CALCOLO DI UNA SUPERFICIE A IN $\mathbb{R}^3$

$$A = \iint_D dx\,dy \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

INTEGRALE CURVILINEO DI PRIMA SPECIE

$$\int_\gamma f\,ds = \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt$$

INTEGRALE CURVILINEO DI SECONDA SPECIE

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \Big(A(x(t),y(t))\,x'(t)+B(x(t),y(t))\,y'(t)\Big)\,dt$$

FORMA DIFFERENZIALE ESATTA

ω è ESATTA in un insieme Ω se
- Ω è SEMPLICEMENTE CONNESSO
- ω è CHIUSA, ovvero $\dfrac{\partial B}{\partial x} = \dfrac{\partial A}{\partial y}$

In particolare, ω ESATTA $\Rightarrow \exists$ funzione $U(x,y)$: $\dfrac{\partial U}{\partial x} = A(x,y)$, $\dfrac{\partial U}{\partial y} = B(x,y)$

Esempio di calcolo di $U(x,y)$, con $\omega = \overbrace{y^2}^{A}dx + \overbrace{2xy}^{B}dy$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = y^2 \Rightarrow U(x,y) = \int y^2 dx = \boxed{y^2\cdot x + c(y)} \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = 2xy \end{cases}$$

DERIVO

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 2xy = 2y\cdot x + c'(y) \Rightarrow c'(y) = 0 \Rightarrow c = \text{cost}$$

$$\Rightarrow U(x,y) = xy^2 + \text{cost}$$

LEMMA DI GAUSS-GREEN

$$\int_{\partial D^+} A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy = \iint_D dx\,dy\left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right)$$

con D dominio SEMPLICE rispetto a entrambi gli assi

TEOREMA DI CAUCHY-RIEMANN

$\mathbb{C} \ni f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ è una funzione OLOMORFA in un insieme Ω $\Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

INTEGRALE COMPLESSO

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \big(u(x,y)+iv(x,y)\big)(dx+i\,dy) = \int_\gamma u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy + i\int_\gamma u(x,y)\,dy + v(x,y)\,dx$$

RICORDA:

$$\int_{\gamma \to \text{CURVA CHIUSA}} (z-z_0)^n = \begin{cases} 0 & \text{se } \gamma \text{ non gira intorno a } z_0 \\ 0 & \text{se } \gamma \text{ gira intorno a } z_0 \text{ e } n \neq -1 \\ 2\pi i & \text{se } \gamma \text{ gira intorno a } z_0 \text{ e } n = -1 \end{cases}$$

FORMULA INTEGRALE DI CAUCHY

Se f è OLOMORFA e γ è una curva CHIUSA che gira intorno a un punto $z_0 \Rightarrow$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{z-z_0} = f(z_0)$$

GENERALIZZAZIONE: $$\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}} = f^{(n)}(z_0)$$

SERIE DI POTENZE

$$\sum_{k=0}^{\infty} \boxed{a_k (z-z_0)^k} \to \text{SUCCESSIONE} \qquad a_k \in \mathbb{C}, \qquad z_0 = \text{centro della serie}$$

RAGGIO DI CONVERGENZA $= R = \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)^{-1}$

SCRITTURA DI UNA FUNZIONE OLOMORFA COME SERIE DI POTENZE:

$$\underset{\text{IN UN INTORNO DI } z_0}{f(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} (z-z_0)^k \cdot \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$$

SERIE DI LAURENT

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k = \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k}_{\text{PARTE OLOMORFA}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} a_{-k} (z-z_0)^{-k}}_{\text{PARTE PRINCIPALE}}$$

SE f <u>NON</u> È OLOMORFA IN $z_0 \Rightarrow a_k \neq 0$ PER ALMENO UN K NEGATIVO (PARTE PRINCIPALE $\neq 0$)

→ Se $a_{-m} \neq 0$, $a_k = 0 \ \forall k < -m$ (ovvero $f(z) = \sum_{k=-m}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k$) $\Rightarrow$

z_0 è un POLO DI ORDINE m.

→ Se $a_k \neq 0$ per infiniti k negativi $\Rightarrow f$ ha una SINGOLARITÀ ESSENZIALE in z_0.

