



SIMULATION NUMÉRIQUE AUTOUR DES ÉVÈNEMENTS RARES

Risques extrêmes en finance

5 juin 2018

Fan JIANG
Chali SHEN



1

INTRODUCTION

Le trading des produits dérivés jouent aujourd'hui un rôle très important de le monde de la finance de marché, et il est crucial pour les acteurs dans le marché d'être capable d'anticiper la perte auquel ils pourraient être confrontés dans le future. Pour cela, la notion de la Value At Risk (VaR) a été adoptée par l'industrie, l'un des indicateurs de risque mesurant le seuil de perte potentielle à un quantile x (typiquement 99.99%) et un horizon (typiquement 10 jours) donnés. Ce facteur sera ainsi utilisé par les agents financiers pour ajuster la composition de leurs portefeuilles afin de limiter les risques auquel ils sont exposés.

Comme notre objectif est souvent d'évaluer des VaRs au niveau assez élevé, la méthode de Monte-Carlo naïf peut être très lourd au niveau du nombre de simulations à réaliser pour effectuer une statistique de bonne qualité. En effet, empiriquement, pour un évènement de probabilité de 10^{-4} , 10^4 de simulations donnent lieu d'une réalisation de cet évènement, et il ne faut pas oublier le fait que nous avons besoin d'au moins de 1000 échantillons de cet évènement pour faire une étude statistique sur lui. Ainsi, dans ce projet, à part de Monte-Carlo naïf, qui nous donne une idée sur l'ordre de grandeur de la VaR à évaluer, nous avons également utiliser plusieurs techniques de simulation aléatoire, comme IS (Importance Sampling), IPS (Interacting Particle System) ou encore Splitting-MCMC (Monte-Carlo Markov Chain). Nous allons dans chaque partie présenter notre travail lié à ces différentes méthodes. Et puis, nous allons comparer leur performance ainsi qu'interpréter les résultats numériques en leur donnant un sens financier.

2

IMPORTANCE SAMPLING

2.1 INTRODUCTION

Dans le contexte de simulation des événements aléatoires, la vitesse de convergence et la variance sont souvent deux éléments importants à considérer, qui sont tous lié à l'efficacité de la simulation. Important sampling, échantillonnage préférentiel, est une technique pour augmenter l'efficacité de la simulation par produire plus d'événements aux quels nous nous intéressons. Quand nous voulons simuler un événement rare, dont la probabilité est très petite, nous devons attendre longtemps pour que nous puissions trouver un événement. Par avoir une mesure de probabilité qui concentre plus à la région de notre intérêt, Important Sampling nous permet de trouver plus d'événements dans un temps plus court et d'obtenir un résultat avec une variance plus petite.

Supposons que nous avons deux variable aléatoire X et \tilde{X} de densité p et q , alors, nous avons

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(f(X)) = \int f(x)p(x)dx = \int f(x)\frac{p(x)}{q(x)}q(x)dx = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(f(\tilde{X})\frac{p(\tilde{X})}{q(\tilde{X})}) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(f(\tilde{X})\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}).$$

Donc, nous sommes capable d'évaluer la même espérance sous une autre probabilité. Pour évaluer $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(f(X))$, maintenant nous pouvons simuler des variables aléatoires indépendants sous loi \mathbb{Q} $\{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_M\}$ et estimer l'espérance par

$$\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M f(\tilde{X}^m) \frac{p(\tilde{X}^m)}{q(\tilde{X}^m)} \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(f(\tilde{X}) \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(f(X))$$

De manière générale, un changement de probabilité est définie par une fonction mesurable $L \geq 0$ telle que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(L) = 1$$

Alors, pour une fonction $f(x)$ nous pouvons noter

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(f(X)) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\frac{f(X)}{L(X)} L(X)\right) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\frac{f(X)}{L(X)}\right),$$

donc, \mathbb{Q} est la loi de probabilité définie par $L(x)$, le ratio de vraisemblance par rapport à \mathbb{P} .

2.2 DELTA-GAMMA APPROXIMATION

Pour un portefeuille, supposons que nous avons m facteurs de risque $S(t) = (S_1(t), \dots, S_m(t))$, et notons $\Delta S = [S(t + \Delta t) - S(t)]'$ le changement de facteurs durant $[t, t + \Delta t]$. La valeur à l'instant t est noté $V(t) \equiv V(t, S(t))$, alors la perte durant l'intervalle Δt est donc définie comme $L = V(t, S(t)) - V(t + \Delta t, S(t + \Delta t))$. Nous pouvons faire le développement de Taylor pour L , alors, nous allons obtenir

$$L \approx a_0 + a' \Delta S + \Delta S' A \Delta S = a_0 + Q \quad (1)$$

où $a_0 = -\frac{\partial V}{\partial t} \Delta t$, $a_i = -\frac{\partial V}{\partial S_i}$ et $A_{ij} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_i \partial S_j}$. Cette approximation sera plus précise lorsque Δt tends vers 0.

Ici nous supposons que ΔS suit une distribution gaussienne multivariée de l'espérance 0 et la matrice de covariance Σ . Cette hypothèse reste valide quand $S(t)$ suit une distribution de lognormal $S_i(t + \Delta t) = S_i(t) \exp(c_i + d_i Y_i)$ où Y_i est une gaussienne, car nous pouvons faire l'approximation $S_i(t + \Delta t) = S_i(t)(1 + c_i + d_i Y_i)$, qui suis encore une distribution gaussienne sachant $S_i(t)$. Les échantillons de ΔS est donc présenté par $\Delta S = \tilde{C}X$, où X est un vecteur de gaussien standard et \tilde{C} est une matrice satisfaisant la condition $\tilde{C}\tilde{C}' = \Sigma$. Pour appliquer l'échantillonnage préférentiel, il est commode d'exprimer Q sous la forme quadratique. On note Λ la matrice diagonale, dont les éléments sont les valeurs propres de $\tilde{C}A\tilde{C}'$, U est la matrice de vecteurs propres correspondantes. Donc, nous savons $\tilde{C}A\tilde{C}' = U\Lambda U$. Nous pouvons ainsi définir $C = \tilde{C}U$. Comme $CC' = \tilde{C}UU'\tilde{C}' = \tilde{C}\tilde{C}' = \Sigma$, nous pouvons exprimer Q comme

$$Q = a' \Delta S + \Delta S' A \Delta S = a' CZ + Z' C' ACZ = a' CZ + Z' \Lambda Z = b' Z + Z' \Lambda Z = b' Z + Z' \Lambda Z = \sum_{i=1}^m (b_i Z_i + \lambda_i Z_i^2)$$

où $b = C'a$ et Z est un vecteur gaussien standard.

