MOTO RETTILINEO UNIFORME

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v(t)\,dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt \Rightarrow x(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt \overset{v\ cost.}{=} x_0 + v(t - t_0)$$

MOTO RETTILINEO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \xRightarrow{\text{come prima}} x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a(t)\,dt \Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt \Rightarrow v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt \overset{a\ cost.}{=} v_0 + a(t - t_0)$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt = x_0 + \int_{t_0}^{t} [v_0 + a(t - t_0)]\,dt \Rightarrow x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

$$a(x) = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} \Rightarrow \int_{x_0}^{x} a(x)\,dx = \int_{v_0}^{v} v\,dv \Rightarrow \int_{x_0}^{x} a(x)\,dx = \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2(x) = v_0^2 + 2\int_{x_0}^{x} a(x)\,dx \overset{a\ cost.}{=} v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

MOTO SMORZATO

$$a = \frac{dv}{dt} = -Kv \Rightarrow \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -K\int_{t_0}^{t} dt \Rightarrow \log\left(\frac{v}{v_0}\right) = -K(t - t_0) \overset{t_0=0}{=} -Kt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v}{v_0} = e^{-Kt} \Rightarrow v(t) = v_0 e^{-Kt} = v_0 e^{-t/\tau}$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt \Rightarrow x(t) - x_0 = -K\int_{t_0=0}^{t} v_0 \frac{e^{-Kt}}{-K}\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = x_0 - \frac{v_0}{K}\left[e^{-Kt} - e^{-Kt_0}\right] \overset{t_0=0}{=} x_0 - \frac{v_0}{K}\left(e^{-Kt} - 1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = x_0 + \frac{v_0}{K}\left(1 - e^{-Kt}\right) \xrightarrow[t \to +\infty]{} \frac{v_0}{K}$$

TRAIETTORIE SUL PIANO

$$|d\vec{u}| = ds = |\vec{u}|\,d\theta = d\theta \Longrightarrow d\vec{u} = d\theta \cdot \vec{u}_N \Longrightarrow \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{u}_N$$ ⇝ derivata di un versore

---

$$\vec{r} = r\vec{u}_r \Longrightarrow \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta \Longrightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}_r(t) + \vec{v}_\theta(t)$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} \Longrightarrow \int_{r_0}^{r} d\vec{r} = \int_{t_0}^{t}\vec{v}(t)\,dt \Longrightarrow \vec{r}(t) = r_0 + \int_{t_0}^{t}\vec{v}(t)\,dt$$

$$\vec{v} = v\vec{u}_T \Longrightarrow \vec{a} = \frac{d}{dt}(v\vec{u}_T) = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + v\frac{d\vec{u}_T}{dt} \overset{d\vec{u} = d\theta\cdot\vec{u}_N}{=} \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + v\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_N \Longrightarrow \vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

MOTO CIRCOLARE UNIFORME

$$ds = R\,d\theta \Longrightarrow d\theta = \frac{1}{R}ds \Longrightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{R}\frac{ds}{dt} = \frac{v}{R} =: \omega$$

$$v = \frac{ds}{dt} \Longrightarrow \int_{s_0}^{s} ds = \int_{t_0}^{t} v\,dt \Longrightarrow s(t) = s_0 + v(t - t_0)$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \Longrightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^{t}\omega\,dt \Longrightarrow \theta(t) = \theta_0 + \omega(t - t_0)$$

$$s(T) = s_0 + vT = s_0 + 2\pi R \Longrightarrow vT = 2\pi R \Longrightarrow T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_N = v\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_N = \frac{v^2}{R}\vec{u}_N = \omega^2 R\,\vec{u}_N$$

MOTO CIRCOLARE NON UNIFORME

$$\theta(t) = \frac{s(t)}{R} \Longrightarrow \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{R}\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{v}{R}\right) = \frac{1}{R}\frac{dv}{dt} \Longrightarrow \alpha = \frac{1}{R}a_T$$

$$\alpha(t) = \frac{d\omega}{dt} \Longrightarrow \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_{t_0}^{t} \alpha(t)\,dt \Longrightarrow \omega(t) = \omega_0 + \int_{t_0}^{t} \alpha(t)\,dt$$

$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt} \Longrightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^{t} \omega(t)\,dt \Longrightarrow \theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^{t} \omega(t)\,dt$$

Se il moto è uniformemente accelerato...

$$\omega(t) = \omega_0 + \int_{t_0}^{t} \alpha(t)\,dt = \omega_0 + \alpha(t-t_0)$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^{t} \omega(t)\,dt = \theta_0 + \int_{t_0}^{t} [\omega_0 + \alpha(t-t_0)]\,dt = \theta_0 + \omega_0(t-t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t-t_0)^2$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \Longrightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

MOTO PARABOLICO

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos\theta \\ v_y = v_0 \sin\theta - gt \end{cases}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v_x\, dt \Rightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0=0}^{t} v_0 \cos\theta\, dt = x_0 + v_0 \cos\theta\, t$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} \Rightarrow \int_{y_0}^{y} dy = \int_{t_0}^{t} v_y\, dt \Rightarrow y(t) = y_0 + \int_{t_0=0}^{t} [v_0 \sin\theta - gt]\, dt = y_0 + v_0 \sin\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$x_0 = 0 \Rightarrow x(t) = v_0 \cos\theta\, t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos\theta} \xRightarrow{y_0 = 0}$$

$$\Rightarrow y(x) = v_0 \sin\theta \cdot \frac{x}{v_0 \cos\theta} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\theta}\right)^2 = tg\theta \cdot x - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2\theta} \cdot x^2$$

CALCOLO DELLA GITTATA: $y(x_G) = 0 \Rightarrow tg\theta \cdot x_G - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2\theta} \cdot x_G^2 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_G \left(tg\theta - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2\theta} \cdot x_G\right) = 0 < \begin{matrix} x_G = 0 \\ x_G = \frac{2 v_0^2 \cos^2\theta}{g} \cdot \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \to \text{OK} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{2 \sin\theta \cos\theta\, v_0^2}{g} = \frac{\sin 2\theta \cdot v_0^2}{g} \\ y_G = 0 \end{cases}$$

CALCOLO DELL'ALTEZZA MASSIMA: $v_y = 0 \Rightarrow v_0 \sin\theta - g t_M = 0 \Rightarrow t_M = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$

$$x_M = v_0 \cos\theta \cdot t_M = v_0 \cos\theta \cdot \frac{v_0 \sin\theta}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin\theta \cos\theta = \frac{1}{2} x_G$$

$$y_M = v_0 \sin\theta \cdot t_M - \frac{1}{2} g t_M^2 = v_0 \sin\theta \cdot \frac{v_0 \sin\theta}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin\theta}{g}\right)^2 =$$

$$= \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{g} - \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{g} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{g}$$

CALCOLO DELL'ANGOLO PER LA MASSIMA GITTATA: $\frac{dx_G}{d\theta} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\theta}\left(\frac{V_0^2 \sin 2\theta}{g}\right) = \frac{V_0^2}{g} \cdot 2\cos 2\theta = 0 \Rightarrow \cos 2\theta = 0 \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta_M = \frac{\pi}{4}$$

CALCOLO DEL TEMPO DI VOLO: $x_G = V_0 \cos\theta \cdot t_G \Rightarrow$

$$\Rightarrow t_G = \frac{x_G}{V_0 \cos\theta} = \frac{V_0^2 \sin 2\theta}{g V_0 \cos\theta} = \frac{V_0 \cdot 2 \sin\theta \cos\theta}{g \cos\theta} = \frac{2 V_0 \sin\theta}{g} = 2 t_M$$

**

4 tris

I TRE PRINCIPI DELLA DINAMICA

I) PRINCIPIO DI INERZIA: un corpo mantiene il suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme finché non interviene una forza ad alterarlo.

II) PRINCIPIO DI NEWTON: l'azione di una forza $\vec{F}$ determina un'accelerazione proporzionale a essa: $\vec{F} = m\vec{a}$

III) PRINCIPIO DI AZIONE/REAZIONE: se un corpo A esercita una forza su un corpo B $\Rightarrow$ il corpo B eserciterà una forza sul corpo A uguale e contraria.

Scanned by CamScanner

QUANTITÀ DI MOTO / IMPULSO

$\vec{p} = m\vec{v} \Rightarrow \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow d\vec{p} = \vec{F}dt \Rightarrow m d\vec{v} = \vec{F}dt$

$\Delta\vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{F}(t)\,dt = \vec{J}$

$\vec{J} = \Delta\vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_0 = m\vec{v} - m\vec{v}_0 = m\Delta\vec{v} = m(\vec{v} - \vec{v}_0)$

CORPO POGGIATO SU UNA PIATTAFORMA CHE SI MUOVE VERTICALMENTE CON ACCELERAZIONE

Caso 1: $\vec{a}$ discorde $\vec{g}$

$\vec{g} = -g\vec{U}_y$, $\vec{a} = a\vec{U}_y$

$\vec{N} = m\vec{a} - m\vec{g} = m(\vec{a} - \vec{g}) = m\left[a\vec{U}_y - (-g\vec{U}_y)\right] = m(a+g)\vec{U}_y$

$|\vec{N}| = N = m(a+g) > |\vec{P}| = mg$

Caso 2: $\vec{a}$ concorde $\vec{g}$, $|\vec{a}| < |\vec{g}|$

$\vec{g} = -g\vec{U}_y$, $\vec{a} = -a\vec{U}_y$

$\vec{N} = m(\vec{a} - \vec{g}) = m\left[-a\vec{U}_y - (-g\vec{U}_y)\right] = m(g-a)\vec{U}_y$

$|\vec{N}| = N = m(g-a) = mg - ma < |\vec{P}| = mg$

Caso 3: $\vec{a}$ concorde $\vec{g}$, $|\vec{a}| = |\vec{g}|$

$g = a \Rightarrow mg = ma \Rightarrow N = mg - ma = 0 \Rightarrow \vec{N} = 0$

Caso 4: $\vec{a}$ concorde $\vec{g}$, $|\vec{a}| > |\vec{g}|$

$a > g \Rightarrow$ il corpo si stacca dalla piattaforma.

