DEVOIR QFT: Diagramme à une boucle

RAZAFIMAHERY Faneva Liantsoa
Master 1 -Physique des Hautes Energies
Université d'Antananarivo

6 Novembre 2025

Question: Cherchez un diagramme à une boucle pour la fonction de corrélation suivante

$$\frac{\langle 0|\, \mathcal{T}\{e^{-i\frac{\lambda}{4!}\int dt_z \int d^3z\phi^4(t_z,z)}\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)\}\,|0\rangle}{\langle 0|\, \mathcal{T}\{e^{-i\frac{\lambda}{4!}\int dtz \int dz\phi^4(tz,z)}\}\,|0\rangle} \tag{1}$$

Simplifions l'expression en posant:

$$\int dt_z \int d^3z\phi^4(t_z,z) = \int d^4z\phi^4(z) \tag{2}$$

Posons aussi:

$$-i\frac{\lambda}{4!}\int d^4z\phi^4(z) = A \tag{3}$$

Ainsi on peut developper l'exponentielle dans le numérateur au voisinage de $A = 0$:

$$\begin{aligned} e^A &= 1 + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + ... \\ &= 1 - i\frac{\lambda}{4!}\int d^4z\phi^4(z) + \frac{1}{2!}(-i\frac{\lambda}{4!}\int d^4z_1\phi^4(z_1)) \times (-i\frac{\lambda}{4!}\int d^4z_2\phi^4(z_2)) + ... \end{aligned} \tag{4}$$

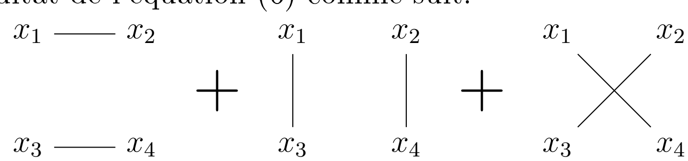
Le numérateur de l'équation (1) devient:

$$\langle 0|\,\mathcal{T}\{(1-i\frac{\lambda}{4!}\int d^4z\phi^4(z)+\frac{1}{2!}(-i\frac{\lambda}{4!}\int d^4z_1\phi^4(z_1))\times(-i\frac{\lambda}{4!}\int d^4z_2\phi^4(z_2))+...)$$
$$\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)\}\,|0\rangle$$
$$=\langle 0|\,\mathcal{T}\{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)\}\,|0\rangle - i\frac{\lambda}{4!}\int d^4z\,\langle 0|\,\mathcal{T}\{\phi^4(z)\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)\}\,|0\rangle$$
$$+\frac{1}{2!}(i\frac{\lambda}{4!})^2\int d^4z_1\int d^4z_2\,\langle 0|\,\mathcal{T}\{\phi^4(z_1)\phi^4(z_2)\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)\}\,|0\rangle + ... \tag{5}$$

Le premier terme de l'équation (5) est peut être simplifié en utilisant le théorème de Wick:

$$\begin{aligned}\langle 0|\,\mathcal{T}\{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)\}\,|0\rangle =&\Delta_F(x_1-x_2)\Delta_F(x_3-x_4)+\Delta_F(x_1-x_3)\Delta_F(x_2-x_4)\\ &+\Delta_F(x_1-x_4)\Delta_F(x_2-x_3)\end{aligned} \tag{6}$$

En utilisant les règles de Feynman, on peut représenter graphiquement le résultat de l'équation (6) comme suit:



Cherchons maintenant un diagramme à une boucle issu du second terme de l'équation (5) Soit son expression:

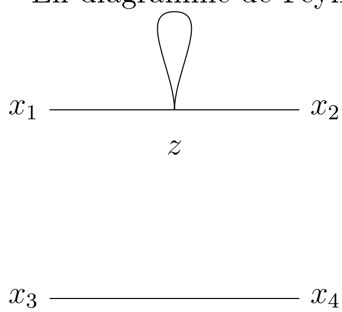
$$-i\frac{\lambda}{4!}\int d^4z\,\langle 0|\,\mathcal{T}\{\phi^4(z)\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)\}\,|0\rangle \tag{7}$$

Une contraction possible est de contracter deux champs en z entre eux pour former une boucle, et de contracter les autres champs en z avec les champs externes $\phi(x_1)$et $\phi(x_2)$, et finalement de contracter $\phi(x_3)$ et $\phi(x_4)$.

Ce qui en expression donne:

$$-i\frac{\lambda}{4!}\int d^4z\Delta_F(z-z)\Delta_F(z-x_1)\Delta_F(z-x_2)\Delta_F(x_3-x_4) \tag{8}$$

En diagramme de Feynman, cela se représente comme suit:



Ce qui est un diagramme à une boucle contribuant à la fonction de corrélation donnée.