

Rapport de TP : Algèbre et Analyse de Données

Semaines du 26 janvier et 2 février

Abriel Alex

7 février 2026

Table des matières

1 Exercice 1	2
2 Exercice 2	3
3 Exercice 3	4
4 Exercice 4 : Bonus	5
5 Exercice 5	6
6 Exercice 6	7

1 Exercice 1

Nous étudions trois formes bilinéaires symétriques définies par des matrices A , B et C de taille 2×2 . Pour déterminer si elles constituent des produits scalaires, nous avons tracé l'évolution de la forme quadratique associé $\varphi(u, u)$.

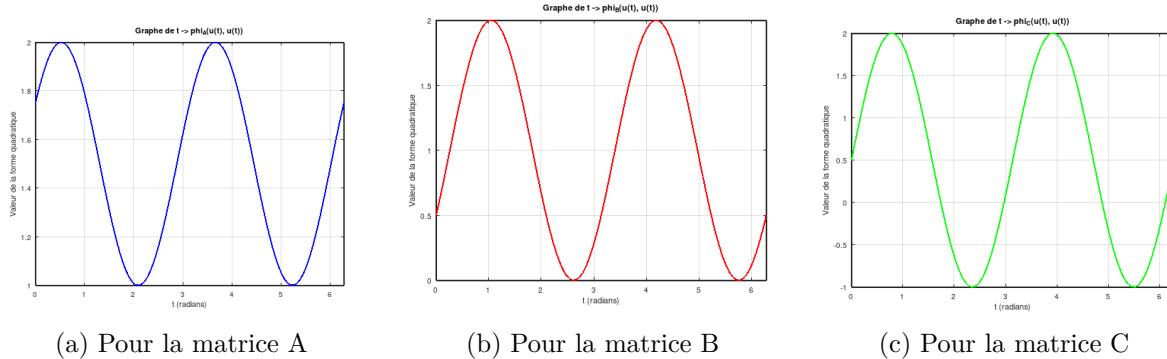


FIGURE 1 – Graphes de $t \mapsto \varphi(u(t), u(t))$ sur $[0, 2\pi]$.

Une forme bilinéaire symétrique est un produit scalaire si et seulement si elle est **définie positive**, ce qui se traduit par des valeurs propres strictement positives.

La diagonalisation numérique des matrices nous donne les résultats suivants, qui se confirme avec les graphiques :

- **Matrice A** : Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$.
Le graphe oscille strictement entre 1 et 2. La forme est définie positive.
Conclusion : φ_A est un produit scalaire.
- **Matrice B** : Les valeurs propres sont $\lambda_1 \approx 0$ et $\lambda_2 = 2$.
Le graphe touche l'axe des abscisses (minimum en 0). La forme est positive mais pas définie (dégénérée).
Conclusion : φ_B n'est pas un produit scalaire.
- **Matrice C** : Les valeurs propres sont $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 2$.
Le graphe prend des valeurs négatives. La forme n'est pas positive.
Conclusion : φ_C n'est pas un produit scalaire.

On vérifie ainsi le principe de Rayleigh : sur le cercle unité, les valeurs de la forme quadratique sont comprises entre la plus petite et la plus grande valeur propre de la matrice.

2 Exercice 2

Les figures suivantes montrent l'ensemble $f(\mathcal{C}) = \{M \cdot u \mid u \in \mathcal{C}\}$ pour chaque matrice. Les segments représentent les directions propres mises à l'échelle par leurs valeurs propres respectives ($\lambda_i v_i$).

