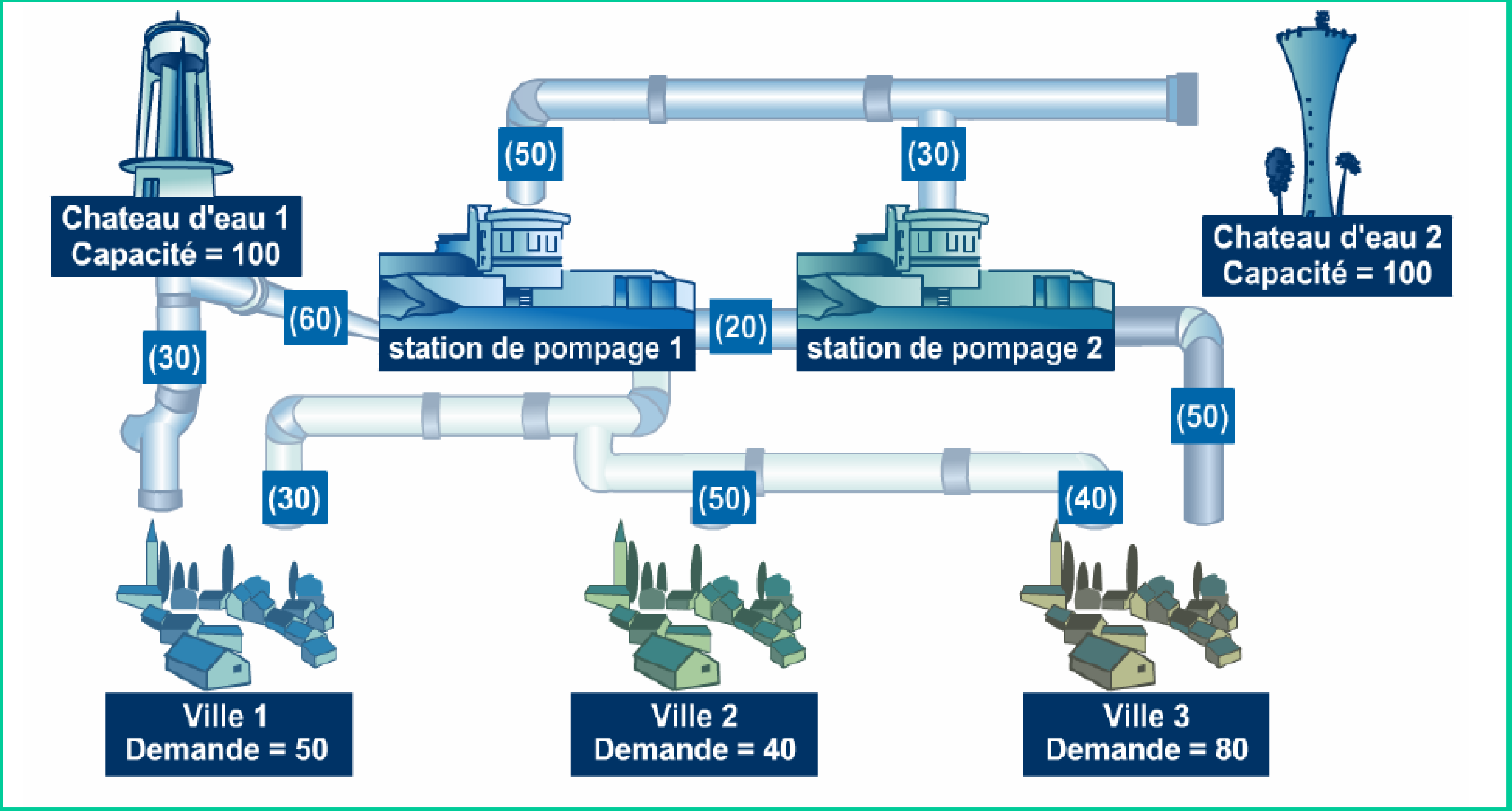
UNIVERSITÉ DE PAU ET DES PAYS DE L'ADOUR

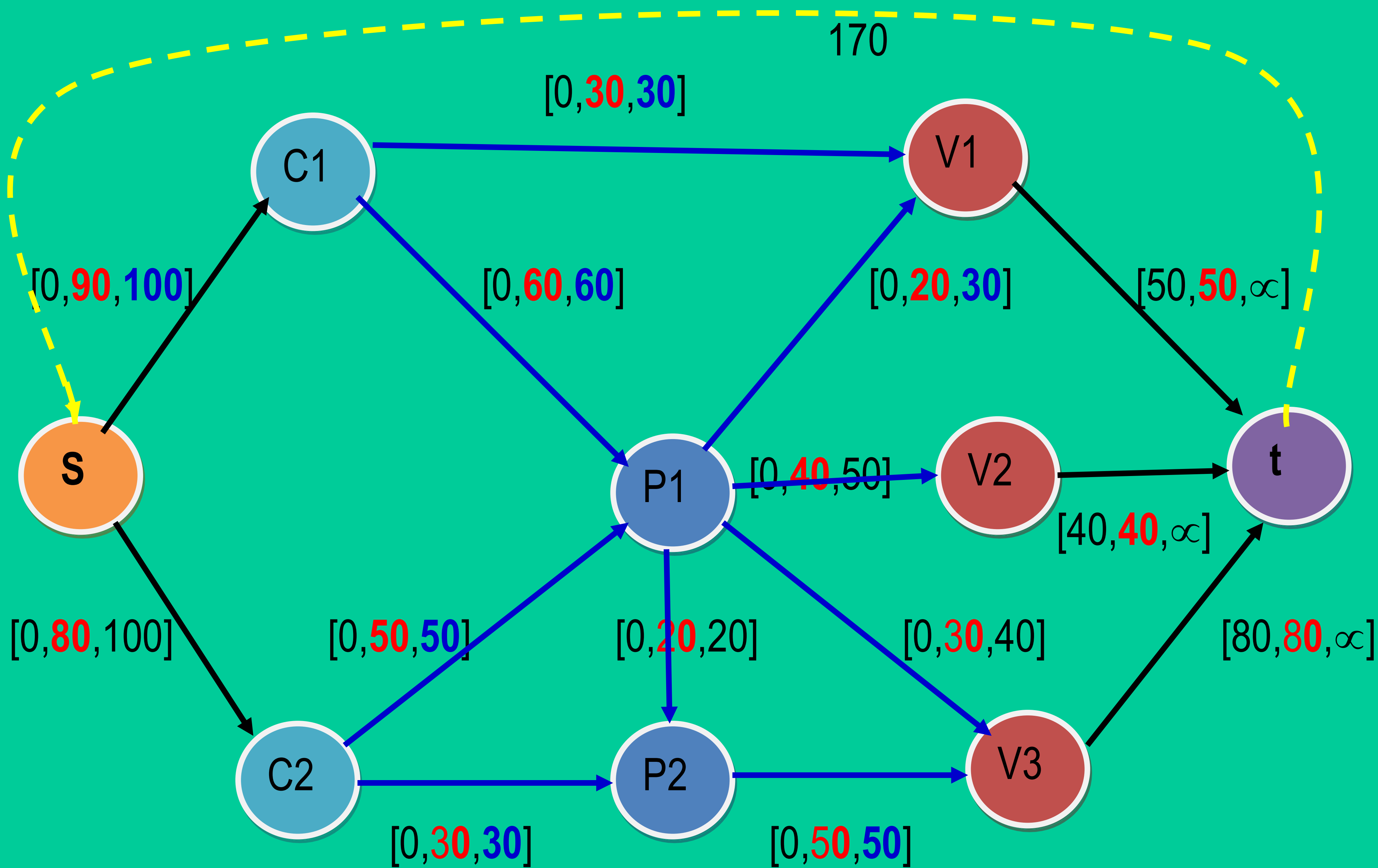
U.F.R SCIENCES ET TECHNIQUES
Département d'Informatique
B.P. 1155
64013 PAU CEDEX
Téléphone secrétariat : 05.59.40.79.64
Télécopie : 05.59.40.76.54

I- RESEAU DE FLOT

I- Notion de réseau de flot
II- Simplification du problème
III- Problème de flot optimal
IV-Techniques sur le réseau de flot

Exemple de problème de réseau de flot




170
[0,30,30]
C1
V1
[0,90,100]
[0,60,60]
[0,20,30]
[50,50,∝]
S
P1
[0,40,50]
V2
t
[40,40,∝]
[0,80,100]
[0,50,50]
[0,20,20]
[0,30,40]
[80,80,∝]
C2
P2
V3
[0,30,30]
[0,50,50]

I- Notion de réseau de flot

Un **réseau de flot ou réseau de transport** est un triplet :

(G, s, t)

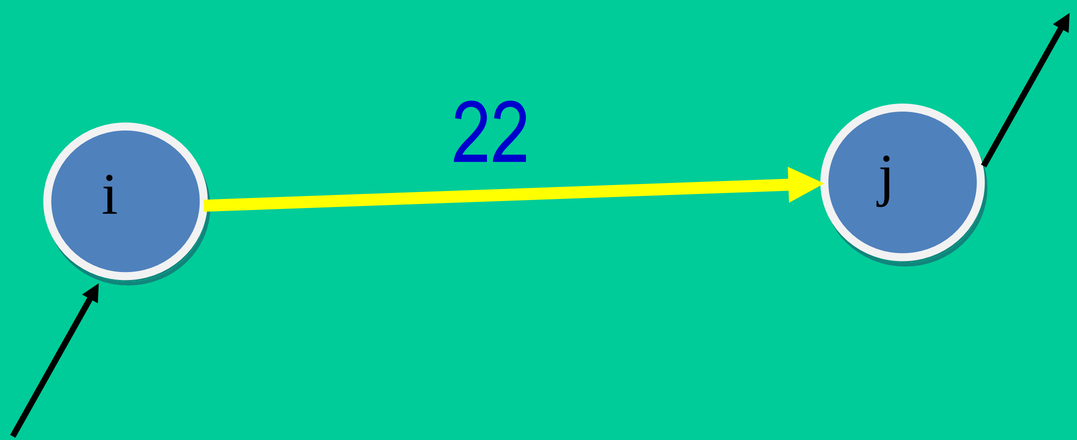
Où :

- G = (X, E) est un graphe orienté **valué** positivement,
- **s** $\in$ X est appelé **source** du réseau,
- **t** $\in$ X est appelé **puits** du réseau,
- **s** et **t** sont distincts.

On suppose, par ailleurs que:

- tout sommet **x** de G est accessible à partir de **s**,
- **t** est accessible à partir de tout sommet **x** de G.

La valeur associée à chaque arc est appelé **flux**.

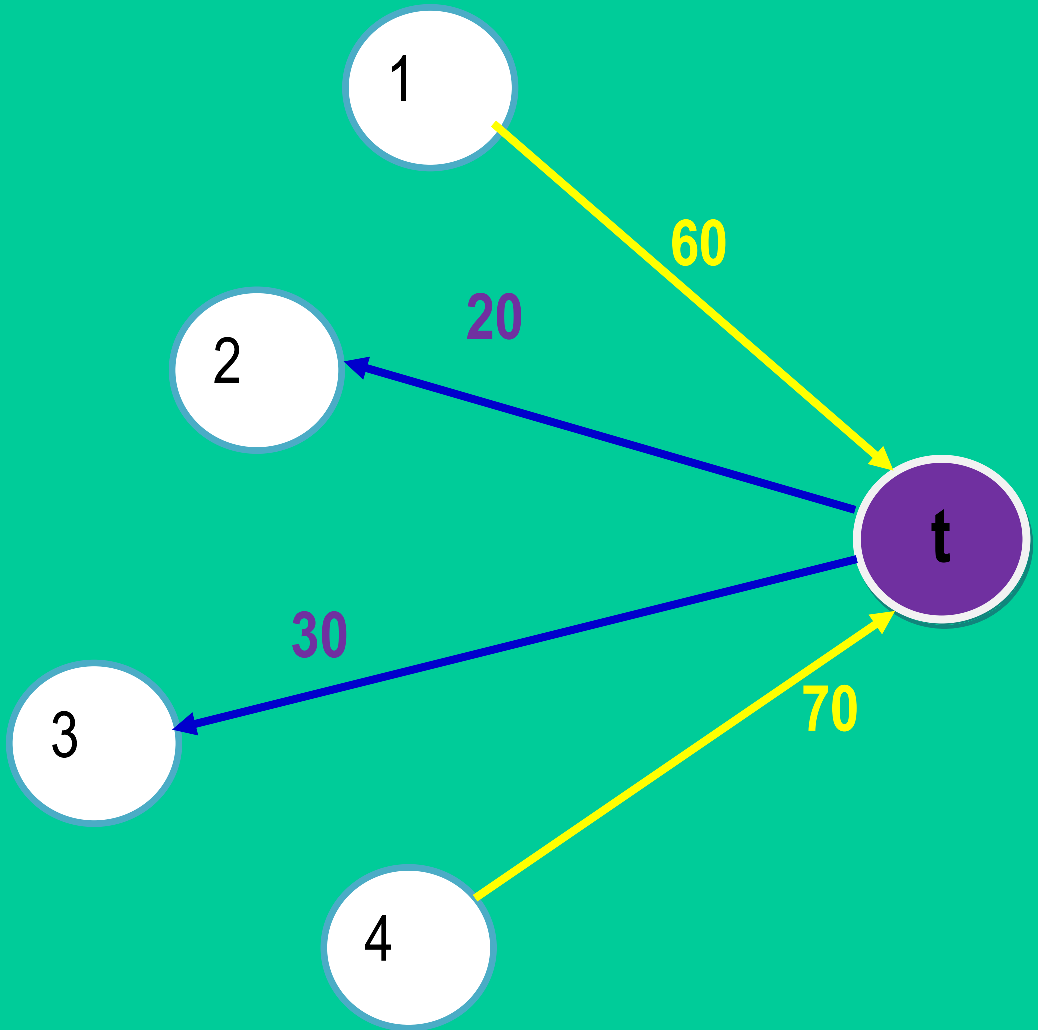


Valeur du flot d'un réseau

On appelle **valeur du flot** transitant par le réseau la somme algébrique, notée **v,** des flux portés par les arcs incidents au puits **t**.

Un flux **entrant** est compté **négativement**.

Un flux **sortant** est compté **positivement**.



$$v = -60 - 70 + 20 + 30 = -80$$

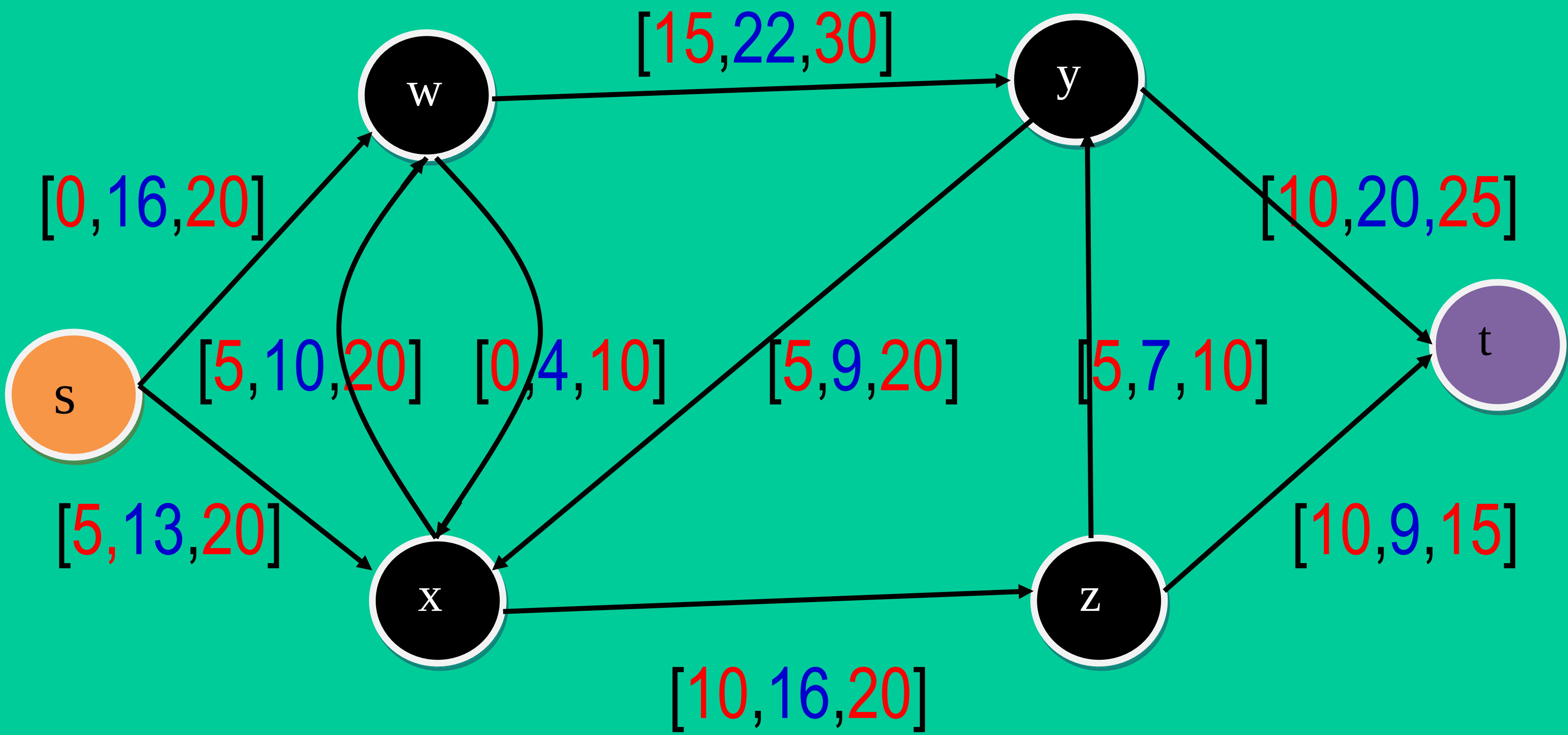
En quoi consiste le problème du réseau de flot?

Le problème consiste à chercher à faire transiter sur le graphe **G** un **flot** :

- depuis la source **s**
- jusqu'au puits **t**.

en respectant les **contraintes** du réseau

Exemple de réseau de flot



1- Propriétés d'un réseau de flot

Posons G= (X,A) un graphe orienté avec:

$|X| = \mathbf{n}$ et $|A| = \mathbf{m}$

1- Flux borné

Chaque arc $(i,j) \in G$ est doté de deux grandeurs:

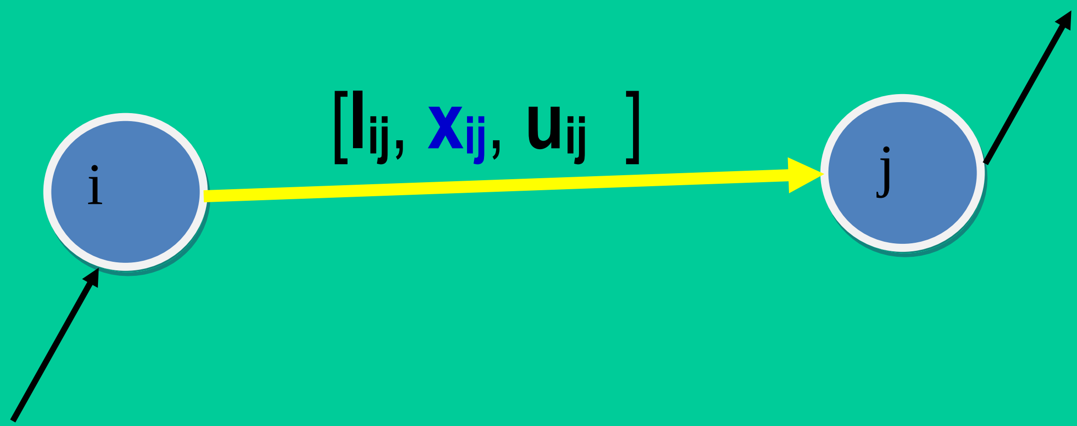
- sa **capacité minimale** notée $\mathbf{l_{ij}}$,
- sa **capacité maximale** notée $\mathbf{u_{ij}}$

Les capacités des arcs sont telles que :

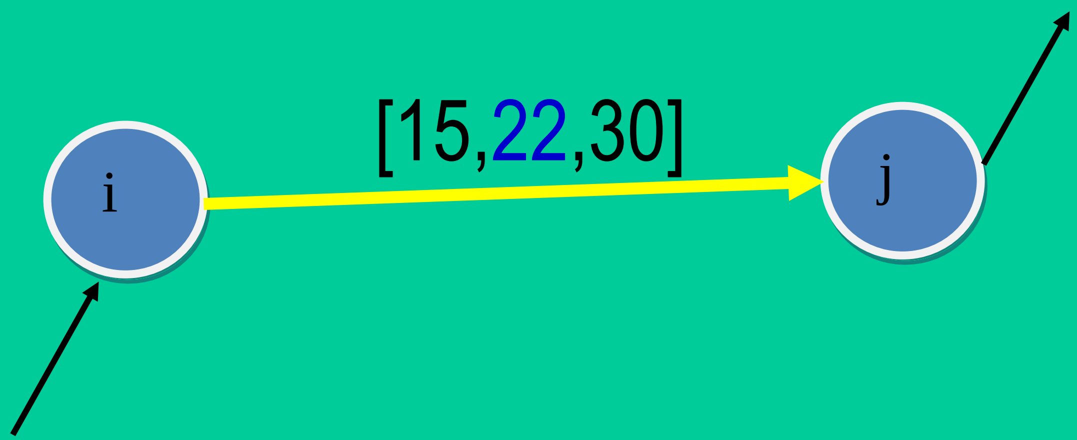
$$\forall (i, j) \in A \quad \bullet \quad 0 \leq \mathbf{l}_{ij} \leq \mathbf{u}_{ij}$$

Chaque arc (i,j) est caractérisé par un triplet $[\mathbf{l}_{ij}, \mathbf{x}_{ij}, \mathbf{u}_{ij}]$.

La composante $\mathbf{x}_{ij}$ désigne le **flux** porté par l'arc (i,j).



On note :



Pour le triplet:

$\mathbf{l}_{ij} = 15$

$\mathbf{u}_{ij} = 30$

$\mathbf{x}_{ij} = 22$

En chaque arc (i,j) le triplet [$\mathbf{l}_{i\,j}$, $\mathbf{x}_{ij}$, $\mathbf{u}_{i\,j}$] est tel que :

$$\mathbf{l}_{ij} \leq \mathbf{x}_{ij} \leq \mathbf{u}_{ij} \qquad (1)$$

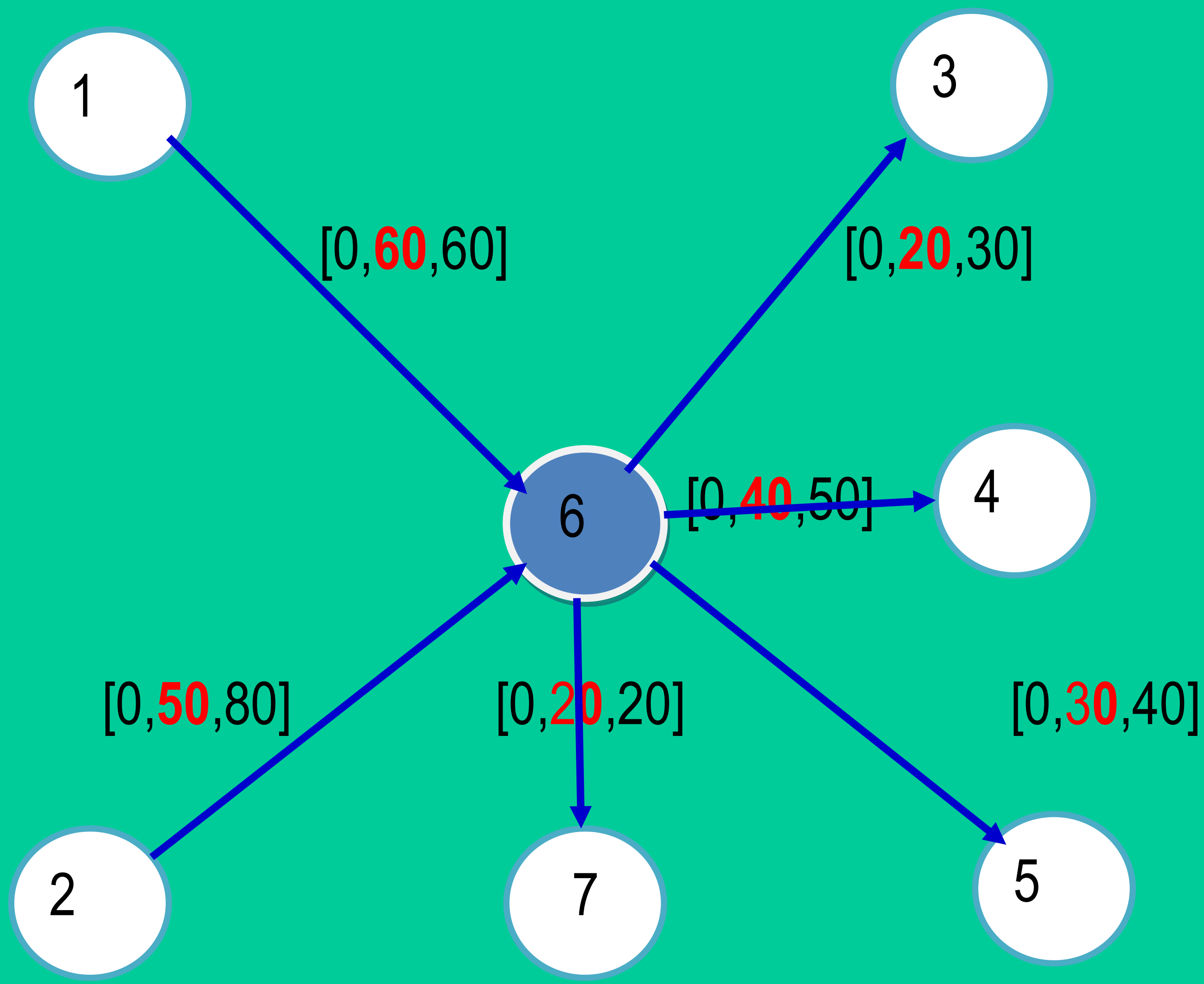
La double inéquation (1) spécifie que le **flux** **est borné** par les capacités des arcs.