RESIDUO

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k$$

$$a_{-1} = \text{RESIDUO} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma \to \text{CURVA CHIUSA}} f(z)\,dz \qquad a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma \to \text{CURVA CHIUSA}} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{k+1}}$$

FORMULA DEL RESIDUO: $a_{-1} = \operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left(f(z)\cdot(z-z_0)^m\right)\Big|_{z=z_0}$

TEOREMA DEI RESIDUI

$$\int_{\gamma^+ \to \text{CURVA CHIUSA}} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{z_k\in D} \operatorname{Res}(f, z_k) \qquad \partial D = \gamma$$

PUNTO ALL'INFINITO

$$\operatorname{Res}(f(z),\infty) = \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$$

$$\sum_{k=1}^{m}\left(\operatorname{Res}(f, z_k)\right) + \operatorname{Res}(f,\infty) = 0$$

Trucchetto:

Se $f(z)$ è una funzione razionale di tipo $\frac{P(z)}{Q(z)}$ e z_0 è un punto di singolarità di ordine 1 $\Longrightarrow$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_0\right) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

CALCOLO DI INTEGRALI REALI CON I RESIDUI

- $P(x)$, $Q(x)$ polinomi; $Q(x)\neq 0 \ \forall x\in\mathbb{R}$; grado Q - grado $P > 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = 2\pi i \sum_{z_k}\operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_k\right)$$

con z_k singolarità contenuta nel semipiano complesso superiore

- $$\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(ax)\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \operatorname{Re}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax}\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \operatorname{Re}\left[2\pi i\sum_{z_k}\operatorname{Res}\left(e^{iaz}\frac{P(z)}{Q(z)}, z_k\right)\right]$$

- $$\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(ax)\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \operatorname{Im}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax}\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \operatorname{Im}\left[2\pi i\sum_{z_k}\operatorname{Res}\left(e^{iaz}\frac{P(z)}{Q(z)}, z_k\right)\right]$$

- $\int_0^{2\pi} \frac{P(\cos(x), \sin(x))}{Q(\cos(x), \sin(x))}\, dx = \left\{ z = e^{ix} \Rightarrow \cos x = \frac{z + 1/z}{2} \quad \sin x = \frac{z - 1/z}{2i} \quad dx = \frac{dz}{iz} \right\}$

$= \int_{|z|=1} f(z) \frac{dz}{iz} = 2\pi i \sum_{z_k} \mathrm{Res}\left(\frac{f(z)}{iz}, z_k\right)$

con z_k singolarità contenuta all'interno della circonferenza di centro 0 e raggio 1

TRASFORMATA DI LAPLACE

$\mathcal{L}[f(t)](p) := F(p) := \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt$

$\rightarrow \mathcal{L}[e^{at}](p) = \frac{1}{p-a}$

$\rightarrow \mathcal{L}[t^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$

$\rightarrow \mathcal{L}[\sin(at)](p) = \frac{a}{p^2+a^2}$

$\rightarrow \mathcal{L}[\cos(at)](p) = \frac{p}{p^2+a^2}$

Proprietà:

- $\mathcal{L}[e^{at} f(t)](p) = F(p-a)$
- $\mathcal{L}[u(t-a) f(t-a)](p) = e^{-pa} F(p)$
- $\mathcal{L}[f(at)](p) = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$
- $\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{dp^n}(F(p))$
- $\mathcal{L}[f^{(n)}(t)](p) = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
- $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(x)\,dx\right](p) = \frac{F(p)}{p}$

Antitrasformata:

$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)] = \sum_{p_k} \mathrm{Res}(e^{pt} \cdot F(p), p_k)$

- $f * g :=$ PRODOTTO DI CONVOLUZIONE $= \int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau$

  $\mathcal{L}[f*g](p) = \mathcal{L}[f(t)](p) \cdot \mathcal{L}[g(t)](p)$

- $\delta(t) :=$ DELTA DI DIRAC $= \begin{cases} 0 & \text{se } t \neq 0 \\ +\infty & \text{se } t = 0 \end{cases}$

  f FUNZIONE, $f(x) \cdot \delta(x-x_0) = f(x_0)$

  $\mathcal{L}[\delta(t-t_0)](p) = e^{-pt_0}$

- $f(t)$ FUNZIONE PERIODICA DI PERIODO T

  $f_0(t)$ FUNZIONE DI BASE CHE SI RIPETE PERIODICAMENTE

  $\mathcal{L}[f(t)](p) = \frac{F_0(p)}{1-e^{-pT}}$