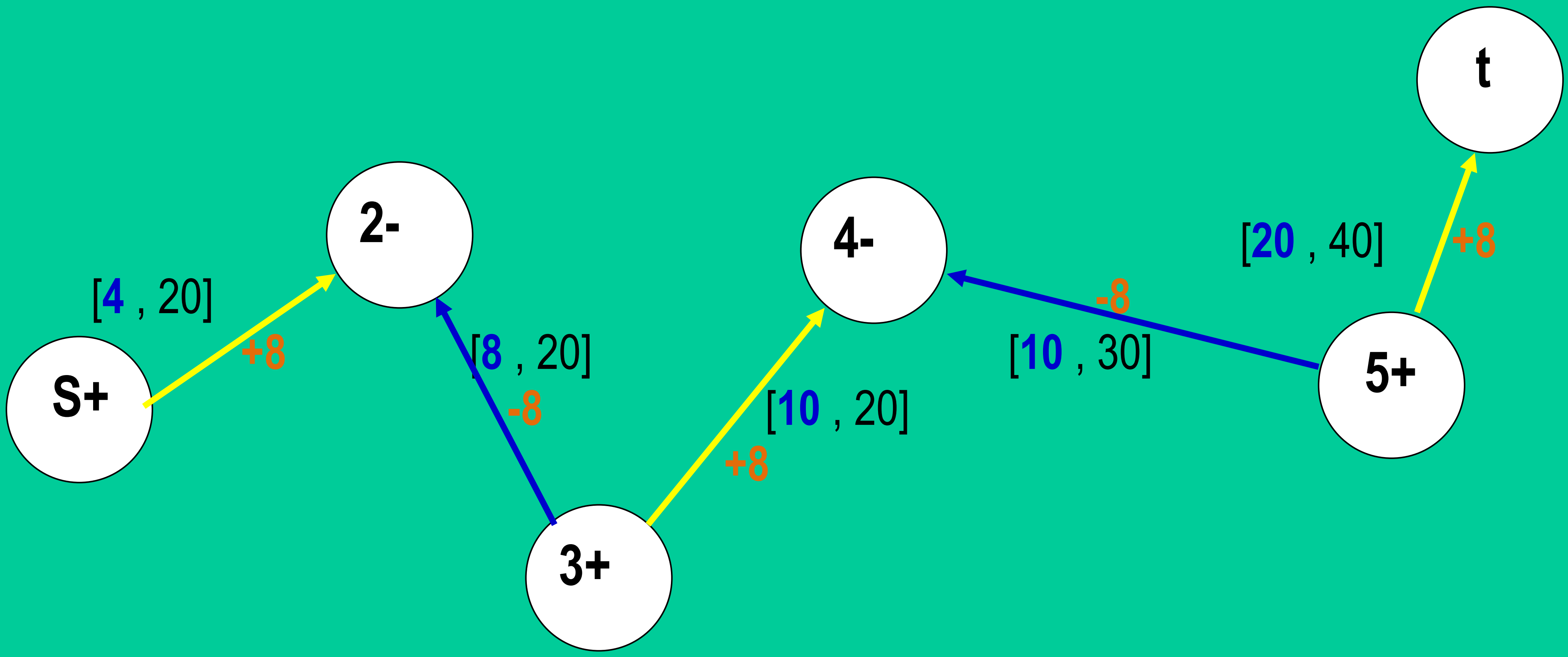


Sur l'ensemble des arcs **u** de la chaîne **µ**, on est limité par la plus petite de ces deux quantités :

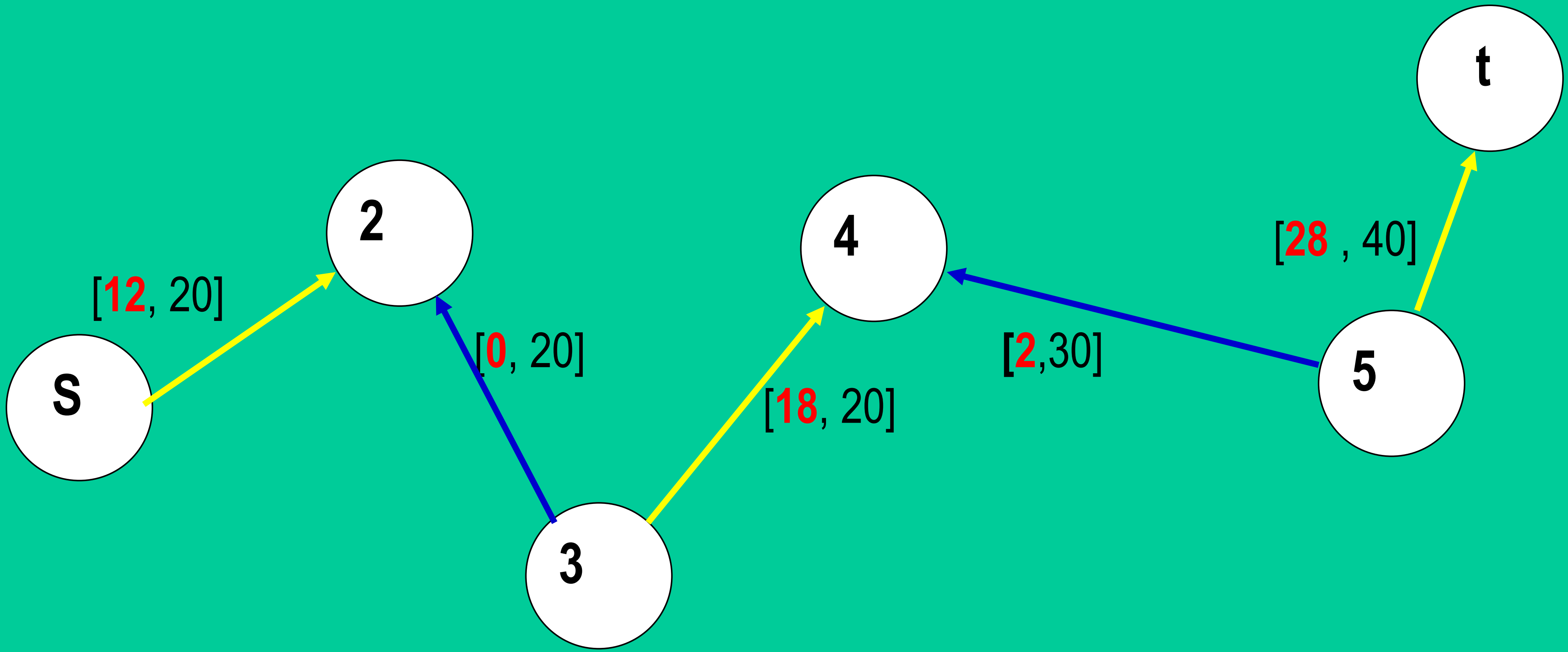
$$r_u^+ \text{ et } r_u^-$$

On construit ainsi un nouveau flot compatible dont la valeur a augmenté de r_u^* :

$$r_u^* = \min\{ r_u^+, r_u^- \}$$
$$= \min\{ 10, 8, \} = 8$$


S+
2-
3+
4-
5+
t
[4 , 20]
+8
[8 , 20]
-8
[10 , 20]
+8
[10 , 30]
-8
[20 , 40]
+8

Finalement, le flot est augmenté de **8** unités le long de la chaîne augmentante [s,2,3,4,5,t,]



II-Algorithme de Ford-Fulkerson

L'idée de l'algorithme de **F&F** consiste, partant d'un flot initial **compatible**, à:

- chercher, par **marquage**, **une** chaîne augmentante
- **augmenter** le flot le long de cette chaîne.

Le processus s'**arrête** lorsqu'il y a plus de chaîne augmentante.

– Initialisation

Fin := FAUX

-Partir d'un flot **V** initial compatible

V= 0.

TantQue Fin = FAUX

-lancer la recherche d’une chaîne augmentante à partir du flot courant

marquer(G,s,t) ;

-**Si t** est non marqué

alors fin:= VRAI - le flot est maximal

sinon

-augmenter le flot le long d'une chaîne augmentante entre s et t

augmenter(G,s,t)

FinTantQue

A l'issue du déroulement de l'algorithme, on dispose d'un flot :

- **compatible**
- et **maximal**.

On possède une information complémentaire importante:

- les sommets **S** marqués
- définissent la coupe[$\mathbf{S}, \bar{S}$] de **capacité minimale**.

Améliorations possibles

Il est possible d'améliorer les performances de l'algorithme de F& F en mettant à profit **une idée** de Edmonds & Karp.

*« Plutôt que de choisir dans le graphe d'écart un chemin **arbitraire**, il faut chercher le **plus court** chemin de **s** vers **t** au sens du **nombre d'arcs »** .*

Cette modification garantit la **terminaison de** l'algorithme.

III-Complexité

– Marquage: O(n+m).
– Suppression des marques: O(n).
– Examen de tous les successeurs et tous les prédécesseurs O(m).
– Augmentation du flot: O(m).

– Après l'étape 2, retour à l'étape 1. A chaque itération on augmente le flot d'une unité au moins.