FORZA D'ATTRITO

$\vec{F}_{as}^{MAX} = -\mu_s N \vec{U}_v$; $\vec{F}_{ad} = -\mu_d N \vec{U}_v$

FORZA ELASTICA / MOTO ARMONICO

$$\vec{F} = -Kx\vec{u}_x \Rightarrow \begin{matrix} F = -Kx \\ F = ma \end{matrix} \Rightarrow -Kx = ma \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + Kx = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}\cdot x = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}$$

Equazione differenziale del moto armonico

$$\Rightarrow x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi)$$

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi)$$

$$\begin{cases} x(0) = A\sin\varphi = x_0 \Rightarrow \sin\varphi = x_0/A \\ v(0) = A\omega\cos\varphi = v_0 \Rightarrow \cos\varphi = v_0/A\omega \end{cases} \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \operatorname{tg}\varphi = \frac{x_0}{A}\cdot\frac{A\omega}{v_0} = \frac{x_0\omega}{v_0}$$

$$\Downarrow (2)$$

$$\begin{cases} x_0^2 = A^2\sin^2\varphi \Rightarrow \sin^2\varphi = x_0^2/A^2 \\ v_0^2 = A^2\omega^2\cos^2\varphi \Rightarrow \cos^2\varphi = v_0^2/A^2\omega^2 \end{cases} \Rightarrow 1 = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = \frac{1}{A^2}\left(x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}$$

$$x(t') = x(t), \quad T = t' - t$$

$$\omega t' + \varphi = \omega t + \varphi + 2\pi \Rightarrow \omega(t' - t) = 2\pi$$

$$t' - t = T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$$

PULSAZIONE

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow \omega = 2\pi\nu$$

*

$$* \quad a(x(t)) = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v \Longrightarrow \int_{x_0}^{x} a(x)\,dx = \int_{v_0}^{v} v\,dv \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \int_{x_0}^{x} -\omega^2 x\,dx = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 \Longrightarrow \frac{1}{2}\omega^2(x_0^2 - x^2) = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow v^2(x) = v_0^2 + \omega^2(x_0^2 - x^2)$$

TENSIONE

$\vec{T} = -m\vec{g}$ se il corpo è appeso verticalmente

$\vec{T} = m\vec{a}_N$ se il corpo compie un moto circolare uniforme

PENDOLO SEMPLICE

$$m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a} \quad , \quad \begin{aligned} m\vec{g} &= (-mg\sin\theta, -mg\cos\theta) \\ \vec{T} &= (0, T) \\ m\vec{a} &= (ma_T, ma_N) \end{aligned} \Longrightarrow \begin{cases} x: & -mg\sin\theta = ma_T \\ y: & -mg\cos\theta = ma_N \end{cases}$$

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega\ell) = \ell\frac{d\omega}{dt} = \ell\alpha = \ell\frac{d^2\theta}{dt^2} \Longrightarrow -mg\sin\theta = m\ell\frac{d^2\theta}{dt^2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow -\frac{mg\sin\theta}{\ell} = \frac{m\ell\,d^2\theta}{\ell\,dt^2} \Longrightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0 \xRightarrow{\theta < 7°} \boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\cdot\theta = 0}$$

$$\Longrightarrow \theta(t) = \theta_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad ; \quad \omega_0 = \sqrt{g/\ell} \quad ; \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\ell/g}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\theta_0 = 0$$

$s(t) = \ell\theta(t) = \ell\theta_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$

$\omega(t) = d\theta/dt = \omega_0\theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$

$\alpha(t) = d\omega/dt = -\omega_0^2\theta_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$

$\vec{v}(t) = \ell\omega t = \ell\omega_0\theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$

$a(t) = -\ell\omega_0^2\theta_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$

$-mg\cos\theta + T = m v^2/\ell \Longrightarrow T = mg\cos\theta + m v^2/\ell = m(g\cos\theta + v^2/\ell)$

MOTI RELATIVI

O = origine del sistema di riferimento fisso

Ω = origine del sistema di riferimento mobile

$\vec{r}$ = coordinate del punto materiale rispetto a O

$\vec{r}\,'$ = coordinate del punto materiale rispetto a Ω

$\vec{r}_\Omega = \overrightarrow{O\Omega}$ = coordinate di Ω rispetto a O

$\vec{v}$ = velocità del punto materiale rispetto a O

$\vec{v}\,'$ = velocità del punto materiale rispetto a Ω

$\vec{v}_\Omega$ = velocità del sistema di riferimento mobile

$\vec{\omega}$ = velocità angolare del sistema di riferimento mobile

$\vec{a}$ = accelerazione del punto materiale rispetto a O

$\vec{a}\,'$ = accelerazione del punto materiale rispetto a Ω

$\vec{a}_\Omega$ = accelerazione del sistema di riferimento mobile

---

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_\Omega \\ \vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_\Omega + \vec{\omega} \times \vec{r}\,' \\ \vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{a}_\Omega + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') + 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,' \end{cases}$$

$\vec{v}_t$ = velocità di trascinamento $= \vec{v} - \vec{v}\,' = \vec{v}_\Omega + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$

$\vec{a}_t$ = accelerazione di trascinamento $= \vec{a}_\Omega + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$

$\vec{a}_c$ = accelerazione di Coriolis $= 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,'$

SISTEMA CHE TRASLA MA NON RUOTA $(\vec{\omega} = 0)$

$\vec{v}_t = \vec{v}_\Omega$ $\quad\quad$ $\vec{a}_t = \vec{a}_\Omega$ $\quad\quad$ $\vec{a}_c = 0$

SISTEMA CHE RUOTA MA NON TRASLA $(\vec{v}_\Omega = 0, \quad \vec{a}_\Omega = 0)$

$\vec{v}_t = \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$ $\quad\quad$ $\vec{a}_t = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$ $\quad\quad$ $\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,'$

$$\vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{a}_\Omega + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') + 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,' \Rightarrow \vec{a}\,' = \vec{a} \underbrace{- \vec{a}_\Omega - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')}_{-\vec{a}_t} \underbrace{- 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,'}_{-\vec{a}_c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{F}\,' := m\vec{a}\,' = m\vec{a} - m\vec{a}_t - m\vec{a}_c := \vec{F}_{vere} + \underbrace{\vec{F}_{centrifuga} + \vec{F}_{Coriolis}}_{\vec{F}_{apparenti}}$$

LAVORO

Lavoro elementare $=: dW = \vec{F}\cdot d\vec{s} \Rightarrow W = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_A^B F ds \cos\theta = \int_A^B F_T ds = \int_A^B m a_T ds =$

$$= \int_{v_A}^{v_B} m \frac{ds}{dt} dv = \int_{v_A}^{v_B} m v dv = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

Energia cinetica $=: E_K = \frac{1}{2} m v^2$

$W_{AB} = E_{K_B} - E_{K_A} = \Delta E_K$ ⤳ TEOREMA DEL LAVORO E DELL'ENERGIA CINETICA

Lavoro delle forze conservative $(\vec{F_c}) =: W_c = \int_A^B \vec{F_c}\cdot d\vec{s} = f(\vec{r}_B, \vec{r}_A) = V(\vec{r}_B) - V(\vec{r}_A) = \Delta V$

↳ FUNZIONE DELLE POSIZIONI FINALE E INIZIALE

$\boxed{V(\vec{r}) = \text{funzione potenziale}}$

$$\Rightarrow \Delta E_K = \Delta V \Rightarrow E_{K_B} - E_{K_A} = V_B - V_A \Rightarrow E_{K_B} - V_B = E_{K_A} - V_A$$

Energia potenziale $=: E_p = -V \Rightarrow E_{K_B} + E_{P_B} = E_{K_A} + E_{P_A}$

Energia meccanica $=: E_m = E_p + E_K \Rightarrow E_{m_B} = E_{m_A}$ ⤳ CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

Potenza $=: P = \frac{dW}{dt} = \vec{F}\cdot\frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v} = Fv\cos\theta = F_T v$

Lavoro della forza peso $=: W_P = \int_A^B \vec{F_P}\cdot d\vec{s} = \int_A^B m\vec{g}\cdot d\vec{s} = -\int_{z_A}^{z_B} mg dz = -mg\int_{z_A}^{z_B} dz =$

$$= -mg(z_B - z_A) = -mgz_B + mgz_A = V(z_B) - V(z_A)$$

$V(z) = -mgz$, $\quad E_p = -V \Rightarrow E_p(z) = mgz$

$W_p = -E_{P_B} + E_{P_A} = -\Delta E_P$

Lavoro della forza elastica $=: W_{el} = \int_A^B \vec{F}_{el}\cdot d\vec{s} = -K\int_{x_A}^{x_B} x\vec{u}_x\cdot dx\vec{u}_x = -K\int_{x_A}^{x_B} x dx =$

$$= -\frac{1}{2}Kx_B^2 + \frac{1}{2}Kx_A^2 = V_B - V_A = -E_{P_B} + E_{P_A}$$

$V = -\frac{1}{2}Kx^2 \Rightarrow E_p = \frac{1}{2}Kx^2$

Lavoro della forza d'attrito $=: W_{a_d} = \int_A^B \vec{F}_{a_d} \cdot d\vec{s} = -\int \mu_d N \vec{u}_v \cdot ds\, \vec{u}_T = -\mu_d N \int_{S_A}^{S_B} ds = -\mu_d N \ell < 0$

$$W_{a_d} = \Delta E_K = E_{K_B} - E_{K_A} < 0 \Rightarrow E_{K_B} < E_{K_A} \Rightarrow v_B < v_A$$

Situazione con forze conservative e non:

$$W = W_C + W_{NC} = \Delta E_K = E_{K_B} - E_{K_A}$$

$$W_C = -\Delta E_P = -E_{P_B} + E_{P_A} \;; \qquad W_{NC} \neq -\Delta E_P = \Delta E_K$$

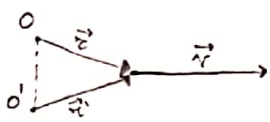
$$\Rightarrow W_{NC} = \Delta E_K + \Delta E_P = \Delta E_m = E_{K_B} - E_{K_A} + E_{P_B} - E_{P_A} = E_{m_B} - E_{m_A} < 0$$

$\Rightarrow E_{m_B} < E_{m_A}$ $\rightsquigarrow$ DISSIPAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA

MOMENTO

Momento angolare = momento del vettore quantità di moto

Momento angolare relativo al polo O $=: \vec{L}_O = \vec{r} \times m\vec{v}$



$$\vec{L}_{O'} = \vec{r}' \times m\vec{v} = \vec{L}_O + \vec{O'O} \times m\vec{v}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt} \overset{\text{POLO FISSO}}{=} \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt} = 0 + \vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt} =$$

$= \vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times \vec{F} \equiv \vec{M}_O =$ momento della forza

$\Rightarrow \vec{M}_O = \dfrac{d\vec{L}_O}{dt}$ $\rightsquigarrow$ TEOREMA DEL MOMENTO ANGOLARE

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \ldots + \vec{r} \times \vec{F}_n = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n) = \vec{r} \times \vec{R}, \qquad \vec{R} = \sum_i \vec{F}_i$$