On appelle **flot** sur le réseau G, le vecteur X défini tel que:

$$X = [x_{ij}] \in \mathbb{R}^{+m}$$

et indicé sur les arcs, tel que:

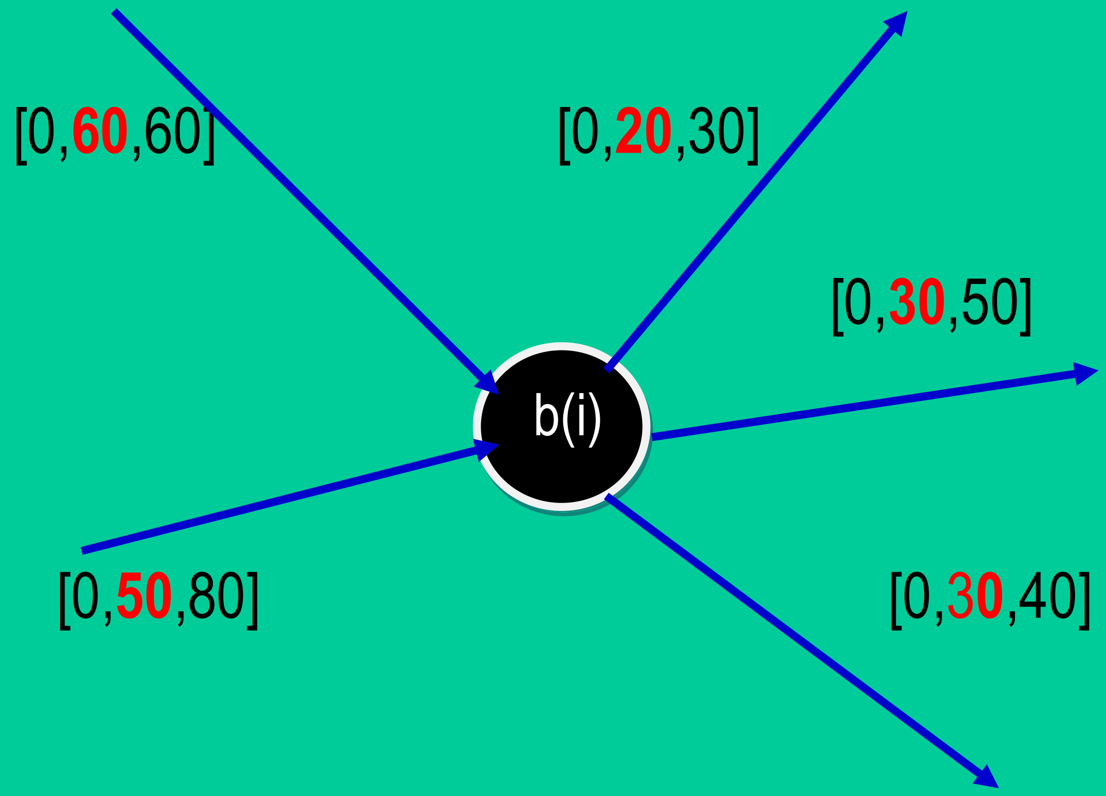
$$\mathbf{l_{ij}} \leq \mathbf{x_{ij}} \leq \mathbf{u_{ij}}$$



X= [60, 50,20,40,30,20]

2- Conservation du flot

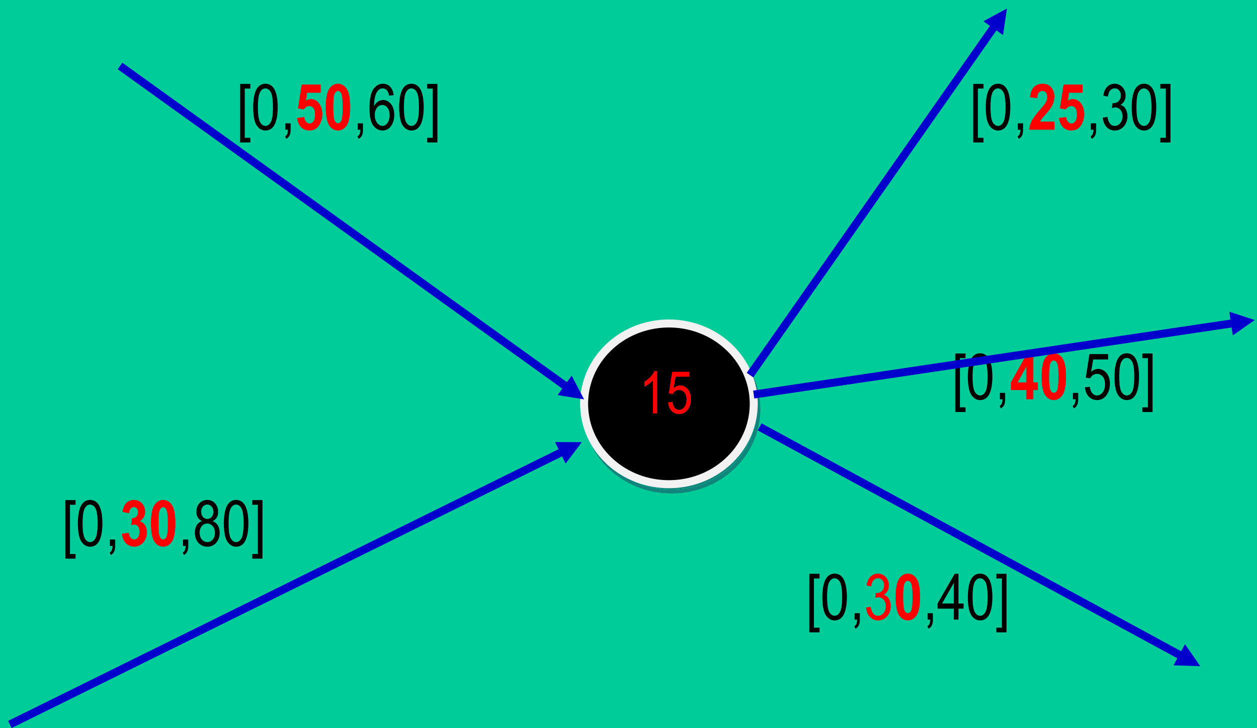
Chaque sommet **i** est doté d'une **contribution** au **flot** notée **b(i).**



b(i)= (20+30+30) –(60+50) = -30

On appelle **source** tout sommet **i créant du flot**, c'est à dire, tel que :

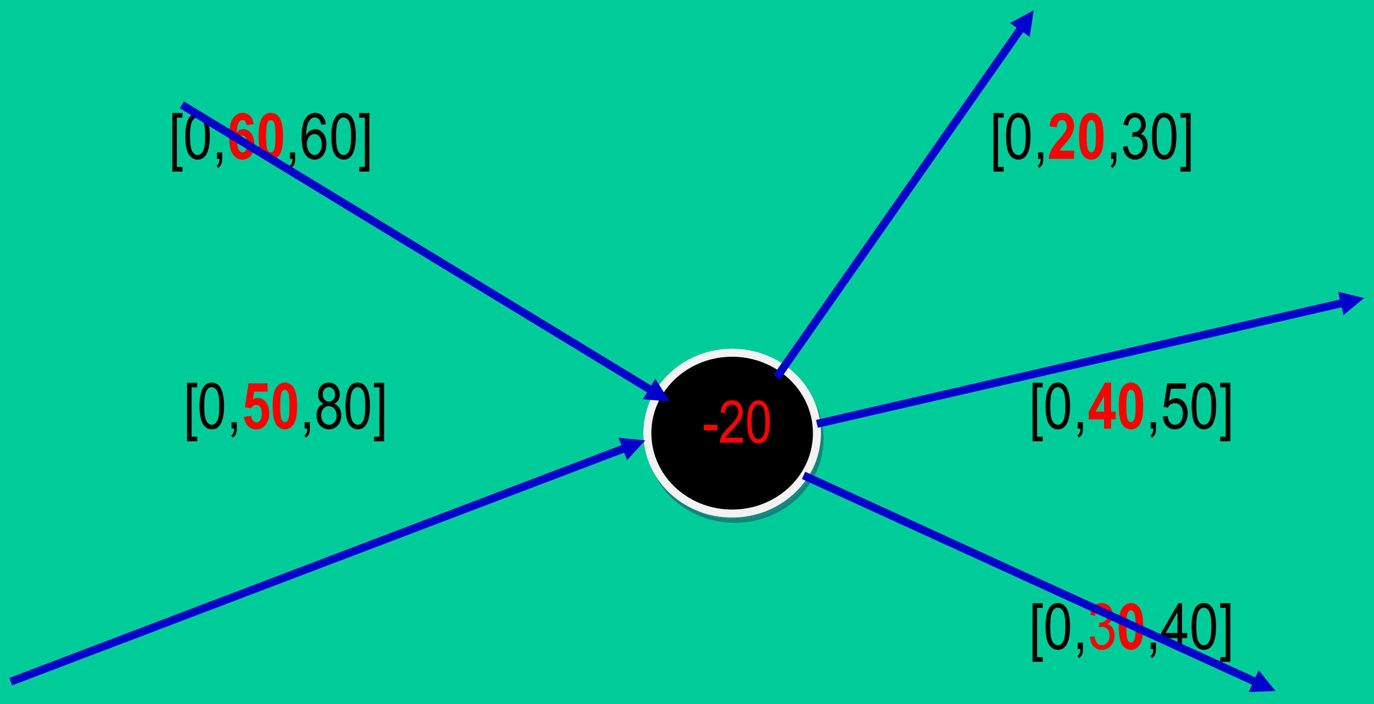
$$b(\mathbf{i}) > 0$$



$$b(i) = (25+40+30) - (50+30) = 15$$

On appelle **puits** tout sommet **i** où du **flot est consommé**:

$b(\mathbf{i}) < 0$



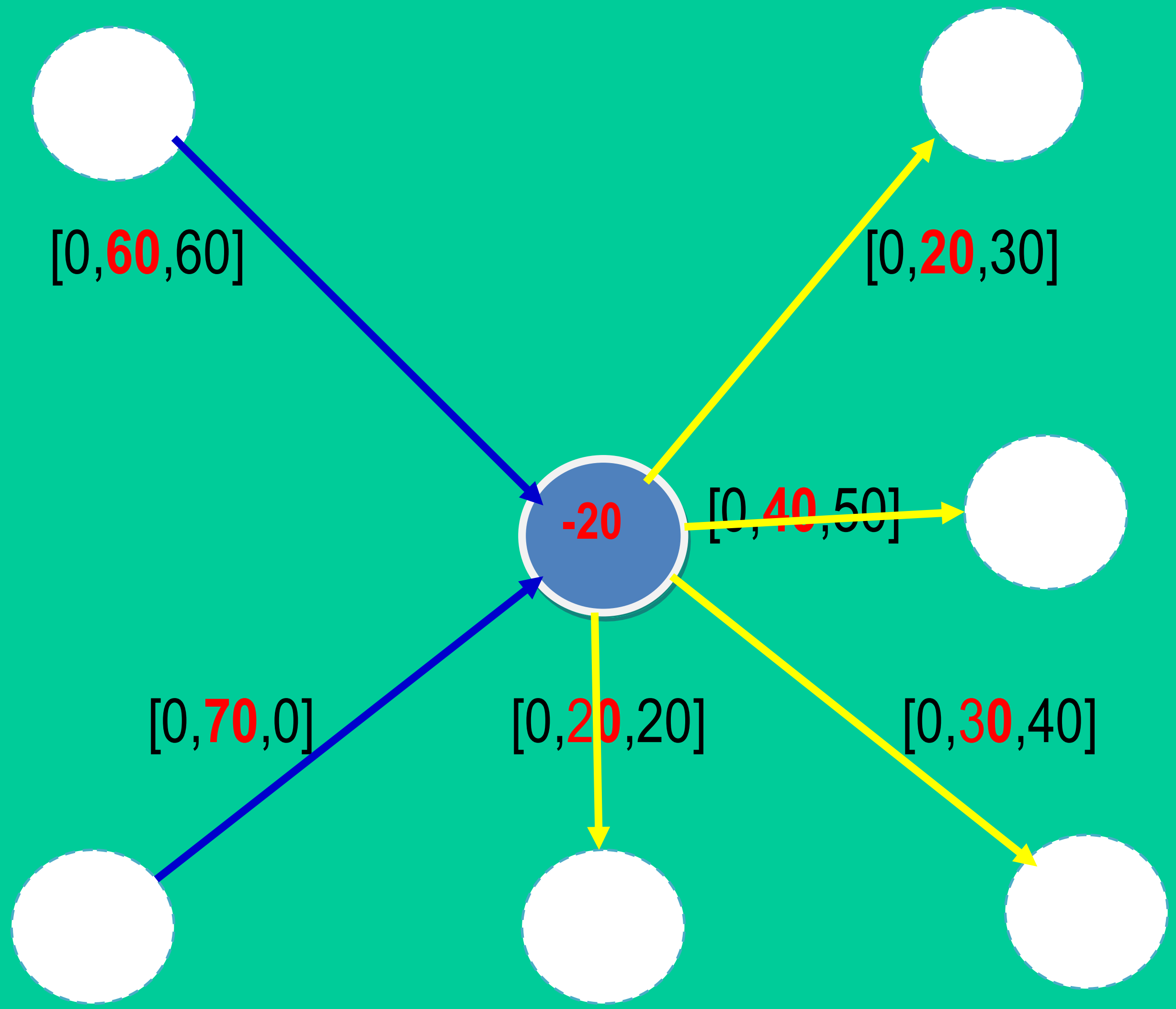
b(i)= (20+40+30) –(60+50) = -20

En chaque sommet du réseau, on impose la contrainte suivante :

$$\sum_{k:(j,k)\in G} x_{jk} - \sum_{i:(i,j)\in G} x_{ij} = b(j) \quad \forall j \in X \qquad (2)$$

L'équation (2) traduit la loi de **conservation** du flot en chaque sommet du réseau.

Contrainte illustrée par le schéma suivant :

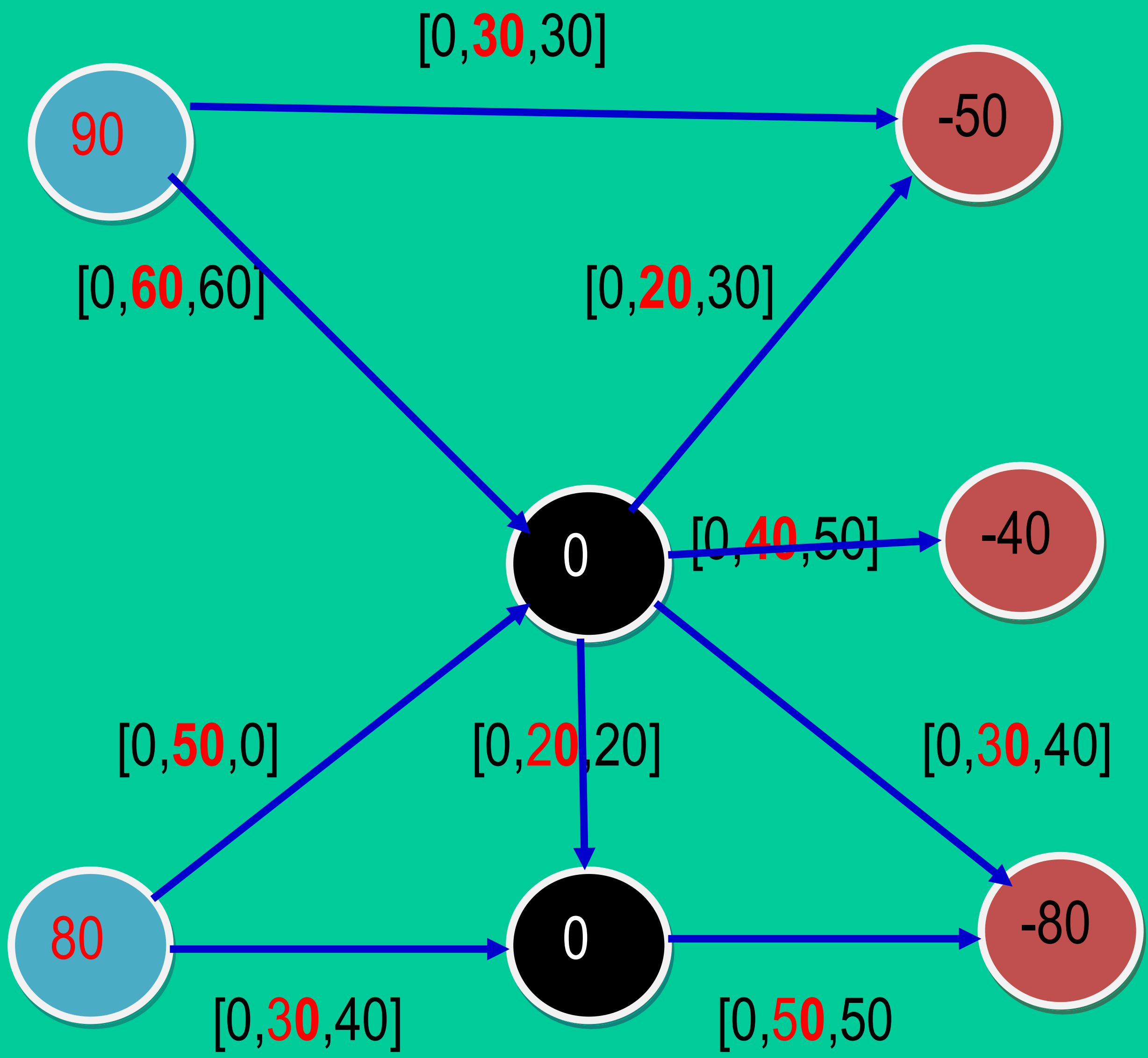


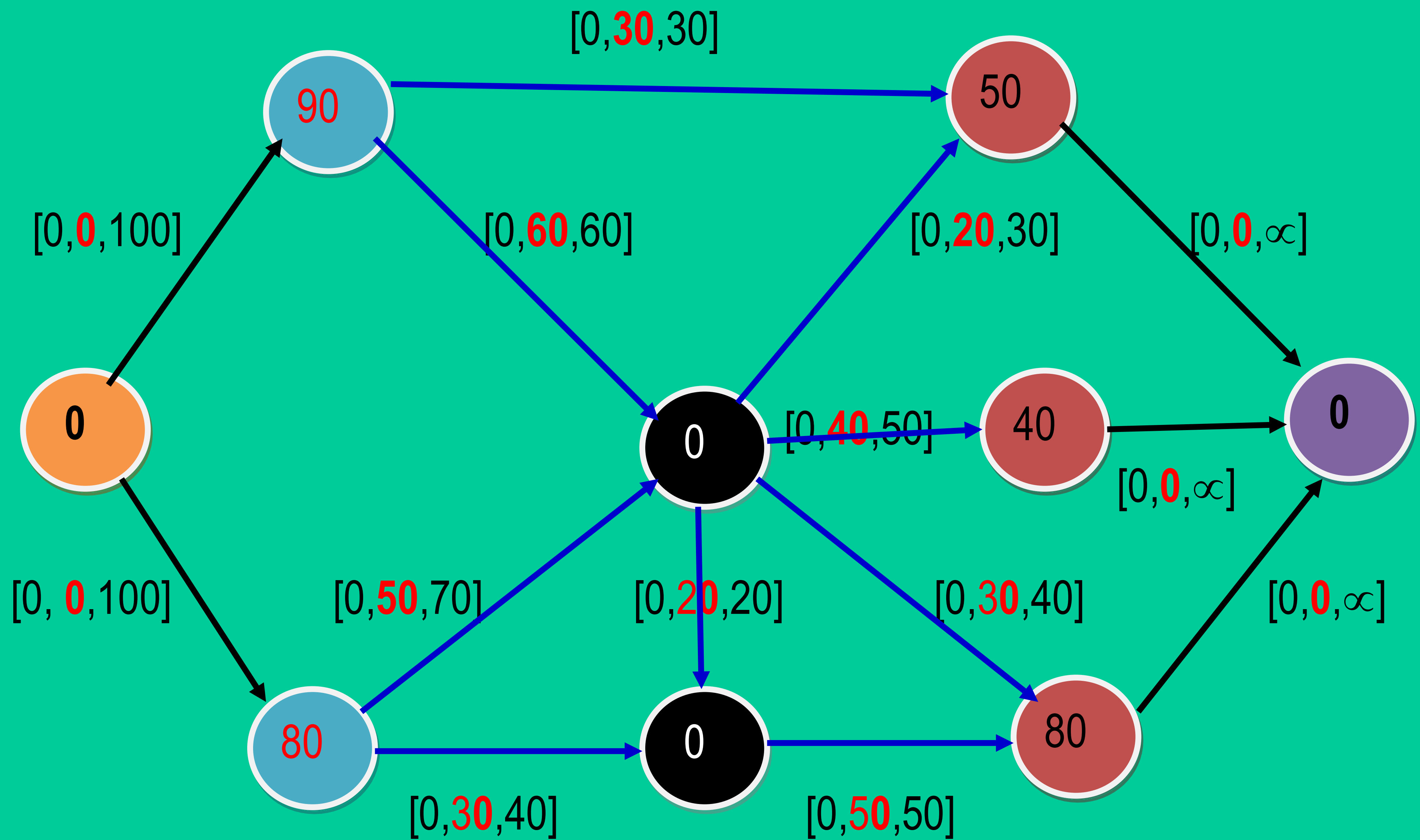
Pour que le problème ait une solution, la somme des contributions doit être égale à **0**, soit:

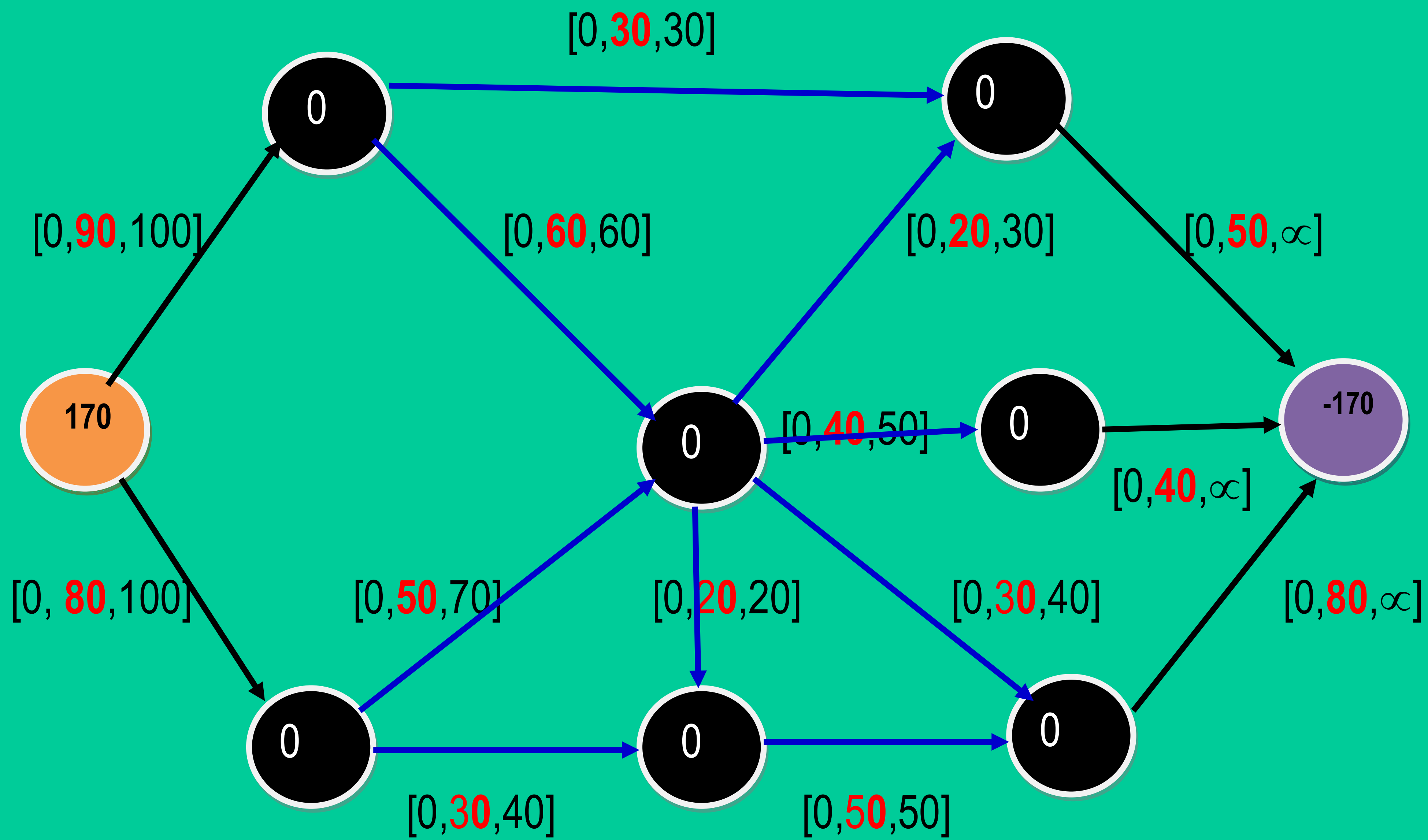
$$\sum_{i \in X} b(i) = 0$$

La figure suivante illustre :

- un réseau
- et un **flot** réalisable sur celui-ci.


[0,30,30]
90
-50
[0,60,60]
[0,20,30]
0
[0,40,50]
-40
[0,50,0]
[0,20,20]
[0,30,40]
80
0
-80
[0,30,40]
[0,50,50


[0,30,30]
90
50
[0,0,100]
[0,60,60]
[0,20,30]
[0,0,∝]
0
0
[0,40,50]
40
0
[0,0,∝]
[0, 0,100]
[0,50,70]
[0,20,20]
[0,30,40]
[0,0,∝]
80
0
80
[0,30,40]
[0,50,50]


[0,30,30]
0
0
[0,90,100]
[0,60,60]
[0,20,30]
[0,50,∝]
170
0
[0,40,50]
0
-170
[0,40,∝]
[0, 80,100]
[0,50,70]
[0,20,20]
[0,30,40]
[0,80,∝]
0
0
0
[0,30,40]
[0,50,50]

Exprimé ainsi, on voit que les problèmes de flot :

- permettent de **modéliser** directement
- un grand nombre de **problèmes réels** :

- Le problème de **fluidité de la circulation** automobile dans un réseau urbain,

- Le problème de transport du **courant électrique** dans un réseau de distribution,

- Le problème de **placement de capitaux** dans des marchés boursiers.

II- Simplification du modèle du réseau de flot

Il existe trois cas de **simplification** d'un réseau de flot:

1- une **seule source** et un seul puits

2- arcs avec des capacités **minimales non nulles**

3- Cas des **sommets capacitifs**

1- Une seule source et un seul puits

Il est possible de ne travailler qu'avec :

-**une seule** source

-et **un seul** puits.

Avantage:

Il devient inutile de garder en mémoire la liste des contributions des sommets.

On ne garde que celles de la **source** et du **puits**.

Principe:

1- <u>Côté source</u> :

On crée un sommet noté **s** et appelé **super source** ou tout simplement **source**.

Ensuite, pour chaque sommet **i** tel que b(i)>0, on ajoute un arc (s,i) de **capacité maximale** b(i).

Finalement, on pose:

$$b(\mathbf{s}) = \sum b(i) \quad \text{pour } i \in X \text{ et } b(i) > 0$$

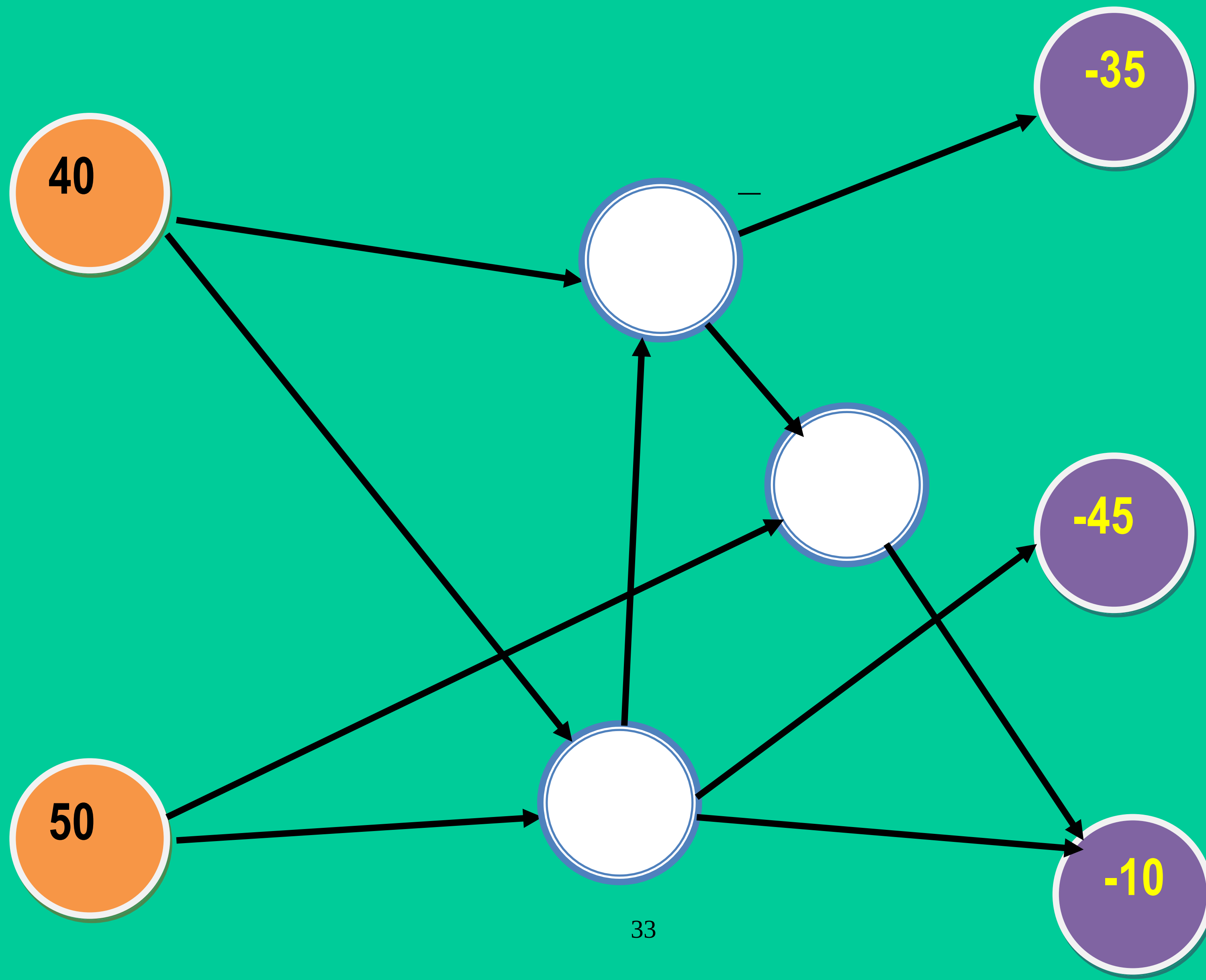
2- <u>Côté puits</u> :

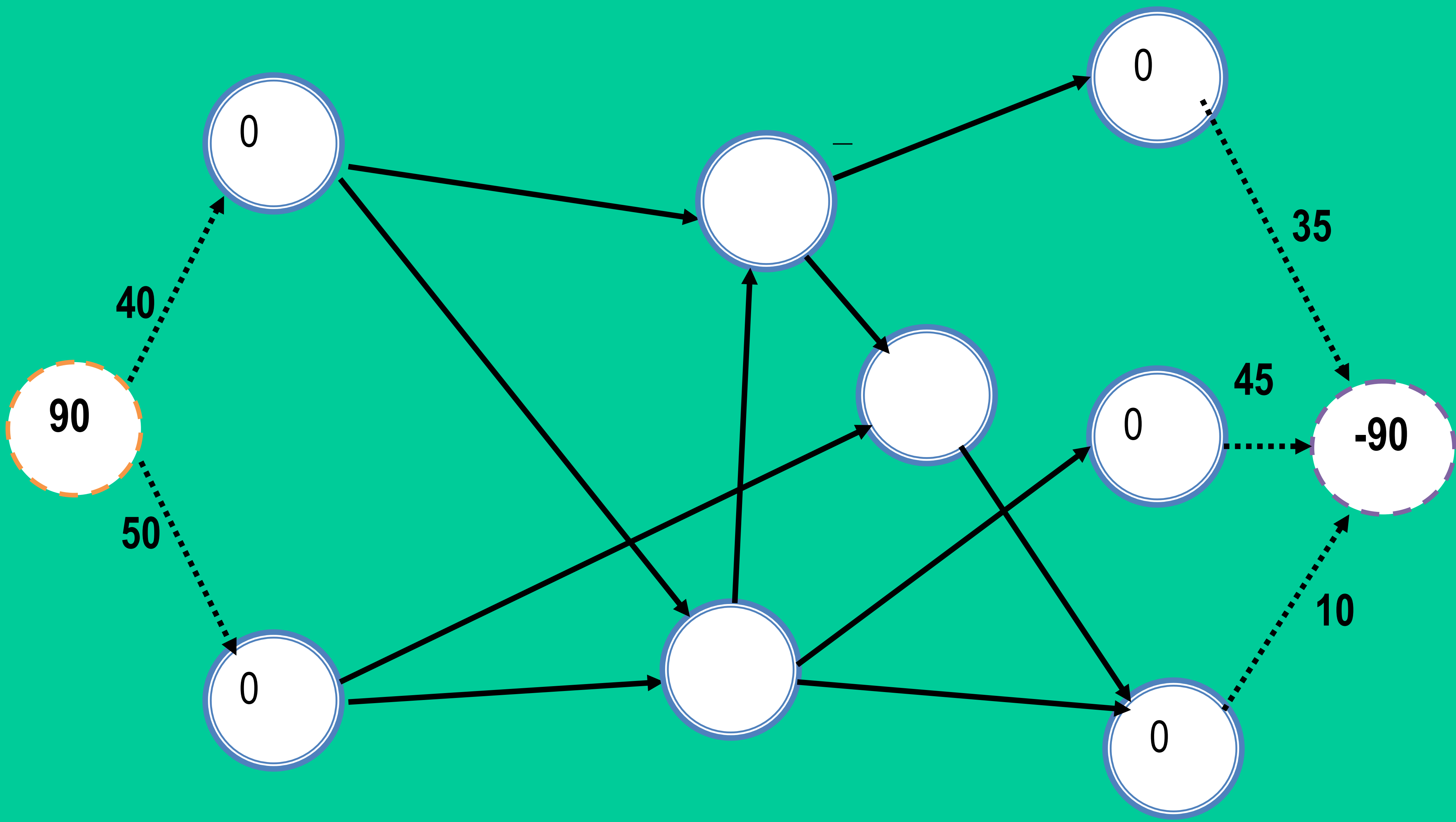
On crée un sommet **t** appelé **super puits** et une collection d'arcs (i,**t**) pour chaque sommet **i** tel que b(i)<0.