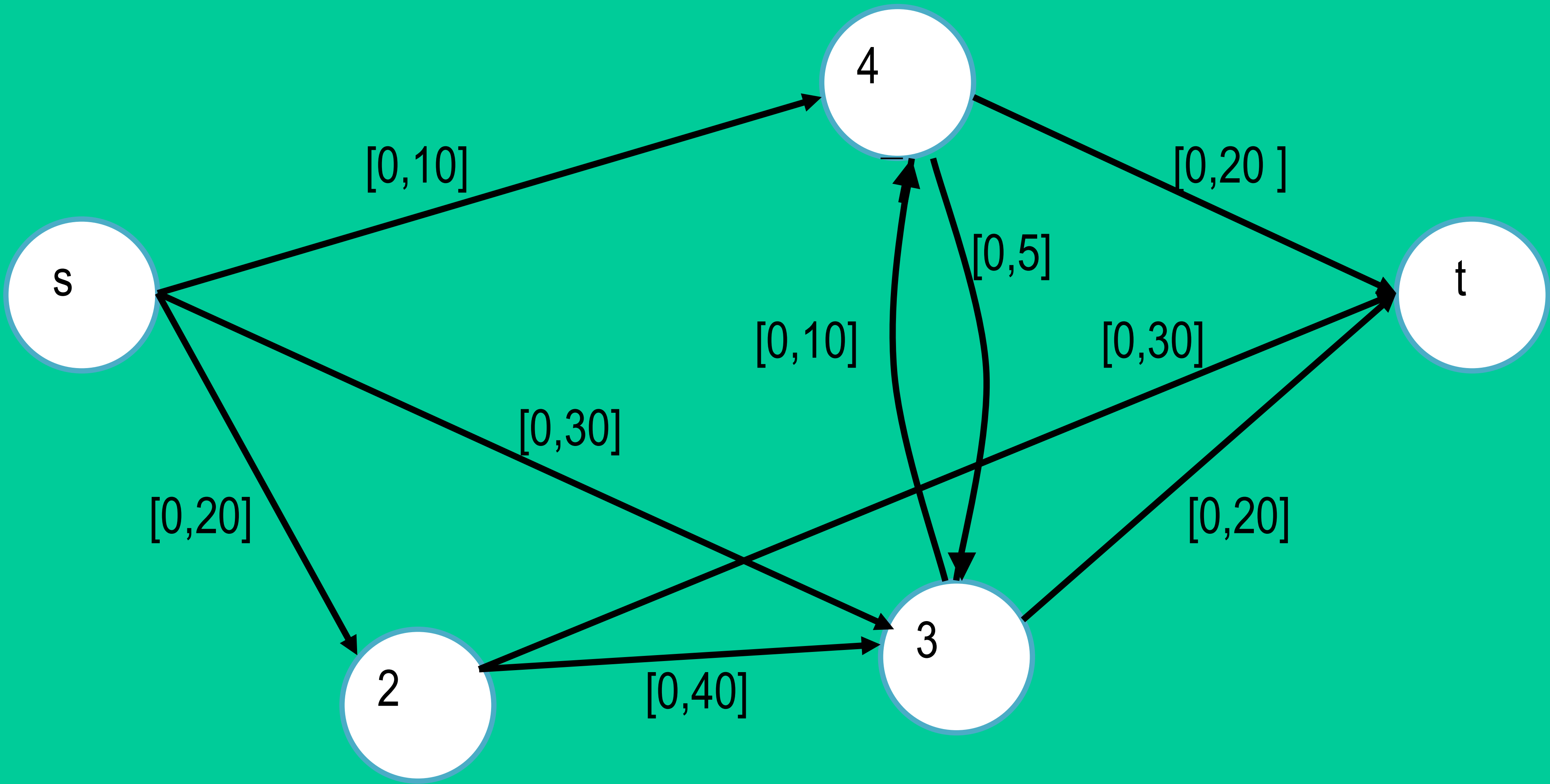
– Si la valeur de ce flot maximal est **v**, la complexité maximale totale est en :

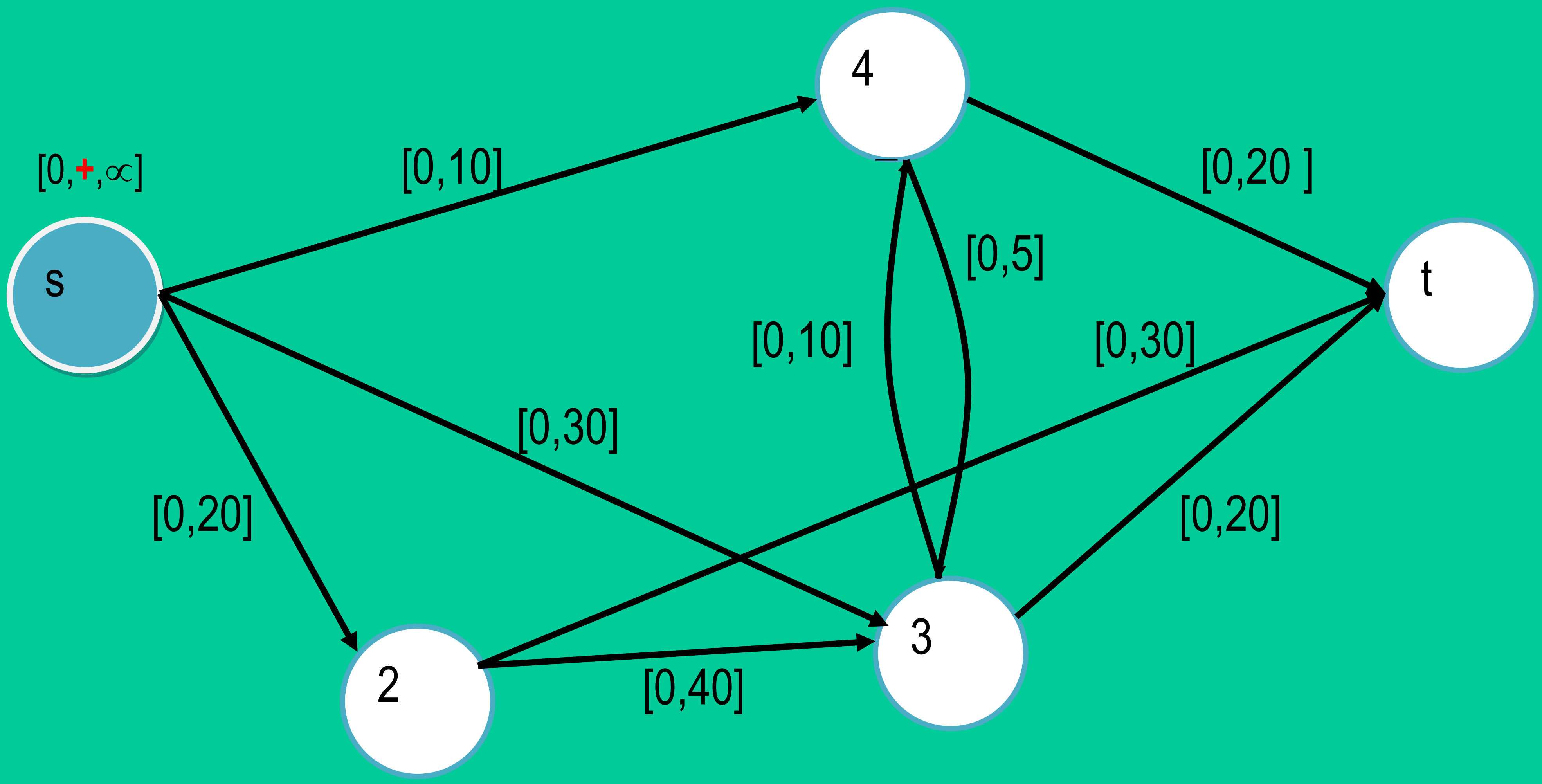
$$O(\mathbf{v}\ (n+m+n+m+m)) = O(\mathbf{v}(n + m)).$$

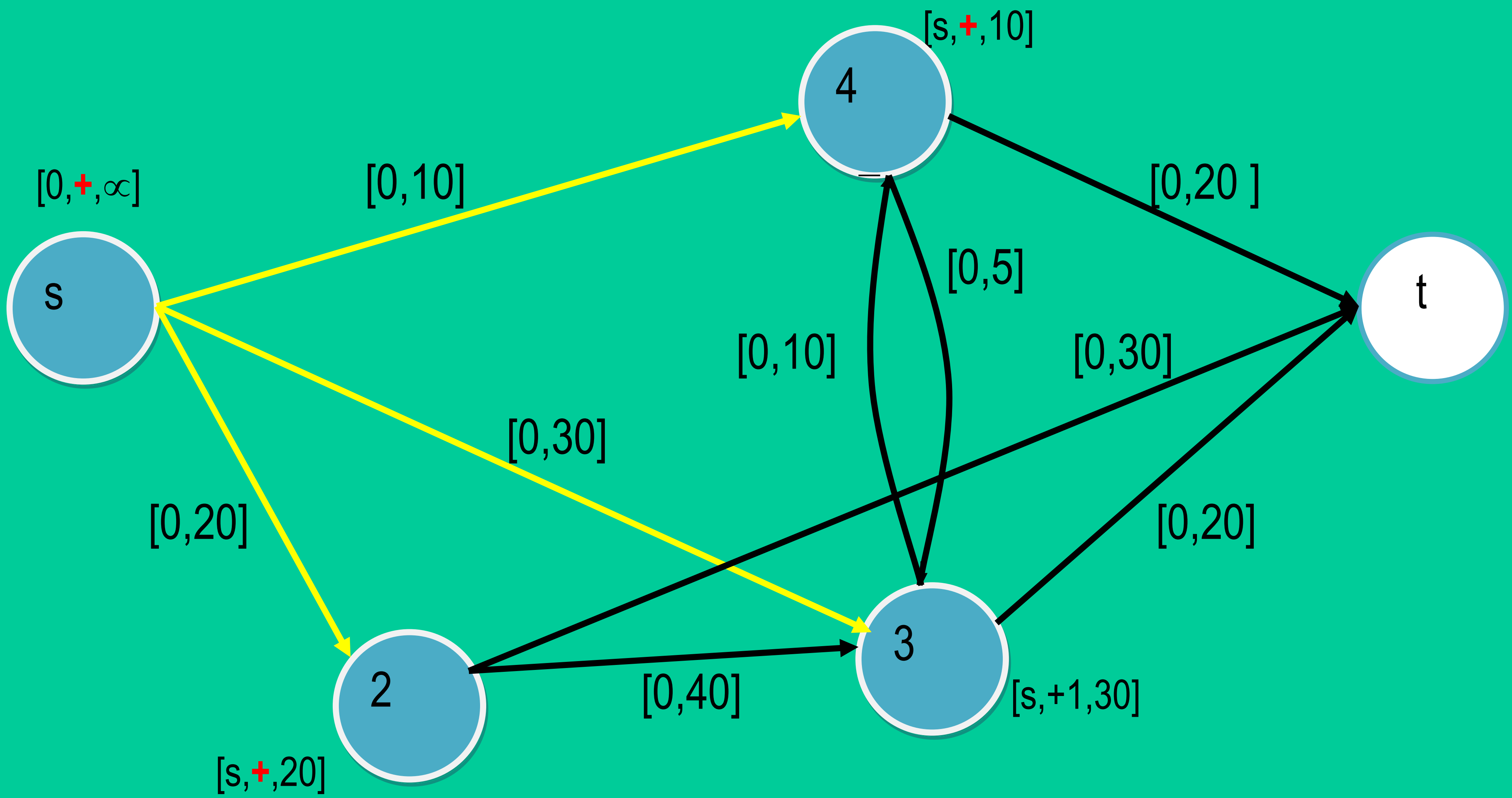
Remarque:

