ESERCIZIO 6 BIS

Sia $(\mathbb{R}^3; q)$ lo spazio pseudoeuclideo definito dalla forma quadratica $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, dove $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 3x_3^2$.

Calcolare gli invarianti (n, p, r, s) di $(\mathbb{R}^3, q)$, ed una base ortonormale. Rispondere alla stessa domanda per lo spazio pseudoeuclideo che si ottiene restringendo q sul sottospazio U generato dai vettori $(1,-1,1)$, $(1,1,0)$.

SVOLGIMENTO

Innanzitutto scrivo la matrice di Gram rispetto alla base canonica. Sulla diagonale principale metto ordinatamente i coefficienti di x_1^2, x_2^2, x_3^2. Nelle componenti g_{12}, g_{21} (1° riga-2° colonna/2° riga-1° colonna) metto il coefficiente dimezzato di x_1x_2. Nelle componenti g_{13}, g_{31} metto il coefficiente dimezzato di x_1x_3. Nelle componenti g_{23}, g_{32} metto il coefficiente dimezzato di x_2x_3.

$$G_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(q) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Adesso, tramite l'algoritmo di Gauss-Lagrange, mi calcolo la matrice diagonale D congruente a $G_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(q)$ e la matrice P^T tale che: $D = P^T G_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(q) P$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[e_{31}(-1)]{e_{21}(-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[e^{31}(-1)]{e^{21}(-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}}_{D} \quad \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix}}_{P^T}$$

Dalla matrice D posso ricavarmi subito gli invarianti (ordine, rango, indice e segnatura):
$(n, p, r, s) = (3, 3, 2, 1)$

Una base ortogonale $\mathcal{B}$ sarà formata dalle righe di P^T. Quindi:
$\mathcal{B} = \{(1,0,0), (-1,1,0), (-1,0,1)\}$

Per trovarmi i vettori appartenenti alla base ortonormale $\mathcal{C}$, devo prendere i vettori di $\mathcal{B}$ e dividerli per la radice quadrata del valore assoluto della componente della diagonale principale di D che si trova sulla stessa riga:

$\underline{c}_1 = \frac{1}{\sqrt{1}}(1,0,0) = (1,0,0)$

$\underline{c}_2 = \frac{1}{\sqrt{1}}(-1,1,0) = (-1,1,0)$

$\underline{c}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)$

Perciò, la base ortonormale $\mathcal{C}$ è:

$\mathcal{C} = \{(1,0,0), (-1,1,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)\}$

Per quanto riguarda lo spazio pseudoeuclideo che si ottiene restringendo q sul sottospazio U generato dai vettori $(1,-1,1),(1,1,0)$, la matrice di Gram si calcola come segue:
Intanto denoto con $\mathcal{U}$ la base $\{(1,-1,1),(1,1,0)\}$, con $G^{\mathcal{U}}_{\mathcal{U}}(q)$ la matrice di Gram e con $(U, q|U)$ lo spazio pseudoeuclideo ristretto.

La componente $g_{1,1}$ di $G^{\mathcal{U}}_{\mathcal{U}}(q)$ si ottiene moltiplicando il primo vettore di $\mathcal{U}$ trasposto (in orizzontale) per la matrice $G^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(q)$ per il primo vettore di $\mathcal{U}$ (in verticale):

$$g_{11} = (1,-1,1)\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = (1,2,3)\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = 2$$

La componente g_{12} si ottiene moltiplicando il primo vettore di $\mathcal{U}$ trasposto per $G^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(q)$ per il secondo vettore di $\mathcal{U}$:

$$g_{12} = (1,-1,1)\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = (1,2,3)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 3$$

La componente g_{21} si ottiene moltiplicando il secondo vettore di $\mathcal{U}$ trasposto per $G^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(q)$ per il primo vettore di $\mathcal{U}$:

$$g_{21} = (1,1,0)\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = (2,1,2)\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = 3$$

La componente g_{22} si ottiene moltiplicando il secondo vettore di $\mathcal{U}$ trasposto per $G^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(q)$ per il secondo vettore di $\mathcal{U}$:

$$g_{22} = (1,1,0)\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = (2,1,2)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 3$$

In definitiva: $G^{\mathcal{U}}_{\mathcal{U}}(q) = \begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 3\end{bmatrix}$

