

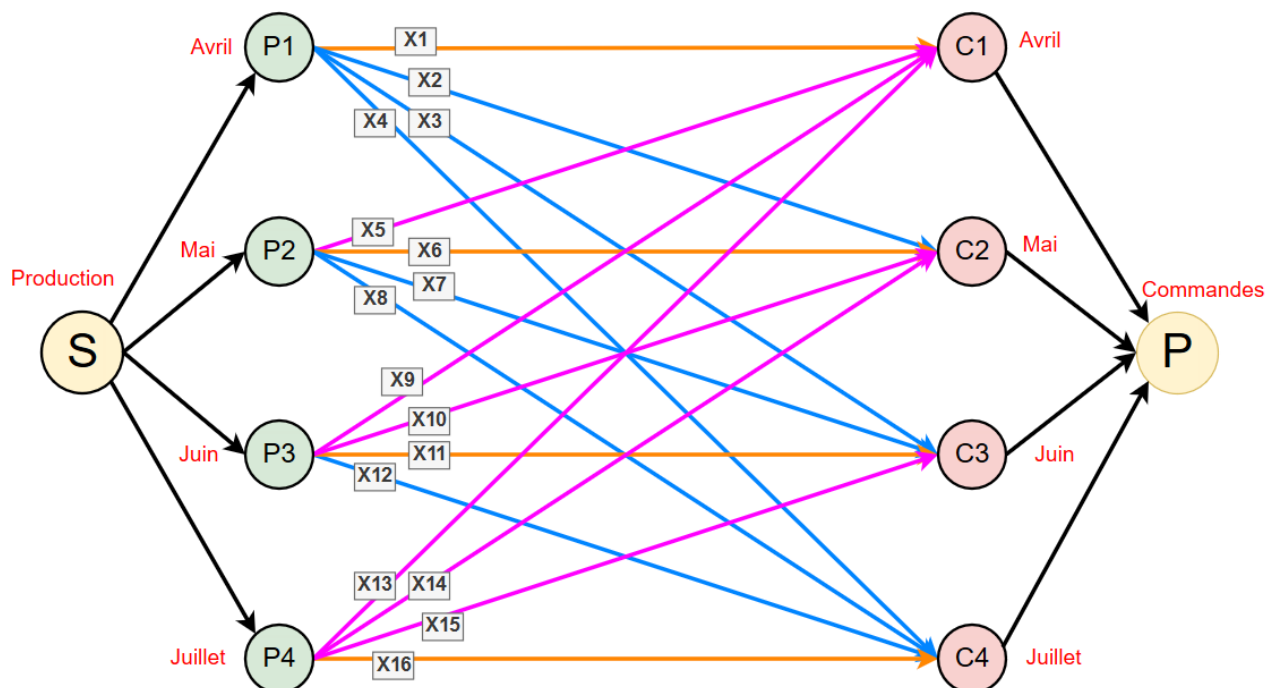
## Compte rendu sur l'optimisation de la production Lafuma « Recherche Opérationnelle »

### I) Problème

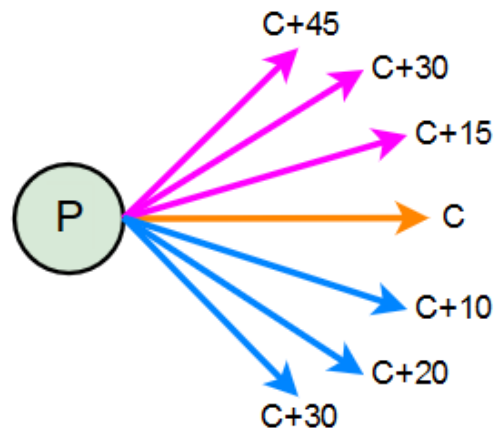
Pour dégager un profit maximum au vu de la vente d'un produit, il est nécessaire à une entreprise d'optimiser ses coûts de fabrication. Le problème du meilleur coût de fabrication des sacs prestiges de la marque Lafuma revient à optimiser la façon de répartir les productions mensuels en fonctions des commandes. Le coût minimum pour une production donné dépend de plusieurs paramètres :

- le mois de production (le lieu de production et donc le coût en dépend).
- la pénalité lié au retard d'une commande (ou précommande).
- le coût de stockage dû à un sac produit en avance.