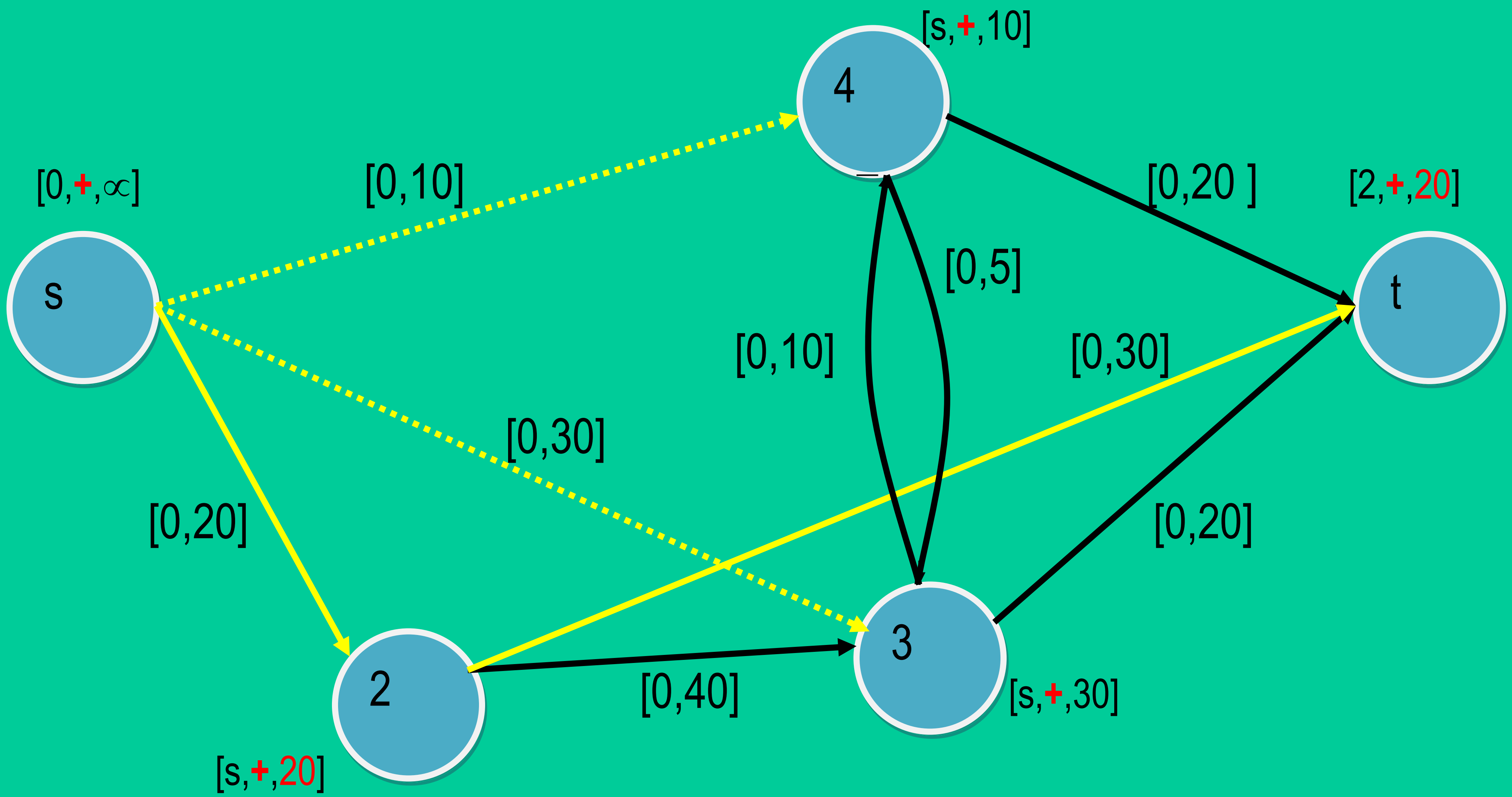
L'algorithme de **E&K** a une complexité en temps qui ne **dépend pas** de la valeur du flot maximal

