

中国研究生创新实践系列大赛

“华为杯”第二十一届中国研究生

数学建模竞赛

题 目： 数据驱动下磁性元件的磁芯损耗建模

摘 要：

随着电子信息科技的高速发展，承担磁能的传递、存储、滤波等功能的元器件——磁性元件（变压器、电感等）有着越来越重要的影响。本文对斯坦麦茨方程进行了研究与推广，同时考虑了不同磁芯材料在不同工况下对磁芯损耗的影响。

针对问题一中的磁通密度数据，考虑建立特征因子池实现对波形特征的全方位掌握，其次进行特征降维，采用 LGM 决策树模型进行特征筛选，得到最终能够反应波形特征的两个特征变量：峭度指标和峰值指标，最后使用该指标进行具体分类预测，达到近乎 100% 的准确率。

针对问题二从传统斯坦麦茨方程（SE）出发，首先探究 SE 方程的适用性，探究温度变量是如何影响模型参数的，研究表明，参数 k 与温度呈负相关、参数 α 和 β 与温度呈正相关，以此来建立温度修正的 SE 模型，并且使用岭回归代替 OLS 以解决多重共线性。最终实现更优秀的预测效果。

针对问题三中的三个因素独立及协同对磁芯损耗结果产生的影响，在控制变量的前提下，分别采用单因素方差分析和多因素方差分析对这些影响得出具体的结论，并建立了多元回归方程使结果更加具象化，结合前两个结论，给出三个因素对磁芯损耗结果的最优解。

针对问题四，基于前文的研究，建立物理方程与深度学习融合模型，从 T-SE 出发，运用神经网络对 T-SE 方程再次修正，建立了多阶段学习磁芯损耗预测模型（re-TSE），使得模型训练误差从局限性的 0.1650 下降到强泛用性的 0.0390，融合模型更加精准，且更加稳定。

针对问题五，为多目标优化问题，在 re-TSE 模型的基础之上建立优化模型，采用加权目标函数，使用连续最小二乘法对模型进行寻优，最终磁芯损耗为 $18846.0566(\text{W}/\text{m}^3)$ ，传输磁能达 $442413.3920(\text{Hz} \cdot \text{T})$ 。

关键词： 斯坦麦茨方程；磁芯损耗预测；方差分析；多阶段学习；MLP

目 录

| | |
|-------------------------------------|----|
| 1. 问题重述..... | 4 |
| 1.1 问题背景..... | 4 |
| 1.2 问题复述..... | 4 |
| 2. 模型假设与符号说明..... | 5 |
| 2.1 模型假设..... | 5 |
| 2.2 符号说明..... | 5 |
| 3. 基本模型..... | 6 |
| 3.1 斯坦麦茨方程（Steinmetz-equation）..... | 6 |
| 3.3 全连接神经网络（MLP）..... | 6 |
| 4. 问题一的分析与求解..... | 8 |
| 4.1 问题分析..... | 8 |
| 4.2 构建因子池..... | 8 |
| 4.3 LGB 决策树模型构建..... | 10 |
| 4.4 基于 LGB 算法的励磁波形分类预测模型..... | 11 |
| 5. 问题二的分析和求解..... | 13 |
| 5.1 问题分析..... | 13 |
| 5.2 斯坦麦茨方程适用性分析..... | 13 |
| 5.3. 修正斯坦麦茨方程的构建与求解..... | 14 |
| 5.3.1. 模型的构建..... | 14 |
| 5.3.2. 模型的求解..... | 15 |
| 5.4 模型评价与结果分析..... | 16 |
| 6. 问题三的分析与求解..... | 18 |
| 6.1 问题分析..... | 18 |
| 6.2 单因素方差分析..... | 18 |
| 6.2.3 磁芯材料影响因素分析..... | 19 |
| 6.2.4 励磁波形影响因素分析..... | 20 |
| 6.3 双因素协同影响分析..... | 21 |
| 6.3.1 磁芯材料-温度协同影响分析..... | 21 |

| | |
|-----------------------------|----|
| 6.3.2 磁芯材料-励磁波形协同影响分析 | 22 |
| 6.3.3 温度-励磁波形协同影响分析 | 22 |
| 7. 问题四的分析与求解..... | 23 |
| 7.1 问题分析..... | 23 |
| 7.2 基于数据驱动的磁芯损耗预测模型..... | 23 |
| 7.3 re-TSE 模型分析及结果展示 | 23 |
| 8. 问题五的分析和求解..... | 26 |
| 8.1 问题分析..... | 26 |
| 8.2 优化问题求解..... | 26 |
| 9. 模型评价..... | 27 |
| 9.1 模型优缺点..... | 27 |
| 9.2 总结展望..... | 27 |

1. 问题重述

1.1 问题背景

随着电力电子技术的迅猛发展，磁性元件在各类电力电子变换器中的核心地位日益凸显。这些元件不仅占据了变换器相当大一部分的体积，其损耗也直接影响着设备的整体性能和效率，因此降低磁芯损耗是提升变换器性能的关键手段之一。为了实现这一目标，对磁性元件进行精细化的优化设计和合理的应用策略显得尤为重要。而这一过程关键就在于能够精确测量并计算磁芯的损耗，只有准确掌握了磁芯损耗的具体数值和特性，我们才能精准的磁性元件进行设计调整，在保证设备综合性能的同时，尽量降低磁芯损耗，从而提高整体效率，以满足实际工作中的设备需求。

具体来说，优化磁性元件的设计可以从多个方面入手，诸如改进磁芯材料、优化几何结构、控制工况等。构建磁芯损耗预测模型旨在通过先进的数据分析技术，为磁性元件的设计与优化提供新的视角与方向。大数据时代的到来，为磁芯损耗建模带来了前所未有的机遇与挑战。现代测量技术与传感器网络的飞速发展，使得我们能够实时捕获磁性元件在不同工况下的多维度数据，包括电流、电压、温度、频率及磁通密度等关键参数。这些丰富的数据资源，为数据驱动建模提供了坚实的基础，使我们能够深入挖掘磁芯损耗与各因素之间的复杂关联，进而构建出更加精准与适应性强的磁芯损耗预测模型。

综上所述，在现有的磁芯损耗预测模型难以满足实际应用需求的背景下，构建泛化能力强、高性能高效率的磁芯损耗预测模型，实现对磁性元件的精确测量、科学计算以及优化设计，是提升电力电子变换器性能、推动电力电子技术持续发展的重要途径。这将有望推动电子电气技术的持续创新与发展，提升设备性能与可靠性，同时为实现能源节约与环境保护目标贡献重要力量。

1.2 问题复述

根据上述问题背景，题目围绕原始磁芯损耗模型，即斯坦麦茨方程(SE)展开，考虑对该方程进行一定修正，以解决斯坦麦茨方程在实际生产生活使用上的局限性，期望将原始模型拓展到不同材料、不同工况，提高模型的泛用性、稳定性和准确性。本文将解决以下五个问题：

问题一：励磁波形分类。从生产生活实践经验所知，不同的励磁波形对不同材料有着显著不同的影响，因此准确识别出励磁波形对研究磁芯损耗有着非常重要的作用。问题一要求根据磁通密度数据建立励磁波形分类模型。

问题二：斯坦麦茨方程修正。斯坦麦茨方程仅考虑了励磁波频率和峰值磁芯损耗的影响，而实验表明不同温度条件下，磁芯损耗之间有着显著差别。问题二要求在同一种磁芯材料、正弦波形下，对斯坦麦茨方程添加温度影响因子，实现对斯坦麦茨方程的温度修正。

问题三：磁芯损耗因素分析。磁芯损耗受到多种因子的影响，问题三要求探究温度、励磁波形和磁芯材料三个因子如何独立地、协同地影响磁芯损耗。并且探索性研究磁芯损耗最小的条件。

问题四：磁芯损耗预测。以拓展到温度域的斯坦麦茨方程(T-SE)为基础，考虑到实际生产生活中获取的经验数据，问题四要求建立数据驱动型的斯坦麦茨方程(DD-T-SE)模型，期望实现对任意材料和任意工况的磁芯损耗统一建模。

问题五：最佳条件探索。以数学模型指导实践，使用问题四所建立的磁芯损耗预测模型，探索何种条件下磁芯损耗最小，以及最大传输磁能（频率与峰值乘积），建立优化模型。

2. 模型假设与符号说明

2.1 模型假设

经过对数据的分析，考虑如下两种损失定义：

$$\text{loss1} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_N (P_i - \hat{P}_i)} \quad 2.1.1$$

$$\text{loss2} = \frac{1}{N} \sum_N (\ln(P_i) - \ln(\hat{P}_i)) \quad 2.1.2$$

回归方程优化目标为 loss2，而因为磁芯损耗量级较大，并且由于指数函数的爆炸式增长特性，当模型优化目标 loss2 较小时，loss1 仍保持较大数量级，因此需要将 loss1 也考虑到模型的优化目标中，建立如下动态加权损失函数，将 loss1 以动态调整的权重 μ 作为影响因子纳入方程：

$$\text{loss} = \mu * \text{loss1} + \text{loss2} \quad 2.1.3$$

说明：下文损失指 loss2。

2.2 符号说明

本文采用的符号如下：

| 符号 | 含义 |
|----------|------------------------|
| P | 磁芯损耗 |
| f | 频率 |
| B_m | 磁通密度的峰值 |
| k | 斯坦麦茨方程系数 |
| α | 斯坦麦茨方程系数，通常介于 1 到 3 之间 |
| β | 斯坦麦茨方程系数，通常介于 2 到 3 之间 |