$\begin{cases} \vec{R} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} \\ \vec{M}_O = \dfrac{d\vec{L}_O}{dt} \end{cases}$ $\rightsquigarrow$ EQUAZIONI CARDINALI DELLA DINAMICA

$$\Delta \vec{L} = \int_{L(0)}^{L(t)} d\vec{L} = \int_0^t \vec{M}\, dt$$

$\Delta \vec{L} = \int (\vec{r} \times \vec{F})\, dt = \vec{r} \times \int \vec{F} dt = \vec{r} \times \vec{J} =$ momento dell'impulso

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int F \cos\theta\, ds = \int F_T\, ds = \int F_T\, r\, d\theta = \int M\, d\theta$$

Scanned by CamScanner

SISTEMI CON PIÙ PUNTI MATERIALI

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

$$\vec{r}'_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i'}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i (\vec{r}_i + \vec{O'O})}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} + \frac{\vec{O'O} \cancel{\sum_i m_i}}{\cancel{\sum_i m_i}} \Longrightarrow \vec{r}'_{CM} = \vec{r}_{CM} + \vec{O'O}$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\vec{P}}{m} \Longrightarrow \vec{P} = m\vec{v}_{CM}$$

$$\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{1}{\sum_i m_i} \cdot \frac{\sum_i m_i \cdot d\vec{v}_i}{dt} = \frac{\overset{=0}{\vec{R}^{(I)}} + \vec{R}^{(E)}}{m} = \frac{\vec{R}^{(E)}}{m} \Longrightarrow \vec{R}^{(E)} = m\vec{a}_{CM}$$

TEOREMA DEL CENTRO DI MASSA

$$\vec{R}^{(E)} = m\vec{a}_{CM} = m\frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}_{CM}) \Longrightarrow \vec{R}^{(E)} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$ I EQUAZIONE CARDINALE DELLA DINAMICA DEI SISTEMI

$\vec{\rho}_i :=$ vettore distanza tra polo Ω e massa m_i

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{\rho}_i \times m_i \vec{v}_i$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{\sum_i d\vec{\rho}_i}{dt} \times m_i \vec{v}_i + \sum_i \vec{\rho}_i \times m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \overset{=0}{\vec{M}^{(I)}} + \vec{M}^{(E)} - \vec{v}_\Omega \times m\vec{v}_{CM} = \vec{M}^{(E)} - \vec{v}_\Omega \times m\vec{v}_{CM}$$

Se si verifica una delle seguenti quattro condizioni:

$$\begin{cases} 1)\ \vec{v}_\Omega = 0 \\ 2)\ \vec{v}_\Omega \parallel \vec{v}_{CM} \\ 3)\ \vec{v}_\Omega = \vec{v}_{CM} \\ 4)\ \Omega \equiv 0 \end{cases} \Longrightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(E)}$$

II EQUAZIONE CARDINALE DELLA DINAMICA DEI SISTEMI

TEOREMI DI KÖNIG

(i) $$\vec{L} = \sum_i (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) = \sum_i (\vec{r}_i' + \vec{r}_{CM}) \times m_i (\vec{v}_i' + \vec{v}_{CM}) = \sum_i (\vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i') + \sum_i (\vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_{CM}) + \sum_i (\vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}_i') + \sum_i (\vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}_{CM}) = \sum_i \vec{L}_i' + 0 + 0 + \sum_i m_i \vec{v}_{CM} = \vec{L}' + \vec{L}_{CM}$$

(ii) $$E_K = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i' + \vec{v}_{CM})^2 = \sum_i \frac{1}{2} m \vec{v}_i'^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_{CM}^2 + \sum_i m_i \vec{v}_i' \cdot \vec{v}_{CM} = E_K' + E_{K\,CM}$$

SISTEMA DI FORZE QUALSIASI

O, O' poli

$$\vec{M}_o = \sum_i \vec{OP_i} \times \vec{F_i} = \sum_i \vec{r_i} \times \vec{F_i}$$

$$\vec{M}_o = \sum_i (\vec{OO'} + \vec{r_i}') \times \vec{F_i} = \vec{OO'} \times \sum_i \vec{F_i} + \sum_i \vec{r_i}' \times \vec{F_i} = \vec{OO'} \times \vec{R} + \vec{M}_{o'}$$

In generale, $\vec{M} \not\perp \vec{R} \Rightarrow \nexists$ punto C, dove applicare $\vec{R}$, tale che $\vec{M}_o = \vec{OC} \times \vec{R} = \vec{r_c} \times \vec{R}$

SISTEMA DI FORZE PARALLELE

O polo

$$\vec{M} = \sum_i \vec{r_i} \times F_i \vec{u} = \left(\sum_i F_i \vec{r_i}\right) \times \vec{u}$$

$\vec{M} \perp \vec{u} \Rightarrow \vec{M} \perp \vec{R} \Rightarrow \exists$ punto C, dove applicare $\vec{R}$, tale che $\vec{M} = \vec{OC} \times \vec{R} = \vec{r_c} \times \vec{R}$

$$\Rightarrow \left(\sum_i F_i \vec{r_i}\right) \times \vec{u} = \vec{r_c} \times \left(\sum_i F_i\right) \vec{u} \quad ; \qquad \vec{r_c} \times \left(\sum_i F_i\right)\vec{u} = \left(\sum_i F_i\right) \vec{r_c} \times \vec{u}$$

$$\Rightarrow \vec{r_c} = \vec{OC} = \frac{\sum_i F_i \vec{r_i}}{\sum_i F_i} = \frac{\sum_i m_i a_i \vec{r_i}}{\sum_i m_i a_i} \overset{\text{se } a_i = \text{cost}}{=} \frac{\sum_i m_i \vec{r_i}}{\sum_i m_i} = \vec{r_{CM}}$$

CORPO RIGIDO

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int \vec{r}\, dm}{\int dm} = \frac{1}{m} \int_V \vec{r} \rho\, dV \overset{\text{corpo omogeneo}}{=} \frac{\rho}{m} \int_V \vec{r}\, dV = \frac{1}{V} \int_V \vec{r}\, dV$$

$$\vec{R} = \int \vec{a}_{CM}\, dm = \vec{a}_{CM} \int dm = m\vec{a}_{CM}$$

$$\vec{M} = \int \vec{r} \times \vec{a}_{CM}\, dm = \left(\int \vec{r}\, dm\right) \times \vec{a}_{CM} = m\vec{r}_{CM} \times \vec{a}_{CM} = \vec{r}_{CM} \times m\vec{a}_{CM}$$

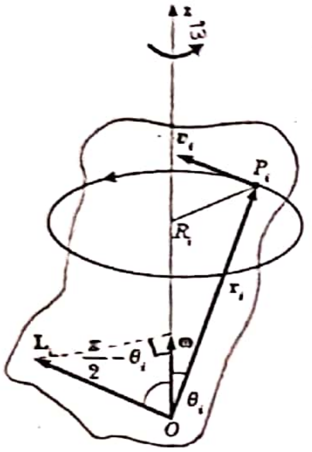
$$E_p = \int g z\, dm = g \int z\, dm = mg z_{CM}$$

$$\vec{P} = m\vec{v}_{CM}$$

$$E_K = E_{K_{CM}} = \frac{1}{2} m v_{CM}^2$$

$$\vec{L} = \vec{L}_{CM} = \vec{r}_{CM} \times m\vec{v}_{CM} = \vec{r}_{CM} \times \vec{P}$$

ROTAZIONI ATTORNO A UN ASSE FISSO



$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \xRightarrow{\vec{r}_i \perp \vec{v}_i} L_i = m_i r_i v_i = m_i r_i R_i \omega$$

$$L_{iz} = L_i \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right) = L_i \sin\theta_i = m_i r_i \sin\theta_i R_i \omega = m_i R_i^2 \omega$$

$$L_z = \sum_i L_{iz} = \left(\sum_i m_i R_i^2\right)\omega = I_z \omega$$

$I_z =$ momento d'inerzia rispetto all'asse $z = \sum_i m_i R_i^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$

$$L_{i\perp} = L_i \cos\theta_i = m_i r_i R_i \omega \cos\theta_i$$

SE ASSE DI ROTAZIONE = ASSE DI SIMMETRIA...

$\vec{L} = I_z \vec{\omega} \Rightarrow \vec{L} \parallel \vec{\omega}$; $\quad L = L_z$; $\quad L_\perp = 0$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(I_z \vec{\omega}) = I_z \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I_z \vec{\alpha}$$

$$E_K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i R_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2 \overset{\vec{L} \parallel \vec{\omega}}{=} \frac{L^2}{2I_z}$$

$$W = \Delta E_K = \frac{1}{2} I_z \omega_{fin}^2 - \frac{1}{2} I_z \omega_{in}^2 \Rightarrow dW = dE_K = I_z \omega d\omega = I_z \frac{d\theta}{dt} \alpha dt = I_z \alpha d\theta = M d\theta$$

$$\Rightarrow W = \int_0^\theta M d\theta \overset{se\ M = cost}{=} M\theta$$

$$P = \frac{dW}{dt} = M \frac{d\theta}{dt} = M\omega$$

MOMENTO D'INERZIA

$$I = \int R^2 dm = \int_V \rho R^2 dV = \int_V \rho (x^2 + y^2) dV$$

MOMENTO D'INERZIA DEI CORPI RIGIDI NOTI CALCOLATI RISPETTO AGLI ASSI PASSANTI PER C

Anello / guscio cilindrico sottile: $I = mR^2$

Disco / cilindro pieno: $I = \frac{1}{2} mR^2$

Guscio sferico sottile: $I = \frac{2}{3} mR^2$

Sfera piena: $I = \frac{2}{5} mR^2$

Asta sottile: $I_c = \frac{1}{12} md^2$; $\quad I_{estr} = \frac{1}{3} md^2$

Lastra: $I = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$

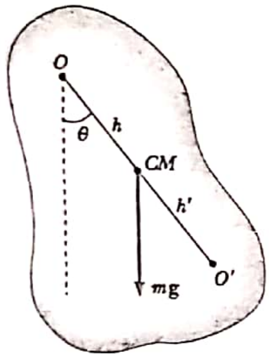
TEOREMA DI HUYGENS-STEINER

$x = x'$, $\quad y = y' + a$, $\quad z = z'$

$$I_z = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum_i m_i \left[x_i'^2 + (y_i' + a)^2 \right] =$$

$$= \sum_i m_i (x_i'^2 + y_i'^2) + \sum_i m_i a^2 + 2a \sum_i m_i y_i' = I_{c} + ma^2$$