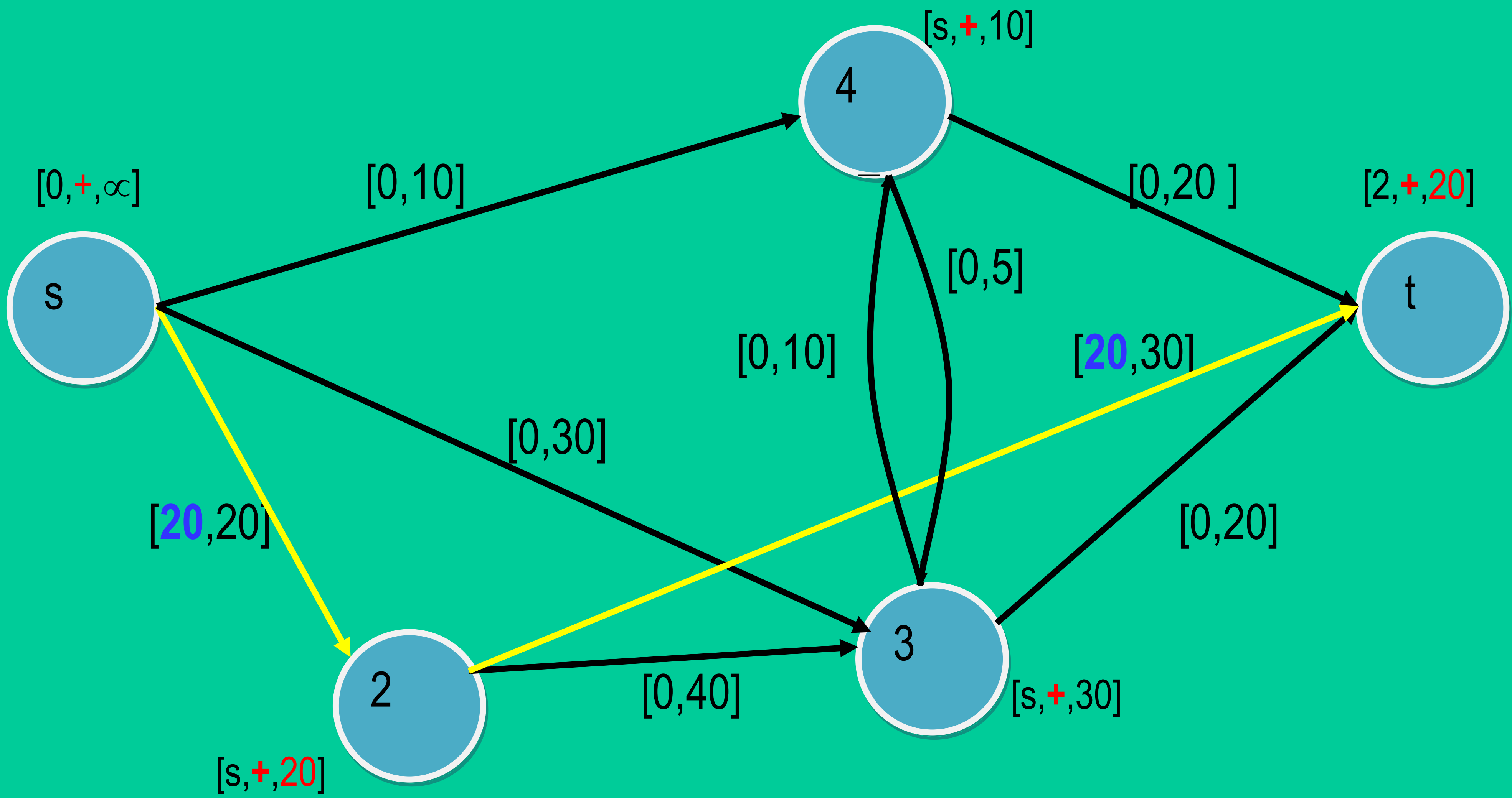
IV-Exemple d'application

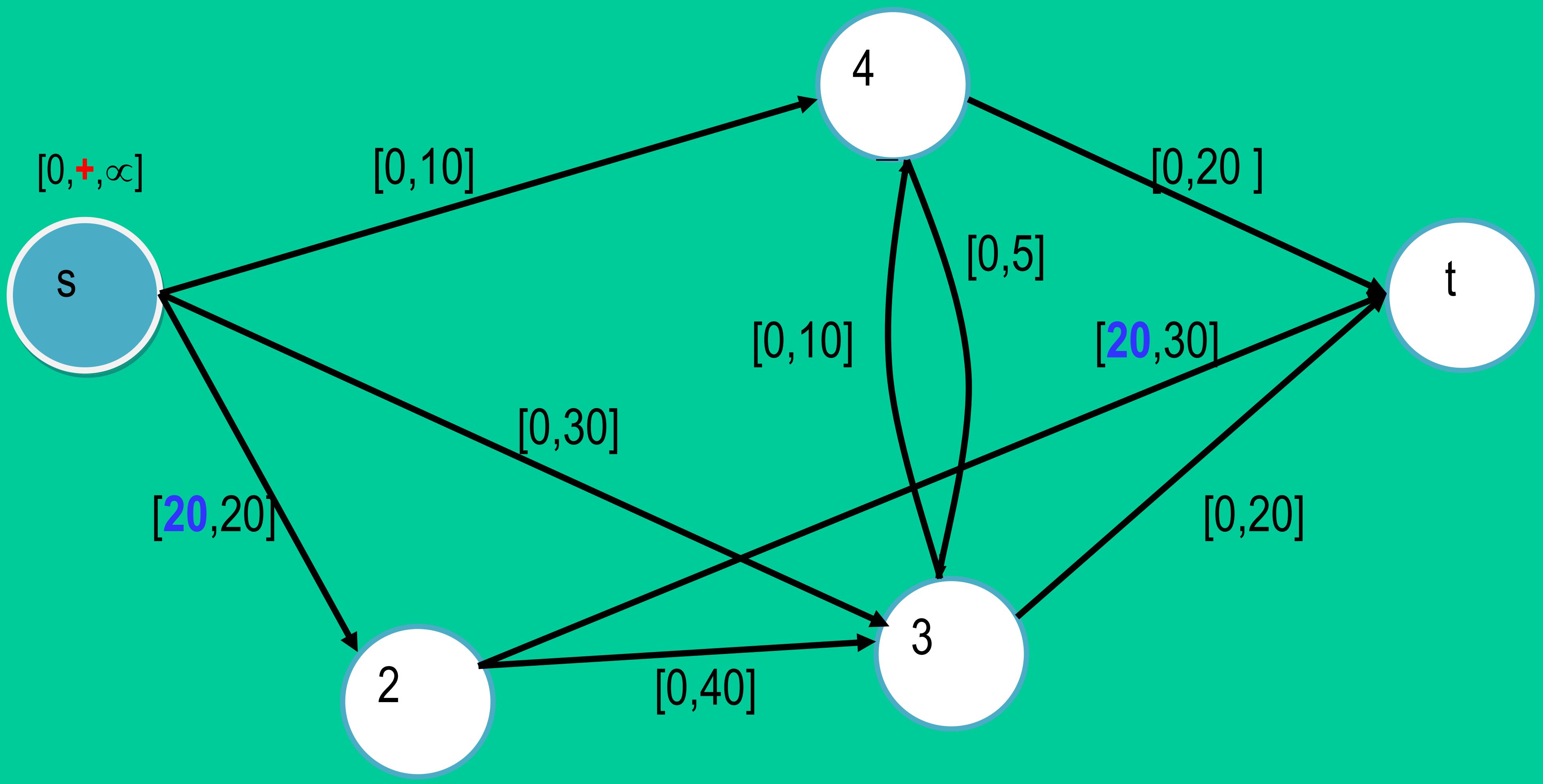


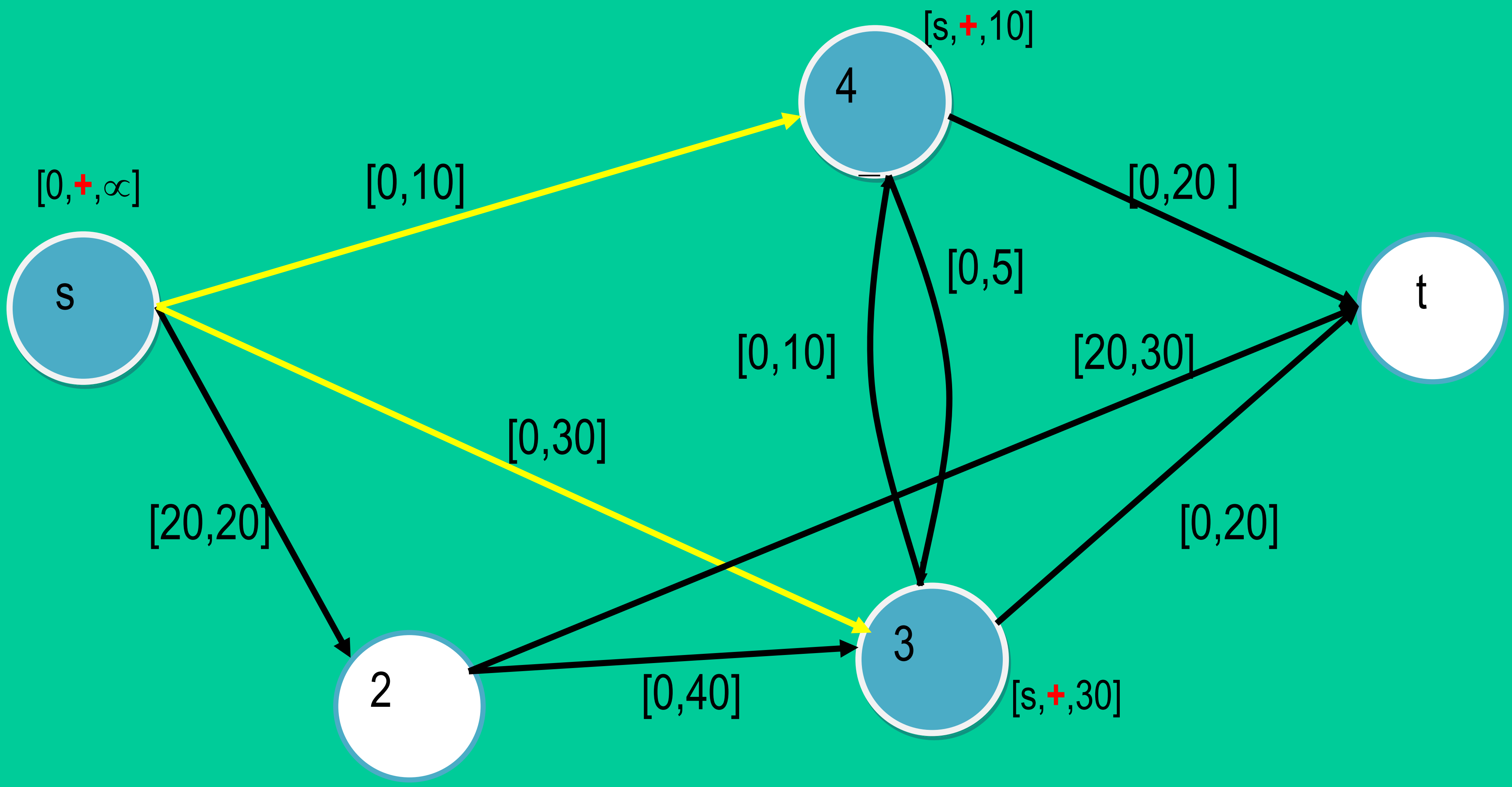

[0,+,∝]
s
4
2
3
t
[0,10]
[0,20]
[0,5]
[0,10]
[0,30]
[0,30]
[0,20]
[0,20]
[0,40]

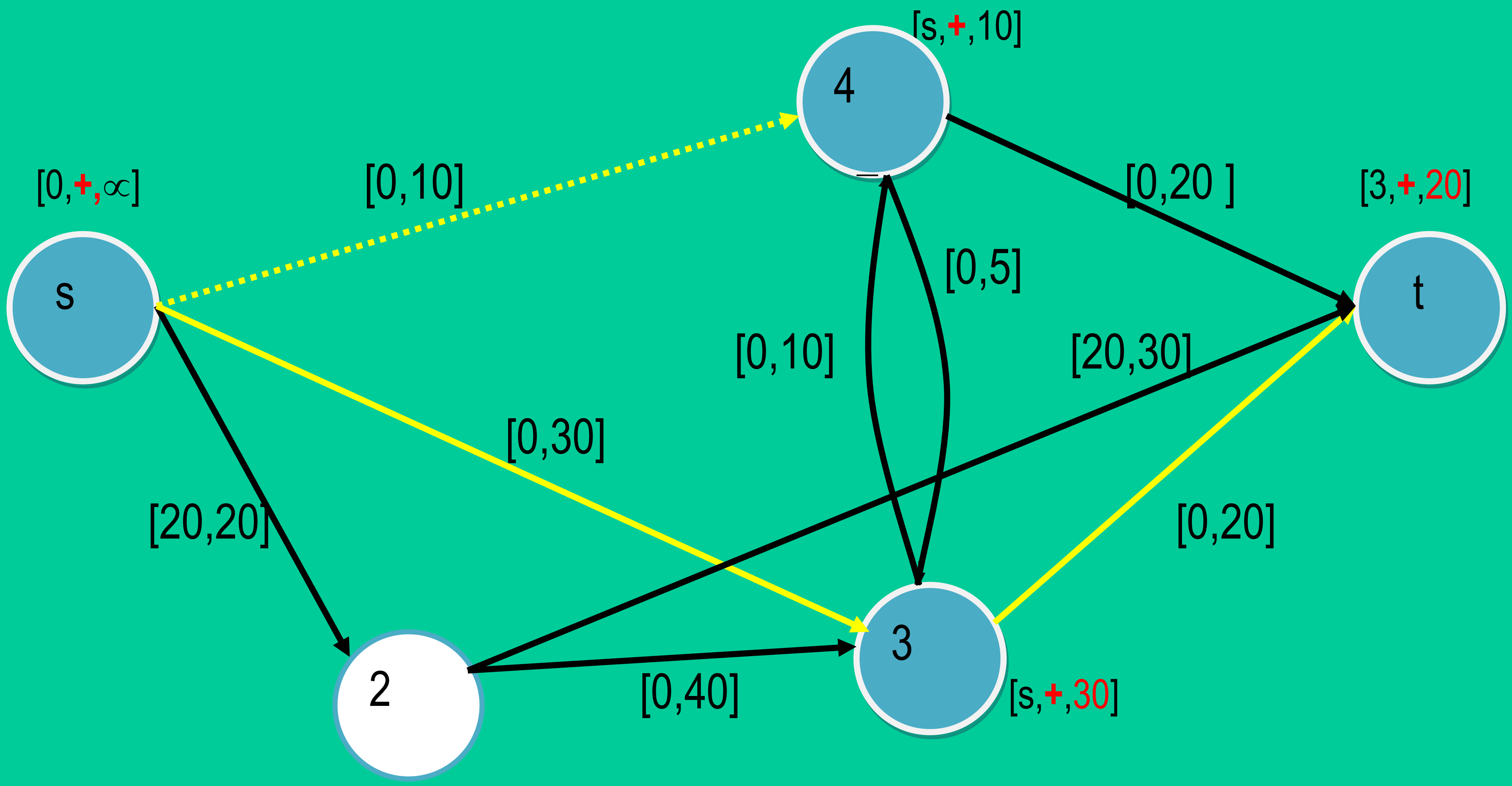

[s,+,10]
4
[0,+,∝]
s
[0,10]
[0,20]
t
[0,5]
[0,10]
[0,30]
[0,30]
[0,20]
[0,20]
3
2
[0,40]
[s,+1,30]
[s,+,20]

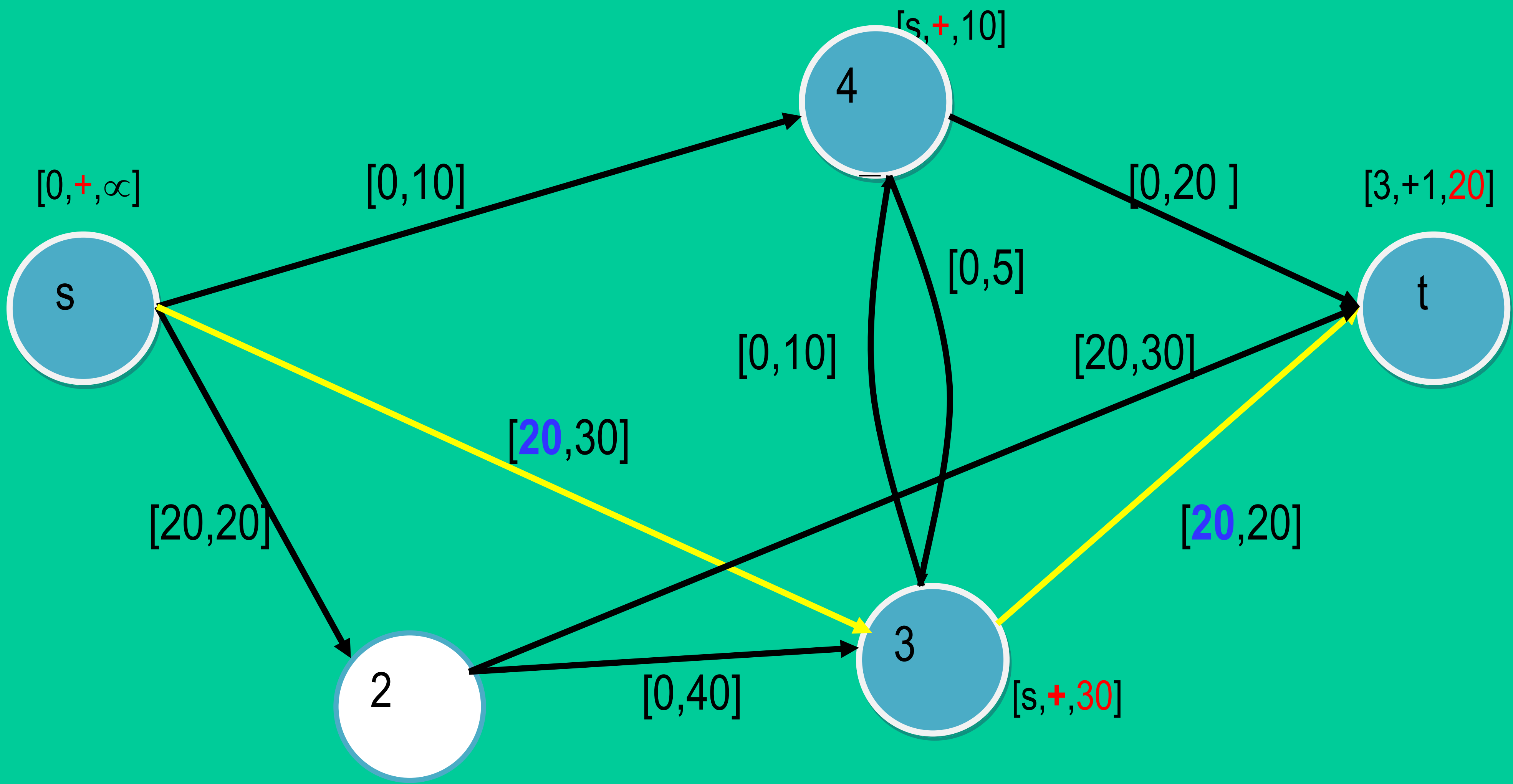

[s,+,10]
4
[0,+,∝]
[0,10]
[0,20]
[2,+,20]
s
[0,5]
t
[0,10]
[0,30]
[0,30]
[0,20]
[0,20]
3
2
[0,40]
[s,+,30]
[s,+,20]

