01/03/2021

Esempio introduttivo – controllo della posizione di un carrello:

Si consideri un carrello su rotaia in piano e siano $s(t)$, $v(t)$ rispettivamente posizione e velocità al tempo t. Il carrello è posto in quiete e nell'origine a $t = 0$ ($\rightarrow s(0) = s_0 = 0$; $v(0) = v_0 = 0$).

L'equazione del moto è

$$\underbrace{m\ddot{s}}_{\text{MASSA} \times \text{ACCELERAZ.}} + \underbrace{f\dot{s}}_{\text{ATTRITO}} = \underbrace{u}_{\text{FORZA APPLICATA CHE RAPPRESENTA L'INGRESSO o GRANDEZZA DI CONTROLLO}}$$

L'obiettivo è far arrivare il carrello entro un certo tempo ragionevolmente breve in una posizione desiderata $S_f = 100\,m$ con precisione elevata, senza mai oltrepassare (né prima né dopo il tempo finale) tale posizione e con un moto sufficientemente regolare.

1° SOLUZIONE – CONTROLLO A CATENA APERTA (OPEN LOOP, FEEDFORWARD):

Supponendo che l'attrito sia trascurabile, una legge di controllo a catena aperta può essere:

$$u(t) = \begin{cases} F & t \in (0, T) \\ -F & t \in (T, 2T) \\ 0 & t > 2T \end{cases}$$

Idealmente, l'applicazione di una forza $u^{(t)}$ che segue questa legge, causa un moto rett. uniformemente accelerato fino all'istante T e il moto rett. uniformemente decelerato secolare tra l'istante T e l'istante $2T$; dopodiché il carrello dovrebbe rimanere fermo nella posizione desiderata (S_f)

Ma nella pratica, in questo modo, le cose funzionano sempre perfettamente? Non proprio: basta un piccolo errore nella misura della massa o un minimo attrito o ancora una minima inclinazione del piano affinché il risultato reale si riveli essere diverso (e talvolta distante) da quello desiderato

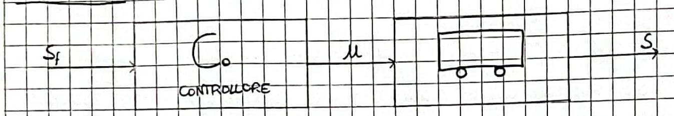
Basti pensare che, se dopo $S_f = 100\,m$ c'è un precipizio, il carrello può andare per sotto...

Può risultare dunque conveniente ricorrere a un altro approccio

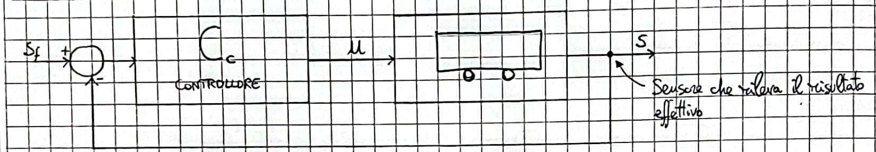
2° SOLUZIONE – CONTROLLO A CATENA CHIUSA (CLOSED LOOP, FEEDBACK):

Il controllore, in una legge di controllo a catena chiusa, viene programmato in base alla differenza tra il risultato desiderato e quello realmente ottenuto, cercando così di reagire in modo opportuno agli effetti dovuti a errori di misurazione, a fattori che sono stati trascurati, e così via.

OPEN LOOP:



CLOSED LOOP:



Scegliamo ora una legge di controllo a catena chiusa che tiene conto dell'osservazione continua di posizione e velocità del carrello:

$$u(t) = -K(s(t) - S_f) - b\dot{s} - \text{INTEGRALE ERRORE}$$

COSTANTE PROPORZIONALE (SPESSO INDICATA CON K_p)

COSTANTE DERIVATIVA (SPESSO INDICATA CON K_d)

IL TERMINE $b\dot{s}$ RAPPRESENTA L'ATTRITO VISCOSO

DIPENDE DALLA COSTANTE INTEGRALE K_i

→ Il termine $-K(s(t) - S_f)$ ha la stessa forma ~~di una~~ della legge di una molla che richiama il carrello verso la posizione desiderata. → E LO FA MEDIANTE DELLE OSCILLAZIONI

Per provare ciò, effettuiamo un cambio di variabile:

$\sigma := S - S_f \implies \ddot{\sigma} = \ddot{S}$

SE TRASCURIAMO L'ATTRITO f → $m\ddot{s} = u = -K(s - S_f)$

$\implies m\ddot{\sigma} = -K\sigma$ → è proprio l'equazione di una molla

SE INTRODUCIAMO L'ATTRITO VISCOSO → $m\ddot{\sigma} = -K\sigma - b\dot{\sigma}$

→ Il termine $b\dot{s}$, detto DERIVATIVO, agisce sul moto del carrello come un attrito che attenua le oscillazioni attorno alla posizione desiderata.

→ Il termine integrale è utile quando il carrello si trova su un piano inclinato: in effetti, una molla posta su un piano inclinato, nella posizione di equilibrio, non assume la sua lunghezza a riposo; allo stesso modo, su un piano in discesa, affinché il carrello rimanga a regime in equilibrio, se teniamo conto solo dei termini proporzionale e derivativo, deve trovarsi in una posizione che si trova oltre quella desiderata. Per ovviare a ciò, si introduce appunto l'integrale di errore, che è un termine proporzionale alla costante K_i.

Un controllore che viene regolato da una legge di controllo a catena chiusa viene definito CONTROLLORE PID (Proporzionale - Integrale - Derivativo) e, nella stragrande maggioranza dei casi, garantisce il soddisfacimento del risultato desiderato, anche in presenza di disturbi, errori di misurazione, forze impreviste o trascurate, velocità iniziale non nulla, e così via.

Tuttavia, vale la pena sottolineare che le costanti vanno scelte in modo opportuno in modo tale da ottenere un buon comportamento da parte del sistema (che non è dato solo dal risultato finale!).

ESEMPI:

- Se scegliamo K molto grande e b molto piccola, avremo delle forti oscillazioni che spesso sono indesiderate (se poco dopo $S_f = 100$ m ci fosse un precipizio, il carrello andrebbe a finire comunque per sotto...).
- Se scegliamo K molto piccolo e b arbitrariamente grande, avremo delle oscillazioni debolissime o nulle, ma il carrello risulterà molto rallentato e impiegherà un tempo molto maggiore del dovuto a raggiungere la posizione desiderata.

È dunque compito dell'ingegnere trovare il giusto tradeoff per il valore di queste costanti.

03/03/2021

SISTEMA DINAMICO:

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\quad x(t)} \longrightarrow y(t)$$

$u(t)$: Variabili di ingresso che il controllista può gestire per ottenere il comportamento desiderato del sistema

$x(t)$: Variabili di stato (in generale espresse tramite un vettore a n dimensioni) → danno informazioni riguardanti in quale configurazione si trova il sistema dinamico

$y(t)$ → Variabili d'uscita → tipicamente, sono quelle che misuriamo e ci interessa controllare

Rappresentazione I-S-U (Ingresso - Stato - Uscita):

La rappresentazione I-S-U generale di un sistema dinamico è del tipo:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u,t) \\ y = h(x,u,t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

← $x \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$

← Per il momento stiamo assumendo che il disturbo non c'è

← Nel nostro caso assumeremo y, u scalari (→ di dimens. 1)

Nel caso in cui le equazioni siano LINEARI e STAZIONARIE (→ le funzioni f, h non dipendono dalla variabile temporale t), la rappresentazione I-S-U assume la seguente forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

← A, B, C, D sono matrici costanti nel tempo

⇒ A = MATRICE DINAMICA → $A \in \mathbb{R}^{\bar{n} \times \bar{n}}$

B = MATRICE DI INGRESSO → $B \in \mathbb{R}^{\bar{n} \times 1}$

C = MATRICE DI USCITA → $C \in \mathbb{R}^{1 \times \bar{n}}$

D = LEGAME DIRETTO INGRESSO-USCITA → $D \in \mathbb{R}$

Rappresentazione I-U (Ingresso - Uscita):

La rappresentazione I-U generale di un sistema dinamico è del tipo:

$$\begin{cases} g(y(t), \dot{y}, y^{(2)}(t), \dots, y^{(n)}(t), u(t), \dot{u}, u^{(2)}(t), \dots, u^{(m)}(t), t) = 0 \\ y^{(i)}(0) = y_0^{(i)} \qquad \forall i = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

Nel caso lineare e stazionario la rappresentazione I-U assume la seguente forma:

$$\begin{cases} a_0 y(t) + a_1 \dot{y} + a_2 y^{(2)}(t) + \dots + y^{(n)}(t) = b_0 u(t) + b_1 \dot{u} + b_2 u^{(2)}(t) + \dots + b_m u^{(m)}(t) \\ y^{(i)}(0) = y_0^{(i)} \qquad \forall i = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

IN GENERALE, BASTA CHE IL COEFFICIENTE DI $y^{(n)}$ SIA NON NULLO : PUÒ ESSERE PORTATO A 1 DIVIDENDO TUTTI I MEMBRI DELL'EQUAZIONE PER IL COEFF. STESSO

Affinché la variabile d'uscita $y(t)$ dipenda effettivamente dalla variabile d'ingresso $u(t)$ (e si abbia una giusta consequenzialità nel sistema), è necessario imporre la seguente condizione di causalità: $n \geq m$

Se ciò non valesse (e.g. se avessimo $n=0$, $m=1$), avremmo che $y=\dot{u} \Rightarrow$

$$\Rightarrow y(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t}$$

da cui si evince come l'uscita al tempo t dipenda da valori futuri dell'ingresso.

Più avanti considereremo i polinomi

$$p_a(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n$$

$$p_b(s) = b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \ldots + b_m s^m$$

e osserveremo che sono primi tra loro ($\rightarrow$ non hanno radici in comune).

Vediamo ora come la legge del moto del nostro carrello può essere espressa nelle rappresentazioni appena introdotte.

PARTIAMO DA $\quad m\ddot{s} + f\dot{s} = u \xRightarrow{y=s} m\ddot{y} + f\dot{y} = u \xRightarrow{m \neq 0}$

$$\Rightarrow \ddot{y} + \frac{f}{m}\dot{y} = \frac{1}{m} u \quad \longleftarrow \text{RAPPRESENTAZIONE I-U}$$

Per convertire la legge del moto del carrello, occorre innanzitutto individuare le variabili che descrivono lo stato del carrello (vedremo meglio successivamente come si fa): esse, nel nostro caso, sono la posizione s e la velocità $v=\dot{s}$ del carrello, per cui:

$$x(t) = \begin{bmatrix} s(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$$

- $x_1 = s \Rightarrow \dot{x}_1 = \dot{s} = v = x_2 = 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot u \Rightarrow$

  LA PRIMA RIGA DELLA MATRICE A AVRÀ LE COMPONENTI $(0,1)$, MENTRE LA PRIMA RIGA DELLA MATRICE B AVRÀ LA COMPONENTE 0.

- $x_2 = v \Rightarrow \dot{x}_2 = \dot{v} = \ddot{s} \xRightarrow{m\ddot{s}+f\dot{s}=u} \dot{x}_2 = -\frac{f}{m}\dot{s} + \frac{1}{m} u = -\frac{f}{m} x_2 + \frac{1}{m} u \Rightarrow$

  LA SECONDA RIGA DELLA MATRICE A AVRÀ LE COMPONENTI $(0, -f/m)$, MENTRE LA SECONDA RIGA DELLA MATRICE B AVRÀ LA COMPONENTE $1/m$.

Dunque: $\quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -f/m \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix}$

Per giunta, sappiamo che $y = s = x_1 = 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 \implies C = [1, 0]$

Infine, poiché y non è espressa in funzione dell'ingresso u, abbiamo che $D = 0$.

<u>Conseguenze delle ipotesi di linearità e stazionarietà:</u>

1) PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

Per poter osservare come la linearità di un sistema dinamico implichi la validità del principio di sovrapposizione degli effetti, facciamo due esperimenti:

(i) Partendo da condizioni iniziali nulle ($x_0 = 0$), applichiamo un ingresso $u_a(t)$: otterremo una risposta nello stato e nell'uscita rispettivamente pari a $x_a(t)$, $y_a(t)$.

(ii) Partendo sempre da condizioni iniziali nulle, applichiamo ora un ingresso $u_b(t)$: otterremo una risposta nello stato e nell'uscita rispettivamente pari a $x_b(t)$, $y_b(t)$.

- Se ora applichiamo (sempre da condizioni iniziali nulle) un ingresso che è combinazione lineare dei due precedenti (ossia $u(t) = \alpha u_a(t) + \beta u_b(t)$), otterremo come risposta nello stato e nell'uscita rispettivamente:

  $x(t) = \alpha x_a(t) + \beta x_b(t)$ $\qquad$ $y(t) = \alpha y_a(t) + \beta y_b(t)$

Analogamente, consideriamo i seguenti due esperimenti:

(i) Poniamo a 0 l'ingresso e partiamo da condizioni iniziali x_{0a}: otterremo una risposta nello stato e nell'uscita rispettivamente pari a $x_a(t)$, $y_a(t)$.

(ii) Poniamo a 0 l'ingresso e partiamo da condizioni iniziali x_{0b}: otterremo una risposta nello stato e nell'uscita rispettivamente pari a $x_b(t)$, $y_b(t)$.

- Se ora partiamo da condizioni iniziali (sempre supponendo nullo l'ingresso) che sono combinazione lineare delle due condizioni iniziali precedenti (ossia $x_0 = \alpha x_{0a} + \beta x_{0b}$), otterremo come risposta nello stato e nell'uscita rispettivamente $x(t) = \alpha x_a(t) + \beta x_b(t)$ $\qquad$ $y(t) = \alpha y_a(t) + \beta y_b(t)$

Se invece sono diversi da zero sia l'ingresso sia le condizioni iniziali, avremo una sovrapposizione degli effetti se consideriamo la <u>stessa</u> combinazione lineare sia per gli ingressi sia per le condizioni iniziali, e cioè:

(i) Siano $x_a(t)$, $y_a(t)$ la risposta rispettivamente nello stato e nell'uscita a partire da condizioni iniziali x_{0a} e avendo applicato un ingresso $u_a(t)$.

(ii) Siano $x_b(t)$, $y_b(t)$ la risposta rispettivamente nello stato e nell'uscita a partire da condizioni iniziali x_{0b} e avendo applicato un ingresso $u_b(t)$.

- Allora avremo come risposta rispettivamente nello stato e nell'uscita
  $x(t) = \alpha x_a(t) + \beta x_b(t)$ $\qquad$ $y(t) = \alpha y_a(t) + \beta y_b(t)$
  se avremo applicato un ingresso del tipo $u(t) = \alpha u_a(t) + \beta u_b(t)$ e saremo partiti da $x_0 = \alpha x_{0a} + \beta x_{0b}$.

Questa apparente complicazione della stessa combinazione lineare nell'ingresso e nelle condizioni iniziali viene meno nella pratica perché, se consideriamo sistemi stabili, la risposta libera (quella che dipende dalle condizioni iniziali) diviene trascurabile dopo un certo tempo.

2) INVARIANZA RISPETTO A TRASLAZIONI NEL TEMPO

L'ipotesi di stazionarietà di un sistema dinamico implica il fatto che la risposta non dipende dall'istante di tempo in cui viene applicato l'ingresso:

(i) Supponiamo di partire al tempo 0 da certe condizioni iniziali $x(0) = x_0$ e applichiamo un ingresso $u(t)$: otterremo una risposta nello stato e nell'uscita rispettivamente pari a $x(t)$, $y(t)$.

(ii) Supponiamo ora di partire al tempo $t_0 \neq 0$ dalle stesse condizioni iniziali $x(t_0) = x_0$ e applichiamo un ingresso $u(t-t_0)$: otterremo come risposta rispettivamente nello stato e nell'uscita $x(t-t_0)$, $y(t-t_0)$.

Cenni sulla scelta delle variabili di stato:

Le variabili di stato $x(t)$ descrivono la ~~sua~~ situazione interna del sistema, nel senso che dipendono da (e "riassumono") tutta la sua storia passata.

Tipicamente, nei sistemi fisici la situazione interna è associata ad accumuli di energia, per cui, per la scelta delle variabili di stato, possono essere date le sequenti indicazioni:

→ CIRCUITO ELETTRICO: si scelgono come variabili di stato le tensioni ai capi dei condensatori e le correnti che percorrono gli induttori; queste corrispondono appunto agli accumuli di energia elettrica e magnetica presenti nei componenti del circuito.

→ SISTEMA MECCANICO: per ogni massa si sceglie una, due o tre variabili di posizione e una, due o tre variabili di velocità, a seconda se ci troviamo in un caso monodimensionale, in un piano oppure nello spazio; questa scelta corrisponde agli accumuli di energia potenziale e cinetica.

→ SISTEMA TERMICO: si associa una variabile di stato alla temperatura di ogni ambiente, che infatti è legata a un accumulo di energia termica.

Ovviamente la scelta delle variabili di stato non è univoca: per esempio, nel caso lineare, se x è il vettore delle variabili di stato di un sistema, anche $z = Tx$ (dove T è una matrice invertibile di cambiamento delle coordinate) è un vettore di variabili adeguate a rappresentare lo stato del sistema. Successivamente verificheremo che le matrici delle nuove variabili, cioè tali che:

$$\dot{z} = \bar{A}z + \bar{B}u \qquad y = \bar{C}z + \bar{D}u$$

sono date da: $\bar{A} = TAT^{-1}$; $\bar{B} = TB$; $\bar{C} = CT^{-1}$; $\bar{D} = D$

Notiamo anche che la scelta delle variabili di stato va fatta in modo da avere un buon compromesso tra attendibilità e complessità. Nell'esempio del carrello, potrebbe essere una sovraccomplicazione non necessaria considerare anche la temperatura del carrello stesso come variabile di stato che possa influenzare l'andamento del sistema.

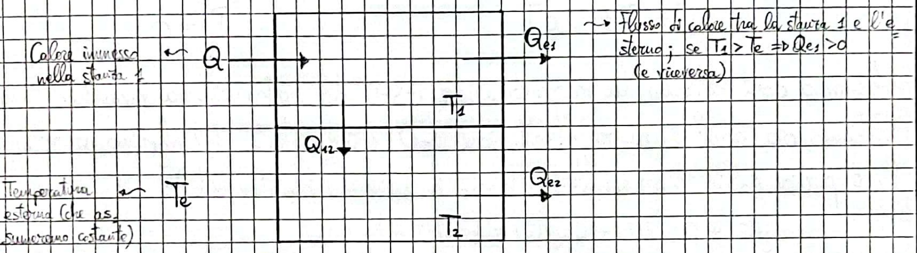
Consideriamo il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + 2 \\ \dot{x}_2 = x_2 - u \\ y = x_1 + x_2 \end{cases}$$

Osserviamo che NON è lineare a causa della costante che compare nella prima equazione. Sistemi di questo tipo (con equazioni lineari + una costante) sono detti AFFINI.

04/03/2021

Vediamo ora un esempio sul controllo della temperatura in un ambiente composto da due stanze:



Proviamo a scrivere le equazioni del sistema:

$$\begin{cases} C_1 \dfrac{dT_1}{dt} = Q - Q_{12} - Q_{e1} \\ C_2 \dfrac{dT_2}{dt} = Q_{12} - Q_{e2} \end{cases}$$

← C_1, C_2 = capacità termiche dei due ambienti

Siano K_{e1}, K_{e2} i coefficienti di trasmissione del calore dei due ambienti verso l'esterno e K_{12} quello della parete tra le due stanze. Allora:

$$Q_{e1} = K_{e1}(T_1 - T_e)$$
$$Q_{e2} = K_{e2}(T_2 - T_e)$$
$$Q_{12} = K_{12}(T_1 - T_2)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} C_1 \dfrac{dT_1}{dt} = Q - K_{12}(T_1 - T_2) - K_{e1}(T_1 - T_e) \\ C_2 \dfrac{dT_2}{dt} = K_{12}(T_1 - T_2) - K_{e2}(T_2 - T_e) \end{cases}$$

Definiamo ora le variabili di stato, di uscita e di ingresso:

$x_1 := T_1 - T_e$
$x_2 := T_2 - T_e$
← La scelta di x_1, x_2 è obbligata se vogliamo avere un sistema lineare stazionario

$y := x_1$ ← Vogliamo controllare T_1
$u := Q$ ← Possiamo manipolare il calore Q

$$\Longrightarrow \dot{x}_1 = \frac{dT_1}{dt} = \frac{1}{C_1}u - \frac{K_{12}}{C_1}(x_1 - x_2) - \frac{K_{e1}}{C_1}x_1 = -\frac{K_{12}+K_{e1}}{C_1}x_1 + \frac{K_{12}}{C_1}x_2 + \frac{1}{C_1}u$$

$$\dot{x}_2 = \frac{dT_2}{dt} = \frac{K_{12}}{C_2}(x_1 - x_2) - \frac{K_{e2}}{C_2}x_2 = \frac{K_{12}}{C_2}x_1 - \frac{K_{12}+K_{e2}}{C_2}x_2$$

Da cui:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{K_{12}+K_{e1}}{C_1} & \frac{K_{12}}{C_1} \\ \frac{K_{12}}{C_2} & -\frac{K_{12}+K_{e2}}{C_2} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \quad 0] \qquad D = 0$$

Abbiamo così ottenuto la rappresentazione I-S-U del nostro sistema dinamico.
Vediamo ora qual è la rappresentazione I-U corrispondente (l'algoritmo per ricavarla a partire dalla rappresentazione I-S-U lo vedremo successivamente):

$$\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t) + b_1 \dot{u}(t)$$

DOVE:

$$a_0 = \frac{K_{e1}K_{e2} + K_{12}(K_{e1}+K_{e2})}{C_1 C_2} \qquad a_1 = \frac{K_{12}+K_{e2}}{C_2} + \frac{K_{12}+K_{e1}}{C_1}$$

$$b_0 = \frac{K_{12}+K_{e2}}{C_1 C_2} \qquad b_1 = \frac{1}{C_1}$$

Notiamo che anche in questo caso (come nell'esempio del carrello) la dimensione $\bar{n}$ dello stato x coincide con l'ordine massimo (n) della derivata di y all'interno della rappresentazione I-U (più precisamente abbiamo ottenuto $\bar{n} = n = 2$).
A questo punto ci chiediamo se effettivamente la relazione $\bar{n} = n$ vale in generale.