3. 基本模型

3.1 斯坦麦茨方程 (Steinmetz-equation)

斯坦麦茨方程 (Steinmetz-equation(SE)), 又称 SE 方程, 是用来纪念德国电气工程师查尔斯·斯坦麦茨的一种经验方程, 该方程限定外部激励为正弦波, 而不适用于其他波形的损耗预测, 具体方程如下所示。

$$P = k \cdot f^\alpha \cdot B_m^\beta \quad 3.1.1$$

其中 P 为磁芯损耗, f 为频率, B_m 为磁通密度的峰值, k 、 α 、 β 为实验数据拟合的系数, 称为斯坦麦茨系数, 通常 $1 < \alpha < 3$, $2 < \beta < 3$ 。当磁芯材料或者温度发生变化时, 斯坦麦茨系数也会有所变化, 即斯坦麦茨系数不是固定的常量。

在磁芯的损耗问题中, 磁芯损耗可分为磁滞损耗, 涡流损耗和剩余损耗 3 个部分, 而 SE 方程主要用于解决磁滞损耗和涡流损耗, 磁芯损耗计算公式如下所示。

$$P_{core} = P_h + P_{cl} + P_e \quad 3.1.2$$

其中 P_{core} 表示单位体积磁芯损耗, P_h 表示磁滞损耗, P_{cl} 表示涡流损耗; P_e 表示剩余损耗。

3.2 决策树模型 (LightGBM)

LightGBM 是一种基于 GBDT 算法的智能模型, 通常被广泛运用于特征提取、分类预测、收缩排序的任务, 其主要思想是利用决策树迭代训练以得到最优模型。该算法采用带深度限制的 Leaf-wise 的叶子生长策略, 每次从当前所有叶子中找到分裂增益最大的一个叶子, 然后分裂, 计算新的叶节点的样本 MSE, 进而计算样本分裂前后的 MSE 的差值, 即为增益 score, 增益值的大小反映了特征分裂后对提升性能的贡献度的高低, 增益值越高则说明特征越重要, 反之则说明特征不重要。LGB 算法会在训练过程中根据特征重要性进行特征的选择和排序, 不断的删减不重要的特征, 最终保留重要的特征。

LightGBM 模型如下图所示:

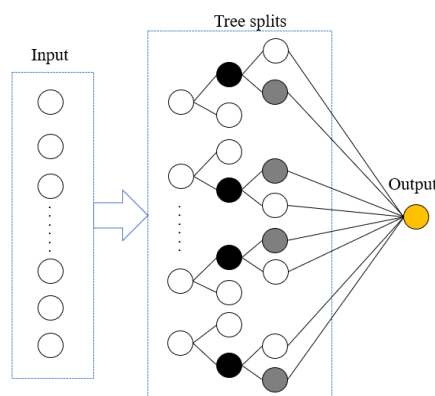


图 3-1 LGB 决策树模型

3.3 全连接神经网络 (MLP)

多层感知器 (MLP) 是一种最基本的前馈神经网络模型, 灵感来源于对人类大脑的研究, 类似于大脑皮层与神经元细胞的结构, MLP 构建了数层由仿神经元组成的层级结构。如下图 3-2 所示, 最简单的 MLP 通常由三层组成: 输入层、隐藏层和输出层, 每个层次均分别由单个或多个节点组成, 每个节点层会链接到下一层。

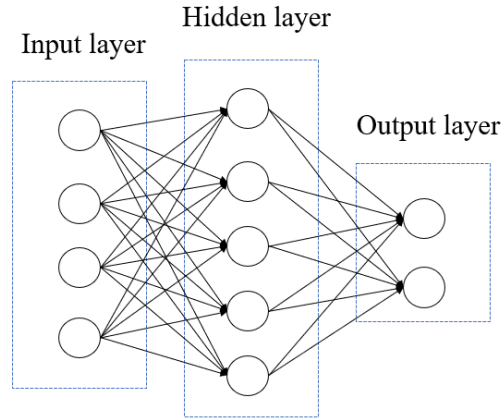


图 3-2 MLP 结构图

输入层：输入层接收来自数据集的特征向量。每个特征向量对应一个输入神经元，输入层的神经元数量由数据集中的特征数量决定，负责输出对原始数据进行学习、处理和分析后信息。

隐藏层：隐藏层负责对输入数据进行非线性变换和特征提取，一个神经网络可以包含多个隐藏层，每个隐藏层包含多个如图 3-2 所示神经元。

输出层：输出层负责合并隐藏层的输出内容。输出层的神经元数量通常由问题的类型决定。

MLP 神经网络算法通过学习实现输入信息和输出结果之间的映射关系，为了提高预测准确性，在模型的训练过程中常加入激活函数，以引入非线性变换。每个神经元都采用激活函数，这样可以学习非线性模式和复杂特征。

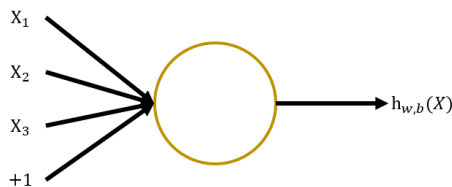


图 1-3 神经元结构示意图

图 3-3 中，“+1”表示偏置，该神经元进行了如下的计算：

$$h_{w,b}(x) = f(Wx + b) = f\left(\sum_{i=1}^n W_i x_i + b\right) \quad 3.3.1$$

其中， W 表示权重， b 表示偏置值， $f(\cdot)$ 即为激活函数。

MLP 神经网络的层与层之间是相互联系的，数据在层与层之间主要通过矩阵乘法和激活函数完成传递，**MLP 神经网络**的学习过程一般包括前向传播和反向传播两个重要步骤。

（1）**前向传播。**数据从输入层传播到输出层，经过线性变换后再通过激活函数进行非线性转换，得到每个神经元的激活值，再传递到下一层的神经元，直到传播到输出层。

（2）**反向传播。**计算损失函数对参数的梯度，利用梯度下降算法更新参数。从输出层开始逐层向后传播梯度，并根据链式法则计算每个参数对损失的贡献。在传播过程中，根据激活函数的导数计算梯度并更新参数。

通过前向传播和反向传播的交替执行，模型参数不断进行优化，使预测结果逐渐接近真实标签，实现对数据的准确建模和预测。

4. 问题一的分析与求解

4.1 问题分析

问题一中指出励磁波形对深入理解研究磁芯的损耗特性具有非常重要的意义。本章的主要任务是利用磁通密度数据构建分类预测模型，有效识别不同的励磁波形。

构建模型之前，首先需要寻找特征变量以描述磁通密度的分布特征，考虑时域特征，有峰值、峰度系数、偏度系数、峭度等特征变量；考虑频域特征，有频谱强度、频谱宽度、频率峰值等特征变量。其次对构建的因子池进行筛选，决策树模型是一类以树状结构表示的分类、回归预测模型，树模型结构清晰，能够直接了解每一个节点的规则和路径，并且可以测量因子池中每一个待筛选因子对分类模型的贡献程度，实现对因子池的重要性排序。

基于以上分析，本章实验步骤如图 1 所示：

- (step1) 数据预处理，计算特征变量，构建因子池。
- (step2) 构建 LGB 决策树模型，计算每个因子对模型的贡献度。
- (step3) 对因子池进行筛选，构建基于重要因子的 LGB 分类预测模型。
- (step4) 验证、分析模型的可行性、准确性，使用模型进行预测。

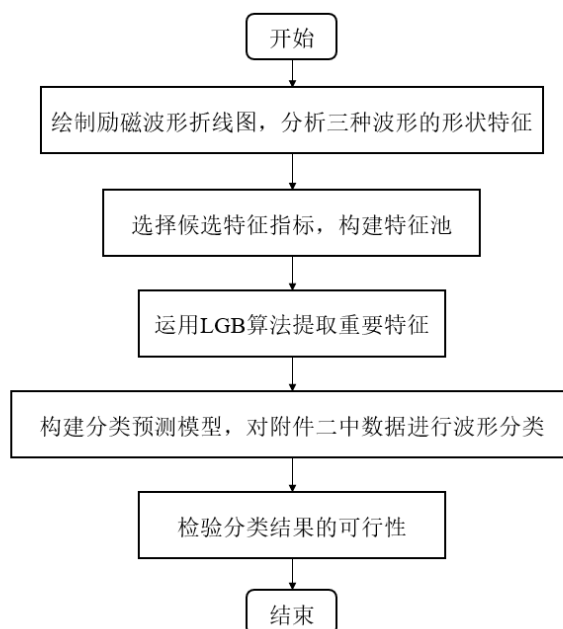


图 2-1 励磁波形分类模型

4.2 构建因子池

如图 4-2 所示，图 4-2 展示了附件一数据中存在的三种励磁波形，(a)为正弦波，波形近似为三角函数样式，波形平滑、对称；(b)为三角波，波形在一个周期内以一定斜率直线上升、直线下降循环，呈现三角形样式，存在一个尖峰；(c)为梯形波，波形在一个周期内以多种斜率上升、以一种斜率下降循环，呈现多边形样式，存在多个不可导点，呈右偏分布。