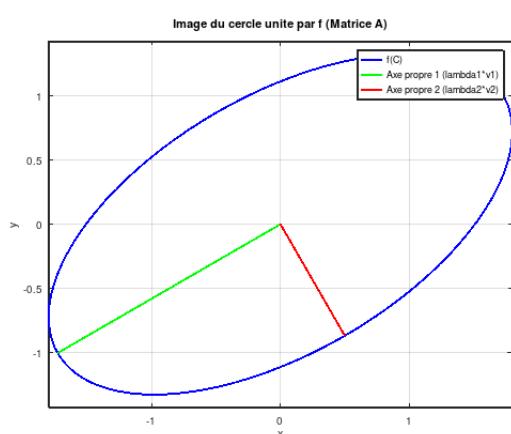
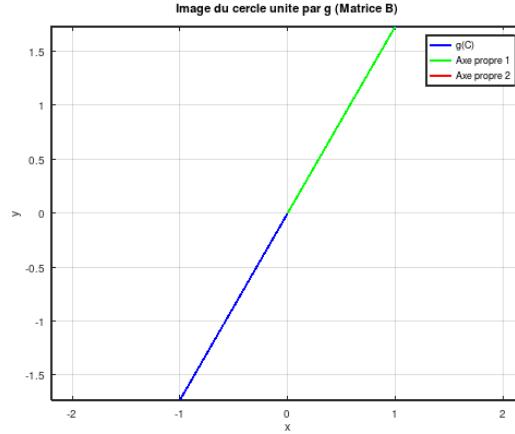
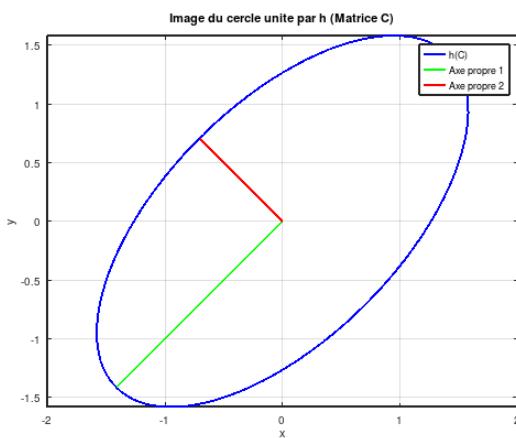
(a) Image par f (Matrice A)(b) Image par g (Matrice B)(c) Image par h (Matrice C)

FIGURE 2 – Images du cercle unité et axes principaux

- **Pour A (définie positive)** : L'image est une ellipse dont les demi-axes principaux sont portés par les vecteurs propres et ont pour longueurs les valeurs propres $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$.
- **Pour B (positive non définie)** : L'image est dégénérée en un segment de droite. Cela s'explique par la valeur propre nulle ($\lambda_1 \approx 0$). La transformation projette tout le plan sur la direction du vecteur propre associé à $\lambda_2 = 2$.
- **Pour C (indéfinie)** : L'image est une ellipse. Bien qu'une valeur propre soit négative ($\lambda_1 = -1$), elle reste une ellipse centrée en l'origine, identique à celle qu'on obtiendrait avec $|\lambda_1| = 1$.

Le théorème spectral garantit que toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée. Nous avons vérifié cela numériquement en calculant le produit scalaire entre les deux vecteurs propres normalisés v_1 et v_2 pour chaque matrice.

Les résultats obtenus sont de l'ordre de 10^{-17} :

$$v_1 \cdot v_2 \approx 0$$

Nous confirmons ainsi que pour les trois matrices symétriques A , B et C , les bases propres

formées sont bien orthonormées.

3 Exercice 3

Le cercle unité pour la norme $\|\cdot\|_A$, défini par l'équation $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 = 1$ dans la base propre, est tracé ci-dessous. Nous avons utilisé la paramétrisation $x'(t) = \cos(t)/\sqrt{\lambda_1}$ et $y'(t) = \sin(t)/\sqrt{\lambda_2}$ puis effectué le changement de base vers la base canonique.