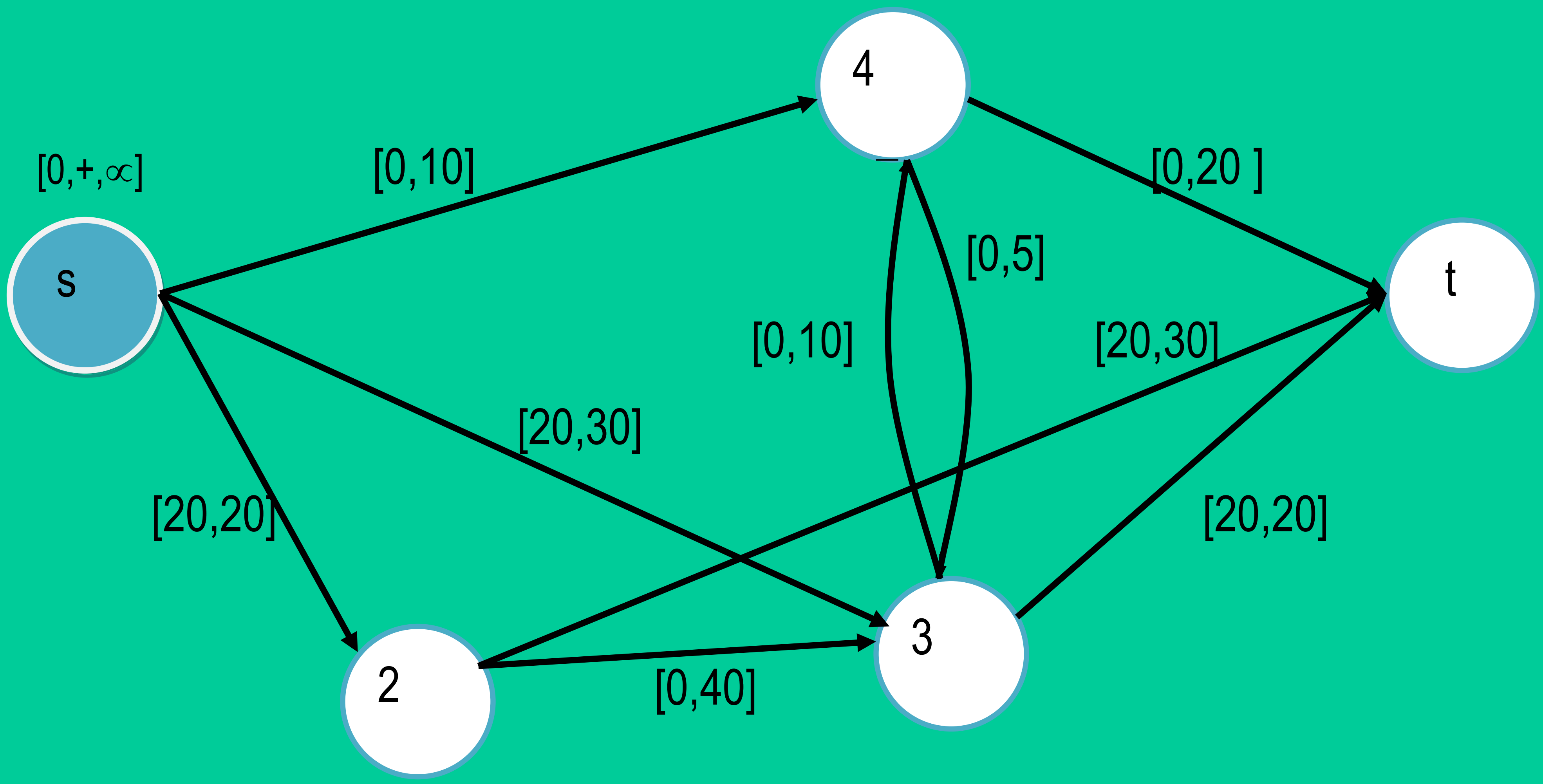

[s,+,10]
4
[0,+,∝]
[0,10]
[0,20]
[2,+,20]
s
[0,5]
t
[0,10]
[20,30]
[0,30]
[20,20]
[0,20]
3
2
[0,40]
[s,+,30]
[s,+,20]

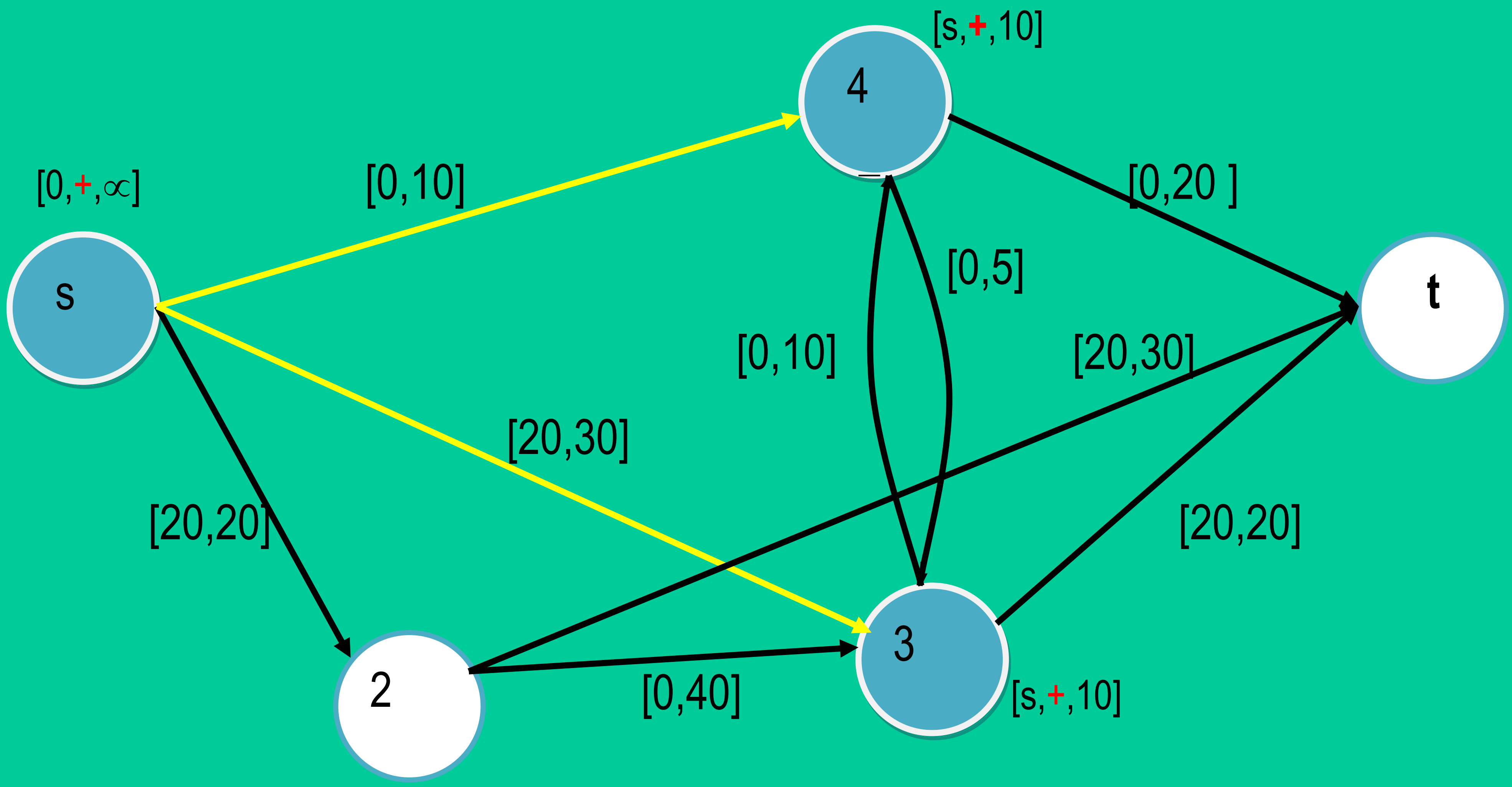

[0,+,∝]
s
[0,10]
4
[0,20]
t
[0,5]
[0,10]
[20,30]
[0,30]
[20,20]
[0,20]
3
2
[0,40]

