anpec

associação nacional de centros de pós graduação em economia

EXAME NACIONAL DE SELEÇÃO 2024

PROVA DE MATEMÁTICA

2º Dia: 28/09/2023 - QUINTA-FEIRA

HORÁRIO: 9h00m às 10h30m (horário de Brasília)

EXAME NACIONAL DE SELEÇÃO 2024
PROVA DE MATEMÁTICA
2º Dia: 28/09 - QUINTA-FEIRA (Manhã)
HORÁRIO: 9h00m às 10h30m

Instruções

1. Este CADERNO é constituído de dez questões objetivas.
2. Nas questões do tipo A, recomenda-se não marcar ao acaso: cada item cuja resposta divirja do gabarito oficial acarretará a perda de $\frac{1}{n}$ ponto, em que n é o número de itens da questão a que pertença o item, conforme consta no Manual do Candidato.
3. Durante as provas, o(a) candidato(a) não deverá levantar-se ou comunicar-se com outros(as) candidatos(as).
4. A duração da prova é de **uma hora e trinta minutos**, já incluído o tempo destinado à identificação do(a) candidato(a) – que será feita no decorrer da prova – e ao preenchimento da **FOLHA DE RESPOSTAS**.
5. Durante a realização das provas não é permitida a utilização de calculadora, equipamentos eletrônicos ou qualquer material de consulta.
6. A desobediência ao fiscal de prova ou a qualquer uma das recomendações constantes nas presentes Instruções e na **FOLHA DE RESPOSTAS** poderá implicar a anulação das provas do(a) candidato(a).
7. Só será permitida a saída de candidatos, levando o Caderno de Provas, **somente a partir de 1 hora após o início da prova** e nenhuma folha pode ser destacada.

AGENDA

8. 02/10/2023 – 14 horas – Divulgação dos gabaritos das provas objetivas, no endereço: http://www.anpec.org.br.
9. 02/10 a 03/10/2023 – Recursos identificados pelo autor serão aceitos até às 14h do dia 03/10 do corrente ano. Não serão aceitos recursos fora do padrão apresentado no Manual do Candidato.
10. 06/11/2023 – 14 horas – Divulgação do resultado na Internet, no *site* acima citado.

OBSERVAÇÕES:

11. Em nenhuma hipótese a ANPEC informará resultado por telefone.
12. É proibida a reprodução total ou parcial deste material, por qualquer meio ou processo, sem autorização expressa da ANPEC.
13. Nas questões de **1 a 10 (não numéricas)**, marque de acordo com a instrução de cada uma delas: itens **VERDADEIROS** na coluna **V**, itens **FALSOS** na coluna **F**, ou deixe a resposta **EM BRANCO**. Para **evitar a desclassificação** do candidato, **pelo menos um item de pelo menos uma questão** deve ser respondido na folha ótica de respostas.
14. Caso a resposta seja **numérica**, marque o dígito da **DEZENA** na coluna D e o dígito da **UNIDADE** na coluna U, ou deixe a resposta **EM BRANCO**.
15. Atenção: o algarismo das DEZENAS deve ser obrigatoriamente marcado, mesmo que seja igual a ZERO.

QUESTÃO 01

Sejam $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 0, 2, 4\}$, e $C = \{e, \pi\}$.

Então, julgue como verdadeiras ou falsas as seguintes afirmativas:

⓪ $B \in A \cup C$.

① Existe função injetora de $B \cup C$ para A, mas não de A para $B \cup C$.

② $A \cap (B \cup C) = \{\{0\}, \{2\}, \{4\}\}$.

③ Não existe o conjunto $((A \cap B) \cap C) \times C$.

④ $(3, 0) \in A \times B$, mas $(3, 2) \notin A \times B$.

QUESTÃO 02

Sejam os números $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$ parâmetros do problema de maximizar a função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x_1, x_2) = -x_1^4 + x_1^2 - \frac{x_2^2}{2} + 2x_2$$

sujeito às restrições $ax_1 + x_2 = b$, $x_1 \geq 0$, e $x_2 \geq 0$. Chamamos esse problema de **P**. Julgue as afirmativas abaixo de acordo com a sua veracidade:

⓪ A matriz Hessiana da função f em qualquer ponto $x \in \mathbb{R}^2$ é negativa definida.

① Quaisquer que sejam os valores de a e b, se o gradiente $\nabla f(x_1^*, x_2^*) = (0,0)$, então (x_1^*, x_2^*) resolve o problema **P**.

② Quando $a = b = 0$, o problema **P** não tem solução.

③ Quando $a > 0$ e $b = 0$, qualquer solução (x_1^*, x_2^*) do problema **P** satisfaz $x_2^* = 2x_1^*$.

④ Quando $a = b = 1$, em qualquer solução (x_1^*, x_2^*) do problema **P**, o gradiente satisfaz $\nabla f(x_1^*, x_2^*) \neq (0,0)$.

QUESTÃO 03

Julgue como verdadeiras ou falsas as seguintes afirmativas:

⓪ Dada a equação diferencial ordinária (EDO) $\ddot{x} - 6\dot{x} + 9x = 0$, as funções $x_1(t) = -e^{3t}$ e $x_2(t) = 2te^{3t}$, são soluções particulares desta EDO e sua solução geral é dada por $x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}$, onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

① Uma solução particular $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para a EDO $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = -\cos(2t)$ é do tipo $y(t) = a\cos(2t)$, onde $a \in \mathbb{R}$ é uma constante a ser determinada.