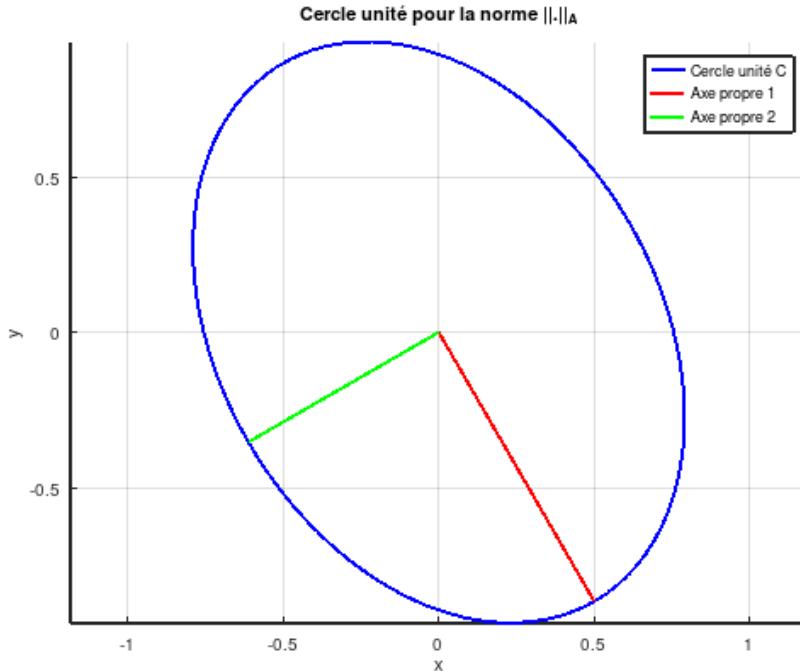


FIGURE 3 – Cercle unité pour la norme $\|\cdot\|_A$ et axes propres

L'ensemble des vecteurs de norme 1 pour $\|\cdot\|_A$ forme une ellipse. Ses axes de symétrie sont portés par les vecteurs propres de A . Les longueurs des demi-axes sont $1/\sqrt{\lambda_1} = 1$ et $1/\sqrt{\lambda_2} \approx 0.707$.

4 Exercice 4 : Bonus

Nous reprenons le principe de l'exercice précédent pour une matrice A de taille 3×3 . La sphère unité pour la norme $\|\cdot\|_A$ est l'ensemble des vecteurs $u \in \mathbb{R}^3$ vérifiant $u^T A u = 1$.

Dans la base propre orthonormée \mathcal{B}' , cette équation s'écrit :

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \lambda_3(z')^2 = 1$$

Il s'agit d'un ellipsoïde dont les axes principaux sont portés par les vecteurs propres de A . Les longueurs des demi-axes sont données par $1/\sqrt{\lambda_1}$, $1/\sqrt{\lambda_2}$ et $1/\sqrt{\lambda_3}$.

Nous avons généré cet ellipsoïde et tracé les trois axes principaux (vecteurs propres normalisés par les valeurs propres inverses).

