**U.F.R SCIENCES ET TECHNIQUES**
*Département d'Informatique*
B.P. 1155
64013 PAU CEDEX
Téléphone secrétariat : 05.59.40.79.64
Télécopie : 05.59.40.76.54

# IV- PROGRAMMATION LINEAIRE

# I-Introduction

## **Commencer par un exemple simple**:

**Situation:**

Un cadre financier doit effectuer **5** voyages entre Francford (FRF) et Paris (PAR) :

- en partant le lundi de FRF
- et revenant le mercredi de PAR à FRF.

**Contexte**:

-Billet aller-retour : 400€.
-Réduction de 20 % si un weekend est inclus.

-Aller simple : 75 % du prix aller-retour.

**Problème**

Comment acheter les billets pour les 5 semaines à prix **optimal**?

# Problème d'aide à la décision

Quelles sont les **restrictions** à cette décision?

Quelles sont les **alternatives** possibles?

Quel est l'**objectif** utilisé pour évaluer les alternatives?

**Restrictions**

FRF-PAR le lundi

et

PAR-FRF le mercredi de la même semaine.

## Evaluation des alternatives

1-Acheter 5 FRF-PAR-FRF normaux.

5 x €400 = €2000

2-Acheter un FRF-PAR, 4 PAR-FRF-PAR comprenant un weekend et un PAR-FRF :

0.75   €400 + 4 x 0.8 x €400 + 0.75 x €400 = €1880

3-Acheter :

-un FRF-PAR-FRF valable :

- le lundi de la première semaine: FRF-PAR

-et le mercredi de la dernière semaine: PAR-FRF,

-et 4 PAR-FRF-PAR comprenant un weekend pour les autres voyages:

5 x 0.8 x €400 = €1600

Réponse : La troisième alternative est la meilleure.

# Modèle de recherche opérationnelle

Ingrédients principaux du modèle:

-**Alternatives** (variables, inconnues du problème).
-**Restrictions** (contraintes).
-**Fonction objectif** à optimiser (minimiser ou maximiser).

Définition 1 :

Une **solution admissible** est un ensemble de valeurs données aux variables qui satisfait toutes les **contraintes**.

Définition 2 :

Une **solution optimale** est une solution admissible qui **optimise** la fonction objectif.

Exemple :

Supposons que l'on veut plier un fil de fer de longueur *L* en rectangle de manière à maximiser la surface du rectangle.

Formulation :

$$\max A = lw$$

s.c.

$$l + w = \frac{L}{2}$$

Résolution :

$$A = \left(\frac{L}{2} - w\right) w = \frac{Lw}{2} - w^2$$

$$\frac{dA}{dw} = \frac{L}{2} - 2w = 0$$

<u>Solution optimale</u>:

$$w = l = \frac{L}{4}$$

Méthodes de résolution :

-dans l'exemple, on a proposé une **solution analytique** au problème.

-la plupart des problèmes pratiques sont trop grands ou trop complexes pour être **résolus analytiquement.**

# II- Présentation

**<u>Définition</u>**:

La **Programmation linéaire** est un modèle mathématique dans lequel :

- la **fonction objectif**

-et les **contraintes**

sont **linéaires** en les variables.

La **programmation linéaire** est un outil très puissant de la recherche opérationnelle.

C'est un outil **générique** qui peut résoudre un grand nombre de problèmes.

Il trouve son application en optimisation de l’usage de **ressources limitées** dans les domaines financiers, industriels, économiques,...

Une fois un problème modélisé sous la forme d'équations linéaires, des **méthodes** assurent la résolution du problème de manière exacte.

On distingue la programmation linéaire:

-en **nombres réels**, pour laquelle les variables des équations sont dans $\mathbb{R}^+$

-en **nombres entiers**, pour laquelle les variables sont dans $\mathbb{N}$.

Il est possible d'avoir les deux en même temps.

La résolution d'un problème avec des variables entières est **plus complexe** qu'un problème en nombres réels.

Une des méthodes les plus connues pour résoudre des programmes linéaires en **nombres réels** est la méthode du **simplexe**.

En théorie, elle a une complexité **non polynômiale** : elle est donc supposée **peu efficace**.

Cependant, **en pratique**, il s'avère au contraire qu'il s'agit d'une bonne méthode.

De nombreux logiciels intégrant cette méthode existent.

Voici, à titre d’exemple, deux 2 sites à visiter :

http://vinci.inesc.pt/lp/

http://www.zweigmedia.com/RealWorld/simplex.html

# 1-Programme linéaire

Un **programme linéaire** est un système constitué:

- d’une **fonction objectif**,

-et un système **d'équations** ou d'**inéquations** appelées **contraintes**

qui sont tous **linéaires**.

La **programmation linéaire** permet la résolution d'un **programme linéaire**.

Le qualificatif **linéaire** signifie que les **variables** :

- ne sont pas élevées au carré,
- ne servent pas d'exposant,
- ne sont pas multipliées entre elles...

Le processus de résolution consiste :

- partant des **contraintes**,
- à **optimiser** une fonction, également linéaire, appelée **fonction objectif**.

Exemples :

**Contraintes linéaires**:

$$5\,x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 8$$

$$x_1 + 3x_2 + 8x_3 \geq 25$$

$$9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \leq 17$$

**Contraintes non linéaires**:

$$5x_1^{\,2} + 2x_2 + 4x_3 = 8$$

$$x_1x_2 + 8x_3 \geq 25$$

**Objectifs**:

max: $z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3$ (signifie maximiser $z$)

min: $z = -3x_1 + x_3$ (signifie minimiser $z$)

## 2- Forme canonique

Pour résoudre un programme linéaire de manière **automatique**, il faut le présenter sous une forme **canonique**.