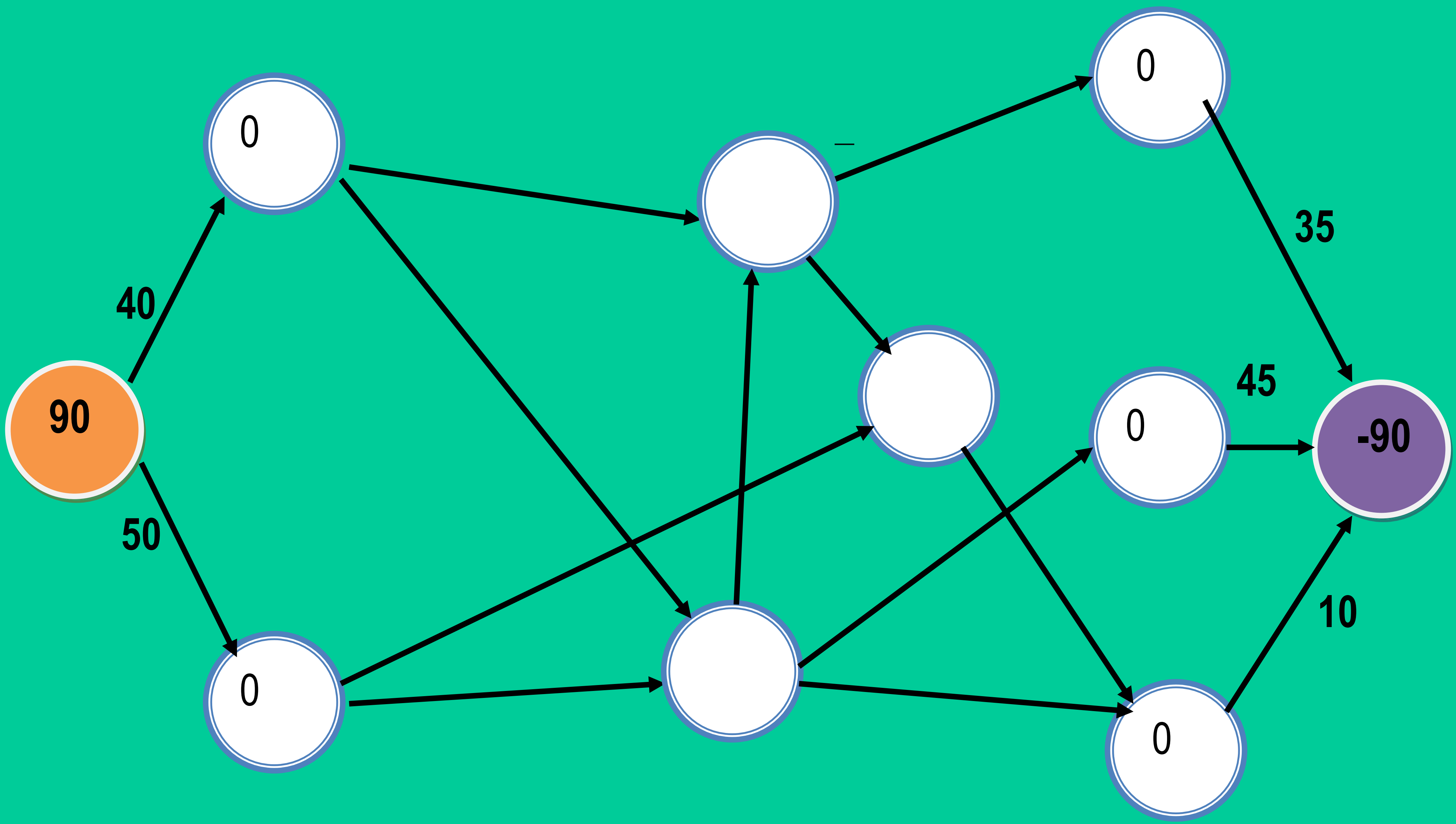
On pose :

$$b(\mathbf{t}) = \sum b(i) \quad \text{pour } i \in X \text{ et } b(i) < 0$$

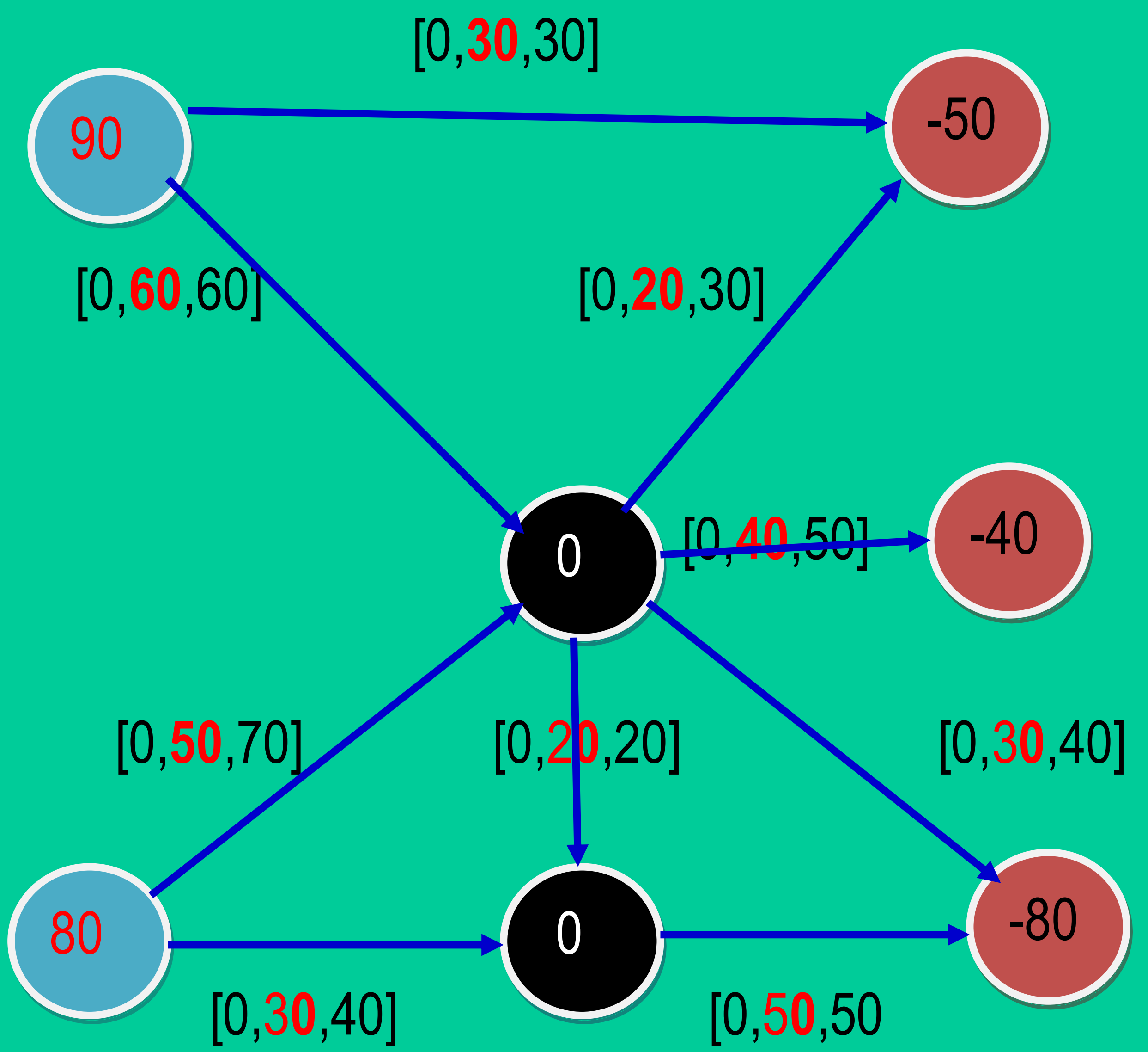
La figure suivante montre comment appliquer ce principe sur un exemple simple.

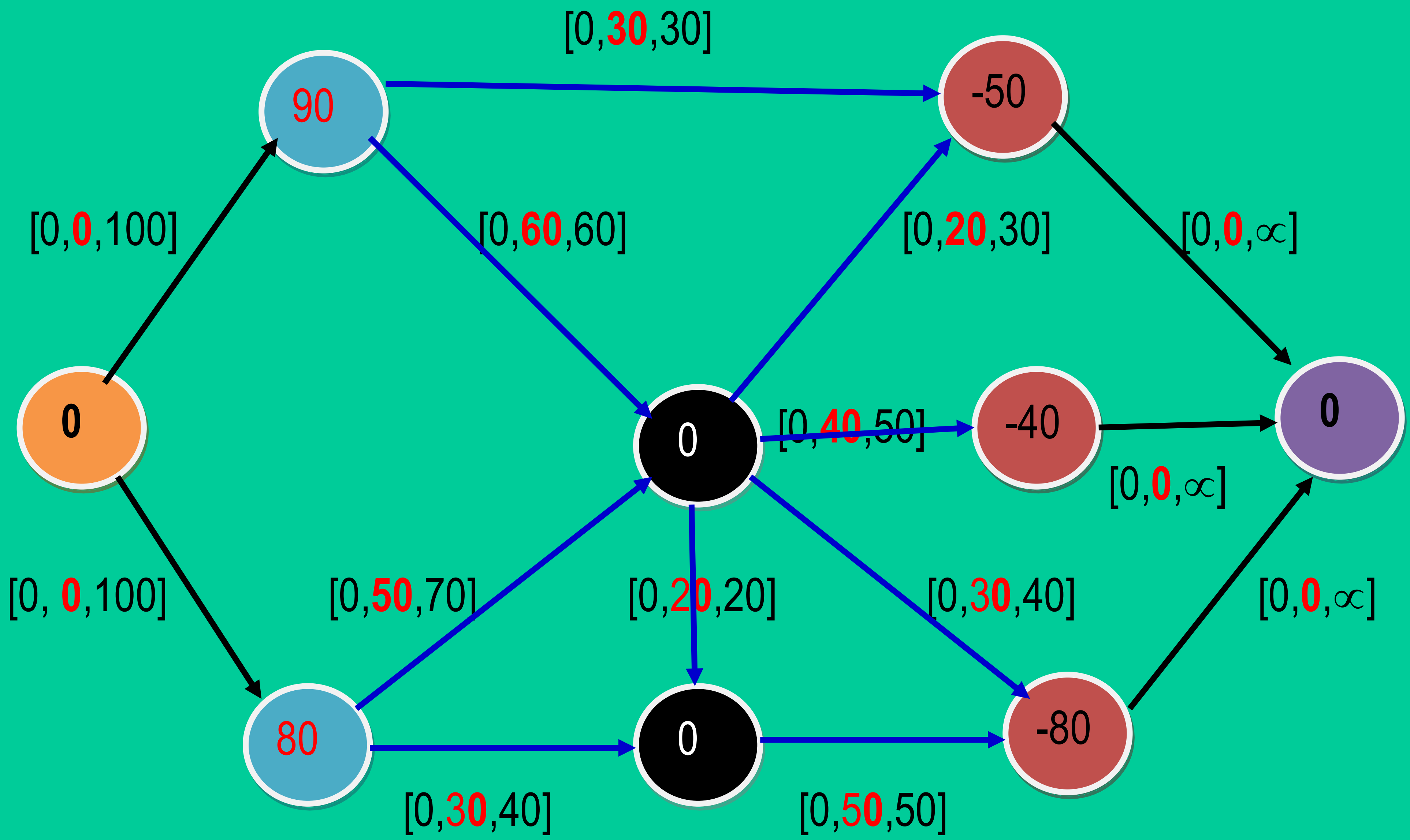


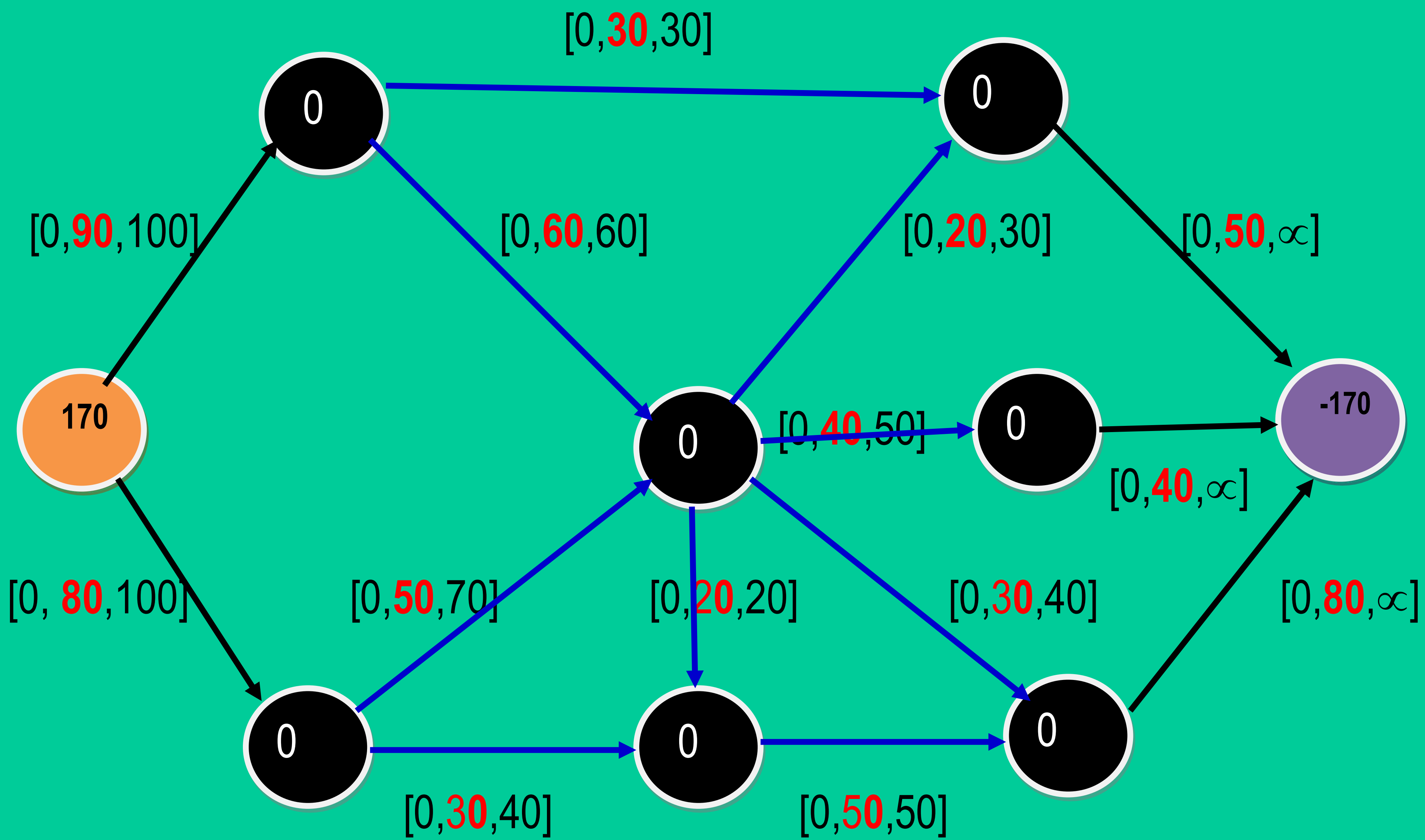

0
0
0
35
40
90
45
0
-90
50
0
10
0


90
40
50
0
0
0
0
0
0
35
45
10
-90

Exercice


[0,30,30]
90
-50
[0,60,60]
[0,20,30]
0
[0,40,50]
-40
[0,50,70]
[0,20,20]
[0,30,40]
80
0
-80
[0,30,40]
[0,50,50


[0,30,30]
90
-50
[0,0,100]
[0,60,60]
[0,20,30]
[0,0,∝]
0
0
[0,40,50]
-40
0
[0,0,∝]
[0, 0,100]
[0,50,70]
[0,20,20]
[0,30,40]
[0,0,∝]
80
0
-80
[0,30,40]
[0,50,50]



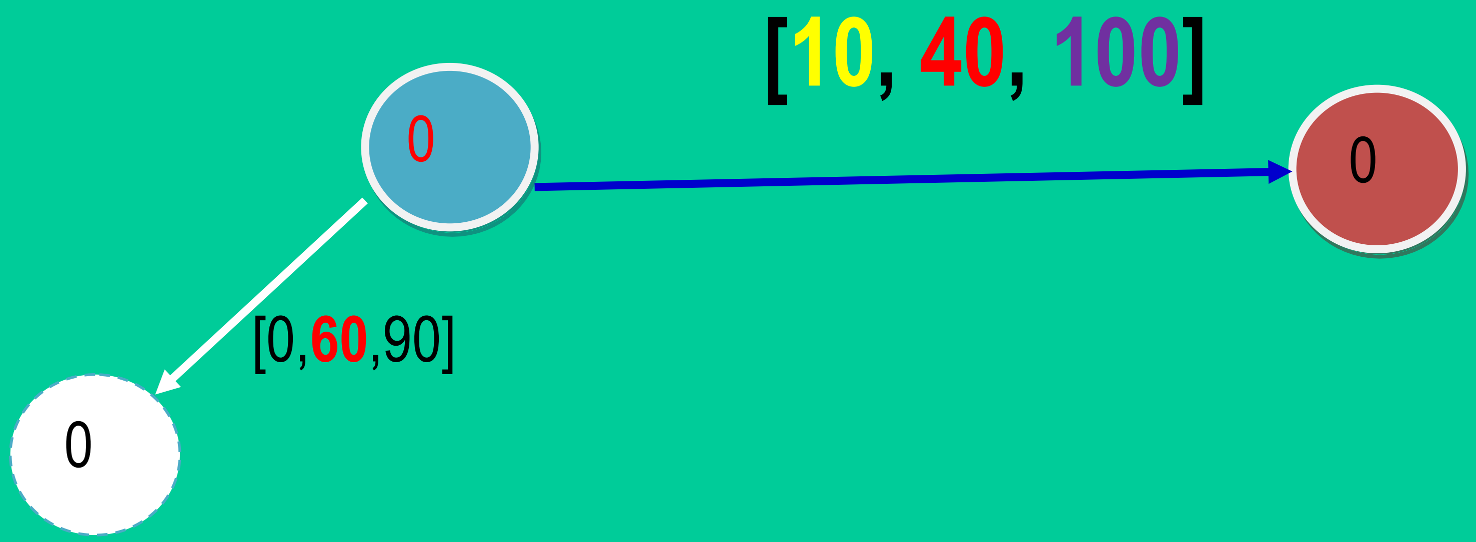
[0,30,30]
0
0
[0,90,100]
[0,60,60]
[0,20,30]
[0,50,∝]
170
0
[0,40,50]
0
-170
[0,40,∝]
[0, 80,100]
[0,50,70]
[0,20,20]
[0,30,40]
[0,80,∝]
0
0
0
[0,30,40]
[0,50,50]

2- Arcs avec des capacités minimales non nulles

L'utilisation de **capacités minimales** l_{ij} ($l_{ij} \neq 0$) entraîne des lourdeurs algorithmiques non négligeables.

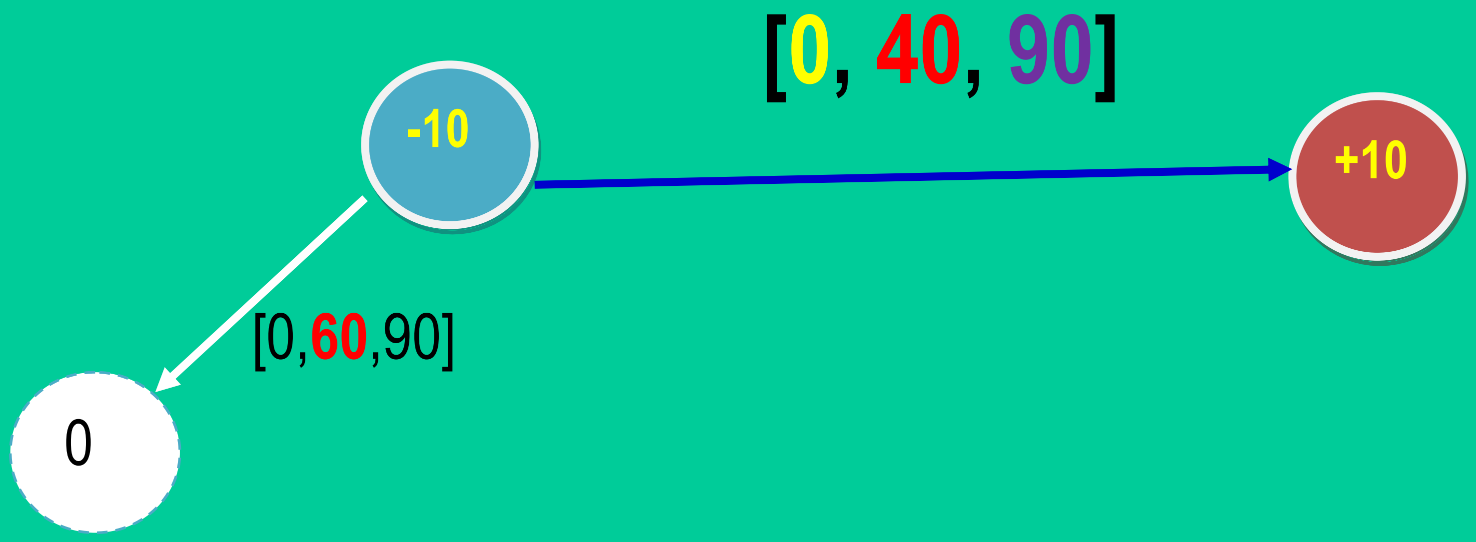
Aussi, il peut être judicieux de les **éliminer** avant le traitement du problème.

L'opération consiste à considérer chaque arc (i,j) de **capa-cité minimale l_{ij}**>0



comme un arc de **capacité maximale** $u_{ij} - l_{ij}$ reliant:

- un **puits** de contribution $b(i) = - l_{ij}$
- à une **source** de contribution $b(j) = l_{ij}$.



3- Cas des capacités sur les sommets

Dans certains modèles de **situations réelles**, il est possible d'avoir des capacités sur les sommets.

Dans un marché financier, un trader ne peut engager des ordres d’achats d’actions pour un montant supérieur à un plafond autorisé.

Ceci peut être modélisé par la contrainte suivante:

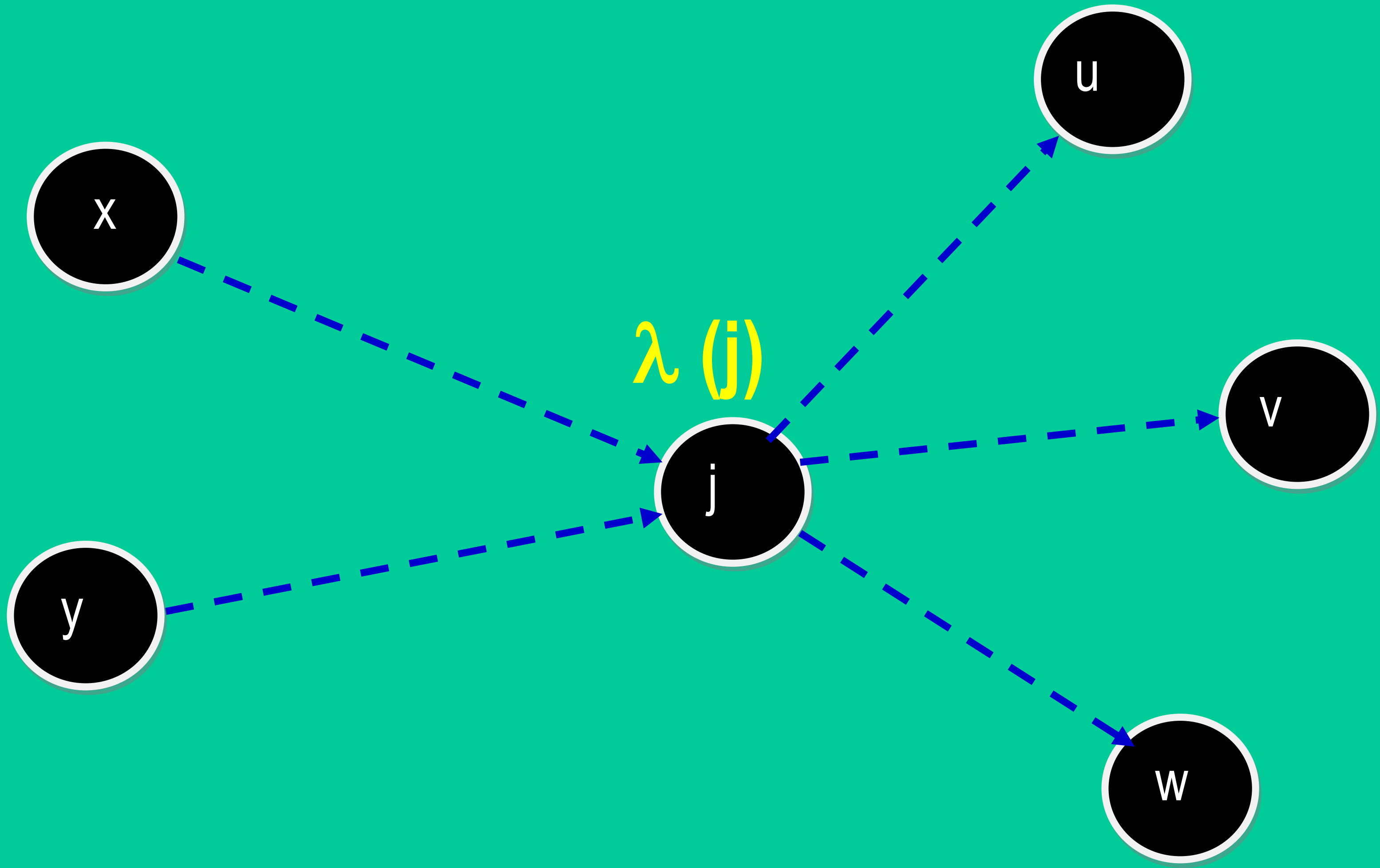
$$\sum_{i:(i,j)\in G} x_{ij} \leqslant \lambda(j) \quad \forall j \in X$$

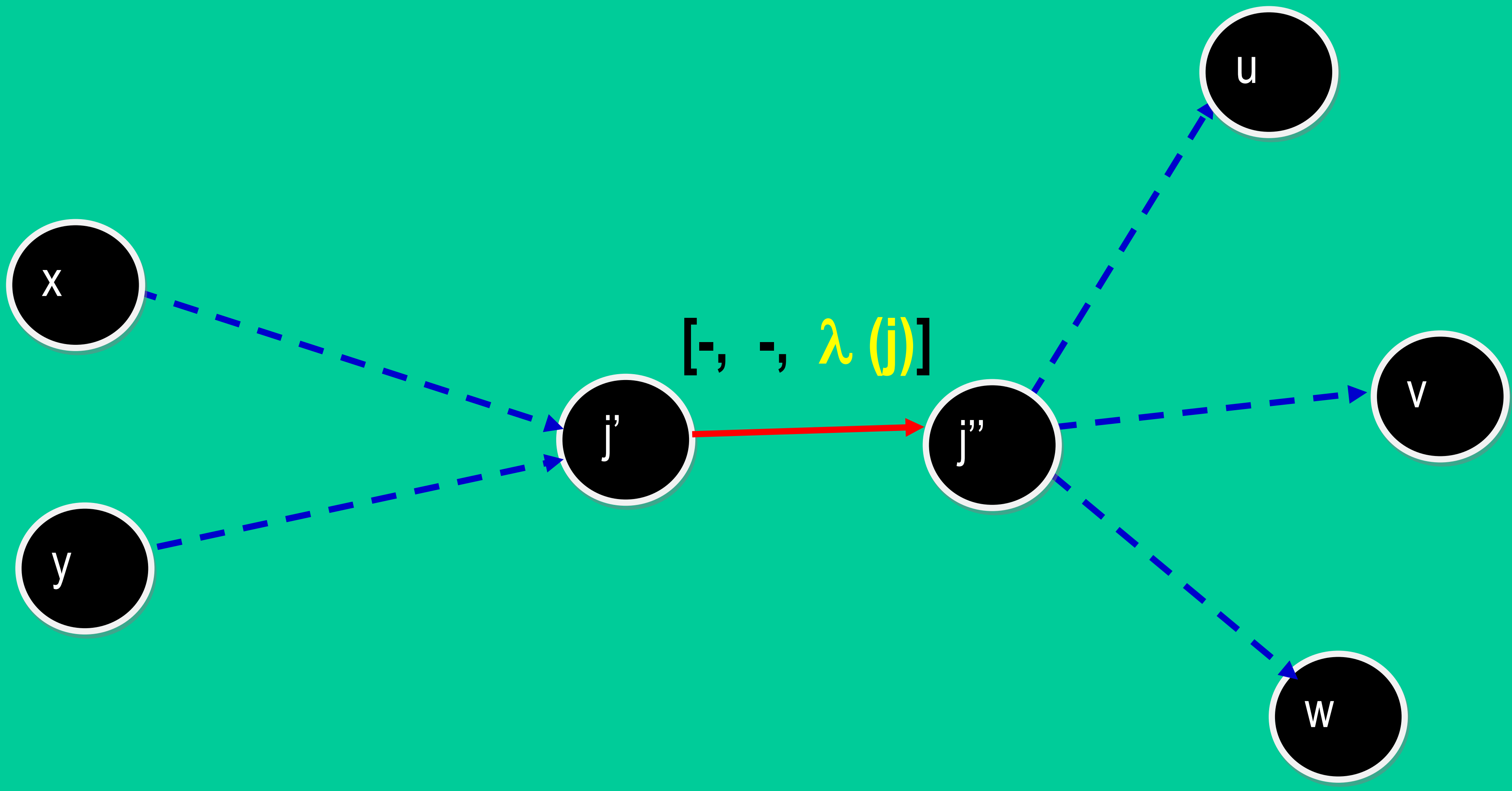
où λ (j) est la capacité maximale au sommet j.