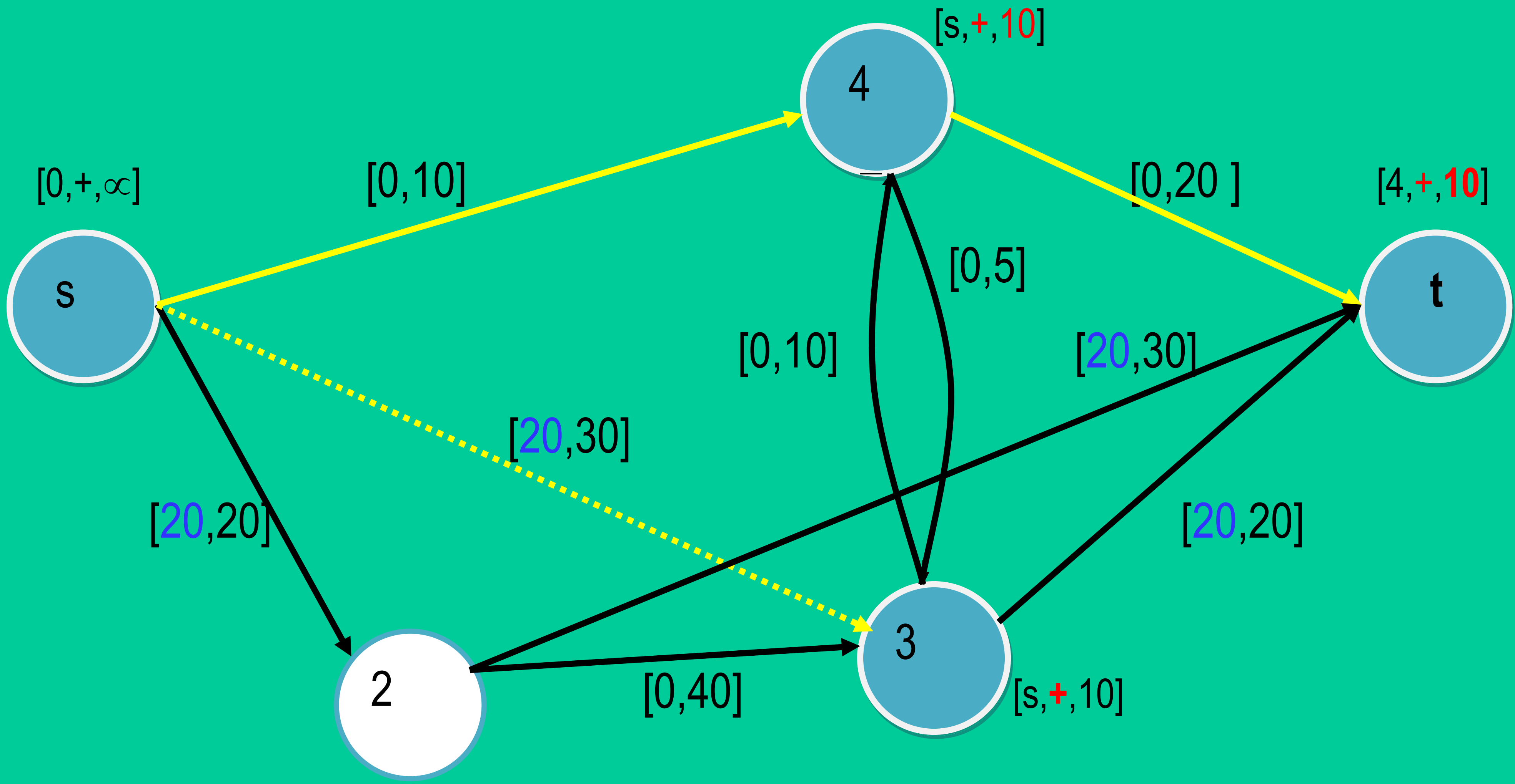

[0,+,∝]
s
[0,10]
4
[s,+,10]
[0,20]
t
[0,5]
[0,10]
[20,30]
[0,30]
[20,20]
[0,20]
2
[0,40]
3
[s,+,30]

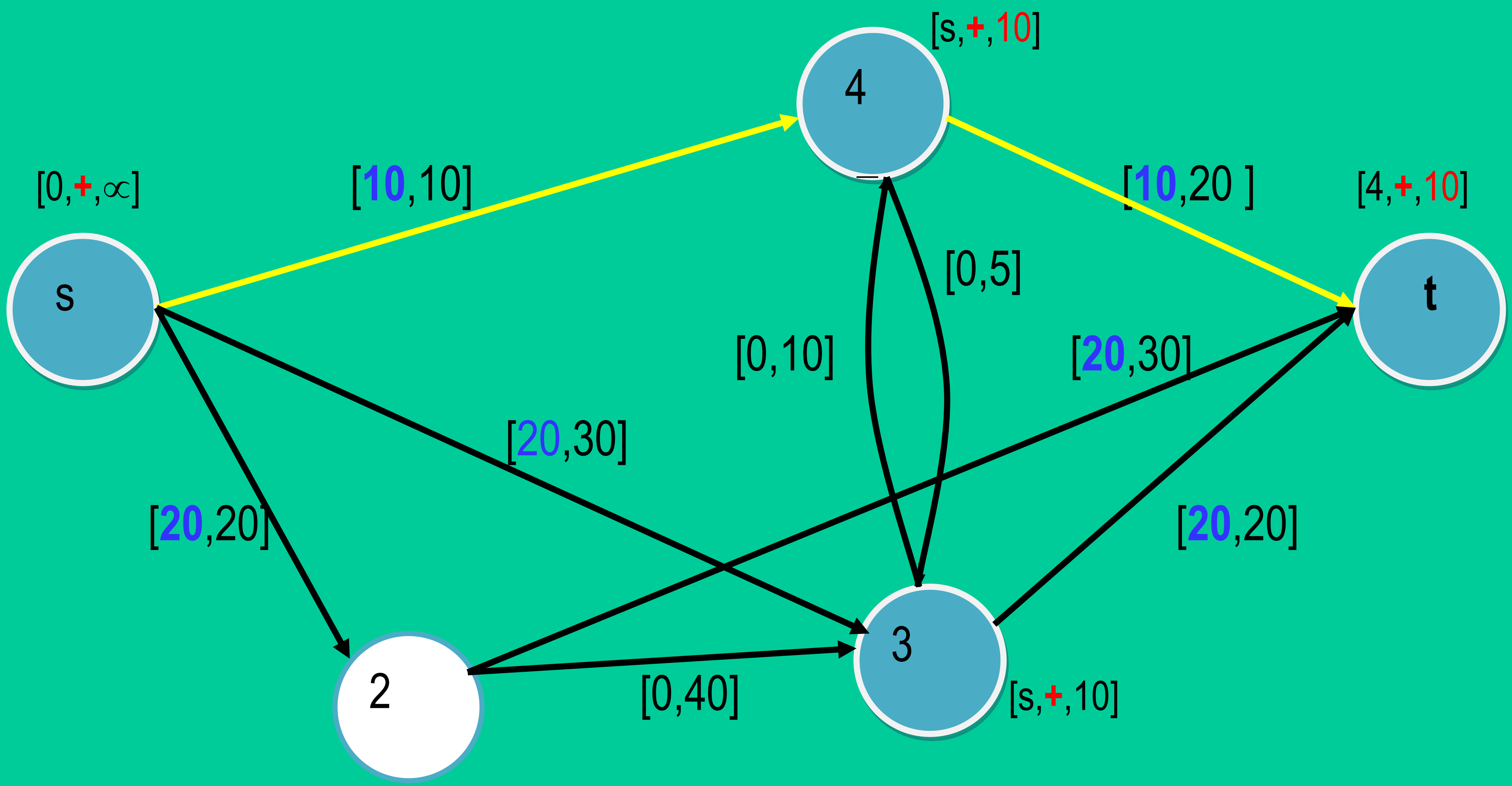

[s,+,10]
4
[0,+,∝]
[0,10]
[0,20]
[3,+,20]
s
[0,5]
t
[0,10]
[20,30]
[0,30]
[20,20]
[0,20]
3
2
[0,40]
[s,+,30]

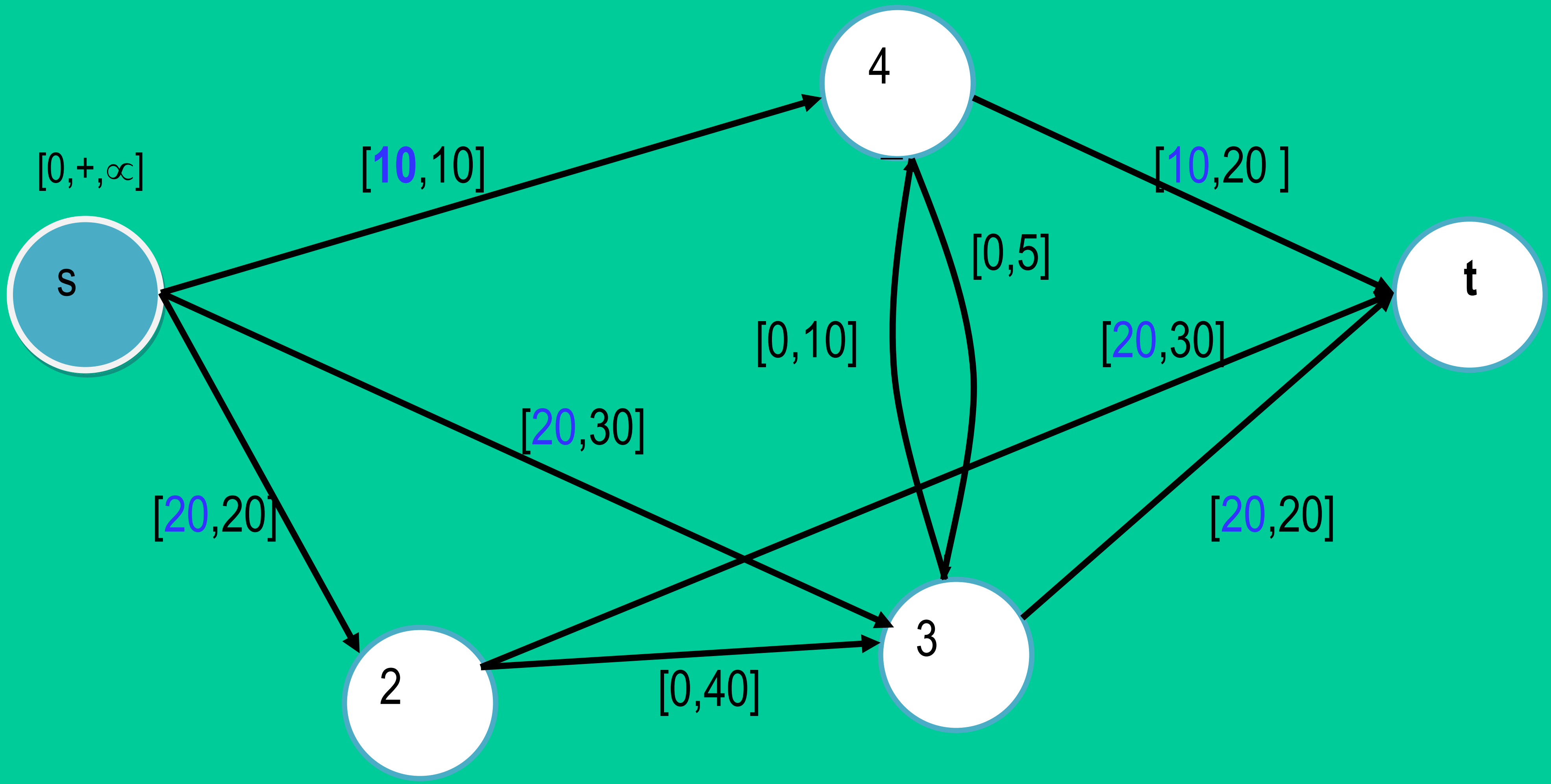

[s,+,10]
4
[0,10]
[0,+,∝]
s
[0,20]
[3,+1,20]
t
[0,5]
[0,10]
[20,30]
[20,30]
[20,20]
[20,20]
2
[0,40]
3
[s,+,30]

