Exercise 4

6.22 **骰子模擬**。試寫出一個 dice 函式模擬公平的擲骰子，並且每次呼叫函式時就傳回一個 1 到 6 的整數值。寫一個測試的主程式，使用 dice 函式產生 100000 個骰出的數值，並繪製分布的直方圖。

6.30 **高斯(常態)分布**。random0 函式會傳回 [0, 1) 範圍間均勻分布的亂數值，當呼叫函式時，任何給定的數值在此範圍內出現的機率是相同的。高斯分布是另一種類型的隨機分布，其亂數分布如圖 6.9 所示的鐘形曲線。如果高斯分布平均值為 0.0，而標準差為 1.0 時，稱為標準化常態分布。在標準化常態分布下，任何給定值發生的機率為：

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \qquad (6\text{-}18)$$

只要依照以下步驟，我們可以取 [–1, 1) 範圍內的均勻分布亂數值，來產生標準化常態分布的亂數：

(a) 從 [–1, 1）範圍內選擇兩個均勻分布的隨機變數 x_1 和 x_2，使得 $x_1^2 + x_2^2 < 1$。為了產生這兩個變數，先從範圍 [–1, 1） 內選擇兩個均勻分布的隨機變數，並確定其平方和是否小於 1。如果是，則使用這兩個變數，如果不是，重試一次。

(b) 然後，下列運算式的 y_1 和 y_2 值便是常態分布的隨機變數。

$$y_1 = \sqrt{\frac{-2\ln r}{r}} x_1 \qquad (6\text{-}19)$$

$$y_2 = \sqrt{\frac{-2\ln r}{r}} x_2 \qquad (6\text{-}20)$$

其中，

$$r = x_1^2 + x_2^2 \qquad (6\text{-}21)$$

請寫出一個函式 random_normal(n,m)，可以傳回一個 n × m 的標準常態分布亂數陣列；假如只有一個輸入引數 random_normal(n)，則傳回一個 n × n 的標準常態分布亂數陣列。嘗試使用你的函式產生 1000 個亂數值，計算其標準差，並繪製分布的直方圖。你計算出的標準差是否很接近 1.0？(請勿使用內建的 randn()函數)

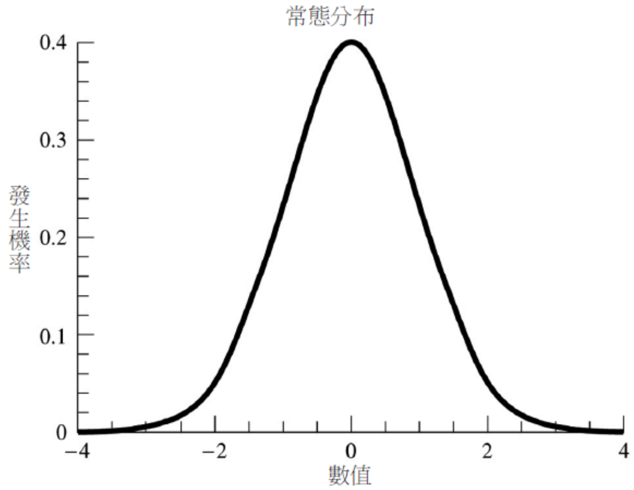

圖 6.9　常態分布圖。

7.15 **函數的導函數**。連續函數 $f(x)$ 的導函數定義如下：

$$\frac{d}{dx}f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \qquad (7\text{-}3)$$

此定義可以表示成一個取樣函數：

$$f'(x_i)=\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{\Delta x} \qquad (7\text{-}4)$$

其中，$\Delta x = x_{i+1}-x_i$。假設向量 `vect` 包含函數的 `nsamp` 個取樣值，取樣值間距是 `dx`。請編寫一個函式，使用（7-4）式計算這個向量的導函數。這函式必須檢查並確定 `dx` 大於 0，以避免函式出現除以零的錯誤。

為了測試函式，產生一組已知導函數的資料並將函式計算的結果和這組已知的正確答案比較。從微積分知道 $\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$。從 $x=0$ 開始，且增量 $\Delta x = 0.05$，建構一個擁有 100 個數值的輸入向量，計算 $\sin x$ 的函數值。然後使用你的向量求出函式的導函數值，並把函式計算結果與正確答案比較。(請畫出 sin(x), cos(x), 以及你所做出來的導函數)

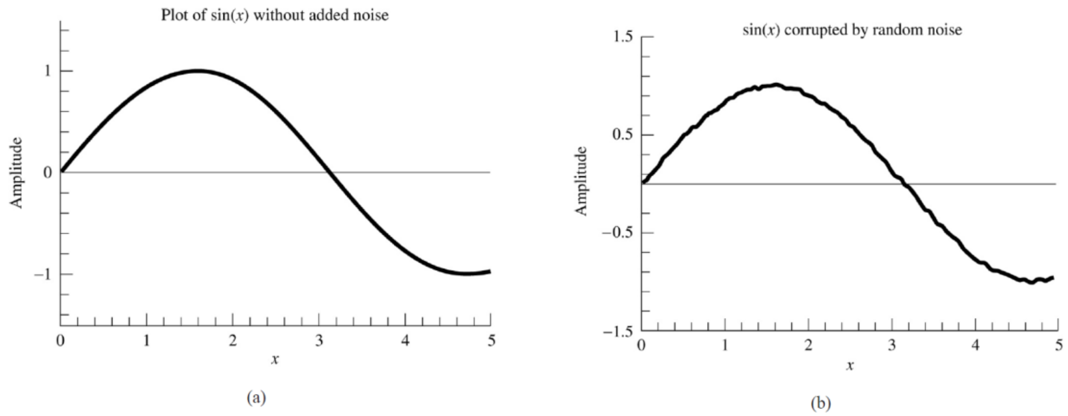

圖 7.9　(a)　x 值未加入雜訊資料時，$\sin x$ 相對於 x 的函數圖。(b)　x 值加入最大振幅 2% 的隨機雜訊後，$\sin x$ 相對於 x 的函數圖

7.16 **導數中的雜訊**。我們將探討輸入雜訊對導函數的影響。同上一題，從 $x = 0$ 開始，增量 $\Delta x = 0.05$，建構一個擁有 100 個數值的輸入向量，計算 $\sin x$ 的函數值。接著，使用 `random0` 函式產生一些微小的雜訊，其最大振幅為 ± 0.02，並將此雜訊加到剛產生的輸入向量內。圖 7.9 是摻有雜訊的 $\sin x$ 函數圖形的例子。請注意，因為 $\sin x$ 函數的最大值為 1，所以雜訊只有輸入訊號峰值的 2%。利用你在上一題所編寫的導函數函式，對這個函式取導數值。(請畫出 sin(x), sin(x)+雜訊, cos(x), 以及 sin(x)+雜訊的導函數值)，從實驗結果，你得到了什麼結論？