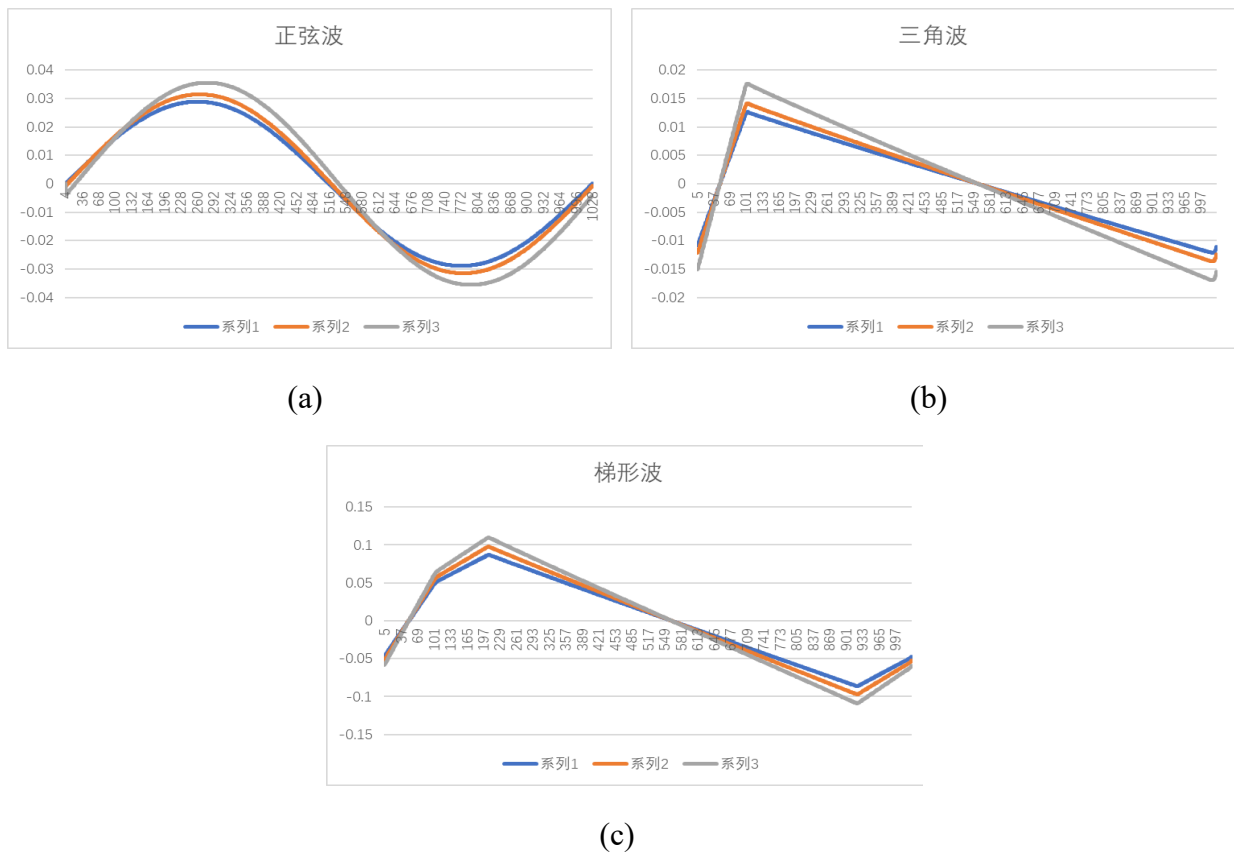


图 4-2 三种波形展示

基于如上分析，构建表 4-1 包括 15 个时域特征指标、4 个频域特征指标的因子池。

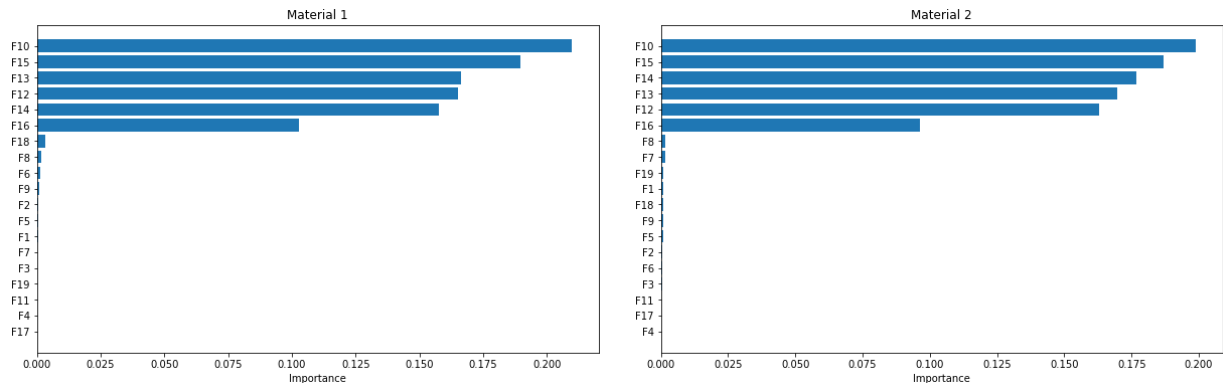
表 4-1 因子池

| 特征指标 | 公式 | 特征解释 |
|-------|---|----------|
| 波峰 | $F_1 = \max(X_i)$ | 最大值 |
| 峰值 | $F_2 = \max(X_i)$ | 最大绝对值 |
| 波谷 | $F_3 = \min(X_i)$ | 最小值 |
| 均值 | $F_4 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$ | 平均水平 |
| 峰峰值 | $F_5 = F_1 - F_3$ | 波峰与波谷之差 |
| 绝对平均值 | $F_6 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i $ | 绝对值的平均水平 |
| 均方根值 | $F_7 = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i^2}$ | 反应信号稳定性 |
| 方根幅值 | $F_8 = (\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sqrt{ X_i })^2$ | 反应信号稳定性 |

| | | |
|------|--|--------------|
| 标准差 | $F_9 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (X_i - F_4)^2}{N - 1}}$ | 反应信号稳定性 |
| 峭度指标 | $F_{10} = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - F_4)^4}{(N - 1)F_9^4}$ | 反应信号的冲击特性 |
| 偏度指标 | $F_{11} = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - F_4)^3}{(N - 1)F_9^3}$ | 反应信号非对称性 |
| 裕度指标 | $F_{12} = \frac{F_2}{F_8}$ | 反应信号异常程度 |
| 波形指标 | $F_{13} = \frac{F_7}{F_6}$ | 均方根值与绝对平均值之比 |
| 脉冲指标 | $F_{14} = \frac{F_2}{F_6}$ | 检查信号有无冲击 |
| 峰值指标 | $F_{15} = \frac{F_2}{F_7}$ | 检查信号有无冲击 |
| 频谱强度 | $F_{16} = \frac{\max(Q_i)}{\max(X_i)}$ | 反应最高频率的相对能量 |
| 频谱宽度 | $F_{17} = \max(f_i) - \min(f_i)$ | 反应频率范围 |
| 频率峰值 | $F_{17} = \max(Q_i)$ | 反应最高频率的绝对能量 |
| 总能量 | $F_{18} = \sum Q_i^2$ | 反应波的总能量大小 |

4.3 LGB 决策树模型构建

为了更好的构建分类模型，本文将先进行特征筛选，排除反映磁通密度分布及波形形状能力较弱的特征指标，保留反映能力较强的特征指标。采用 LGB 树模型计算特征指标的重要性得分，以此确定各个特征指标的重要程度，从而达到特征筛选的目的。得到结果如下图 4-3 所示，(a)(b)(c)(d)依次表示材料一、材料二、材料三和材料四的特征重要性排序，如图所示，特征变量 F10（峭度指标）、F15（峰值指标）、F12（裕度指标）、F13（波形指标）、F14（脉冲指标）五个变量对分类模型具有显著影响，考虑到分类问题的复杂度，选取 F10（峭度指标）和 F15（峰值指标）两个特征作为最终构建分类模型的指标。



