

虚功原理与虚位移原理

虚功原理的表述

“任何一个处于平衡状态的变形体，当发生任意一个虚位移时，变形体所受外力在虚位移时所做的总虚功，恒等于变形体所接受的总虚变形功；也即恒有如下**虚功方程**成立。” (王, 2011, p. 1)

$$\delta W_e = \delta W_i$$

也即：

$$W_{\text{外}} = \int_V dW_{\text{变}}$$

值得注意的是，这里的**虚功方程**应该是指(王 和 王, 1984)中提到的**虚功方程（二）**。

虚功原理的证明

“原理的证明” (王, 2011, p. 1)

虚位移原理的表述

“受给定力系作用的变形体，其平衡的充分必要条件（按微元体分割时如此，非无限分割时见文献 [11]）是，当变形体发生任意的虚位移时，变形体所受外力在虚位移时所做的总虚功 δW_e ，恒等于变形体所接受的总虚变形功 δW_i 。也即恒有如下**虚功方程**成立” (王, 2011, p. 2)

$$\delta W_e = \delta W_i$$

同样，这里的虚功方程也是虚功方程（二）。

结论

由此可以得出如下结论。

1. 虚功原理是变形体平衡、虚位移协调条件下的一个必要性命题，“平衡”和“协调”是前提，虚功方程成立是结论。
2. 虚位移原理是一充分必要性命题。其必要性部分就是虚功原理。
(王, 2011, p. 3)

还应指出：

“要证明充分性必须要有虚位移的任意性和独立性。对分割成微元体的情况，虚功方程（此处指**虚功方程（二）**）恒成立可证明变形体一定平衡；对有限分割的情况，虚功方程（此处指**虚功方程（一）**）恒成立只能达到某种积分意义下的“弱平衡”（也就是力系平衡）。”(王, 2011, p. 3)

“必须要有虚位移的任意性和独立性”：这句话是说，要把对任意给定的虚位移和虚功方程成立放在一起说。例如：给定任一的虚位移，虚功方程成立，推出变形体平衡。

对于虚功方程（一）和（二）的探讨，详见：[“论变形体虚功原理的充分性”](#)

本篇文献(1984年)所讲虚功原理为后面文献(2011年)中的虚位移原理

“把变形体切割成有限个元体时，外力和切割面内力组成平衡力系的必要和充分条件是对任意微小虚位移，恒能满足虚功方程（I），如下：”(王和王, 1984, p. 8)

$$W_{\text{外}} = \sum_{i=1}^N W_{i\text{变}}$$

说明当变形体切割成**有限个单元体（N个）**时，虚功方程(一)只能证明力系的平衡。

“当把变形体切割成无限个微元体时，变形体处于平衡状态的必要和充分条件是对任意微小虚位移，恒能满足虚功方程（II）”

$$W_{\text{外}} = \int_v dW_{\text{变}}$$

说明当变形体切割成**无限个微元体**时，虚功方程(二)能证明变形体的平衡（自然也能得出力系的平衡）。

因此此篇文章核心结论就是：

“虚功方程(1)又是变形体上力系平衡的必要及充分条件，虚功方程(2)只是变形体平衡的必要及充分条件。”****(王和王, 1984, p. 9)

Referred in [虚功原理的表述](#)