Maintenant, nous pouvons appliquer la technique de l'échantillonnage préférentiel pour évaluer la probabilité de perte extrême. Nous considérons un changement de probabilité, sous lequel l'espérance de Z est changé de 0 à μ et la matrice de covariance est changé de I à B , donc, le ratio de vraisemblance est

$$l(Z) = \frac{\exp(-\frac{1}{2} Z' Z)}{|B|^{-1/2} \exp(-\frac{1}{2} (Z - \mu)' B^{-1} (Z - \mu))}$$

En effet, nous allons utiliser "exponential twisting" où nous pouvons exprimer le ratio de vraisemblance en utilisant une fonction génératrice

$$l(Z) = \exp(-\theta Q + \psi(\theta))$$

où $\psi(\theta)$ est exprimé comme

$$\psi(\theta) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} \left(\frac{(\theta b_i)^2}{1 - 2\theta \lambda_i} - \log(1 - 2\theta \lambda_i) \right)$$

Avec ce changement de probabilité, l'espérance et la variance de Z_i est changé à $\mu_i(\theta)$ et $\sigma_i^2(\theta)$ où

$$\sigma_i^2(\theta) = \frac{1}{1 - 2\theta\lambda_i}, \quad \mu_i(\theta) = \theta b_i \sigma_i^2(\theta)$$

Par conséquent, nous pouvons estimer $\mathbb{P}(L > x)$ comme

$$\mathbb{P}(L > x) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{L>x} l(Z)) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{Q>x-a_0} e^{\psi(\theta)-\theta Q}) \quad (2)$$

Pour que ce changement de probabilité soit optimal, nous voudrions minimiser le second moment de cette quantité. Le second moment est

$$m_2(x, \theta) = \mathbb{E}_\theta(\mathbb{1}_{L>x} l^2(Z)) \leq \exp(2\Psi(\theta) - 2\theta(x - a_0))$$

Comme trouver une valeur de θ pour minimiser $m_2(x, \theta)$ est souvent difficile, il est plus simple de minimiser la borne supérieure de $m_2(x, \theta)$. Dans ce cas, le θ est donné par l'équation non-linéaire

$$\psi'(\theta_x) = x - a_0 \quad (3)$$

où $\psi'(\theta_x)$ est la dérivée de la fonction génératrice $\psi(\theta_x)$. Après avoir optimisé θ , nous pouvons évaluer $\mathbb{P}(L > x)$.

Comme nous voulons aussi calculer la VaR, nous devons aussi chercher le quantile $Q(\alpha) = \inf_x \{x : \mathbb{P}(L \geq x) = \alpha\}$, alors nous pouvons estimer la VaR selon la formule

$$\bar{Q}_\alpha \approx \inf_x \{x : \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathbb{1}_{Q_m > (x-a_0)} e^{\psi(\theta)-\theta Q_m} \geq \alpha\}. \quad (4)$$

2.3 IMPLÉMENTATION

Vu que la perte peut être calculé par la formule (1), donc nous pouvons tout à fait suivre la section précédente pour calculer les différentes parties de cette formule. Comme le changement de probabilité que nous allons utiliser est paramétré par le paramètre θ , nous avons besoin de l'estimer. Cependant, pour estimer le paramètre θ , nous devons savoir résoudre l'équation (3) qui dépend de x que nous ne connaissons pas a priori. Alors, nous sommes en face d'un cycle : pour calculer x en utilisant IS, il faut savoir θ , pour calculer θ , il faut savoir x . Pour casser ce cycle, nous allons donc utiliser la dichotomie pour trouver un x qui est très proche de niveau que nous nous intéressons, et ensuite calculer θ pour garantir un meilleur changement de probabilité.

- Calculer les formules dont nous avons besoin, i.e. $\frac{\partial V}{\partial t}$, $\frac{\partial V}{\partial S_i}$ et $\frac{\partial^2 V}{\partial S_i \partial S_j}$
- Initialiser les paramètres. Pour commencer la dichotomie, il faut aussi initialiser x .
- Trouver la paramètres θ en utilisant l'équation (3).
- Évaluer la probabilité $\mathbb{P}(L > x)$ en utilisant l'équation (2). En utilisant la dichotomie(alors, nous répétons plusieurs itérations des étapes précédentes), nous cherchons la valeur x tel que $\mathbb{P}(L > x)$ est très proche de niveau que nous nous intéressons (e.x. $\alpha = 0.01\%$), par exemple $|\alpha - \mathbb{P}(L > x)| < 2\%\alpha$
- Dès que nous avons trouvé x , nous cherchons la plus petite quantile de Q_α tel que $\mathbb{P}(L > Q_\alpha) < \alpha$ en utilisant la formule (4). En pratique, nous trions les pertes finales $L_m = Q_m + a_0$ et affectons un poids $e^{\psi(\theta)-\theta(L_m-a_0)}$ à chaque L_m . Nous cherchons le plus petit $L_{(m)}$ telle que la somme accumulée de poids de $L_{(M)}$ jusqu'à $L_{(m)}$ est plus grand que α
- Nous évaluons également la Conditional VaR. Nous pouvons aussi exhiber la distribution conditionnelle au delà de la VaR par évaluer la probabilité de $L \in A$ où A est un petit intervalle.

3

INTERACTING PARTICLE SYSTEM

3.1 INTRODUCTION

Comme nous avons présenté dans la partie précédente, la propriété importante de IS(Important Sampling) est que nous sommes capable de simuler des événements sous la nouvelle mesure, c'est-à-dire nous pouvons exprimer la nouvelle loi \mathbb{Q} explicitement. Cependant, la loi \mathbb{Q} n'est pas toujours explicitable, ce qui empêche l'implémentation de IS. De plus, dans beaucoup de scenario, les échantillons de Monte Carlo sont simulés par un programme complexe que nous connaissons pas la modèle et la mécanisme (Black Box). Dans ce cas, il est impossible de changer la mesure et de générer les nouvelles échantillon selon une nouvelle loi. Alors, nous avons besoin d'une approche qui nous permet de générer les échantillon sous la loi originale et de réduire la variance comme IS. IPS(Interacting Particle System) est exactement la méthode qui possède cette propriété. Le principe de IPS est basé sur la déformation de la transition de chaîne de Markov par la sélection et la mutation qui force la chaîne à transiter vers les événements rares que nous nous intéressons.