Sphère unité pour la norme $\|\cdot\|_A$

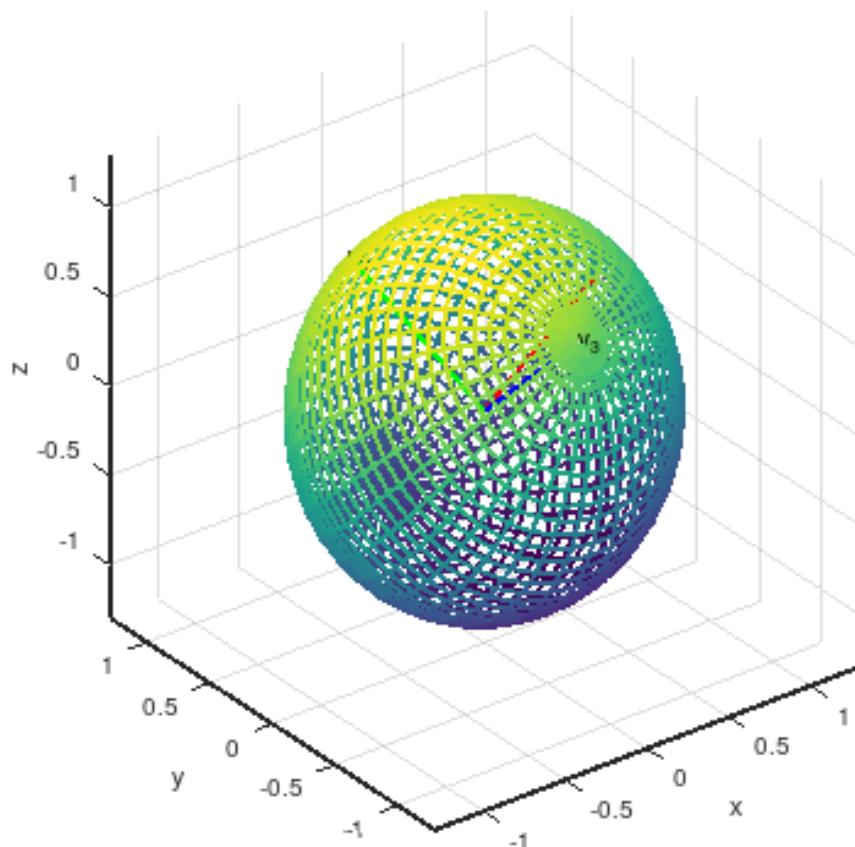


FIGURE 4 – Sphère unité pour la norme $\|\cdot\|_A$ (Ellipsoïde) et repère propre

La figure 3D confirme que la "sphère unité" associée à la norme $\|\cdot\|_A$ est un ellipsoïde. Les vecteurs propres (en rouge, vert, bleu) indiquent les axes de symétrie de la surface. On observe que la surface est plus allongée dans certaines directions, correspondant aux directions où la courbure (liée à la valeur propre) est la plus faible.

5 Exercice 5

Nous considérons le système surdéterminé $AX = U$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ce système n'admet pas de solution exacte car $U \notin \text{Im}(A)$. Nous cherchons la solution $X_{opt} = (x, y)$ au sens des moindres carrés, c'est-à-dire minimisant $\|AX - U\|$. En Octave, l'opérateur $A \setminus U$ nous donne le résultat suivant :

$$x \approx 0.6667, \quad y \approx -1.0000$$

Soit : $x = 2/3$ et $y = -1$.

Le vecteur $p_F(u) = AX_{opt} = x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2$ correspond à la projection orthogonale de U sur le plan $F = \text{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ (l'espace colonne de A). Le vecteur erreur $e = U - p_F(u)$ est orthogonal à F .

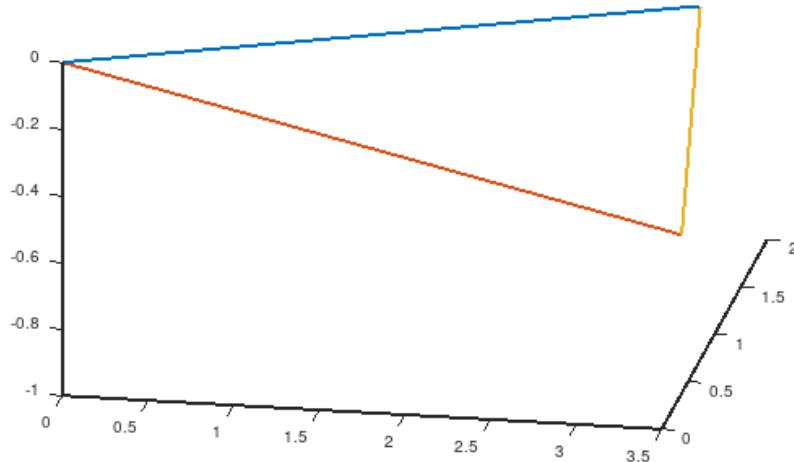


FIGURE 5 – Projection orthogonale de u sur F . Le segment reliant u à $p_F(u)$ est orthogonal au plan défini par les vecteurs colonnes de A .