A proposito di ciò, consideriamo lo stesso sistema dinamico di prima ma con $K_{12} = 0$

$K_{12} = 0 \Longrightarrow$ LA PARETE TRA LE DUE STANZE È PERFETTAMENTE ISOLANTE $\Longrightarrow Q_{12} = 0$

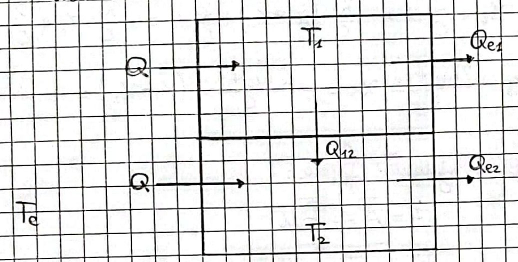
Come prima abbiamo 2 variabili che caratterizzano lo stato del sistema; tuttavia, se andiamo a scrivere la rappresentazione I-U, abbiamo:

$$\dot{y}(t) + \frac{K_{e1}}{C_1}y(t) = \frac{1}{C_1}u(t)$$

in cui l'ordine massimo della derivata di y è 1, che è diverso da $\bar{n}$.
Perciò, possiamo pensare che in generale non vale l'uguaglianza $\bar{n} = n$.

Comunque sia, nel nostro esempio abbiamo $\bar{n} > n$ poiché, supponendo perfettamente isolante la parete tra la stanza 1 e la stanza 2, è come se la stanza 2 non esistesse più: in effetti, l'ingresso u non influenza più x_2 (la stanza 2), ma soprattutto l'uscita y non dipende più da x_2.

Consideriamo adesso un altro sistema termico:



Supponiamo che i due ambienti siano identici, per cui:

$C_1 = C_2 = C$ $\qquad$ $K_{e1} = K_{e2} = K_e$

Utilizzando le stesse variabili di prima, otteniamo le seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{K_{12}+K_e}{C} & \frac{K_{12}}{C} \\ \frac{K_{12}}{C} & -\frac{K_{12}+K_e}{C} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1/C \\ 1/C \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

Nonostante abbiamo due variabili che caratterizzano lo stato e nonostante sembri che x_1, x_2 si influenzino tra loro (e siano entrambe collegate all'ingresso e all'uscita), se andiamo a calcolare la rappresentazione I-U di questo nuovo sistema troviamo:

$$\dot{y}(t) + \frac{K_e}{C} y(t) = \frac{1}{C} u(t)$$ ← che è un'equazione di ordine 1

Per convincerci di questo, effettuiamo un cambio di variabili (non è obiettivo del corso mostrare come si fa questo cambio di variabili):

$$z_1 = x_1 + x_2 \qquad z_2 = x_1 - x_2$$

DA CUI $\quad y = x_1 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$

Ricicliamo i calcoli fatti precedentemente:

$$\dot{x}_1 = -\frac{K_{12}+K_e}{C}x_1 + \frac{K_{12}}{C}x_2 + \frac{1}{C}u$$

$$\dot{x}_2 = \frac{K_{12}}{C}x_1 - \frac{K_{12}+K_e}{C}x_2 + \frac{1}{C}u$$

DA CUI:

$$\dot{z}_1 = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = -\frac{K_e}{C}x_1 - \frac{K_e}{C}x_2 + \frac{2}{C}u = -\frac{K_e}{C}(x_1+x_2) + \frac{2}{C}u = -\frac{K_e}{C}z_1 + \frac{2}{C}u$$

$$\dot{z}_2 = \dot{x}_1 - \dot{x}_2 = -\frac{2K_{12}+K_e}{C}x_1 + \frac{2K_{12}+K_e}{C}x_2 = -\frac{2K_{12}+K_e}{C}(x_1-x_2) = -\frac{2K_{12}+K_e}{C}z_2$$

Se scriviamo il sistema nella seguente forma:

$$\dot{z} = \bar{A}z + \bar{B}u$$
$$y = \bar{C}z + \bar{D}u$$

otteniamo le seguenti matrici:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -\frac{K_e}{C} & 0 \\ 0 & -\frac{2K_{12}+K_e}{C} \end{bmatrix} \qquad \bar{B} = \begin{bmatrix} \frac{2}{C} \\ 0 \end{bmatrix}$$

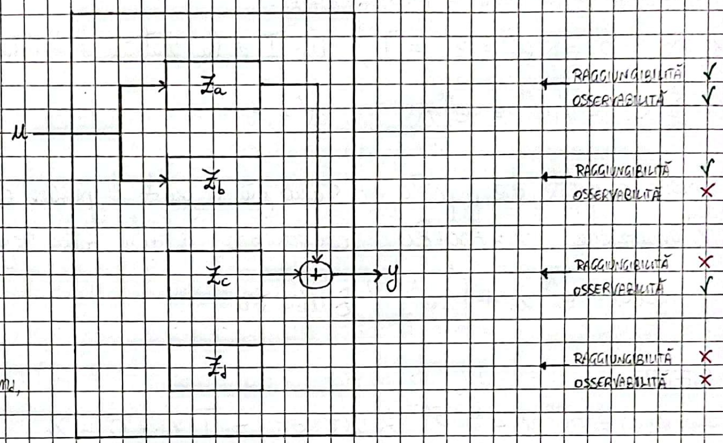
$$\bar{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad \bar{D} = 0$$

• In effetti, le componenti non sulla diagonale principale nulle indicano che non c'è un'interdipendenza tra le variabili di stato (e questo lo si vede meglio nell'espressione di $\dot{z}_1$, $\dot{z}_2$)

In definitiva, si dimostra che l'ordine massimo della derivata di y all'interno della rappresentazione I-U è uguale alla dimensione del sottospazio che è sia modificabile dall'ingresso u, sia legato all'uscita y; nel nostro caso, è solo z_1 a essere collegata sia a u che a y, mentre z_2 non è influenzata dall'ingresso.

Come possiamo giustificare questo fenomeno da un punto di vista fisico?
In effetti, poiché le due stanze sono perfettamente identiche tra loro, e poiché viene sempre immesso (o sottratto) lo stesso calore Q nei due ambienti, a regime queste due stanze avranno sempre la stessa temperatura (non c'è verso), per cui si riveleranno praticamente un ambiente unico.

Generalizzando, esiste sempre un cambio di coordinate $z = Tx$, dove T è una matrice invertibile, tale che nelle nuove coordinate il sistema può essere formato dai seguenti quattro blocchetti (non devono necessariamente essere presenti tutti e quattro):



In generale, la rappr. I-S-U è più "completa"

→ la rappresentazione I-U riguarda solo il sottospazio relativo al blocchetto z_a

$\Downarrow$

$m = n_a$

$\Downarrow$

Dato che $\bar{n} = n_a + n_b + n_c + n_d$, abbiamo $\bar{n} = n \iff n_b = n_c = n_d = 0$

Per quel che abbiamo detto prima, abbiamo $\bar{n} = n \iff$ tutte le variabili di stato appartengono al blocchetto z_a.
Vale la pena osservare anche che la porzione di stato relativa a z_a è l'unica a cui può essere applicata una legge di controllo a catena chiusa e, quindi, è l'unica per cui si ha pieno controllo.

08/03/2021

Risposta esplicita nel tempo:

Consideriamo la rappresentazione I-S-U di un sistema dinamico generico:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Introduciamo a livello teorico la soluzione dell'equazione $\dot{x} = Ax + Bu$.

Definizione:

Sia A una matrice quadrata $n \times n$ e sia $t \in \mathbb{R}$. La MATRICE ESPONENZIALE è una matrice anch'essa quadrata $n \times n$ definita nel seguente modo:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$$

→ A PARTIRE DALLO SVILUPPO IN SERIE DELL'ESPONENZIALE: $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

PROPRIETÀ DELLA MATRICE ESPONENZIALE:

1) Se $t=0 \Rightarrow e^{At} = e^{A0} = I$, dove I è la matrice d'identità $n \times n$.

2) $\frac{d}{dt} e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A \qquad \forall A, t$

Grazie a queste due proprietà, noi siamo già in grado di provare che la soluzione dell'equazione $\dot{x} = Ax + Bu$ (con $x(0) = x_0$) è data dalla seguente espressione:

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\, d\tau$$

INFATTI:

$$\rightarrow x(0) = e^{A0} x_0 + \int_0^0 e^{-A\tau} B u(\tau)\, d\tau = I x_0 + 0 = x_0 \qquad \checkmark$$

$$\rightarrow \dot{x} = \frac{d}{dt}\left[e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\, d\tau \right] =$$

$$= Ae^{At} x_0 + Bu(t) + \int_0^t Ae^{A(t-\tau)} B u(\tau)\, d\tau =$$

$$= A\left[e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\, d\tau \right] + Bu(t) = Ax + Bu \qquad \checkmark$$

Da questa soluzione risaltano all'occhio le seguenti caratteristiche:

1) CAUSALITÀ: il valore dello stato al tempo t dipende dalle condizioni iniziali e dal valore dell'ingresso u solo per tempi precedenti a t (da notare che l'integrale va da 0 a t).

2) PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI: sono lineari sia la trasformazione matriciale $e^{At} x_0$ (per cui $e^{At}(\alpha x_{0a} + \beta x_{0b}) = \alpha e^{At} x_{0a} + \beta e^{At} x_{0b}$), sia l'operatore integrale (per cui $\int_0^t e^{A(t-\tau)} B(\alpha u_a(\tau) + \beta u_b(\tau))\, d\tau =$

$$= \alpha \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u_a(\tau)\, d\tau + \beta \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u_b(\tau)\, d\tau)$$

3) DISTINZIONE TRA RISPOSTA LIBERA E FORZATA:

$$x(t) = \underbrace{e^{At}x_0}_{x_\ell(t)} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\, d\tau}_{x_f(t)}$$

RISPOSTA LIBERA → Dipende dalle condizioni iniziali e non dall'ingresso

RISPOSTA FORZATA → Dipende dall'ingresso e non dalle condizioni iniziali

4) PRODOTTO DI MATRICI ESPONENZIALI E INVERSA DI UNA MATRICE ESPONENZIALE:

$$\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R} \qquad e^{A\cdot t_1}\cdot e^{A\cdot t_2} = e^{A(t_1+t_2)} = e^{A\cdot t_2}\cdot e^{A\cdot t_1}$$

↳ NB: in generale non è vero che $e^A\cdot e^B = e^B \cdot e^A$
(è vero $\Leftrightarrow$ A commuta con B)

Questa proprietà si dimostra nel seguente modo:
Siano t_a, t_b due tempi t.c. $0<t_a<t_b$. La risposta libera nello stato al tempo t_a è data da $x(t_a) = e^{At_a}x_0$ e al tempo t_b da $x(t_b) = e^{At_b}x_0$.
Chiaramente si può anche scrivere $x(t_b) = e^{A(t_b-t_a)}x(t_a)$, prendendo cioè come tempo iniziale t_a. Quindi:

$$x(t_b) = e^{At_b}x_0 = e^{A(t_b-t_a)}x(t_a) \Longrightarrow e^{At_b}x_0 = e^{A(t_b-t_a)}e^{At_a}x_0$$

L'UGUAGLIANZA VALE PER OGNI $x_0 \Longrightarrow e^{At_b} = e^{A(t_b-t_a)}e^{At_a}$

SE PRENDIAMO $t_1 := t_b - t_a,\ t_2 := t_a \Longrightarrow e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1}\cdot e^{At_2}$

che è proprio la relazione che volevamo dimostrare.
Conseguenza immediata di questo fatto è che la matrice esponenziale è sempre INVERTIBILE e ha per inversa e^{-At} $\left((e^{At})^{-1} = e^{-At}\right)$: infatti, se prendiamo $t_1 := t,\ t_2 := -t \Longrightarrow e^{At}\cdot e^{-At} = e^{A(t-t)} = e^{A0} = I$.

Matrice di transizione dello stato e delle risposte impulsive:

→ MATRICE DI TRANSIZIONE DELLO STATO: $\phi(t) := e^{At}$

→ MATRICE DELLE RISPOSTE IMPULSIVE NELLO STATO: $H(t) := e^{At}B$

Con queste definizioni, possiamo esprimere la soluzione $x(t)$ nel seguente modo:

$$x(t) = \phi(t)x_0 + \int_0^t H(t-\tau)u(\tau)\,d\tau$$

- La colonna i-esima di ϕ rappresenta la risposta libera nello stato a fronte di una condizione iniziale pari a e_i, che è l'elemento i-esimo della base canonica di $\mathbb{R}^n$.

- Per comprendere il significato di $\mathcal{H}$, introduciamo la DELTA DI DIRAC $\delta_0(t)$, che è definita nel seguente modo:

$$\delta_0(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_{0,\varepsilon}(t) \quad , \text{ dove } \quad \delta_{0,\varepsilon}(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon & \text{se } t \in [0,\varepsilon) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall a \leq 0 \quad \forall b \geq \varepsilon \qquad \int_a^b \delta_{0,\varepsilon}(t)\, dt = 1 \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \forall a \leq 0 \quad \forall b > 0 \qquad \int_a^b \delta_0(t)\, dt = 1 \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \forall a \leq 0 \quad \forall b > 0 \qquad \int_a^b f(t)\,\delta_0(t)\, dt = f(0)$$

PER UNA FUNZ. $f(t)$ GENERICA

Perciò, se al nostro sistema lineare diamo l'ingresso $u(t) = \delta_0(t)$, la risposta forzata $x_f(t)$ sarà:

$$x_f(t) = \int_0^t \mathcal{H}(t-\tau)\,\delta_0(\tau)\, d\tau = \mathcal{H}(t-0) = \mathcal{H}(t)$$

↳ L'IMPULSO CADE ANCHE ALL'INTERNO DEGLI INTERVALLI CHE PARTONO DA ZERO

Questo significa che la risposta forzata all'impulso unitario $\delta_0(t)$ è data proprio da $\mathcal{H}(t)$ che, per questo motivo, viene detta matrice delle risposte impulsive nello stato.

NB: Anche se in generale $\mathcal{H}(t)$ è una matrice, dato che noi consideriamo solo ingressi scalari, avremo a che fare solo con gli $\mathcal{H}(t)$ che sono vettori di dimensione $n \times 1$.

Per quanto riguarda l'uscita $y(t)$, poiché all'interno della rappresentazione I-S-U vale l'equazione $y = Cx + Du$, si ha:

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + C\int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau)\, d\tau + Du(t)$$

In modo del tutto analogo a quanto fatto per lo stato, è possibile individuare anche qui una risposta libera e una risposta forzata in uscita:

→ RISPOSTA LIBERA IN USCITA: $y_\ell(t) = Cx_\ell(t) = Ce^{At}x_0$

→ RISPOSTA FORZATA IN USCITA: $y_f(t) = Cx_f(t) + Du(t) = C\int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau)\,d\tau + Du(t)$

Anche per l'uscita si definiscono due funzioni matriciali:

- $\Psi(t) := C\Phi(t) = Ce^{At}$
- $W(t) := CH(t) + D\delta_0(t) = Ce^{At}B + D\delta_0(t)$

→ Per quanto riguarda la risposta libera, è facile convincersi che $y_\ell(t) = \Psi(t)x_0$.

→ Per quanto riguarda la risposta forzata, dobbiamo effettuare qualche passaggio matematico a partire dalle definizioni di $W(t)$, $y_f(t)$:

$$W(t) = Ce^{At}B + D\delta_0(t)$$

$$y_f(t) = C\int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau)\,d\tau + Du(t)$$

$$\Rightarrow y_f(t) = \int_0^t Ce^{A(t-\tau)} Bu(\tau)\,d\tau + D\int_0^t \delta_0(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau$$

PER ASSICURARCI CHE L'UGUAGLIANZA APPENA SCRITTA SIA VERA, CONSIDERIAMO IL TERMINE MOLTIPLICATO PER D: $\int_0^t \delta_0(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau \overset{s:=t-\tau}{=}$

$$= -\int_t^0 \delta_0(s)\,u(t-s)\,ds = \int_0^t u(t-s)\,\delta_0(s)\,ds = u(t) \quad \checkmark$$

A questo punto è facile convincersi che $y_f(t) = \int_0^t W(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau$

In definitiva:

$$y(t) = \Psi(t)x_0 + \int_0^t W(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau$$

NB: Anche se in generale $W(t)$ è una matrice, dato che noi consideriamo solo ingressi scalari e uscite scalari, avremo a che fare solo con $W(t)$ scalari.

$W(t)$ è proprio la risposta che osserviamo quando andiamo a mettere come ingresso al sistema un impulso.

Calcolo di e^{At} per A diagonalizzabile:

In generale, il calcolo di e^{At} non è semplice, ma lo diventa nel momento in cui A è una matrice diagonalizzabile.

Definizione:

Una matrice A è DIAGONALIZZABILE se esiste un cambiamento di coordinate $z = Tx$ tale che, nelle nuove coordinate,

$$\bar{A} = TAT^{-1} = \Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\bar{n}}\}$$ ← MATRICE DIAGONALE T.C. SULLA DIAGONALE PRINC. COMPAIONO GLI $\bar{n}$ AUTOVALORI DELLA MATRICE A

è una matrice diagonale.

RICHIAMO: un autovalore λ per una matrice A è un numero tale che, dato un vettore v non nullo, si ha: $Av = \lambda v$. In tal caso, v viene detto AUTOVETTORE relativo ad A.

Se A ha $\bar{n}$ autovalori distinti (con A matrice $\bar{n} \times \bar{n}$), allora esiste certamente una base $\{v_1, v_2, \dots, v_{\bar{n}}\}$ di $\bar{n}$ autovettori per A tale che:

$$T^{-1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ v_1 & v_2 & \dots & v_{\bar{n}} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}}_{\text{VETTORI COLONNA}}$$

Più in generale, questo è vero ogni volta che, per ogni autovalore di A, la sua molteplicità algebrica è uguale alla sua molteplicità geometrica.

↳ In tal caso A è appunto diagonalizzabile e si ha che:

$$TAT^{-1} = \bar{A} = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{\bar{n}} \end{bmatrix}$$

Perciò, se effettuiamo il cambiamento delle coordinate $z = Tx$ ($\Rightarrow x = T^{-1}z$), otteniamo che:

$$\dot{z} = T\dot{x} = T(Ax + Bu) = \underbrace{TAT^{-1}}_{\bar{A}} z + \underbrace{TB}_{\bar{B}} u = \bar{A}z + \bar{B}u$$

La matrice diagonale è molto comoda perché vale la seguente relazione:

$$\Lambda^{k} = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{\bar{n}}^k \end{bmatrix}$$

Inoltre, $\Lambda = TAT^{-1} \Rightarrow T^{-1}\Lambda T = \overbrace{T^{-1}T}^{I} A \overbrace{T^{-1}T}^{I} = A \Rightarrow$

$$\Rightarrow A^k = \underbrace{T^{-1}\Lambda T T^{-1}\Lambda T \dots T^{-1}\Lambda T}_{k \text{ VOLTE}} = T^{-1}\Lambda^k T$$

Perciò, sotto l'ipotesi di A = MATRICE DIAGONALIZZABILE, e^{At} si calcola nel seguente modo:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} T^{-1}\Lambda^k T \frac{t^k}{k!} = T^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \Lambda^k \frac{t^k}{k!}\right)T = T^{-1}e^{\Lambda t}T =$$

$$= T^{-1}\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t}\end{bmatrix} T$$ CHE È PIUTTOSTO SEMPLICE DA CALCOLARE

Esempio:

Si consideri il seguente sistema lineare caratterizzato da una matrice A diagonalizzabile:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 0 \\ 1\end{bmatrix} \qquad C=[-1,\ 2] \qquad D=1$$

POLINOMIO CARATTERISTICO: $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda\end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 \Rightarrow \underbrace{\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1}_{\text{AUTOVALORI DI } A}$

$\boxed{\lambda_1 = 1}$ L'autovettore v relativo all'autovalore λ_1 sarà tale che:

$$(A-\lambda_1 I)v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0\end{bmatrix} \Rightarrow (A-I)v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_a \\ v_b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0\end{bmatrix} \Rightarrow v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1\end{bmatrix}$$

$\boxed{\lambda_2 = -1}$ Seguendo lo stesso ragionamento, l'autovettore relativo all'autovalore λ_2 sarà $\begin{bmatrix} -1 \\ 1\end{bmatrix}$.

Scegliendo la matrice $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1\end{bmatrix}$ che ha per colonne questi autovettori di A e prendendo $T = P^{-1}$ si ha:

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix} = \Lambda = \mathrm{diag}\{-1, 1\}$$

Pertanto: $e^{At} = T^{-1} e^{\Lambda t} T = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-t}+e^{t} & -e^{-t}+e^{t} \\ -e^{-t}+e^{t} & e^{-t}+e^{t}\end{bmatrix}$

$$\Phi(t) = e^{At} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-t}+e^{t} & -e^{-t}+e^{t} \\ -e^{-t}+e^{t} & e^{-t}+e^{t}\end{bmatrix}$$

$$H(t) = e^{At}B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -e^{-t}+e^{t} \\ e^{-t}+e^{t}\end{bmatrix}$$

$$\Psi(t) = Ce^{At} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3e^{-t}+e^{t}, & 3e^{-t}+e^{t}\end{bmatrix}$$

$$W(t) = Ce^{At}B + D\delta_0(t) = \frac{3e^{-t}+e^{t}}{2} + \delta_0(t)$$

10/03/2021

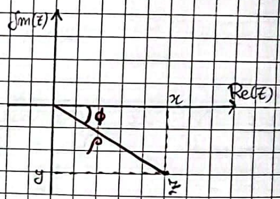
Trasformata di Laplace:

Nell'ambito di questo corso ci permetterà di effettuare:

- → Il calcolo della risposta a fronte di un certo segnale di ingresso assegnato $u(t)$ e di una certa condizione iniziale x_0.
- → Il passaggio dalla rappresentazione I-S-U di un sistema lineare stazionario alla sua rappresentazione I-U (e viceversa).
- → La verifica della stabilità di un sistema lineare stazionario.