Ora applico l'algoritmo di Gauss-Lagrange per calcolarmi la matrice diagonale D' congruente a $G^{\mathcal{U}}_{\mathcal{U}}(q)$ e la matrice Q^T tale che: $D' = Q^T G^{\mathcal{U}}_{\mathcal{U}}(q)\, Q$.

$$\left[\begin{array}{cc|cc}2 & 3 & 1 & 0\\ 3 & 3 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow{e_{21}(-3/2)} \left[\begin{array}{cc|cc}2 & 3 & 1 & 0\\ 0 & -3/2 & -3/2 & 1\end{array}\right] \xrightarrow{e^{21}(-3/2)} \left[\begin{array}{cc|cc}2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -3/2 & -3/2 & 1\end{array}\right]$$

$$\underbrace{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & -3/2\end{matrix}}_{D'} \quad \underbrace{\begin{matrix}1 & 0\\ -3/2 & 1\end{matrix}}_{Q^T}$$

Dalla matrice D' ricavo gli invarianti di $(U, q|U)$, che sono: $(n,p,r,s) = (2,2,1,0)$

Per ottenere una base ortogonale $\mathcal{B}'$ per $(U, q|U)$, devo utilizzare le righe di Q^T come i coefficienti da mettere davanti ai vettori della base $\mathcal{U}$. Pertanto, il primo vettore di $\mathcal{B}'$ sarà:

$$\underline{b}_1' = 1(1,-1,1) + 0(1,1,0) = (1,-1,1)$$

Mentre il secondo vettore di $\mathcal{B}'$ sarà:

$$\underline{b}_2' = -\tfrac{3}{2}(1,-1,1) + 1(1,1,0) = \left(-\tfrac{3}{2}+1,\ \tfrac{3}{2}+1,\ -\tfrac{3}{2}+0\right) = \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{2}, -\tfrac{3}{2}\right)$$

Di conseguenza: $\mathcal{B}' = \left\{(1,-1,1), \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{2}, -\tfrac{3}{2}\right)\right\}$

Come prima, per calcolare i vettori della base ortonormale $\mathcal{C}'$ per $(U, q|U)$, devo prendere i vettori di $\mathcal{B}'$ e dividerli per la radice quadrata del valore assoluto della componente della diagonale principale di $\mathcal{D}'$ che si trova sulla stessa riga rispetto ai coefficienti relativi agli stessi vettori $\underline{b}_1'$ e $\underline{b}_2'$:

$$\underline{c}_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,1) \qquad \underline{c}_2' = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\left(-\tfrac{1}{2}, +\tfrac{5}{2}, -\tfrac{3}{2}\right) = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{2}, -\tfrac{3}{2}\right)$$

Perciò, la base ortonormale $\mathcal{C}'$ è: $\mathcal{C}' = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,1), \sqrt{\tfrac{2}{3}}\left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{2}, -\tfrac{3}{2}\right)\right\}$

RISPOSTA

Gli invarianti di $(\mathbb{R}^3, q)$ sono: $(n, p, r, s) = (3, 3, 2, 1)$

La base ortonormale $\mathcal{C}$ per $(\mathbb{R}^3, q)$ è: $\mathcal{C} = \left\{(1,0,0), (-1,1,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)\right\}$

Gli invarianti di $(U, q|U)$ sono: $(n, p, r, s) = (2, 2, 1, 0)$

La base ortonormale $\mathcal{C}'$ per $(U, q|U)$ è: $\mathcal{C}' = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,1), \sqrt{\tfrac{2}{3}}\left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{2}, -\tfrac{3}{2}\right)\right\}$

GEOMETRIA

- Le 8 proprietà dello spazio vettoriale
- / 1 Le 7 regole di calcolo + dimostrazioni
- Esempi di spazi vettoriali
- I sottospazi vettoriali con le loro 3 condizioni e 2 proprietà
- / 2 Le 6 proprietà del sottospazio generato + dimostrazioni
- ✓ 3 Le 8 proprietà dei sistemi linearmente indipendenti + dimostrazioni
- / 4 La definizione di base di uno spazio vettoriale + teorema + dimostrazione
- Esempi di basi
- / 5 Il Lemma di Steinitz + dimostrazione
- ✓ 6 La dimensione di uno spazio vettoriale, le 8 proprietà + dimostrazioni
- Unione e intersezione di sottospazi
- ✓ 7 Le 3 proprietà della somma + dimostrazioni
- ✓ 8 La somma diretta, esempi, proprietà + dimostrazioni