Afin d'optimiser la production de Lafuma sous plusieurs scénarios, on modélise le problème sous forme de réseau de flot :



Les coûts sur les arcs colorés est donné suivant schéma suivant (en orange les productions du mois courant, en rose les productions des mois précédent et en bleu les production des mois suivants) :



Chaque arc représente une productions d'un mois vers une commande (ou précommande) d'un autre mois ; les arcs sont renommés de X1 à X16 afin de faciliter la formulation du programme linéaire par la suite.

Ce problème d'optimisation de coût peut donc être ramené à un problème standard de recherche du flot maximum à coût minimum dans un réseau de flot. Cependant, il est très compliqué de résoudre ce genre de problème manuellement : il y a de trop nombreuses variabilités dans le coût. Pour résoudre notre problème d'optimisation, nous allons donc le formuler sous la forme d'un programme linéaire pour chacun des trois scénarios.

## II) Modélisation & Résolution

On doit formuler deux programmes linéaires pour chacun des scénarios: l'un pour les hommes et l'autre pour les femmes. Le coût total sera égal à la somme des deux coûts optimisés. Le corps du PL reste toutefois le même pour hommes ou femmes quel que soit le scénario :

- On commence par trouver la fonction objectif à optimiser : ici, l'objectif est de minimiser le coût.
- On désigne :
  - X1 le nombre de sacs produits en Avril pour les commandes d'Avril.
  - X2 le nombre de sacs produits en Avril pour les commandes de Mai.
  - X3 le nombre de sacs produits en Avril pour les commandes de Juin.
  - X4 le nombre de sacs produits en Avril pour les commandes de Juillet.
  - X5 le nombre de sacs produits en Mai pour les commandes d'Avril.
  - X6 le nombre de sacs produits en Mai pour les commandes de Mai.
  - X7 le nombre de sacs produits en Mai pour les commandes de Juin.
  - X8 le nombre de sacs produits en Mai pour les commandes de Juillet.
  - X9 le nombre de sacs produits en Juin pour les commandes d'Avril.
  - X10 le nombre de sacs produits en Juin pour les commandes de Mai.
  - X11 le nombre de sacs produits en Juin pour les commandes de Juin.
  - X12 le nombre de sacs produits en Juin pour les commandes de Juillet.
  - X13 le nombre de sacs produits en Juillet pour les commandes d'Avril.
  - X14 le nombre de sacs produits en Juillet pour les commandes de Mai.
  - X15 le nombre de sacs produits en Juillet pour les commandes de Juin.
  - X16 le nombre de sacs produits en Juillet pour les commandes de Juillet.

- Le coût minimum est alors désigné par

$$\text{Min } Z = (X1 \times C) + (X2 \times C + 10) + (X3 \times C + 20) + (X4 \times C + 30) + (X5 \times C' + 15) + (X6 \times C') + (X7 \times C' + 10) + (X8 \times C' + 20) + (X9 \times C'' + 30) + (X10 \times C'' + 15) + (X11 \times C') + (X12 \times C'' + 10) + (X12 \times C^2 + 45) + (X12 \times C^2 + 30) + (X12 \times C^2 + 15) + (X12 \times C^2)$$