Dans ce qui suit, on a choisi la **forme canonique** suivante:

- un programme linéaire n'a que des contraintes d'**infériorité**
- on tente de **maximiser** la fonction objectif.
- toutes les variables sont **positives**.

# Exemple

Le programme linéaire suivant est sous forme canonique.

**max**: $z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3$

**sc**:

$$5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8$$

$$x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25$$

$$9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \leq 17$$

$$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$$

## 3-Transformations

Tout programme linéaire quelconque peut être ramené à une **forme canonique**.

Voici les de transformations visant les cas suivants :

- cas de variable **négative**,
- cas de variable sans **contrainte de signe**,
- cas de contrainte de **supériorité**,
- cas de contrainte d'**égalité**.

# Cas de variable négative

Si une variable **x** est négative, on la remplace par une variable positive **x'** = **-x**.

Par exemple:

max: $z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3$

sc:

$5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8$

$x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25$

$9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \leq 17$

$x_1 , x_2 \geq 0$ et $\mathbf{x_3 \leq 0}$

En posant:

$$x_3 = -\mathbf{x'_3}$$

On obtient:

max: $z = 3x_1 - 2x_2 - 8\mathbf{x'_3}$

sc:

$5x_1 - 2x_2 - 4\mathbf{x'_3} \leq 8$

$x_1 + 3x_2 - 8\mathbf{x'_3} \leq 25$

$9x_1 + 6x_2 + 3\mathbf{x'_3} \leq 17$

$x_1 , x_2 , \mathbf{x'_3} \geq 0$

# Cas de variable sans contrainte de signe

Si une variable $x$ n'a pas de contrainte de signe, on la remplace par deux variables positives $x'$ et $x''$ telles que $x = x' - x''$.

Par exemple:

$$\max: z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3$$

sc:

$$5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8$$

$$x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25$$

$$9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \leq 17$$

$$x_1 , x_2 \geq 0 \qquad x_3 \,?$$

En posant :

$$x_3 = x_3' - x_3''$$

On obtient :

$$\max: z = 3x_1 - 2x_2 + 8x'_3 - 8x''_3$$

sc:

$$5x_1 - 2x_2 + 4x'_3 - 4x''_3 \leq 8$$

$$x_1 + 3x_2 + 8x'_3 - 8x''_3 \leq 25$$

$$9x_1 + 6x_2 - 3x'_3 + 3x''_3 \leq 17$$

$$x_1 , x_2 , x'_3 , x''_3 , \geq 0$$

# Cas de contrainte de supériorité

Si le programme linéaire introduit une contrainte de **supériorité**, on la remplace par une contrainte d'**infériorité** en inversant le signe des constantes.

Par exemple:

max: $z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3$

sous:

$$5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8$$
$$x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25$$
$$9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \geq 17$$

$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$

On obtient :

$\max: z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3$

sc:

$5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8$

$x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25$

$-9x_1 - 6x_2 + 3x_3 \leq -17$

$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$

# Cas de contrainte d’égalité

Si le programme linéaire a une contrainte d'égalité, on la remplace par deux contraintes équivalentes :

- l'une d'**infériorité**,
- l'autre de **supériorité**.

Les variables du programme doivent satisfaire ces deux contraintes, ce qui revient alors à l'égalité de départ.

# Exemple

1-Forme originale

$$\max:\ z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3$$

sc:

$$5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8$$

$$x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25$$

$$9x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 17$$

$$x_1 ,\ x_2 ,\ x_3 \geq 0$$

## 2-Forme intermédiaire

$\max: z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3$

sc:

$5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8$

$x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25$

$9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \leq 17$

$9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \geq 17$

$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$

## 3-Forme canonique

$\max: z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3$

sc:

$5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8$

$x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25$

$9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \leq 17$

$-9x_1 - 6x_2 + 3x_3 \leq -17$

$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$

# 4-Application

Une cellule robotisée assemble 2 types de tablettes X et Y.

Pour sa conception, chaque tablette finie nécessite 3 lots de composants A, B et C.

Pour assembler la tablette X, on a besoin de :

- 2 lots de composants A,
- 2 lots de composants B
- 1 lot de composant C.

De même, pour assembler la tablette Y, on a besoin de :

- 3 lots de composants A,
- 1 lot de composants B,
- 3 lots de composants C.

En outre, la cellule dispose d'une quantité limités (exprimée en dizaines d’unités) de lots de composants A, B et C, à savoir:

-180 pour les lots de composants A,

-120 pour les lots de composants B,

-150 pour les lots de composants C.

La marge tirée du montage d’une tablette X est 3 €. Celle de Y est de 4 €.

Question:

Combien de tablettes X et Y faut-il assembler par la cellule pour **maximiser** son rendement (profit)?

On formule le problème en utilisant un modèle de programme linéaire.

Soit **x** et **y** respectivement les quantités de tablettes X et Y fabriquées.

La quantité totale de lots de composants A utilisée est:

$$2x + 3y.$$

Cette quantité est bornée par 180, d'où:

$$2x + 3y \leq 180$$

De même, pour les lots de composants B et C, on obtient:

$$2x + y \leq 120$$
$$x + 3y \leq 150$$

Bien entendu, les quantités x et y sont positives:

$$x\ ,\ y \geq 0$$

L'objectif est de **maximiser** le profit global, noté $z$, qui est le total des marges sur les tablettes X et Y sortant de la chaîne de montage.