Per prima cosa, facciamo qualche RICHIAMO SUI NUMERI COMPLESSI.

Sia $z \in \mathbb{C}$



RAPPRESENTAZIONE CARTESIANA: $z = x + jy$

RAPPRESENTAZIONE POLARE: $z = \rho e^{j\phi}$

Dove $\rho = \text{MODULO} = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$

$\phi = \text{FASE} = \arg(z) = \text{atan}2(y,x)$

$$\text{atan}2(y,x) = \begin{cases} \text{arctg}(y/x) & x \geq 0 \\ \text{arctg}(y/x) + \pi & x < 0 \end{cases}$$

PROPRIETÀ DEI NUMERI COMPLESSI:

1) Relazione di Eulero: $e^{j\phi} = \cos(\phi) + j\sin(\phi)$
2) $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{j(\phi_1+\phi_2)}$ ossia $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$
3) $z^n = \rho^n e^{jn\phi}$
4) Se $z_2 \neq 0 \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\phi_1 - \phi_2)}$
5) Se $z = x + jy \in \mathbb{C} \Rightarrow$ COMPLESSO CONIUGATO DI $z := \bar{z} = x - jy$
6) $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$
7) $\sin(y) = \frac{e^{jy} - e^{-jy}}{2j}$; $\cos(y) = \frac{e^{jy} + e^{-jy}}{2}$

Definizione:

Dato un segnale unilatero (cioè definito per $t \geq 0$) nel dominio del tempo $x(t)$, si definisce Trasformata di Laplace di $x(t)$ la seguente funzione complessa $X(s)$ (dove $s \in \mathbb{C}$):

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} x(t)\, dt \qquad \forall s : Re(s) > \beta$$

dove $\beta \in \mathbb{R}$ è detta ASCISSA DI CONVERGENZA di $X(s)$ ed è il più piccolo numero tale che, per ogni s con $Re(s) > \beta$, l'integrale converga (e quindi sia ben definito).

D'altra parte, dato un segnale $X(s)$, la sua TRASFORMATA INVERSA DI LAPLACE (o ANTITRASFORMATA), se esiste, è un segnale $x(t)$ tale che $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$ e si indica con

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$$

Proprietà della Trasformata di Laplace:

1) LINEARITÀ: se $X_1(s) = \mathcal{L}\{x_1(t)\}$, $X_2(s) = \mathcal{L}\{x_2(t)\}$, allora:

$$\mathcal{L}\{\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)\} = \alpha_1 X_1(s) + \alpha_2 X_2(s)$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathcal{L}\{\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)\} = \int_0^{+\infty} (\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t))\, e^{-st}\, dt =$$
$$= \alpha_1 \int_0^{+\infty} x_1(t) e^{-st}\, dt + \alpha_2 \int_0^{+\infty} x_2(t) e^{-st}\, dt = \alpha_1 X_1(s) + \alpha_2 X_2(s)$$

2) TRASLAZIONE COMPLESSA: se $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, allora:

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t} x(t)\} = X(s-\alpha)$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t} x(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} e^{\alpha t} x(t)\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-\alpha)t} x(t)\, dt = X(s-\alpha)$$

3) PRODOTTO PER IL TEMPO: se $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, allora:

$$\mathcal{L}\{t\, x(t)\} = -\frac{d}{ds} X(s)$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathcal{L}\{t\, x(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}\, t\, x(t)\, dt = \int_0^{+\infty} \left[-\frac{d}{ds} e^{-st} x(t)\right] dt = -\frac{d}{ds}\left[\int_0^{+\infty} e^{-st} x(t)\, dt\right] =$$
$$= -\frac{d}{ds} X(s)$$

Ripetendo questa iterazione per h volte, è facile provare che:

$$\mathcal{L}\{t^h x(t)\} = (-1)^h \frac{d^h}{ds^h} X(s)$$

4) TRASFORMATA DELLA DERIVATA: se $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, allora:

$$\mathcal{L}\{\dot{x}\} = sX(s) - x(0)$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathcal{L}\{\dot{x}\} = \int_0^{+\infty} \dot{x} e^{-st} dt = \left[e^{-st} x(t)\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} s\, x(t) e^{-st} dt = -x(0) + s\int_0^{+\infty} x(t) e^{-st} dt =$$
$$= sX(s) - x(0)$$

5) TRASFORMATA DELL'INTEGRALE: se $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, allora:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t x(\tau)\, d\tau\right\} = \frac{1}{s} X(s)$$

DIMOSTRAZIONE:

Sia $\bar{x}(t) := \int_0^t x(\tau)\, d\tau \implies \bar{x}(0) = 0, \quad \dot{\bar{x}} = x(t)$

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{\dot{\bar{x}}\} = s\bar{X}(s) - \bar{x}(0) = s\bar{X}(s) \implies \bar{X}(s) = \frac{1}{s} X(s)$$

Trasformata di alcune funzioni di uso corrente:

1) GRADINO UNITARIO

Si definisce la funzione gradino unitario nel seguente modo:

$$\delta_{-1}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{\delta_{-1}(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} \delta_{-1}(t)\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \frac{e^{-st}}{-s}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{s}$$

- Ascissa di convergenza: $\beta = 0$

2) IMPULSO UNITARIO

$$\mathcal{L}\{\delta_0(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} \delta_0(t)\, dt = e^{-s \cdot 0} = 1$$

È possibile verificare questa uguaglianza anche sfruttando il fatto che $\delta_0(t) = \frac{d}{dt}\delta_{-1}(t)$, per cui: $\mathcal{L}\{\delta_0(t)\} = s\mathcal{L}\{\delta_{-1}(t)\} - \delta_{-1}(0) = s\frac{1}{s} = 1$

- Ascissa di convergenza: $\beta = -\infty$

3) ESPONENZIALE SEMPLICE

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\delta_{-1}(t)\} = \frac{1}{s-\alpha}$$

- Ascissa di convergenza: $\beta = Re(\alpha)$

4) TERMINE POLINOMIALE

Si consideri la funzione $\frac{t^h}{h!}\delta_{-1}(t)$, con h intero non negativo. Si ha che:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^h}{h!}\delta_{-1}(t)\right\} = \frac{1}{s^{h+1}}$$

DIMOSTRAZIONE PER INDUZIONE:

→ Passo base ($h=0$): $\frac{t^0}{0!}\delta_{-1}(t) = \delta_{-1}(t)$; $\mathcal{L}\{\delta_{-1}(t)\} = \frac{1}{s}$ ✓

→ Passo induttivo: supponiamo per ipotesi induttiva che $\mathcal{L}\{\frac{t^h}{h!}\cdot\delta_{-1}(t)\} = \frac{1}{s^{h+1}}$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^{h+1}}{(h+1)!}\delta_{-1}(t)\right\} = \frac{1}{h+1}\mathcal{L}\left\{t\cdot\frac{t^h}{h!}\delta_{-1}(t)\right\} = \frac{1}{h+1}\left[-\frac{d}{ds}\frac{1}{s^{h+1}}\right] =$$

$$= \frac{1}{h+1}\frac{(h+1)s^h}{s^{2h+2}} = \frac{1}{s^{h+2}} \quad ✓$$

- Ascissa di convergenza: $\beta = 0$

5) FUNZIONE COSENO

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\delta_{-1}(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2}\delta_{-1}(t)\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{j\omega t}\delta_{-1}(t)\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-j\omega t}\delta_{-1}(t)\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j\omega}+\frac{1}{s+j\omega}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2s}{s^2+\omega^2} = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

- Ascissa di convergenza: $\beta = 0$

6) FUNZIONE SENO

Adottando lo stesso metodo utilizzato per il calcolo della trasformata del coseno, si ha che: $\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\delta_{-1}(t)\} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

- Ascissa di convergenza: $\beta = 0$

11/03/2021

Teorema del Valore Finale:

Sia F(s) la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$. Se $f(t)$, $f'(t)$ presentano ascisse di convergenza non positive e $\lim_{t\to\infty} f(t)$ esiste, allora:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

Dimostrazione:

Sappiamo che: $\int_0^t f'(\tau)\,d\tau = f(t) - f(0) \implies f(t) = f(0) + \int_0^t f'(\tau)\,d\tau$

$$\implies \lim_{t\to\infty} f(t) = f(0) + \int_0^{+\infty} f'(\tau)\,d\tau$$

Ma $\int_0^{+\infty} f'(\tau)\,d\tau$ è la trasformata di Laplace di $f'(t)$ calcolata in $s=0$:

$$\int_0^{+\infty} f'(\tau)\,d\tau = \lim_{s\to 0}\int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t)\,dt = \lim_{s\to 0} \mathcal{L}\{f'(t)\}$$

Per la proprietà della trasformata derivata: $\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$

$$\implies \lim_{t\to+\infty} f(t) = f(0) + \lim_{s\to 0}[sF(s) - f(0)] = \lim_{s\to 0} sF(s)$$ ■

Calcolo della risposta a partire da I-S-U:

Consideriamo la rappresentazione I-S-U di un sistema lineare e stazionario:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Se $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ e $\mathcal{L}\{x_1\} = X_1(s)$, $\mathcal{L}\{x_2\} = X_2(s)$, ..., $\mathcal{L}\{x_n\} = X_n(s)$,

allora definiamo $\mathcal{L}\{x\}$ nel seguente modo:

$$\mathcal{L}\{x\} = X(s) = \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ \vdots \\ X_n(s) \end{bmatrix}$$

Per cui: $\mathcal{L}\{\dot{x}\} = \mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} sX_1(s) - x_1(0) \\ sX_2(s) - x_2(0) \\ \vdots \\ sX_n(s) - x_n(0) \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ \vdots \\ X_n(s) \end{bmatrix} - x(0) =$

$$= sX(s) - x(0)$$

Inoltre, per la linearità della trasformata si ha:

$$\mathcal{L}\{Ax(t) + Bu(t)\} = AX(s) + BU(s)$$

$\mathcal{L}\{Cx(t)+Du(t)\} = CX(s)+DU(s)$ dove $U(s)=\mathcal{L}\{u(t)\}$

Da qui otteniamo la seguente relazione: $sX(s)-x_0 = AX(s)+BU(s)$

$$\Rightarrow sX(s)-AX(s)=x(0)+BU(s)$$
$$\Rightarrow sIX(s)-AX(s)=x(0)+BU(s)$$
$$\Rightarrow (sI-A)X(s)=x(0)+BU(s)$$
$$\Rightarrow (sI-A)^{-1}(sI-A)X(s)=(sI-A)^{-1}(x(0)+BU(s))$$
$$\Rightarrow X(s)=\underbrace{(sI-A)^{-1}x(0)}_{\substack{\text{RISPOSTA LIBERA}\\\text{NELLO STATO}}}+\underbrace{(sI-A)^{-1}BU(s)}_{\substack{\text{RISPOSTA FORZATA}\\\text{NELLO STATO}}}$$

La matrice $(sI-A)^{-1}$ è una matrice $n\times n$ i cui elementi sono funzioni razionali di s STRETTAMENTE PROPRIE (lo vedremo meglio più avanti).

- Una funzione razionale è STRETTAMENTE PROPRIA quando il grado del polinomio a numeratore è strettamente minore del grado del polinomio a denominatore.
- Una funzione razionale è PROPRIA quando il grado del polinomio a numeratore è minore o uguale al grado del polinomio a denominatore.

Per quanto riguarda l'uscita, allo stesso modo otteniamo che:

$Y(s)=CX(s)+DU(s)$ $\Longrightarrow$

$$\Rightarrow Y(s)=\underbrace{C(sI-A)^{-1}x_0}_{\substack{\text{RISPOSTA LIBERA}\\\text{NELL'USCITA}}}+\underbrace{[C(sI-A)^{-1}B+D]U(s)}_{\text{RISPOSTA FORZATA NELL'USCITA}}$$

Facendo i conti si ha che:

$$Y(s)=\underbrace{\frac{v_0+v_1s+\ldots+v_{r-1}s^{r-1}}{d_0+d_1s+\ldots+s^r}}_{\substack{\text{RISPOSTA LIBERA}\\\text{NELL'USCITA}}}+\underbrace{\frac{p_0+p_1s+\ldots+p_ms^m}{q_0+q_1s+\ldots+s^m}U(s)}_{\substack{\text{RISPOSTA FORZATA}\\\text{NELL'USCITA}}}$$

→ Il polinomio $V(s)=v_0+v_1s+\ldots+v_{r-1}s^{r-1}$ dipende dalle condizioni iniziali x_0.

→ Il polinomio $D(s)=d_0+d_1s+\ldots+s^r$ è un fattore del determinante di $sI-A$.

→ La funzione che lega in s la trasformata dell'ingresso alla trasformata dell'uscita:

$$W(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$$

è detta FUNZIONE DI TRASFERIMENTO del sistema. È una funzione razionale propria, ma non strettam. se $D\neq 0$ e strettamente propria se $D=0$.

→ Il polinomio $Q(s) = q_0 + q_1 s + \ldots + s^n$ è anch'esso un fattore del determinante di $sI-A$ perché, a seconda delle matrici B, C (e cioè, come vedremo, a seconda della raggiungibilità e osservabilità o meno del sistema), si possono avere semplificazioni tra numeratore e denominatore. Pertanto è vera la seguente relazione: $m \leq n \leq \bar{n}$
con $n \equiv \bar{n}$ solo nel caso non ci siano semplificazioni (e il sistema, vedremo, è raggiungibile e osservabile).

<u>Esempio:</u>
Si consideri un sistema lineare e stazionario con rappresentazione I-S-U caratterizzata dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Si ha: $$sI - A = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 3 & s+4 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow (sI-A)^{-1} = \frac{1}{|sI-A|} \begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -3 & s \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2+4s+3} \begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -3 & s \end{bmatrix}$$

$$Y(s) = C(sI-A)^{-1} x_0 + \left[C(sI-A)^{-1} B + D \right] U(s) =$$

$$= \frac{1}{s^2+4s+3} \begin{bmatrix} s+4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{s^2+4s+3} \begin{bmatrix} s+4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) U(s) =$$

$$= \underbrace{\frac{as+4a+b}{s^2+4s+3}}_{Y_\ell(s)} + \underbrace{\overbrace{\frac{1}{s^2+4s+3}}^{W(s)} U(s)}_{Y_f(s)}$$

<u>Calcolo della risposta a partire da I-U:</u>
Consideriamo la rappresentazione I-U di un sistema lineare e stazionario:

$$\begin{cases} a_0 y(t) + a_1 \dot{y} + \ldots + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + y^{(n)}(t) = b_0 u(t) + b_1 \dot{u} + \ldots + b_m u^{(m)}(t) \\ y^{(i)}(0) = y_0^{(i)} \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1 \end{cases}$$

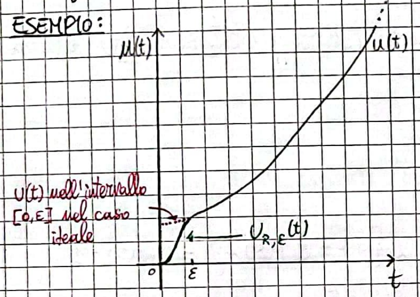
Siano $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$, $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$. Per quanto riguarda l'u=

scita, si ha:

$$\mathcal{L}\{\dot{y}\} = sY(s) - y_0$$
$$\mathcal{L}\{\ddot{y}\} = s^2 Y(s) - s y_0 - \dot{y}_0$$
$$\dots$$
$$\mathcal{L}\{y^{(n)}(t)\} = s^n Y(s) - s^{n-1} y_0 - s^{n-2} \dot{y}_0 - \dots - y_0^{(n-1)}$$

Per quanto riguarda la $u(t)$, si ricorda che stiamo considerando ingressi che vengono applicati a partire da $t=0^+$, cioè che valgono zero con tutte le loro derivate fino a $t=0$.

ESEMPIO:



Analogamente per le derivate di $u(t)$

⇝ Noi consideriamo le $u_{R,\varepsilon}(t)$ per $\varepsilon \to 0$ ma, in ogni caso, avremo sempre che $u(0) = \lim_{\varepsilon \to 0} u_{R,\varepsilon}(0) = 0$

Perciò si ha:

$$\mathcal{L}\{\dot{u}\} = sU(s)$$
$$\mathcal{L}\{\ddot{u}\} = s^2 U(s)$$
$$\dots$$
$$\mathcal{L}\{u^{(m)}(t)\} = s^m U(s)$$

Da qui otteniamo la seguente relazione:

$$a_0 Y(s) + a_1 (sY(s) - y_0) + a_2 (s^2 Y(s) - s y_0 - \dot{y}_0) + \dots + (s^n Y(s) - s^{n-1} y_0 - \dots - y_0^{(n-1)}) =$$
$$= b_0 U(s) + b_1 s U(s) + b_2 s^2 U(s) + \dots + b_m s^m U(s) \implies$$
$$\implies (a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + s^n) Y(s) = a_1 y_0 + a_2 s y_0 + a_2 \dot{y}_0 + \dots + s^{n-1} y_0 + \dots + y_0^{(n-1)} +$$
$$+ (b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m) U(s) \implies$$

$$\implies Y(s) = \underbrace{\frac{\overbrace{c_0 + c_1 s + \dots + c_{n-1} s^{n-1}}^{a_1 y_0 + a_2 s y_0 + \dots + y_0^{(n-1)} =}}{a_0 + a_1 s + \dots + s^n}}_{Y_l(s)} + \underbrace{\overbrace{\frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + s^n}}^{W(s)} U(s)}_{Y_f(s)}$$

→ Il polinomio $C(s) = c_0 + c_1 s + \dots + c_{n-1} s^{n-1}$ dipende dalle condizioni iniziali.

→ Come abbiamo precedentemente accennato, non ci può essere semplificazione tra i seguenti polinomi: $p_A(s) = a_0 + a_1 s + \ldots + s^n$
$p_B(s) = b_0 + b_1 s + \ldots + b_m s^m$

→ La funzione $W(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \ldots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \ldots + s^n}$ rappresenta la funzione di trasferimento del sistema espressa in termini della rappresentazione I-U qui considerata.

Esempio:

Si consideri un sistema lineare e stazionario con rappresentazione I-U data da:

$$\begin{cases} \ddot{y} - \dot{y} + 2y = u - \dot{u} \\ y_0 = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Si ha: $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$ $\quad \mathcal{L}\{\dot{y}\} = sY(s) - y_0 = sY(s) - 1$

$\mathcal{L}\{\ddot{y}\} = s(sY(s) - 1) - \dot{y}_0 = s^2 Y(s) - s$

$\mathcal{L}\{u(t)\} = U(s)$ $\quad \mathcal{L}\{\dot{u}\} = sU(s)$

$$\Rightarrow s^2 Y(s) - s - sY(s) + 1 + 2Y(s) = U(s) - sU(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (s^2 - s + 2)Y(s) = s - 1 + (1 - s)U(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{s-1}{s^2 - s + 2} + \frac{1-s}{s^2 - s + 2} U(s)$$

15/03/2020

Equivalenza tra rappresentazione I-S-U e rappresentazione I-U:

Una rappresentazione I-S-U e una rappresentazione I-U si dicono EQUIVALENTI se hanno la stessa funzione di trasferimento. In particolare:

→ L'equivalenza è COMPLETA se l'intero stato del sistema è raggiungibile e osservabile. In tal caso le due rappresentazioni portano alla medesima risposta libera e alla medesima risposta forzata.

→ L'equivalenza è NON COMPLETA se esistono porzioni di stato non raggiungibili e/o non osservabili. In tal caso le due rappresentazioni portano alla medesima risposta forzata in uscita ma, se esiste una porzione di stato osservabile e non raggiungibile, conducono a risposte libere differenti (effettivamente, la rappresentazione I-U non cattura la componente dell'uscita che dipende dalla porzione di stato osservabile e non raggiungibile).

Passaggio da I-S-U a I-U:

Per prima cosa bisogna calcolare la funzione di trasferimento della rappresentazione I-S-U: $W(s) = C(sI-A)^{-1}B + D \implies$

$$\implies W(s) = \frac{p_0 + p_1 s + \ldots + p_m s^m}{q_0 + q_1 s + \ldots + s^n}$$

Poiché $Y(s) = W(s)U(s)$: $\quad Y(s) = \frac{p_0 + p_1 s + \ldots + p_m s^m}{q_0 + q_1 s + \ldots + s^n} U(s)$

Per la definizione di equivalenza tra le due rappresentazioni, non dobbiamo trattare la risposta libera, il che equivale a supporre tutte le condizioni iniziali pari a 0.

Effettuiamo ora qualche passaggio matematico a partire dalla relazione appena ottenuta:

$$(q_0 + q_1 s + \ldots + s^n)Y(s) = (p_0 + p_1 s + \ldots + p_m s^m)U(s) \implies$$
$$\implies q_0 Y(s) + q_1 s Y(s) + \ldots + s^n Y(s) = p_0 U(s) + p_1 s U(s) + \ldots + p_m s^m U(s)$$

Poiché, come abbiamo accennato poc'anzi, stiamo supponendo tutte le condizioni iniziali pari a 0, vale che: $\mathcal{L}\left\{\frac{d^k}{dt^k} y(t)\right\} = s^k Y(s)$

Inoltre, già sappiamo che: $\mathcal{L}\left\{\frac{d^k}{dt^k} u(t)\right\} = s^k U(s)$

Per cui, antitrasformando l'espressione precedentemente ottenuta, abbiamo:

$$q_0 y(t) + q_1 \dot{y} + \ldots + y^{(n)} = p_0 u(t) + p_1 \dot{u} + \ldots + p_m u^{(m)}$$

che, insieme alle condizioni iniziali nulle, rappresenta proprio la I-U che cercavamo.