Afin de ne pas rajouter cette contrainte dans le calcul, on la remplace par une **contrainte de capacité** sur un **arc fictif**.

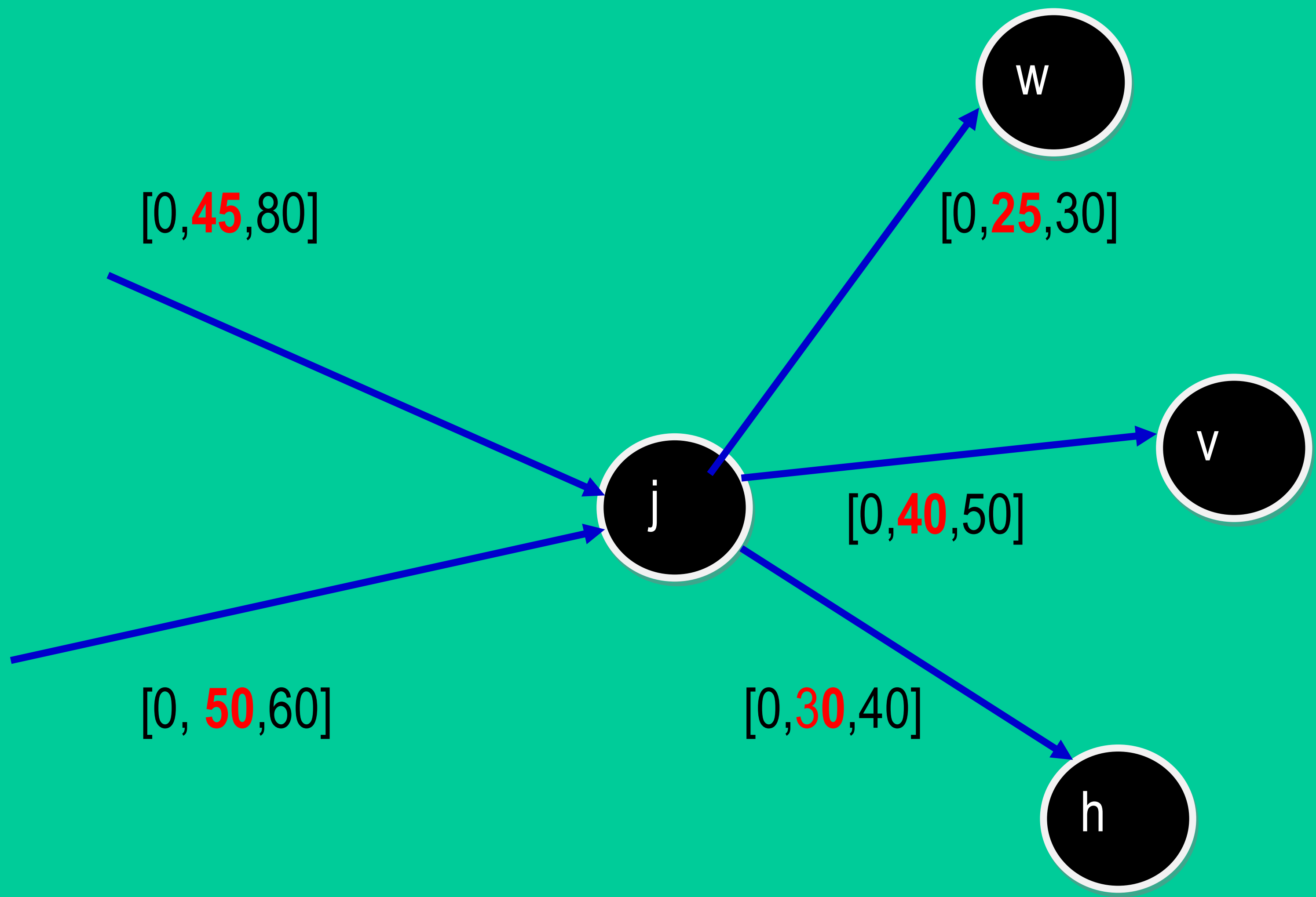
L'**arc fictif** est l'arc (j',j'') obtenu en:

- dédoublant le sommet j en j'et j''
- ajoutant l'arc (j',j'') de capacité λ (j).

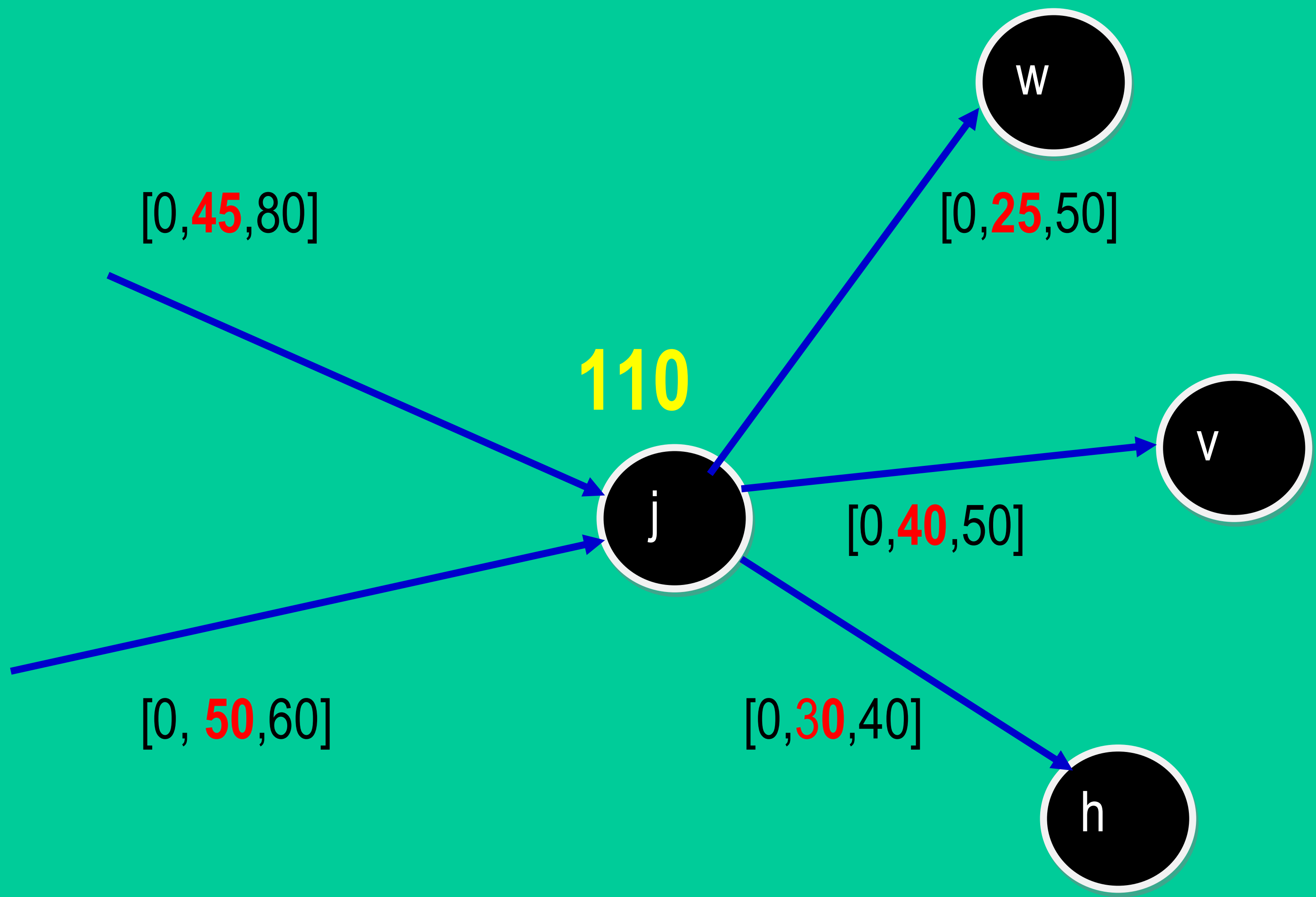

λ (j)
x
y
j
u
v
w


x
y
j'
j''
[-, -, λ (j)]
u
v
w

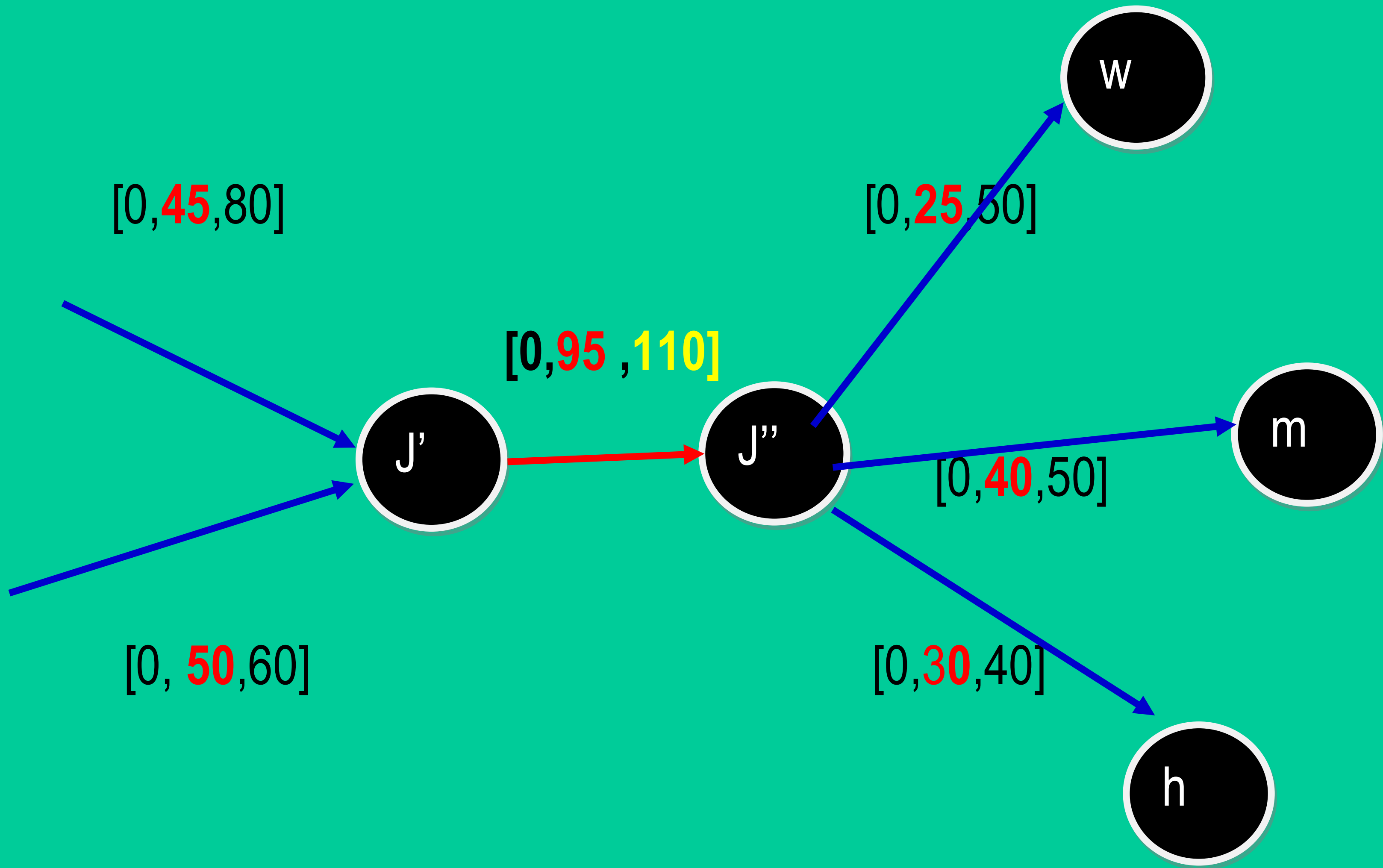
Soit sommet j de capacité λ (j) =0.



Si on impose au sommet j une capacité λ (j) =110.



On aura :



III- problème de flot optimal

On appelle **valeur du flot** et l'on note habituellement **v** la somme du flot:

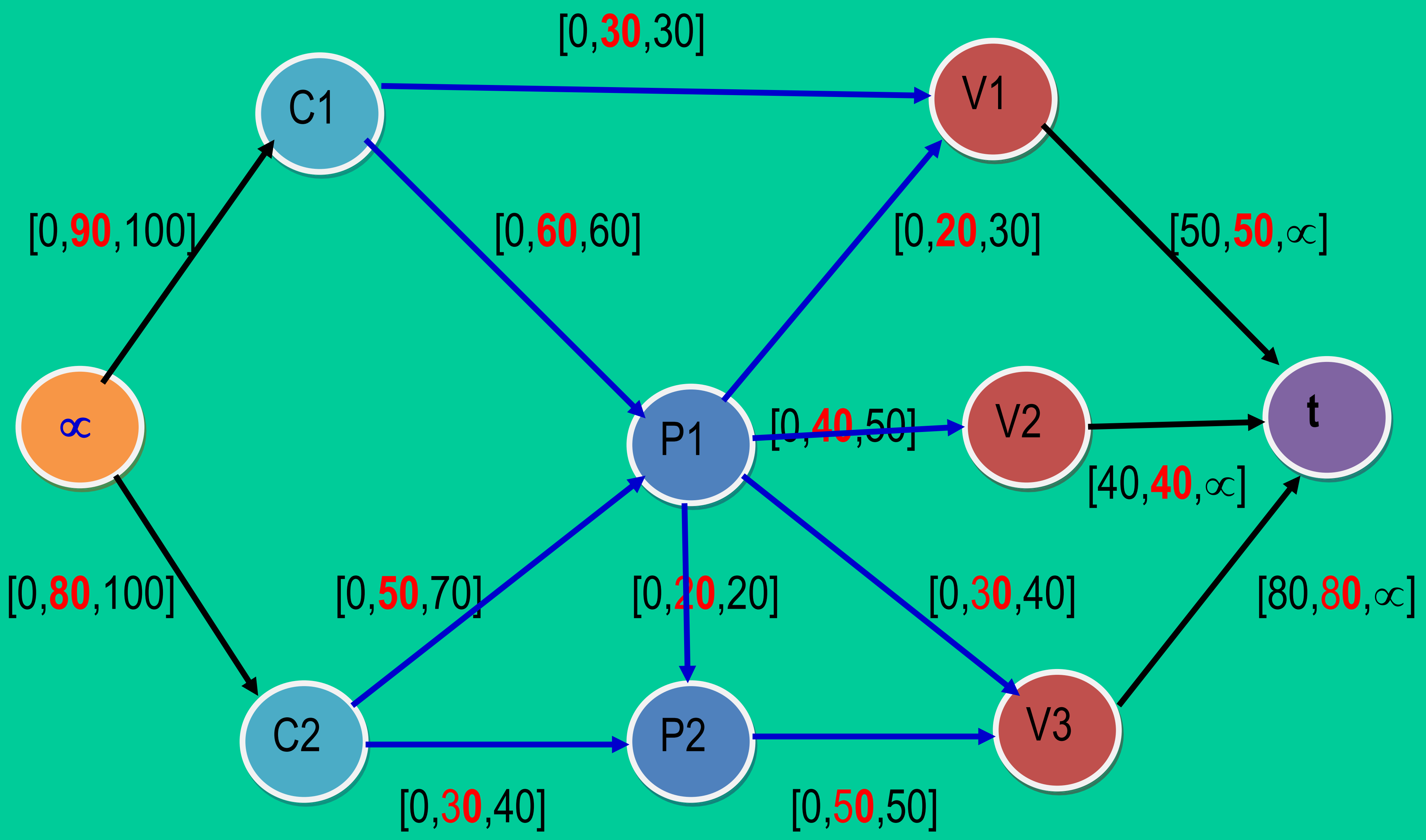
- **sortant** de la source: $v = \sum x_{si}$ pour $(s,i) \in E$

- ou **entrant** au puits : $v = \sum x_{jt}$ pour $(j,t) \in E$

Le problème de flot optimal consiste à tenter de faire circuler sur le réseau **la plus grande** quantité **V** de flot possible.

a)Première approche

Une première approche consiste à fixer *arbitrairement* la contribution de la source, **b(s)** à $+\infty$.

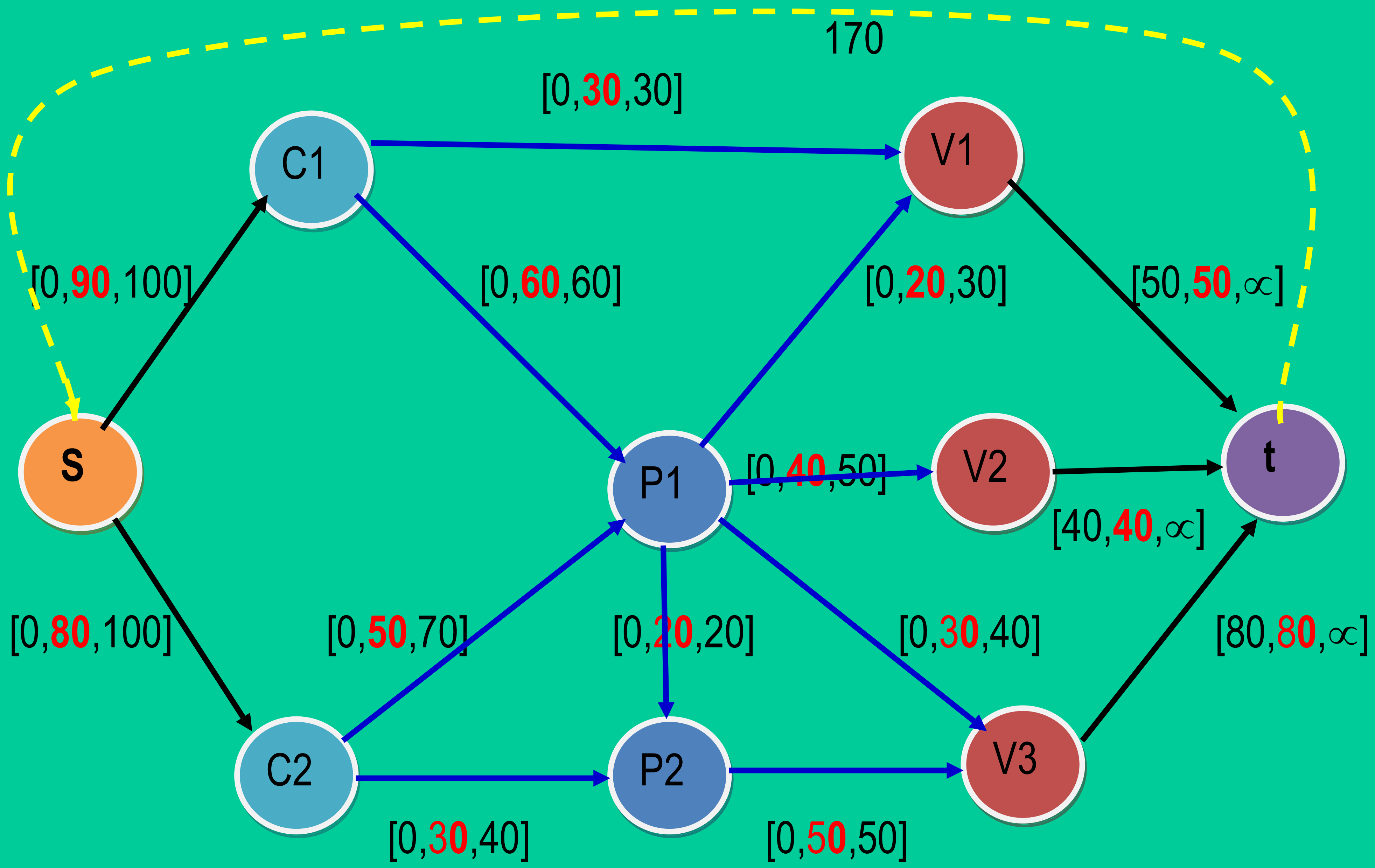

[0,30,30]
C1
V1
[0,90,100]
[0,60,60]
[0,20,30]
[50,50,∝]
∝
P1
[0,40,50]
V2
t
[40,40,∝]
[0,80,100]
[0,50,70]
[0,20,20]
[0,30,40]
[80,80,∝]
C2
P2
V3
[0,30,40]
[0,50,50]

b) Deuxième approche

Une alternative consiste à :

- supprimer les contributions des sommets **s** et **t**
- et à rajouter un arc **(t,s)** de **capacité infinie**.

L'arc **(t,s)** appelé **arc de retour**.


170
[0,30,30]
C1
V1
[0,90,100]
[0,60,60]
[0,20,30]
[50,50,∝]
S
P1
[0,40,50]
V2
t
[40,40,∝]
[0,80,100]
[0,50,70]
[0,20,20]
[0,30,40]
[80,80,∝]
C2
P2
V3
[0,30,40]
[0,50,50]

Application 1: modèle d’une opération de titrisation

La **titrisation** est une **technique financière.**

Elle qui consiste à transformer :

- des **créances**: prêts immobiliers, prêts consommation, crédit–bail, factures non soldées…
- en **titres** émis sur le marché des capitaux.

Une titrisation est une opération qui regroupe dans un **por-tefeuille** (un lot) des créances de nature similaire.

Les titres représentent chacun une **fraction** du portefeuille des créances «titrisées».

Modèle de flot optimal

Soit un établissement de crédit qui détient **n** créances:

$E_1, E_2, ..., E_n$.

Ces créances sont réparties en:

- **m** catégories: prêt immobilier, prêt consommation, crédit –bail ;…
- et **h** niveaux de risque

<u>Remarque</u>:

Une créance $\mathbf{E_i}$ peut appartenir à:

-**plusieurs** catégories: $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{C_2}$,… $\mathbf{C_i}$ …

-mais à **un seul** niveau de risque: $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$,… $\mathbf{P_j}$ …

Lors de la **titrisation**, l'établissement doit composer un portefeuille **éligible.**

Il doit répondre aux contraintes suivantes:

1-il doit y inclure au maximum $\mathbf{n_i}$ créances de catégorie $\mathbf{C_i}$

2- il peut inclure au maximum $\mathbf{u_j}$ créances de niveau de risque $\mathbf{P_j}$.

C’est sur ces **contraintes** que les **Agences de Notations** s’appuient pour «noter» les titres à l’attention du marché.

L’établissement cherche à inclure, dans le portefeuille, le **maximum de créances** qu’il détient.

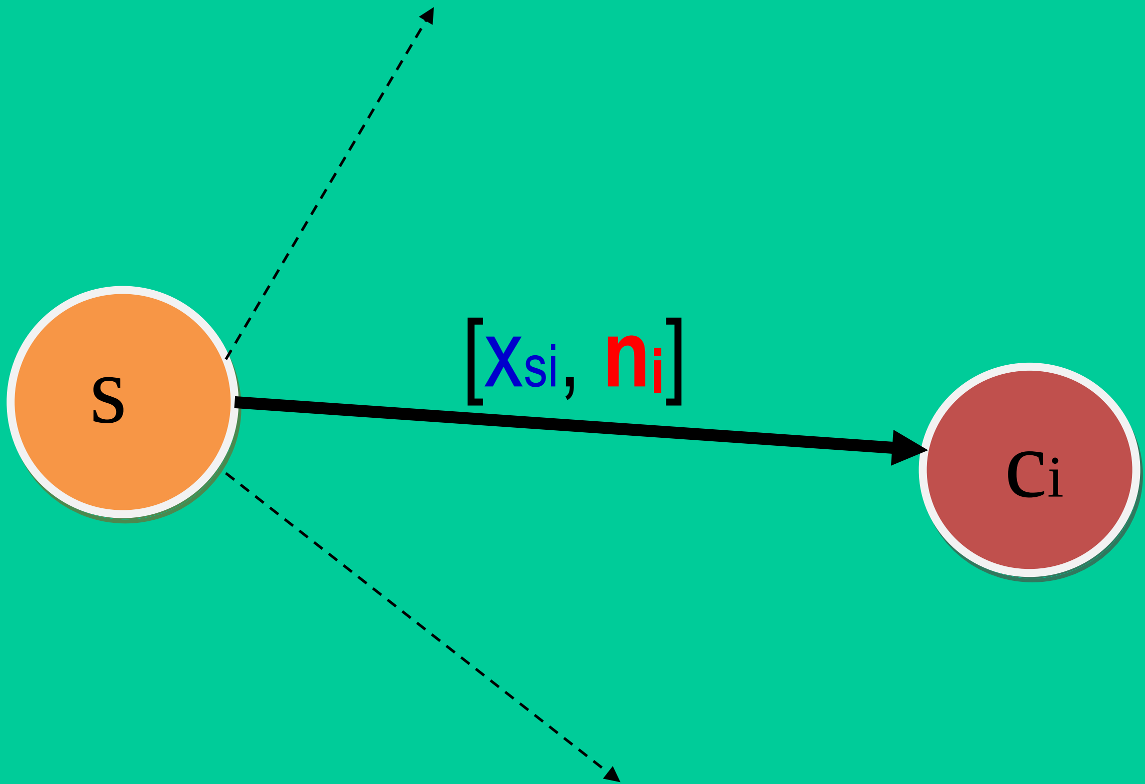
La question que l'on va résoudre est la suivante : « Existe-t-il un portefeuille **éligible** satisfaisant ces contraintes ? »

Le problème est ramené à la recherche du **flot optimal** sur un réseau défini comme suit :

1-On associe à chaque catégorie $\mathbf{C}_i$:

-un sommet $\mathbf{c}_i$

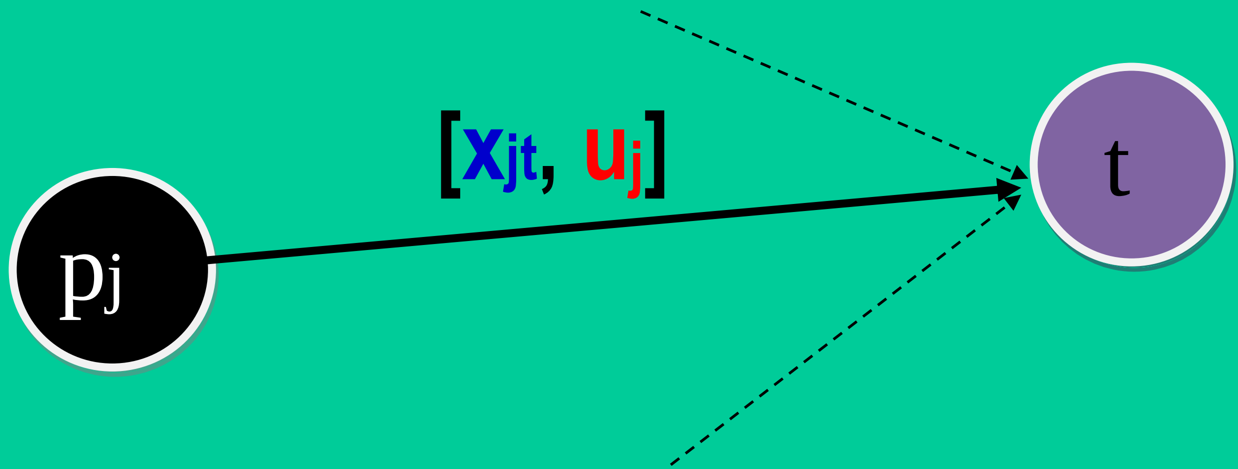
-et un arc (s, $\mathbf{c}_i$) de capacité maximale $\mathbf{n}_i$.



L'arc (s,$\mathbf{c_i}$) exprime la propriété suivante : «au maximum n_i créances de catégorie $\mathbf{C_i}$ peut être incluse dans le porte-feuille».