Comme, le profit unitaire sur X est 3 € et celui sur Y est de 4€, l'objectif est:

$$\text{Max } z = 3x + 4y$$

Le programme linéaire est donc le suivant :

$$\text{Max: } z = 3x + 4y$$

sc:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &\leq 180 && \text{(A)} \\ 2x + y &\leq 120 && \text{(B)} \\ x + 3y &\leq 150 && \text{(C)} \\ x\,,\, y &\geq 0 \end{aligned}$$

maximize $z = 3x + 4y$ subject to

$2x + 3y \le 180$

$2x + y \le 120$

$x + 3y \le 150$

# III- Resolution graphique

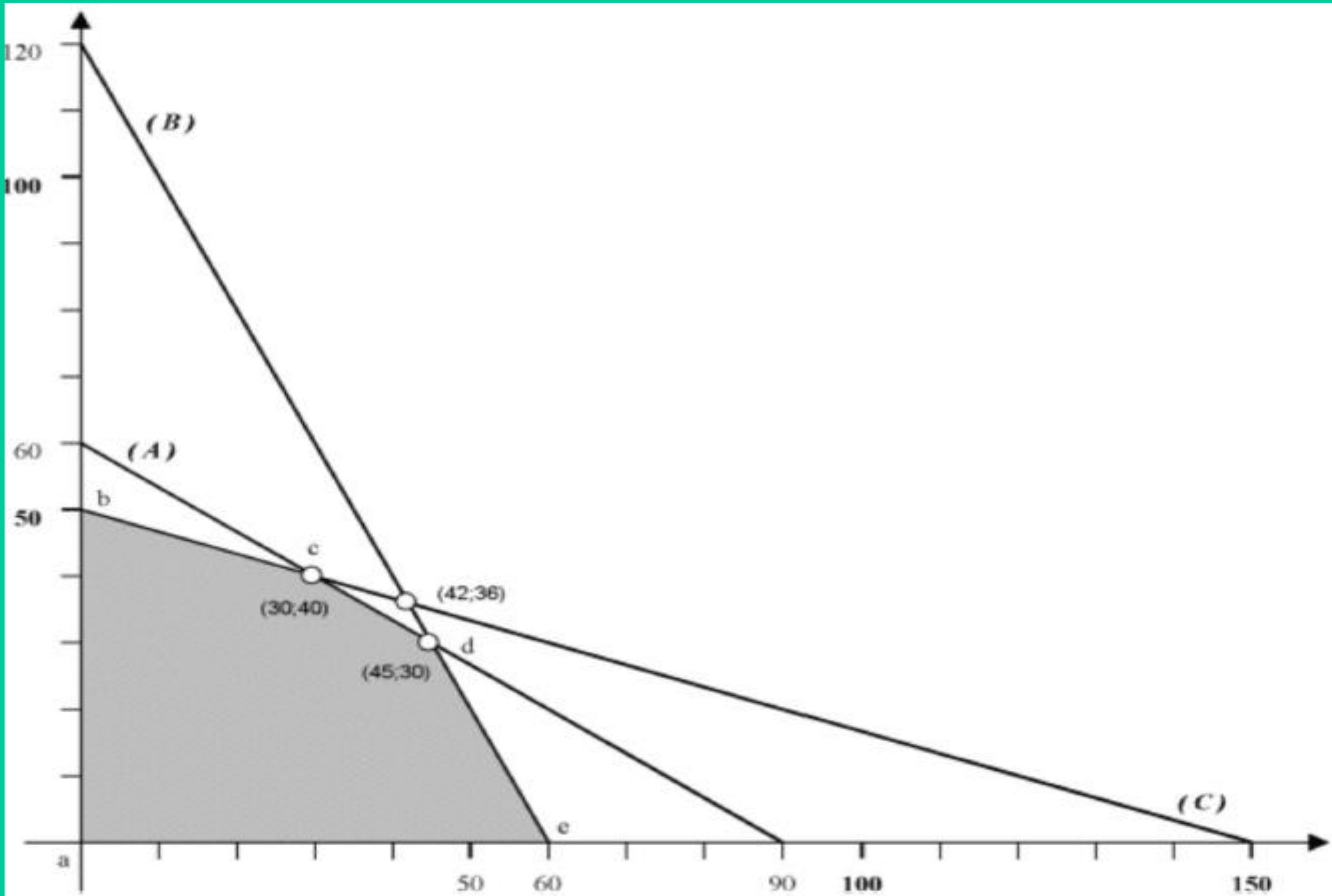
On peut représenter le problème dans un espace à **deux dimensions**.

On trace les trois droites relatives aux contraintes:

$2x + 3y = 180$ droite (A)

$2x + y = 120$ droite (B)