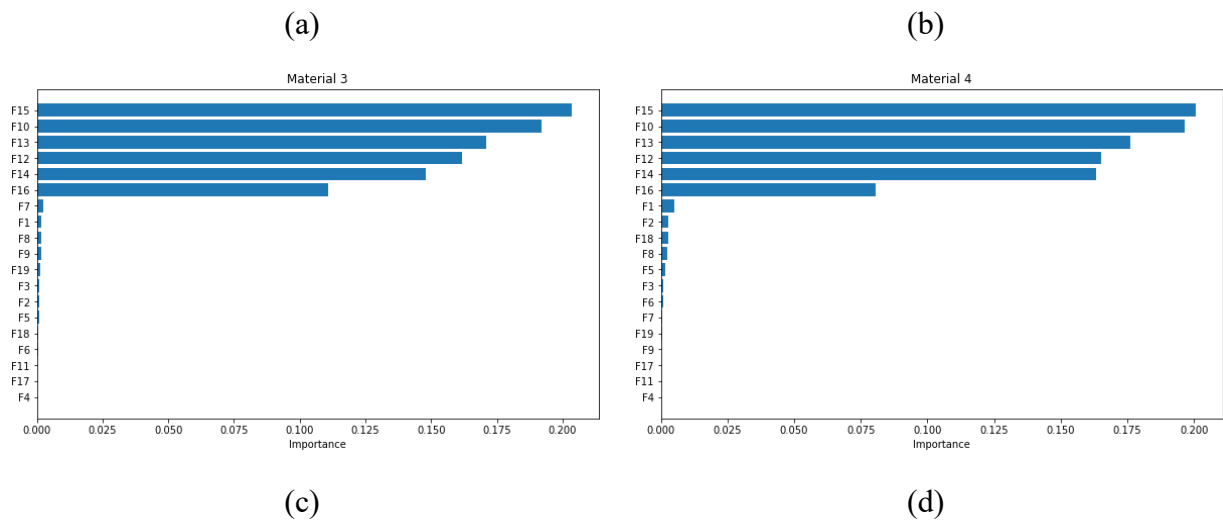


图 4-3 因子池贡献度排序

4.4 基于 LGB 算法的励磁波形分类预测模型

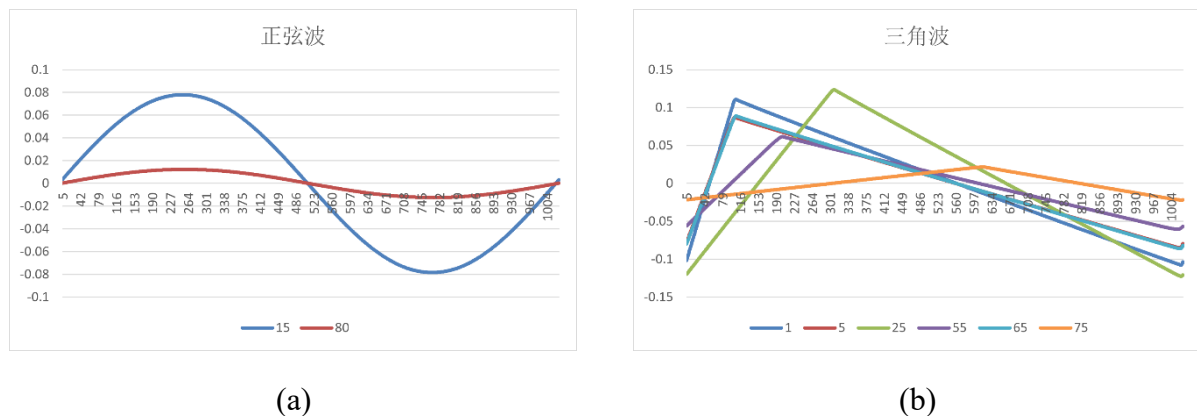
考虑到数据集的特点为数据量大，数据特征明显，特征之间关系简单，因此考虑适合大数据集、低特征维度、高效率的简单分类模型。如模型介绍所说，LGB 决策树模型能够自动进行特征选择，是一种高效、准确的分类预测模型，适配本文所要求的分类预测任务。

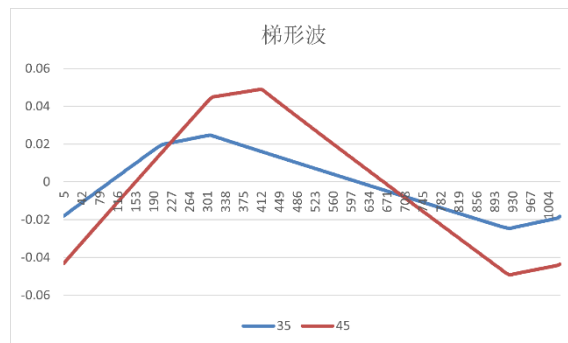
本章采用 python3 环境实现，使用 sklearn 库构建 LGB 分类预测模型，随机选取 20% 作为验证集，剩余 80% 作为训练集进行训练，使用附件二数据作为测试集进行测试，最终实现在训练集、验证集以及测试集上近乎 100% 准确率的分，测试集部分结果如表 4-2 所示；图 4-4 展示了测试集部分数据的波形图以及对应分类结果。

表 4-2 测试集励磁波形分类结果

| 测试样本序号 | 励磁波形 | 测试样本序号 | 励磁波形 |
|--------|------|--------|------|
| 1 | 2 | 45 | 3 |
| 5 | 2 | 55 | 2 |
| 15 | 1 | 65 | 2 |
| 25 | 2 | 75 | 2 |
| 35 | 3 | 80 | 1 |

其中，励磁波形 1、2、3 分别表示正弦波、三角波和梯形波。





(c)

图 4-4 励磁波形分类结果展示

如图 4-5 所示，测试集中正弦波的数量为 20，三角波的数量为 44，梯形波的数量为 16。

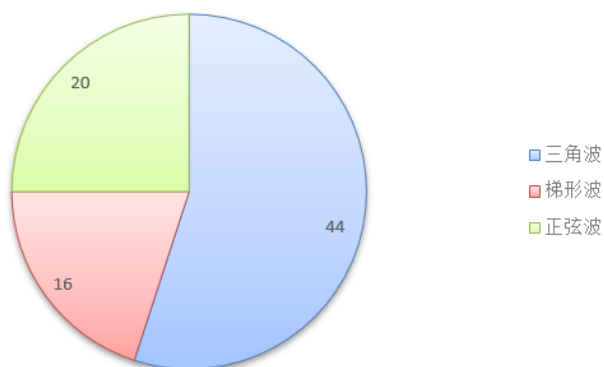


图 4-5 测试集励磁波形统计

5. 问题二的分析和求解

5.1 问题分析

斯坦麦茨方程（Steinmetz-equation,SE）作为经典模型被广泛运用于传统的磁芯损耗预测模型当中，然而，该模型却局限于正弦波，并且对磁芯材料和温度变化具有较高的敏感性，具有较差的泛用性和鲁棒性，为生产生活实践带来诸多不便。因此，本章将首先对斯坦麦茨方程进行适用性分析，论证该方程的局限性。然后采用控制变量法，研究不同温度下斯坦迈茨方程参数的变化，探究温度如何对斯坦迈茨方程产生影响。然后依据温度对方程的影响形式，添加温度影响因子，构建温度修正斯坦麦茨方程（T-SE）。最后，分析比较修正斯坦麦茨方程与斯坦麦茨方程的磁芯损耗预测效果，论证改进的有效性和可行性。

5.2 斯坦麦茨方程适用性分析

斯坦麦茨方程（Steinmetz-equation(SE)）公式如下所示：

$$P = k \cdot f^{\alpha} \cdot B_m^{\beta} \quad 5.2.1$$

其中 P 为磁芯损耗， f 为频率， B_m 为磁通密度的峰值， k 、 α 、 β 为实验数据拟合的系数，通常 $1 < \alpha < 3$ ， $2 < \beta < 3$ 。

对 5.2.1 取对数进行线性变换，将其转换成二元回归方程，得到公式如下所示：

$$\log(P) = \log(k) + \alpha \cdot \log(f) + \beta \cdot \log(B_m) \quad 5.2.2$$

采用最小二乘法进行拟合，训练集数据如表 5-2 中实验 1 所示，求得参数如表 5-1 所示。

表 5-1 SE 最小二乘法拟合结果

| k | α | β |
|--------|----------|---------|
| 0.1332 | 1.4945 | 2.5262 |

得到具体的斯坦麦茨方程如下所示。

$$P = 0.1332 \cdot f^{1.4945} \cdot B_m^{2.5262} \quad 5.2.3$$

对方程 5.2.3 的泛用性和稳定性进行测试，实验结果如表 5-2 所示。

表 5-2 SE 局限性研究结果

| 实验 | 磁芯材料 | 温度（℃） | 励磁波形 | 拟合误差 | 预测误差 |
|-----|------|-------|------|--------|--------|
| 训练集 | 材料一 | 50 | 正弦波 | 0.0093 | 0.0093 |
| 测试一 | 材料一 | 50 | 三角波 | 0.1241 | 0.9811 |
| 测试二 | 材料一 | 25 | 正弦波 | 0.0064 | 0.1923 |
| 测试三 | 材料二 | 50 | 正弦波 | 0.0272 | 0.1945 |

采样控制变量法，分别控制材料、温度和励磁波形变换，其他情况保持与训练集一致对模型进行测试。对于测试一，更换三角波，拟合误差和预测误差均出现较大的提高，说明传统 SE 模型不适用于三角波情况。对于测试二，改变温度情况，发现拟合误差不变，但预测误差大大提高，说明 SE 模型对温度变化敏感，温度改变则需要重新对方程进行拟

合，在温度领域上的泛用性表现较差。对于测试三，SE 方程对不同的材料拟合效果不尽相同，而且方程参数并不通用。

5.3. 修正斯坦麦茨方程的构建与求解

5.3.1. 模型的构建

本章以附件一材料 1 的正弦波样本为例，在不同温度的条件下进行回归拟合，求得方程系数和 MSE，得到结果如表 5-3 所示。

表 5-3 SE 模型在不同温度下的拟合效果

| 温度（℃） | k | α | β | MSE |
|-------|--------|----------|---------|--------|
| 25 | 1.4672 | 1.3125 | 2.4580 | 0.2353 |
| 50 | 0.1332 | 1.4945 | 2.5262 | 0.0148 |
| 70 | 0.0040 | 1.7751 | 2.5265 | 0.0716 |
| 90 | 0.0005 | 1.9492 | 2.5804 | 0.1727 |