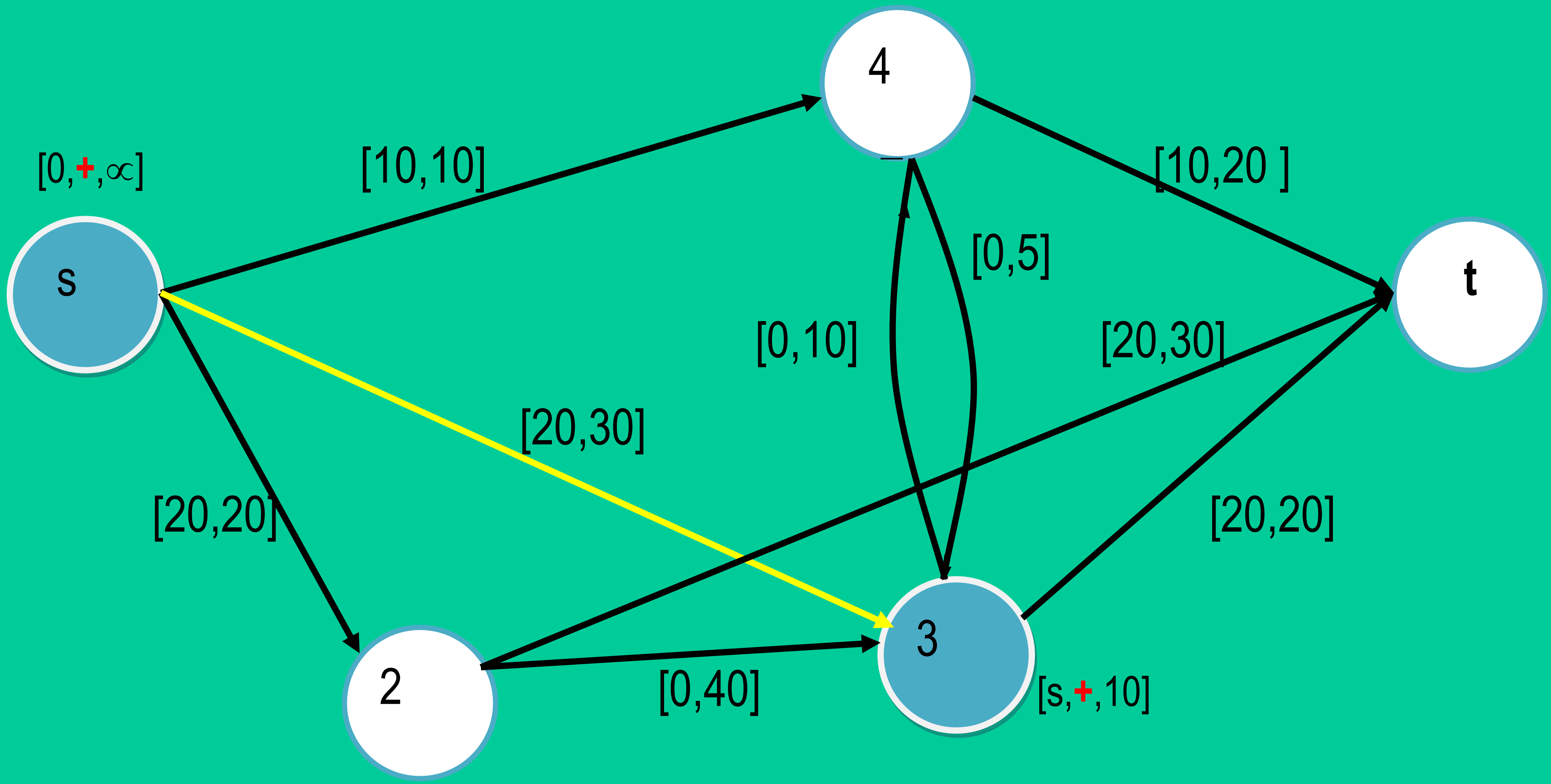

[0,+,∝]
s
[0,10]
4
[0,20]
[0,5]
t
[0,10]
[20,30]
[20,30]
[20,20]
[20,20]
3
2
[0,40]


[0,+,∝]
s
[0,10]
4
[s,+,10]
[0,20]
t
[0,5]
[0,10]
[20,30]
[20,30]
[20,20]
[20,20]
2
[0,40]
3
[s,+,10]

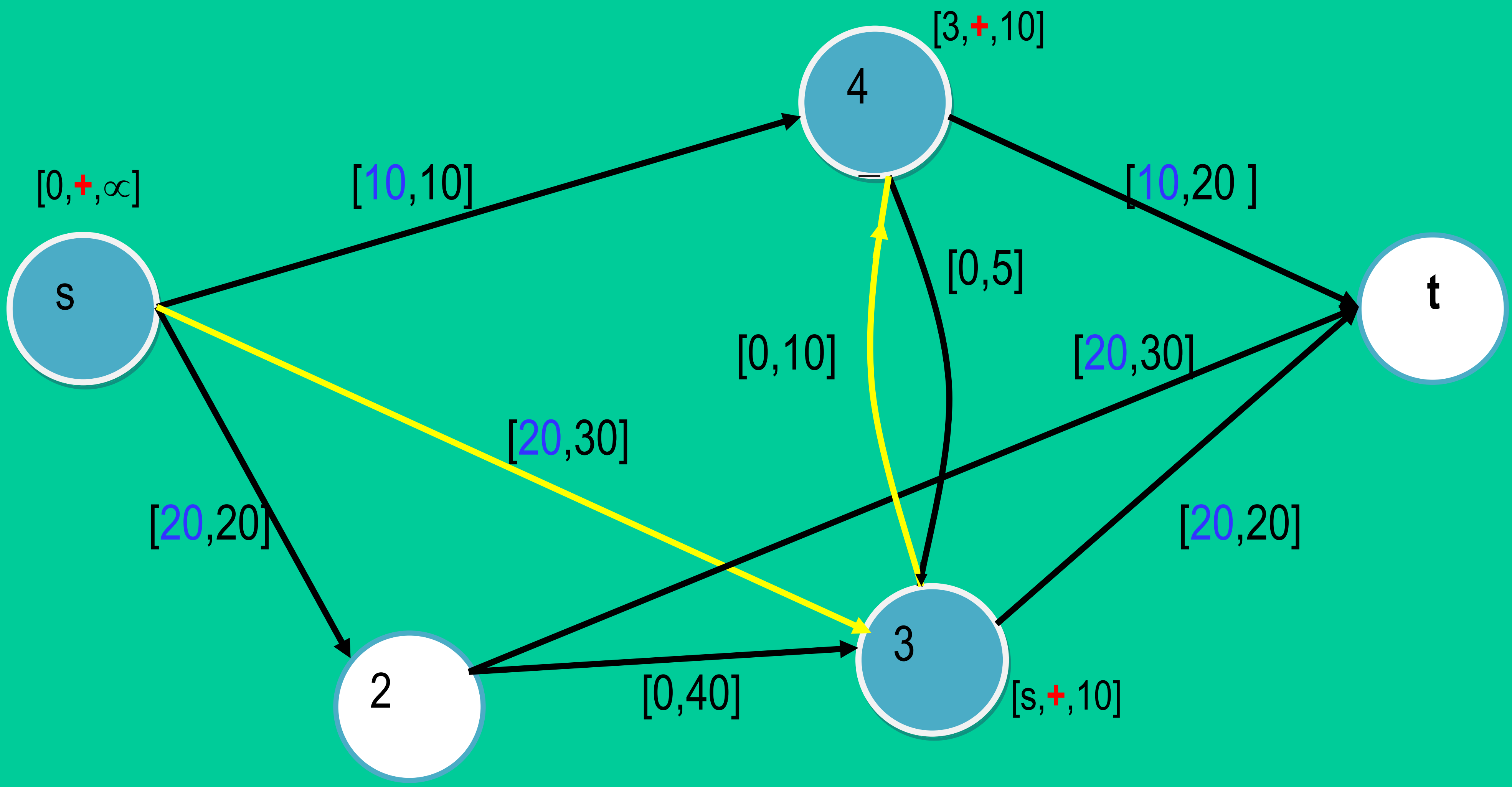

[s,+,10]
4
[0,+,∝]
[0,10]
[0,20]
[4,+,10]
s
[0,5]
t
[0,10]
[20,30]
[20,30]
[20,20]
[20,20]
3
2
[0,40]
[s,+,10]

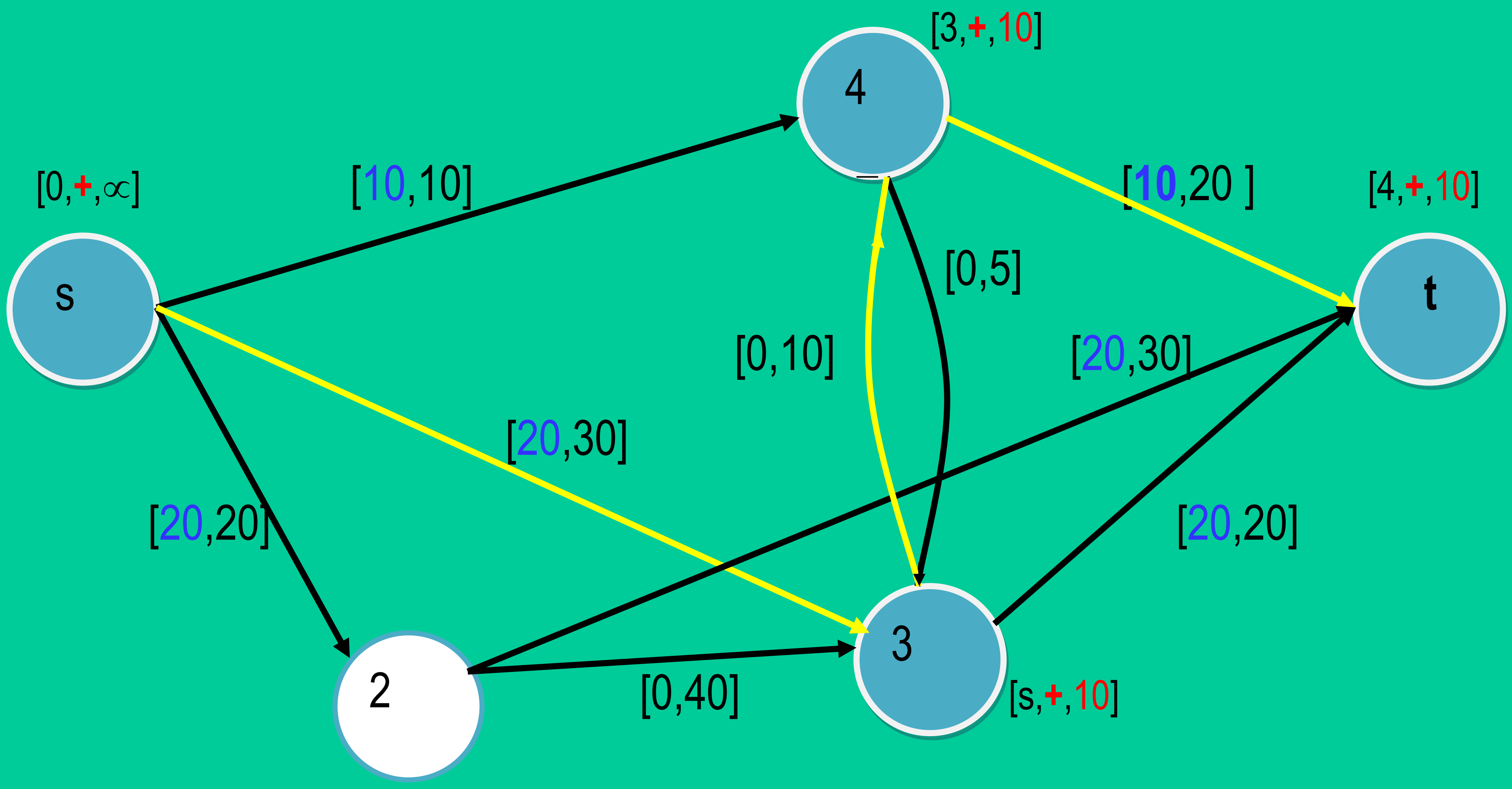

[s,+,10]
4
[0,+,∝]
[10,10]
[10,20]
[4,+,10]
s
t
[0,5]
[0,10]
[20,30]
[20,30]
[20,20]
[20,20]
3
2
[0,40]
[s,+,10]