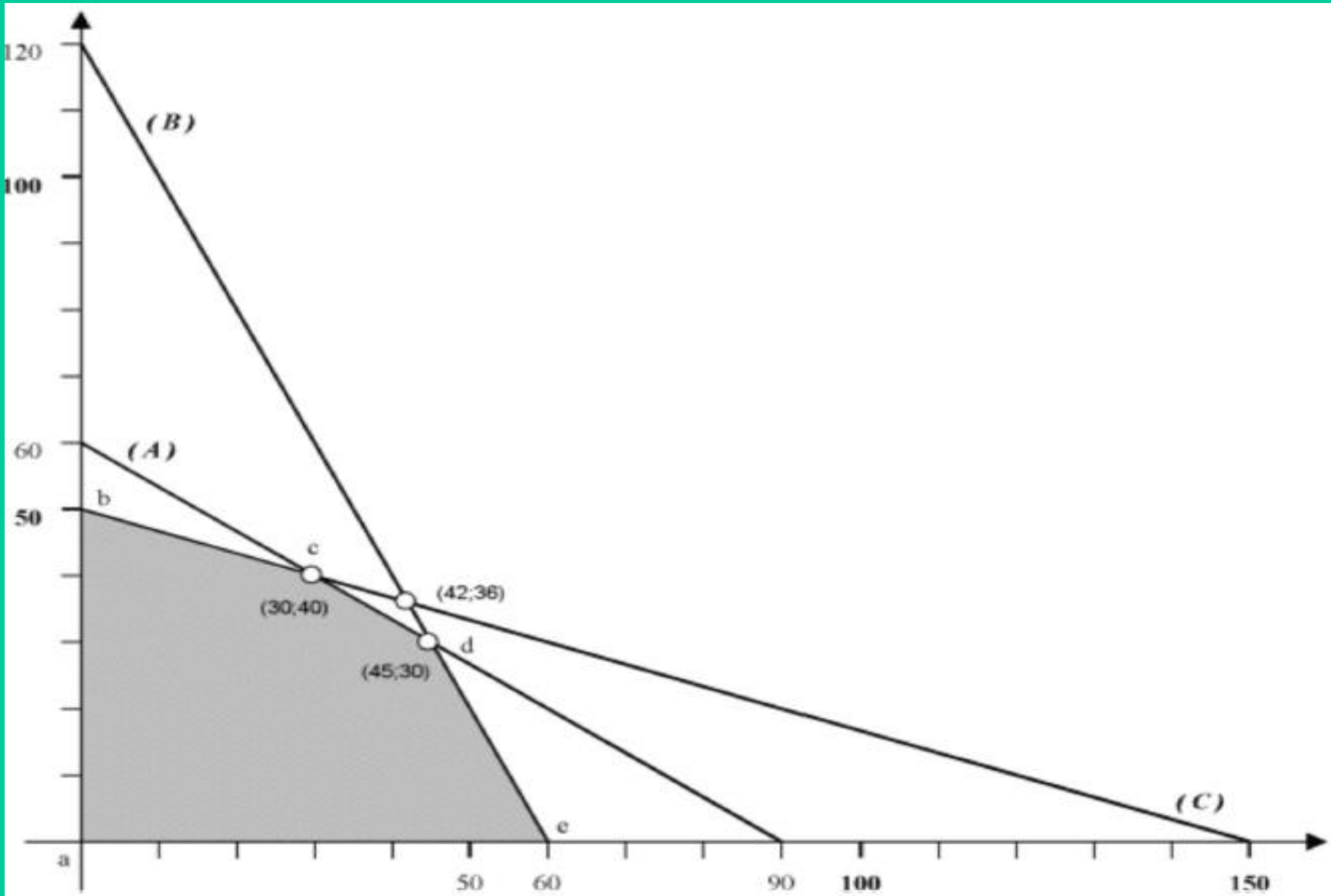
$x + 3y = 150$ droite (C)


120
(B)
100
60
(A)
b
50
c
(30;40)
(42;36)
d
(45;30)
(C)
e
a
50
60
90
100
150

Les solutions **admissibles** qui satisfont les contraintes :

$$\begin{array}{ll} 2x + 3y \leq 180 & (A) \\ 2x + y \leq 120 & (B) \\ x + 3y \leq 150 & (C) \\ x , y \geq 0 & \end{array}$$

sont représentées par la **zone grise** (a,b,c,d,e).



120
100
60
50
(B)
(A)
(C)
b
c
d
e
a
(30;40)
(42;36)
(45;30)
50
60
90
100
150

Considérons la fonction $z = 3x + 4y$.

Pour $z = 120$, on a une droite D1:

$$3x + 4y = 120$$

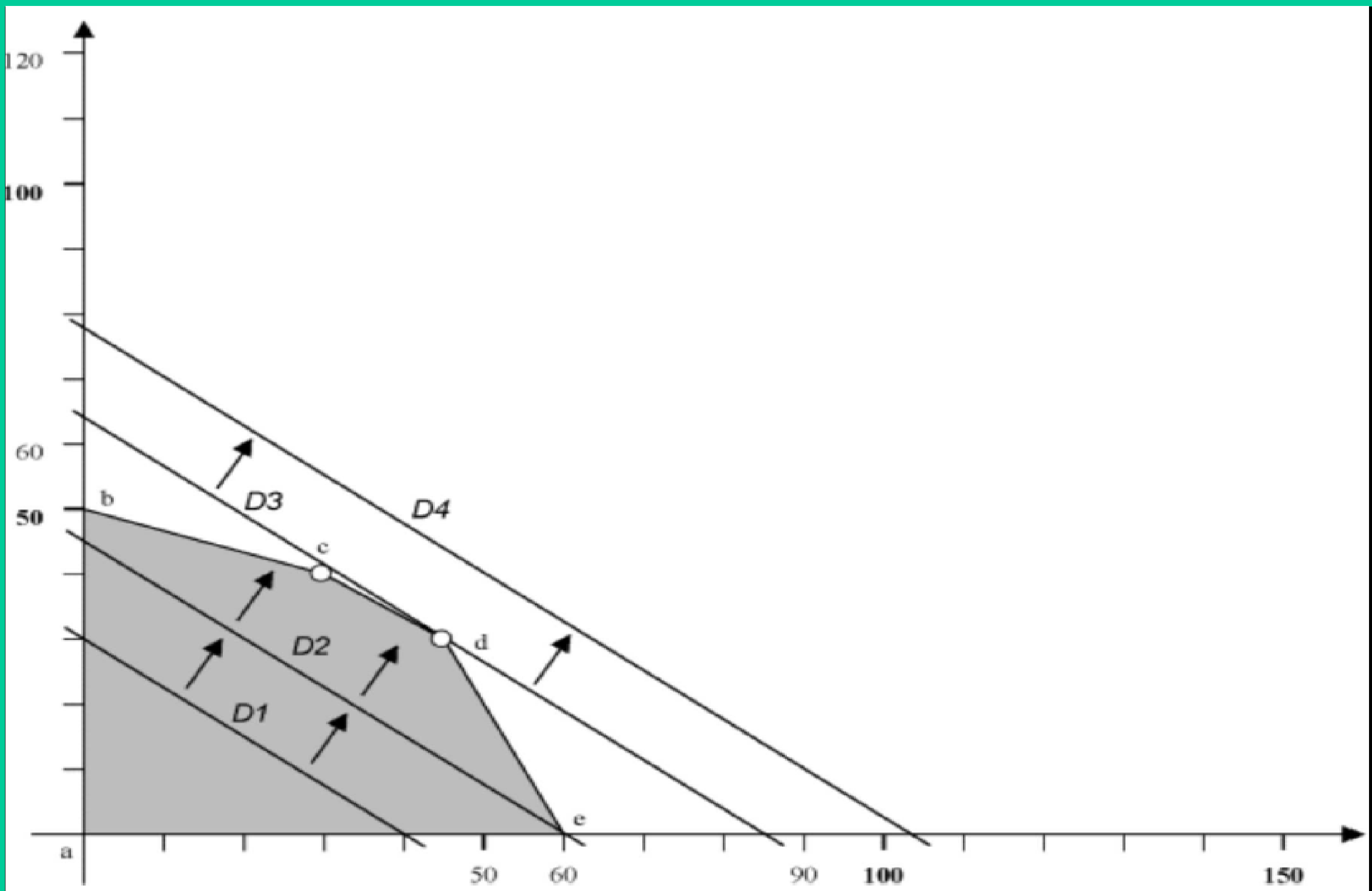
qui représente les solutions pour lesquelles le profit vaut 120.

Pour $z = 180$, on a une autre droite D2 :

$$3x + 4y = 180$$

qui représente les solutions pour lesquelles le profit vaut 180.

On remarque que D2 est parallèle à D1 et on s'aperçoit facilement qu'en déplaçant la droite **vers le haut** on **augmente** le profit z.

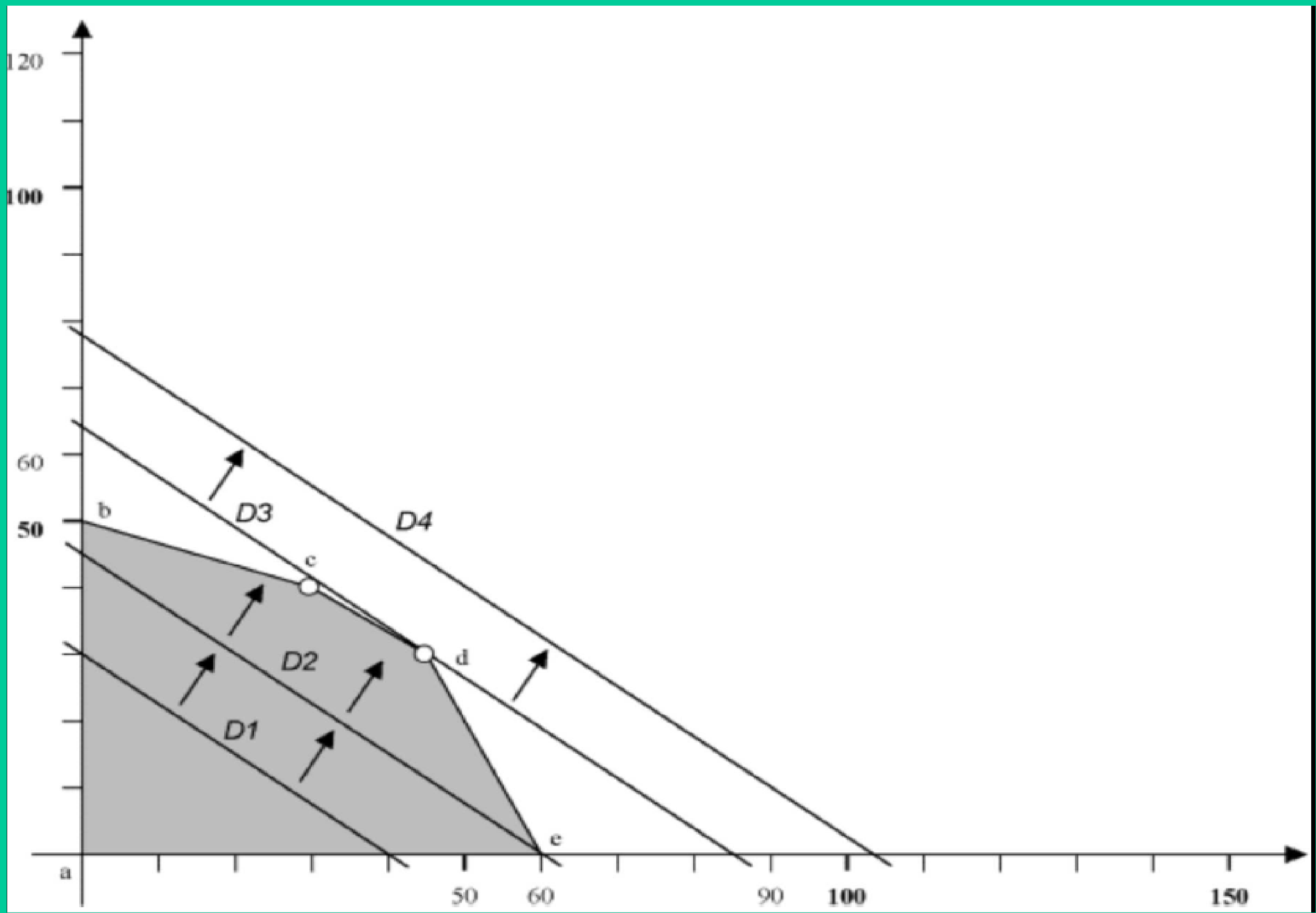


Donc pour résoudre graphiquement le problème, on va faire "glisser" la droite D2 vers le haut.