拟合结果显示温度过高或者过低都会降低传统 SE 模型的预测精度。为了更为直观的展现 k 、 α 、 β 与温度 T 之间的关系，绘制折线图如图 5-1 所示。

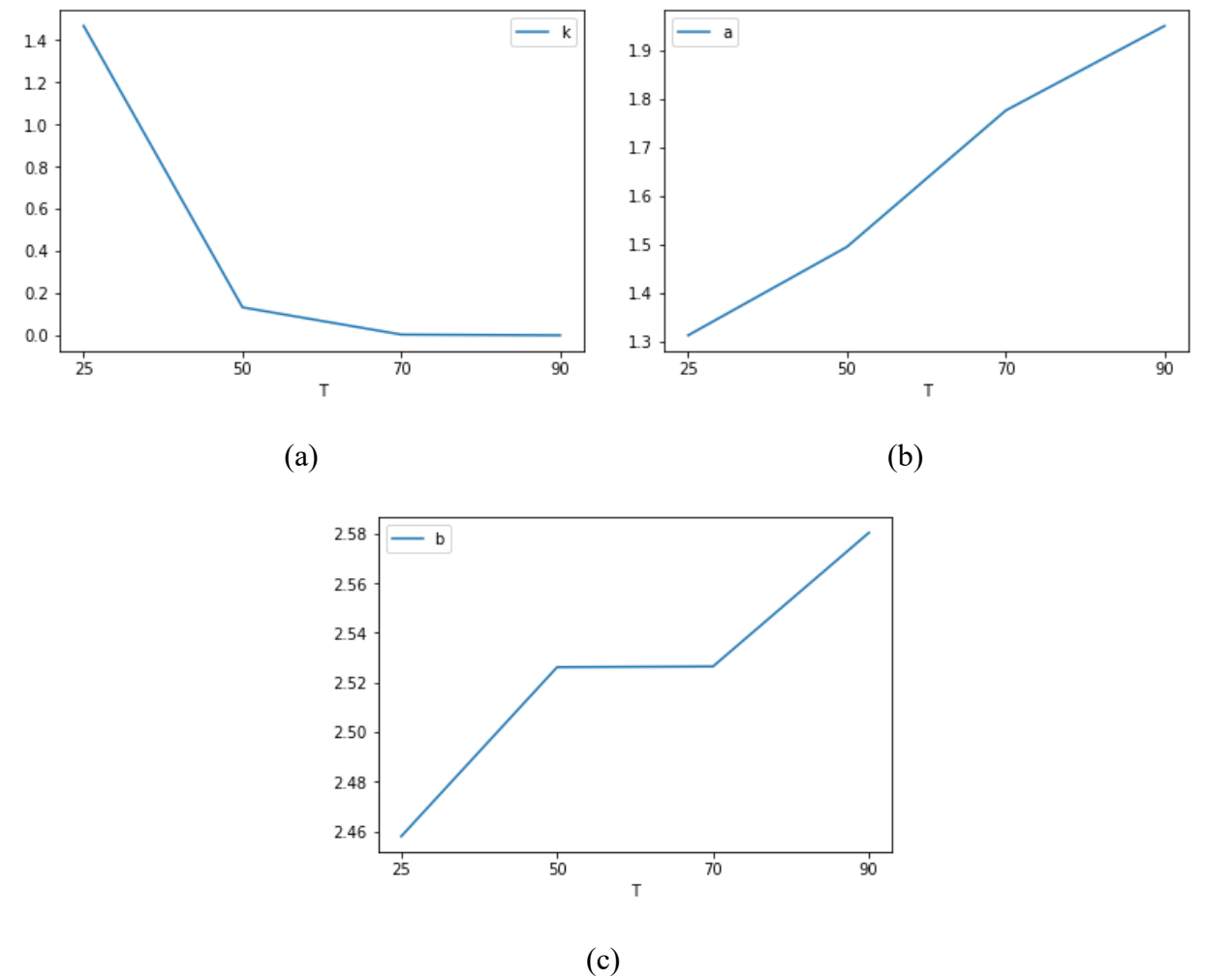


图 5-1 方程系数 k 、 α 、 β 随时间 T 的变化趋势

由图 5-1(a)所示, 参数 k 随着温度 T 增加而呈指数级下降, (b)(c)显示参数 α 、 β 随着温度 T 增加呈线性上升, 由此出发, 可以得到带温度修正项的坦麦茨方程, 如下所示:

$$\begin{cases} k = k_1 \cdot e^{-k_2 T} \\ \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 T \\ \beta = \beta_1 + \beta_2 T \\ P = k \cdot f^\alpha \cdot B_m^\beta \end{cases} \quad 5.3.1$$

其中, T 表示温度, k_1 、 k_2 、 α_1 、 α_2 、 β_1 、 β_2 表示方程系数。

将经过温度修正后的参数带回原方程, 并对公式取对数转化, 将修正斯坦麦茨方程转换为多元线性回归问题, 得到预测模型如下所示。

$$\log(P) = \alpha_1 \log(f) + \beta_1 \log(B_m) - k_2 T + \alpha_2 T \log(f) + \beta_2 T \log(B_m) + \log(k_1) \quad 5.3.2$$

5.3.2. 模型的求解

如 5.3.2 所述, 经过对数化转换后的结果为带交叉项的多元线性回归方程。首先尝试采用最小二乘法对附件一中样本进行拟合, 拟合参数结果如表所示:

表 5-4 T-SE 模型最小二乘回归系数

| $\log(k_1)$ | $-k_2$ | α_1 | α_2 | β_1 | β_2 | MSE |
|-------------|---------|------------|------------|-----------|-----------|--------|
| 4.0387 | -0.1334 | 1.0132 | 0.0107 | 2.4085 | 0.0019 | 0.1768 |

最终得到误差为 0.1768, 带有温度修正项的斯坦麦茨方程如下:

$$P = 56.7525e^{0.1334T} f^{1.0132+0.0107T} B_m^{2.4085+0.0019T} \quad 5.3.3$$

得到真实值和预测值的散点图以及残差散点图如图 5-2 所示:

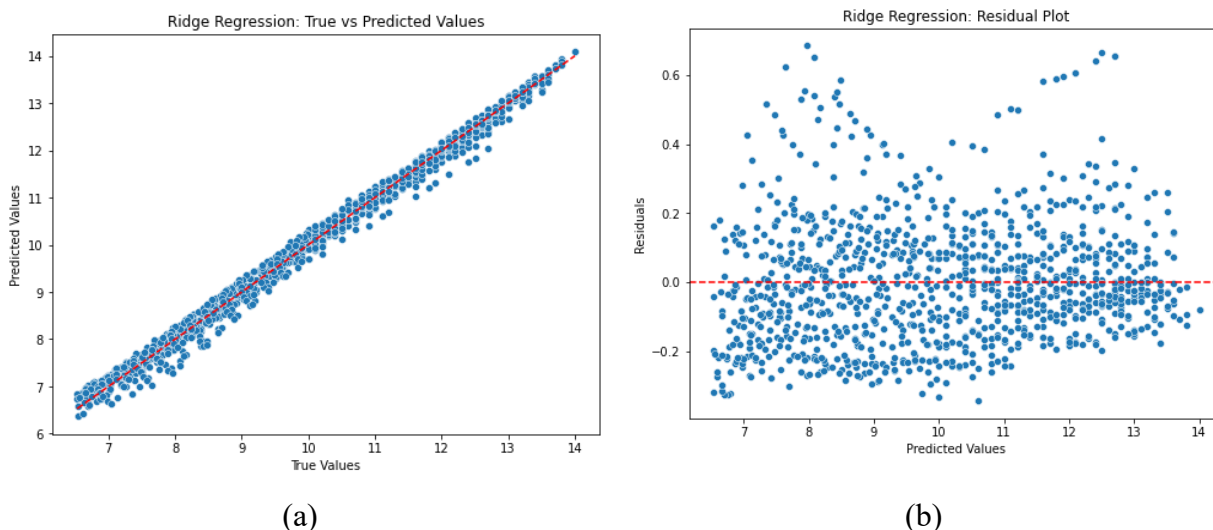


图 5-2 最小二乘回归结果 (a)真实值-预测值散点图 (b)残差分布图

随后为探究方程是否存在遗漏的高阶项, 对方程进行 RESET 检验, 检验结果 F 值为 3.13, P 值为 0.0248>0.01, 在1%水平下接受原假设, 认为在1%水平下接受原假设, 认为不存在遗漏项; 但是在5%水平下拒绝原假设, 认为遗漏变量的高阶项, 因此进一步添加变量的高次幂进行检验, 所得 P 值均小于5%水平, 因此可以认为模型存在的遗漏项不是模型本身自变量的高次幂, 而是模型之外的其他因素, 而不在本章研究范围。

由于模型中存在交叉项, 可能存在多重共线性问题, 为此, 下面将进行多重共线性检验, 得到检验结果如表 5-5 所示, 温度 T 项以及温度交叉项 VIF 值均大于 10, 说明模型自

变量之间存在这严重的多重共线性，这将导致 OLS 回归系数极度敏感，方差变大，因此 OLS 回归并不理想。

表 5-5 VIF 方差膨胀系数检验结果

| 自变量 | $\log(f)$ | $\log(B_m)$ | T | $T\log(f)$ | $T\log(B_m)$ |
|-----|-----------|-------------|--------|------------|--------------|
| VIF | 8.23 | 7.91 | 537.83 | 595.85 | 15.46 |