PENDOLO COMPOSTO



$$\vec{M}_p = \vec{h} \times m\vec{g}$$

$$M_p = M_z = \frac{dL_z}{dt} = I_z \alpha = I_z \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgh \sin\theta \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I_z} \sin\theta = 0 \xrightarrow{\theta < 7^\circ} \boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I_z}\theta = 0}$$

$$\Longrightarrow \theta(t) = \theta_0 \sin(\Omega t + \varphi) \; ; \qquad \Omega = \sqrt{\frac{mgh}{I_z}} \Longrightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \Omega^2 \theta = 0$$

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{mgh}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$l := \dfrac{I_z}{mh}$ = lunghezza ridotta del pendolo composto $\rightsquigarrow$ corrisponde alla lunghezza del filo di un pendolo semplice che oscilla con lo stesso periodo

---

$$h' := \frac{I_c}{mh} \Longrightarrow I_c = mhh' \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow l = \frac{I_z}{mh} = \frac{I_c + mh^2}{mh} = \frac{I_c}{mh} + h = h' + h > h$$

$$l' = \frac{I'}{mh'} = \frac{I_c + mh'^2}{mh'} = \frac{mhh' + mh'^2}{mh'} = h + h' = l$$

$\Longrightarrow l' = l \Longrightarrow T' = T \Longrightarrow$ i due assi passanti per O e O' si chiamano ASSI RECIPROCI

IMPULSO ANGOLARE $= \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\, dt = \vec{L}(t_2) - \vec{L}(t_1) = \Delta\vec{L}$

$$\int \vec{M}\, dt = \int (\vec{r} \times \vec{F})\, dt = \vec{r} \times \int \vec{F}\, dt = \underbrace{\vec{r} \times \vec{J}}_{\text{MOMENTO DELL'IMPULSO}} = \Delta\vec{L}$$

URTI

$$\vec{P}_{in} = m_1 \vec{v}_{1in} + m_2 \vec{v}_{2in} = \vec{P}_{fin} = m_1 \vec{v}_{1fin} + m_2 \vec{v}_{2fin}$$

$$\vec{P}_{CM} = (m_1 + m_2)\, \vec{v}_{CM} = \vec{P}_{in} = \vec{P}_{fin} = cost$$

PUNTO MATERIALE 1: $\Delta\vec{p_1} = m_1 \vec{v}_{1fin} - m_1 \vec{v}_{1in} = \vec{J}_{2,1} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{2,1}\, dt$

PUNTO MATERIALE 2: $\Delta\vec{p_2} = m_2 \vec{v}_{2fin} - m_2 \vec{v}_{2in} = \vec{J}_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{1,2}\, dt$

$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1} \Rightarrow \vec{J}_{1,2} = -\vec{J}_{2,1} \Rightarrow \Delta\vec{p_2} = -\Delta\vec{p_1} \Leftarrow \Delta\vec{P} = 0$$

(ASSENZA DI FORZE IMPULSIVE)

IN PRESENZA DI FORZE ESTERNE DURANTE L'URTO: $\Delta\vec{P} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}^{(E)}\, dt = \vec{F}_m^{(E)}\, \tau$

(FORZA MEDIA; τ DURATA URTO (MOLTO PICCOLA))

Se $\vec{F}^{(E)}$ <u>non</u> impulsiva $\Rightarrow \vec{F}_m^{(E)} \cdot \tau$ quantità molto piccola $\Rightarrow \Delta\vec{P}$ trascurabile

Se $\vec{F}^{(E)}$ impulsiva $\Rightarrow \vec{F}_m^{(E)}$ quantità molto grande $\Rightarrow \vec{F}_m^{(E)} \cdot \tau = \Delta\vec{P}$ non trascurabile $(= \vec{J})$

URTI COMPLETAMENTE ANELASTICI

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\, \vec{v}_{CM} \Rightarrow \vec{v}_{CM} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\Delta E_K = E_{K fin} - E_{K in} = -E_K' = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_{CM}^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

URTI ELASTICI

$$m_1 v_{1in} + m_2 v_{2in} = m_1 v_{1fin} + m_2 v_{2fin} = (m_1 + m_2) v_{CM}$$

$$E_{K in} = E_{K fin} \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_{1in}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2in}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1fin}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2fin}^2$$

Se considero il sistema di riferimento del centro di massa: $\vec{v}'_{1fin} = -\vec{v}'_{1in}$; $\vec{v}'_{2fin} = -\vec{v}'_{2in}$

URTI ANELASTICI

Considero il sistema di riferimento del centro di massa:

$$e := \text{COEFFICIENTE DI RESTITUZIONE} = -\frac{P'_{1\,fin}}{P'_{1\,in}} = -\frac{P'_{2\,fin}}{P'_{2\,in}} = -\frac{V'_{1\,fin}}{V'_{1\,in}} = -\frac{V'_{2\,fin}}{V'_{2\,in}} \in [0,1]$$

$$E'_{K\,in} = \frac{1}{2} m_1 V'^2_{1\,in} + \frac{1}{2} m_2 V'^2_{2\,in}$$

$$E'_{K\,fin} = \frac{1}{2} m_1 V'^2_{1\,fin} + \frac{1}{2} m_2 V'^2_{2\,fin} = \frac{1}{2} m_1 e^2 V'^2_{1\,in} + \frac{1}{2} m_2 e^2 V'^2_{2\,in} = e^2 E'_{K\,in}$$

$$\Rightarrow \Delta E'_K = E'_{K\,fin} - E'_{K\,in} = e^2 E'_{K\,in} - E'_{K\,in} = E'_{K\,in}(e^2-1) \Rightarrow \frac{\Delta E'_K}{E'_{K\,in}} = e^2 - 1$$

Urto elastico $\Rightarrow \Delta E_K = 0 \Rightarrow e = 1$

Urto completamente anelastico $\Rightarrow \Delta E_K = -E'_K \Rightarrow e = 0$

URTI TRA PUNTI MATERIALI E CORPI RIGIDI

- Conservazione dell'energia cinetica: $\Delta E_K = 0$ (solo in casi di urti elastici)
- Se corpo rigido non vincolato $\Rightarrow$ assenza di $\vec{F}^{(E)}$ impulsive $\Rightarrow$ conservazione della quantità di moto: $\Delta\vec{P} = 0$
- $\vec{M}^{(E)} = \frac{d\vec{L}}{dt} - \vec{v}_A \times m\vec{v}_{cm} = 0 \Rightarrow$ conservazione del momento angolare: $\Delta\vec{L} = 0$

TERMODINAMICA

Tre tipi di sistemi:

- APERTO: scambia energia e materia con l'ambiente
- CHIUSO: scambia solo energia con l'ambiente
- ISOLATO: non scambia né energia né materia con l'ambiente (esempio: universo termodinamico)

$\Delta U > 0 \Rightarrow$ l'energia interna del sistema aumenta

$\Delta U < 0 \Rightarrow$ l'energia interna del sistema diminuisce

$Q > 0 \Rightarrow$ il sistema assorbe calore dall'ambiente

$Q < 0 \Rightarrow$ il sistema cede calore all'ambiente

$W > 0 \Rightarrow$ il sistema fornisce lavoro all'ambiente

$W < 0 \Rightarrow$ il sistema subisce lavoro dall'ambiente

I PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

$$Q - W = \Delta U$$

Due corpi a contatto tra loro:

$$T_2 < T_1 \Rightarrow \begin{matrix} T_e < T_1 \\ T_e > T_2 \end{matrix} \qquad \begin{cases} Q_1 = \Delta U_1 \\ Q_2 = \Delta U_2 \end{cases} \Rightarrow Q_1 = -Q_2$$

$\Delta T_1 = T_e - T_1 < 0 \Rightarrow \Delta U < 0 \Rightarrow Q_1 < 0$ calore ceduto

$\Delta T_2 = T_e - T_2 > 0 \Rightarrow \Delta U > 0 \Rightarrow Q_2 > 0$ calore assorbito

$$Q = m\underbrace{c}_{\text{calore specifico}}\Delta T \qquad \begin{cases} Q_1 = m_1 c_1 (T_e - T_1) \\ Q_2 = m_2 c_2 (T_e - T_2) \end{cases} \Rightarrow m_1 c_1 (T_e - T_1) = -m_2 c_2 (T_e - T_2)$$

$c :=$ CALORE SPECIFICO = calore necessario per far aumentare la temperatura di un grado all'unità di massa di una determinata sostanza.

$C :=$ CAPACITÀ TERMICA $= cm$

$n :=$ NUMERO DI MOLI; 1 mole è una determinata quantità di sostanza tale che contiene il numero di Avogadro ($6{,}022 \cdot 10^{23}$) di costituenti elementari.

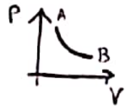
$c :=$ CALORE SPECIFICO MOLARE = calore necessario per far aumentare la temperatura di un grado a una mole di una determinata sostanza.

$\lambda :=$ CALORE LATENTE = calore necessario a far variare di fase un'unità di massa di una determinata sostanza.

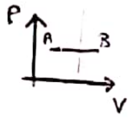
GAS IDEALI

$pV = nRT$ $\qquad R := 8,314 \frac{J}{K\,mol}$ $\qquad n = \frac{N}{N_A}$ ~→ # costituenti elementari del gas; N_A ~→ # Avogadro

$T = cost \Rightarrow pV = cost \Rightarrow p \overset{\text{PROPORZ.}}{\propto} \frac{1}{V}$ ~→ TRASFORMAZIONE ISOTERMA



$p = cost \Rightarrow V = \frac{nRT}{p} \Rightarrow V \propto T$ ~→ TRASFORMAZIONE ISOBARA



$V = cost \Rightarrow p = \frac{nRT}{V} \Rightarrow p \propto T$ ~→ TRASFORMAZIONE ISOCORA

LEGGE DI AVOGADRO

Fissate p e T, volumi uguali di gas perfetti diversi contengono lo stesso numero di molecole.