② As funções $x_1(t) = \cos(t)$ e $x_2(t) = -2sen\left(t + \pi/2\right)$ são soluções particulares para a EDO dada por $\ddot{x} + x = 0$ e sua solução geral $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz $x(t) = c_1 \cos(t) + c_2 sen\left(t + \pi/2\right)$, onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

③ O sistema de EDOs

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = x - y \end{cases}$$

tem um único ponto de equilíbrio dado por $(0,0)$ e para todo par de soluções (x, y), onde $x, y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, vale que $\lim_{t\to+\infty}(x(t), y(t)) = (0,0)$.

④ Dada a equação em diferenças $x_{t+2} - x_{t+1} + x_t = 0$, a única solução tal que existe o limite $\lim_{t\to+\infty} x_t$ satisfaz $x_t = 0$, para todo $t \geq 0$.

QUESTÃO 04

Fixado um número real $\alpha \in (0,1)$, defina a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de maneira que $f(x) = 0$ para $x \leq 0$ e $f(x) = \alpha x - x^{\alpha}$ para $x > 0$. Julgue como verdadeiras ou falsas as seguintes afirmativas:

⓪ A função f não é derivável no ponto $x = 0$, mas existe o $\lim_{x \to 0} f(x)$, sendo que este é igual a zero.

① Quando $x_1 < x_2 < 1$ teremos $f(x_1) < f(x_2)$, enquanto que, quando se tem a desigualdade $x_4 > x_3 > 1$, vale que $f(x_3) > f(x_4)$.

② A desigualdade $f''(x) > 0$ vale para todo $x > 0$.

③ Quando $\alpha = \frac{1}{2}$, o problema de minimizar $f(x)$ em $x \in \mathbb{R}$ não admite solução, enquanto que o problema de maximizar $f(x)$ em $x \in \mathbb{R}$ tem $x = 1$ como única solução.

④ A integral $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ não converge.

QUESTÃO 05

Dada uma matriz real quadrada A qualquer, julgue como verdadeiras ou falsas as seguintes afirmativas:

⓪ A ser inversível implica que A^{2024} também é inversível.

① A ser simétrica implica que A^{2024} também é simétrica.

② A ser triangular superior implica que A^{2024} também é triangular superior.

③ A ser diagonalizável implica que A^{2024} também é diagonalizável.

④ A ser negativa semidefinida implica que A^{2024} também é negativa semidefinida.

QUESTÃO 06

Julgue como verdadeiras ou falsas as seguintes afirmativas:

⓪ A equação $2y - \frac{y^2}{2} + x^2 - x - \frac{3}{2} = 0$ define implicitamente y como função de x, denotada por $y = f(x)$, em uma vizinhança do ponto $(x_0, y_0) = (0,1)$, valendo que $f'(0) = 1$.

① Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função continuamente diferenciável e sua derivada $f': \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que $f'(-x) = -f'(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então $f(1) = f(-1)$.

② O valor de $a \in \mathbb{R}$ que minimiza $\int_0^a x^2\, dx$ é $a = 0$.

③ $\int_0^1 x^5\, e^{x^2} dx = \frac{e-2}{4}$.

④ $\int_{-1}^2 \left(\int_0^1 |x - y| dx \right) dy = 0$.

QUESTÃO 07

Julgue como verdadeiras ou falsas as seguintes afirmativas:

⓪ No $\mathbb{R}^3$, o plano que passa pelo ponto $(2,1,2)$ e que é paralelo ao plano $\{\, x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 1\}$ é o conjunto $\{(12 + 2t - 6s, t, s) : \ t, s \in \mathbb{R}\}$.

① Sejam os planos no $\mathbb{R}^3$ dados por:
$\pi_1 = \{\, x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \,\}$, $\pi_2 = \{\, x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \,\}$,
$\pi_3 = \{x \in \mathbb{R}^3 : 3x_1 - 2x_3 = 0\}$ e $\pi_4 = \{\, x \in \mathbb{R}^3 : 7x_1 - 2x_2 = 0\}$.
Então $\pi_1 \cap \pi_2 = \pi_3 \cap \pi_4$.

② Sejam os vetores x, y e z no $\mathbb{R}^3$ expressos por:
$x = (\,4, 3, -1\,)$, $y = (\,3, -2, 12\,)$ e $z = (\,7, 3, 3\,)$.
Se V denota o subespaço do $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores x e y, então $z \in V$.

③ Se $d(x, y)$ é a distância (euclidiana) entre $x, y \in \mathbb{R}^2$ e $o = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ é a origem, então $d(x, o) + d(y, o) \geq d(x, y)$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^2$.

④ Seguindo a mesma notação do item anterior, não existem vetores não-nulos $x, y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{o\}$ tais que $d(x, y) = d(x + y, o)$.

QUESTÃO 08

Avalie a veracidade das afirmações abaixo:

⓪ A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10\sqrt{n}+2^n}$ é convergente.

① $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1012}{n+1012}\right)^{-n} = e^{2024}$.

② A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\min\{n,n^2\}}$ é convergente.

③ $\lim_{n\to\infty} n \operatorname{sen}\left(\frac{2024}{n}\right) = 2024$.

④ $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{2024}}{(1+10^{-2024})^n} = 0$.

QUESTÃO 09

Encontre o valor máximo da função $f(x, y) = \frac{8x^2+20y^2-48x-200y+620}{(x^2-6x+10)(y^2-10y+27)}$

sobre o seu domínio.

QUESTÃO 10

Seja M_{10} o espaço vetorial das matrizes reais quadradas $A = (a_{ij})$ de ordem 10. Considere o subespaço vetorial das matrizes simétricas de ordem 10, definido como $V = \{ A \in M_{10} : A = A^t \}$, onde A^t denota a matriz transposta de A. Ache o valor da dimensão de V.