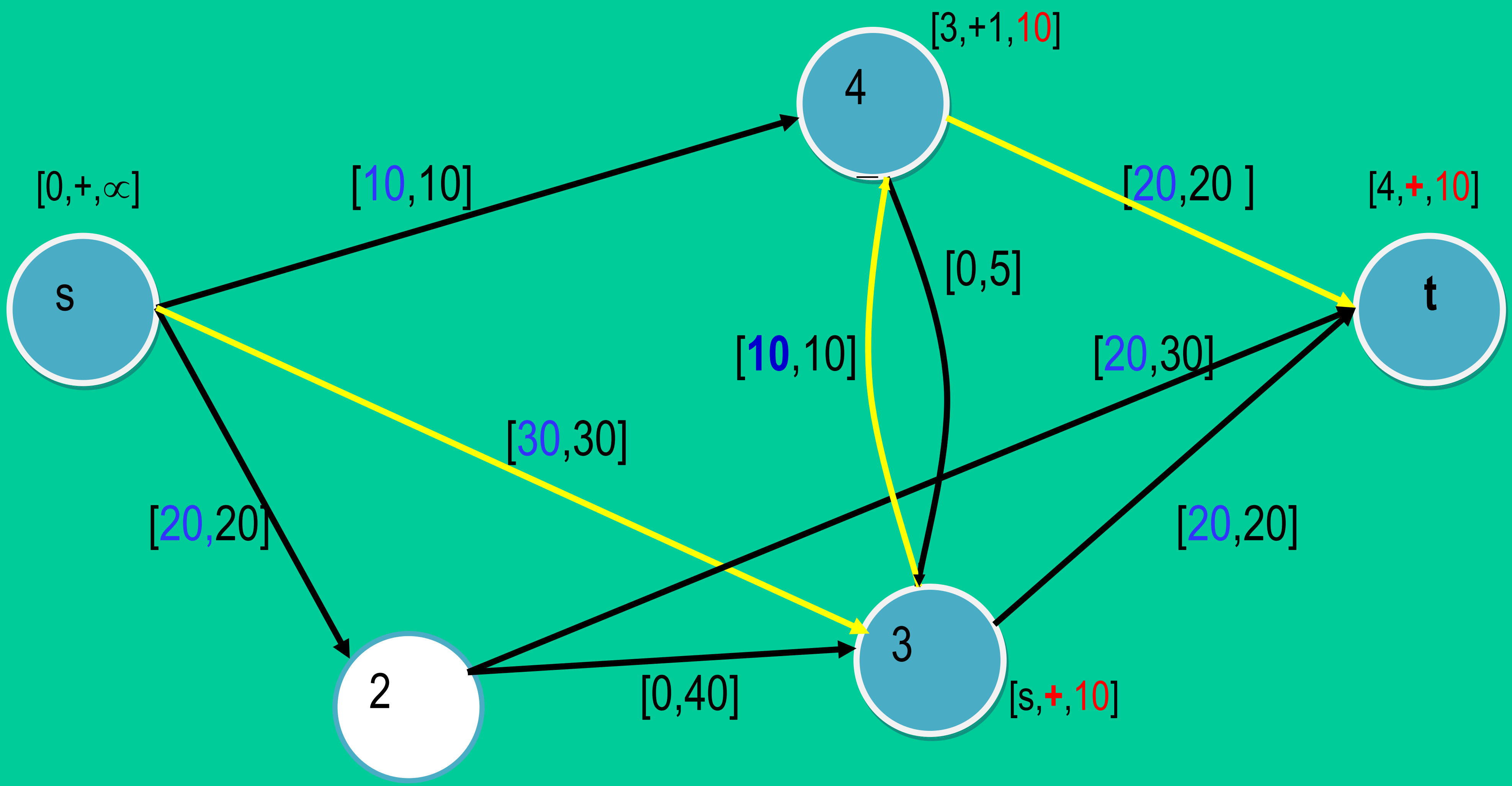

[0,+,∝]
s
[10,10]
4
[10,20]
t
[0,5]
[0,10]
[20,30]
[20,30]
[20,20]
[20,20]
2
[0,40]
3



[0,+,∝]
s
[10,10]
4
[10,20]
t
[0,5]
[0,10]
[20,30]
[20,30]
[20,20]
[20,20]
2
[0,40]
3
[s,+,10]

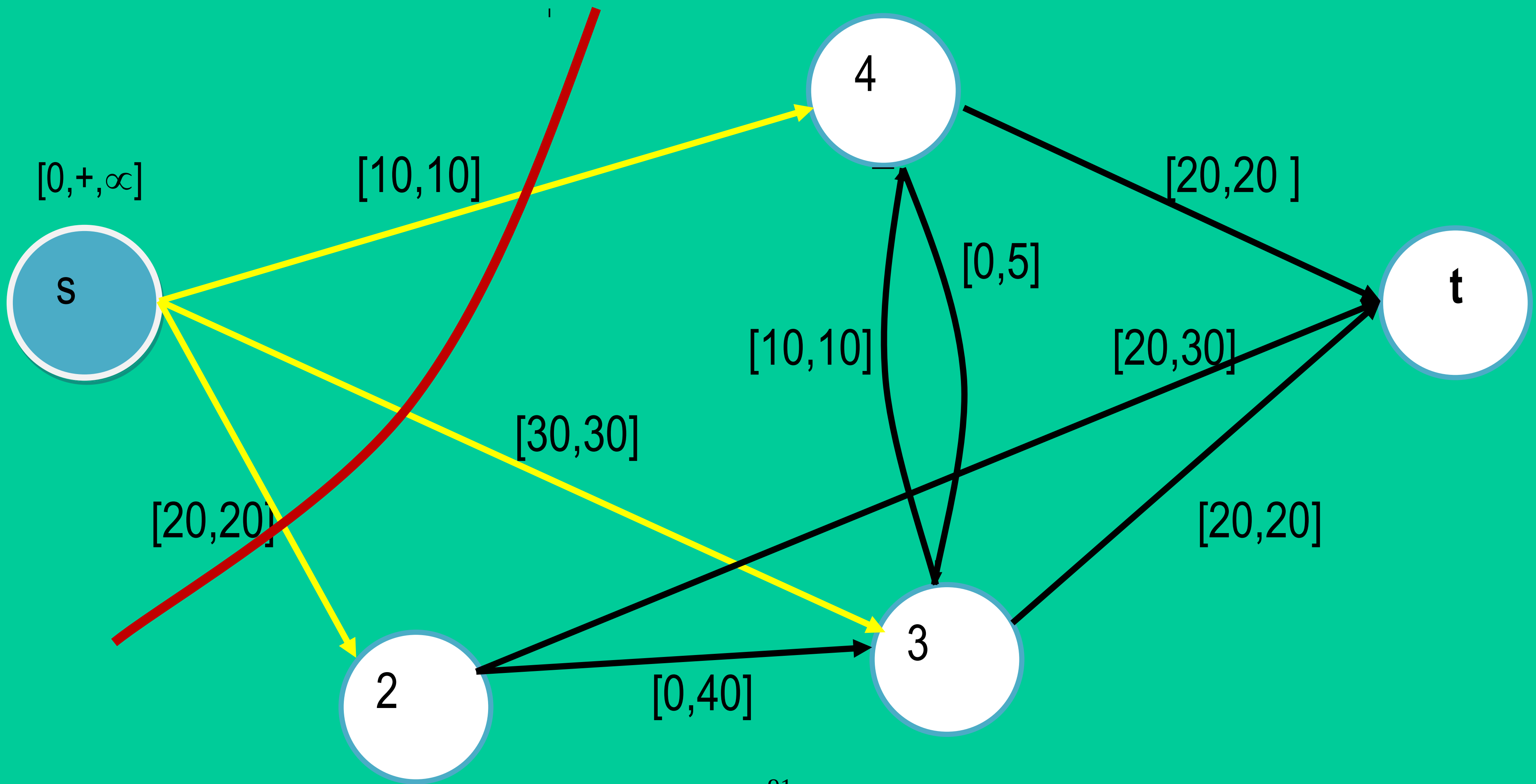

[0,+,∝]
s
[10,10]
4
[3,+,10]
[10,20]
t
[0,5]
[0,10]
[20,30]
[20,30]
[20,20]
[20,20]
2
[0,40]
3
[s,+,10]


[0,+,∝]
s
[10,10]
4
[3,+,10]
[10,20]
[4,+,10]
t
[0,5]
[0,10]
[20,30]
[20,30]
[20,20]
[20,20]
2
[0,40]
3
[s,+,10]


[3,+1,10]
4
[10,10]
[20,20]
[4,+,10]
[0,+,∝]
s
[0,5]
t
[10,10]
[20,30]
[30,30]
[20,20]
[20,20]
3
2
[0,40]
[s,+,10]

Soit la st-coupe $[S, \bar{S}]$ définie par :

$S = \{s\}$ et $\bar{S} = \{2,3,4,t\}$



Sa capacité est :

$$U_{[S,\,\bar{S}]} = C_{s2} + C_{s3} + C_{s4}$$
$$= 20 + 30 + 10 = 60$$

La capacité de la coupe est égale à la valeur **60** du flot.

D'après le théorème FlotMax/CoupeMin :

- le flot de valeur 60 est maximal
- la st-coupe $[S, \bar{S}]$ est minimale.