On s’arrête lorsqu’il reste un **minimum** de points communs avec la surface grisée.
C’est le cas de la droite D3

Le point restant ici est d. Il représente la solution pour laquelle le profit est **maximum**.

Si on tente un profit plus important: droite D4, on s'aperçoit que **toutes** les solutions sont **non admissibles**: hors de la zone grise.



Conclusion :

La solution du problème est de produire :

- 45 tablettes X
- 30 tablettes Y

pour obtenir le profit maximum de :

$$z = 3x + 4y = 255 \text{ k€}$$

# IV- Méthode du simplexe

## 1-Conversion en forme standard

Initialement, le programme linéaire est formulé dans une version **canonique** comme suit:

$$\begin{cases} \text{maximiser} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \text{ (fonction objectif)} \\ \text{avec les contraintes} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \text{ avec } i = 1, \ldots, m \\ \text{et les contraintes de positivité} & x_j \geq 0 \text{ avec } j = 1, \ldots, n \end{cases}$$

Par exemple, soit la forme canonique :

$$
\begin{cases}
\text{maximiser} & 3x_1 + x_2 + 2x_3 \\
\text{avec les contraintes} & x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 30 \\
& 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 24 \\
& 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 36 \\
\text{et} & x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{cases}
$$

L'algorithme du **simplexe** commence par convertir la forme canonique en **forme standard**.

## 2-Variables d’écart

Cela consiste à introduire des **variables d’écart** à la valeur de la **contrainte** pour toutes les **inéquations** de la forme canonique.

Chaque fois qu’on a l’**inéquation**:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$$

on introduira la **variable d'écart** $x_{n+i}$ qui transforme cette **contrainte** en **équation** de la forme :

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \text{ avec } x_{n+i} \geq 0$$

Ainsi, partant de la forme **canonique** précédente :

$$\begin{cases} \text{maximiser} & & & & & & 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 \\ \text{avec les contraintes} & x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & \leq & 30 \\ & 2x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & \leq & 24 \\ & 4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 36 \\ \text{et} & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{cases}$$

on obtient la version **standard** équivalente:

$$\begin{cases} z = & & 3x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_4 = & 30 & - x_1 - x_2 - 3x_3 \\ x_5 = & 24 & - 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 \\ x_6 = & 36 & - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \end{cases}$$

## 3-Variables de base et variables hors base

Les variables d'**écart**:

$X_4$, $X_5$ et $X_6$

seront appelées les **variables de base.**

Les autres variables, ici :

$X_1$, $X_2$ et $X_3$

seront appelées les **variables hors base**.

## 2- Principe du simplexe:

-**maximiser** la fonction objectif:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

- en tentant de **maximiser** chacune des variables **hors base** $\mathbf{x_j}$ ayant un **coefficient** $c_j$ **positif** .

# 3- Procédure:

La procédure se déroule en suivant 6 étapes :

**Etape 0** : «partir de la **solution de base initiale»**

**Etape 1**: « **augmenter** la fonction objectif »

**Etape 2**: « **transformer** le programme linéaire »

**Etape 3: «obtenir une nouvelle solution de base»**

**Etape 4** : «**test d'itération**»

**Etape 5** : «**terminer** et **obtenir la solution** »

## Remarque

-Observer **tous** les coefficients $c_j$ de la fonction objectif :

$$\sum_{j=1}^{n} c_j X_j$$

-Ne démarrer la procédure que s'il existe au moins une **variable $X_i$** de la **fonction objectif** dont le coefficient $c_i$ est positif :

# Etape 0: partir de la solution de base initiale

Cette étape est exécutée une **seule fois,** au démarrage de la procédure.

La **solution de base** n'est **pas toujours** une solution **admissible**.

Ceci ne remet pas en question l'algorithme du simplexe.

1- mise à **0** des **variables hors base**:

$$X_i = 0 \qquad \text{pour } i=1,n$$

2- les **variables de base** sont donc égales aux **constantes** des équations linéaires:

$$X_{n+i} = b_i \quad \text{pour } i=1,n$$

3- la **fonction objectif** est nulle: **Z**=0

# Application de l'étape 0

Soit le programme linéaire sous sa forme **standard**:

$$\begin{cases} z = 3x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_4 = 30 - x_1 - x_2 - 3x_3 \\ x_5 = 24 - 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 \\ x_6 = 36 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \end{cases}$$

1-mise à **0** des **variables hors base** :

$$\mathbf{X_1} = 0 \;,\; \mathbf{X_2} = 0 \;,\; \mathbf{X_3} = 0$$

2-les **variables de base** sont donc égales aux **constantes** des équations linéaires:

$$\mathbf{X_4} = 30 \;,\; \mathbf{X_5} = 24 \;,\; \mathbf{X_6} = 36$$

3-la **fonction objectif** est nulle :

$$\mathbf{Z}=0$$

# Etape 1: «augmenter la fonction l'objectif»

1-choisir une **variable hors base** $X_i$ ayant un coefficient $C_i$ positif dans la fonction objectif et:

$$C_i = \text{Max } C_j \quad j=1,2,\ldots$$

2-Maximiser $X_i$ en cherchant l'équation, soit $k$, la **plus restrictive** pour $X_i$

On pourrait chercher:

$$b_k / a_{ki} = \mathrm{Min}\,(b_j / a_{ji})$$

3-Exprimer $X_i$ en fonction des autres variables dans cette équation **k**.

