anpec
associação nacional de
centros de pós graduação
em economia

EXAME NACIONAL DE SELEÇÃO 2025

PROVA DE MATEMÁTICA

2º Dia: 19/09/2024 - QUINTA-FEIRA
HORÁRIO: 9h00m às 10h30m (horário de Brasília)

EXAME NACIONAL DE SELEÇÃO 2025
PROVA DE MATEMÁTICA
2º Dia: 19/09 - QUINTA-FEIRA (Manhã)
HORÁRIO: 9h00m às 10h30m

Instruções

1. Este **CADERNO** é constituído de **dez** questões **objetivas**.
2. Recomenda-se, nas questões apresentadas a seguir, não marcar ao acaso: cada item cuja resposta divirja do gabarito oficial acarretará a perda de $\frac{1}{n}$ ponto, em que n é o número de itens da questão a que pertença o item, conforme consta no Manual do Candidato.
3. Durante as provas, o(a) candidato(a) não deverá levantar-se ou comunicar-se com outras pessoas.
4. A duração da prova é de **uma hora e trinta minutos**, já incluído o tempo destinado à identificação do(a) candidato(a) – que será feita no decorrer da prova – e ao preenchimento da **FOLHA DE RESPOSTAS**.
5. Durante a realização das provas **não** é permitida a utilização de calculadora, equipamentos eletrônicos ou qualquer material de consulta.
6. A desobediência ao fiscal de prova ou a qualquer uma das recomendações constantes nas presentes Instruções e na **FOLHA DE RESPOSTAS** poderá implicar a anulação das provas do(a) candidato(a).
7. Só será permitida a saída de candidatos, levando o Caderno de Provas, **somente a partir de 1 hora após o início da prova** e nenhuma folha pode ser destacada.

AGENDA

- 23/09/2024 – 14 horas – Divulgação dos gabaritos das provas objetivas, no endereço: http://www.anpec.org.br.
- 23/09 a 24/09/2024 – Recursos identificados pelo autor serão aceitos até às 14h do dia 24/09 do corrente ano. Não serão aceitos recursos fora do padrão apresentado no Manual do Candidato.
- 28/10/2024 – 14 horas – Divulgação do resultado na Internet, no *site* acima citado.

OBSERVAÇÕES:

- Em nenhuma hipótese a ANPEC informará resultado por telefone.
- É **proibida** a reprodução total ou parcial deste material, por qualquer meio ou processo, sem autorização expressa da ANPEC.
- Nas questões de **1** a **10 (não numéricas),** marque de acordo com a instrução de cada uma delas: itens **VERDADEIROS** na coluna **V** itens **FALSOS** na coluna **F** ou deixe a resposta **EM BRANCO.**
- Caso a **resposta seja numérica**, marque o dígito da **DEZENA** na coluna D e o dígito da **UNIDADE** na coluna U, ou deixe a resposta **EM BRANCO**.
- Atenção: o algarismo das **DEZENAS** deve ser obrigatoriamente marcado, mesmo que seja igual a **ZERO.**

QUESTÃO 01

Seja $\mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$ o conjunto dos números naturais. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \{1,2,...,n\}$ denota o conjunto dos n primeiros números naturais. Dado $X \subseteq \mathbb{N}$, denote por $\mathcal{S}(X)$ a coleção de todos os subconjuntos de X, ou seja, $\mathcal{S}(X) = \{A \subseteq \mathbb{N}: A \subseteq X\}$. Dado um conjunto finito X, seja $\text{card}(X)$ o número de elementos de X (cardinalidade de X); por exemplo, $\text{card}(P_n) = n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Por fim, dados dois conjuntos X e Y, a diferença simétrica entre eles é $X \triangle Y = \{x \in X \cup Y: \text{x} \notin \text{X} \cap \text{Y}\}$. Julgue as seguintes afirmativas:

⓪ $P_5 \subseteq P_4 \cup \{5\}$.

① Se $A, B, C \in \mathcal{S}(P_3)$ satisfazem as condições $card(A \triangle B) = 1$ e $card(B \triangle C) = 1$, então $\text{card}(A \triangle C) = 1$.

② Existe função sobrejetora de P_{2025} para P_{2024}.

③ Para todo $n \in \mathbb{N}$, é verdade que $P_n \triangle P_1 \in \mathcal{S}(P_{n+1})$.

④ A função $F: \mathbb{N} \to \mathcal{S}(\mathbb{N})$ definida pela regra $F(n) = P_{n+1}$ é injetora.