Premièrement, nous définissons le processus historique d'une chaîne de Markov comme

$$X_{0:n} = [X_0, \dots, X_n]$$

A chaque étape de selection p , nous sélectionne des échantillon selon une fonction de score G_p , c'est-à-dire nous choisissons l'indice j avec les probabilités $P(j) = \frac{G_p(X_{0:p}^j)}{\sum_{k=1}^M G_p(X_{0:p}^k)}$ où M est la nombre totale des chaînes. Notre objective est d'évaluer l'espérance d'une fonction $\mathbb{E}(f(X_n))$, alors, maintenant nous pouvons exprimer cette espérance comme

$$\mathbb{E}(f(X_n)) = \mathbb{E}(g_n(X_{0:n}) \prod_{p=1}^n G_p(X_{0:p}))$$

où $g_n(x_0, \dots, x_n) = f(x_n) \prod_{p=1}^n G_p^{-1}(x_0, \dots, x_n)$. Selon cette expression, nous allons en fait changer le point de vue de cette espérance. Maintenant, nous cherchons à construire des mesures empiriques sur l'espace des trajectoires plutôt que l'espace de variables aléatoires. Ici, nous avons besoin de mesure de Feynman-Kac. Nous définissons $\gamma_n(g_n)$ (mesure non-normalisé) comme

$$\gamma_n(g_n) = \mathbb{E}(g_n(X_{0:n}) \prod_{p=1}^{n-1} G_p(X_{0:p})) = \int g_n(x_{0:n}) \gamma_n(dx_{0:n}).$$

Également, nous pouvons définir la mesure normalisée $\eta_n(g_n)$

$$\eta_n(g_n) = \frac{\mathbb{E}(g_n(X_{0:n}) \prod_{p=1}^{n-1} G_p(X_{0:p}))}{\mathbb{E}(\prod_{p=1}^{n-1} G_p(X_{0:p}))} = \int g_n(x_{0:n}) \eta_n(dx_{0:n})$$

Le lien entre des mesures normalisées et mesures non-normalisés est $\eta_n(g_n) = \frac{\gamma_n(g_n)}{\gamma_n(1)}$. Nous pouvons aussi remarquer que $\gamma_n(1) = \gamma_{n-1}(G_{n-1}) = \eta_{n-1}(G_{n-1}) \gamma_{n-1}(1) = \prod_{p=1}^{n-1} \eta_p(G_p)$. En combinant ces deux relations, nous obtenons

$$\gamma_n(g_n) = \eta_n(g_n) \prod_{p=1}^{n-1} \eta_p(G_p)$$

Alors, nous avons

$$\mathbb{E}(f_n(X_0, \dots, X_n)) = \eta_n(f_n \prod_{p=1}^{n-1} \eta_p(G_p^{-1})) \prod_{p=1}^{n-1} \eta_p(G_p)$$

Si nous disposons d'une mesure empirique $\eta_p^M(h_p) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M h_p(X_{0:p}^{p,m})$, nous pouvons estimer l'espérance par

$$\mathbb{E}(f_n(X_0, \dots, X_n)) = \eta_n^M(f_n \prod_{p=1}^{n-1} G_p^{-1}) \prod_{p=1}^{n-1} \eta_p^M(G_p)$$

Si nous cherchons un quantile $Q(\alpha) = \inf_x \{x : \mathbb{P}(L \geq x) = \alpha\}$, nous pouvons maintenant l'estimer par

$$\bar{Q}_\alpha \approx \inf_x \{x : \eta_n^M(\mathbb{1}_{L > x} \prod_{p=1}^{n-1} G_p^{-1}) \prod_{p=1}^{n-1} \eta_p^M(G_p) \geq \alpha\}$$

Pour les détails de preuve, vous pouvez consulter [3].

3.2 ALGORITHME

- Simuler M variables aléatoires indépendants $X_0^{0,1}, \dots, X_0^{0,M}$ selon la loi initiale.
- Pour étape $p = 1, 2, \dots, n$, étant donnés les M trajectoires courants $X_{0:p-1}^{p-1,1}, \dots, X_{0:p-1}^{p-1,M}$,
 1. (Sélection) Tirer M variables aléatoires indépendants I_1, \dots, I_M à valeur dans $\{1, 2, \dots, M\}$ de façon à ce que pour tout $m \in 1, 2, \dots, M$

$$\mathbb{P}(I_i = m) = \frac{G_{p-1}(X_{0:p-1}^{p-1,m})}{\sum_{k=1}^M G_{p-1}(X_{0:p-1}^{p-1,k})}$$

et on pose pour tout $m \in 1, 2, \dots, M$

$$X_{0:p-1}^{p,m} = X_{0:p-1}^{p-1,I_m}$$

2. (Mutation) Pour tout $m \in 1, 2, \dots, M$, de façon indépendante, nous obtenons la dernière composante $X_p^{p,m}$ en tirant une variable aléatoire distribuée selon la loi de transition $P(X_{p-1}^{p,m}, \cdot)$
- Calculer l'espérance $\mathbb{E}(f(X_{0:n}))$ selon la formule

$$\mathbb{E}(f(X_{0:n})) = \left(\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \frac{f(X_{0:n})}{\prod_{p=0}^{n-1} G_p(X_{0:p}^{n,m})} \right) \times \left(\prod_{p=0}^{n-1} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M G_p(X_{0:p}^{n,m}) \right) \quad (5)$$

- Calculer le quantile $Q(\alpha)$ selon la formule

$$\bar{Q}_\alpha \approx \inf_x \{x : \left(\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \frac{\mathbb{1}_{X_n > x}}{\prod_{p=0}^{n-1} G_p(X_{0:p}^{n,m})} \right) \times \left(\prod_{p=0}^{n-1} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M G_p(X_{0:p}^{n,m}) \right) \geq \alpha\}. \quad (6)$$

- Remarque : les fonctions de score G_p sont choisies par l'utilisateur selon la situation réelle. Par exemple, nous pouvons prendre $G_p(x_{0:p}) = e^{\lambda(x_p - x_{p-1})}$ pour favoriser les trajectoires croissantes. Ici, λ est un paramètre à choisir par l'utilisateur.

3.3 IMPLÉMENTATION

Dans notre problème, nous pouvons considérer la perte $L_h = V_t - V_{t+h}$ comme une chaîne de Markov, alors $L_1 = V_0 - V_1, L_2 = V_1 - V_2, \dots$ transite selon une certaine loi de transition que nous ne connaissons pas explicitement. Comme nous savons que $\frac{S_{t+h} - S_t}{S_t} \approx \sigma(W_{t+h} - W_t)$, alors, nous pouvons tout à fait simuler les mouvement brownien et puis évaluer la perte selon la formule de Black & Scholes pour l'options d'achat et l'option de vente, ainsi, nous n'avons pas besoin de connaître explicitement la loi de transition de perte. Notre objectif est d'évaluer les VaR et les Conditional VaR de différents niveaux, puis évaluer la distribution conditionnelle au delà de la VaR. Alors, nous avons besoin non-seulement d'estimer les probabilités, mais aussi de chercher des quantiles.