- $X_i$ devient alors une **variable de base**.

- la **variable de base** de cette équation **k**, soit $X_k$, devient alors une **variable hors base**.

# Application **de l'étape 1**

1- En observant la fonction objectif

$$z = 3x_1 + x_2 + 2x_3$$

on peut choisir d'augmenter la variable $X_1$ car :

$$C_1 = 3 = \mathrm{Max}(3, 1, 2)$$

Les autres variables **hors base** restent à zéro:

$$\mathbf{X_{2},} \mathbf{=} 0 \quad ; \quad \mathbf{X_3} = 0$$

2-Dans le système

$$\begin{cases} z = & 3x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_4 = 30 - x_1 - x_2 - 3x_3 \\ x_5 = 24 - 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 \\ x_6 = 36 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \end{cases}$$

l'équation (3)

$$x_6 = 36 - 4x_1 - x_2 - 2x_3$$

impose à $X_1$ la **contrainte la plus stricte**.

En effet,  on a :

$$X_4 = 30 - X_1 - X_2 - 3X_3$$
$$X_5/2 = 12 - X_1 - X_2 - 5/2\,X_3$$
$$X_6/4 = 9 - X_1 - X_2/2 - X_3$$

$$9 = \text{Min}(30,12,9)$$

Comme $X_6 \geq 0$, elle permet d'avoir avec:

$$X_1 \leq 9$$

la *contrainte la plus stricte*

3- Exprimer $X_1$ en fonction des autres variables dans l'équation (3):

$$X_1 = 9 - X_2/4 - X_3/2 - X_6/4$$

4 - Faire passer $X_1$ du côté des **variables de base** et $X_6$ du côté des **variables hors base**.

# Etape 2: « **transformer** le programme linéaire »

1- Remplacer $\mathbf{X_i}$ par l'expression trouvée au niveau de l'équation $k$.

2- Réécrire le reste du programme linéaire

# Application **de l'étape 2**

-Remplacer **$X_1$**

-Réécrire les équations et la fonction objectif :

$$\begin{cases} z = 27 + \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{2} - \frac{3x_6}{4} \\ x_1 = 9 - \frac{x_2}{4} - \frac{x_3}{2} - \frac{x_6}{4} \\ x_4 = 21 - \frac{3x_2}{4} - \frac{5x_3}{2} - \frac{x_6}{4} \\ x_5 = 6 - \frac{3x_2}{2} - 4x_3 + \frac{x_6}{2} \end{cases}$$

## **Etape 3:** «obtenir une solution de base»

1-Annuler les **variables hors base** actuelles

2-Calculer les **variables de base** et la fonction objectif.

# Application **de l'étape 3**

1- chercher la **solution de base** en **annulant** toutes les **variables hors base** actuelles $X_2$, $X_3$ et $X_6$ :

$$X_2 = 0 \quad , \quad X_3 = 0 \quad , \quad X_6 = 0$$

2- la **solution de base** est:

$$( x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (9, 0, 0, 21, 6, 0)$$

D’après l’équation:

$$z = 27 + \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{2} - \frac{3x_6}{4}$$

On déduit alors:

$$Z = 27$$

# Etape 4 : «test d'itération»

1-observer les coefficients $\mathbf{c_j}$ de la fonction objectif,

2-itérer à partir de l'**étape 1** jusqu'à ce qu'**aucune variable** $\mathbf{x_j}$ de la fonction objectif n'ait un coefficient positif :

$$\forall j \quad \bullet \quad c_j < 0$$

# Application de l'étape 4

1-En observant la fonction objectif :

$$z = 27 + \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{2} - \frac{3x_6}{4}$$

on constate qu'on peut augmenter les variables $X_2$ et $X_3$.

$C_2 = \frac{1}{4}$ et $C_3 = \frac{1}{2}$

**2-** On va donc itérer à partir de l'**étape 1**

# Etape 1: itération 2

-On choisit d'augmenter la variable $X_3$.

$$\begin{cases} z = 27 + \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{2} - \frac{3x_6}{4} \\ x_1 = 9 - \frac{x_2}{4} - \frac{x_3}{2} - \frac{x_6}{4} \\ x_4 = 21 - \frac{3x_2}{4} - \frac{5x_3}{2} - \frac{x_6}{4} \\ x_5 = 6 - \frac{3x_2}{2} - 4x_3 + \frac{x_6}{2} \end{cases}$$

Car :

$$C_3 = \tfrac{1}{2} = \mathrm{Max}\left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}\right)$$

-L’équation imposant la contrainte la plus stricte est:

$$x_5 = 6 - \frac{3x_2}{2} - 4x_3 + \frac{x_6}{2}$$

En effet, elle permet d’avoir :

$$x_3 = \frac{3}{2} - \frac{3x_2}{8} - \frac{x_5}{4} + \frac{x_6}{8}$$

Comme $X_5 \geq 0$ , on a avec:

$$X_3 \leq 3/2$$

la contrainte la plus stricte.