M := massa del gas; $\qquad m$:= massa di una molecola $\Rightarrow N = M/m$

A := massa atomica; $\qquad m_u$:= unità di massa atomica $= 1.66 \cdot 10^{-27}$ Kg $\Rightarrow m = Am_u$

m_u ~→ 1/12 della massa di una molecola di carbonio 12

$$\Rightarrow N = M/m = \frac{M}{Am_u} = \frac{1}{m_u} \cdot \frac{M}{A} = 6.022 \cdot 10^{26}\, Kg^{-1} \frac{M}{A}$$

Se prendo una quantità di atomi pari alla massa atomica espressa in grammi $[M = A(g)]$

$\Rightarrow N = 6.022 \cdot 10^{23}\, g^{-1} = N_A$; $\qquad A(g) =: m_A$ = massa atomica espressa in grammi

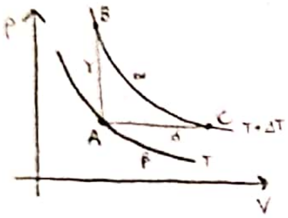
V_m := volume molare $= \frac{V}{n}$

CALORE SPECIFICO NEI GAS

C_V := calore specifico a volume costante; $\qquad dQ = nC_V\, dT \Rightarrow C_V = \frac{1}{n} \cdot \left.\frac{dQ}{dT}\right|_V$

C_p := calore specifico a pressione costante; $\qquad dQ = nC_p\, dT \Rightarrow C_p = \frac{1}{n} \cdot \left.\frac{dQ}{dT}\right|_p$

$Q_V = nC_V \Delta T$, $\qquad Q_p = nC_p \Delta T$ $\qquad$ se C_V, C_p costanti



α, β: DUE TRASFORMAZIONI ISOTERME A TEMPERATURE DIVERSE

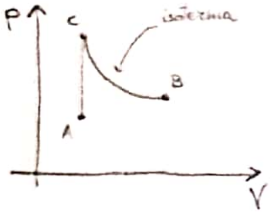
γ, δ: TRASFORMAZIONI RISPETTIVAMENTE ISOCORA E ISOBARA CHE TERMINANO IN DUE STATI DIVERSI MA ALLA STESSA TEMPERATURA

$$Q - W = \Delta U$$

ISOCORA: $Q_{AB} = W_{AB} + \Delta U_{AB} = \Delta U_{AB} = nC_v \Delta T = nC_v (T_B - T_A)$

ISOBARA: $Q_{AC} = W_{AC} + \Delta U_{AC} = p_A (V_C - V_A) + \Delta U_{AC} = p_A \Delta V + \Delta U_{AC} = nC_p \Delta T = nC_p (T_C - T_A)$

$$T_B = T_C \Rightarrow \Delta U_{AB} = \Delta U_{AC} \Rightarrow \begin{matrix} Q_{AB} = \Delta U = nC_v \Delta T \\ Q_{AC} = \Delta U + p\Delta V = nC_p \Delta T \end{matrix} \Rightarrow \Delta U + p\Delta V > \Delta U \Rightarrow nC_p \Delta T > nC_v \Delta T \Rightarrow \boxed{C_p > C_v}$$



$$\Delta U_{AB} = \Delta U_{AC} + \Delta U_{CB} = \Delta U_{AC}$$

$$Q_{AC} - \cancel{W_{AC}} = \Delta U_{AC} \Rightarrow Q_{AC} = \Delta U_{AC} = nC_v (T_C - T_A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta U_{AB} = nC_v (T_C - T_A) = nC_v (T_B - T_A)$$

In generale, $\Delta U = nC_v \Delta T \Rightarrow dU = nC_v dT \Rightarrow C_v = \frac{1}{n} \frac{dU}{dT}$

$$Q - W = \Delta U \Rightarrow dQ = dW + dU = p\,dV + nC_v dT \Rightarrow Q = \int p\,dV + nC_v \Delta T = W + nC_v \Delta T$$

Considero una trasformazione isobara infinitesima: $dQ = nC_p dT$, $Q_p = nC_p \Delta T$

$$dQ = nC_v dT + p\,dV \Rightarrow nC_p dT = nC_v dT + p\,dV = \left\{ pV = nRT \Rightarrow p\,dV + V dp = nRT \xRightarrow{\text{ISOBARA}} p\,dV = nR\,dT \right\}$$

$$= nC_v dT + nR\,dT = dQ = nC_p dT \quad \Rightarrow \text{RELAZIONE DI MEYER: } C_p = R + C_v$$

$$\gamma := \frac{C_p}{C_v} > 1$$

1) (ALCUNI) GAS MONOATOMICI (argon, neon, ...)

$C_v = \frac{3}{2} R \qquad C_p = C_v + R = \frac{5}{2} R \qquad \gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{5}{3}$

2) (ALCUNI) GAS BIATOMICI (idrogeno, azoto, ...)

$C_v = \frac{5}{2} R \qquad C_p = C_v + R = \frac{7}{2} R \qquad \gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{7}{5}$

TRASFORMAZIONI ADIABATICHE (NESSUNO SCAMBIO DI CALORE CON L'AMBIENTE)

$$Q = 0 \Rightarrow W = -\Delta U = -nC_v (T_B - T_A) = -C_v (nT_B - T_A) = \left\{ \begin{cases} p_A V_A = nRT_A \\ p_B V_B = nRT_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} nT_A = \frac{p_A V_A}{R} \\ nT_B = \frac{p_B V_B}{R} \end{cases} \right\}$$

$$= -C_v \left(\frac{p_B V_B}{R} - \frac{p_A V_A}{R} \right) = -\frac{C_v}{R} (p_B V_B - p_A V_A) =$$

$$= \frac{C_v}{C_p - C_v} (p_B V_B - p_A V_A) = -\frac{1}{\gamma - 1} (p_B V_B - p_A V_A)$$

- Espansione adiabatica $\Rightarrow W>0 \Rightarrow \Delta U<0 \Rightarrow T_B - T_A < 0 \Rightarrow T_B < T_A$ → IL GAS SI RAFFREDDA
- Compressione adiabatica $\Rightarrow W<0 \Rightarrow \Delta U>0 \Rightarrow T_B - T_A > 0 \Rightarrow T_B > T_A$ → IL GAS SI RISCALDA

TRASFORMAZIONE ADIABATICA REVERSIBILE

$$\left.\begin{aligned} &\overset{=0}{dQ} - p\,dV = nC_v\,dT \Rightarrow nC_v\,dT + p\,dV = 0 \\ &pV = nRT \Rightarrow p = \frac{nRT}{V} \end{aligned}\right\} \Rightarrow nC_v\,dT + \frac{nRT}{V}dV = 0 \Rightarrow \frac{dV}{V} = -\frac{C_v}{R}\cdot\frac{dT}{T}$$

$$\Rightarrow \frac{C_p - C_v}{C_v}\cdot\frac{dV}{V} = -\frac{dT}{T} \Rightarrow (\gamma-1)\int_{V_A}^{V_B}\frac{dV}{V} = -\int_{T_A}^{T_B}\frac{dT}{T} \Rightarrow (\gamma-1)\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = -\ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) \Rightarrow$$

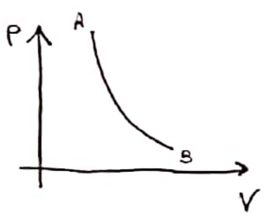
$$\Rightarrow \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_A}{T_B} \Rightarrow T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} \Rightarrow TV^{\gamma-1} = cost$$

$$T = \frac{pV}{nR} \Rightarrow TV^{\gamma-1} = \frac{pV}{nR}V^{\gamma-1} = \frac{pV^\gamma}{nR} = cost \Rightarrow pV^\gamma = cost$$

$$V = \frac{nRT}{p} \Rightarrow TV^{\gamma-1} = \left(\frac{nRT}{p}\right)^{\gamma-1}T = (nR)^{\gamma-1}\frac{T^\gamma}{p^{\gamma-1}} = cost \Rightarrow \frac{T^\gamma}{p^{\gamma-1}} = cost \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T^\gamma p^{1-\gamma} = cost \Rightarrow T p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = cost$$

In conclusione:
$$\begin{cases} TV^{\gamma-1} = cost \\ pV^\gamma = cost \\ Tp^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = cost \end{cases}$$



Considero una trasformazione isoterma:

$\Delta U = 0 \Rightarrow Q - W = \Delta U = 0 \Rightarrow Q = W$

Se la trasformazione è reversibile $\Rightarrow dW = p\,dV \Rightarrow$

$$\Rightarrow W = \int dW = \int_{V_A}^{V_B} p\,dV = \int_{V_A}^{V_B}\frac{nRT}{V}dV = nRT\int_{V_A}^{V_B}\frac{dV}{V} = nRT\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = Q$$

- Espansione isoterma: $W>0 \Rightarrow Q>0$ → IL SISTEMA ASSORBE CALORE E COMPIE LAVORO
- Compressione isoterma: $W<0 \Rightarrow Q<0$ → IL SISTEMA CEDE CALORE E SUBISCE LAVORO

Considero una trasformazione isocora:

$V = cost \Rightarrow W = 0 \Rightarrow Q = \Delta U = nC_V(T_B - T_A)$

$pV = nRT \Rightarrow V = nR\frac{T}{p}$; $\frac{T}{p} = \frac{V}{nR} = cost \Rightarrow \frac{T_A}{p_A} = \frac{T_B}{p_B} \Rightarrow \frac{T_A}{T_B} = \frac{p_A}{p_B}$

- Se il sistema assorbe calore: $Q > 0 \Rightarrow T_B > T_A \Rightarrow \frac{p_A}{p_B} < 1 \Rightarrow p_A < p_B$
- Se il sistema cede calore: $Q < 0 \Rightarrow T_B < T_A \Rightarrow p_B < p_A$

Considero una trasformazione isobara:

$p = cost$; $pV = nRT \Rightarrow \frac{V}{T} = \frac{nR}{p} = cost \Rightarrow \frac{V_A}{T_A} = \frac{V_B}{T_B} \Rightarrow \frac{V_A}{V_B} = \frac{T_A}{T_B}$

$Q - W = \Delta U = nC_V(T_B - T_A)$; $Q_p = nC_p(T_B - T_A)$

$W = p(V_B - V_A) = p\left(\frac{nRT_B}{p} - \frac{nRT_A}{p}\right) = nR(T_B - T_A)$

- Se il sistema assorbe calore: $Q_p > 0 \Rightarrow T_B > T_A \Rightarrow V_B > V_A \Rightarrow W > 0$
- Se il sistema cede calore: $Q_p < 0 \Rightarrow T_B < T_A \Rightarrow V_B < V_A \Rightarrow W < 0$

TRASFORMAZIONI CICLICHE

Stato iniziale = stato finale $\Rightarrow T_{in} = T_{fin} \Rightarrow \Delta U = 0 \Rightarrow Q = W$

$\begin{cases} Q > 0 \\ W > 0 \end{cases} \Rightarrow$ CICLO TERMICO macchina termica

$\begin{cases} Q < 0 \\ W < 0 \end{cases} \Rightarrow$ CICLO FRIGORIFERO macchina frigorifera

DOVE $Q = \underbrace{\overset{>0}{Q_A}}_{\text{ASSORBITO}} + \underbrace{\overset{<0}{Q_C}}_{\text{CEDUTO}}$; $W = \underbrace{\overset{>0}{W_F}}_{\text{FATTO}} + \underbrace{\overset{<0}{W_S}}_{\text{SUBITO}}$

$\eta :=$ rendimento $= \frac{W}{Q_A}$, $0 \leq \eta < 1$ [CICLO TERMICO]