$C$  = coût de fabrication H/F de l'atelier en Avril

$C'$  = coût de fabrication H/F de l'atelier en Mai

$C''$  = coût de fabrication H/F de l'atelier en Juin

$C^2$  = coût de fabrication H/F de l'atelier en Juillet

- On met les contraintes en équation :

$$- X1 + X2 + X3 + X4 \leq P1$$

$P1$  = Production max H/F de l'atelier en Avril

$$- X5 + X6 + X7 + X8 \leq P2$$

$P2$  = Production max H/F de l'atelier en Mai

$$- X9 + X10 + X11 + X12 \leq P3$$

$P3$  = Production max H/F de l'atelier en Juin

$$- X13 + X14 + X15 + X16 \leq P4$$

$P4$  = Production max H/F de l'atelier en Juillet

$$- X1 + X5 + X9 + X13 = C1$$

$C1$  = Commandes/précommandes H/F en Avril

$$- X2 + X6 + X10 + X14 = C2$$

$C2$  = Commandes/précommandes H/F en Mai

$$- X3 + X7 + X11 + X15 = C3$$

$C3$  = Commandes/précommandes H/F en Juin

$$- X4 + X8 + X12 + X16 = C4$$

$C4$  = Commandes/précommandes H/F en Juillet

- Il ne reste plus qu'à remplacer  $C$ ,  $C'$ ,  $C''$ ,  $C^2$ ,  $P1$ ,  $P2$ ,  $P3$ ,  $P4$ ,  $C1$ ,  $C2$ ,  $C3$  et  $C4$  par leurs valeur dans chacun des scénarios, en faisant la distinction entre hommes et femmes. Nous avons utiliser le solver suivant pour minimiser le tout : <https://www.zweigmedia.com/RealWorld/simplex.html>

1<sup>er</sup> Scénario : on s'en tient aux précommandes

Hommes :

$$\text{Min } Z = 200X_1 + 210X_2 + 220X_3 + 230X_4 + 195X_5 + 180X_6 + 190X_7 + 200X_8 + 180X_9 + 165X_{10} + 150X_{11} + 160X_{12} + 215X_{13} + 200X_{14} + 185X_{15} + 170X_{16}$$

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \leq 280$$

$$X_5 + X_6 + X_7 + X_8 \leq 215$$

$$X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12} \leq 500$$

$$X_{13} + X_{14} + X_{15} + X_{16} \leq 230$$

$$X_1 + X_5 + X_9 + X_{13} = 315$$

$$X_2 + X_6 + X_{10} + X_{14} = 215$$

$$X_3 + X_7 + X_{11} + X_{15} = 315$$

$$X_4 + X_8 + X_{12} + X_{16} = 380$$

Femmes :

$$\text{Min } Z = 210X_1 + 220X_2 + 230X_3 + 240X_4 + 200X_5 + 185X_6 + 195X_7 + 205X_8 + 185X_9 + 170X_{10} + 155X_{11} + 165X_{12} + 225X_{13} + 210X_{14} + 195X_{15} + 180X_{16}$$

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \leq 200$$

$$X_5 + X_6 + X_7 + X_8 \leq 335$$

$$X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12} \leq 350$$

$$X_{13} + X_{14} + X_{15} + X_{16} \leq 270$$

$$X_1 + X_5 + X_9 + X_{13} = 195$$

$$X_2 + X_6 + X_{10} + X_{14} = 355$$

$$X_3 + X_7 + X_{11} + X_{15} = 295$$

$$X_4 + X_8 + X_{12} + X_{16} = 310$$

- Selon le solver, Min  $z = 211\,350\text{€}$  chez les hommes. Avec :

$$x_1 = 280, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0,$$

$$x_5 = 35, x_6 = 180, x_7 = 0, x_8 = 0,$$

$$x_9 = 0, x_{10} = 35, x_{11} = 315, x_{12} = 150,$$

$$x_{13} = 0, x_{14} = 0, x_{15} = 0, x_{16} = 230.$$

- Selon le solver, Min  $z = 207\,500\text{€}$  chez les femmes. Avec :

$$x_1 = 195, x_2 = 5, x_3 = 0, x_4 = 0,$$

$$x_5 = 0, x_6 = 335, x_7 = 0, x_8 = 0,$$

$$x_9 = 0, x_{10} = 15, x_{11} = 295, x_{12} = 40,$$

$$x_{13} = 0, x_{14} = 0, x_{15} = 0, x_{16} = 270.$$

**Le coût total pour le premier scénario est donc de  $211\,350 + 207\,500 = 418\,850\text{€}$**

2<sup>ème</sup> Scénario : on satisfait les commandes  
en réalisant une production exceptionnelle en Juillet