QUESTÃO 02

No espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, cada vetor $x = (x_1, x_2)$ pode ser associado aos números reais dados pelas expressões $||x||_M = \max\{|x_1|, |x_2|\}$, $||x||_E = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $||x||_S = |x_1| + |x_2|$. Fixados $\alpha, \beta \in [0,1]$, considere a matriz $A = \begin{bmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix}$. Ainda, denote por $\langle x, y \rangle$ o produto interno canônico entre dois vetores $x, y \in \mathbb{R}^2$. Julgue as seguintes afirmativas:

⓪ Se $x \in C = \{z \in \mathbb{R}^2 : ||z||_M = 1\}$, então $Ax \in C$.

① Se $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ é tal que $|x_1| = |x_2| = 1$, então $||x||_M = ||x||_E = ||x||_S$.

② Se $\alpha + \beta = 1$ e $\alpha > \beta$, então A é uma matriz simétrica que cumpre $\langle x, Ax \rangle > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$ tal que $x \neq (0,0)$.

③ Se $0 < \alpha < 1$ e $0 < \beta < 1$, então a matriz A define uma bijeção $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por meio da expressão $L(x) = Ax$.

④ A função $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida pela regra $F(x) = \langle x, Ax \rangle$ satisfaz $|F(x)| \leq ||Ax||_M$ sempre que $||x||_S = 1$.

QUESTÃO 03

Julgue como verdadeiras ou falsas as seguintes afirmativas:

⓪ Seja A uma matriz quadrada e A^t a sua transposta. Se $B = A + A^t$ e A é simétrica, então as matrizes A e B têm o mesmo núcleo.

① Sejam V um espaço vetorial sobre o corpo dos reais e U um subespaço vetorial de V. Suponha que U tem dimensão $N \geq 1$ e que o vetor $x \in V$ satisfaz $x \notin U$. Nesse caso, vale que o conjunto $W = \{u + tx : u \in U, t \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço vetorial de V e W tem dimensão $N + 1$.

② Seja $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma transformação linear tal que para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$ vale que $L(x) = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ satisfaz $y_i \geq 0$ para todo $i = 1, \ldots, m$. Nesse caso, a matriz (relativa às bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$) que representa L é a matriz nula.

③ Seja o conjunto X no $\mathbb{R}^3$ definido por $X = \{(10/3,\ -8/3,\ 0) + t(1, 7, 3) : t \in \mathbb{R}\}$. Se $x^* \in \mathbb{R}^3$ minimiza a função $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ em (x_1, x_2, x_3) sujeito às restrições de igualdade $2x_1 + x_2 - 3x_3 = 4$ e $x_1 - x_2 + 2x_3 = 6$, então $x^* \notin X$.

④ Considere $H: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $H(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2,\ 4x_1 + x_2,\ 0)$. Então H é uma transformação linear que é diagonalizável e dois de seus autovalores também são autovalores da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$.

QUESTÃO 04

Uma dívida de $P_0 > 0$ reais, contraída no período 0, é paga a partir do período subsequente em uma quantidade de prestações dada por um número par $T > 0$, todas de R reais, sob o sistema Price de amortização.
Assim, $P_t = (1+r)P_{t-1} - R,\ \forall t \in \{1, \ldots, T\}$, e $P_T = 0$; em que P_t representa o saldo devedor ao fim do período t, e $r > 0$ é a taxa de juros acordada entre as partes. Julgue as afirmativas abaixo quanto a sua veracidade:

⓪ Para cada $t \in \{0, 1, \ldots, T\}$, vale $P_t = P_0 - tP_0/T$.

① Cada prestação é de $P_0(1+r)^T/T$ reais.

② Cada prestação supera os rP_0 reais.

③ Quanto maior r, maior será R.

④ Ao fim do período $T/2$, o saldo devedor ainda corresponde a mais da metade da dívida inicial.

QUESTÃO 05

Seja Δ o triângulo de vértices $A = (0, -2)$, $B = (4, 0)$ e $C = (-1, 5)$. Julgue as afirmativas abaixo quanto a sua veracidade:

⓪ Δ é isósceles.

① A área de Δ é 30.

② A reta $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 2, y + 1) \cdot (2, 1) = 0\}$ é a mediatriz do lado $\overline{AB}$ de Δ.

③ Se M é o baricentro (encontro das medianas) de Δ e $D = A - M$, então D e $(1, 3)$ são linearmente dependentes.

④ O ângulo interno de Δ em C mede $\arccos(4/5)$ radianos.