L'implémentation un peu plus détaillé :

- Initialiser les paramètres et les fonctions utilisés.
- Simuler les mouvements browniens pour chaque jour 1,2,3 ..., h .
- En utilisant l'algorithme sélection-mutation présenté dans la section précédente, évaluer les pertes L_h . Pour que les pertes extremes se produisent, nous pouvons choisir les fonctions de score G_p qui favorisent la perte, comme $G_p(L_{0:p}) = e^{\lambda(L_p - L_{p-1})}$.
- Utiliser la formule (6) pour estimer le quantile. En pratique, nous trions les pertes finales L_n et affectons un poids $\left(\frac{1}{\prod_{p=0}^{n-1} G_p(L_{0:p}^{n,m})} \right) \times \left(\prod_{p=0}^{n-1} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M G_p(L_{0:p}^{n,m}) \right)$ à chaque L_n . Nous cherchons le plus petit $L_n^{(i)}$ telle que la somme accumulée de poids de $L_n^{(M)}$ jusqu'à $L_n^{(i)}$ est plus grand que α .
- Dès que nous avons trouvé le quantile Q_α , nous pouvons évaluer la Conditional VaR en utilisant la formule (5). Nous pouvons aussi exhiber la distribution conditionnelle au delà de la VaR par évaluer la probabilité de $L_n \in A$ où A est un petit intervalle.

4

SPLITTING VIA MCMC

4.1 INTRODUCTION

La méthode de splitting est largement utilisé dans la simulation des évènements rares. L'idée de cette méthode est simple : au lieu de simuler de façon brutale la probabilité de l'occurrence d'un évènement rare $\{g(X) \in A\}$, nous pouvons successivement diviser un évènement normale A_0 (normalement nous prenons A_0 =espace en entier) en une suite d'évènements de plus en plus rares $(A_k)_{0 \leq k \leq n}$ avec n un paramètre à choisir et $A_n = A$. Ensuite, dans la méthode via MCMC, nous calculons une probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(g(X) \in A_{k+1} | g(X) \in A_k)$ en simulant une chaîne de Markov définie de manière spécifique et appliquant le théorème ergodique. Finalement, nous pouvons utiliser la règle de chaîne (the chain rule) pour évaluer $\mathbb{P}(g(X) \in A)$, en effet, $\mathbb{P}(g(X) \in A) = \prod_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(g(X) \in A_{k+1} | g(X) \in A_k)$. Ainsi, notre problème devient la façon de choisir la chaîne de Markov afin de simuler $\mathbb{P}(g(X) \in A_{k+1} | g(X) \in A_k)$.

Dans notre problème spécifique, nous pouvons modéliser notre perte potentielle par une fonction $loss(X)$ avec $loss$ une fonction déterministe $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ (dont nous n'allons pas montrer la forme explicite, celle-ci est implémentée dans le code) et $X \in \mathbb{R}^d$ un vecteur aléatoire représentant les aléas dans le marché (risk factors) dus aux fluctuations aléatoires du prix des actifs. Ici, la convention est que la valeur positive de $loss(X)$ représente une perte et dans le cas contraire elle signifie un gain.

Afin d'évaluer la VaR , nous fixons d'abord un niveau α , qui est typique de 99.99% voire 99.999%. Nous allons ainsi estimer un bon x tel que $\mathbb{P}(loss(X) > x) = 1 - \alpha$. Pour cela, nous allons diviser \mathbb{R} en n intervalles, de forme $[a_i, +\infty[$ avec $-\infty = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n = x$, et puis, nous utilisons la méthode MCMC pour estimer $\mathbb{P}(loss(X) > a_{n+1} | loss(X) > a_n)$.

Dans toute la partie, nous notons I_0 le nombre des différents actifs dans le portefeuille, il doit aussi être la dimension du vecteur aléatoire X . Nous notons aussi t le jour où nous évaluons la VaR .

4.2 LE CAS DE L'ÉVOLUTION INDÉPENDANTE

Dans ce cas-là, les facteurs de risque sont les I_0 mouvements browniens standard *indépendants* évalués au jour t , ainsi la loi de X est de $\mathcal{N}(0, t \cdot Id)$. Une chaîne de Markov de noyau de transition $X_{n+1} = \rho X_n + \sqrt{1 - \rho^2} Y_{n+1}$, avec ρ un paramètre à choisir, $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ vecteurs aléatoires i.i.d de loi $\mathcal{N}(0, t \cdot Id)$, est réversible pour une telle mesure de probabilité.

4.3 LE CAS DE L'ÉVOLUTION DÉPENDANTE

Dans ce cas-là, les I_0 mouvements browniens deviennent corrélés, nous modélisons la corrélation par $\forall i \in \{1, \dots, I_0\}$ $W_t^i = \sqrt{\rho_{corr}} B_t^0 + \sqrt{1 - \rho_{corr}} B_t^i$, avec les B^i les mouvements browniens standards indépendants. A l'instant t , les B_t^i suivent tous la loi $\mathcal{N}(0, t)$. On a $\forall i, j \in \{1, \dots, I_0\}$ $cov(W_t^i, W_t^j) = \rho_{corr} * t$ si $i \neq j$ ou t si $i = j$. On a également $\forall i \in \{1, \dots, I_0\}$ $\mathbb{E}(W_t^i) = \sqrt{\rho_{corr}} \mathbb{E}(B_t^0) + \sqrt{1 - \rho_{corr}} \mathbb{E}(B_t^i) = 0$. Ainsi, $(W_t^i)_{1 \leq i \leq I_0}$ est un vecteur de

dimension I_0 suivant la loi $\mathcal{N}(0, \Sigma)$, avec $\Sigma = \begin{pmatrix} t & \rho_{corr} * t & \dots & \rho_{corr} * t \\ \rho_{corr} * t & t & \ddots & \rho_{corr} * t \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \rho_{corr} * t & \dots & \rho_{corr} * t & t \end{pmatrix}$. La chaîne de Markov

de noyau de transition $X_{n+1} = \rho X_n + \sqrt{1 - \rho^2} Y_{n+1}$, avec ρ un paramètre à choisir, $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ vecteurs aléatoires i.i.d de loi $\mathcal{N}(0, \Sigma)$, est réversible pour une telle mesure de probabilité. En effet, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbb{E} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_0 \end{pmatrix} \\ cov(X_0, X_1) &= \mathbb{E} \begin{pmatrix} X_0 X_0^\dagger & X_0 X_1^\dagger \\ X_1 X_0^\dagger & X_1 X_1^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma & \rho \Sigma \\ \rho \Sigma & \Sigma \end{pmatrix} \\ cov(X_1, X_0) &= \mathbb{E} \begin{pmatrix} X_1 X_1^\dagger & X_1 X_0^\dagger \\ X_0 X_1^\dagger & X_0 X_0^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma & \rho \Sigma \\ \rho \Sigma & \Sigma \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, $(X_0, X_1) \stackrel{loi}{=} (X_1, X_0)$

4.4 CAS DU MODÈLE AVEC SAUTS

Afin de modéliser les chocs inattendus dans le marché, nous ajoutons un processus de Poisson composé Z_t , de paramètre (λ, γ) , au terme de corrélation B^0 . On peut expliciter ce processus sous la forme $Z_t = \sum_{k=1}^{N_t} Y_k$, N_t un processus de Poisson homogène de paramètre λ et les Y_k des variables aléatoires i.i.d de loi γ .