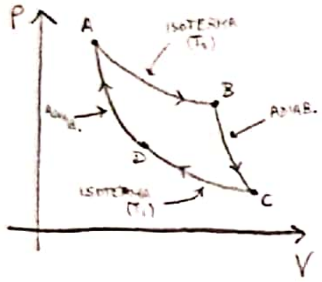
$\Rightarrow W = \eta Q_A < Q_A$; $W = Q = Q_A + Q_C \Rightarrow \eta = \frac{Q_A + Q_C}{Q_A} = 1 + \frac{Q_C}{Q_A} = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_A}$

$\Rightarrow |Q_C| = (1 - \eta) Q_A < Q_A \Rightarrow |Q_C| < Q_A$, $|Q_C| \neq 0$

$\xi :=$ efficienza $= \frac{Q_A}{W} = \frac{T_1}{T_2 - T_1}$ $|Q_C| > Q_A$

[CICLO FRIGORIFERO]

CICLO DI CARNOT (REVERSIBILE E TERMICO)



AB: espansione isoterma

$$Q_{AB} = W_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} p\,dV = \int_{V_A}^{V_B} \frac{nRT_2}{V}\,dV = nRT_2 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) \overset{V_B > V_A}{>} 0$$

BC: espansione adiabatica

$T_1 < T_2$; $\quad T_2 V_B^{\gamma-1} = T_1 V_C^{\gamma-1}$

$$Q_{BC} = 0 \Rightarrow W_{BC} = -\Delta U_{BC} = -nc_V(T_C - T_B) = -nc_V(T_1 - T_2) \overset{T_1<T_2}{>} 0$$

CD: compressione isoterma

$$Q_{CD} = W_{CD} = \int_{V_C}^{V_D} p\,dV = nRT_1 \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) \overset{V_D<V_C}{<} 0$$

DA: compressione adiabatica

$T_1 < T_2$; $\quad T_2 V_A^{\gamma-1} = T_1 V_B^{\gamma-1}$

$$Q_{DA} = 0 \Rightarrow W_{DA} = -\Delta U_{DA} = -nc_V(T_A - T_B) = -nc_V(T_2 - T_1) \overset{T_1<T_2}{<} 0$$

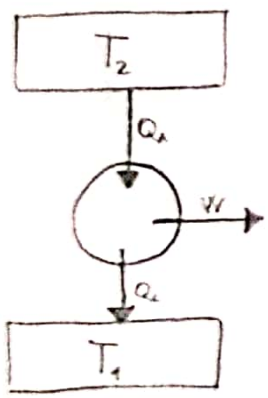
$$\Rightarrow W_{BC} = -nc_V(T_1 - T_2) = -W_{DA}$$

$Q = Q_A + Q_C$; $\quad W = \overset{=Q_A}{W_{AB}} + \cancel{W_{BC}} + \overset{=Q_C}{W_{CD}} + \cancel{W_{DA}}$

$$\eta = \frac{W}{Q_A} = \frac{Q_A + Q_C}{Q_A} = 1 + \frac{Q_C}{Q_A} = 1 + \frac{nRT_1 \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right)}{nRT_2 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)} = \left\{ \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_C}{V_D}\right)^{\gamma-1} \right\}$$

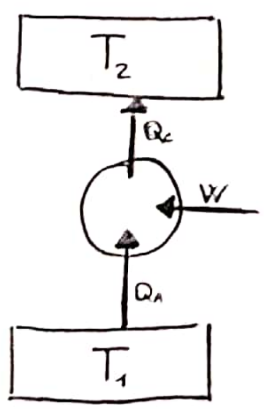
$$= 1 - \frac{T_1 \ln\left(\frac{V_C}{V_D}\right)}{T_2 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \Rightarrow \frac{|Q_C|}{Q_A} = \frac{T_1}{T_2} < 1 \Rightarrow |Q_C| < Q_A \Rightarrow W = Q_A - |Q_C| > 0$$

È PER QUESTO CHE SI TRATTA DI UN CICLO TERMICO



MACCHINA TERMICA CHE AGISCE TRA DUE SORGENTI

Parte del calore assorbito dalla sorgente 2 viene ceduto alla sorgente 1, il restante viene utilizzato per compiere lavoro.



MACCHINA FRIGORIFERA CHE AGISCE TRA DUE SORGENTI

Il calore ceduto alla sorgente 2 in parte deriva dal calore assorbito dalla sorgente 1, in parte deriva dal lavoro subito dalla macchina.

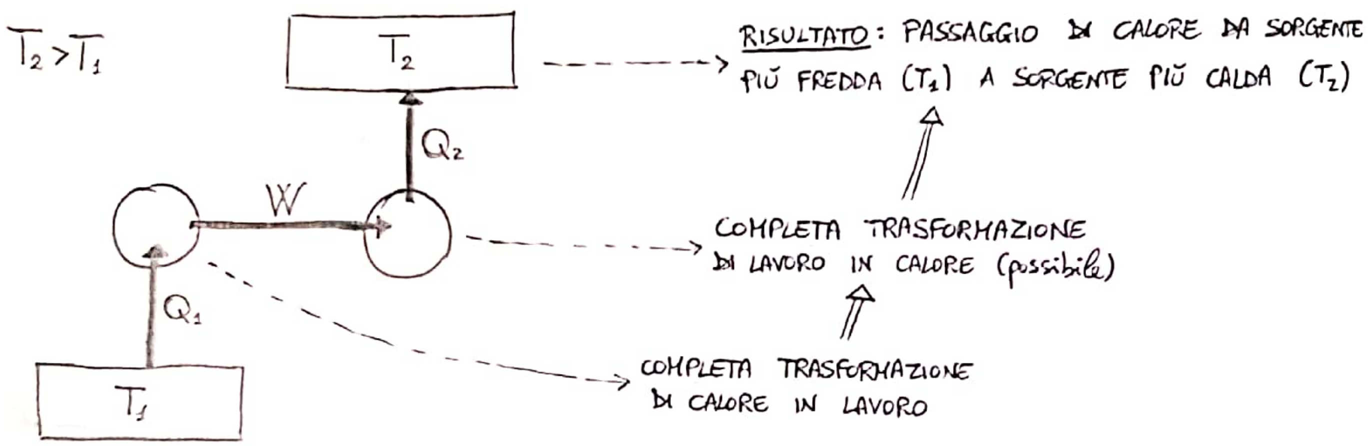
I ENUNCIATO DEL II PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA (KELVIN-PLANCK)

Non può esistere una trasformazione termodinamica il cui unico risultato sia la trasformazione integrale del calore in lavoro.

II ENUNCIATO DEL II PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA (CLAUSIUS)

Non può esistere una trasformazione termodinamica il cui unico risultato sia il passaggio di calore da un corpo a temperatura minore a un corpo a temperatura maggiore.

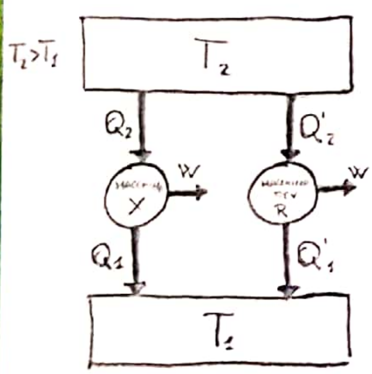
- I due enunciati sono equivalenti: violando il primo, viene di conseguenza violato il secondo



TEOREMA DI CARNOT

Tutte le macchine reversibili che lavorano tra le stesse sorgenti a temperatura T_1 e T_2 hanno lo stesso rendimento ed esso è il massimo possibile.

Dimostro per assurdo che non esistono macchine che abbiano un rendimento maggiore di quelle reversibili. $\left(\eta_R = 1 - \frac{T_1}{T_2}\right)$



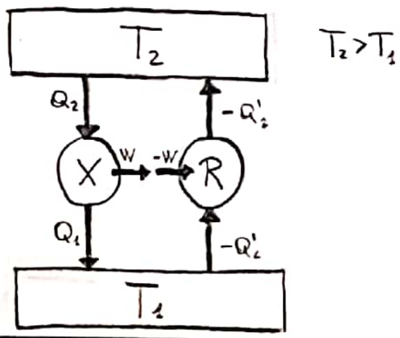
$$\Delta U = 0 \Rightarrow Q = W$$

$$Q_x = Q_1 + Q_2 = W; \qquad Q_R = Q_1' + Q_2' = W$$

$$\Rightarrow Q_1 + Q_2 = Q_1' + Q_2' \Rightarrow Q_1 - Q_1' = Q_2' - Q_2$$

$$\boxed{\eta_x > \eta_R} \qquad \begin{cases} \eta_x = \frac{W}{Q_2} \\ \eta_R = \frac{W}{Q_2'} \end{cases} \Rightarrow \frac{W}{Q_2} > \frac{W}{Q_2'} \Rightarrow Q_2 < Q_2' \Rightarrow Q_2' - Q_2 > 0$$

R macchina reversibile $\Rightarrow$ si può invertire il suo ciclo



$$Q_{1TOT} = -|Q_1| + |Q_1'| > 0 \Rightarrow Q_{1TOT} > 0 \quad \text{(ASSORBITO)}$$

$$Q_{2TOT} = |Q_2'| - |Q_2| > 0 \Rightarrow Q_{2TOT} < 0 \quad \text{(CEDUTO)}$$

↳ COSÌ IL CALORE VIENE COMPLESSIVAMENTE TRASPORTATO DA T_1 (FREDDA) A T_2 (CALDA) $\Rightarrow$ ASSURDO $\Rightarrow$ $\boxed{\eta_x \leq \eta_R}$

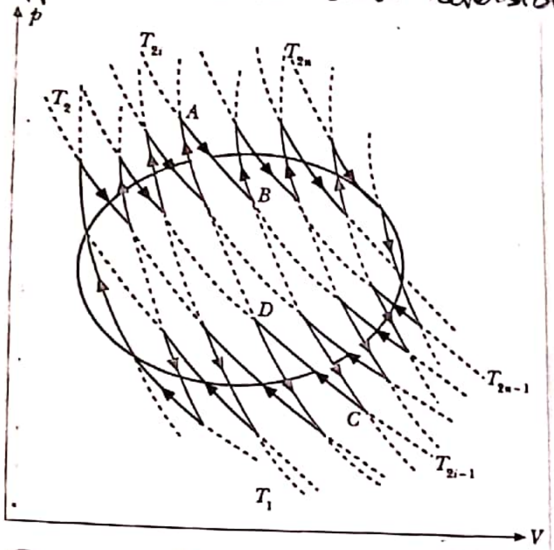
$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} \quad , \qquad T_1 < T_2$$

$$\eta = \frac{W}{Q_A} = \frac{Q_A + Q_C}{Q_A} = 1 + \frac{Q_C}{Q_A} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \Longrightarrow \frac{Q_C}{Q_A} = -\frac{T_1}{T_2} \Longrightarrow \begin{Bmatrix} Q_C = Q_1 \\ Q_A = Q_2 \end{Bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \frac{Q_1}{Q_2} = -\frac{T_1}{T_2} \Longrightarrow \frac{Q_1}{T_1} = -\frac{Q_2}{T_2} \Longrightarrow \boxed{\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0}$$