- Pour combler au déficit de production, on produit exceptionnellement les sacs manquants en juillet (avec un coût supplémentaire). Pour savoir combien de sac supplémentaires il faut produire, on réalise le calcul « nombre total de commandes – production maximale ». On obtient pour les 190 (1415 - 1225) pour les hommes et 280 (1435 – 1155) pour les femmes.
- On ajoute donc 190 unités à la production de Juillet chez les hommes (qui passe donc à 420) et 280 unités à la production de Juillet chez les femmes (qui passe donc à 550). On met également à jour les coûts de production en Juillet.

Hommes :

$$\text{Min } Z = 200X_1 + 210X_2 + 220X_3 + 230X_4 + 195X_5 + 180X_6 + 190X_7 + 200X_8 + 180X_9 + 165X_{10} + 150X_{11} + 160X_{12} + 250X_{13} + 235X_{14} + 220X_{15} + 205X_{16}$$

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 + X_3 + X_4 &\leq 280 \\ X_5 + X_6 + X_7 + X_8 &\leq 215 \\ X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12} &\leq 500 \\ X_{13} + X_{14} + X_{15} + X_{16} &\leq 420 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_1 + X_5 + X_9 + X_{13} &= 325 \\ X_2 + X_6 + X_{10} + X_{14} &= 265 \\ X_3 + X_7 + X_{11} + X_{15} &= 425 \\ X_4 + X_8 + X_{12} + X_{16} &= 400 \end{aligned}$$

Femmes :

$$\text{Min } Z = 210X_1 + 220X_2 + 230X_3 + 240X_4 + 200X_5 + 185X_6 + 195X_7 + 205X_8 + 185X_9 + 170X_{10} + 155X_{11} + 165X_{12} + 260X_{13} + 245X_{14} + 230X_{15} + 215X_{16} \text{ subject to}$$

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 + X_3 + X_4 &\leq 200 \\ X_5 + X_6 + X_7 + X_8 &\leq 335 \\ X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12} &\leq 350 \\ X_{13} + X_{14} + X_{15} + X_{16} &\leq 550 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_1 + X_5 + X_9 + X_{13} &= 215 \\ X_2 + X_6 + X_{10} + X_{14} &= 385 \\ X_3 + X_7 + X_{11} + X_{15} &= 495 \\ X_4 + X_8 + X_{12} + X_{16} &= 340 \end{aligned}$$

- Selon le solver, Min z = 258 200€ chez les hommes. Avec :  
 $x_1 = 280, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0,$   
 $x_5 = 45, x_6 = 170, x_7 = 0, x_8 = 0,$   
 $x_9 = 0, x_{10} = 75, x_{11} = 425, x_{12} = 0,$   
 $x_{13} = 0, x_{14} = 20, x_{15} = 0, x_{16} = 400.$

- Selon le solver, Min z = 280 825€ chez les femmes. Avec :  
 $x_1 = 200, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0,$   
 $x_5 = 15, x_6 = 320, x_7 = 0, x_8 = 0,$   
 $x_9 = 0, x_{10} = 0, x_{11} = 350, x_{12} = 0,$   
 $x_{13} = 0, x_{14} = 65, x_{15} = 145, x_{16} = 340.$

**Le coût total pour le deuxième scénario est donc de  $258\,200 + 280\,825 = 539\,025\text{€}$**

3<sup>ème</sup> Scénario : on satisfait les commandes en réalisant  
une production exceptionnelle avec montant minimal en Juillet  
et en envoyant l'excédent en Duty Free à Dubaï