Dans ce modèle, nous allons considérer que les chocs arrivent indépendamment des fluctuations normales dans le marché. Mathématiquement, cette indépendance est traduite par l'indépendance entre les B^i et Z .

Pour un processus de Poisson composé, nous pouvons effectuer une transformation réversible notée par P' comme suivant :

1. Appliquer la transformation coloriage \oplus duplication au processus de poissons homogène N_t . C'est à dire que l'on garde chaque saut dans le processus avec une probabilité p de manière indépendante, et puis nous superposons à ce nouveau processus un autre processus indépendant de Poisson homogène, mais de paramètre $(1-p)\lambda$. Notons le nouveau processus par (N'_t) . On a $(N_t, N'_t) \stackrel{\text{loi}}{=} (N'_t, N_t)$.

2. Supposons que nous disposons déjà une transformation réversible Q pour la loi γ . Dans $Z_t = \sum_{k=1}^{N_t} Y_k$, on remplace d'abord N_t par sa transformation réversible N'_t , et puis, pour chaque $k \in \{1, 2, \dots, N'_t\}$, il y a deux cas différents. Soit le saut i a été gardé quand on fait la transformation, nous appliquons la transformation réversible Q au Y_i , ie que l'on simule la loi $Q(Y_i, \cdot)$. Soit le saut i a été rejeté, dans ce cas-là, on va simuler la loi γ . Les résultats de ces simulations on les appelle Y'_i . Un nouveau processus de Poisson composé $Z'_t = \sum_{k=1}^{N'_t} Y'_k$ est ainsi obtenu. On a $(N, N') \stackrel{\text{loi}}{=} (N', N)$.

Pour $X = (W^1, \dots, W^{I_0})^\dagger$, on connaît déjà une transformation réversible, on la note par P . On sait que X et Z sont indépendants. Ainsi, pour $W = X + Z$, on peut appliquer la transformation $\tilde{P} : W' := P(X, \cdot) + Q(Y, \cdot)$ et on a $(W, W') \stackrel{\text{loi}}{=} (W', W)$. En effet,

4.5 ALGORITHME

La partie principale dans la méthode de splitting via MCMC est l'algorithme de MCMC. A partir d'une chaîne de Markov de noyau de transition P invariante pour la loi γ , MCMC consiste à simuler une chaîne de Markov du même noyau de transition mais invariante pour la loi restreinte γ_A . C'est en fait un algorithme de rejet.

Supposons que l'on veut maintenant évaluer $\mathbb{P}(\text{loss}(X) > a_{k+1} | \text{loss}(X) > a_k)$. Notons P le noyau de transition laissant invariante la loi suivie par le vecteur X , M la longueur de la chaîne de Markov utilisé dans l'algorithme MCMC (M est un paramètre pour l'algorithme). L'algorithme de l'estimation est le suivant :

1. Répéter la simulation d'une variable aléatoire X_0 sous la loi de X (que l'on a précisé dans les parties précédentes) jusqu'à ce que l'on a $\text{loss}(X_0) > a_k$.

2. Soit P la transformation inversible pour la loi X , que l'on a étudiée dans les parties précédentes. Pour $\forall n \in \{0, \dots, M-1\}$, simuler $\tilde{X}_{n+1} := P(X_n, \cdot)$, il y a deux cas possibles. Si $\text{loss}(\tilde{X}_{n+1}) > a_k$, on garde \tilde{X}_{n+1} , ie on pose $X_{n+1} = \tilde{X}_{n+1}$. Sinon, on rejette cette simulation, ie on pose $X_{n+1} = X_n$. On a construit ainsi une nouvelle chaîne de markov de longueur M , et on sait qu'elle est inversible, donc invariante pour la loi de $\text{loss}(X)$ restreinte au $[a_k, +\infty[$.

3. D'après le théorème ergodique, on a :

$$\frac{1}{M} \sum_{n=1}^M \mathbf{1}_{M_n > a_{k+1}} \longrightarrow \mathbb{P}(\text{loss}(X) > a_{k+1} | \text{loss}(X) > a_k)$$

. Il suffit ainsi de choisir un M suffisamment grand pour estimer cette probabilité.

Dans la phase de splitting, on a choisit $n = 5$, ie que l'on a 5 probabilités conditionnelle à estimer. Afin de procéder le splitting, on doit fixer au début de ce processus une borne x , et puis on diviser le domaine $] -\infty, x]$. Le choix des bornes sont précisé dans la fonction *iteration* du code de la méthode de splitting. Il est stocké dans la variable locale *splitting* de la fonction.

Notre but final est d'estimer le bon x tel que $\mathbb{P}(\text{loss}(X) > x)$ soit très près de $1 - \alpha$ (le critère de convergence est fournie comme un paramètre dans le code). Pour cela, on initialise un x_0 , on peut avoir une idée générale sur

l'ordre de grandeur de x_0 en faisant un MC avec un nombre d'échantillons petit (pour ne pas gâcher du temps). Et puis, on va régler x_0 en fonction de la relation d'ordre entre $\mathbb{P}(\text{loss}(X) > x_0)$ et $1 - \alpha$. Si la première est plus grande que la dernière, on augmente x_0 , sinon, on le diminue. En répétant cet étape, on obtiendra un intervalle $[low, high]$ tel que $1 - \alpha$ soit compris entre $\mathbb{P}(\text{loss}(X) > high)$ et $\mathbb{P}(\text{loss}(X) > low)$. Et on procède ensuite par la dichotomie pour approcher la VaR au niveau α .

5

RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Nous avons testé 4 algorithmes (MC naïf, IS, IPS, Splitting via MCMC) sur les différents scénarios avec différentes compositions de portefeuille, différents paramètres et différentes valeurs initiales. Les résultats numériques donnés par des différentes méthodes pour des différents types de portefeuille sont donnés dans le fichier *.excel*. Le lecteur peut consulter le fichier pour regarder plus de résultats numériques afin d'avoir une idée plus claire sur les observations que nous allons expliquer dans la section suivante. Dans cette partie, on ne va présenter qu'une partie des données obtenues, et puis analyser l'influence de la corrélation entre les facteurs de risque (ie W^i), de la composition de portefeuille ainsi que des chocs du marché sur la VaR. Les résultats donnés par les 4 types d'algorithmes sont à peu près identiques, sauf ceux de IS pour le troisième type de composition (la composition "hedged") du portefeuille. Par conséquent, nous ne présenterons que les résultats obtenus au travers IPS dans cette partie.