TEOREMA DI CLAUSIUS

Approssimando un ciclo reversibile in tanti cicli di Carnot si ha che:



$$\overset{\text{ADIAB.}}{\frac{Q_{2i}}{T_{2i}}} + \overset{\text{ISOTERME}}{\frac{Q_{2i-1}}{T_{2i-1}}} = 0 \qquad i = 1,2,3,\dots,n$$

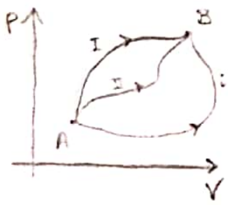
$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{Q_{2i}}{T_{2i}} + \frac{Q_{2i-1}}{T_{2i-1}} \right) = 0 \Longrightarrow \left(\frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_1}{T_1} \right) + \left(\frac{Q_4}{T_4} + \frac{Q_3}{T_3} \right) + \dots = 0$$

$$\Longrightarrow \sum_{J=1}^{2n} \frac{Q_J}{T_J} = 0 \quad \left(\text{CICLO REVERSIBILE}\right)$$

$$\sum_{J=1}^{2n} \frac{Q_J}{T_J} < 0 \quad \left(\text{CICLO IRREVERSIBILE}\right)$$

$$\frac{Q_i}{T_i} \longrightarrow \frac{dQ}{T} \qquad \sum_{J=1}^{2n} \frac{Q_J}{T_J} \longrightarrow \oint \frac{dQ}{T} = 0 \ \left(\text{CICLO REVERSIBILE}\right); \quad \oint \frac{dQ}{T} < 0 \ \left(\text{CICLO IRREVERSIBILE}\right)$$

ENTROPIA



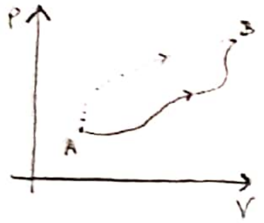
PER IL TEOREMA DI CLAUSIUS: $\oint \frac{dQ}{T} = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_I - \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{II} = 0 \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_I = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{II} = \dots = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_i \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow$ il valore dell'integrale $\int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{rev}$ non dipende dal tipo di trasformazione reversibile ma soltanto dagli stati iniziale e finale $\Longrightarrow$ si può introdurre una nuova funzione di stato: l'<u>entropia</u> S.

$$\int_A^B \frac{dQ}{T} =: S(B) - S(A) = \Delta S = \text{variazione di entropia} \qquad dS := \frac{dQ}{T}$$

$$\begin{cases} \text{TRASFORMAZIONE ISOTERMA:} & \Delta S_{AB} = \int_A^B \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T} \int_A^B dQ = \frac{Q}{T} \\ \text{TRASFORMAZIONE ADIABATICA:} & \Delta S_{AB} = 0 \\ \text{CICLO:} & \Delta S_{ciclo} = 0 \end{cases}$$



$$\oint \frac{dQ}{T} = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{IRR} - \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{REV} < 0 \Rightarrow \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{REV} > \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{IRR}$$

In un sistema isolato:

$$\begin{cases} \Delta S_{AB} > \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{IRR} \Rightarrow \Delta S > 0 & \text{(TRASFORMAZIONE IRREVERSIBILE)} \\ \Delta S_{AB} = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{REV} \Rightarrow \Delta S = 0 & \text{(TRASFORMAZIONE REVERSIBILE)} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ in generale, $\Delta S \geq 0$ $\rightsquigarrow$ PRINCIPIO DELL'AUMENTO DI ENTROPIA

Universo (U) = sistema (S) + ambiente (A)

$\Delta S_U \geq 0 \Rightarrow \Delta S_U = \Delta S_S + \Delta S_A \geq 0$

TRASFORMAZIONE REVERSIBILE: $\Delta S_S + \Delta S_A = 0 \Rightarrow \Delta S_S = -\Delta S_A$

TRASFORMAZIONE IRREVERSIBILE: $\Delta S_U > 0 \Rightarrow \Delta S_S \neq -\Delta S_A$

CICLO: $\Delta S_S = 0$
- SE REVERSIBILE: $\Delta S_U = \Delta S_S + \Delta S_A = 0 \Rightarrow \Delta S_A = 0$
- SE IRREVERSIBILE: $\Delta S_U = \Delta S_S + \Delta S_A > 0 \Rightarrow \Delta S_A > 0$

Due sorgenti a temperatura T_1 e $T_2 > T_1$ a contatto:

$$\Delta S_1 = \int \frac{dQ}{T_1} = \frac{1}{T_1}\int dQ = \frac{Q}{T_1} > 0$$

$$\Delta S_2 = \int \frac{dQ}{T_2} = \frac{1}{T_2}\int dQ = -\frac{Q}{T_2} < 0$$

$$\Delta S_U = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \frac{Q}{T_1} - \frac{Q}{T_2} = Q\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) > 0$$

Corpo a temperatura T_A e sorgente a temperatura T_B a contatto:

$$dQ = mc\,dT \Rightarrow \Delta S_S = \int \frac{dQ}{T} = \int_{T_A}^{T_B} \frac{mc\,dT}{T} = mc\ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right)$$

SE $T_B > T_A \Rightarrow \Delta S_S > 0$; SE $T_B < T_A \Rightarrow \Delta S_S < 0$

CALORE SCAMBIATO DAL CORPO: $Q = mc(T_B - T_A)$

CALORE SCAMBIATO DALLA SORGENTE: $-Q$

$$\Delta S_A = -\frac{Q}{T_B} = -\frac{mc(T_B - T_A)}{T_B} = mc\,\frac{T_B - T_A}{T_B}$$

$$\Delta S_U = \Delta S_A + \Delta S_S = \frac{mc(T_A - T_B)}{T_B} + mc\ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) > 0$$ sia se $T_A > T_B$, sia se $T_B > T_A$

Due corpi a temperatura T_1 e $T_2 > T_1$ a contatto:

$$Q_1 = -Q_2 \Rightarrow m_1 c_1 (T_e - T_1) = -m_2 c_2 (T_e - T_2) \Rightarrow T_e = \frac{m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}$$

$$\Delta S_1 = \int \left(\frac{dQ}{T}\right)_{REV} = \int_{T_1}^{T_e} m_1 c_1 \frac{dT}{T} = m_1 c_1 \ln\left(\frac{T_e}{T_1}\right) > 0$$

$$\Delta S_2 = \int \left(\frac{dQ}{T}\right)_{REV} = \int_{T_2}^{T_e} m_2 c_2 \frac{dT}{T} = m_2 c_2 \ln\left(\frac{T_e}{T_2}\right) < 0$$

$$\Delta S_U = \Delta S_1 + \Delta S_2 > 0$$

Passaggi di stato:

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = \frac{m\lambda}{T}$$

Gas ideali:

$$\Delta S = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{REV} = \int_A^B \frac{dU + dW}{T} = \int_A^B \frac{nc_V dT}{T} + \int_A^B \frac{p\,dV}{T} = nc_V \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) + \int_{V_A}^{V_B} \frac{nRT}{V}\frac{dV}{T} =$$

$$= nc_V \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) + nR \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) \qquad \text{I}$$

$$pV = nRT \Rightarrow T = \frac{pV}{nR} \Rightarrow \frac{T_B}{T_A} = \frac{p_B V_B}{nR} \cdot \frac{nR}{p_A V_A} = \frac{p_B V_B}{p_A V_A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta S = nc_V \ln\left(\frac{p_B}{p_A}\frac{V_B}{V_A}\right) + nR\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = nc_V \ln\left(\frac{p_B}{p_A}\right) + nc_V \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) + nR\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) =$$

$$= nc_V \ln\left(\frac{p_B}{p_A}\right) + nc_p \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) \qquad \text{II}$$

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{T_B}{T_A} \cdot \frac{p_A}{p_B} \Rightarrow \Delta S = nc_V \ln\left(\frac{p_B}{p_A}\right) + nc_p \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) - nc_p \ln\left(\frac{p_B}{p_A}\right) =$$

$$= nc_p \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) - nR\ln\left(\frac{p_B}{p_A}\right) \qquad \text{III}$$

TRASFORMAZIONE ISOTERMA: $\Delta S = mR\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = -mR\ln\left(\frac{p_B}{p_A}\right)$

TRASFORMAZIONE ISOCORA: $\Delta S = mc_v\ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) = mc_v\ln\left(\frac{p_B}{p_A}\right)$

TRASFORMAZIONE ISOBARA: $\Delta S = mc_p\ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) = mc_p\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$

TRASFORMAZIONE ADIABATICA: se reversibile, $\Delta S = 0$

TERZO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

A temperature che tendono a 0K è sempre più difficile effettuare scambi di calore.

$\Delta S \xrightarrow{T\to 0} 0$; $dS = \frac{dQ}{T} \Rightarrow dQ = TdS \xrightarrow{T\to 0} 0$

$Q = T\Delta S \xrightarrow{T\to 0} 0$; $c = \frac{1}{m}\frac{dQ}{dT} \longrightarrow 0$

TRASFORMAZIONI POLITROPICHE

Sono tali che $pV^K = cost$ $\qquad c_{pV^K} =: c_K = ?$

Calcolo per $K=2$ $(c_{pV^2} =: c)$:

$$c = \frac{1}{m}\frac{dQ}{dT} = \frac{1}{m}\frac{dU + pdV}{dT} = \frac{1}{m}\frac{mc_v dT}{dT} + \frac{1}{m}\frac{pdV}{dT} = c_v + \frac{1}{m}p\frac{dV}{dT}$$

$pV = mRT \Rightarrow mRdT = pdV + Vdp$; $\quad pV^2 = cost \Rightarrow 2pVdV + V^2dp = 0 \Rightarrow Vdp = -2pdV$

$mRdT = pdV - 2pdV = -pdV \Rightarrow p\frac{dV}{dT} = -mR \quad \Rightarrow c = c_v - \frac{1}{m}mR = c_v - R$

Per K generico: $\quad c_K = \frac{1}{m}\left(\frac{dQ}{dT}\right)_K = c_v + \frac{R}{1-K}$.

CAMPO GRAVITAZIONALE

Una forza si dice CENTRALE se:
- La sua direzione passa sempre per il suo centro ($\vec{F} \parallel \vec{r}$)
- Il suo modulo è funzione della posizione.