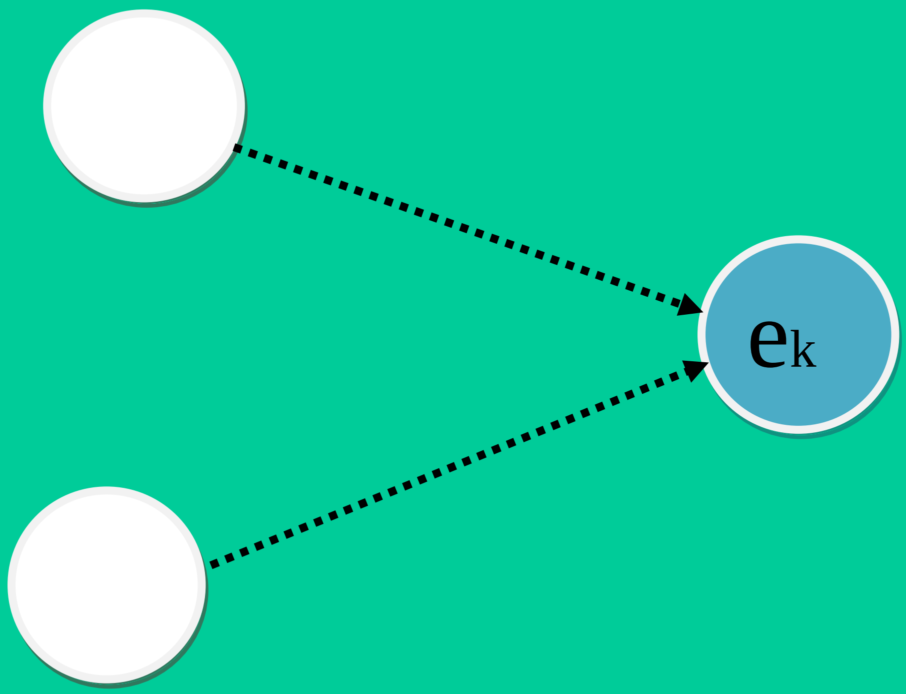
2-A l'autre bout du réseau, chaque niveau de risque $\mathbf{P_j}$ est représenté par :

- un sommet $\mathbf{p_j}$
- auquel est associé l'arc ($\mathbf{p_j}$,t) de capacité maximale $\mathbf{u_j}$.

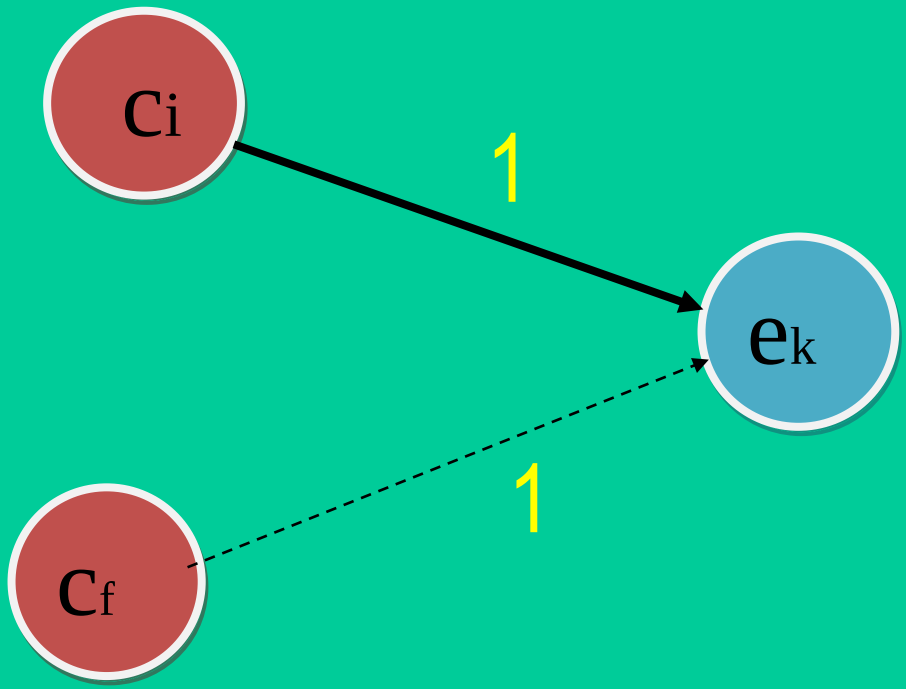


u_j étant le nombre maximum de créances de niveau de risque **P_j** autorisées dans le portefeuille.

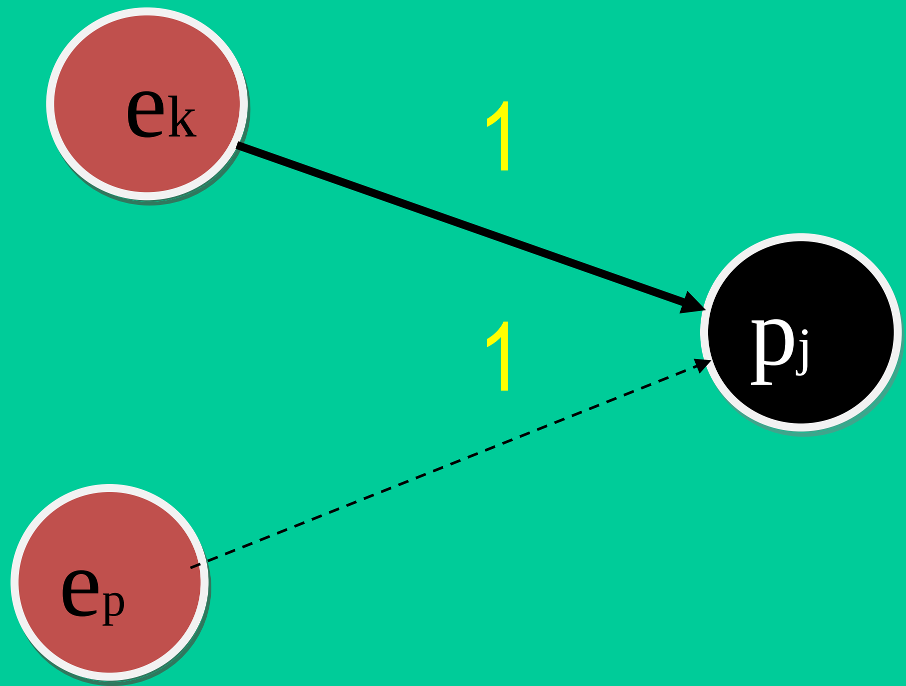
3- Chaque créance $\mathbf{E_k}$ est modélisée par un sommet correspondant $\mathbf{e_k}$.



4-Chaque appartenance d'une créance **E_k** à une catégorie **C_i** est représentée par un arc (**c_i,e_k**) portant le flux **X_{ik}** = **1**.



5- L'appartenance d'une créance **E_k** à **un seul** niveau de risque, soit **P_j** , est traduite par un arc unique (**e_k**,**p_j**) de capacité 1.



Le portefeuille est réalisable s'il existe un flot de valeur **V compatible** avec les contraintes suivantes :

$$V = \sum_{i=1}^{m} x_{si} \qquad V \leq \sum_{i=1}^{m} n_i$$

$$V = \sum_{j=1}^{h} x_{jt} \qquad V \leq \sum_{j=1}^{h} u_j$$

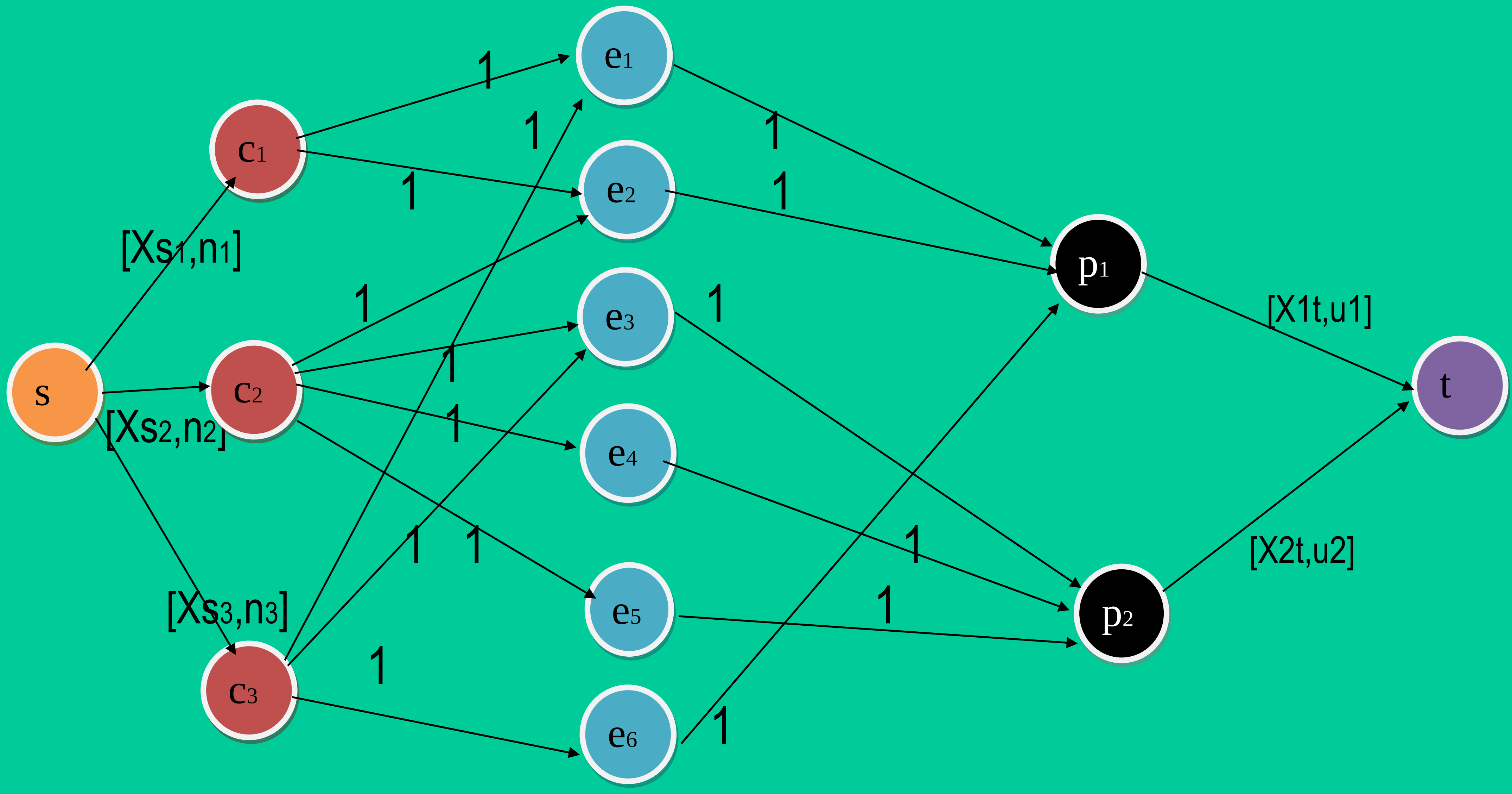
Un tel flot, s'il existe, pourra être obtenu en résolvant un **problème de flot maximum** sur le réseau.

n est la borne maximale pour la valeur du flot porté par le réseau.

$$V \leq n$$

Le portefeuille est **optimisé** lorsqu’il inclut **toutes** les créances.

La figure suivante illustre un réseau modélisant ce problème de titrisation.



Exemple de modèle d'opération de titrisation

IV- Techniques sur les réseaux

Il existe deux principales techniques de calcul dans les réseaux de flot :

- la technique de **graphe d'écart**: recherche du flot max

- la technique de **coupe**: calcul de flot max

1- Technique de graphe d'écart

Soit G un **réseau de flot**:

$$(G, s, t)$$

où G = (X, E) est un graphe orienté **valué** positivement,

Lorsque l'on travaille sur les **réseaux de flots**, il est souvent intéressant de mettre en évidence les **possibilités de faire varier** le flot

Une idée intéressante consiste à s'appuyer sur un graphe **dérivé** du graphe G .

Ce graphe **dérivé** est nommé **graphe d'écart** et noté:

$$G(\mathbf{x}) = (X, E(\mathbf{x}))$$

où **x** représente le flot sortant de la source **s** du réseau de flot.

Cela revêt une double signification:

- le graphe d'écart **varie** en fonction du flot **x**,

- le graphe d'écart **ne varie plus** dès lors que la **valeur du flot** (flot en **s** ou en **t**) est optimal.

Comment construire le graphe d'écart ?

Les sommets de G(**x**) sont les sommets de G.

Soit (i,j) un arc de G :

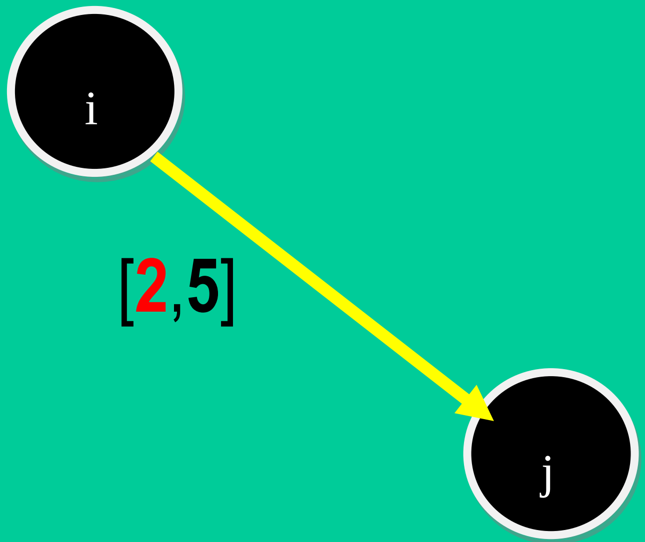
- de capacités minimale et maximale respectives $\mathbf{l}_{ij}$ et $\mathbf{u}_{ij}$
- et portant le **flux** x_{ij} .

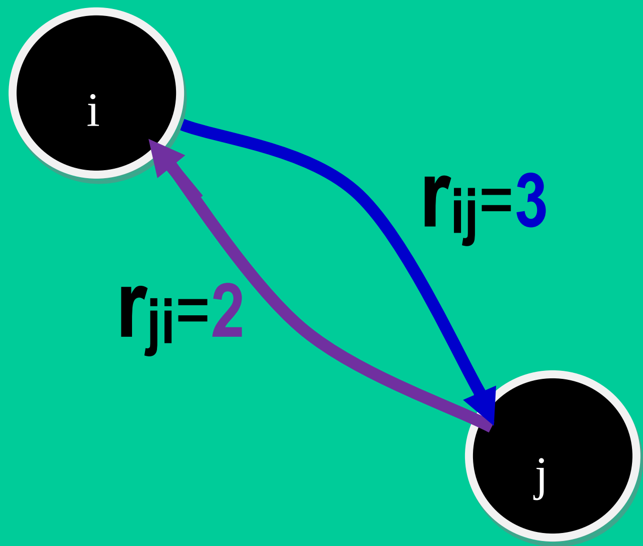
Sur l’arc(**i** ,**j)**, il est alors possible de:

- **ajouter** encore jusqu'à ($\mathbf{u_{ij}}$-$\mathbf{x_{ij}}$) unités de flux
- **retirer** jusqu'à ($\mathbf{x_{ij}}$-$\mathbf{l_{ij}}$) unités de flux.

Retirer jusqu'à ($\mathbf{x_{ij}}$-$\mathbf{l_{ij}}$) unités de flux sur l’arc(**i** ,**j)**, peut être vu comme l'**ajout** d'autant d'unités de flux sur l’arc (**j**,**i**)

Dans le **graphe d'écart**, on aura deux arcs(**i,j**) et (**j,i**) définis comme suit :





Arc(**i,j**) du réseau portant **2** unités de flux

Arcs (**i,j**) et (**j,i**) du graphe d'écart

Le graphe d'écart G(x) va donc proposer deux arcs qui mettent en avant ces **deux possibilités** :

- l'arc **(i,j)** de **capacité résiduelle** $\mathbf{r_{ij}} = u_{ij} – x_{ij}$
- l'arc **(j,i)** de **capacité résiduelle** $\mathbf{r_{ji}} = x_{ij} – l_{ij}$

Seuls les arcs de capacité résiduelle **non nulle** sont présents dans le graphe d'écart.

Notons le cas intéressant où:

$$\mathbf{l_{ij} = u_{ij}}$$

Nécessairement, tout flux **compatible** sera tel que :

$$\mathbf{x_{ij} = l_{ij} = u_{ij}}$$

Alors, le graphe d'écart ne contient :

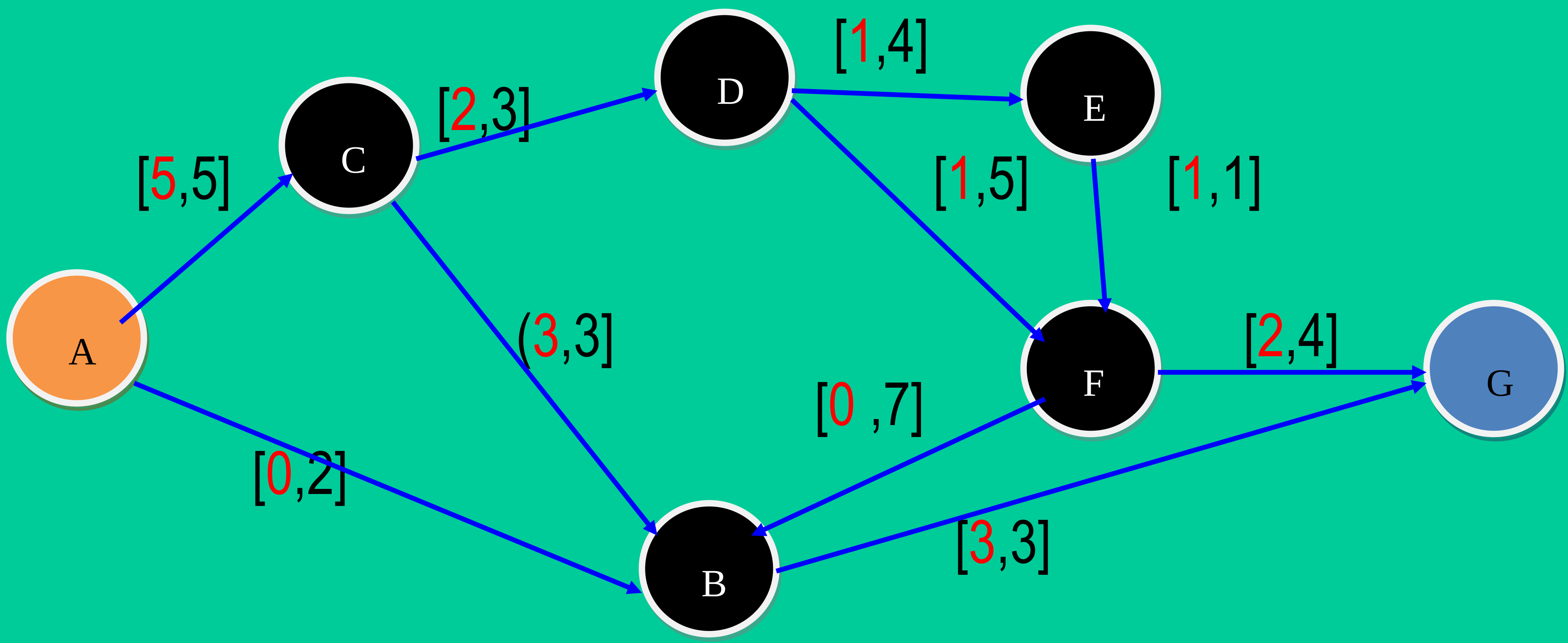
-ni l'arc (**i,j**),

-ni l'arc **(j,i**)

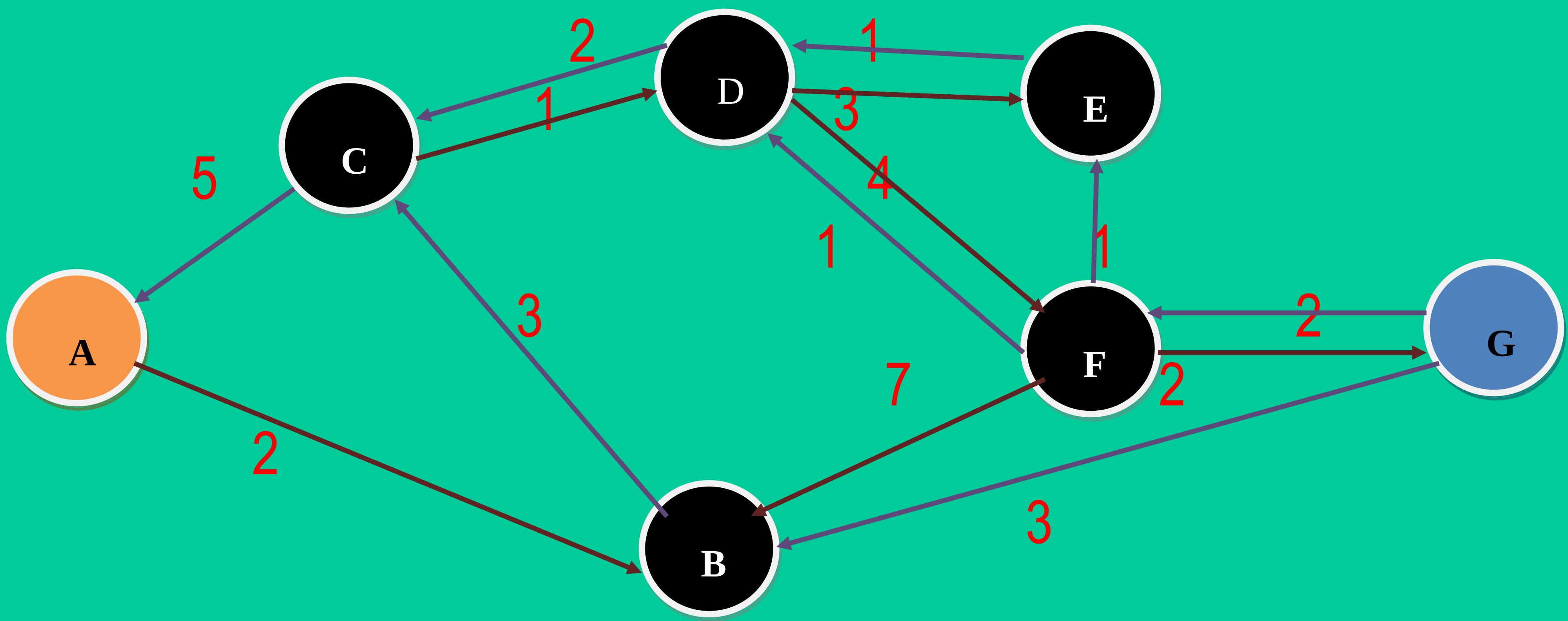
car ils ont tous deux une capacité résiduelle **nulle**.

Voici un réseau dans lequel circule un flot.

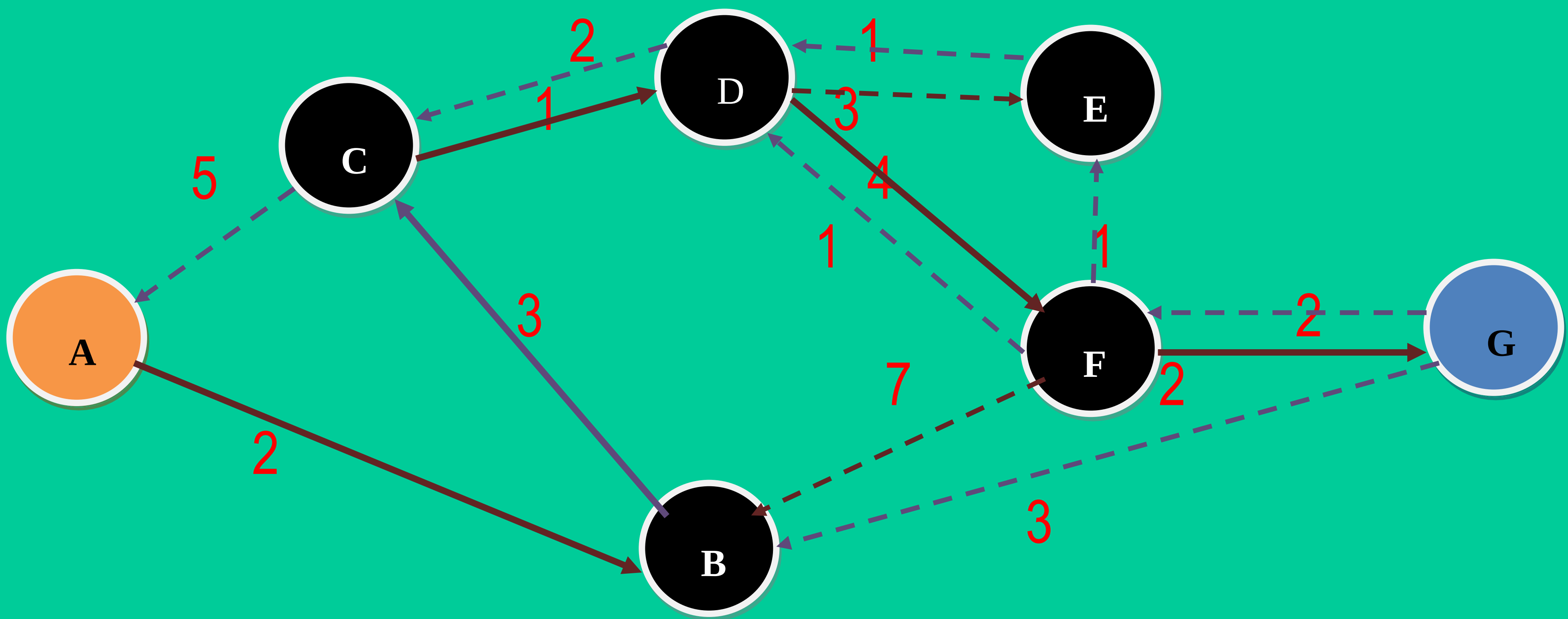
Les arcs sont associés aux couples $[x_{ij}, u_{ij}]$



Le graphe d'écart correspondant est le suivant.



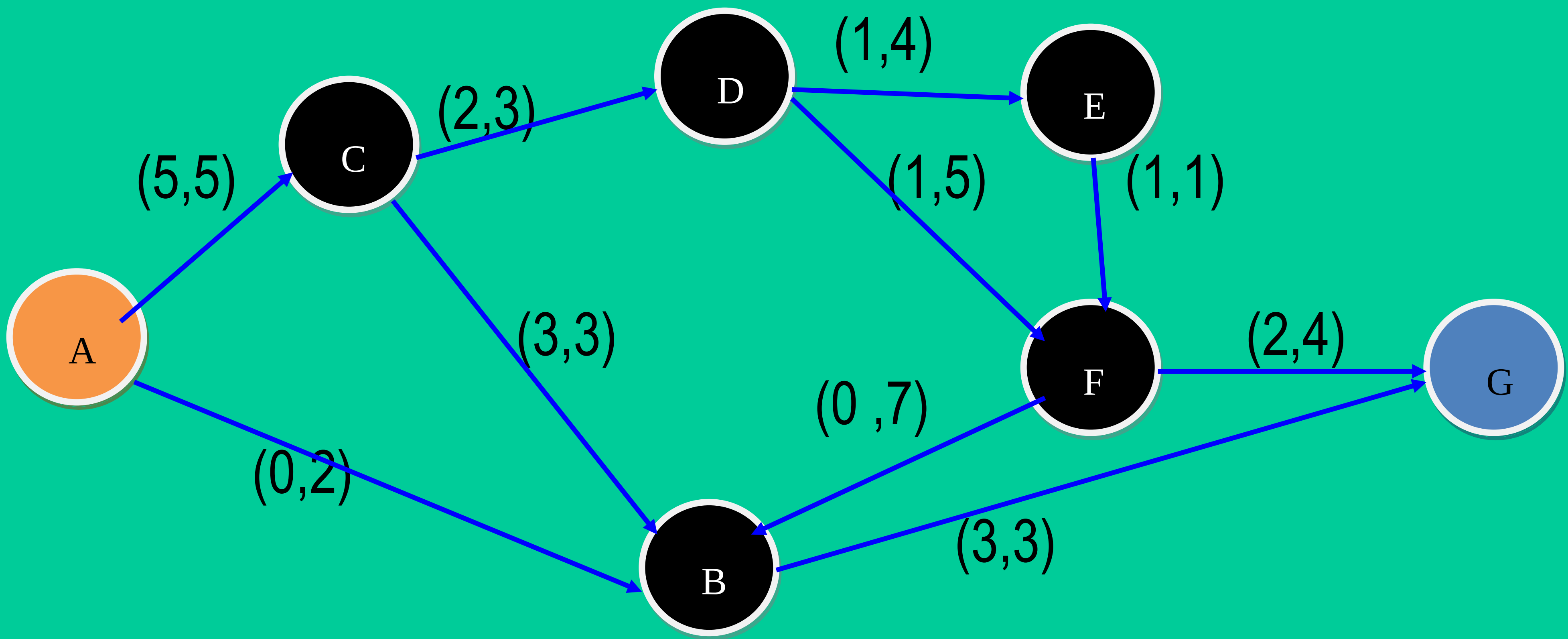
Sur ce graphe d'écart, le chemin (A,B,C,D,F,G) va de A à G.