Tout d'abord, nous modélisons les mouvements de prix d'actif par des mouvements browniens indépendants. Dans ce cas, les options écrites sur différents actifs sont deux-à-deux indépendantes, ceci est une hypothèse forte (et aussi idéale). Souvent, les actifs sont corrélés dans le marché, donc nous introduisons un mouvement brownien sous-jacent commun pour modéliser la corrélation entre les différents actifs. Et puis, nous voulons étudier l'influence du choc négatif du marché, par exemple lors de la crise, sur la VaR. Ainsi, nous allons ajouter un processus de Poisson composé sur le mouvement brownien commun. Les sauts négatifs sont modélisés par la loi gaussienne avec l'espérance négative. Les trois genres de scénario illustrent plusieurs principes du marché, que nous aborderons dans la section de 5.2.

Notations : les valeurs initiales des actifs S_0 , le strike K , la position de call option *alpha*, la position de put option *beta*, la volatilité σ .

Dans cette section, supposons que l'on a 10 différents actifs. Pour la simplicité, supposons que les S_0 , K , σ des différentes options écrites sur les différents actifs sont tous identiques. Les VaR et Conditional VaR dans cette section sont toutes évaluées au 10^{ième} jour après l'achat du portefeuille. ($t = 10/360$ year) Pour chaque portefeuille, deux VaR et deux Conditional Var sont données. Elles correspondent respectivement au niveau 99.99% et 99.999%.

5.1 RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

Les deux tableaux ci-dessous résument les VaRs et les Conditional VaRs des différents portefeuilles sous différents scénarios. D'après la distribution conditionnelle de la perte au delà de la VaR, nous pouvons remarquer que la densité décroît très vite, ceci est tout-à fait normal puisque la perte extrême est un événement très rare. La Figure 2 montre que lorsque la composition du portefeuille devient l'opposé, la tendance des trajectoires associées aux pertes extrêmes devient aussi l'opposé. Intuitivement, comme le portefeuille avec "hedging" (le troisième portefeuille) est une composition des deux premiers, les trajectoires associées aux pertes extrême ne montrent plus une tendance dans ce cas.

	α	β	Valeur Initiale(\$)	VaR (\$)		Conditional VaR (\$)	
Mouvements indépendants							
$S_0 = 10, K = 10, \sigma = 0.2/year$	10	5	119.483	10.341	11.451	10.652	11.633
	-10	-5	-119.483	14.804	17.412	15.948	18.477
	$10*5+(-10)*5$	$5*5+(-5)*5$	0	13.202	15.424	14.174	16.327
Mouvements dépendants							
$\rho_{corr} = 0.4$							
$S_0 = 10, K = 10, \sigma = 0.2/year$	10	5	119.483	15.860	16.409	16.117	16.535
	-10	-5	-119.483	36.899	44.273	40.178	47.432
	$10*5+(-10)*5$	$5*5+(-5)*5$	0	11.617	14.032	12.633	15.019
Mouvements dépendants							
$\rho_{corr} = 0.4$							
Chocs du marché							
Poisson Composé $\lambda = 5$							
Amplitude : $\mathcal{N}(-2, 1) * t$							
$S_0 = 10, K = 10, \sigma = 0.2/year$	10	5	119.483	16.222	16.612	16.406	16.695
	-10	-5	-119.483	34.186	42.453	41.327	47.356
	$10*5+(-10)*5$	$5*5+(-5)*5$	0	11.597	13.920	12.619	14.896

TABLE 1: Les VaRs des différents portefeuilles estimées par l'algorithme de IPS

α	β	Valeur Initiale(\$)	ρ	VaR(99.99%) (\$)	Conditional VaR (\$)(99.99%)
10	5	119.483	0.2	13.922	14.398
			0.4	15.860	16.117
			0.6	16.477	16.613
			0.8	16.823	16.871
$10*5+(-10)*5$	$5*5+(-5)*5$	0	0.2	16.134	17.137
			0.4	13.922	14.819
			0.6	11.439	12.184
			0.8	7.999	8.519

TABLE 2: L'impact de la corrélation, avec $S_0 = 10, K = 10, \sigma = 0.2/year$

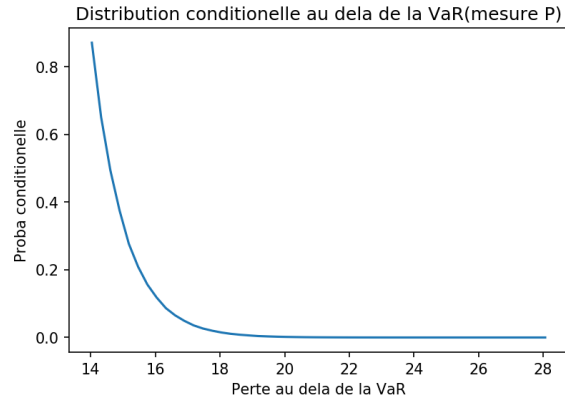
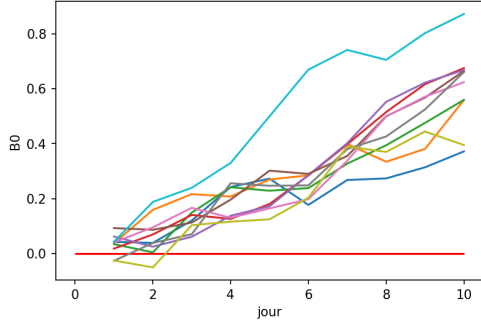
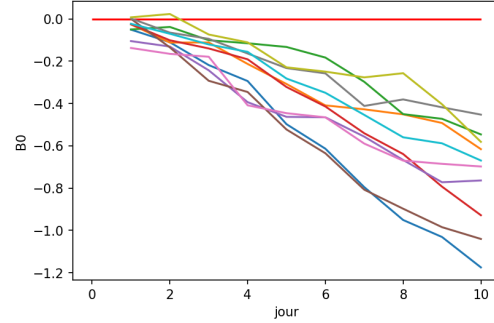


FIGURE 1: La distribution conditionnelle au delà de la VaR(99.999%) donnée par IPS. $\alpha = [10] * 5 + [-10] * 5$, $\beta = [5] * 5 + [-5] * 5$.