QUESTÃO 06

Julgue como verdadeiras ou falsas as seguintes afirmativas:

⓪ $\int_{-\pi}^{\pi}[x + 2\text{sen}(x)]\,dx > 0.$

① $\int_{-4}^{-2}(x+4)^5\,dx = -\int_{2}^{0} x^5\,dx.$

② Se $n \geq 1$ representa um número natural, e representa o número de Euler, e a sequência (y_n) é definida de modo que $y_n = \int_0^{2n\pi}\left[e^{\cos(x)}\text{sen}(x)\right]dx$ para todo n, então $\lim_{n\to+\infty} y_n = e$.

③ Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes continuamente diferenciável, e $a > 0$ um número real dado. Se b^* é o maior valor de $b \in \mathbb{R}$ que faz com que a desigualdade $f(a) - b \geq f(0)$ seja verdade, então $b^* = \int_0^a f'(x)dx$.

④ Sejam $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ duas funções, cada qual duas vezes continuamente diferenciável, em que $a < b$ são ambos números reais. Se $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ e $f(x) = 1 - \int_a^x g(t)dt$, então $f''(x) = -f(x)$ e $g''(x) = -g(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

QUESTÃO 07

Julgue as seguintes afirmativas como verdadeiras ou falsas:

⓪ A sequência de números reais (x_n) com termo geral $x_n = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{2^n}$ converge para $\frac{2}{3}$.

① $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(2025\pi n) = 1$.

② Se (x_n) é uma sequência de números reais com a propriedade de que $x_{n+1} \leq \frac{x_n + x_{n+2}}{2}$ para todo $n \geq 1$, e $x = \lim_{n\to+\infty} x_n$, então $x \leq 0$.

③ $\sum_{\mathbf{n=-1}}^{+\infty} 44(45)^{-\boldsymbol{n}} = 2025$.

④ $\sum_{\boldsymbol{n=0}}^{+\infty} (-1)^{\boldsymbol{n}} \frac{(2025\pi)^{\boldsymbol{2n+1}}}{(\boldsymbol{2n+1})!} = 0$.

QUESTÃO 08

Seja d a diferença entre o maior e o menor valor possíveis de serem atingidos pela expressão $7y + (x - y)/7$, em que x e y são números reais não negativos tais que $x \leq (7 - y)^3$. Calcule d.

QUESTÃO 09

Dados uma função derivável $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ e um $t \in \mathbb{R}$ quaisquer, a taxa de crescimento de f em t é definida pela razão $f'(t)/f(t)$, e denotamos por $\hat{f}(t)$ o resultado da seguinte razão: $f'(t)/f(t)$. Avalie a veracidade das sentenças abaixo:

⓪ Se $f, g : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ são deriváveis e $t \in \mathbb{R}$, então $(\widehat{f + g})(t) = \hat{f}(t) + \hat{g}(t)$.

① Se $f, g : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ são deriváveis e $t \in \mathbb{R}$, então $\widehat{(fg)}(t) = \hat{f}(t)\hat{g}(t)$.

② Se $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ é derivável e $t \in \mathbb{R}$, então $(\widehat{1/f})(t) = -\hat{f}(t)$.

③ Se $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ é derivável e $t \in \mathbb{R}$, então $(\widehat{\exp \circ f})(t) = (\ln \circ f)'(t)$; onde $\exp: \mathbb{R} \to (0, \infty)$ denota a função exponencial e $\ln: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ a função logarítmica, ambos de base e (número de Euler).

④ Se $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ é derivável e $t \in \mathbb{R}$, então $(\widehat{f \circ f})(t) = \hat{f}(f(t))\hat{f}(t)f(t)$.

QUESTÃO 10

Considere o contexto em que um investimento inicial de $A > 0$ unidades monetárias pode ser aplicado, no período inicial $t = 0$, em apenas um dentre dois ativos disponíveis.
O primeiro ativo remunera a uma taxa de juros $r > 0$ e, devido a custos operacionais, deduz do saldo um valor B_t em cada período $t = 0,1,2, \dots$. Ainda, dada uma aplicação inicial x_0 igual a $A > 0$, o valor no instante $t + 1$ satisfaz $x_{t+1} = (1 + r)x_t - B_t$, onde $\forall t \geq 0$, $B_{t+1} = \left(\frac{1+r}{2}\right) B_t$ e $B_0 = \frac{A}{2}$.
Com respeito ao segundo ativo, uma mesma aplicação inicial y_0 em $t = 0$ igual a $A > 0$ implica um valor y_{t+1} no período $t + 1$ que satisfaz $y_{t+1} = (1 + \bar{r})y_t$, onde $\bar{r} > 0$.
Sabendo que $\frac{1+r}{1+\bar{r}} = V \geq 0$ e $\lim_{t\to+\infty} \frac{x_t}{y_t} = \frac{1}{2}$, determine o valor de V.