Sur ce chemin, on peut augmenter le flot de:

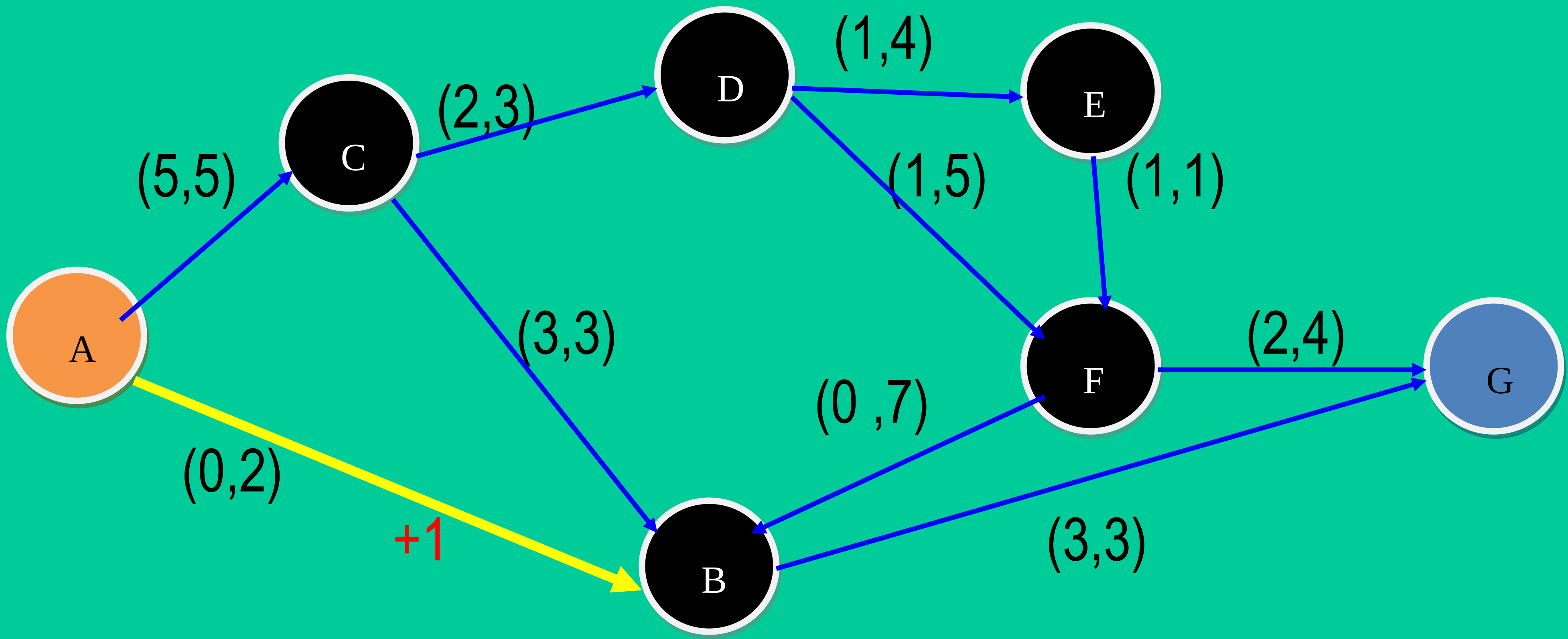
2 entre **A** et **B**,
3 entre **B** et **C**,
1 entre **C** et **D**,
4 entre **D** et **F**,
2 entre **F** et **G**.

Sur le réseau :

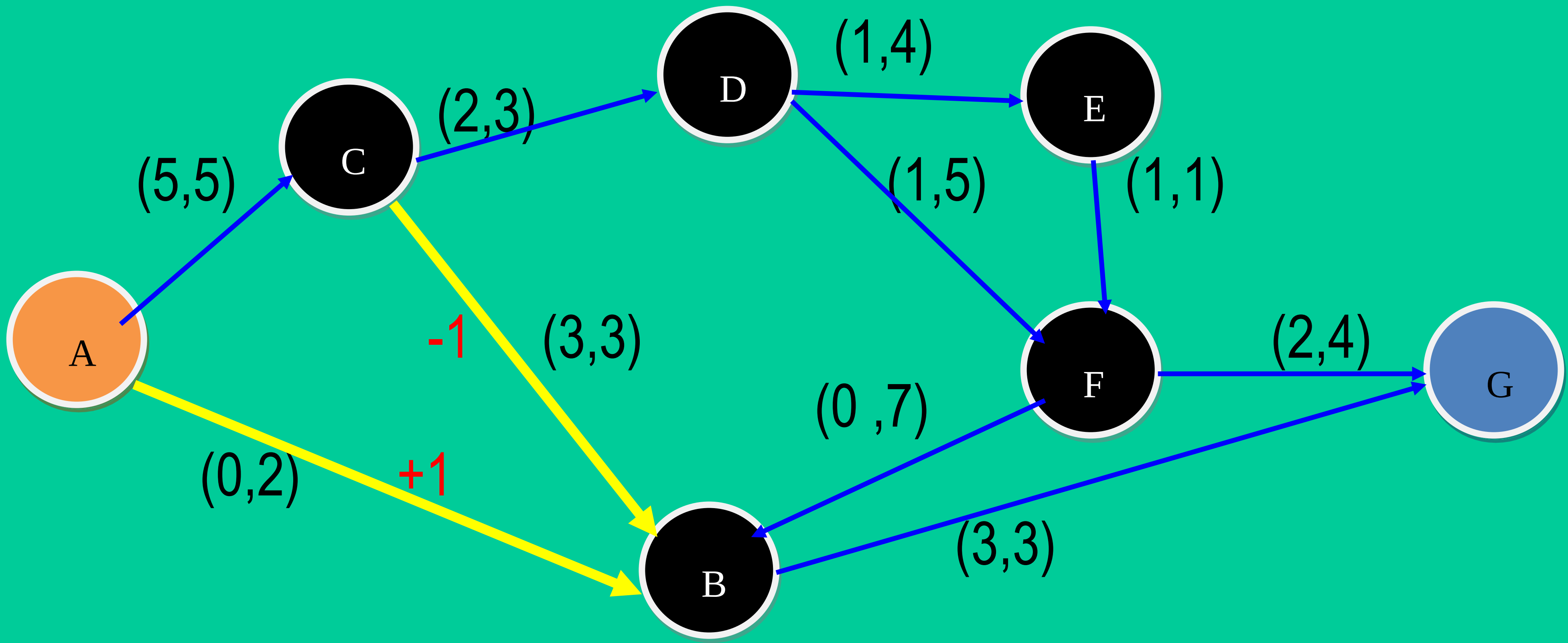


ceci signifie qu'on peut **augmenter** le flot de 1 sur ce même chemin, comme suit :

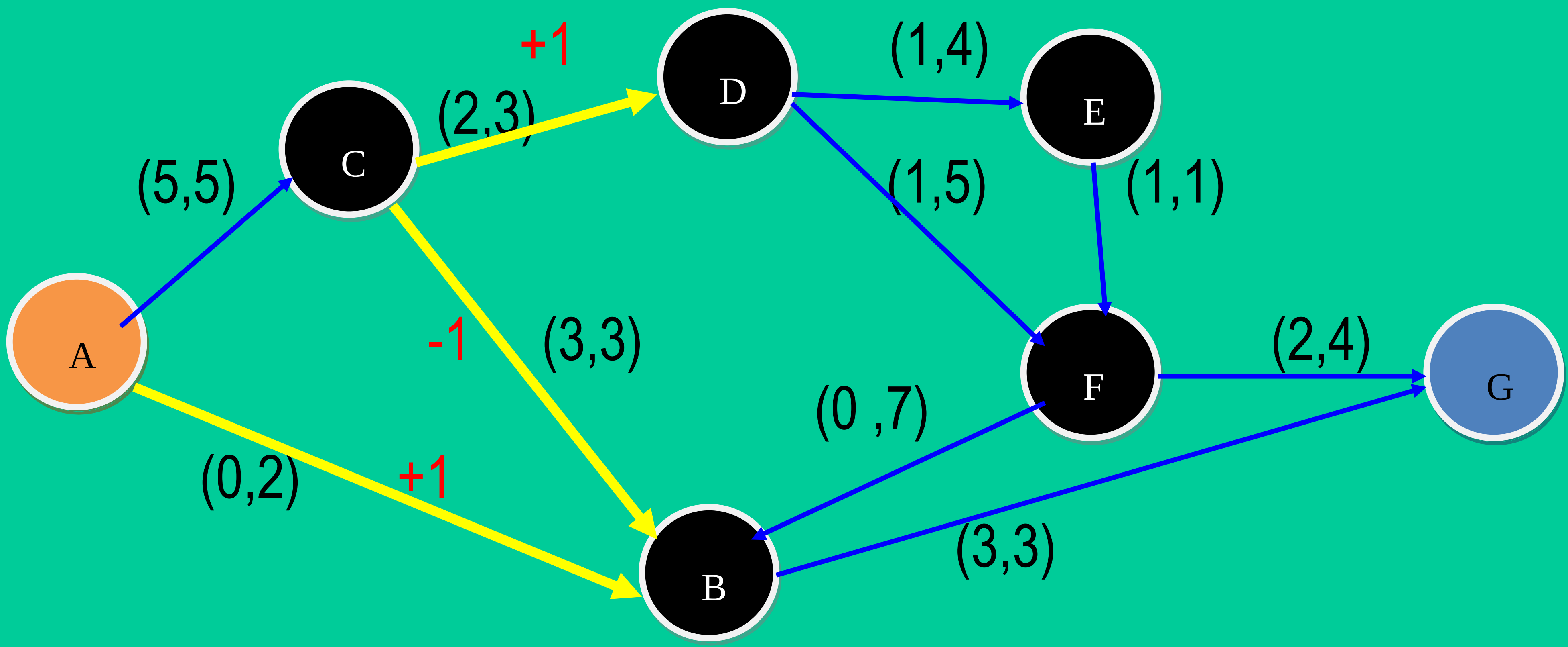
- augmenter de 1 entre A et B,



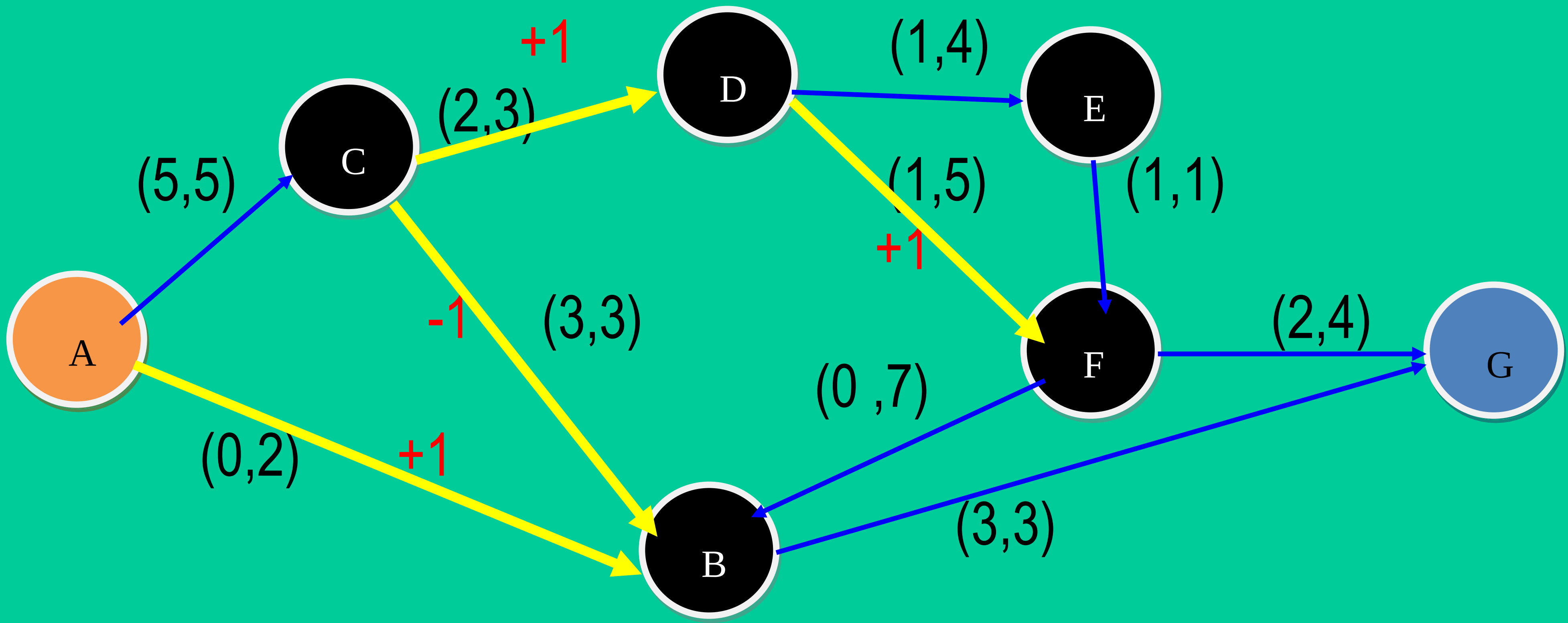
- **réduire** de 1 entre C et B,



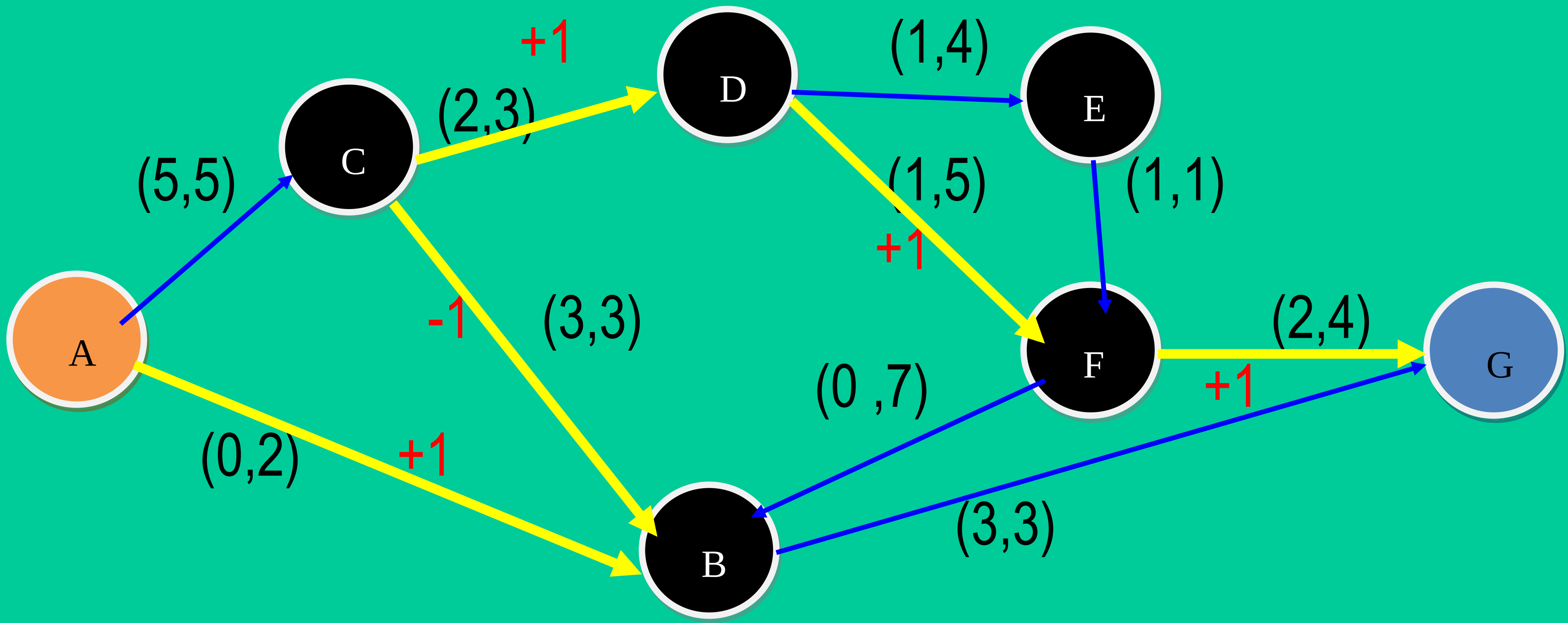
-augmenter de 1 entre C et D,



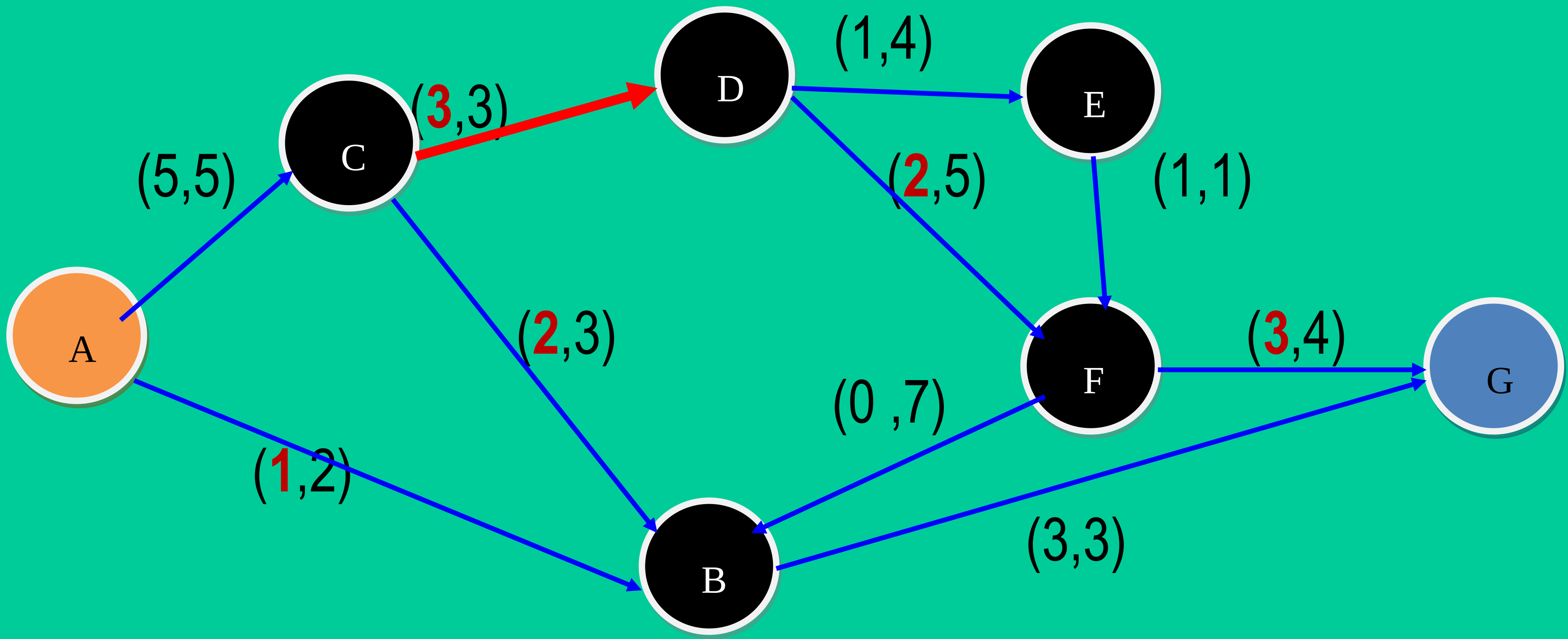
-augmenter de 1 entre D et F,



-augmenter de 1 entre F et G.



D'où le nouveau flot :



L'arc (C,D) est l'arc «**limitant**».

Principe de la technique du graphe d’écart

On part d'un flot quelconque :

$$[x_{ij}] \in \mathbb{R}^{+m}$$

La seule contrainte est qu’il soit un **flot compatible** :

$$\mathbf{0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}}$$

Conservation du flot en chaque nœuds

Ensuite, on construit un **graphe d'écart** à partir de ce flot.

Ce graphe d'écart représente les **modifications de flux possibles** sur chaque arc.

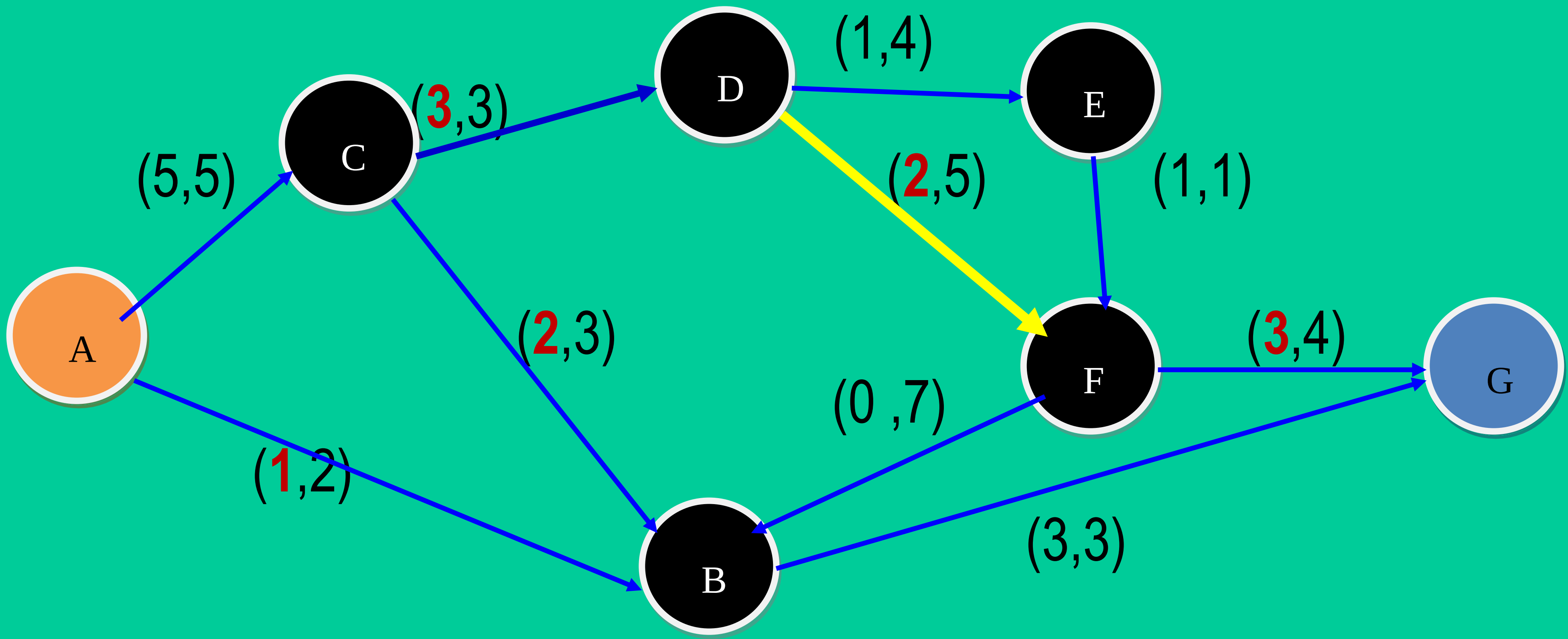
Dans ce graphe d’écart, les sommets ont exactement la même signification que dans le **réseau de flot**.

Par contre, un arc indiquera de combien il est possible d'**augmenter le flux** entre deux sommets.

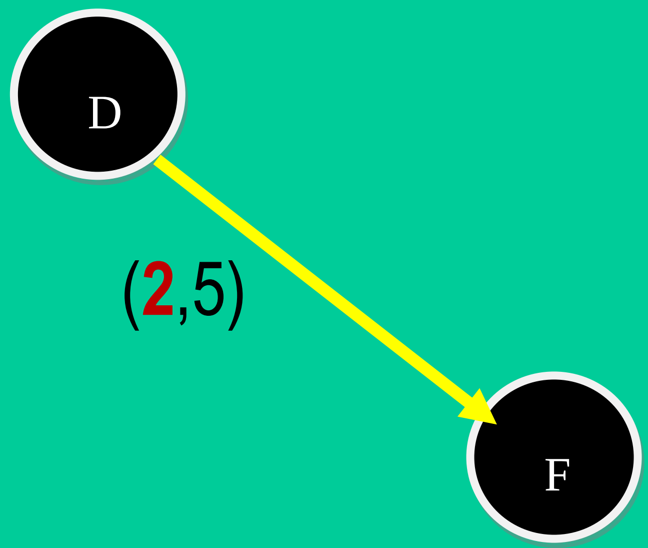
Ainsi, pour un arc (i,j), on créera dans le **graphe d'écart** deux arcs:

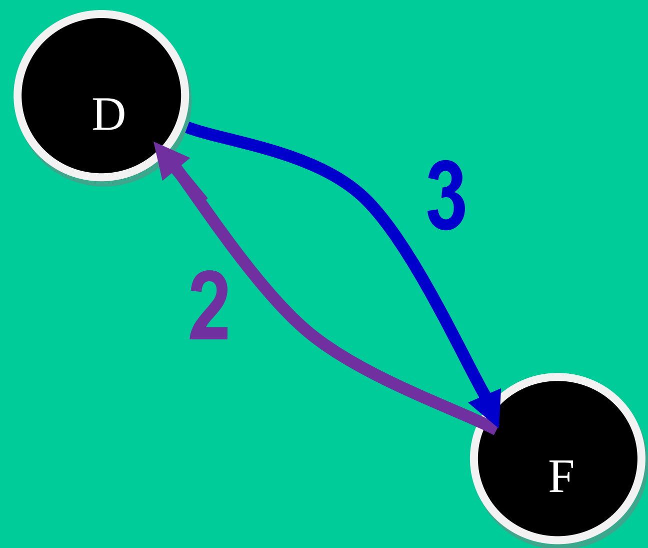
- un arc (i,j) de capacité $r_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$ si $u_{ij} \neq x_{ij}$,
- un arc (j,i) de capacité $r_{ji} = x_{ij}$ si $x_{ij} \neq 0$.

Soit l'arc (D,F) sur le réseau ci-dessous



Dans le graphe d'écart, on aura deux arcs(D,F) et (F,D) comme suit :





Arc(D,F) du réseau

Arcs (D,F) et (F,D) du graphe d'écart

Procédure de construction d’un graphe d'écart

Graphe_Ecart(G’)

Début G’= (X,E’) ; E’= ∅ */ initialisation du graphe d’écart*

Pour tout arc (i,j) ∈ E faire

Si $x_{ij} > 0$ **alors**

ajouter_arc(j, i, G’);

$r_{ji} = x_{ij}$; $e_{ji} = -1$; */ parcours **indirect***

Fin si;

Si $x_{ij} < u_{ij}$ **alors**

ajouter_arc(i, j, G’);

$r_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$; $e_{ij} = 1$; */ parcours **direct***

Fin si;

Fin pour;

Fin

Ensuite, dans ce **graphe d'écart**, on cherchera :

- un **chemin augmentant** noté **Ca**
- de la source **s** au puits **t**.

Si on n'en **trouve pas** le problème est résolu: le **flot est maximum**

Sinon, on **augmente le flot** sur ce **chemin augmentant**.

Procédure de recherche de chemin

Chemin(G',s,t)

/ procédure de recherche d'un chemin **s →t**

Début

/ phase d'initialisation

X' ←{**s**}; */ en partant de la source* ***s***

Pour tout i ∈X faire

¬ **atteint** (i); */ aucun sommet atteint*

pred(i) = nil; */aucun prédécesseur encore trouvé*

Fin pour

atteint (**s**); */ commencer par atteindre s*

*/ poursuivre avec les suivants jusqu'à **atteindre** le sommet **t***

Tant que $X' \neq \varnothing \ \wedge \ \neg$ **atteint** (**t**) faire

choisir $i \in X'$;

$X' = X' - \{i\}$;

Pour tout arc $(i,j) \in E'$ faire

Si $\neg$ **atteint** (j) alors

$X' = X' \cup \{j\}$;

pred(j)= i;

atteint (j);

Fin si;

Fin pour;

Fin tant que;

Fin

Le flot sera augmenté de la **plus petite** capacité des arcs du chemin augmentant **Ca**.

Autrement dit, le flot sur un chemin augmentant **Ca** sera augmenté de:

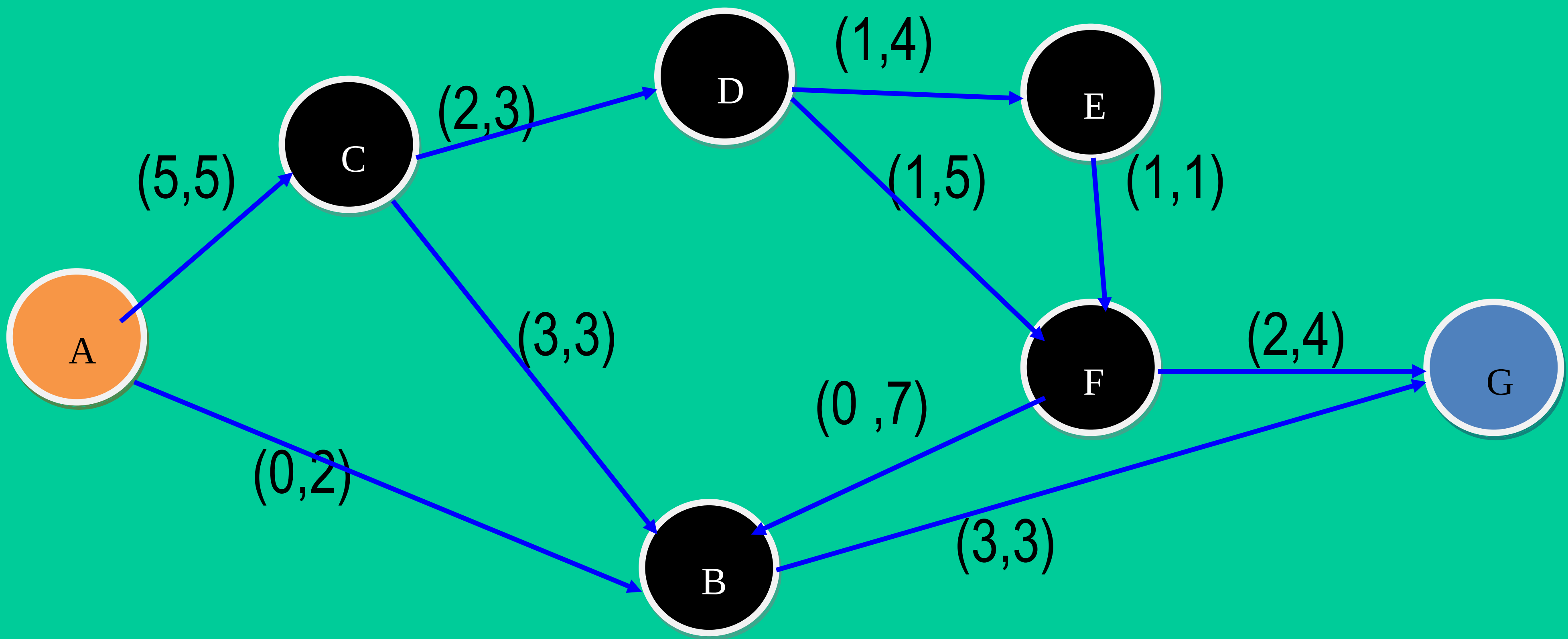
$$\min\{\, r_{ij} \mid arc(i,j) \in Ca \}$$

Cette augmentation sera **répercutée** sur la chaîne correspondante du réseau de transport G.