岭回归是最经典的处理多重共线性的回归方法，通过引用岭参数，以损失部分信息的代价获得更稳定的回归系数。经过岭回归得到最终参数拟合值如表所示：

表 5-6 T-SE 模型岭回归系数

| $\log(k_1)$ | $-k_2$ | α_1 | α_2 | β_1 | β_2 | MSE |
|-------------|---------|------------|------------|-----------|-----------|--------|
| 9.9992 | -1.4466 | 0.7388 | 1.2076 | 2.0785 | 0.0441 | 0.0330 |

最终得到误差为 0.0330，带有温度修正项的斯坦麦茨方程如下

$$P = 21871.0692e^{-1.4466T}f^{0.7388+1.2076T}B_m^{2.0785+0.0441T}$$

5.3.4

岭回归误差和稳定性明显优于最小二乘回归，得到真实值和预测值的散点图以及残差散点图如图所示：

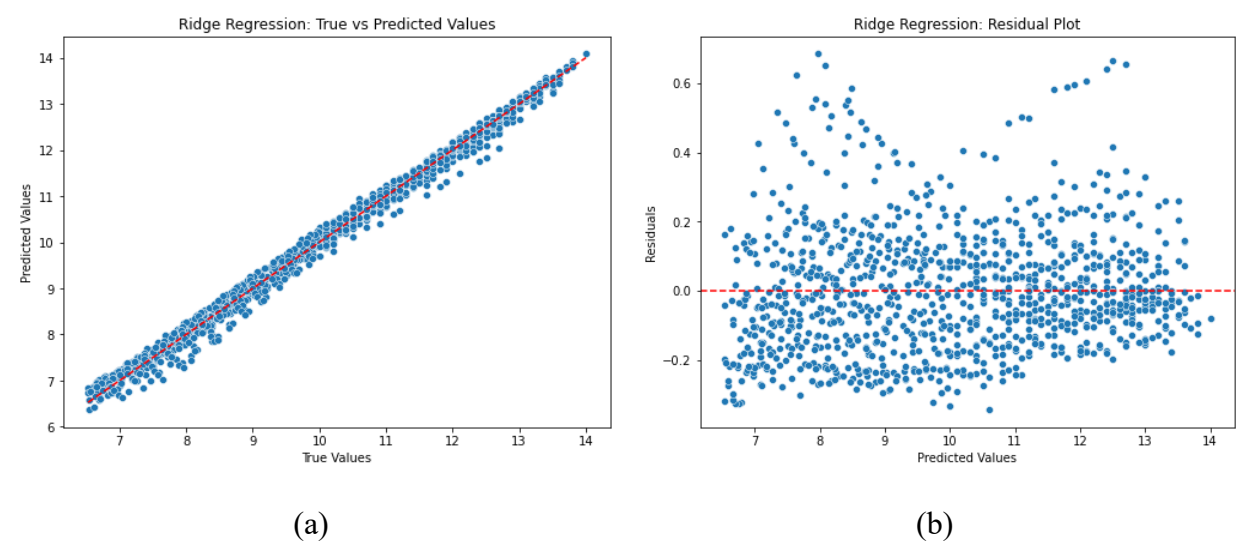


图 5-3 岭回归结果 (a)真实值-预测值散点图 (b)残差分布图

5.4 模型评价与结果分析

将附件一材料 1 中正弦波样本按照温度的不同分为四类，分别是温度为 25℃，50℃，70℃，90℃的样本。运用 5.3.4 中求得的修正斯坦麦茨方程预测不同温度下的磁芯损耗，得到结果表 5-7 所示。

表 5-7 原始方程和修正方程的 MSE

| 磁芯材料 | 励磁波形 | 温度（℃） | 原始方程 | 修正方程 |
|------|------|-------|--------|--------|
| 材料一 | 正弦波 | 25 | 0.2353 | 0.0188 |

| | | | | |
|-------|-----|----|--------|--------|
| 材料一 | 正弦波 | 50 | 0.0148 | 0.0229 |
| 材料一 | 正弦波 | 70 | 0.0716 | 0.0438 |
| 材料一 | 正弦波 | 90 | 0.1727 | 0.0644 |
| 总平均误差 | | | 0.1256 | 0.0381 |

修正方程在对材料一正弦励磁波等相同条件下的磁芯损耗预测中，总平均误差为 0.0381，显著优于原始方程的拟合误差 0.1256；从各个温度分别来看，修正方程在温度为 25°C、70°C 和 90°C 均表现出优于原始方程的误差，而仅在 50°C 条件下误差略有上升，仍然在可以接受的范围内。此实验可以证明，T-SE 模型在材料一下成功适应不同温度变化，并且提高了模型的预测精度和稳定性。

6. 问题三的分析与求解

6.1 问题分析

磁芯损耗过大将会直接影响到电力电气设备的整体性能和稳定性，因此，在设计和优化磁芯元件的时候需要充分考虑到磁芯损耗，尽可能的降低磁芯损耗以满足实际生活中的设备需求。一般来说，对磁芯损耗影响最大的三个因素分别是磁芯材料、励磁波形以及温度，因此，深入剖析上述因素对磁芯损耗影响方式和影响程度对精确高效的提升磁芯元件的性能具有非常深刻的意义。

本章将采用控制变量法、单因素方差分析及多因素方差分析，依次分析各个因素对磁芯损耗的影响程度，及两个因素协同对磁芯损耗的作用，并根据方差分析的结果，用岭回归的方式拟合出相应的多元回归方程，把方差分析的结果具体地体现出来，最后结合前两个结果及现实情况，制定出三大因素控制策略，实现磁芯损耗达到最低的目的。

6.2 单因素方差分析

表 6-1 温度影响因素分析

| 磁芯材料 | 励磁波形 | F | P |
|------|------|----------|------------|
| 材料一 | 正弦波 | 4.731869 | **0.002762 |
| | 三角波 | 2.815400 | *0.038017 |
| | 梯形波 | 3.779656 | *0.010327 |
| 材料二 | 正弦波 | 3.913321 | **0.008554 |
| | 三角波 | 3.064868 | *0.027275 |
| | 梯形波 | 2.530731 | 0.055929 |
| 材料三 | 正弦波 | 4.565986 | **0.003483 |
| | 三角波 | 1.948308 | 0.120090 |
| | 梯形波 | 2.713803 | *0.043690 |
| 材料四 | 正弦波 | 1.363526 | 0.252603 |
| | 三角波 | 0.604587 | 0.612055 |
| | 梯形波 | 5.374690 | **0.001209 |

注：*表示 $p < 0.05$ ，**表示 $p < 0.01$ ，***表示 $p < 0.001$ 。

如表 6-1 所示，控制磁芯材料和励磁波形等影响因素不变，调整不同温度得到实验结果，进行方差分析得到如表 6-1 所示为 F 检验统计量及其 P 值，大部分情况下温度因素影响显著。

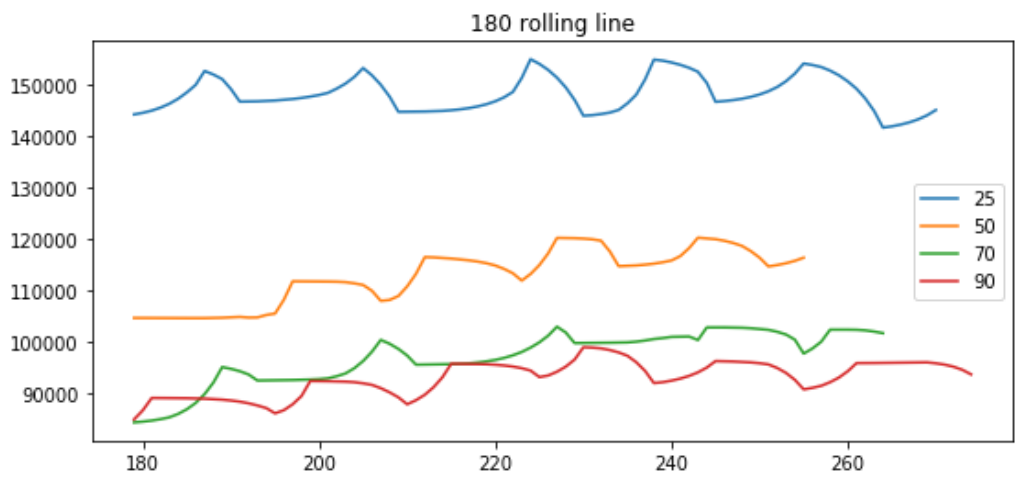


图 6-1 温度移动平均线对比图

特别的，对于材料一，画出 180 日移动平均线如图 6-1 所示，不同温度之间的移动平滑曲线有着明显的层次差别，可以看到，对于材料一而言，温度越高，平均磁芯损耗越低，说明温度达到最高时，材料磁芯损耗可能达到最小。

6.2.3 磁芯材料影响因素分析

表 6-2 磁芯材料影响因素分析

| 温度（℃） | 励磁波形 | F | P |
|-------|------|-----------|-------------|
| 25 | 正弦波 | 11.396115 | ***0.000000 |
| | 三角波 | 20.235605 | ***0.000000 |
| | 梯形波 | 5.090563 | **0.001708 |
| 50 | 正弦波 | 8.363839 | ***0.000017 |
| | 三角波 | 16.108312 | ***0.000000 |
| | 梯形波 | 9.087962 | ***0.000006 |
| 70 | 正弦波 | 6.612165 | **0.000201 |
| | 三角波 | 12.384711 | ***0.000000 |
| | 梯形波 | 10.874168 | ***0.000000 |
| 90 | 正弦波 | 9.491538 | ***0.000003 |

| | | |
|-----|-----------|-------------|
| 三角波 | 12.074708 | ***0.000000 |
| 梯形波 | 11.535067 | ***0.000000 |