Passaggio da I-U a I-S-U:

Premettiamo che esistono infinite rappresentazioni I-S-U equivalenti a una data rappresentazione I-U. Infatti, a partire dalla I-U:

- Si possono ottenere infinite rappresentazioni I-S-U con porzioni di stato non raggiungibili e/o non osservabili (anche se nella pratica non ha molto senso).
- Si possono ottenere infinite rappresentazioni I-S-U completamente raggiungibili e osservabili, che sono tutte equivalenti tra loro e che differiscono solo per un cambiamento di coordinate.

In particolare, tra tutte queste infinite rappresentazioni I-S-U che differiscono per un cambiamento di coordinate, noi ricaveremo la cosiddetta FORMA CANONICA DI CONTROLLORE.

Consideriamo una rappresentazione I-U caratterizzata da un'equazione del tipo $a_0 y(t) + a_1 \dot{y} + \ldots + a_{n-1} y^{(n-1)} + y^{(n)}(t) = b_0 u(t) + b_1 \dot{u} + \ldots + b_m u^{(m)}(t)$

Poiché abbiamo già osservato che i polinomi:

$$p_a(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n$$

$$p_b(s) = b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \ldots + b_m s^m$$

sono primi tra loro, la funzione di trasferimento è data da:

$$W(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \ldots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \ldots + s^n}$$

e noi saremo in grado di ottenere una rappresentazione I-S-U osservabile (oltre che raggiungibile).

In particolare, la seguente rappresentazione I-S-U con stato di dimensione n ha la stessa funzione di trasferimento W(s):

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Ricordiamo che nella conversione da una rappresentazione all'altra abbiamo le condizioni iniziali tutte poste a zero dato che ci dobbiamo preoccupare solo della risposta forzata.

con:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Se $m < n \Rightarrow C, D$ sono date da:

$$C = [b_0, b_1, b_2, \dots, b_m, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-m-1 \text{ zeri}}] \qquad D = 0$$

- Se $m = n \Rightarrow C, D$ sono date da:

$$C = [b_0 - a_0 b_n, \; b_1 - a_1 b_n, \dots, b_{n-1} - a_{n-1} b_n] \qquad D = b_n$$

Dimostrazione:

$\dot{x} = Ax + Bu \Rightarrow \dot{x}_1 =$ PRIMA RIGA DI A MOLTIPLICATA PER x + PRIMA COMPONENTE DEL VETTORE B MOLTIPLICATO PER u ; e così via

$\Rightarrow \dot{x}_1 = x_2(t), \quad \dot{x}_2 = x_3(t), \dots, \quad \dot{x}_{n-1} = x_n(t),$

$\dot{x}_n = -a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t) - \dots - a_{n-1} x_n(t) + u(t)$

Poiché abbiamo tutte le condizioni iniziali nulle, la trasformata delle prime $n-1$ equazioni sarà:

$$sX_1(s) = X_2(s), \quad sX_2(s) = X_3(s), \dots, \quad sX_{n-1}(s) = X_n(s)$$

Da qui otteniamo: $X_i(s) = s^{i-1} X_1(s) \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$

Perciò, la trasformata dell'ultima equazione sarà:

$$s^n X_1(s) = -a_0 X_1(s) - a_1 s X_1(s) - \dots - a_{n-1} s^{n-1} X_1(s) + U(s)$$

da cui:

$$X_1(s) = \frac{1}{a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n} U(s)$$

CASO $m < n$

$y = Cx + Du \Rightarrow Y(s) = b_0 X_1(s) + b_1 X_2(s) + \dots + b_m X_{m+1}(s)$

Sostituiamo le $X_i(s)$ precedentemente calcolate:

$$Y(s) = (b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m) X_1(s)$$

Sostituiamo ora la $X_1(s)$:

$$Y(s) = \underbrace{\frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n}}_{W(s)} U(s)$$

da cui si vede che la $W(s)$ è proprio quella desiderata.

CASO $m=n$

Chiaramente, se $m=n$, la funzione di trasferimento relativa alla rappresentazione I-U di partenza è:

$$W(s)=\frac{b_0+b_1 s+\dots+b_n s^n}{a_0+a_1 s+\dots+s^n}=$$

$$=b_n+\frac{b_0-a_0 b_n+(b_1-a_1 b_n)s+\dots+(b_{n-1}-a_{n-1}b_n)s^{n-1}}{a_0+a_1 s+\dots+s^n}$$

Per quanto riguarda la rappresentazione I-S-U, la scelta delle matrici A, B, C fornisce:

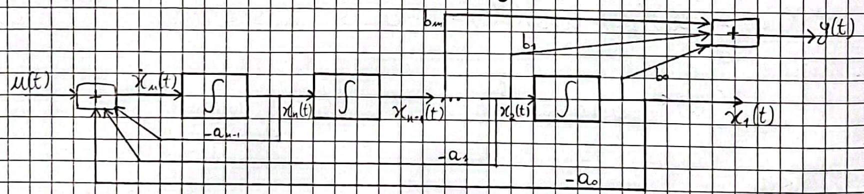
$$C(sI-A)^{-1}B=\frac{b_0-a_0 b_n+(b_1-a_1 b_n)s+\dots+(b_{n-1}-a_{n-1}b_n)s^{n-1}}{a_0+a_1 s+\dots+s^n}$$

È evidente allora che con $D=b_n$ si ottiene:

$$C(sI-A)^{-1}B+D=b_n+\frac{b_0-a_0 b_n+(b_1-a_1 b_n)s+\dots+(b_{n-1}-a_{n-1}b_n)s^{n-1}}{a_0+a_1 s+\dots+s^n}$$

che è proprio la funzione di trasferimento desiderata.

Il sistema relativo a quest'ultima rappresentazione I-S-U che abbiamo ottenuto può, ad esempio, essere descritto con il seguente circuito elettrico:



Esercizio:

Convertire in rappresentazione I-U la rappresentazione I-S-U caratterizzata da:

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}1&0&1\end{bmatrix}\qquad D=1\qquad x_0=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ -1 & s & 0 \\ 0 & 0 & s+1 \end{bmatrix} \qquad |sI-A| = (s+1)(s^2-1) = (s+1)^2(s-1)$$

$$(sI-A)^{-1} = \frac{1}{|sI-A|}\begin{bmatrix} s(s+1) & s+1 & 0 \\ s+1 & s(s+1) & 0 \\ 0 & 0 & (s+1)(s-1) \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)^2(s-1)}\begin{bmatrix} s(s+1) & s+1 & 0 \\ s+1 & s(s+1) & 0 \\ 0 & 0 & (s+1)(s-1) \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(s+1)(s-1)}\begin{bmatrix} s & 1 & 0 \\ 1 & s & 0 \\ 0 & 0 & s-1 \end{bmatrix}$$

B, $Y(s) = C(sI-A)^{-1}x_0 + [C(sI-A)^{-1}B + D]U(s) =$

$$= \frac{1}{(s+1)(s-1)}\begin{bmatrix} s & 1 & s-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{(s+1)(s-1)}\begin{bmatrix} s & 1 & s-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1\right)U(s) =$$

$$= \frac{as + b + c(s-1)}{(s+1)(s-1)} + \left(\frac{s+s-1}{(s+1)(s-1)} + 1\right)U(s) =$$

$$= \frac{(a+c)s + b - c}{(s+1)(s-1)} + \underbrace{\frac{s^2+2s-2}{s^2-1}}_{W(s)}U(s)$$

$W(s) \rightarrow$ Notiamo che ha il grado del denominatore pari a 2, che è minore di $\bar{n} = 3$; ciò implica che la rappresentazione I-S-U di partenza nasconde una porzione di stato non raggiungibile e/o non osservabile.

Nel ricavare la rappresentazione I-U equivalente, consideriamo solo la risposta forzata:

$$Y(s) = W(s)U(s) = \frac{s^2+2s-2}{s^2-1}U(s) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (s^2-1)Y(s) = (s^2+2s-2)U(s) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s^2Y(s) - Y(s) = s^2U(s) + 2sU(s) - 2U(s) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{y} - y = \ddot{u} + 2\dot{u} - 2u$$

Esercizio:

A partire dalla rappresentazione I-U appena calcolata, trovare una rappresentazione I-S-U equivalente tale che sia interamente raggiungibile e osservabile.

$$\ddot{y} - y = \ddot{u} + 2\dot{u} - 2u \quad \Rightarrow \quad s^2Y(s) - sy_0 - \dot{y}_0 - Y(s) = s^2U(s) + 2sU(s) - 2U(s)$$

$$\Rightarrow (s^2-1)Y(s) = sy_0 + \dot{y}_0 + (s^2+2s-2)U(s) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{sy_0 + \dot{y}_0}{s^2-1} + \underbrace{\frac{s^2+2s-2}{s^2-1}}_{W(s)}U(s)$$

La rappresentazione I-S-U equivalente sarà fatta così: 2)

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$D = b_2 = 1$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} b_0 - a_0 b_2 & b_1 - a_1 b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+1\cdot 1 & 2-0\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}$$

16/03/2021

Calcolo della risposta nel dominio del tempo:

Abbiamo visto che:

$$X(s) = \underbrace{(sI-A)^{-1}x_0}_{\text{Razionale strett. propria}} + \underbrace{(sI-A)^{-1}B}_{\text{Razionale strett. propria}} \cdot \overbrace{U(s)}^{\text{Nel nostro corso sarà praticamente sempre una funzione razionale strettam. propria}}$$

VETTORE DI FUNZIONI RAZIONALI STRETTAMENTE PROPRIE

$$Y(s) = \underbrace{C(sI-A)^{-1}x_0}_{\text{Razionale strett. propria}} + \underbrace{\underbrace{[C(sI-A)^{-1}B + D]}_{\text{Razionale propria}} \cdot \underbrace{U(s)}_{\text{Funz. raz. strett. propria}}}_{\text{Razionale strettamente propria}}$$

FUNZIONE (SCALARE) RAZIONALE STRETTAMENTE PROPRIA

Di conseguenza, per passare dal dominio della trasformata al dominio del tempo, ci interessa solo saper calcolare l'antitrasformata di una funzione razionale strettamente propria, ovvero una funzione del tipo:

$$F(s) = \frac{c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + \ldots + c_m s^m}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n} \qquad \text{con } m < n$$

Vediamo nel dettaglio quali sono i passaggi:

1) Si calcolano le radici del polinomio a denominatore di $F(s)$, dette POLI di $F(s)$. La funzione può essere quindi scritta nel seguente modo: 3)

$$F(s) = \frac{c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + \ldots + c_m s^m}{(s-p_1)^{m_1}(s-p_2)^{m_2} \ldots (s-p_k)^{m_k}} \qquad \text{con } \underbrace{m_1 + m_2 + \ldots + m_k}_{\text{MOLTEPLICITÀ DEI POLI}} = n$$

2) Si scompone $F(s)$ in fratti semplici:

$$F(s) = \frac{\alpha_{1,1}}{(s-p_1)} + \frac{\alpha_{1,2}}{(s-p_1)^2} + \dots + \frac{\alpha_{1,m_1}}{(s-p_1)^{m_1}} + \frac{\alpha_{2,1}}{(s-p_2)} + \frac{\alpha_{2,2}}{(s-p_2)^2} + \dots + \frac{\alpha_{2,m_2}}{(s-p_2)^{m_2}} +$$

$$+ \dots + \frac{\alpha_{\ell,1}}{(s-p_\ell)} + \frac{\alpha_{\ell,2}}{(s-p_\ell)^2} + \frac{\alpha_{\ell,m_\ell}}{(s-p_\ell)^{m_\ell}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\alpha_{i,j}}{(s-p_i)^j}$$

Le costanti $\alpha_{i,j}$ vanno calcolate in modo tale che, raccogliendo la sommatoria precedente a fattor comune, a numeratore torni il polinomio $c_0 + c_1 s + \dots + c_m s^m$.
Per far ciò, si può ricorrere alla seguente formula:

$$\alpha_{i,j} = \lim_{s \to p_i} \frac{1}{(m_i - j)!} \frac{d^{m_i - j}}{ds^{m_i - j}} \left[(s-p_i)^{m_i} F(s) \right] \qquad j = 1, 2, \dots, m_i$$

Nel caso di $m_i = 1$, la formula si riduce a:

$$\alpha_{i,1} = \alpha_i = \lim_{s \to p_i} \left[(s-p_i) F(s) \right]$$

→ Verifichiamo che la formula sia valida per $j = m_i$:

$$F(s) = \frac{\alpha_{11}}{s-p_1} + \frac{\alpha_{12}}{(s-p_1)^2} + \dots + \frac{\alpha_{1,m_1-1}}{(s-p_1)^{m_1-1}} + \frac{\alpha_{1,m_1}}{(s-p_1)^{m_1}} + \text{TERMINI RELATIVI AD ALTRI POLI}$$

$$\xrightarrow{\text{MOLTIPLICHIAMO PER } (s-p_1)^{m_1}} \alpha_{11}(s-p_1)^{m_1-1} + \alpha_{12}(s-p_1)^{m_1-2} + \dots + \alpha_{1,m_1-1}(s-p_1) + \alpha_{1m_1} + \text{TERMINI RELATIVI AD ALTRI POLI MOLTIPLICATI PER } (s-p_1)^{m_1}$$

$$\xrightarrow{s \to p_1} \alpha_{1,m_1} \quad \checkmark$$

→ Verifichiamo ora che la formula sia valida per $j = m_1 - 1$:

$$(s-p_1)^{m_1} F(s) = \alpha_{11}(s-p_1)^{m_1-1} + \alpha_{12}(s-p_1)^{m_1-2} + \dots + \alpha_{1,m_1-1}(s-p_1) + \alpha_{1m_1} + \text{TERMINI RELATIVI AD ALTRI POLI MOLTIPLICATI PER } (s-p_1)^{m_1}$$

$$\xrightarrow{\text{DERIVIAMO RISPETTO A } s} (m_1-1)\alpha_{11}(s-p_1)^{m_1-2} + (m_1-2)\alpha_{12}(s-p_1)^{m_1-3} + \dots + \alpha_{1,m_1-1} + \text{TERMINI RELATIVI AD ALTRI POLI MOLTIPLICATI PER } m_1(s-p_1)^{m_1-1}$$

$$\xrightarrow{s \to p_1} \alpha_{1,m_1-1} \quad \checkmark$$

3) Si antitrasformano i singoli fratti semplici $\frac{\alpha_{i,j}}{(s-p_i)^j}$. → Costante rispetto a s

- SAPPIAMO CHE: $\mathcal{L}\left\{ \frac{t^h}{h!} \delta_{-1}(t) \right\} = \frac{1}{s^{h+1}}$
- PROPRIETÀ DELLA TRASLAZIONE COMPLESSA: $\mathcal{L}\left\{ e^{\alpha t} x(t) \right\} = X(s-\alpha)$

$$\Longrightarrow \mathcal{L}\left\{e^{\alpha t}\frac{t^h}{h!}\delta_{-1}(t)\right\} = \frac{1}{(s-\alpha)^{h+1}}$$

$$\Longrightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-p_i)^j}\right\} = e^{p_i t}\frac{t^{j-1}}{(j-1)!}\delta_{-1}(t)$$

In definitiva, l'antitrasformata di $F(s)$ sarà pari a:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{m_i}\alpha_{ij}\frac{t^{j-1}}{(j-1)!}e^{p_i t}\delta_{-1}(t)$$

- Se i poli p_i sono tutti reali, quest'ultima è proprio la soluzione finale cercata.
- In caso contrario, occorre manipolare un pochino la formula sfruttando il fatto che, se un numero complesso è una radice di un dato polinomio, allora lo è anche il suo coniugato; ed è proprio per questo motivo che $f(t)$ è sempre esprimibile con una funzione strettamente reale, ma i passaggi per farlo li analizzeremo successivamente.

Esercizio:

Calcolare la risposta nell'uscita $y(t)$ del sistema lineare stazionario descritto dalla seguente rappresentazione I-U:

$$\begin{cases}\ddot{y} + 4\dot{y} + 3y = u \\ y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0\end{cases} \qquad \text{con } u(t) = t^2\delta_{-1}(t)$$

Applichiamo la trasformata:

$$s^2Y(s) - sy_0 - y_0' + 4(sY(s) - y_0) + 3Y(s) = U(s) \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (s^2+4s+3)Y(s) = (s+4)y_0 + y_0' + U(s) \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow Y(s) = \underbrace{\frac{(s+4)y_0 + y_0'}{s^2+4s+3}}_{Y_\ell(s)} + \underbrace{\frac{1}{s^2+4s+3}U(s)}_{Y_f(s)}$$

$$U(s) = \mathcal{L}\{t^2\delta_{-1}(t)\} = \frac{2}{s^3}$$

$$\Longrightarrow Y_f(s) = \frac{1}{s^2+4s+3}\cdot\frac{2}{s^3} = \frac{2}{s^3(s+3)(s+1)} \quad\leadsto\quad \begin{array}{ll} p_1 = 0 & m_1 = 3 \\ p_2 = -1 & m_2 = 1 \\ p_3 = -3 & m_3 = 1 \end{array}$$

Sviluppando in fratti semplici otteniamo:

$$Y(s) = \alpha_{1,1}\frac{1}{s} + \alpha_{1,2}\frac{1}{s^2} + \alpha_{1,3}\frac{1}{s^3} + \alpha_{2,1}\frac{1}{s+1} + \alpha_{3,1}\frac{1}{s+3}$$

$\boxed{p_1 = 0}$

$$\alpha_{13} = \lim_{s\to 0} s^3 \cdot \frac{2}{s^3(s+1)(s+3)} = \frac{2}{3}$$

$$\alpha_{12} = \lim_{s\to 0} \frac{d}{ds} s^3 \cdot \frac{2}{s^3(s+1)(s+3)} = \lim_{s\to 0} \frac{d}{ds} \frac{2}{s^2+4s+3} = -\lim_{s\to 0} \frac{2(2s+4)}{(s^2+4s+3)^2} = -\frac{8}{9}$$

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2}\lim_{s\to 0} \frac{d^2}{ds^2} \frac{2}{s^2+4s+3} = -\frac{1}{2}\lim_{s\to 0} \frac{d}{ds} \frac{4(s+2)}{(s^2+4s+3)^2} = \frac{26}{27}$$

$\boxed{p_2 = -1}$

$$\alpha_{21} = \lim_{s\to -1} (s+1) \frac{2}{s^3(s+1)(s+3)} = \frac{2}{-2} = -1$$

$\boxed{p_3 = -3}$

$$\alpha_{31} = \lim_{s\to -3} (s+3) \frac{2}{s^3(s+1)(s+3)} = \frac{2}{-27(-2)} = \frac{1}{27}$$

$$\Longrightarrow Y_f(s) = \frac{26}{27}\frac{1}{s} - \frac{8}{9}\frac{1}{s^2} + \frac{2}{3}\frac{1}{s^3} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{27}\frac{1}{s+3}$$

$$\Longrightarrow y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_f(s)\} = \left(\frac{26}{27} - \frac{8}{9}t + \frac{2}{3}\cdot\frac{t^2}{2} - e^{-t} + \frac{1}{27}e^{-3t}\right)\delta_{-1}(t)$$

Per $t\to 0$, questa funzione e la sua derivata tendono a 0, com'è giusto che sia

Effettuando conti del tutto analoghi sulla risposta libera otteniamo che:

$$y_\ell(t) = \frac{1}{2}\left[(3y_0 + y_0')e^{-t} - (y_0 + y_0')e^{-3t}\right]\delta_{-1}(t)$$

$\longrightarrow$ Per $t\to 0$, questa funzione tende a y_0, mentre la sua derivata tende a y_0', com'è giusto che sia (*)

Infine, per ottenere la risposta completa $y(t)$, basta sommare $y_f(t)$ con $y_\ell(t)$.