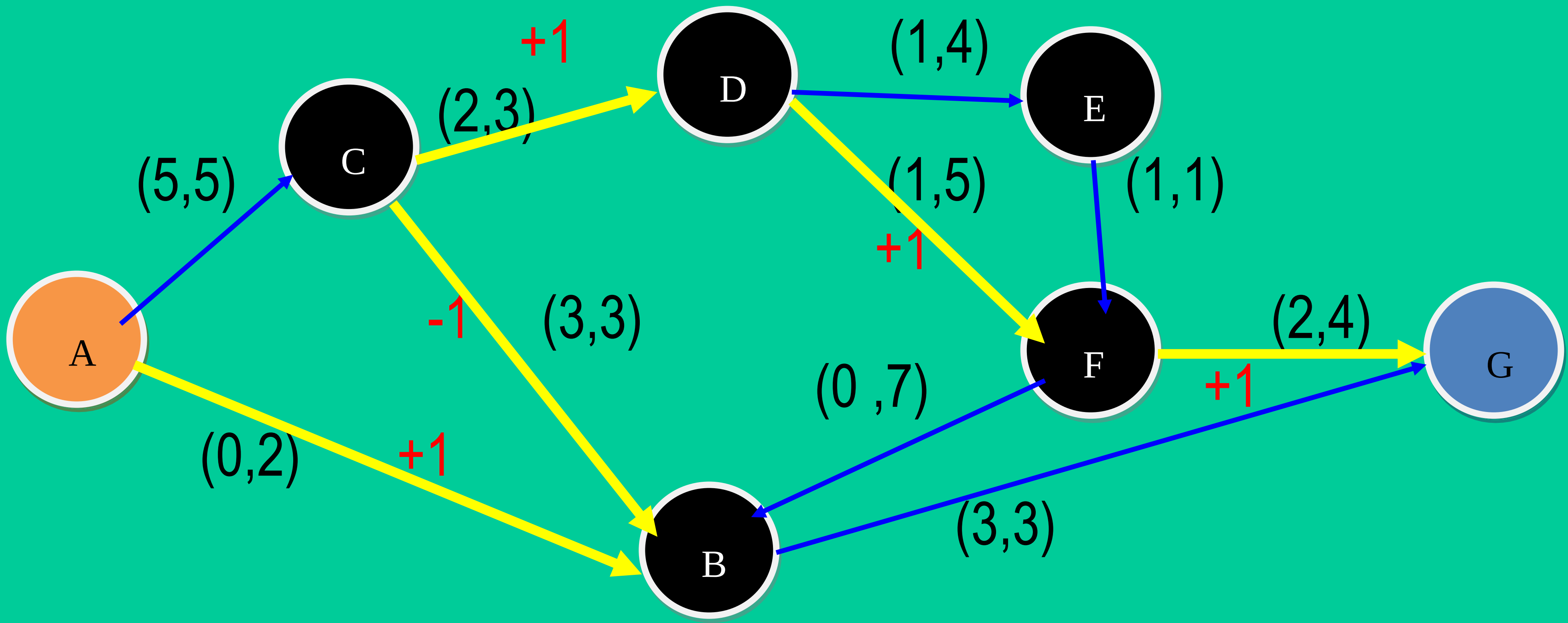
Sur le réseau G, cette chaîne est dite **chaîne augmentante**.

Le processus est réitéré sur le **réseau augmenté** G.

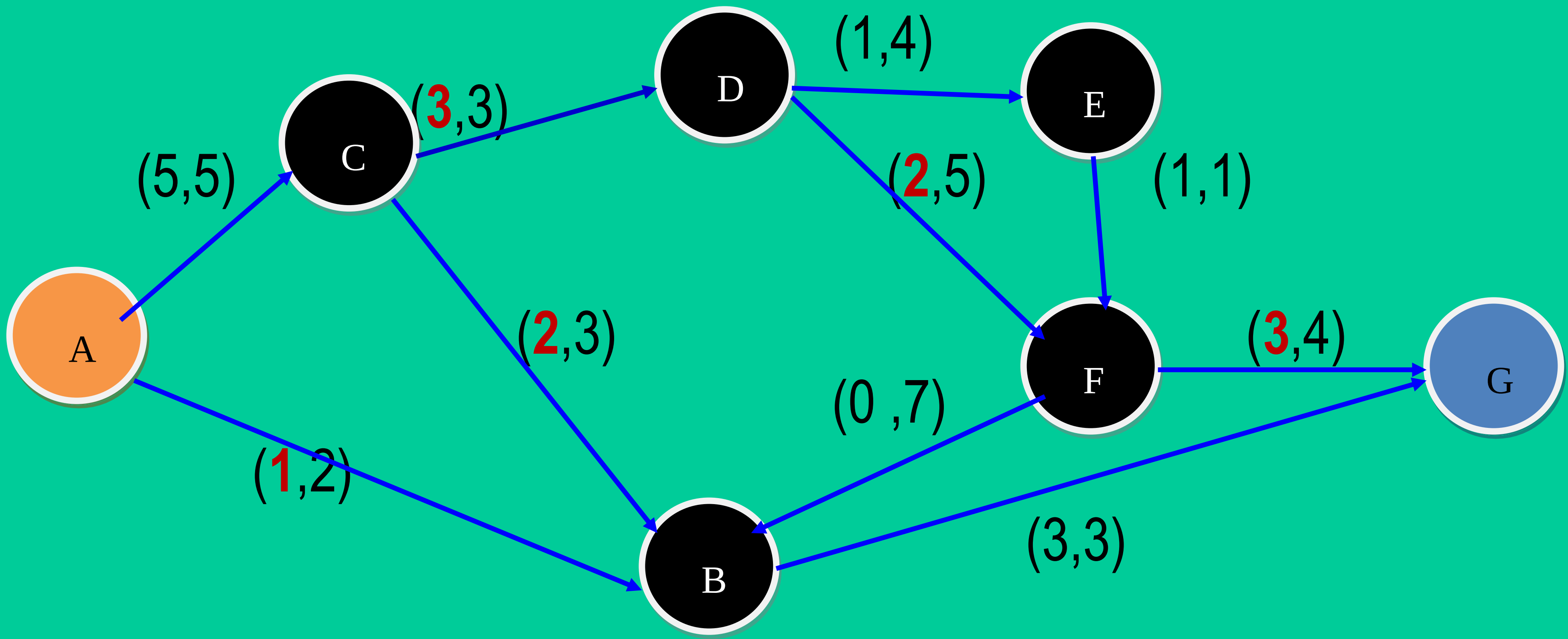
Soit le réseau initial :



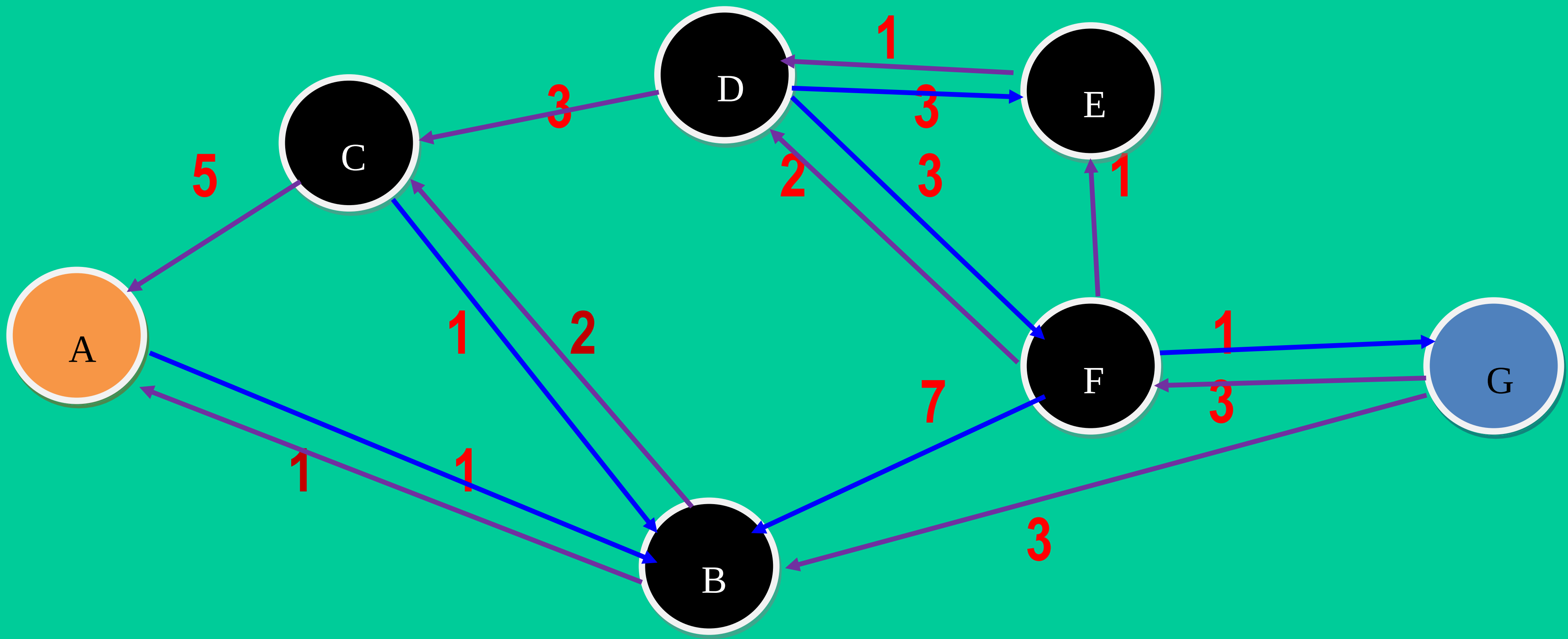
Augmenter de 1 le long du chemin ABCDFG.



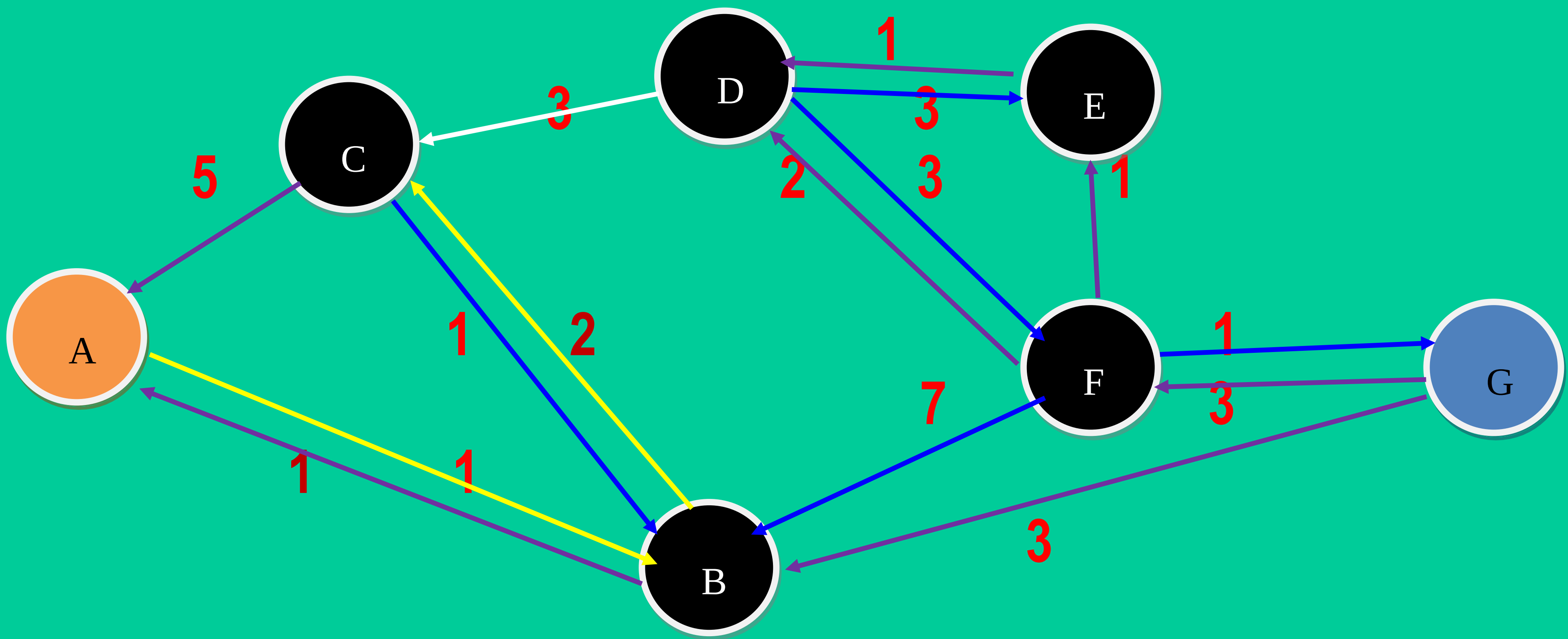
D’où le nouveau flot :



Le nouveau graphe d'écart



Pas de chemin augmentant.



L’arc (D,C) est l’arc «**limitant**».

Procédure d'optimisation du flot par graphe d'écart

Pour (i,j)$\in$X faire **x_{ij}** = 0; *   /* proposer le flot nul qui est compatible*

Graphe_Ecart(G') ; *   /*calculer le graphe d'écart*

Tant que $\exists$**Ca** = **Chemin(G',s,t)**

    min = Min{ r_{ij} | (i,j) $\in$Ca} *   /chercher sur C le r_{ij} minimum*

    Pour (i,j)$\in$**Ca** faire **si** e_{ij} = **1** **alors** $x_{ij} = x_{ij}$ + **min**;

                                          sinon $x_{ij} = x_{ij}$ - **min**;

    Graphe_Ecart(G') */recalculer le nouveau graphe écart*

Fin tant que;

2- Approche flot max/coupe min

Soit un **réseau de flot** défini par le triplet :

$$(G, s, t)$$

où :

$$G = (X, E)$$

Notion de st-coupe

On appelle **st-coupe** et on note :

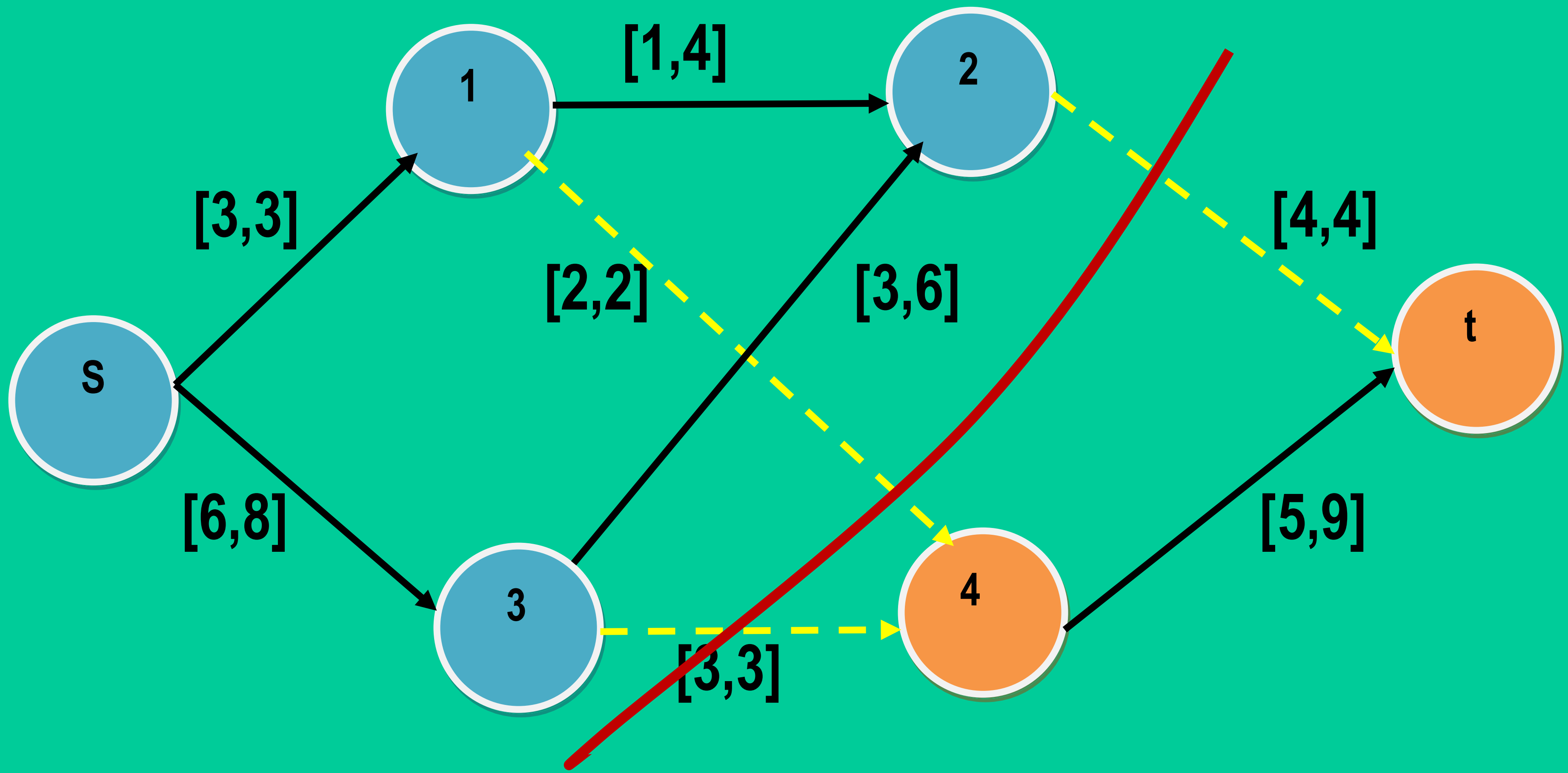
$$[S, \bar{S}]$$

tout **partitionnement** du réseau pouvant être généré par un sous-ensemble **S** de sommets tel que:

$$S \cup \bar{S} = X \; ; \quad S \cap \bar{S} = \emptyset$$
$$s \in S \; ; \; t \in \bar{S}$$

Soit la st-coupe $[S, \bar{S}]$ définie par :

$S = \{s,1,2,3\}$ et $\bar{S} = \{t,4\}$

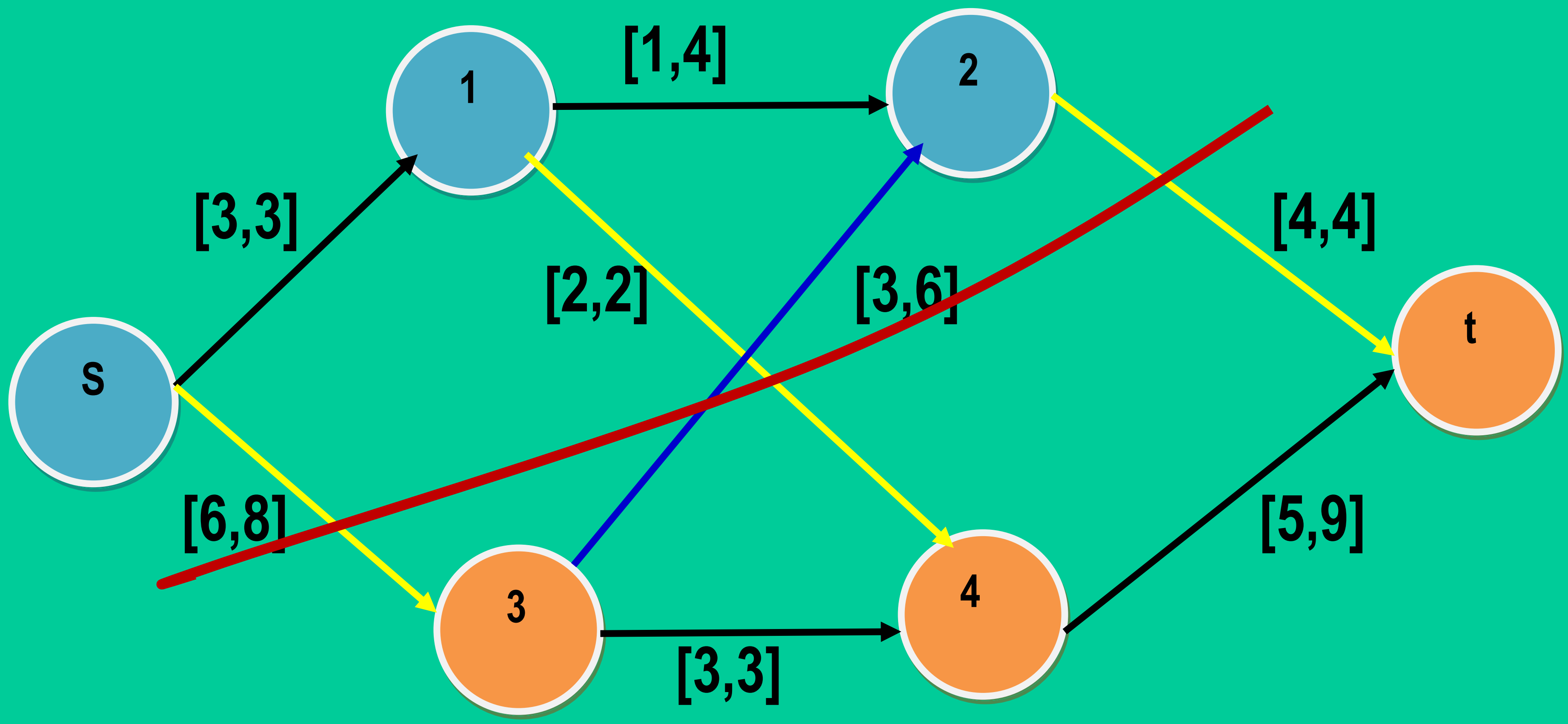


Un tel partitionnement génère deux ensembles d'arcs à étudier en particulier:

$$\omega^{+}(S) = (S, \bar{S}) = \{(i,j) : i \in S \text{ et } j \in \bar{S}\}$$

$$\omega^{-}(S) = (\bar{S}, S) = \{(i,j) : i \in \bar{S} \text{ et } j \in S\}$$

$S = \{s, 1, 2\}$ et $\overline{S} = \{t, 3, 4\}$



$\omega^+(S) = \{(s,3),(1,4), (2,t)\}$ $\omega^-(S) = \{(3,2)\}$

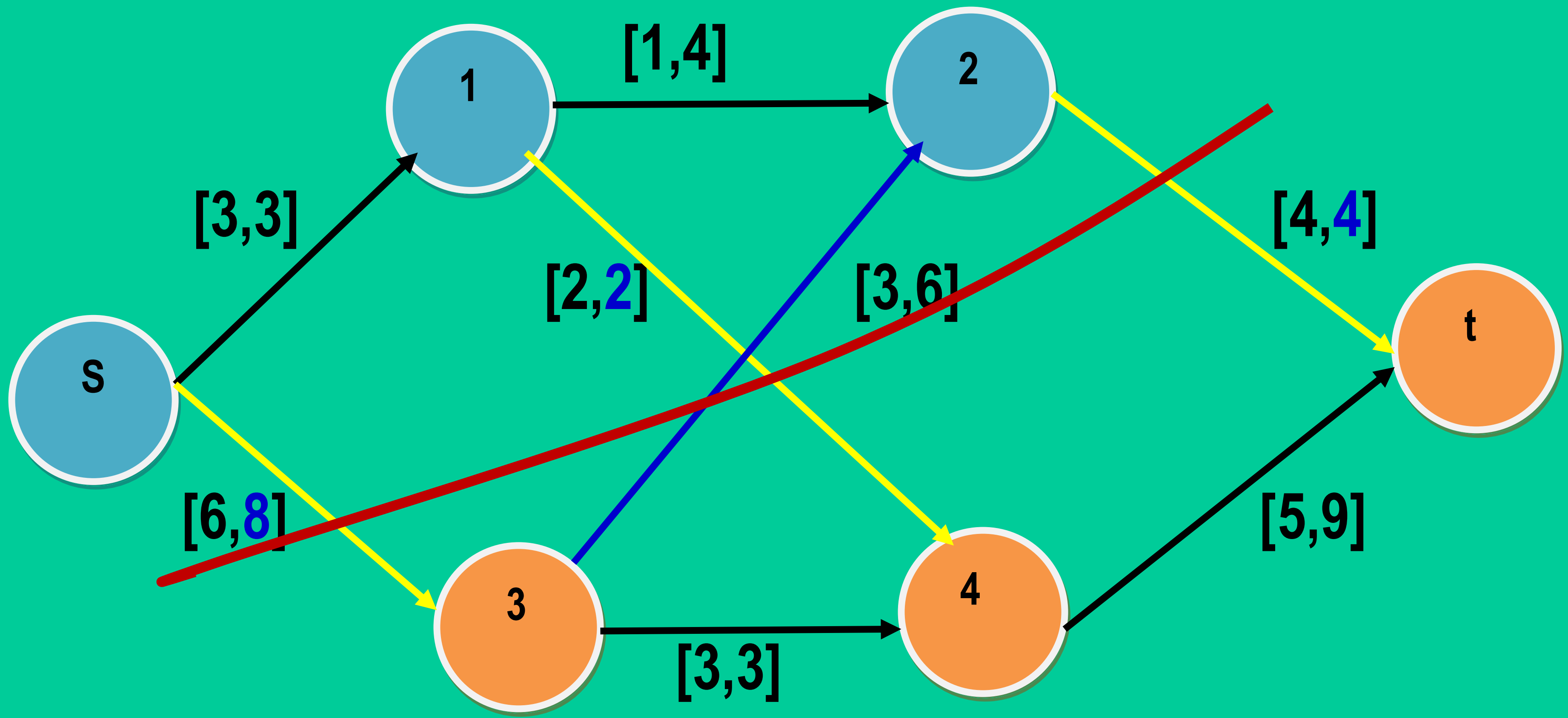
On appelle **capacité** de la st-coupe$[S, \bar{S}]$ et on note:

$$\mathbf{u}([S, \bar{S}])$$

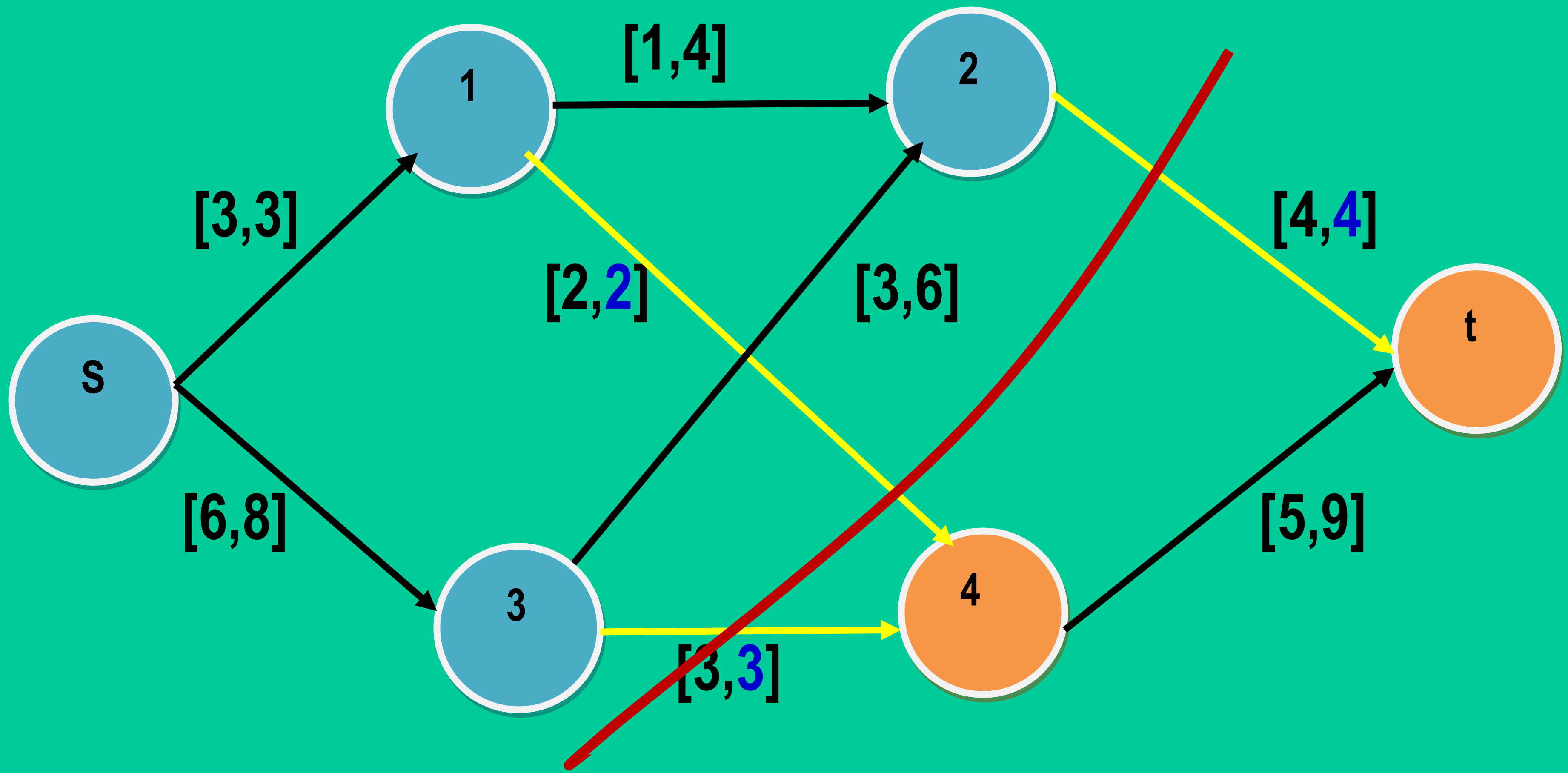
la quantité définie par :

$$u([S, \overline{S}]) = \sum_{(i,j)\in(S,\overline{S})} u_{ij}$$

On appelle **coupe minimale**, la st-coupe de **capacité minimale**.