CAMPO DI FORZA = funzione che associa a ogni posizione un vettore che ha l'intensità e la direzione della forza.

Considero una forza centrale:

$$\vec{M}_0 = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = r\vec{U}_r \times F\vec{U}_r = 0 \Rightarrow \vec{L} = cost$$

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta \;; \qquad \vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times m(\vec{v}_r + \vec{v}_\theta) = \vec{r} \times m\vec{v}_r + \vec{r} \times m\vec{v}_\theta = \vec{r} \times m\vec{v}_\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\vec{L}| = mrv_\theta = mr^2\frac{d\theta}{dt} = cost \Rightarrow r^2\frac{d\theta}{dt} = cost$$

$$dS = r\,d\theta; \qquad dA = \frac{r^2 d\theta}{2}; \qquad \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{m}{m} = \frac{L}{2m} = cost \rightsquigarrow$$ VELOCITÀ AREALE O AREOLARE

SE SI TRATTA DI UNA TRAIETTORIA CHIUSA: $\frac{dA}{dt} = \frac{A}{T} \Rightarrow T = \frac{2mA}{L}$

La forza centrale è conservativa:

$$W = \int \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int F(r)\vec{U}_r \cdot ds\,\vec{U}_t = \int F(r)\,ds\cos\theta = \int_{r_A}^{r_B} F(r)\,dr = \int_{r_A}^{r_B} \frac{df(r)}{dr}\,dr =$$

$$= \int_{r_A}^{r_B} df(r) = f(r_B) - f(r_A) = V(r_B) - V(r_A)$$

LE TRE LEGGI DI KEPLERO

I) I pianeti percorrono orbite ellittiche e il Sole occupa uno dei poli.

II) La velocità areale dei pianeti è costante.

III) Il quadrato del periodo di rivoluzione dei pianeti è proporzionale al cubo del semiasse maggiore della traiettoria ellittica: $T^2 = Ka^3$

LEGGE DI NEWTON

Il Sole esercita una forza centripeta sui pianeti pari a: $F = \frac{4\pi^2}{K} \cdot \frac{m}{r^2}$ MASSA PIANETA, DISTANZA PIANETA-SOLE

Di conseguenza, ciascun pianeta esercita una forza sul Sole pari a: $F = \frac{4\pi^2}{K_S} \cdot \frac{m_S}{r^2}$

Per il terzo principio della dinamica, le due forze hanno stesso modulo $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ PRENDENDO LA TERRA COME PIANETA DI RIFERIMENTO: $m_T K_S = m_S K_T$

$$\gamma := \frac{4\pi^2}{m_T K_S} = \frac{4\pi^2}{m_S K_T} \Longrightarrow F_{S,T} = \frac{4\pi^2}{K_T} \cdot \frac{m_T}{r^2} \cdot \frac{m_S}{m_S} \xrightarrow{\text{IN GENERALE}} F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$ LEGGE GRAVITAZIONE UNIVERSALE

La forza esercitata dalla Terra su un corpo di massa m posto sulla superficie di essa è:

$$F = \gamma \frac{m_T m}{r_T^2} = mg \quad ; \qquad \boxed{g = \gamma \frac{m_T}{r_T^2}}$$

In generale, tra masse m_1 e m_2:

$$\vec{F}_{1,2} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_1 = \left(-\gamma \frac{m_1}{r^2} \vec{u}_1\right) m_2 =: m_2 G_1$$

$$\boxed{G = \text{CAMPO GRAVITAZIONALE}}$$

$$\vec{F}_{2,1} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_2 = -\vec{F}_{1,2} = \left(-\gamma \frac{m_2}{r^2} \vec{u}_2\right) m_1 =: m_1 G_2$$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_1 \cdot d\vec{s} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} dr$$

$$W = \int dW = -\gamma m_1 m_2 \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2} dr = -\gamma m_1 m_2 \left[-\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{r_B} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r_B} - \gamma \frac{m_1 m_2}{r_A} = V(B) - V(A)$$

$$V_P = \gamma \frac{m_1 m_2}{r} \Longrightarrow E_P = -V_P = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r} < 0$$

$E_K > |E_P| \Longrightarrow E_m > 0 \Longrightarrow$ TRAIETTORIA IPERBOLICA

$E_K = |E_P| \Longrightarrow E_m = 0 \Longrightarrow$ TRAIETTORIA PARABOLICA

$E_K < |E_P| \Longrightarrow E_m < 0 \Longrightarrow$ ORBITA CHIUSA $\Longrightarrow$ stato legato

$\boxed{E_m \text{ si conserva}}$

VELOCITÀ DI FUGA

È la velocità minima per cui un corpo può sfuggire dal campo gravitazionale e viaggiare a distanza infinita.

$$\frac{1}{2} m v^2 - \gamma \frac{m m_T}{r_T} = \frac{1}{2} m v_0^2 \xRightarrow{v_0 = 0} \frac{1}{2} m v^2 = \gamma \frac{m m_T}{r_T} \Longrightarrow v = \sqrt{\frac{2\gamma m_T}{r_T}} \sim 10^4 \ Km/h$$

ONDE

Un'onda è la propagazione di una perturbazione di una certa grandezza fisica.
NB: Non è la materia a spostarsi.

FRONTE D'ONDA = luogo dei punti in cui la funzione d'onda ξ assume lo stesso valore.
Studieremo solo i fronti d'onda piani che dipendono dalle variabili x, t.

ONDE ELASTICHE (la loro forza di richiamo è di tipo elastico)
- LONGITUDINALI → direzione di oscillazione e di propagazione concordi
- TRASVERSALI → direzione di oscillazione e di propagazione perpendicolari

EQUAZIONE DELLE ONDE → $\frac{\delta^2 \xi}{\delta x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\delta^2 \xi}{\delta t^2}$

Ogni funzione del tipo $f(x \pm vt)$ soddisfa l'equazione.

$f(x-vt) \Rightarrow$ ONDA PROGRESSIVA (si sposta lungo il verso positivo dell'asse x)
$f(x+vt) \Rightarrow$ ONDA REGRESSIVA (si sposta lungo il verso negativo dell'asse x)

ONDA SINUSOIDALE: $\xi(x,t) = \xi_0 \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x \mp vt)\right]$, dove $\lambda :=$ lunghezza d'onda

$$\frac{2\pi}{\lambda}\left[\bar{x} + n\lambda \mp vt\right] = \frac{2\pi}{\lambda}\left[\bar{x} \mp vt\right] + \frac{2\pi}{\lambda} n\lambda = \frac{2\pi}{\lambda}\left[\bar{x} \mp vt\right] + 2\pi n$$

PERIODO $= T = \frac{\lambda}{v}$

PULSAZIONE $= \omega = \frac{2\pi}{\lambda} v = \frac{2\pi}{T}$

FREQUENZA $= \nu = \frac{1}{T}$

NUMERO D'ONDA $= K = \frac{2\pi}{\lambda}$

$\omega = Kv \Rightarrow v = \frac{\omega}{K}$

$\lambda = vT = \frac{v}{\nu} \Rightarrow \nu = \frac{v}{\lambda}$

$$\xi(x,t) = \xi_{x_0} \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda} x \mp \frac{2\pi}{\lambda} vt\right] \Rightarrow \xi(x,t) = \underset{\text{AMPIEZZA}}{\xi_{x_0}} \sin\left(\overbrace{Kx \mp \omega t}^{\text{FASE}} + \underset{\text{FASE INIZIALE}}{\delta}\right)$$

Se $x = 0 \Rightarrow \xi(0,t) = \xi_0 \sin(\omega t + \delta)$; $E_p = \frac{1}{2} K \xi_0^2 = E_m$

EQUAZIONE DEL MOTO ARMONICO

L'ENERGIA È PROPORZIONALE ALL'AMPIEZZA DELL'ONDA AL QUADRATO

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE

Se f_1 e f_2 sono soluzioni dell'equazione delle onde, anche $f_1 + f_2$ lo è.

INTERFERENZA

Caso di due onde identiche ma sfasate tra loro:

f_1 ; $\quad \xi_1(x,t) = A\sin(Kx-\omega t)$

f_2 ; $\quad \xi_2(x,t) = A\sin(Kx-\omega t-\delta)$

f_1+f_2 ; $\quad \xi(x,t) = \xi_1(x,t)+\xi_2(x,t) = A\sin(Kx-\omega t)+A\sin(Kx-\omega t-\delta) \overset{\text{PROSTAFERESI}}{=}$

$$= \underbrace{2A\cos\left(\frac{\delta}{2}\right)}_{A'}\sin\left(Kx-\omega t-\frac{\delta}{2}\right) = A'\sin\left(Kx-\omega t-\frac{\delta}{2}\right)$$

SE $\frac{\delta}{2} = n\pi$, $n=0,1,2,\dots \Rightarrow$ INTERFERENZA COSTRUTTIVA $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ sfasamento spaziale $= \frac{\delta}{K} = \frac{2n\pi}{K} = \frac{2\pi n}{2\pi}\lambda = n\lambda$

SE $\frac{\delta}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n=0,1,2,\dots \Rightarrow$ INTERFERENZA DISTRUTTIVA $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ sfasamento spaziale $= \frac{\delta}{K} = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$

Caso di un'onda progressiva e una regressiva:

f_1 ; $\quad \xi_1(x,t) = A\sin(Kx-\omega t)$

f_2 ; $\quad \xi_2(x,t) = A\sin(Kx+\omega t)$

f_1+f_2 ; $\quad \xi(x,t) = \xi_1(x,t)+\xi_2(x,t) = \overbrace{2A\sin Kx}^{A(x)}\cdot\cos\omega t = A(x)\cos\omega t$ ⤳ ONDA STAZIONARIA

$A(x)=0 \Rightarrow Kx = n\pi \Rightarrow x = \frac{n\pi}{K} = \frac{n\pi}{2\pi}\lambda = n\frac{\lambda}{2}$ ⤳ ASCISSE DEI NODI

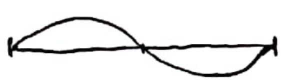
$A(x)=2A \Rightarrow Kx = (2n+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2n+1}{K}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{2n+1}{2\pi}\lambda\frac{\pi}{2} = n\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda}{4}$

ESEMPIO (CORDA BLOCCATA):

$L = n\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{2L}{n}$

- Se $n=1 \Rightarrow \lambda = 2L \Rightarrow L = \frac{\lambda}{2}$ ⤳ ARMONICA FONDAMENTALE

- Se $n>1$ ⤳ ARMONICHE SUPERIORI



VELOCITÀ DI PROPAGAZIONE LUNGO UNA CORDA TESA

$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ (T ⤳ tensione, ρ ⤳ densità)