10 Mouvement Brownian B_0 associe a la perte extreme quand rho = 0.4



10 Mouvement Brownian B_0 associe a la perte extreme quand rho = 0.4



10 Mouvement Brownian B_0 associe a la perte extreme quand rho = 0.4

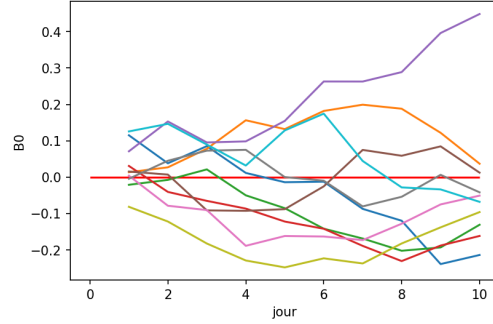


FIGURE 2: Les trajectoires typiques du mouvement brownien sous-jacent B_0 associées aux pertes extrêmes pour les trois types de portefeuille. (a) : $\alpha = [10]*10$, $\beta = [5]*10$; (a) : $\alpha = [-10]*10$, $\beta = [-5]*10$; (a) : $\alpha = [10]*5 + [-10]*5$, $\beta = [5]*5 + [-5]*5$

5.2 L'INTERPRÉTATION DES DONNÉES, L'IMPACT DES DIFFÉRENTS FACTEURS SUR LA VaR

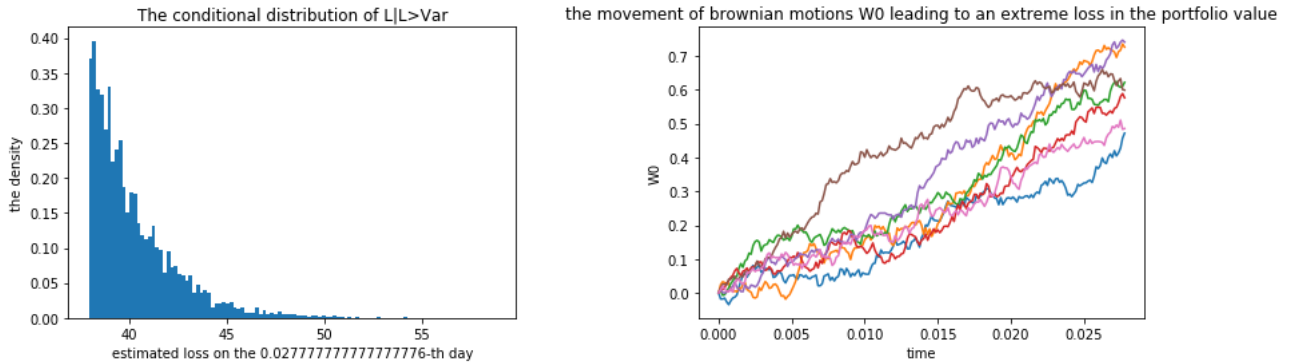
Observation 1 : La corrélation augmente le risque de "unhedged" portefeuille. Quand les mouvements browniens sont indépendants dans le marché, les pertes extrêmes potentielles sont globalement moins sévères que celles dans le cas des mouvements dépendant dans le marché (sauf pour le portefeuille "Hedged Portfolio", ie celui de la troisième composition dans le tableau.) Intuitivement, ceci est tout à fait normal. En effet, si les prix des actifs dans le marché fluctuent avec une corrélation, quand l'un des actifs plonge, les autres auront aussi la tendance de plonger (Market Crash). Ainsi, la perte extrême d'un portefeuille sera plus sévère dans ce cas-là.

Observation 2 : Sans corrélation, la performance d'un hedged portefeuille est comme une combinaison des deux premiers portefeuilles. Dans le cas des mouvements indépendants, le prix des actifs fluctuent sans corrélation, la VaR du 3^{ième} portefeuille est comprise entre celle du 1^{ier} et du 2^{ième}. En effet, on peut considérer le 3^{ième} portefeuille comme une combinaison des deux premiers portefeuilles, ainsi la perte extrême d'un tel portefeuille sera dans un niveau intermédiaire.

Observation 3 : "Hedge" diminue le risque dans le cas de l'existence de corrélation entre les actifs. Dans le cas des mouvements corrélés, on constate que le dernier portefeuille, qui est de valeur initiale 0, donne une VaR la plus petite. En effet, on peut considérer ce portefeuille comme un *hedged portfolio*. Intuitivement, une paire d'options ($Call(t, S_t^i), Put(t, S_t^j)$) peut former une paire de hedging à condition que S^i et S^j soit corrélés (Une corrélation forte, i.e. un coefficient de corrélation proche de 1 est préférable.) Pour une put option et une call option écrites sur le même "underlying asset" ou deux "underlying assets" corrélés, le mouvement de valeur de ces deux options par rapport au mouvement de prix de underlying asset est opposé. Ainsi, une telle paire d'options peut hedge l'exposition au risque du marché. Dans notre troisième portefeuille, des paires de hedging se forment une fois que les actifs deviennent corrélés.

Observation 4 : "Hedging" diminue plus de risque lorsque la corrélation des actifs devient plus importante. Dans le premier portefeuille du tableau 2, plus la corrélation est grande, plus la VaR est grande. Ce qui est consistant avec ce que nous avons dit dans *observation 1*. En effet, quand ρ_{corr} devient plus grand, quand le prix d'un actif fluctue, celui des autres actifs auront plus de tendance de fluctuer avec cet actif dans la même direction. Ainsi, quand un market crash a lieu, la perte sera plus sévère. Dans le deuxième portefeuille, on observe néanmoins un phénomène complètement inverse : quand ρ_{corr} augmente, la VaR diminue. En fait, ceci est grâce à la structure de hedging du portefeuille. Quand les actifs deviennent plus corrélés entre eux (ρ_{corr} plus grand), l'effet de hedging sera plus effective, et par conséquent la perte extrême sera moins sévère. Mais il faut aussi noter que, dans ce cas-là, le gain potentiel deviendra également relativement petit, puisque le gain apporté par une option sera compensé ("hedged") par la perte apportée par une autre option.

Observation 5 : La composition du portefeuille influence le risque lié au choc négatif. D'après le tableau 1, le choc dans le marché influence effectivement la performance du portefeuille. Dans un marché, chaque année il peut y avoir environ 5 chocs majeurs (sauf pour les années très particulière, par exemple 2008 où la crise financière a eu lieu), nous choisissons ainsi $\lambda = 5$ comme le paramètre du processus de Poisson composé. Pour la même loi de l'amplitude de choc, l'effet de choc sur le portefeuille 1 et celui sur le portefeuille 2 sont opposés. Le choc cause une perte plus importante pour le 1 mais améliore la performance de 2. Ceci est normal parce que dans le portefeuille 1, on a "long" les options, mais au contraire dans le portefeuille 2, on a "short" les options. Effectivement, le portefeuille 1 protège l'investisseur du risque induit par le choc négatif tandis que le portefeuille 2 est exposé au plus de risque en face de choc négatif. Comme le portefeuille 3 est une composition du portefeuille 1 et 2, la VaR de portefeuille 3 augmente aussi. Ainsi, même si que nous effectuons le "hedging" pour un portefeuille, le choc négatif augmente toujours le risque. Cela ne veut pas dire que le "hedging" n'est plus nécessaire, car le portefeuille 1 peut également être exposé au risque lié au choc positif du marché. En revanche, le "hedging" est très important pour diminuer le risque exposé.