- Pour combler au déficit de production, on produit une nouvelle fois exceptionnellement les sacs manquants en juillet (avec un coût supplémentaire différents du 2<sup>ème</sup> scénario). On sait qu'il manque 190 unités chez les hommes et 280 chez les femmes, on produira donc le minimum de 300 unités chez les hommes (avec 110 d'entre elles qui partiront en Duty Free) et 280 unités manquantes pour les femmes (rien ne partira en Duty Free en revanche).
- On ajoute donc 190 unités à la production de Juillet chez les hommes (qui passe donc à 420) et 280 unités à la production de Juillet chez les femmes (qui passe donc à 550). On met également à jour les coûts de production en Juillet. On ajoutera le coût de conditionnement des 110 unités d'excédent en Duty Free à la fin.

Hommes :

$$\text{Min } Z = 200X_1 + 210X_2 + 220X_3 + 230X_4 + 195X_5 + 180X_6 + 190X_7 + 200X_8 + 180X_9 + 165X_{10} + 150X_{11} + 160X_{12} + 235X_{13} + 220X_{14} + 205X_{15} + 190X_{16}$$

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \leq 280$$

$$X_5 + X_6 + X_7 + X_8 \leq 215$$

$$X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12} \leq 500$$

$$X_{13} + X_{14} + X_{15} + X_{16} \leq 420$$

$$X_1 + X_5 + X_9 + X_{13} = 325$$

$$X_2 + X_6 + X_{10} + X_{14} = 265$$

$$X_3 + X_7 + X_{11} + X_{15} = 425$$

$$X_4 + X_8 + X_{12} + X_{16} = 400$$

Femmes :

$$\text{Min } Z = 210X_1 + 220X_2 + 230X_3 + 240X_4 + 200X_5 + 185X_6 + 195X_7 + 205X_8 + 185X_9 + 170X_{10} + 155X_{11} + 165X_{12} + 245X_{13} + 230X_{14} + 215X_{15} + 200X_{16}$$

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \leq 200$$

$$X_5 + X_6 + X_7 + X_8 \leq 335$$

$$X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12} \leq 350$$

$$X_{13} + X_{14} + X_{15} + X_{16} \leq 550$$

$$X_1 + X_5 + X_9 + X_{13} = 215$$

$$X_2 + X_6 + X_{10} + X_{14} = 385$$

$$X_3 + X_7 + X_{11} + X_{15} = 495$$

$$X_4 + X_8 + X_{12} + X_{16} = 340$$

- Selon le solver, Min  $z = 251\,900\text{€}$  chez les hommes. Avec :

$$x_1 = 280, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0,$$

$$x_5 = 45, x_6 = 170, x_7 = 0, x_8 = 0,$$

$$x_9 = 0, x_{10} = 75, x_{11} = 425, x_{12} = 0,$$

$$x_{13} = 0, x_{14} = 20, x_{15} = 0, x_{16} = 400.$$

- Selon le solver, Min  $z = 272\,575\text{€}$  chez les femmes. Avec :

$$x_1 = 200, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0,$$

$$x_5 = 15, x_6 = 320, x_7 = 0, x_8 = 0,$$

$$x_9 = 0, x_{10} = 0, x_{11} = 350, x_{12} = 0,$$

$$x_{13} = 0, x_{14} = 65, x_{15} = 145, x_{16} = 340.$$

- On ajoute le coût du Duty Free :  $110 \times (190 + 20) = 23\,100\text{€}$

**Le coût total pour le troisième scénario est donc de  $251\,900 + 272\,575 + 23\,100 = 547\,575\text{€}$**

### III) Bilan

La minimisation d'un coût de production est un besoin primordial pour toute entreprise cherchant la rentabilité. La méthode du simplex permet d'apporter des réponses rapides et efficaces à ce genre problèmes : sérialiser un problème concret sous forme mathématique au travers d'un programme linéaire est la clé permettant d'optimiser une marge ou de minimiser un coût.

Au travers de ce TP, nous nous sommes familiarisés avec l'utilisation d'un solveur en ligne et avons également améliorés nos capacités d'analyse dans la traduction d'un énoncé en fonctions et contraintes.