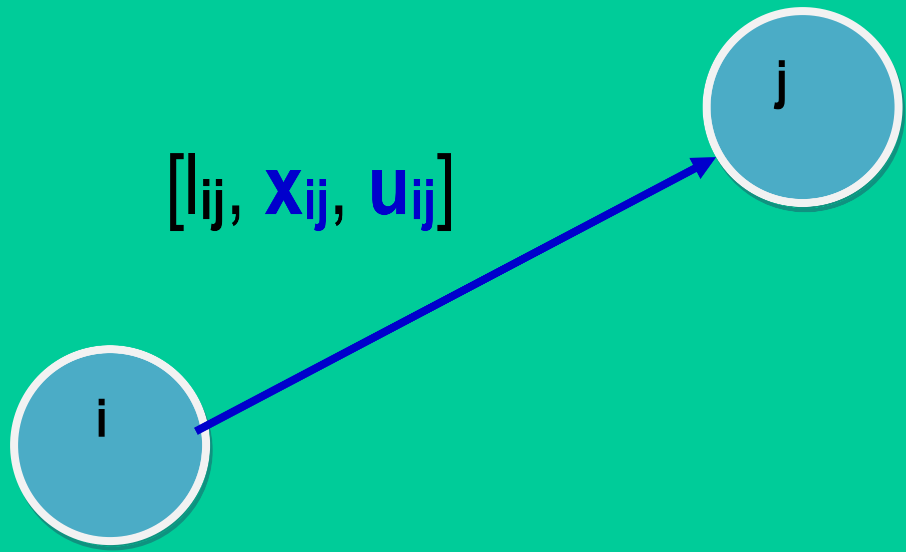
$$u([S, \bar{S}]) = 2+4+8=14$$



$$u([S, \bar{S}]) = 2 + 4 + 3 = 9$$

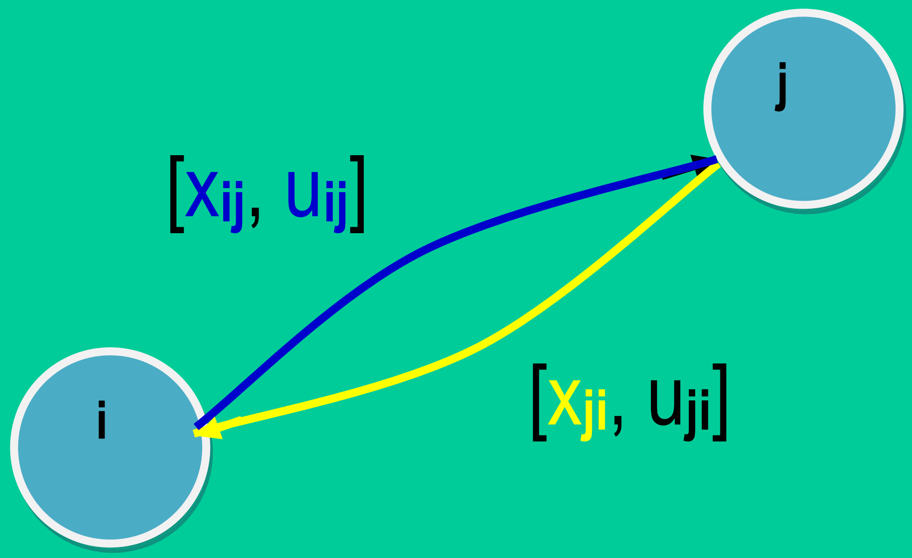
1-Capacité résiduelle dans le cas général

Si l'on exclut que les arcs (i,j) et (j,i) de G soient présents simultanément, la **capacité résiduelle** de l'arc (i,j) s'écrit:



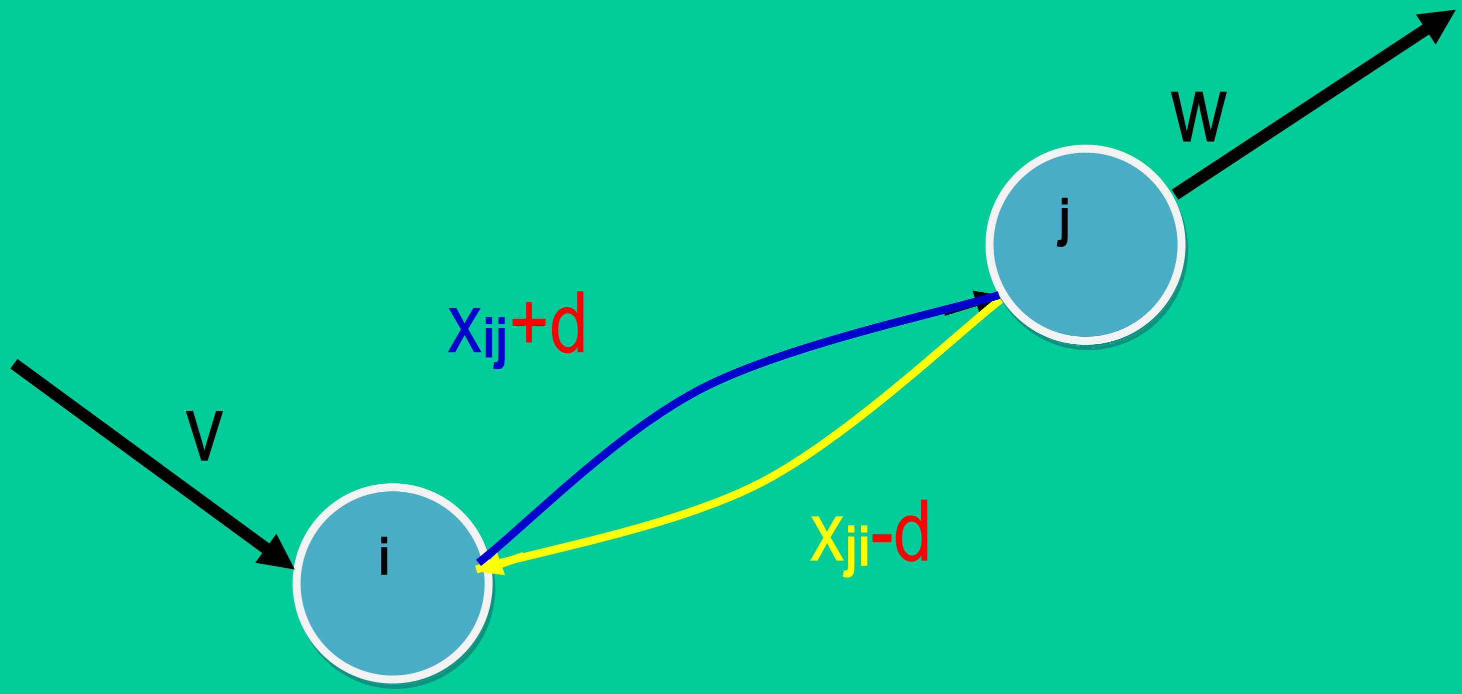
$$r_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$$

Dans le cas général, on peut étendre cette définition en prenant en compte la valeur du flux passant sur l'arc opposé (j,i), soit:



$$r_{ij} = u_{ij} - x_{ij} + x_{ji}$$

En effet, il est toujours possible de "gagner" du flux dans le sens de i vers j en **retirant** le flux présent sur l'arc (**j,i**).



2- Théorème Flot max/Coupe min

La **capacité résiduelle** d'une st-coupe [s, $\overline{s}$] est notée:

$$r[s, \overline{s}]$$

Elle est définie par:

$$r[s, \overline{s}] = \sum_{(i,j) \in (s, \overline{s}])} r_{ij}$$

Soit **V** la valeur du flot traversant la st-coupe (s, $\overline{s}$).

Nous pouvons écrire:

$$v = \sum_{(i,j) \in (S,\bar{S})} x_{ij} - \sum_{(i,j) \in (\bar{S},S)} x_{ij}$$

En considérant le flot traversant la st-coupe $(s, \overline{s})$, on note :

$$V+= \sum_{(i,j)\in\omega+} x_{ij}$$

V^+ est le **flot avant** ou **flot sortant** de la st-coupe $(s, \overline{s})$.

$$V- = \sum_{(i,j)\in\omega-} x_{ij}$$

V^- est le **flot arrière** ou **flot entrant** de la st-coupe $(s, \overline{s})$.

La valeur du flot **V** allant de **s** vers **t** est égale au **flot net** *qui traverse* la coupe [s, $\overline{s}$], soit :

$$V = V^{+} - V^{-}$$

Plus explicitement:

$$V = \sum_{(i,j)\in\omega+} x_{ij} - \sum_{(i,j)\in\omega-} x_{ij}$$

Comme on a, d'une part:

$$\sum_{(i,j)\in\omega+} x_{ij} \leq \sum_{(i,j)\in\omega+} u_{ij}$$

Et, d'autre part:

$$\sum_{(i,j)\in\omega-} x_{ij} \geq 0$$

Alors, il en découle que:

$$V \leq \sum_{(i,j)\in\omega+} u_{ij} = u[s, \overline{s}]$$

Ce qui signifie que la valeur **V** du **flot est bornée** par la capacité de n'importe quelle **st-coupe** du réseau.

L'inégalité :

$$V \leq u[s, \overline{s}]$$

signifie que dans l'hypothèse où l'on trouve un flot **V** de **valeur égale** à la capacité d'une certaine st-coupe $(s, \overline{s})$, soit:

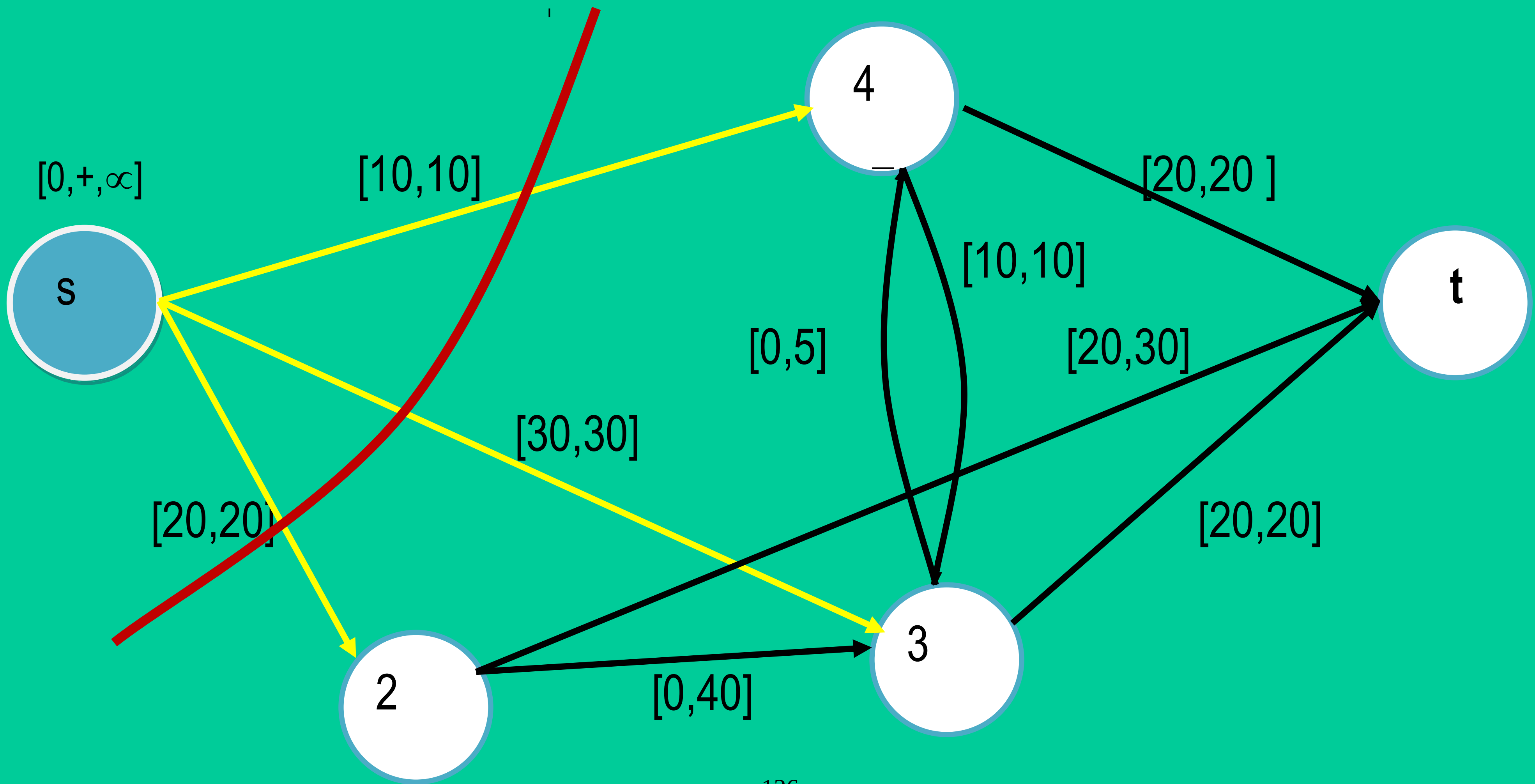
$$V = u[s, \overline{s}]$$

alors:

- le flot **V** est **maximal**
- la st-coupe est de **capacité minimale**.

Soit la st-coupe $[S, \bar{S}]$ définie par :

$S = \{s\}$ et $\bar{S} = \{2,3,4,t\}$



Sa capacité est :

$$U_{[S,\ \bar{S}]} = C_{s2} + C_{s3} + C_{s4}$$
$$= 20 + 30 + 10 = 60$$

La capacité de la coupe est égale à la valeur **60** du flot.

3- Démonstration du théorème coupe min/flot max

Soit donc **S** le sous-ensemble des sommets du réseau tels qu'on ne peut plus augmenter le flot vers **t.**

Cela signifie que dans **S** on ne peut trouver de chaîne de **s** vers **t**.

On pose tout naturellement:

$$\bar{S} = X \setminus S$$

Or, par construction:

$$s \in S \quad \text{et} \quad t \in \bar{S}$$

donc, [S, $\bar{S}$] :est une st-coupe.

Si à partir de **S**, on n'a pas pu atteindre **t** cela signifie qu'on ne peut plus atteindre de sommets de $\bar{S}$ depuis S.

On en déduit donc que:

$$r_{ij} = 0 \quad \forall\ (i,j) \in (S, \bar{S})$$

Or, par définition du graphe d'écart:

$$r_{ij} = (u_{ij} - x_{ij}) + x_{ji}$$

En outre, par définition d'un flot:

$$x_{ij} \leq u_{ij} \quad \text{et} \quad x_{ji} \geq 0$$

Donc :

$$(u_{ij} - x_{ij}) \geq 0$$

et

$$x_{ji} \geq 0$$

Alors :

$$r_{ij} = 0 \quad \Longrightarrow \quad (u_{ij} - x_{ij}) = 0 \quad \text{et} \quad x_{ji} = 0$$

car r_{ij} est une somme nulle de termes positifs ou nuls.

Donc:

$$x_{ij} = u_{ij} \qquad \forall\ (i,j) \in (S, \bar{S})$$

$$\text{et} \quad x_{ij} = 0 \qquad \forall\ (i,j) \in (\bar{S}, S)$$

Or:

$$v = \sum_{(i,j) \in (S,\bar{S})} x_{ij} - \sum_{(i,j) \in (\bar{S},S)} x_{ij}$$

Comme :

$$x_{ij} = 0 \ \forall \ (i,j) \in (\bar{S}, S)$$

on a:

$$v = \sum_{(i,j) \in (S, \bar{S})} x_{ij}$$

et comme:

$$x_{ij} = u_{ij} \qquad \forall \ (i,j) \in (S, \bar{S})$$

on obtient finalement:

$$v = \sum_{(i,j) \in (S,\bar{S})} u_{ij}$$

On est donc dans une situation où la valeur du flot est égale à la capacité U $[S, \bar{S}]$ de la coupe.

Or, il a été montré précédemment que :

$$v \leqslant \sum_{(i,j)\in(S,\bar{S})} u_{ij} = u_{[S,\bar{S}]}$$

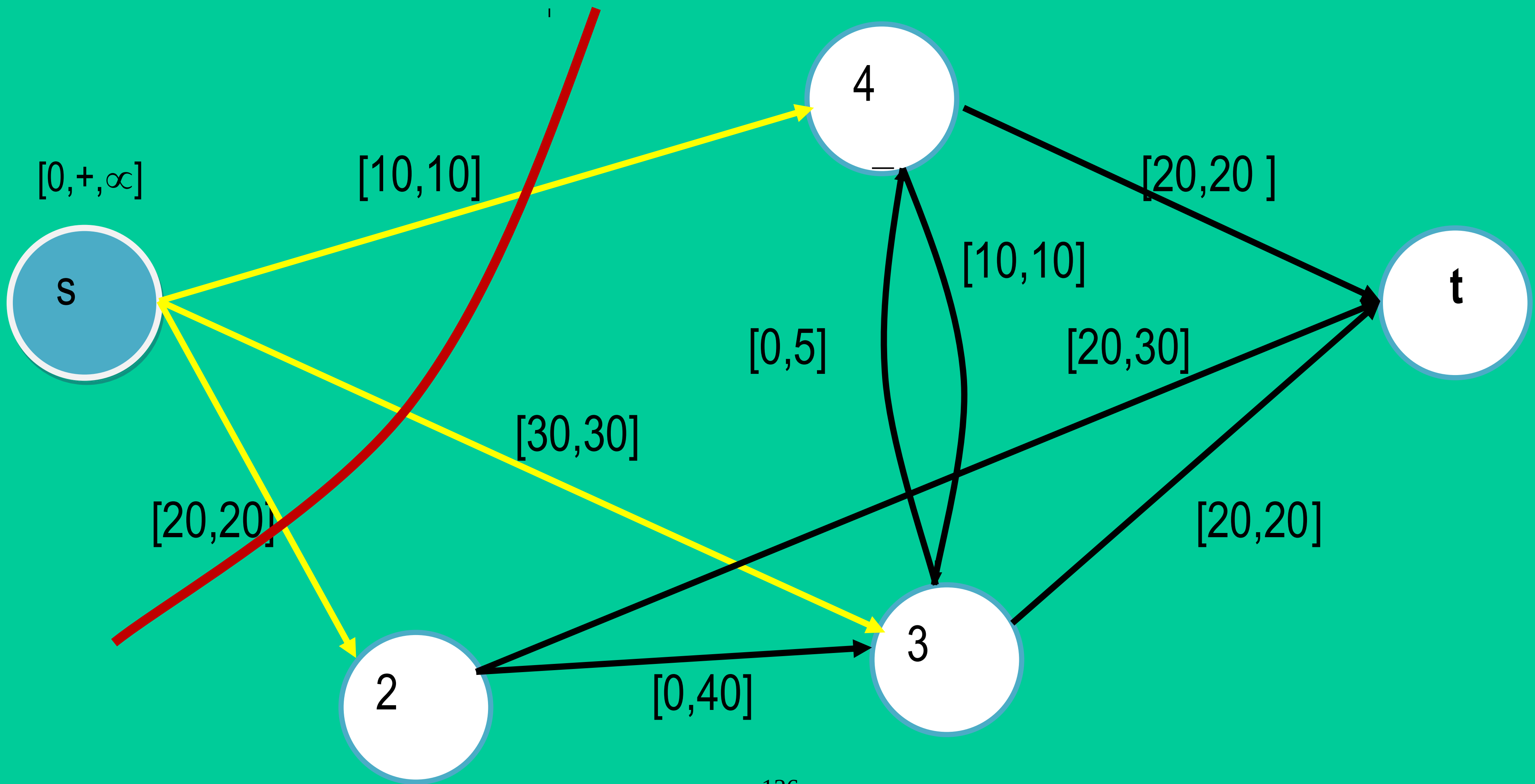
Ce qui signifie que nous sommes dans le cas d'un **flot max/coupe min** où :

- V est un flot maximal

- la st-coupe $[S, \bar{S}]$ est de capacité minimale.

Soit la st-coupe $[S, \bar{S}]$ définie par :

$S = \{s\}$ et $\bar{S} = \{2,3,4,t\}$

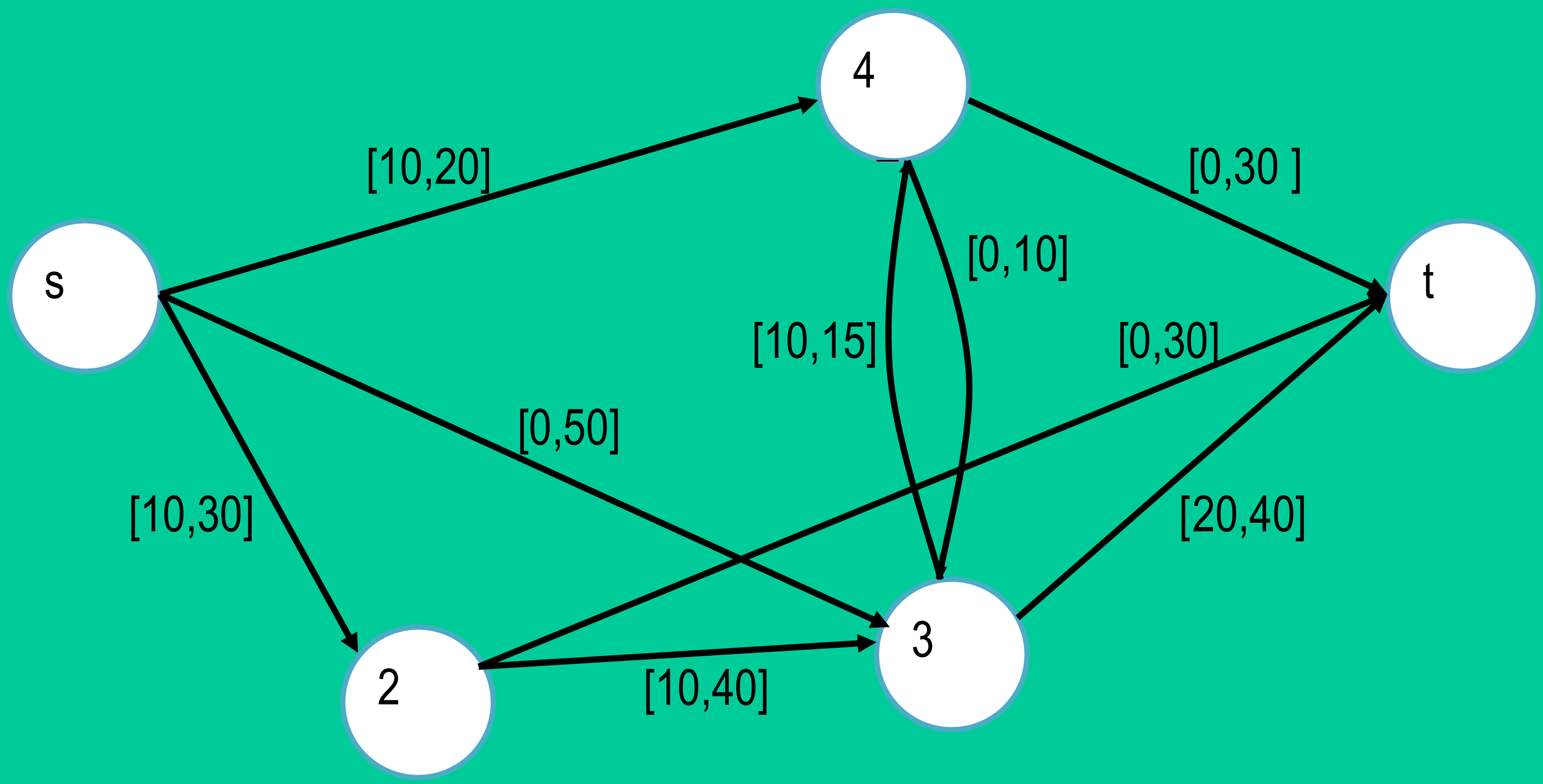


Sa capacité est :

$$U_{[S,\ \bar{S}]} = C_{s2} + C_{s3} + C_{s4}$$
$$= 20 + 30 + 10 = 60$$

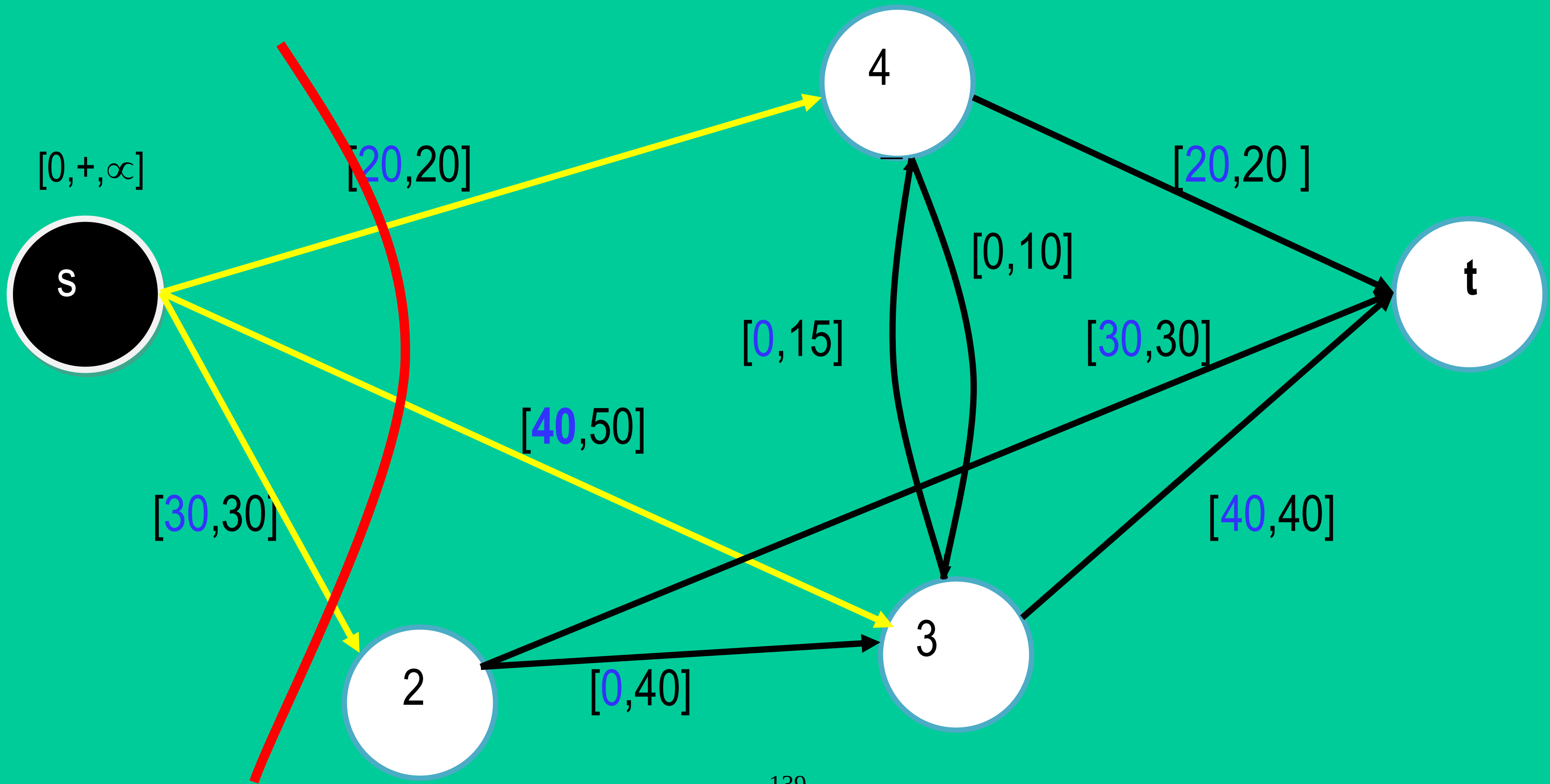
La capacité de la coupe est égale à la valeur **60** du flot.

Exemple



Soit la st-coupe $[S, \bar{S}]$ définie par :

$S = \{s\}$ et $\bar{S} = \{2,3,4,t\}$



Sa capacité est :

$$U_{[S,\,\bar{S}]} = C_{2t} + C_{3t} + C_{4t}$$
$$= 30 + 40 + 20 = 90$$

La capacité de la coupe étant égale à la valeur **90** du flot, alors, on peut conclure que :

- le flot **V= 90** est **maximal**
- la st-coupe [S, $\bar{S}$] est **minimale**.