Esercizio:

Determinare una rappresentazione I-S-U equivalente alla rappresentazione I-U dell'esercizio precedente.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

NOTIAMO CHE $m = 0 < n = 2$

Questo vale solo x la rappresentaz. I-U (nella I-S-U non ci sono problemi)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

(*) ATTENZIONE ⚠ La continuità dell'uscita y e delle sue derivate tra l'istante $t=0$ (condiz. iniziali) e gli istanti immediatam. successivi ($t\to 0^+$), ovvero la condizione per cui $y(0) = y(t\to 0^+)$, $\dot{y}(0) = \dot{y}(t\to 0^+)$, ..., è garantita solo se nella rappresentazione IU la funzione $u(t)$ compare senza le sue derivate.
Infatti, se comparissero delle derivate di u nell'equaz., tra l'istante $t=0$ e $t\to 0^+$ si avrebbero degli impulsi che renderebbero discontinue le derivate di y (ed eventualm. la y)

18/03/2021

Mettiamoci nel dominio della trasformata e consideriamo una funzione razionale strettamente propria del tipo:

$$F(s) = \frac{c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + \dots + c_m s^m}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n}$$

$$p_A(s) := a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n = (s-p_1)^{m_1} (s-p_2)^{m_2} \dots (s-p_\ell)^{m_\ell}$$

Supponiamo che $F(s)$ abbia almeno un polo complesso, cioè almeno una radice p_i del polinomio $p_A(s)$ appartenente a $\mathbb{C}$, con $p_i = \alpha + j\omega$. Poiché $p_A(s)$ ha tutti i coefficienti reali, se ammette una radice complessa p_i con molteplicità m_i ammetterà anche la sua complessa coniugata $p_h = p_i^* = \alpha - j\omega$ con la stessa molteplicità $m_h = m_i$. Consideriamo quindi i coefficienti α_{ij} dei fratti semplici relativi al polo p_i e i coefficienti α_{hj} dei fratti semplici relativi al polo p_h. Si ha che:

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{(m_i - j)!} \lim_{s \to p_i} \frac{d^{m_i - j}}{ds^{m_i - j}} \left[(s-p_i)^{m_i} F(s) \right] \qquad j = 1, 2, \dots, m_i$$

$$\alpha_{hj} = \frac{1}{(m_h - j)!} \lim_{s \to p_h} \frac{d^{m_h - j}}{ds^{m_h - j}} \left[(s-p_h)^{m_h} F(s) \right] = \alpha_{ij}^* \qquad j = 1, 2, \dots, m_h$$

$\boxed{\text{CASO } m_i = m_h = 1}$

Siano $p_i = \alpha + j\omega$, $p_h = p_i^* = \alpha - j\omega$, e siano $\alpha_i = a + jb$, $\alpha_h = \alpha_i^* = a - jb$ i coefficienti relativi rispettivamente ai termini $1/s-p_i$, $1/s-p_h$. Nello sviluppo in fratti semplici di $F(s)$ comparirà quindi una coppia di termini del tipo:

$$F_{i,h}(s) = \frac{a + jb}{s - (\alpha + j\omega)} + \frac{a - jb}{s - (\alpha - j\omega)}$$

Antitrasformando: $f_{i,h}(t) = \left[(a+jb) e^{(\alpha + j\omega)t} + (a-jb) e^{(\alpha - j\omega)t} \right] \delta_{-1}(t) =$

$= e^{\alpha t} \left[(a+jb) e^{j\omega t} + (a-jb) e^{-j\omega t} \right] \delta_{-1}(t) = e^{\alpha t} \left[a (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) + jb (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \right] \delta_{-1}(t) =$

$= e^{\alpha t} \left[a \cdot 2 \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} + jb \cdot 2j \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \right] \delta_{-1}(t) =$

$= 2 e^{\alpha t} \left[a \cos(\omega t) - b \cdot \sin(\omega t) \right] \delta_{-1}(t)$

Se invece avessimo scritto α_i, α_h in forma polare ($\alpha_i = a + jb = M e^{j\phi}$;

$\alpha_h = a - jb = Me^{-j\phi}$), avremmo ottenuto:

$$f_{i,h}(t) = \left[Me^{j\phi}e^{(\alpha+j\omega)t} + Me^{-j\phi}e^{(\alpha-j\omega)t}\right]\delta_{-1}(t) =$$

$$= Me^{\alpha t}\left[e^{j(\omega t+\phi)} + e^{-j(\omega t+\phi)}\right]\delta_{-1}(t) =$$

$$= Me^{\alpha t}\cdot 2\,\frac{e^{j(\omega t+\phi)} + e^{-j(\omega t+\phi)}}{2}\,\delta_{-1}(t) = 2Me^{\alpha t}\cos(\omega t+\phi)\,\delta_{-1}(t)$$

$\boxed{\text{CASO } m_i = m_h > 1}$

Stavolta, nello sviluppo in fratti semplici di $F(s)$ comparirà una coppia di termini del tipo:

$$F_{ih,J}(s) = \frac{a_{iJ} + jb_{iJ}}{[s-(\alpha+j\omega)]^J} + \frac{a_{iJ} - jb_{iJ}}{[s-(\alpha-j\omega)]^J} \qquad \text{per qualche } J \leq m_i = m_h$$

Antitrasformando:

$$f_{ih,J}(t) = \left[(a_{iJ}+jb_{iJ})\frac{t^{J-1}}{(J-1)!}e^{(\alpha+j\omega)t} + (a_{iJ}-jb_{iJ})\frac{t^{J-1}}{(J-1)!}e^{(\alpha-j\omega t)}\right]\delta_{-1}(t)$$

Notiamo che, a meno di un fattore $\frac{t^{J-1}}{(J-1)!}$, l'espressione di $f_{ih,J}(t)$ è perfettamente uguale a quella di $f_{i,h}(t)$ del caso $m_i = m_h = 1$. Perciò, applicando gli stessi passaggi matematici di prima, otteniamo le seguenti due espressioni:

$$f_{ih,J}(t) = 2e^{\alpha t}\frac{t^{J-1}}{(J-1)!}\left[a_{iJ}\cos(\omega t) - b_{iJ}\sin(\omega t)\right]\delta_{-1}(t)$$

$$f_{ih,J}(t) = 2M_{iJ}\frac{t^{J-1}}{(J-1)!}e^{\alpha t}\cos(\omega t+\phi_{iJ})\,\delta_{-1}(t)$$

Esercizio:

Calcolare l'antitrasformata della funzione $F_1(s) = \frac{1}{s^2+2}$.

$s^2+2=0 \Longrightarrow s_{1,2} = \pm j\sqrt{2} \Longrightarrow p_1 = j\sqrt{2} = \alpha + j\omega$ con $\alpha = 0$, $\omega = \sqrt{2}$; $\quad m_1 = 1$

$$F_1(s) = \frac{\alpha_1}{s-j\sqrt{2}} + \frac{\alpha_2}{s+j\sqrt{2}}$$

$$\alpha_1 = \lim_{s\to j\sqrt{2}}(s-j\sqrt{2})\cdot\frac{1}{(s-j\sqrt{2})(s+j\sqrt{2})} = \frac{1}{2j\sqrt{2}} = -\frac{j}{2\sqrt{2}}\;; \qquad \alpha_2 = \alpha_1^* = \frac{j}{2\sqrt{2}}$$

- Se utilizziamo la forma cartesiana ($\alpha_1 = a+jb$, $a=0$, $b = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$):

$$f_1(t) = 2e^{\alpha t}[a\cos(\omega t) - b\sin(\omega t)]\,\delta_{-1}(t) = 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t)\,\delta_{-1}(t) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t)\,\delta_{-1}(t)$$

- Se utilizziamo la forma polare ($\alpha_1 = Me^{j\phi}$, $M = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $\phi = -\pi/2$):

$$f_1(t) = 2Me^{\alpha t}\cos(\omega t + \phi)\,\delta_{-1}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\sqrt{2}t - \pi/2)\,\delta_{-1}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t)\,\delta_{-1}(t)$$

Esercizio:

Calcolare l'antitrasformata della seguente funzione propria ma non strettamente propria:

$$F_3(s) = \frac{s^2+3}{(s+2)(s+1)}$$

È sempre possibile scrivere una funzione propria non strettamente come somma tra una costante e una funzione strettamente propria:

$$F_3(s) = c + \underbrace{\tilde{F}_3(s)}_{\text{strettamente propria}}$$

dove $c = \lim_{s\to\infty} F_3(s) = 1$ nel nostro esempio

$$\Rightarrow \tilde{F}_3(s) = F_3(s) - c = \frac{s^2+3}{s^2+3s+2} - 1 = \frac{s^2+3-s^2-3s-2}{s^2+3s+2} = \frac{-3s+1}{(s+2)(s+1)} =$$
$$= \frac{\alpha_{11}}{s+2} + \frac{\alpha_{21}}{s+1}$$

$$\alpha_{11} = \lim_{s\to-2}(s+2)\tilde{F}_3(s) = \lim_{s\to-2}\frac{-3s+1}{s+1} = -7$$

$$\alpha_{21} = \lim_{s\to-1}(s+1)\tilde{F}_2(s) = \lim_{s\to-1}\frac{-3s+1}{s+2} = 4$$

$$\Rightarrow \tilde{F}_3(s) = -\frac{7}{s+2} + \frac{4}{s+1} \Rightarrow \tilde{f}_3(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\tilde{F}_3(s)\} = (-7e^{-2t} + 4e^{-t})\,\delta_{-1}(t)$$

$$\Rightarrow f_3(t) = \mathcal{L}^{-1}\{c\} + \tilde{f}_3(t) = c\,\delta_0(t) + \tilde{f}_3(t) = \delta_0(t) + (-7e^{-2t} + 4e^{-t})\,\delta_{-1}(t)$$

Esercizio:

Si consideri una rappresentazione I-S-U caratterizzata dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = [a \;\; b] \qquad D = 0$$

con $a, b \in \mathbb{R}$

- Calcolare la funzione di trasferimento $W(s)$.
- Dire per quali valori di a, b la $W(s)$ non rappresenta tutto il sistema (e si hanno dunque parti non raggiungibili e/o non osservabili).

$$sI - A = \begin{bmatrix} s+1 & -2 \\ -1 & s \end{bmatrix}$$

$$(sI-A)^{-1} = \frac{1}{|sI-A|} \begin{bmatrix} s & 2 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2+s-2} \begin{bmatrix} s & 2 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix}$$

$$W(s) = C(sI-A)^{-1}B + D = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \frac{1}{s^2+s-2} \begin{bmatrix} s & 2 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 =$$

$$= \frac{1}{s^2+s-2} \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{as+b}{s^2+s-2} = \frac{as+b}{(s+2)(s-1)}$$

$$\rightarrow b = 2a \Rightarrow W(s) = \frac{a(s+2)}{(s+2)(s-1)} = \frac{a}{s-1}$$

$$\rightarrow b = -a \Rightarrow W(s) = \frac{a(s-1)}{(s+2)(s-1)} = \frac{a}{s+2}$$

La $W(s)$ non rappresenta completamente il sistema se si hanno cancellazioni tra numeratore e denominatore, pertanto se $b = 2a$ oppure se $b = -a$.

22/03/2021

Esercizio:

Calcolare l'antitrasformata della funzione $F(s) = \frac{1}{(s^2+2)^2}$.

$\alpha = 0,\ \omega = \sqrt{2}$

$p_1 = j\sqrt{2}$ $\quad m_1 = 2$ $\qquad p_2 = -j\sqrt{2}$ $\quad m_2 = 2$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{1}{(s-j\sqrt{2})^2(s+j\sqrt{2})^2} = \frac{\alpha_{11}}{(s-j\sqrt{2})} + \frac{\alpha_{12}}{(s-j\sqrt{2})^2} + \frac{\alpha_{21}}{(s+j\sqrt{2})} + \frac{\alpha_{22}}{(s+j\sqrt{2})^2}$$

$$\alpha_{12} = \lim_{s \to j\sqrt{2}} \frac{\cancel{(s-j\sqrt{2})^2}}{\cancel{(s-j\sqrt{2})^2}(s+j\sqrt{2})^2} = \frac{1}{(2j\sqrt{2})^2} = -\frac{1}{8} \Rightarrow a_2 = -1/8,\ b_2 = 0$$

$$\alpha_{11} = \lim_{s \to j\sqrt{2}} \frac{d}{ds} \frac{1}{(s+j\sqrt{2})^2} = \lim_{s \to j\sqrt{2}} \frac{-2(s+j\sqrt{2})}{(s+j\sqrt{2})^{\cancel{4}\,3}} = -\frac{2}{(2j\sqrt{2})^3} = \frac{-j}{8\sqrt{2}} \Rightarrow \begin{matrix} a_1 = 0 \\ b_1 = -\frac{1}{8\sqrt{2}} \end{matrix}$$

Scriviamo $F(s)$ nel seguente modo:

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) = \mathcal{L}\{f_1(t)\} + \mathcal{L}\{f_2(t)\} = \left(\frac{\alpha_{11}}{s-j\sqrt{2}} + \frac{\alpha_{21}}{s+j\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{\alpha_{12}}{(s-j\sqrt{2})^2} + \frac{\alpha_{22}}{(s+j\sqrt{2})^2}\right)$$

Inoltre sappiamo che: $\quad f_J(t) = 2e^{\alpha t} \frac{t^{J-1}}{(J-1)!} \left[a_J \cos(\omega t) - b_J \sin(\omega t)\right] \delta_{-1}(t)$

$$f_1(t) = 2\left[\frac{1}{8\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t)\right]\delta_{-1}(t) = \frac{1}{4\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t)\,\delta_{-1}(t)$$

$$f_2(t) = 2t\left[-\frac{1}{8}\cos(\sqrt{2}t)\right]\delta_{-1}(t) = -\frac{1}{4}t\cos(\sqrt{2}t)\,\delta_{-1}(t)$$

$$\Rightarrow f(t) = f_1(t)+f_2(t) = \left[\frac{1}{4\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t) - \frac{1}{4}t\cos(\sqrt{2}t)\right]\delta_{-1}(t)$$

23/03/2021

Cambiamenti di coordinate nello spazio di stato:

La rappresentazione ISU di un sistema lineare può essere scritta utilizzando diverse basi per lo spazio di stato.

Si consideri quindi il cambiamento di coordinate $z = Tx$, dove T è una matrice invertibile. T può essere calcolata a partire dagli elementi della nuova base, cioè quella rispetto a cui si vuole scrivere la rappresentazione. Infatti, se gli elementi di questa base sono $u_1, u_2, \dots, u_n$, la matrice T^{-1} ha per colonne proprio gli elementi u_i della nuova base rispetto alla vecchia (generalmente rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$).

$\rightsquigarrow$ SE $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, SI AVRÀ CHE:

$$Tu_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad Tu_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{i-esima posiz.}$$

$$\Rightarrow T\underbrace{\begin{bmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}}_{T^{-1}} = I$$

$\rightsquigarrow$ T SARÀ DUNQUE LA MATRICE CHE PERMETTE DI CALCOLARE LE COORDINATE RISPETTO ALLA NUOVA BASE, NOTE LE COORDINATE RISPETTO ALLA BASE PRECEDENTE.

Ora, siano A, B, C, D le matrici della rappresentazione ISU nella base precedente, cioè le matrici tali che:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Si vuole dunque determinare l'espressione delle matrici $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$ che caratterizzano la descrizione rispetto alla nuova base, cioè le matrici tali che:

$$\begin{cases} \dot{z} = \bar{A}z + \bar{B}u \\ y = \bar{C}z + \bar{D}u \end{cases}$$

Per ricavarle, basta applicare il cambiamento di coordinate, tenendo presente che $z = Tx \Rightarrow x = T^{-1}z$:

$$\dot{z} = T\dot{x} = T(Ax + Bu) = TAx + TBu = TAT^{-1}z + TBu = \bar{A}z + \bar{B}u$$

$$\Rightarrow \bar{A} = TAT^{-1}, \quad \bar{B} = TB$$

$$y = Cx + Du = CT^{-1}z + Du = \bar{C}z + \bar{D}u \quad \Rightarrow \bar{C} = CT^{-1}, \quad \bar{D} = D$$

Riconsideriamo ora le matrici di transizione dello stato e delle risposte impulsive nello stato:

$$\phi(t) = e^{At} \qquad H(t) = e^{At}B$$

Nella nuova base si ha:

$$\bar{\phi}(t) = T\phi(t)T^{-1} \qquad \bar{H}(t) = TH(t)$$

Dimostrazione:

- $\bar{\phi}(t) = e^{\bar{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{A}^k \frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} (TAT^{-1})^k \frac{t^k}{k!} = T\left(\sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^k}{k!}\right)T^{-1} = Te^{At}T^{-1} =$
  $= T\phi(t)T^{-1}$
- $\bar{H}(t) = e^{\bar{A}t}\bar{B} = Te^{At}T^{-1}TB = Te^{At}B = TH(t)$

Per quanto riguarda l'uscita, si hanno le matrici Ψ, W:

$$\Psi(t) = C\phi(t) = Ce^{At}$$

$$W(t) = CH(t) + D\delta_0(t) = Ce^{At}B + D\delta_0(t)$$

Queste matrici nella nuova base diventano:

$$\bar{\Psi}(t) = \Psi(t)T^{-1} \qquad \bar{W}(t) = W(t)$$

Dimostrazione:

- $\bar{\Psi}(t) = \bar{C}e^{\bar{A}t} = CT^{-1}Te^{At}T^{-1} = Ce^{At}T^{-1} = \Psi(t)T^{-1}$
- $\bar{W}(t) = \bar{C}e^{\bar{A}t}\bar{B} + \bar{D}\delta_0(t) = CT^{-1}Te^{At}T^{-1}TB + D\delta_0(t) = Ce^{At}B + D\delta_0(t) =$
  $= W(t)$

Consideriamo ora l'espressione della risposta libera nel tempo e quella nel dominio della trasformata:

$x_\ell(t) = e^{At}x_0$ $\qquad\qquad$ $X_\ell(s) = (sI-A)^{-1}x_0$

$\Rightarrow X_\ell(s) = \mathcal{L}\{x_\ell(t)\} = \mathcal{L}\{e^{At}x_0\} = \mathcal{L}\{e^{At}\}x_0$

$\Rightarrow \mathcal{L}\{e^{At}\} = (sI-A)^{-1} \quad \Rightarrow e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}$

A questo punto è immediato ricavare la trasformata delle funzioni matriciali richiamate poc'anzi:

$$\Phi(s) = \mathcal{L}\{\phi(t)\} = (sI-A)^{-1}$$
$$H(s) = \mathcal{L}\{H(t)\} = (sI-A)^{-1}B$$
$$\Psi(s) = \mathcal{L}\{\Psi(t)\} = C(sI-A)^{-1}$$
$$W(s) = \mathcal{L}\{W(t)\} = C(sI-A)^{-1}B+D$$

Sfruttando le uguaglianze appena ottenute, prendiamo l'espressione della risposta forzata nello stato e della sua trasformata:

$x_f(t) = \int_0^t H(t-\tau)u(\tau)d\tau$ $\qquad\qquad$ $X_f(s) = (sI-A)^{-1}BU(s) = H(s)U(s)$

Da qui, si può ricavare la seguente proprietà della trasformata di Laplace:
Siano $f(t)$, $g(t)$ due funzioni con trasformata di Laplace rispettivamente $F(s)$, $G(s)$. Allora, la trasformata di Laplace del loro integrale di convoluzione

$$I_c(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

è il prodotto delle loro trasformate, e cioè: $\quad \mathcal{L}\{I_c(t)\} = F(s)G(s)$

Ovviamente lo stesso discorso si applica sulla risposta forzata in uscita, ovvero sulla funzione $W(t)$:

$$\mathcal{L}\{y_f(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t W(t-\tau)u(\tau)d\tau\right\} = W(s)U(s) = \left[C(sI-A)^{-1}B+D\right]U(s) = Y_f(s)$$

A questo punto è molto facile ricavare l'espressione in s delle funzioni ϕ, H, Ψ, W nella nuova base:

$\bar{\phi}(s) = \mathcal{L}\{\bar{\phi}(t)\} = \mathcal{L}\{T\phi(t)T^{-1}\} = T\mathcal{L}\{\phi(t)\}T^{-1} = T\phi(s)T^{-1}$
$\bar{H}(s) = \mathcal{L}\{\bar{H}(t)\} = \mathcal{L}\{TH(t)\} = T\mathcal{L}\{H(t)\} = TH(s)$
$\bar{\Psi}(s) = \mathcal{L}\{\bar{\Psi}(t)\} = \mathcal{L}\{\Psi(t)T^{-1}\} = \mathcal{L}\{\Psi(t)\}T^{-1} = \Psi(s)T^{-1}$
$\bar{W}(s) = \mathcal{L}\{\bar{W}(t)\} = \mathcal{L}\{W(t)\} = W(s)$

Notiamo come i due sistemi, rispettivamente relativi alle vecchie e alle nuove coordinate, presentano la stessa funzione di trasferimento ($\bar{W} \equiv W$) e quindi lo stesso legame ingresso-uscita. Inoltre lo stato, anche se descritto in due basi diverse, si muove nello stesso spazio ed è caratterizzato dagli stessi autovalori, e presenta dunque le stesse risposte libere. Infatti, il polinomio caratteristico di A è lo stesso di quello di $\bar{A}$:

$$p_{\bar{A}}(\lambda) = \det(\lambda I - \bar{A}) = \det(\lambda TT^{-1} - TAT^{-1}) = \det[T(\lambda I - A)T^{-1}] =$$
$$= \det(T)\det(\lambda I - A)\det(T^{-1}) = \det(T)\det(\lambda I - A)\frac{1}{\det(T)} = \det(\lambda I - A) = p_A(\lambda)$$

24/03/2021

Analisi modale:

Anche se questo argomento vale in generale, noi lo presenteremo nel caso semplificato in cui la matrice dinamica A sia diagonalizzabile, cioè esiste un cambiamento di coordinate $z = Tx$ tale che la matrice $\bar{A} = TAT^{-1}$ è diagonale. Ricordiamo che A è diagonalizzabile se e solo se la molteplicità algebrica degli autovalori di A coincide con la loro molteplicità geometrica.

QUALCHE RICHIAMO DI ALGEBRA LINEARE:

Sia $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_e)^{m_e}$ il polinomio caratteristico di A. Le sue radici λ_i sono gli autovalori di A e gli esponenti m_i sono le loro molteplicità algebriche.

Ricordiamo che un autovalore di A è un numero $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che esiste un vettore non nullo w, detto autovettore (destro) di A, per cui $Aw = \lambda w$.

Definiamo molteplicità geometrica la seguente quantità:

$\mu = \bar{n} - r$, dove $\bar{n}$ è la dimensione di A e $r = \text{rango}(A - \lambda I)$

Nella pratica, la molteplicità geometrica μ dell'autovalore λ è la dimensione dell'autospazio di A costituito da una base di autovettori (indipendenti) relativi a λ. In altre parole, il numero dei vettori indipendenti w tali che $(A-\lambda I)w=0$ è proprio pari a $\bar{n}-r_0=\mu$.

Ricordiamo anche che l'asserzione $1 \le \mu_i \le m_i$ è sempre vera, per qualunque autovalore λ_i.

Inoltre, come dicevamo poco fa, A è diagonalizzabile $\Leftrightarrow m_i=\mu_i \ \forall i$. Infatti, sotto questa ipotesi, si ha che $\sum_{i=1}^{l} m_i = \bar{n} \Rightarrow \sum_{i=1}^{l} \mu_i = \bar{n}$ (dove l è il numero di autovalori distinti di A).