La distance entre un point U et un sous-espace vectoriel F est minimale lorsque l'on considère la projection orthogonale de U sur F . Le couple (x, y) optimal est donc celui tel que le vecteur AX soit exactement ce projeté orthogonal $p_F(u)$. C'est la solution des équations normales $A^TAX = A^TU$.

6 Exercice 6

Un navire se repère grâce à trois phares situés en (x_i, y_i) pour lesquels il mesure des azimuts θ_i . Le navire se trouve donc théoriquement à l'intersection de trois droites d'équations :

$$-\sin(\theta_i)x + \cos(\theta_i)y = -\sin(\theta_i)x_i + \cos(\theta_i)y_i$$

Cela nous donne un système linéaire surdéterminé $A_{pos}X = B_{pos}$ avec :

$$A_{pos} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) \\ -\sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) \\ -\sin(\theta_3) & \cos(\theta_3) \end{pmatrix}, \quad B_{pos} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta_1)x_1 + \cos(\theta_1)y_1 \\ -\sin(\theta_2)x_2 + \cos(\theta_2)y_2 \\ -\sin(\theta_3)x_3 + \cos(\theta_3)y_3 \end{pmatrix}$$

Les mesures n'étant pas parfaites, les droites ne sont pas concourantes. Nous estimons la position en résolvant ce système au sens des moindres carrés (minimisation de la somme des carrés des distances algébriques aux droites).

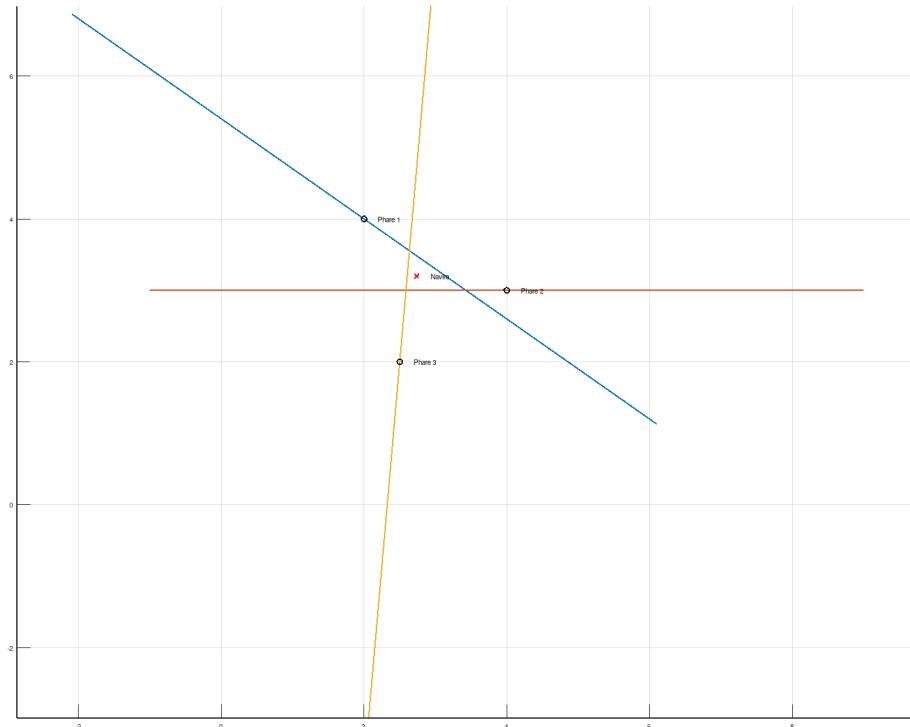


FIGURE 6 – Localisation du navire par triangulation. La croix rouge indique la position estimée (moindres carrés).

La position estimée du navire (croix rouge) se situe dans la zone centrale définie par le triangle d'intersection des trois droites de visée, minimisant ainsi l'erreur globale par rapport aux trois relevés.