注：*表示 $p<0.05$ ，**表示 $p<0.01$ ，***表示 $p<<0.01$ 。
如表 6-2 所示，相同条件下，不同材料对磁芯损耗均保持较高的影响。

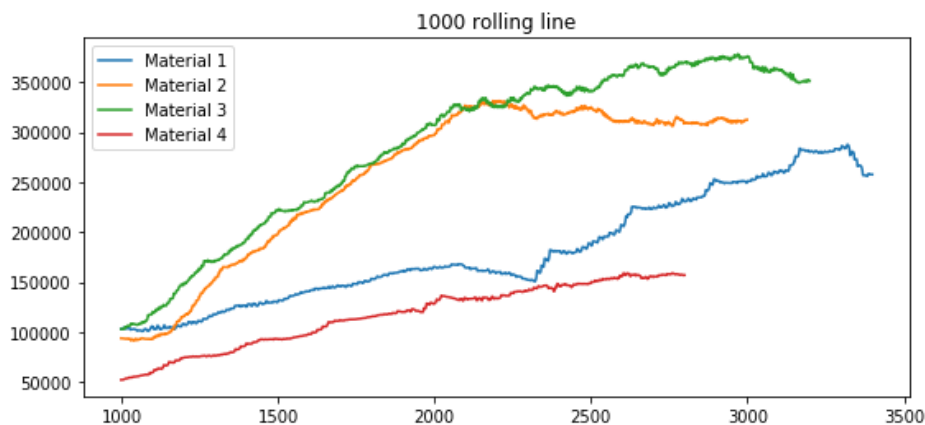


图 6-2 四种材料移动平均线对比图

分别计算四种材料 1000 日移动平均线，可以发现材料四磁芯损耗的移动平均最小，并且同时，材料四的平均磁芯损耗仅为 109469.25w/m^3 ；相比之下材料三磁芯损耗的移动平均最大，其平均磁芯损耗达 264453.07w/m^3 ，说明材料四和材料一最终可能的磁芯损耗较小。

6.2.4 励磁波形影响因素分析

表 6-3 励磁波形影响因素分析

| 磁芯材料 | 温度（℃） | F | p |
|------|-------|-----------|-------------|
| 材料一 | 25 | 9.983669 | ***0.000005 |
| | 50 | 15.042036 | ***0.000000 |
| | 70 | 12.141225 | ***0.000000 |
| | 90 | 12.738274 | ***0.000000 |
| 材料二 | 25 | 41.360662 | ***0.000000 |
| | 50 | 21.885256 | ***0.000000 |
| | 70 | 26.176724 | ***0.000000 |
| | 90 | 26.939119 | ***0.000000 |

| | | | |
|-----|----|-----------|-------------|
| 材料三 | 25 | 28.035359 | ***0.000000 |
| | 50 | 25.859815 | ***0.000000 |
| | 70 | 25.070962 | ***0.000000 |
| | 90 | 18.091642 | ***0.000000 |
| 材料四 | 25 | 17.690116 | ***0.000000 |
| | 50 | 16.419454 | ***0.000000 |
| | 70 | 17.257955 | ***0.000000 |
| | 90 | 19.428048 | ***0.000000 |

注：*表示 $p<0.05$ ，**表示 $p<0.01$ ，***表示 $p<<0.01$ 。

如表 6-3 所示，符合常理的，不同的励磁波形会带来不同的感应电场，进而带来不同的磁芯损耗。

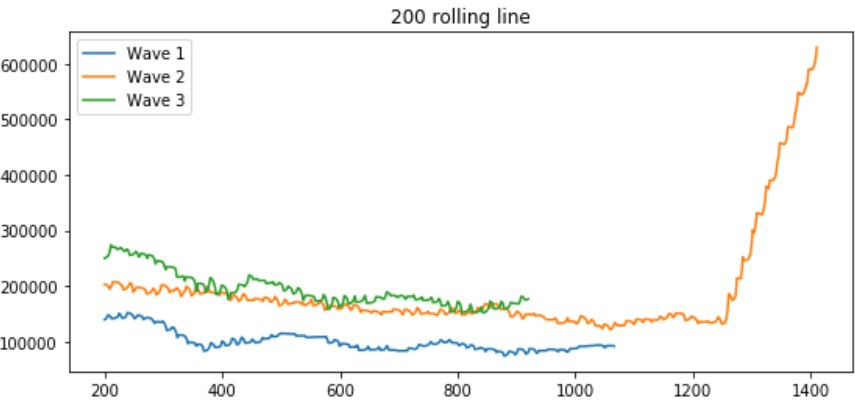


图 6-3 三种波形移动平均线对比图

分别计算三种励磁波形 200 日移动平均线,可以发现正弦波磁芯损耗的移动平均最小,并且同时,正弦波的平均磁芯损耗仅为 101712.23w/m^3 ；相比之下梯形波磁芯损耗的移动平均最大,其平均磁芯损耗达 229194.15w/m^3 ，说明正弦波下的磁芯损耗较小。

6.3 双因素协同影响分析

6.3.1 磁芯材料-温度协同影响分析

表 6-4 磁芯材料-温度协同影响分析

| 励磁波形 | F | P |
|------|----------|----------|
| 正弦波 | 1.182458 | 0.301389 |
| 三角波 | 0.852247 | 0.567744 |

| | | |
|-----|----------|----------|
| 梯形波 | 0.112810 | 0.999399 |
|-----|----------|----------|

注：*表示 $p < 0.05$ ，**表示 $p < 0.01$ ，***表示 $p < 0.001$ 。

由表 6-4 可知，控制波形相同的情况下，磁芯材料和温度共同影响因子 F 检验不显著，说明两者之间没有明确的交叉影响。

6.3.2 磁芯材料-励磁波形协同影响分析

表 6-5 磁芯材料-励磁波形协同影响分析

| 温度 (°C) | F | P |
|---------|----------|-------------|
| 25 | 4.690690 | ***0.000092 |
| 50 | 3.876762 | ***0.000736 |
| 70 | 4.582305 | ***0.000122 |
| 90 | 3.460572 | **0.002071 |

注：*表示 $p < 0.05$ ，**表示 $p < 0.01$ ，***表示 $p < 0.001$ 。

由表 6-5 可知，F 检验统计量均显著，原因为不同的磁芯材料有着不一样的物理化学性质，对于励磁波形有着不一样的反应，因此可能会导致磁芯损耗的不同。

6.3.3 温度-励磁波形协同影响分析

表 6-6 温度-励磁波形协同影响分析

| 磁芯材料 | F | P |
|------|----------|----------|
| 材料一 | 0.252324 | 0.958526 |
| 材料二 | 0.917962 | 0.480686 |
| 材料三 | 0.508337 | 0.802486 |
| 材料四 | 2.147929 | 0.045196 |

注：*表示 $p < 0.05$ ，**表示 $p < 0.01$ ，***表示 $p < 0.001$ 。

由表 6-6 可知，F 检验统计量均不显著，说明温度和励磁波形之间并没有太多协同影响。

结论：基于前面对问题的分析，发现如果单独考虑每个因素对磁芯损耗的影响时，材料 4 的效果是最优的，但如果把三个因素一起协同分析或者两个因素两两协同分析时，材料 1 的效果是最优的，由此猜想，可能是温度或励磁波形对于材料有影响，因此使得最后的结论出现两者不统一的情况，但从现实出发，还是得出在温度为 90℃、励磁波形为正弦波、选择材料 1 时，磁芯损耗达到最小。

7. 问题四的分析与求解

7.1 问题分析

本章目标为构建一个能够跨越不同材料类型与工况条件的磁芯损耗预测模型。基于问题二所建立的温度修正斯坦迈茨方程(T-SE)，以及问题三磁芯损耗相关影响因素的分析，磁芯损耗收到温度、磁体材料、励磁波形、励磁波频率、励磁波波峰等因素影响。问题二所建立的 T-SE 模型考虑到了励磁波频率、波峰和温度的影响，其中自变量可以看做为连续性随机变量，通过对方程进行变换可以转化为变量之间的线性关系，进而对方程的参数进行拟合。而材料类型、励磁波波形为离散特征，只能作为离散型随机变量纳入方程，因此导致所构建的模型存在极强的非线性关系，并且难以通过变换化为线性关系。

7.2 基于数据驱动的磁芯损耗预测模型

由问题二对 T-SE 模型泛用性的研究可知，T-SE 模型对不同温度、不同材料、不同波形均有一定的泛用性；由 3.3 MLP 模型介绍可知，深度学习神经网络对变量之间的非线性关系具有极强的拟合能力。

如上分析，考虑将材料类型和励磁波波形作为额外影响因素对 T-SE 模型进行修正，以此建立了多阶段学习磁芯损耗预测模型 (re-TSE)。模型结构如图 7-1 所示：