A questo punto, è possibile costruire una matrice T^{-1} siffatta:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} w_{11} \dots w_{1\mu_1} & w_{21} \dots w_{2\mu_2} & \dots & w_{l1} \dots w_{l\mu_l} \end{bmatrix}$$

Per semplificare la trattazione, poniamoci nel caso particolare in cui $\forall i \ m_i=\mu_i=1$. In tal modo, T^{-1} può essere espressa così:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_{\bar{n}} \end{bmatrix}$$

PER LA DEFINIZIONE DI AUTOVALORE

$$\Rightarrow AT^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 w_1 & \lambda_2 w_2 & \dots & \lambda_{\bar{n}} w_{\bar{n}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_{\bar{n}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{\bar{n}} \end{bmatrix} = T^{-1}\Lambda$$

$$\Rightarrow TAT^{-1} = \Lambda \quad \Rightarrow TAT^{-1}T = \Lambda T \Rightarrow TA = \Lambda T, \quad \text{dove}$$

$$T = \begin{bmatrix} - v_1^T - \\ - v_2^T - \\ \vdots \\ - v_{\bar{n}}^T - \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow TA = \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_{\bar{n}}^T \end{bmatrix} A = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{\bar{n}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_{\bar{n}}^T \end{bmatrix}}_{\Lambda T} = \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1^T \\ \lambda_2 v_2^T \\ \vdots \\ \lambda_{\bar{n}} v_{\bar{n}}^T \end{bmatrix} \Rightarrow v_i^T A = \lambda_i v_i^T$$

$\Rightarrow$ I vettori $v_1, v_2, \dots, v_{\bar{n}}$ sono dunque gli AUTOVETTORI SINISTRI di A.

In particolare:

$$I = TT^{-1} = \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_{\bar{n}}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_{\bar{n}} \end{bmatrix} \Rightarrow v_i^T w_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

DELTA DI KRONECKER

Decomposizione spettrale:

Riutilizziamo qualche risultato ottenuto precedentemente:

$$TAT^{-1} = \Lambda \Rightarrow T^{-1}TAT^{-1}T = T^{-1}\Lambda T \Rightarrow A = T^{-1}\Lambda T =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 w_1 & \lambda_2 w_2 & \dots & \lambda_{\bar{n}} w_{\bar{n}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_{\bar{n}}^T \end{bmatrix}}_{\text{MATRICE IL CUI ELEMENTO } ij \text{ È PARI A } \sum_{k=1}^{\bar{n}} \lambda_k w_{ki} v_{kj}} = \underbrace{\sum_{k=1}^{\bar{n}} \lambda_k w_k v_k^T}_{\text{MATRICE IL CUI ELEMENTO } ij \text{ È PARI A } \sum_{k=1}^{\bar{n}} \lambda_k w_{ki} v_{kj}} = \text{DECOMPOSIZ. SPETTRALE DI } A$$

Proviamo ora a calcolare la decomposizione spettrale di A^2:

$$A^2 = (\lambda_1 w_1 v_1^T + \lambda_2 w_2 v_2^T + \dots + \lambda_{\bar{n}} w_{\bar{n}} v_{\bar{n}}^T)(\lambda_1 w_1 v_1^T + \lambda_2 w_2 v_2^T + \dots + \lambda_{\bar{n}} w_{\bar{n}} v_{\bar{n}}^T) =$$

$$= \lambda_1^2 w_1 v_1^T w_1 v_1^T + \lambda_1\lambda_2 w_1 v_1^T w_2 v_2^T + \dots = \lambda_1^2 w_1 \delta_{11} v_1^T + \lambda_1\lambda_2 w_1 \delta_{12} v_2^T + \dots =$$

$$= \lambda_1^2 w_1 \cdot 1 \cdot v_1^T + \lambda_1\lambda_2 w_1 \cdot 0 \cdot v_2^T + \dots = \sum_{k=1}^{\bar{n}} \lambda_k^2 w_k v_k^T$$

Allo stesso modo, è possibile verificare che:

$$A^k = \sum_{i=1}^{\bar{n}} \lambda_i^k w_i v_i^T$$

A questo punto è abbastanza semplice calcolare la decomposizione spettrale anche di e^{At}:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\bar{n}} \lambda_i^k w_i v_i^T \right) \frac{t^k}{k!} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\bar{n}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_i^k \frac{t^k}{k!} \right) w_i v_i^T = \sum_{i=1}^{\bar{n}} e^{\lambda_i t} w_i v_i^T$$

L'importanza della decomposizione spettrale della matrice esponenziale sta nel fornire un interessantissimo strumento di analisi dell'evoluzione libera di un sistema lineare. Infatti:

$$x_\ell(t) = e^{At} x_0 = \sum_{i=1}^{\bar{n}} e^{\lambda_i t} w_i v_i^T x_0 = \sum_{i=1}^{\bar{n}} e^{\lambda_i t} w_i c_i \quad \text{, dove } c_i = v_i^T x_0 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow T x_0 = \begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_{\bar{n}}^T \end{bmatrix} x_0 = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{\bar{n}} \end{bmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ NOTIAMO CHE, PER $t=0$, $x_\ell(t=0) = x_0 = \sum_{i=1}^{\bar{n}} w_i c_i$

Le componenti di x_0 lungo gli autospazi di A evolvono indipendentemente l'una dall'altra, ciascuna secondo il modo descritto dall'autovalore dell'autospazio corrispondente. Questi modi sono detti MODI NATURALI del sistema: il modo ha

turale relativo a λ_i, caratterizzato da una legge di moto $e^{\lambda_i t}$, risulta effettivamente presente (= "acceso") nella risposta libera se le condizioni iniziali x_0 hanno una componente non nulla lungo l'autospazio relativo a λ_i, cioè lungo w_i (ossia se $c_i \neq 0$).
↳ SEMPRE NEL CASO DI $m_i = \mu_i = 1$

25/03/2021

Come nel caso dell'antitrasformata di una funzione razionale propria, l'espressione di $x_\ell(t)$ scritta in termini della decomposizione spettrale di e^{At} è reale ma potrebbe presentare dei termini complessi che è opportuno rimaneggiare. In particolare, ciò si verifica quando qualche autovalore di A è complesso.
In tal caso, poiché il polinomio caratteristico di A ha coefficienti reali, se $\lambda = \sigma + j\omega \in \mathbb{C}$ è autovalore di A allora anche il suo complesso coniugato, cioè $\lambda^* = \sigma - j\omega$ è autovalore di A. Inoltre, se $w = w_a + j w_b$ è autovettore relativo a λ, allora il complesso coniugato di w, cioè $w^* = w_a - j w_b$ è autovettore relativo a λ^*. Infatti:

$$Aw = \lambda w \implies (Aw)^* = (\lambda w)^* \xrightarrow{A \text{ reale}} Aw^* = \lambda^* w^*$$

Lo stesso discorso vale per gli autovettori sinistri v^T.

Consideriamo dunque una coppia di autovalori complessi coniugati ($\lambda_1 = \sigma + j\omega$, $\lambda_2 = \lambda_1^* = \sigma - j\omega$), con autovettori rispettivamente $w_1 = w_a + j w_b$, $w_2 = w_1^* = w_a - j w_b$. La parte di risposta libera nello stato relativa a questi due autovalori evolve secondo la seguente legge: $x_{\ell,12}(t) = e^{\lambda_1 t} w_1 c_1 + e^{\lambda_2 t} w_2 c_2$
dove c_1, c_2 sono, come detto in precedenza, le componenti di x_0 rispetto a w_1, w_2, e sono in questo caso due numeri complessi. Notiamo che $c_2 = c_1^*$: infatti, $c_1 = v_1^T x_0$, $c_2 = v_2^T x_0$, con $v_2 = v_1^*$ e x_0 reale.
Se indichiamo con m il modulo di c_1 e con ϕ la sua fase ($c_1 = m e^{j\phi}$, $c_2 = m e^{-j\phi}$), si ha:

$$x_{\ell,12}(t) = e^{\lambda_1 t} w_1 c_1 + e^{\lambda_2 t} w_2 c_2 =$$

$$= e^{(\sigma + j\omega)t} m e^{j\phi} (w_a + j w_b) + e^{(\sigma - j\omega)t} m e^{-j\phi} (w_a - j w_b) =$$

$= e^{\sigma t} m e^{j(\omega t+\phi)} (W_a + jW_b) + e^{\sigma t} m e^{-j(\omega t+\phi)} (W_a - jW_b) =$

$= m e^{\sigma t} \left[e^{j(\omega t+\phi)} (W_a + jW_b) + e^{-j(\omega t+\phi)} (W_a - jW_b) \right] =$ Somma di due numeri complessi coniugati

$= m e^{\sigma t} 2 \mathrm{Re} \left\{ e^{j(\omega t+\phi)} (W_a + jW_b) \right\} =$

$= m e^{\sigma t} \cdot 2 \mathrm{Re} \left\{ (\cos(\omega t+\varphi) + j \sin(\omega t+\varphi)) (W_a + jW_b) \right\} =$

$= 2 m e^{\sigma t} \left[W_a \cos(\omega t+\phi) - W_b \sin(\omega t+\phi) \right]$

- Se $\sigma = 0 \Rightarrow x_{\ell,12}(t)$ è una funzione periodica con periodo $\frac{2\pi}{\omega}$.
- Se $\sigma > 0 \Rightarrow$ le traiettorie tendono all'infinito.
- Se $\sigma < 0 \Rightarrow$ le traiettorie tendono a finire nell'origine del sistema.

Il caso planare:

Il caso planare, che si ha quando $x \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$ con $\bar{n} = 2$, è molto interessante perché ci permette di disegnare un grafico delle possibili evoluzioni libere del sistema a seconda del valore che assumono i suoi due autovalori.

RISPOSTA LIBERA NELLO STATO NEL CASO PLANARE: $x_\ell(t) = e^{At} x_0 = e^{\lambda_1 t} W_1 C_1 + e^{\lambda_2 t} W_2 C_2$

Nota la matrice dinamica A, sappiamo già come ottenere i suoi autovalori e i suoi autovettori. Per effettuare il procedimento inverso, basta ricordarsi che $A = T^{-1} \Lambda T := P \Lambda P^{-1}$ (con $P = T^{-1}$), dove:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \end{bmatrix} \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

→ ALCUNI ESEMPI DI GRAFICI SI TROVANO SUI FOGLI STAMPATI.

Esercizio:

Si consideri un sistema a tempo continuo la cui rappresentazione ISU è caratterizzata dalla seguente matrice dinamica:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Calcolare la matrice di transizione dello stato $\phi(t)$ attraverso la decomposizione spettrale.

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det\begin{bmatrix} \lambda-5 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda-6 \end{bmatrix} = (\lambda-2)(\lambda^2-11\lambda+28) = (\lambda-2)(\lambda-4)(\lambda-7)$$

→ L'autovettore destro relativo a $\lambda_1 = 2$ è il vettore non nullo $w \in \mathbb{R}^3$ soluzione del sistema di equazioni $(A-2I)w = 0$.

$$A-2I = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Se $w_1 = [w(1), w(2), w(3)]^T$, le equazioni indipendenti sono:

$$\begin{cases} 3w(1) + w(2) + w(3) = 0 \\ 2w(1) + 4w(3) = 0 \end{cases}$$

Scegliendo $w(3) = 1$, si ottiene come soluzione $w_1 = [-2, 5, 1]^T$.

→ L'autovettore destro relativo a $\lambda_2 = 4$ è il vettore non nullo $w \in \mathbb{R}^3$ soluzione del sistema di equazioni $(A-4I)w = 0$.

$$A-4I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Qui le equazioni indipendenti sono:

$$\begin{cases} -2w(2) = 0 \\ 2w(1) + 2w(3) = 0 \end{cases}$$

Scegliendo $w(3) = -1$, si ottiene come soluzione $w_2 = [1, 0, -1]^T$.

→ L'autovettore destro relativo a $\lambda_3 = 7$ è il vettore non nullo $w \in \mathbb{R}^3$ soluzione del sistema di equazioni $(A-7I)w = 0$.

$$A-7I = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Qui le equazioni indipendenti sono:

$$\begin{cases} -5w(2) = 0 \\ 2w(1) - w(3) = 0 \end{cases}$$

Scegliendo $w(3) = 2$, si ottiene come soluzione $w_3 = [1, 0, 2]^T$.

La matrice di cambiamento di coordinate T si ottiene come inversa di T^{-1}, che ha per colonne gli autovettori destri appena calcolati:

$$T=\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 1/5 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/15 & 1/3 \end{bmatrix} \qquad T=\begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ v_3^T \end{bmatrix}$$

Le righe di T sono gli autovettori sinistri di A relativi ai tre autovalori.

A questo punto si può scrivere A secondo la sua decomposizione spettrale:

$$A=\sum_{i=1}^{\bar{n}} \lambda_i w_i v_i^T = \lambda_1 w_1 v_1^T + \lambda_2 w_2 v_2^T + \lambda_3 w_3 v_3^T =$$

$$=2\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0, \frac{1}{5}, 0 \end{bmatrix}+4\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \end{bmatrix}+7\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{3}, \frac{1}{15}, \frac{1}{3} \end{bmatrix}=$$

$$=2\begin{bmatrix} 0 & -2/5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \end{bmatrix}+4\begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2/3 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}+7\begin{bmatrix} 1/3 & 1/15 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 2/15 & 2/3 \end{bmatrix}$$

Infine, la matrice $\phi(t)$ è data da:

$$\phi(t)=e^{At}=\sum_{i=1}^{\bar{n}} e^{\lambda_i t} w_i v_i^T = e^{\lambda_1 t} w_1 v_1^T + e^{\lambda_2 t} w_2 v_2^T + e^{\lambda_3 t} w_3 v_3^T =$$

$$=e^{2t}\begin{bmatrix} 0 & -2/5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \end{bmatrix}+e^{4t}\begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2/3 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}+e^{7t}\begin{bmatrix} 1/3 & 1/15 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 2/15 & 2/3 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{4t}+\frac{1}{3}e^{7t} & -\frac{2}{5}e^{2t}+\frac{1}{3}e^{4t}+\frac{1}{15}e^{7t} & -\frac{1}{3}e^{4t}+\frac{1}{3}e^{7t} \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ -\frac{2}{3}e^{4t}+\frac{2}{3}e^{7t} & \frac{1}{5}e^{2t}-\frac{1}{3}e^{4t}+\frac{2}{15}e^{7t} & \frac{1}{3}e^{4t}+\frac{2}{3}e^{7t} \end{bmatrix}$$

29/03/2021

Osservabilità ed eccitabilità dei modi:

Sempre nell'ipotesi che A sia una matrice con autovalori tutti distinti, vediamo quali di questi autovalori risultano presenti nella risposta libera in uscita e nella risposta forzata in uscita e nello stato.

→ RISPOSTA LIBERA IN USCITA

$$\Psi(t)=Ce^{At}=\sum_{i=1}^{\bar{n}} e^{\lambda_i t} C w_i v_i^T \implies$$

$$y_\ell(t)=\Psi(t)x_0=\sum_{i=1}^{\bar{n}} e^{\lambda_i t} C w_i v_i^T x_0 = \sum_{i=1}^{\bar{n}} e^{\lambda_i t} \underbrace{C w_i}\, c_i$$

in particolare, non compare il termine relativo a $\mathcal{L}\{e^{\lambda_i t}\}$ (ovvero $\frac{1}{s-\lambda_i}$) nelle espressioni di $\Psi(s)$, $Y_\ell(s)$

e

Se $Cw_i=0 \Rightarrow \lambda_i$ non è osservabile

Se λ_i è complesso, con autovettore relativo $w_i = w_a + j w_b$, il fatto che $Cw_i = 0$ implica anche che $Cw_i^* = 0$ (cioè $Cw_a = 0$, $Cw_b = 0$), per cui sarà tutta la coppia complessa di autovalori λ_i, λ_i^* a non apparire in uscita.

→ RISPOSTA FORZATA NELLO STATO

$$H(t) = e^{At} B = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t} w_i \underbrace{v_i^T B}$$

in particolare, non compare il termine relativo a $\mathcal{L}\{e^{\lambda_i t}\}$ (ovvero $\frac{1}{s-\lambda_i}$) nelle espressioni di $H(s)$

e

Se $v_i^T B = 0 \Rightarrow \lambda_i$ NON è eccitabile con impulsi

Nel caso di λ_i complesso si applica lo stesso discorso fatto poc'anzi.

→ RISPOSTA FORZATA IN USCITA

$$W(t) = Ce^{At} B + D\delta_0(t) = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t} \underbrace{C w_i v_i^T B} + D\delta_0(t)$$

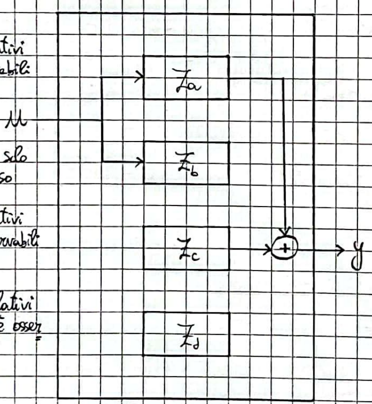
Il modo relativo a λ_i compare nella funzione di trasferimento $W(s)$ (trasformata di $W(t)$) $\Longleftrightarrow$ λ_i è sia osservabile ($Cw_i \neq 0$) sia eccitabile con impulsi dall'ingresso ($v_i^T B \neq 0$)

Z_a comprende gli autospazi relativi agli autovalori che sono sia osservabili sia eccitabili con impulsi

Z_b comprende gli autospazi relativi agli autovalori che sono solo eccitabili con impulsi dall'ingresso

Z_c comprende gli autospazi relativi agli autovalori che sono solo osservabili in uscita

Z_d comprende gli autospazi relativi agli autovalori che non sono né osservabili né eccitabili con impulsi



I blocchetti Z_a, Z_b, Z_c, Z_d sono scollegati tra loro nel caso in cui A è una matrice diagonalizzabile.
Al contrario, non comprendono degli autospazi (bensì dei sottospazi qualsiasi) se A non è diagonalizz.

Osservazione:

Il discorso sull'eccitabilità può essere esteso anche a casi più generali rispetto all'ingresso dato da un impulso.
Infatti, sappiamo che, nel dominio della trasformata, la risposta forzata nello stato è data da $X_f(s) = H(s)U(s)$.

Se la $U(s)$ è tale da non semplificare alcun fattore $(s-\lambda_i)$ nel denominatore di $H(s)$, allora tutti gli autovalori eccitabili con impulsi sono visibili nelle espressioni di $X_f(s)$, $x_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X_f(s)\}$ e, quindi, sono eccitabili anche con l'ingresso $u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\}$.
Il medesimo discorso si applica per la risposta forzata in uscita, sapendo che $Y_f(s) = W(s)\,U(s)$.

Esercizio:

Si consideri un sistema a tempo continuo la cui rappresentazione ISU è caratterizzata dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad C = [1, 2, 1] \qquad D = 0$$

- Verificare l'eccitabilità e l'osservabilità dei singoli modi.
- Verificare che un modo appare nella risposta impulsiva in uscita $W(t)$ se e solo se è eccitabile mediante impulsi in ingresso e osservabile in uscita.

Poiché la matrice dinamica A è la stessa dell'esercizio in cui abbiamo calcolato la decomposizione spettrale, ricicliamo i risultati (in particolare gli autovalori e gli autovettori destri e sinistri) ottenuti da lì:

- $\lambda_1 = 2 \rightarrow v_1^T B = [0, 1/5, 0]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$ NON eccitabile
- $\lambda_2 = 4 \rightarrow v_2^T B = [2/3, 1/3, -1/3]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = -1/3 \Rightarrow$ eccitabile
- $\lambda_3 = 7 \rightarrow v_3^T B = [1/3, 1/15, 1/3]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 4/3 \Rightarrow$ eccitabile

- $\lambda_1 = 2 \rightarrow C w_1 = [1, 2, 1]\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = 9 \Rightarrow$ osservabile
- $\lambda_2 = 4 \rightarrow C w_2 = [1, 2, 1]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$ NON osservabile
- $\lambda_3 = 7 \rightarrow C w_3 = [1, 2, 1]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 3 \Rightarrow$ osservabile

Per quanto riguarda l'ultimo quesito, dobbiamo determinare l'espressione della risposta impulsiva $W(t)$, che è data da:

$$W(t) = Ce^{At}B + D\delta_0(t) =$$

$$= [1,2,1] \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{4t} + \frac{1}{3}e^{7t} & -\frac{2}{5}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{4t} + \frac{1}{15}e^{7t} & -\frac{1}{3}e^{4t} + \frac{1}{3}e^{7t} \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ -\frac{2}{3}e^{4t} + \frac{2}{3}e^{7t} & \frac{1}{5}e^{2t} - \frac{1}{3}e^{4t} + \frac{2}{15}e^{7t} & \frac{1}{3}e^{4t} + \frac{2}{3}e^{7t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + 0$$

$$= [1,2,1] \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}e^{4t} + \frac{4}{3}e^{7t} \\ 0 \\ \frac{1}{3}e^{4t} + \frac{8}{3}e^{7t} \end{bmatrix} = 4e^{7t}$$

$$\Rightarrow W(s) = \mathcal{L}\{W(t)\} = \frac{4}{s-7}$$ → ha solo 7 come polo ✓

Esercizio:

Calcolare gli autovalori e gli autovettori destri della matrice $A = \begin{bmatrix} -0.4 & 1.93 \\ -0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$.