-exprimer $X_3$ dans l'équation de $X_5$:

$$X_3 = \frac{3}{2} - \frac{3X_2}{8} - \frac{X_5}{4} + \frac{X_6}{8}$$

- faire passer $X_3$ du côté des variables de base et $X_5$ du côté des variables hors base.

## Etape 2:itération 2

- Remplacer $x_3$ dans les autres équations.
- Réécrire le programme linéaire :

$$\begin{cases} z = \dfrac{111}{4} + \dfrac{x_2}{16} - \dfrac{x_5}{8} - \dfrac{11x_6}{16} \\ x_1 = \dfrac{33}{4} - \dfrac{x_2}{16} + \dfrac{x_5}{8} - \dfrac{5x_6}{16} \\ x_3 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3x_2}{8} - \dfrac{x_5}{4} + \dfrac{x_6}{8} \\ x_4 = \dfrac{69}{4} + \dfrac{3x_2}{16} + \dfrac{5x_5}{8} - \dfrac{x_6}{16} \end{cases}$$

# Etape 3: itération 2

- Annuler les variables hors base :

$$(x_2, x_5, x_6) = (0, 0, 0)$$

- On a alors :

$$Z = 111/4$$

Avec la **solution de base** :

$$(x1, x2, x3, x4, x5, x6) = (33/4, 0, 3/2, 69/4, 0, 0)$$

# Etape 4: test si itération n°3

En observant la fonction objectif :

$$z = \frac{111}{4} + \frac{x_2}{16} - \frac{x_5}{8} - \frac{11x_6}{16}$$

on peut encore augmenter la variable $X_2$.

Donc, faire une nouvelle **itération** à partir de l'étape 1.

# Etape 1: Itération n°3

1-Augmenter la variable $x_2$

2-Dans le système:

$$\begin{cases} z = \frac{111}{4} + \frac{x_2}{16} - \frac{x_5}{8} - \frac{11x_6}{16} \\ x_1 = \frac{33}{4} - \frac{x_2}{16} + \frac{x_5}{8} - \frac{5x_6}{16} \\ x_3 = \frac{3}{2} - \frac{3x_2}{8} - \frac{x_5}{4} + \frac{x_6}{8} \\ x_4 = \frac{69}{4} + \frac{3x_2}{16} + \frac{5x_5}{8} - \frac{x_6}{16} \end{cases}$$

l’équation imposant la **contrainte la plus stricte** est :

$$x_3 = \frac{3}{2} - \frac{3x_2}{8} - \frac{x_5}{4} + \frac{x_6}{8}$$

En effet, elle permet d’avoir:

$$x_2 = 4 - \frac{8x_3}{3} - \frac{2x_5}{3} + \frac{x_6}{3}$$

Comme **$X_3 \geq 0$** , on a la contrainte est la plus stricte avec :

$$\mathbf{X_2 \leq 4}$$

3- Exprimer $X_2$ en fonction de $X_3$, $X_5$ et $X_6$ :

$$X_2 = 4 - \frac{8X_3}{3} - \frac{2X_5}{3} + \frac{X_6}{3}$$

4-Faire passer **$X_2$** du côté des variables de base et **$X_3$** du côté des variables hors base.

# Etape 2: Itération n°3

- remplacer $X_2$ dans Z et réécrire le programme linéaire:

$$
\begin{cases}
z = 28 - \dfrac{x_3}{6} - \dfrac{x_5}{6} - \dfrac{2x_6}{3} \\
x_1 = 8 + \dfrac{x_3}{6} + \dfrac{x_5}{6} - \dfrac{x_6}{3} \\
x_2 = 4 - \dfrac{8x_3}{3} - \dfrac{2x_5}{3} + \dfrac{x_6}{3} \\
x_4 = 18 - \dfrac{x_3}{2} + \dfrac{x_5}{2}
\end{cases}
$$

# Etape 3: Itération n°3

1- Annuler les valeurs des **variables hors base** actuelles.

$$(x_3, x_5, x_6) = (0, 0, 0)$$

2-on a alors :

$$Z = 28$$

avec la **solution de base**:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (8, 4, 0, 18, 0, 0)$$

# Etape 4: test si itération n°4

On **arête** d'itérer car d'après la fonction objectif:

$$Z = 28 - \frac{x_3}{6} - \frac{x_5}{6} - \frac{2x_6}{3}$$

on ne peut plus augmenter Z.

Tous les coefficients des **variables hors base** des sont négatifs: aller à l'**étape 5**

# Etape5 : « terminer et obtenir la solution »

La solution du programme linéaire correspond alors à la **dernière solution de base** (étape 3).

Pour l'exemple d'application, la solution du problème initial est donc:

$$Z_{\mathbf{max}} = 28 \qquad \text{pour : } (X_1, X_2, X_3) = (8, 4, 0)$$

## Remarque:

Ici **$X_4$** = 18. D'après l'équation (1) du système:

$$\begin{cases} z = 3x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_4 = 30 - x_1 - x_2 - 3x_3 \\ x_5 = 24 - 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 \\ x_6 = 36 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \end{cases}$$

il existe un **écart** de 18 entre la fonction linéaire exprimant la contrainte:

$$X_1 + X_2 + 3x_3$$

et la borne sur cette contrainte : 30

Cette borne aurait donc pu être plus restrictive.

$$X_1 + X_2 + 3X_3 \leq 12$$

On le vérifie en remplaçant les valeurs de $x_1$, $x_2$ et $x_3$ dans la première inéquation du programme linéaire initial:

$$8 + 4 + 3 \times 0 \leq 12$$