FIGURE 3: $S_0 = 10$, $K = 15$, $\rho_{corr} = 0.4$, $\alpha = 10$, $\beta = 5$, $\alpha = 99.99\%$

5.3 PROS AND CONS DES DIFFÉRENTES MÉTHODES

Dans ce projet, nous avons essayé plusieurs méthodes disponibles pour estimer la VaR. Et nous avons également testé la performance de ces méthodes au niveau de la précision et de l'efficacité. Le temps d'exécution et l'intervalle de confiance associés aux différents groupes de paramètres sont présentés dans le tableau "data.excel".

Monte Carlo naïve est la méthode la plus simple et rigide. Avec un nombre suffisamment grand d'échantillons, elle nous fournit toujours un résultat acceptable, qui nous permet d'en faire usage dans les autres méthodes de simulation, par exemple la vérification de résultats, l'initialisation de paramètres etc. Néanmoins, Monte Carlo n'est pas capable de réaliser une estimation précise pour la VaR et la conditional VaR quand le niveau α demandé est élevé. En effet, quand α est grand, la réalisation de l'événement $loss(X) > VaR$ devient très difficile au terme de fréquence. Afin d'avoir un nombre suffisant d'échantillons statistiques, nous sommes obligés de réaliser environ 1.5×10^8 X pour avoir une estimation acceptable de la quantile empirique. Cela est long et coûteux. En plus, l'erreur relative de l'estimation de VaR reste au niveau de 20%, ceci n'est pas idéal.

Pour la méthode de splitting via MCMC, elle est rigide et est capable de donner un histogramme assez fine de la distribution conditionnelle, néanmoins elle a un problème majeur : le temps d'exécution pour estimer la VaR et l'intervalle de confiance. En effet, splitting nécessite une borne x pour commencer, et par conséquent nous devons utiliser une dichotomie sur x pour approcher la quantile à un niveau donné. Ainsi, une bonne initialisation et pas de calibration sur x est nécessaire. Ceci peut être réalisée en profitant de MC, avec un nombre d'échantillon petit juste pour avoir une idée générale sur l'ordre de grandeur de la VaR. Mais après tout, la dichotomie est coûteuse, un splitting peut être fait dans un temps court, mais d'après l'expérimentation, la dichotomie nécessite environ 12 à 16 itérations pour converger (sous condition que l'on a fait une initialisation raisonnable), cela résulte un temps d'exécution d'environ de 4 à 5 minutes pour estimer la VaR. Ceci n'est pas efficace. En plus, on ne sait pas la loi limite de l'estimateur de VaR. Elle est gaussienne mais on n'a pas une formule explicite de la variance de la loi limite. La seule façon pour l'avoir est de réaliser une statistique sur l'estimateur, avec des chaînes de Markov de longueur diminuée. D'après l'expérimentation, une telle statistique (1000 échantillons avec 500 comme la longueur de la chaîne de Markov), demande environ 20 minutes sur une machine relativement puissante (l'ordinateur dans la salle machine). En conclusion, il est très coûteux d'avoir un intervalle de confiance pour cette méthode.

IS est une méthode très efficace et précise. Dans le cas indépendant, elle permet d'estimer la VaR au niveau 99.99% en environ 30s, avec une erreur relative plus petite que 0.5%. Cette méthode est efficace et précise, mais il est difficile de trouver un changement de probabilité adaptée lorsque le cas devient compliqué (correlation, les chocs dans le marché), donc au niveau théorique cela est difficile à être généralisé. Composé avec l'approximation

Delta-Gamma, IS applique aux scénarios réels dans l'industrie. Cependant, une difficulté que nous avons eue est que la VaR calculée par IS dans le cas de "hedge" (troisième composition dans le tableau de résultats) ne correspond pas aux résultats que nous avons obtenus au travers des autres méthodes. Par contre, les résultats obtenus par IS sur les deux premières compositions correspondent bien aux résultats obtenus par d'autres méthodes. Pour instant, nous n'avons pas trouvé une explication raisonnable, ça sera notre prochain étape pour améliorer notre projet.

IPS est une méthode rigide, précise, avec une efficacité raisonnable. Elle est capable de donner des résultats dans 3 à 4 minutes, avec des intervalles de confiance très précis (de longueur à l'ordre de 10^{-1} à 10^{-3}). L'avantage de IPS est que nous n'avons pas besoin de chercher une nouvelle mesure explicitement, c'est-à-dire, nous pouvons changer la mesure implicitement via la fonction de score. Cet avantage nous permet d'utiliser IPS dans les scénarios compliqués, par exemple le scénario avec le processus de Poisson composé. Le temps d'exécution est acceptable pour obtenir une bonne précision. En revanche, IPS demande d'enregistrer les trajectoires des chaînes, ceci posera des problèmes quand les trajectoires deviennent longs et le nombre d'événements devient grand. Bien sûr, avec une fonction de score bien choisie, nous pouvons optimiser l'espace de mémoire requis par l'algorithme. Ainsi, IPS est une méthode avec la complexité du temps relativement basse et la complexité du mémoire relativement haute.

6

CONCLUSION

Dans ce projet, nous avons testé plusieurs méthodes pour simuler les événements rares, par exemple Monte Carlo naïf, Importance Sampling, Interacting Particle System et Splitting via MCMC. Les avantages et les inconvénients des différentes méthodes sont présentés et comparés. A partir des différentes VaRs et Conditional VaRs, nous avons identifié l'influence de la corrélation entre les actifs et celle du choc négatif sur le risque de portefeuille. De plus, par varier la composition de portefeuille, nous avons aussi identifié l'importance et l'influence de "hedge" quand il existe la corrélation des actifs dans la marché. Lors de la crise, certains portefeuilles réduisent le risque exposé tandis que d'autres portefeuilles sont exposés au risque plus élevé. Par conséquent, certains principes de la gestion du portefeuille sont identifiés et présentés dans ce projet.

7

REFERENCE

- [1] P. Glasserman, P. Heidelberger, and P. Shahabuddin. Variance reduction techniques for estimating value-at-risk. *Management Science*, 46 :1349-1364, 2000.
- [2] R. Carmona and S. Crépey. Particle methods for the estimation of credit portfolio loss distributions. *Int. J. Theor. Appl. Finance*, 13(4) :577-602, 2010.
- [3] P. Del Moral and J. Garnier. Genealogical particle analysis of rare events. *Annals of Applied Probability*, 15 :2496-2534, 2005.