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda+0.4 & -1.93 \\ 0.6 & \lambda-0.4 \end{bmatrix} = (\lambda+0.4)(\lambda-0.4) + 0.6 \cdot 1.93 =$$

$$= \lambda^2 - 0.16 + 1.16 = \lambda^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = j, \quad \lambda_2 = -j$$

$\boxed{\lambda_1 = j}$ $(A - jI)W = 0$

$$A - jI = \begin{bmatrix} -0.4-j & 1.93 \\ -0.6 & 0.4-j \end{bmatrix}$$

→ Notiamo che le righe sono linearmente dipendenti. Infatti:
$\det(A-jI) = (0.4-j)(-0.4-j) + 0.6 \cdot 1.93 = -1 - 0.16 + 1.16 = 0$

→ Una sola equazione: $(-0.4-j)\,W(1) + 1.93 + W(2) = 0$

Se scegliamo $W(2) = 0.6j \Rightarrow$

$$\Rightarrow W(1) = \frac{-1.93 \cdot 0.6j}{-0.4-j} = \frac{0.46j + 1.16}{1.16} = 1 + 0.4j$$

$$\Rightarrow W = W_a + jW_b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + j0.4 \\ 0.6j \end{bmatrix}$$

Perciò, l'autovettore relativo all'autovalore $\lambda_2 = -j$ sarà:

$$W^* = W_a - jW_b = \begin{bmatrix} 1 - j0.4 \\ -0.6j \end{bmatrix}$$

Tornando al discorso sulla raggiungibilità e sull'osservabilità di un sistema, consideriamo il seguente cambiamento delle coordinate:

$z = Tx \qquad T^{-1} = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_{\bar{n}}] \quad , \quad T = \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_{\bar{n}}^T \end{bmatrix}$

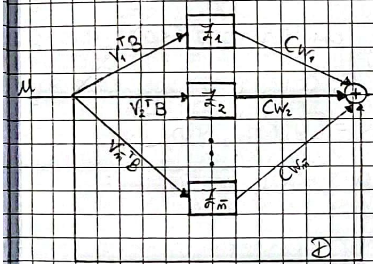
$\bar{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{\bar{n}} \end{bmatrix} \qquad \bar{B} = TB = \begin{bmatrix} v_1^T B \\ v_2^T B \\ \vdots \\ v_{\bar{n}}^T B \end{bmatrix}$

$\bar{C} = CT^{-1} = [Cw_1 \ \ Cw_2 \ \dots \ Cw_{\bar{n}}] \qquad D = \bar{D}$

Da qui otteniamo che:

$\dot{z} = \bar{A}z + \bar{B}u \quad \rightarrow \quad \dot{z}_i = \lambda_i z_i + v_i^T B u \qquad i = 1, 2, \dots, \bar{n}$

$y = \bar{C}z + \bar{D}u \quad \rightarrow \quad y = \sum_{i=1}^{\bar{n}} (Cw_i) z_i + Du$



← Qui è ancora più evidente come z_1 sia raggiungibile se e solo se $v_1^T B \neq 0$ e sia osservabile se e solo se $Cw_1 \neq 0$ e così via.

SVOLGERE L'ANALISI MODALE DEL SISTEMA SUL CARRELLO

30/03/2021

Sistemi a tempo discreto:

La rappresentazione I-S-U di un sistema a tempo discreto lineare e stazionario è definita dalle seguenti equazioni, in cui $K \in \mathbb{Z}$, $K \geq 0$:

$$\begin{cases} x(K+1) = Ax(K) + Bu(K) \\ y(K) = Cx(K) + Du(K) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Perché ci interessa questo tipo di sistemi?

1) Un sistema a tempo discreto può nascere dal campionamento di un sistema a tempo continuo: molto spesso il controllo di un processo fisico descritto da un

sistema a tempo continuo viene realizzato su calcolatore. Ciò comporta che le misure y siano prelevate dal sistema solo in certi tempi discreti t_K. In generale questi tempi sono equispaziati: $t_K = K T_c$, dove T_c è il tempo di campionamento.

2) Un sistema a tempo discreto può descrivere un sistema economico dove l'indice K potrebbe essere associato al giorno o all'anno. Per esempio, supponiamo che $y(K)$ rappresenti il capitale investito in un certo titolo che dà un rendimento percentuale annuale α. Allora nell'anno K+1 il capitale sarà $y(K+1) = (1+\alpha)\, y(K)$.

3) Un sistema a tempo discreto può descrivere anche una successione come quella di Fibonacci $\{1,1,2,3,5,8,\dots\}$. In particolare, sarà vera la seguente relazione: $y(K+1) = y(K) + y(K-1)$, con $y(K) = 0 \;\forall K<0$, $y(0)=1$.
Inoltre, siccome la successione ha memoria 2, conviene prendere uno stato di dimensione $n=2$, e in particolare: $x(K) = [y(K-1), y(K)]^T$.
A partire da queste due informazioni, proviamo a scrivere il sistema:

$$\begin{cases} x(K+1) = Ax(K) + Bu(K) \\ y(K) = Cx(K) + Du(K) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

→ Possiamo non considerare questi due termini perché, di fatto, non stiamo applicando un ingresso (si dice che il sistema ha un'EVOLUZIONE AUTONOMA)

$$\rightsquigarrow x(K+1) = \begin{bmatrix} y(K) \\ y(K+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(K-1) \\ y(K) \end{bmatrix} = Ax(K)$$

$$y(K) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(K-1) \\ y(K) \end{bmatrix} = Cx(K)$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} y(-1) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Calcolo della risposta:
Introduciamo a livello teorico la soluzione dell'equazione $x(K+1) = Ax(K) + Bu(K)$

$$x(K) = \underbrace{A^K x_0}_{\text{RISPOSTA LIBERA}} + \underbrace{\sum_{J=0}^{K-1} A^{K-1-J} Bu(J)}_{\text{RISPOSTA FORZATA}}$$

Dimostrazione:

$$\begin{cases} x(K+1) = Ax(K) + Bu(K) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \implies x(1) = Ax_0 + Bu(0)$$

Verifichiamo la soluzione per induzione.

PASSO BASE (K=1):

$$x(1) = A^1 x_0 + \sum_{J=0}^{0} A^{1-1-J} B u(J) = Ax_0 + Bu(0) \quad \checkmark$$

PASSO INDUTTIVO:

$$x(K+1) = Ax(K) + Bu(K) = A\left[A^K x_0 + \sum_{J=0}^{K-1} A^{K-1-J} Bu(J)\right] + Bu(K) =$$

$$= A^{K+1} x_0 + \sum_{J=0}^{K-1} A^{K-J} Bu(J) + Bu(K) = A^{K+1} x_0 + \sum_{J=0}^{K} A^{K-J} Bu(J) \quad \checkmark$$

→ MATRICE DI TRANSIZIONE DELLO STATO: $\phi(K) := A^K, \quad K \geq 0$

$$\implies x_\ell(K) = \phi(K) x_0$$

Nel nostro caso è un vettore colonna

→ MATRICE DELLE RISPOSTE IMPULSIVE NELLO STATO: $H(K) := A^{K-1} B, \quad K \geq 1$

(con $H(0) = 0$) $\implies x_f(K) = \sum_{J=0}^{K-1} H(K-J) u(J)$

In effetti l'impulso $\delta_0(K)$, nel caso a tempo discreto, è definito come quella funzione che vale 0 per tutti i K tranne che per K=0 dove vale 1.

⇒ Se applichiamo come ingresso l'impulso $\delta_0(K)$, otteniamo:

$$x_f(K) = \sum_{J=0}^{K-1} H(K-J)\delta_0(J) = H(K-0)\delta_0(0) = H(K)$$

Per quanto riguarda la risposta in uscita si ha:

$$y(K) = \underbrace{CA^K x_0}_{\text{RISPOSTA LIBERA}} + \underbrace{\boxed{\sum_{J=0}^{K-1} CA^{K-1-J} Bu(J) + Du(K)}}_{\text{RISPOSTA FORZATA}}$$

→ $\Psi(K) := CA^K \implies y_\ell(K) = \Psi(K) x_0$

↳ Nel nostro caso è un vettore riga

→ $W(K) = CA^{K-1}B$ per $K \geq 1$, $W(0) = D \implies y_f(K) = \sum_{J=0}^{K} W(K-J) u(J)$

↳ Matrice delle risposte impulsive che, nel nostro caso, è uno scalare.

Infatti: $\sum_{J=0}^{K} W(K-J) u(J) = \sum_{J=0}^{K-1} W(K-J) u(J) + W(K-K) u(K) =$

$$= \sum_{J=0}^{K-1} CA^{K-1-J} Bu(J) + Du(K) = y_f(K) \quad \checkmark$$

Se $u(K) = \delta_0(K) \implies y_f(K) = \sum_{J=0}^{K} W(K-J)\delta_0(J) = W(K-0)\delta_0(0) = W(K)$

Trasformata Zeta:

Si consideri un segnale a tempo discreto $x(K)$, $K \in \mathbb{Z}$, $K \geq 0$. Si definisce trasformata Zeta $X(z)$ di $x(K)$ la seguente funzione di variabile $z \in \mathbb{C}$:

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x(K)\} = \sum_{K=0}^{\infty} x(K)\, z^{-K}$$

$X(z)$ converge per ogni z tale che $|z| > \rho$, dove ρ è il raggio di convergenza di $X(z)$ e dipende da com'è fatta $x(K)$.

Trasformata di alcune funzioni di uso corrente:

1) GRADINO UNITARIO

Si definisce la funzione gradino unitario a tempo discreto nel seguente modo:

$$\delta_{-1}(K) = \begin{cases} 1 & K \geq 0 \\ 0 & K < 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{Z}\{\delta_{-1}(K)\} = \sum_{K=0}^{\infty} z^{-K}\delta_{-1}(K) = \sum_{K=0}^{\infty} z^{-K} = \sum_{K=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^{K} = \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1}$$

$$\forall z : |1/z| < 1 \iff |z| > 1 \quad \Rightarrow \rho = 1$$

2) IMPULSO UNITARIO

Come accennato prima, la funzione impulso unitario a tempo discreto è definita nel seguente modo:

$$\delta_0(K) = \begin{cases} 1 & K = 0 \\ 0 & K \neq 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{Z}\{\delta_0(K)\} = \sum_{K=0}^{\infty} z^{-K}\delta_0(K) = 1$$

La serie converge per ogni z, pertanto il raggio di convergenza è $\rho = 0$.

3) FUNZIONE POTENZA

Si consideri la funzione $a^K\delta_{-1}(K)$, con $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Si ha che:

$$\mathcal{Z}\{a^K\delta_{-1}(K)\} = \sum_{K=0}^{\infty} a^K z^{-K} = \sum_{K=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^K = \frac{1}{1-\left(\frac{a}{z}\right)} = \frac{z}{z-a}$$

$$\forall z : |a/z| < 1 \iff |z| > |a| \quad \Rightarrow \rho = |a|$$

Proprietà della trasformata Zeta:

1) LINEARITÀ: se $X_1(z) = \mathcal{Z}\{x_1(k)\}$, $X_2(z) = \mathcal{Z}\{x_2(k)\}$, allora:

$$\mathcal{Z}\{\alpha_1 x_1(k) + \alpha_2 x_2(k)\} = \alpha_1 X_1(z) + \alpha_2 X_2(z)$$

2) PRODOTTO PER a^k: se $X(z) = \mathcal{Z}\{x(k)\}$, $a \in \mathbb{C}$, allora:

$$\mathcal{Z}\{a^k x(k)\} = X(z/a)$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathcal{Z}\{a^k x(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k x(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) \left(\frac{z}{a}\right)^{-k} = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

3) PRODOTTO PER IL TEMPO: se $X(z) = \mathcal{Z}\{x(k)\}$, allora:

$$\mathcal{Z}\{k x(k)\} = -z \frac{d}{dz} X(z)$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\frac{d}{dz} X(z) = \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} x(k) = -\sum_{k=0}^{\infty} k z^{-k-1} x(k) = -\frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} k x(k) z^{-k} = -\frac{1}{z} \mathcal{Z}\{k x(k)\}$$

4) TRASFORMATA DELLA FUNZIONE RITARDATA: se $X(z) = \mathcal{Z}\{x(k)\}$, allora:

$$\mathcal{Z}\{x(k-1)\delta_{-1}(k-1)\} = \frac{X(z)}{z}$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathcal{Z}\{x(k-1)\delta_{-1}(k-1)\} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} x(k-1)\delta_{-1}(k-1) = \sum_{k=1}^{\infty} z^{-k} x(k-1) \overset{\ell = k-1}{=} \sum_{\ell=0}^{\infty} z^{-(\ell+1)} x(\ell) =$$

$$= \frac{1}{z} \sum_{\ell=0}^{\infty} z^{-\ell} x(\ell) = \frac{X(z)}{z}$$

5) TRASFORMATA DELLA FUNZIONE ANTICIPATA: se $X(z) = \mathcal{Z}\{x(k)\}$, allora:

$$\mathcal{Z}\{x(k+1)\} = z(X(z) - x_0)$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\mathcal{Z}\{x(k+1)\} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} x(k+1) \overset{\ell = k+1}{=} \sum_{\ell=1}^{\infty} z^{-(\ell-1)} x(\ell) = z \sum_{\ell=1}^{\infty} z^{-\ell} x(\ell) =$$

$$= z\left(\sum_{\ell=0}^{\infty} z^{-\ell} x(\ell) - x_0\right) = z(X(z) - x_0)$$

Ulteriori trasformate Zeta:

1) FUNZIONE RAMPA

Si consideri la funzione $x(k) = k\delta_{-1}(k)$. Si ha che:

$$\mathcal{Z}\{k\delta_{-1}(k)\} = -z \frac{d}{dz} \frac{z}{z-1} = -z \frac{z-1-z}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

con $p = 1$

2) FUNZIONE RAMPA QUADRATICA

Si consideri la funzione $x(K) = K^2 \delta_{-1}(K)$. Si ha che:

$$\mathcal{Z}\{K^2\delta_{-1}(K)\} = \mathcal{Z}\{K \cdot K\delta_{-1}(K)\} = -z\frac{d}{dz}\frac{z}{(z-1)^2} = -z\,\frac{(z-1)^2 - z\cdot 2(z-1)}{(z-1)^4} =$$

$$= -z\,\frac{z-1-2z}{(z-1)^3} = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} \qquad \text{con } \rho = 1$$

08/04/2021

3) FUNZIONE $x(K) = Ka^{K-1}\delta_{-1}(K)$, $a \neq 0$

$$\mathcal{Z}\{Ka^{K-1}\delta_{-1}(K)\} = \frac{z}{(z-a)^2} \qquad \text{con } \rho = |a|$$

DIMOSTRAZIONE:

L'uguaglianza si può verificare in due modi:

i) $x(K) = a^K\delta_{-1}(K)$, $\quad \mathcal{Z}\{a^K\delta_{-1}(K)\} = \frac{z}{z-a}$

$$\Longrightarrow \mathcal{Z}\{Ka^{K-1}\delta_{-1}(K)\} = \frac{1}{a}\mathcal{Z}\{Ka^K\delta_{-1}(K)\} = -\frac{1}{a}z\frac{d}{dz}\frac{z}{z-a} = \frac{z}{(z-a)^2}$$

ii) $x(K) = K\delta_{-1}(K)$, $\quad \mathcal{Z}\{K\delta_{-1}(K)\} = \frac{z}{(z-1)^2}$

$$\Longrightarrow \mathcal{Z}\{Ka^{K-1}\delta_{-1}(K)\} = \frac{1}{a}\mathcal{Z}\{Ka^K\delta_{-1}(K)\} = \frac{1}{a}\,\frac{z/a}{(z/a-1)^2} = \frac{z}{(z-a)^2}$$

4) COEFFICIENTE BINOMIALE

Si consideri il coefficiente binomiale $x(K) = \binom{K}{h}$ che, per $h \in \mathbb{Z}, h \geq 0$, è definito nel seguente modo:

$$\binom{K}{h} = \begin{cases} 0 & K < h \\ \dfrac{K!}{h!(K-h)!} & K \geq h \end{cases}$$

$$\mathcal{Z}\left\{\binom{K}{h}\right\} = \frac{z}{(z-1)^{h+1}} \qquad \text{con } \rho = 1 \rightsquigarrow \text{in effetti il coefficiente binomiale è un polinomio di grado } h$$

DIMOSTRAZIONE (PER INDUZIONE):

→ PASSO BASE ($h = 0$):

$$\mathcal{Z}\left\{\binom{K}{0}\right\} = \mathcal{Z}\left\{\frac{K!}{0!\,K!}\right\} = \mathcal{Z}\{\delta_{-1}(K)\} = \frac{z}{z-1} \quad ✓$$

→ PASSO INDUTTIVO:

Innanzitutto osserviamo che $\quad \binom{K}{h+1} = \binom{K}{h}\frac{K-h}{h+1}$

Infatti:

- Per $K < h$ avremmo $0 = 0$ ok!
- $K \geq h+1$: $\binom{K}{h+1} = \frac{K!}{(h+1)!(K-h-1)!}$

$$\binom{K}{h}\frac{K-h}{h+1} = \frac{K!}{h!(K-h)!}\,\frac{K-h}{h+1} = \frac{K!}{(h+1)!(K-h-1)!} \quad \text{ok!}$$

Perciò:

$$\mathcal{Z}\left\{\binom{K}{h+1}\right\} = \mathcal{Z}\left\{\binom{K}{h}\frac{K-h}{h+1}\right\} = \mathcal{Z}\left\{\frac{K}{h+1}\binom{K}{h} - \frac{h}{h+1}\binom{K}{h}\right\} =$$

$$= \frac{1}{h+1}\left[\mathcal{Z}\left\{K\binom{K}{h}\right\} - h\,\mathcal{Z}\left\{\binom{K}{h}\right\}\right] = \frac{1}{h+1}\left[-z\frac{d}{dz}\frac{z}{(z-1)^{h+1}} - h\frac{z}{(z-1)^{h+1}}\right] =$$

$$= -\frac{1}{h+1}\left[z\frac{(z-1)^{h+1} - z(h+1)(z-1)^{h}}{(z-1)^{2h+2}} + \frac{hz}{(z-1)^{h+1}}\right] =$$

$$= -\frac{1}{h+1}\left[\frac{z\left[(z-1) - hz - z\right] + hz(z-1)}{(z-1)^{h+2}}\right] = \frac{z}{(z-1)^{h+2}}$$

5) COEFFICIENTE BINOMIALE MOLTIPLICATO PER a^{K-h}

$$\mathcal{Z}\left\{\binom{K}{h}a^{K-h}\right\} = \frac{1}{a^h}\,\mathcal{Z}\left\{\binom{K}{h}a^{K}\right\} = \frac{1}{a^h}\,\frac{z/a}{(z/a-1)^{h+1}} = \frac{z}{(z-a)^{h+1}} \qquad \text{con } \rho = |a|$$

6) FUNZIONE SENO

$$\mathcal{Z}\{\sin(\theta K)\} = \mathcal{Z}\left\{\frac{e^{j\theta K} - e^{-j\theta K}}{2j}\right\} = \frac{1}{2j}\left(\mathcal{Z}\{e^{j\theta K}\} - \mathcal{Z}\{e^{-j\theta K}\}\right) =$$

$$= \frac{1}{2j}\left(\frac{z}{z-e^{j\theta}} - \frac{z}{z-e^{-j\theta}}\right) = \frac{z}{2j}\,\frac{z-e^{-j\theta}-z+e^{j\theta}}{z^2-(e^{j\theta}+e^{-j\theta})z+1} = \frac{z\cdot\sin\theta}{z^2-2\cos(\theta)\cdot z+1} \qquad \text{con } \rho = 1$$

7) FUNZIONE COSENO

Adottando lo stesso metodo utilizzato per il calcolo della Trasformata del seno, si ha che:

$$\mathcal{Z}\{\cos(\theta K)\} = \frac{z^2 - z\cos\theta}{z^2-2\cos(\theta)\cdot z+1} \qquad \text{con } \rho = 1$$

Uso della trasformata Zeta per il calcolo della risposta:

Consideriamo la rappresentazione I-S-U di un sistema a tempo discreto lineare e stazionario:

$$\begin{cases} x(K+1) = Ax(K) + Bu(K) \\ y(K) = Cx(K) + Du(K) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Se $\mathcal{Z}\{x(k)\} = X(z)$, $\mathcal{Z}\{u(k)\} = U(z)$, $\mathcal{Z}\{y(k)\} = Y(z)$ abbiamo che:

$$\mathcal{Z}\{x(k+1)\} = \mathcal{Z}\{Ax(k) + Bu(k)\} \Rightarrow z(X(z) - x_0) = AX(z) + BU(z)$$
$$\Rightarrow zIX(z) - AX(z) = zx_0 + BU(z) \Rightarrow (zI - A)X(z) = zx_0 + BU(z)$$
$$\Rightarrow X(z) = (zI-A)^{-1} z x_0 + (zI-A)^{-1} BU(z)$$

Trasformando anche la seconda equazione otteniamo che:
$$Y(z) = CX(z) + DU(z)$$

Notiamo che, a differenza del caso relativo al tempo continuo, sia il termine $(zI-A)^{-1} z x_0$ che il termine $(zI-A)^{-1}BU(z)$ potrebbero anche rappresentare delle funzioni razionali proprie ma non strettamente.