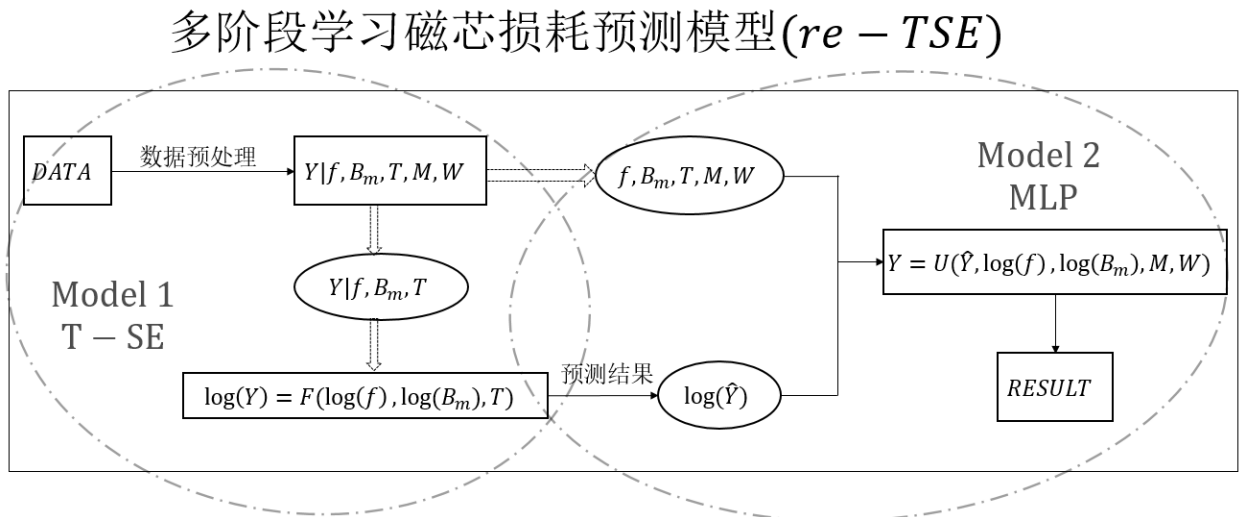


图 7-1 re-TSE 模型结构图

模型分为两个部分，model 1 为 T-SE 低精度模型，对于包含各种磁芯材质、各种工况的磁芯损耗数据，经数据预处理以及特征工程，首先使用频率 f 、峰值 B_m 、温度 T 和磁芯损耗 P 建立 T-SE 模型，模型将输出一个对磁芯损耗的初步预测 \hat{P} ，由分析可知， \hat{P} 是对 P 的低精度预测；model 2 为 MLP 神经网络模型，模型接收来自 model 1 的低精度预测结果 \hat{P} ，来自原始数据集的频率 f 、峰值 B_m 、温度 T 以及材料类型 M 、励磁波形 W ，以此来对低精度磁芯损耗预测 \hat{P} 进行修正，最终得到对磁芯损耗更高精度的预测。

7.3 re-TSE 模型分析及结果展示

model 1 初步预测结果如图 7-2(a)所示，模型所得误差为 0.1650， R^2 为 0.9543，model 2 再次学习预测结果如图 7-2(b)所示，模型所的误差为 0.0390， R^2 达到 0.99891。

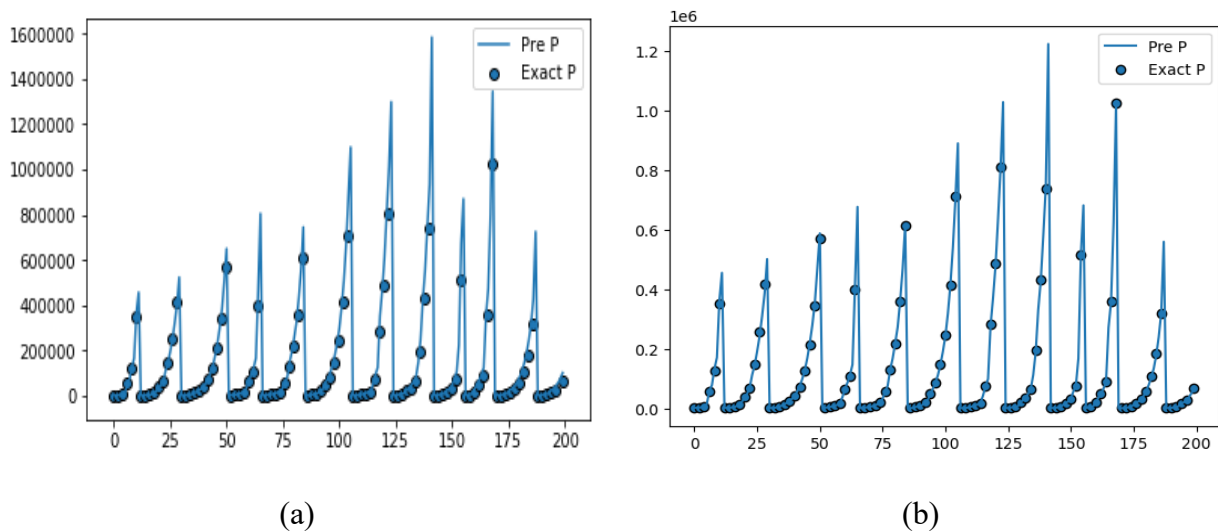


图 7-2 磁芯损耗预测结果前 200 个展示 (a)model 1 预测结果 (b)model 2 预测结果

由误差分析以及对原始数据的分析可知, re-TSE 模型成功对传统 SE 模型进行了修正, 成功实现将传统仅考虑励磁波频率和励磁波峰值的磁芯损耗预测模型, 拓展到了跨越不同温度、不同材料和不同波形领域, 并且实现了更高精度的拟合和预测。

表 7-1 磁芯损耗预测结果

| 序号 | 磁芯损耗预测值 |
|-----|-----------|
| 16 | 842.3 |
| 76 | 1600278.7 |
| 98 | 10609.2 |
| 126 | 1630.6 |
| 168 | 219483.9 |
| 230 | 69851.4 |
| 271 | 2039333.1 |
| 338 | 10673.5 |
| 348 | 922373.0 |
| 379 | 1266.2 |

本章所提出的 re-TSE 模型的成功验证了基于数据驱动的物理模型修正方法的可行性和有效性, 能够极大地改善传统物理模型存在的局限性和不稳定性问题, 实现理想物理模型从理论到实践的跨越, 并且 re-TSE 模型一经部署, 便可以长久适用于各种不同的工况,

虽然相比传统模型复杂度提高，但在使用时所耗费的资源和时间并不会增加许多，具有极强的实践意义。

8. 问题五的分析和求解

8.1 问题分析

问题五要求探索何种工况下，在一定磁芯损耗的约束，能够保持最大的生产效率，也就是传输磁能大小。此问题为多目标优化问题，在工况数据与磁芯损耗模型的限制下，期望实现目标一：最小磁芯损耗和目标二：最大传输磁能。优化问题模型如下图所示：

$$\min P \text{ and } \max f * B_m \quad 8.1.1$$

$$\text{s. t. } P = \text{re} - \text{TSE}(f, B, T, M, W) \quad 8.1.2$$

8.2 优化问题求解

本文采用对优化目标进行加权的解决方法，动态调整两个目标之间的权重关系，寻找最佳的平衡点；为消去数据量级差距的影响，采用对数化处理，经过测试以及结合实际生产实践经验，最终构建优化目标函数如下：

$$\text{target} = \alpha \ln(P) - (1 - \alpha)(\ln f + \ln B_m) \quad 8.2.1$$

其中 $\alpha = 0.5$ ，参数搜索范围为： $5 \leq \ln f \leq 13.5$ ， $-10 \leq \ln B \leq -0.5$ ， $20 \leq T \leq 100$ ，材料包括四种，励磁波形包括三种，对于离散型变量材料和励磁波形，采用遍历法进行寻优，对于其他连续型变量，采用连续最小二乘法（SLSQP）进行求解。最终得到满足目标优化条件的解如表 8-1：

表 8-1 最优条件

| 励磁频率(HZ) | 励磁波峰值(T) | 温度(°C) | 磁芯材料 | 励磁波形 |
|-----------|----------|--------|------|------|
| 729416.37 | 0.6065 | 70 | 材料一 | 正弦波 |

其中，磁芯损耗为 18846.0566(w/m³)，传输磁能达 442413.3920(Hz · T)。

9. 模型评价

9.1 模型优缺点

优点:

1. 模型综合考虑了各个影响因素,实现了对四种磁芯材料、不同工况的统一建模,成功将传统斯坦迈茨方程拓展到了更广阔的条件,并且实现更高精度的预测。

2. 模型验证了多阶段学习的有效性,结合传统物理模型和神经网络的优点,建立了更有效率的融合模型。

缺点:

1. 温度修正斯坦迈茨方程从材料一的历史数据出发而来,没有考虑不同磁芯材料对温度有着不同的响应模式。

2. 受限于硬件设备与技术手段,未能实现更复杂神经网络地应用,未能实现对 loss 权重更精细化地更新。

9.2 总结展望

1. 采集更多磁芯数据,从数据出发,例如使用材料特性特征将磁芯材料量化,覆盖更多的材料种类,期望实现数据到数据的完整映射;

2. 可以增加更多的影响因素,例如考虑材料的几何构型因素、考虑材料的物理化学性质因素,考虑更多的励磁波形因素等;

3. 本文构建的多阶段学习磁芯损耗预测模型仅考虑了温度修正斯坦麦茨方程,还可以考虑例如励磁波形修正的斯坦麦茨方程等,将更多低精度物理预测模型的输出结果作为神经网络模型的输入,实现更高精度的预测。