- Tipi di matrici
- Le 3 proprietà del prodotto punto (scalare)
- Prodotto righe per colonne tra matrici + 4 proprietà
- Le 4 proprietà della moltiplicazione nell'algebra delle matrici quadrate
- ✓ 9 Le 5 proprietà delle matrici invertibili +^{2} dimostrazioni
- / 10 Le 6 proprietà della matrice trasposta +^{2} dimostrazioni
- / 11 Il rango di una matrice, teorema del rango + dimostrazione
- Le 3 operazioni elementari sulle righe di una matrice, le matrici elementari + equivalenza per righe
- Le matrici a scala, l'algoritmo di Gauss + 2 corollari
- / 12 L'applicazione delle coordinate + 3 proprietà + dimostrazioni
- Il determinante, lo sviluppo di Laplace
- Calcolo del determinante con le operazioni elementari
- ✓ 13 Le 4 proprietà del determinante + dimostrazioni + corollario
- ✓ 14 I minori, i teoremi sui minori + 1 dimostrazione, gli orlati, il teorema degli orlati
- Il calcolo esplicito della matrice inversa

- Il teorema di Jordan + dimostrazione
- L'endomorfismo nilpotente
- Le 5 proprietà dell'autospazio generalizzato
- Calcolo della forma canonica senza conoscere una base a stringhe
- Il teorema di Cayley-Hamilton + dimostrazione
- Il polinomio minimo di un operatore, proposizione + dimostrazione + corollario

- I sistemi lineari di equazioni differenziali
- Cos'è una soluzione del sistema
- Il teorema di esistenza e unicità, conseguenze, corollario
- 2 proposizioni sui sistemi di equazioni differenziali + 1 dimostrazione
- Il calcolo esplicito della matrice esponenziale

- Le forme bilineari simmetriche, la matrice di Gram
- La relazione di congruenza
- Le forme quadratiche, la polarizzazione
- L'algoritmo di Gauss-Lagrange
- Lo spazio pseudo euclideo, gli invarianti
- Il teorema di Sylvester + dimostrazione
- Le basi ortogonali e ortonormali
- Il teorema degli assi principali
- La classificazione degli spazi pseudoeuclidei
- Gli spazi euclidei + 5 osservazioni + 9 regole di calcolo
- Le 3 proprietà della norma + dimostrazioni
- La disuguaglianza di Cauchy-Schwarz + dimostrazione
- La proiezione ortogonale + 12 osservazioni

- I sistemi lineari
- Risoluzione di un sistema lineare tramite le operazioni elementari
- Risoluzione di un sistema lineare usando il determinante
- ✓ 15 Il teorema di Rouché-Capelli, il teorema di Cramer + dimostrazioni, la regola di Cramer
- 16 Sistema lineare omogeneo + teorema + dimostrazione + corollario
- 17 Rappresentazione cartesiana di un sottospazio + proposizione + dimostrazione
- Intersezione di due sottospazi con la rappresentazione cartesiana
- 18 Il sistema omogeneo associato, proposizione + dimostrazione

- Le coordinate
- 19 La matrice del cambiamento delle coordinate + 3 proprietà + dimostrazioni
- 20 Le applicazioni lineari + 7 proprietà di calcolo + dimostrazioni
- ✓ 21 L'applicazione LA, proposizione + dimostrazione
- ✓ 22 La matrice rappresentativa + 3 proprietà di calcolo + dimostrazioni + osservazioni
- Rotazioni, riflessioni e proiezioni ortogonali
- 23 Nucleo e immagine di un'applicazione lineare, 4+7 proprietà + dimostrazioni
- Gli isomorfismi + 4 proprietà (*)
- Lo spazio delle applicazioni lineari {Hom(V, V')}, gli endomorfismi
- La relazione di similitudine + 4 osservazioni
- L'algoritmo per la diagonalizzazione
- Autovalore e autovettore + 6 proprietà
- 24 La molteplicità di un autovalore, proposizione sul confronto tra mg e ma + dimostrazione
- 25 Teorema sull'algoritmo per la diagonalizzazione + dimostrazione

- Il campo dei numeri complessi
- ✓ 26 Il teorema di Ruffini + dimostrazione
- ✓ 27 Il teorema fondamentale dell'algebra, corollario + dimostrazione corollario
- 28 La matrice diagonale a blocchi + 2 proposizioni + dimostrazioni
- 29 I blocchi di Jordan, le basi a stringa, proposizione + dimostrazione