Per antitrasformare una funzione $X(z)$ razionale propria, si procede nel seguente modo:

1) Prendere la funzione $\bar{X}(z) := \frac{X(z)}{z}$ (che stavolta è strettamente propria)
2) Decomporre in fratti semplici $\bar{X}(z)$, ottenendo un'espressione del tipo:
$$\bar{X}(z) = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\alpha_{ij}}{(z-p_i)^j}$$
da cui:
$$X(z) = z\bar{X}(z) = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij} \frac{z}{(z-p_i)^j}$$
3) Antitrasformare ciascun termine della somma. In particolare:
   - Se $p_i \neq 0 \Rightarrow \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{(z-p_i)^j}\right\} = \binom{k}{j-1} p_i^{k-j+1}$
   - Se $p_i = 0 \Rightarrow \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{(z-p_i)^j}\right\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z^{j-1}}\right\} = \delta_0(k-j+1)$ IMPULSO RITARDATO $(j \geq 1)$

<u>Esercizio:</u>

Calcolare la risposta libera e forzata nello stato e nell'uscita del sistema a tempo discreto caratterizzato dalle seguenti matrici:

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ $C = [1 \quad -1]$ $D = 1$

a partire da $x_0 = [1\ 0]^T$ e se si applica un ingresso $u(K) = 3^K \delta_{-1}(K)$

$$(zI-A)^{-1} = \frac{1}{(z-1)(z+2)} \begin{bmatrix} z+1 & 1 \\ 2 & z \end{bmatrix}$$

RISPOSTA LIBERA:

$$X_\ell(z) = (zI-A)^{-1} z x_0 = \frac{z}{z^2+z-2} \begin{bmatrix} z+1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z(z+1)}{(z-1)(z+2)} \\ \frac{2z}{(z-1)(z+2)} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{X}_\ell(z) = \frac{X_\ell(z)}{z} = \begin{bmatrix} \frac{z+1}{(z-1)(z+2)} \\ \frac{2}{(z-1)(z+2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\frac{1}{z-1} + \frac{1}{3}\frac{1}{z+2} \\ \frac{2}{3}\frac{1}{z-1} - \frac{2}{3}\frac{1}{z+2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X_\ell(z) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\frac{z}{z-1} + \frac{1}{3}\frac{z}{z+2} \\ \frac{2}{3}\frac{z}{z-1} - \frac{2}{3}\frac{z}{z+2} \end{bmatrix} \Rightarrow x_\ell(K) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(-2)^K \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3}(-2)^K \end{bmatrix} \delta_{-1}(K)$$

$$\Rightarrow y_\ell(K) = C x_\ell(K) = (-2)^K$$

RISPOSTA FORZATA:

$$X_f(z) = (zI-A)^{-1} B U(z) = \frac{1}{z^2+z-2} \begin{bmatrix} 2 \\ 2z \end{bmatrix} U(z)$$

$$U(z) = \mathcal{Z}\{3^K \delta_{-1}(K)\} = \frac{z}{z-3} \Rightarrow X_f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+2)(z-3)} \begin{bmatrix} 2 \\ 2z \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{X}_f(z) = \frac{X_f(z)}{z} = \begin{bmatrix} \frac{2}{(z-1)(z+2)(z-3)} \\ \frac{2z}{(z-1)(z+2)(z-3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}\frac{1}{z-1} + \frac{2}{15}\frac{1}{z+2} + \frac{1}{5}\frac{1}{z-3} \\ -\frac{1}{3}\frac{1}{z-1} - \frac{4}{15}\frac{1}{z+2} + \frac{3}{5}\frac{1}{z-3} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X_f(z) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}\frac{z}{z-1} + \frac{2}{15}\frac{z}{z+2} + \frac{1}{5}\frac{z}{z-3} \\ -\frac{1}{3}\frac{z}{z-1} - \frac{4}{15}\frac{z}{z+2} + \frac{3}{5}\frac{z}{z-3} \end{bmatrix} \Rightarrow x_f(K) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} + \frac{2}{15}(-2)^K + \frac{1}{5}3^K \\ -\frac{1}{3} - \frac{4}{15}(-2)^K + \frac{3}{5}3^K \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow y_f(K) = C x_f(K) + D u(K) = \frac{6}{15}(-2)^K + \frac{3}{5}3^K$$

12/04/2021

Abbiamo visto che:

- $x(K) = A^K x_0 + \sum_{J=0}^{K-1} A^{K-J-1} B u(J) = \phi(K) x_0 + \sum_{J=0}^{K} H(K-J) u(J)$

  con $\phi(K) = A^K$, $H(K) = \begin{cases} 0 & K=0 \\ A^{K-1}B & K \geq 1 \end{cases}$

- $X(z) = z(zI-A)^{-1} x_0 + (zI-A)^{-1} B U(z)$

Da qui otteniamo che:

• $\mathcal{Z}\{A^k x_0\} = z(zI-A)^{-1}x_0 \Rightarrow \mathcal{Z}\{A^k\} = z(zI-A)^{-1}$

• Se scriviamo $H(k) = G(k-1)\,\delta_{-1}(k-1)$ con $G(k) := A^k B$ $\Longrightarrow$

$$\mathcal{Z}\{H(k)\} = H(z) = \frac{G(z)}{z} = \frac{\mathcal{Z}\{A^k B\}}{z} = \frac{1}{z}\cdot z(zI-A)^{-1}B = (zI-A)^{-1}B$$

Ma, per la definizione di $x(k)$, $X(z)$: $\mathcal{Z}\{\sum_{j=0}^{k} H(k-j)u(j)\} = (zI-A^{-1})BU(z)$

$\Rightarrow \mathcal{Z}\{\sum_{j=0}^{k} H(k-j)u(j)\} = H(z)U(z)$

Per cui, anche nel dominio discreto, vale la proprietà della trasformata del prodotto di convoluzione che già conosciamo:

$$\mathcal{Z}\{\sum_{j=0}^{k} f_1(j)\,f_2(k-j)\} = \mathcal{Z}\{\sum_{j=0}^{k} f_1(k-j)\,f_2(j)\} = F_1(z)F_2(z)$$

Inoltre:

• $\Psi(z) = \mathcal{Z}\{\Psi(k)\} = \mathcal{Z}\{CA^k\} = zC(zI-A)^{-1}$

• $W(z) = \mathcal{Z}\{W(k)\} = \mathcal{Z}\{CA^{k-1}B + \delta_0(k)D\} = \mathcal{Z}\{CH(k) + \delta_0(k)D\} = C(zI-A)^{-1}B + D$

$\rightsquigarrow$ Anche sulla matrice delle risposte impulsive in uscita $W(k)$ possiamo osservare che vale la proprietà della trasformata del prodotto di convoluzione.

Cenni all'analisi modale:

Senza volerlo, nel caso a tempo continuo abbiamo già calcolato la decomposizione spettrale della matrice di transizione dello stato $\phi(k) = A^k$:

$$A^k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k w_i v_i^T$$

Osservazioni:

1) I modi naturali del sistema convergono a zero se il modulo degli autovalori di A è minore di 1 (nel caso a tempo continuo, invece, occorreva una parte reale negativa).
2) Anche gli autovalori reali, se negativi, producono modi oscillatori (nel caso a tempo continuo, invece, occorrevano autovalori complessi).
3) Quando A presenta l'autovalore $\lambda_i = 0$, nella risposta libera in z compaiono termini del tipo $\frac{1}{z^h}$ che, come abbiamo visto, corrispondono a un impulso collocato al tempo h e, quindi, a un modo che si esaurisce in un tempo finito.

Notiamo che, nel tempo continuo, non avevamo casi in cui dei modi si esaurissero in un tempo finito. In effetti, un sistema a tempo discreto che deriva dal campionamento di un sistema a tempo continuo non può avere una matrice A con autovalore $\lambda_i = 0$.

Antitrasformazione con poli complessi:

Nel caso di poli complessi si procede in un modo molto simile a quello utilizzato per Laplace, con la differenza che qui conviene esprimere i poli complessi utilizzando la notazione polare.

Si consideri quindi una funzione razionale propria $X(z)$ con un polo p_i non reale. Siano ρ, θ rispettivamente il modulo e la fase di questo polo complesso, cioè $p_i = \rho e^{j\theta}$. Essendo $X(z)$ una funzione razionale di z con coefficienti reali, se $p_i \notin \mathbb{R}$ è un polo di $X(z)$ con molteplicità m_i, anche il complesso coniugato $p_h = p_i^* = \rho e^{-j\theta}$ sarà polo di $X(z)$ con la stessa molteplicità $m_h = m_i$.

Chiaramente p_i, p_h sono poli anche della funzione $\bar{X}(z) = \frac{X(z)}{z}$.

Consideriamo inizialmente il caso di poli complessi coniugati con $m_i = m_h = 1$.

Siano $\alpha_{i1} = m e^{j\phi}$, $\alpha_{h1} = m e^{-j\phi}$ i coefficienti dei termini nello sviluppo in fratti semplici di $\bar{X}(z)$ relativi a questi due poli complessi coniugati. Nello sviluppo in fratti semplici comparirà quindi una coppia di termini del tipo:

$$\bar{X}_{ih}(z) = \frac{m e^{j\phi}}{z - \rho e^{j\theta}} + \frac{m e^{-j\phi}}{z - \rho e^{-j\theta}}$$

Rimoltiplicando per z si ha:

$$X_{ih}(z) = z \bar{X}_{ih}(z) = m e^{j\phi} \frac{z}{z - \rho e^{j\theta}} + m e^{-j\phi} \frac{z}{z - \rho e^{-j\theta}}$$

$$\Longrightarrow x_{ih}(k) = [m e^{j\phi} (\rho e^{j\theta})^k + m e^{-j\phi} (\rho e^{-j\theta})^k] \delta_{-1}(k) =$$

$$= m \rho^k (e^{j(\theta k + \phi)} + e^{-j(\theta k + \phi)}) \delta_{-1}(k) = 2 m \rho^k \cos(\theta k + \phi) \delta_{-1}(k)$$

Nel caso in cui il polo complesso $p_i = \rho e^{j\theta}$ abbia molteplicità $m_i > 1$, definendo $\alpha_{ij} = m_{ij} e^{j\phi_{ij}}$, $\alpha_{hj} = \alpha_{ij}^* = m_{ij} e^{-j\phi_{ij}}$, nello sviluppo in fratti semplici di $\bar{X}(z)$ compariranno termini del tipo:

$$\overline{X}_{ih,j}(z) = \frac{m_{ij} e^{j\phi_{ij}}}{(z-\rho e^{j\theta})^j} + \frac{m_{ij} e^{-j\phi_{ij}}}{(z-\rho e^{-j\theta})^j} \qquad j = 1,2,\dots,m_i$$

Rimoltiplicando per z si ha:

$$X_{ih,j}(z) = z\overline{X}_{ih,j}(z) = m_{ij} e^{j\phi_{ij}} \frac{z}{(z-\rho e^{j\theta})^j} + m_{ij} e^{-j\phi_{ij}} \frac{z}{(z-\rho e^{-j\theta})^j}$$

$$\Rightarrow x_{ih,j}(k) = \left[m_{ij} e^{j\phi_{ij}} \binom{k}{j-1} (\rho e^{j\theta})^{k-j+1} + m_{ij} e^{-j\phi_{ij}} \binom{k}{j-1} (\rho e^{-j\theta})^{k-j+1} \right] \delta_{-1}(k) =$$

$$= m_{ij} \rho^{k-j+1} \binom{k}{j-1} \left(e^{j[\theta(k-j+1)+\phi_{ij}]} + e^{-j[\theta(k-j+1)+\phi_{ij}]} \right) \delta_{-1}(k)$$

$$= 2m_{ij} \binom{k}{j-1} \rho^{k-j+1} \cos[\theta(k-j+1)+\phi_{ij}] \delta_{-1}(k)$$

Esercizio:

Determinare l'antitrasformata Zeta della seguente funzione:

$$X(z) = \frac{z}{z^2+2z+4}$$

$$\overline{X}(z) = \frac{X(z)}{z} = \frac{1}{z^2+2z+4} = \frac{\alpha_{11}}{z+1-j\sqrt{3}} + \frac{\alpha_{21}}{z+1+j\sqrt{3}}$$

$$\alpha_{11} = \lim_{z \to -1+j\sqrt{3}} (z+1-j\sqrt{3}) \frac{1}{(z+1-j\sqrt{3})(z+1+j\sqrt{3})} = -\frac{1}{2\sqrt{3}} j$$

$$\alpha_{21} = \alpha_{11}^* = \frac{1}{2\sqrt{3}} j$$

Ora scriviamo il polo $p_1 = -1+j\sqrt{3}$ e il coefficiente $\alpha_{11} = -\frac{1}{2\sqrt{3}} j$ in notazione polare: $p_1 = \rho e^{j\theta}$, $\alpha_{11} = m e^{j\phi}$, dove:

$\rho = |p_1| = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = 2$ $\qquad$ $\theta = \text{atan2}(\sqrt{3}, -1) = \frac{2}{3}\pi$

$m = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ $\qquad$ $\phi = \text{atan2}(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, 0) = -\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow x(k) = 2m\rho^k \cos(\theta k + \phi) \delta_{-1}(k) = \frac{2^k}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{2}{3}\pi k - \frac{\pi}{2}\right) \delta_{-1}(k)$$

13/04/2021

Calcolo della risposta mediante Laplace nell'esempio del carrello:

Riconsideriamo la seguente equazione dinamica del carrello:

$$m\ddot{x} + \underbrace{\gamma}_{\text{coeff. attrito viscoso}} \dot{x} = u(t) \qquad \text{con } x_0 = 0,\ v_0 = \dot{x}_0 = 0$$

Nel calcolo della risposta, assumiamo $\gamma = 0$ ($\Rightarrow m\ddot{x} = u(t)$) e

$$u(t) = \begin{cases} F & t \in (0, T) \\ -F & t \in (T, 2T) \\ 0 & t > 2T \end{cases}$$

$$\Longrightarrow u(t) = F\delta_{-1}(t) - 2F\delta_{-1}(t-T) + F\delta_{-1}(t-2T)$$

Per trasformare la $u(t)$, introduciamo la trasformata della funzione ritardata:

$$\mathcal{L}\{x(t-T)\} = \int_0^{+\infty} x(t-T)e^{-st}dt = e^{-sT}\int_0^{+\infty} x(t-T)e^{-s(t-T)}dt = e^{-sT}\int_T^{+\infty} x(t-T)e^{-s(t-T)}dt =$$

$$= e^{-sT}\int_0^{+\infty} x(\tau)e^{-s\tau}d\tau = X(s)e^{-sT}$$

$$\Longrightarrow U(s) = F\frac{1}{s} - 2F\frac{1}{s}e^{-sT} + F\frac{1}{s}e^{-2sT} = \frac{F}{s}\left(1 - 2e^{-sT} + e^{-2sT}\right)$$

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) \quad ; \quad \mathcal{L}\{\dot{x}\} = sX(s) - x_0 = sX(s)$$

$$\mathcal{L}\{\ddot{x}\} = s^2X(s) - sx_0 - \dot{x}_0 = s^2X(s)$$

$$\Longrightarrow X(s) = \frac{1/m}{s^2}U(s) = \frac{F/m}{s^3}\left(1 - 2e^{-sT} + e^{-2sT}\right) = X_0(s)\left[1 - 2e^{-sT} + e^{-2sT}\right]$$

con $X_0(s) := \frac{F/m}{s^3}$

Per la proprietà della trasformata della funzione ritardata:

$$x(t) = x_0(t) - 2x_0(t-T) + x_0(t-2T)$$

con $x_0(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F/m}{s^3}\right\} = \frac{F}{2m}t^2$

$$\Longrightarrow x(t) = \begin{cases} x_0(t) & t \in (0, T) \\ x_0(t) - 2x_0(t-T) & t \in (T, 2T) \\ x_0(t) - 2x_0(t-T) + x_0(t-2T) & t > 2T \end{cases}$$

$$x_0(t) - 2x_0(t-T) = \frac{F}{2m}t^2 - 2\frac{F}{2m}(t-T)^2 = \frac{F}{2m}\left(-t^2 + 4tT - 2T^2\right)$$

$$x_0(t) - 2x_0(t-T) + x_0(t-2T) = \frac{F}{2m}\left(t^2 - 2(t-T)^2 + (t-2T)^2\right) = \frac{FT^2}{m}$$

$$\Longrightarrow x(t) = \begin{cases} \frac{F}{2m}t^2 & t \in (0, T) \\ \frac{F}{2m}\left(-t^2 + 4tT - 2T^2\right) & t \in (T, 2T) \\ \frac{FT^2}{m} & t > 2T \end{cases}$$

Rifacciamo ora il calcolo della risposta introducendo un attrito viscoso ($\gamma \neq 0$).
Dunque, l'equazione da cui partiamo è:

$$m\ddot{x} + \gamma \dot{x} = u(t)$$

$$\Rightarrow ms^2 X(s) + \gamma s X(s) = U(s) \Rightarrow X(s) = \frac{1}{ms^2+\gamma s} U(s) = \frac{1/m}{s(s+\gamma/m)} U(s) =$$

$$= \frac{F/m}{s^2(s+\gamma/m)}\left(1-2e^{-sT}+e^{-2sT}\right) = X_0(s)\left[1-2e^{-sT}+e^{-2sT}\right]$$

con $X_0(s) := \frac{F/m}{s^2(s+\gamma/m)}$

Sviluppando in fratti semplici si ha che:

$$X_0(s) = -\frac{Fm}{\gamma^2}\frac{1}{s} + \frac{F}{\gamma}\frac{1}{s^2} + \frac{Fm}{\gamma^2}\frac{1}{s+\gamma/m}$$

$$\Rightarrow x_0(t) = \left[\frac{Fm}{\gamma^2}\left(e^{-\gamma/m\, t}-1\right) + \frac{F}{\gamma}t\right]\delta_{-1}(t)$$

Per la proprietà della trasformata della funzione ritardata:

$$x(t) = x_0(t) - 2x_0(t-T) + x_0(t-2T) =$$

$$= -\frac{Fm}{\gamma^2}\left[\delta_{-1}(t) - 2\delta_{-1}(t-T) + \delta_{-1}(t-2T)\right] +$$

$$+ \frac{Fm}{\gamma^2}\left[e^{-\gamma/m\, t}\delta_{-1}(t) - 2e^{-\gamma/m\,(t-T)}\delta_{-1}(t-T) + e^{-\gamma/m\,(t-2T)}\delta_{-1}(t-2T)\right] +$$

$$+ \frac{F}{\gamma}\left[t\delta_{-1}(t) - 2(t-T)\delta_{-1}(t-T) + (t-2T)\delta_{-1}(t-2T)\right]$$

Analizziamo l'andamento di $x(t)$ per $t \to +\infty$; sicuramente le funzioni gradi= no varranno tutte 1:

$$x(t) = \underbrace{-\frac{Fm}{\gamma^2}(1-2+1)}_{\text{IDENTICAMENTE NULLO}} + \frac{Fm}{\gamma^2}\left[e^{-\gamma/m\, t} - 2e^{-\gamma/m\,(t-T)} + e^{-\gamma/m\,(t-2T)}\right] + \underbrace{\frac{F}{\gamma}\left[t-2(t-T)+t-2T\right]}_{\text{IDENTICAMENTE NULLO}}$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{Fm}{\gamma^2}\left[e^{-\gamma/m\, t} - 2e^{-\gamma/m\,(t-T)} + e^{-\gamma/m\,(t-2T)}\right]$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$$

Questo sembra paradossale perché vuol dire che, anche con un coefficiente d'at= trito viscoso infinitesimo, il carrello tende a tornare indietro alla posizione ini= ziale. Proviamo a dare delle giustificazioni a questo fatto.

GIUSTIFICAZIONE BASATA SU CONSIDERAZIONI INSIEMISTICHE:

Sfruttiamo il principio di sovrapposizione degli effetti e di invarianza alla traslazione temporale.

Supponiamo di applicare un controllo $u_a(t)$ definito nel seguente modo:

$$u_a(t) = \begin{cases} F & t \in (0, T) \\ 0 & t \geq T \end{cases}$$

In presenza di attrito (e solo in presenza di attrito), questo controllo produrrà una traiettoria $x_a(t)$ che tende a un valore FINITO $\bar{x}$: $\lim_{t \to +\infty} x_a(t) = \bar{x}$

Consideriamo ora il seguente controllo opposto al precedente:

$$u_b(t) = \begin{cases} -F & t \in (0, T) \\ 0 & t \geq T \end{cases}$$

Allora, per la linearità, osserveremo un comportamento opposto al precedente, con $\lim_{t \to +\infty} x_b(t) = -\bar{x}$

Prendiamo la traslazione di T del controllo $u_b(t)$ e chiamiamola $\tilde{u}_b(t)$:

$\tilde{u}_b(t) = u_b(t-T)$

È evidente che la somma di $u_a(t)$ e $\tilde{u}_b(t)$ restituisce proprio il controllo che applicavamo nell'esempio del carrello: $u_a(t) + \tilde{u}_b(t) = u(t)$

D'altra parte, per l'invarianza alla traslazione temporale, l'effetto di $\tilde{u}_b(t)$ è lo stesso di $u_b(t)$ ma ritardato di T; perciò, se chiamiamo con $\tilde{x}_b(t)$ la traiettoria corrispondente a $\tilde{u}_b(t)$, varrà sempre $\lim_{t \to +\infty} \tilde{x}_b(t) = -\bar{x}$.

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} x(t) = \lim_{x \to +\infty} \left(x_a(t) + \tilde{x}_b(t) \right) = \bar{x} - \bar{x} = 0$$

GIUSTIFICAZIONE BASATA SUL TEOREMA DEL VALORE FINALE:

Sappiamo che, sotto le dovute ipotesi, $\lim_{t \to +\infty} x(t) = \lim_{s \to 0} s\cancel{F}X(s)$.

$\boxed{\text{CASO } \gamma > 0}$ $\quad X(s) = \dfrac{F/m}{s^2(s+\gamma/m)} \left[1 - 2e^{-sT} + e^{-2sT} \right]$

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = \lim_{s \to 0} sX(s) = \lim_{s \to 0} s \frac{F/m}{s^2(s+\gamma/m)} \left[1 - 2e^{-sT} + e^{-2sT} \right] =$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{F/m}{s(s+\gamma/m)} \left[1 - 2\left(1 - sT + \frac{s^2T^2}{2}\right) + \left(1 - 2sT + \frac{s^2 4T^2}{2}\right) + O(s^2) \right] =$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{F/m}{s(s+\gamma/m)} \left[s^2T^2 + O(s^2)\right] = 0$$

$\boxed{\text{CASO } \gamma=0}$ $$X(s) = \frac{F/m}{s^3}\left[1-2e^{-sT}+e^{-2sT}\right]$$

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} s\, \frac{F/m}{s^3}\left[s^2T^2+O(s^2)\right] = \frac{F}{m}T^2$$

Osservazione:

La nostra soluzione è continua rispetto ai coefficienti dell'equazione differenziale, ovvero vale la seguente proprietà:

Fissato un tempo qualsiasi $\bar{t}$, per ogni $\varepsilon>0$ è sempre possibile trovare una perturbazione sufficientemente piccola γ_ε su γ tale che la soluzione $x(\bar{t})$ ottenuta per $\gamma=0$ differisce da quella perturbata $\tilde{x}(\bar{t})$ ottenuta da una qualunque $\gamma<\gamma_\varepsilon$ per meno di ε.

Tuttavia, ciò non vale per $\bar{t}$ che tende all'infinito (caso in cui, di fatto, γ_ε è forzato a zero).

Dobbiamo vedere quand'è che

converge:

1) $Re\{p_i\} < 0$ → in tal

2) $Re\{p_i\} = 0 \wedge m_i = 1$

neanche il fattore polinomi

Ora, la $y(t)$ appena consi

grosso:

→ Poiché per ipotesi $|u(t)| \leq$

p_i tali che $Re\{p_i\} <$

→ Per quanto riguarda l

li relativi all'ingress

i poli con parte reale

uguali a qualche

risposta $Y_f(s)$.