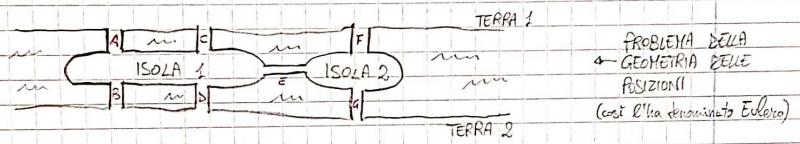


24/09/2020

LA TEORIA DEI GRAFI

L'origine di questa disciplina risale a Euler (1736), che era un matematico e filosofo che aveva una corrispondenza con Leibniz.

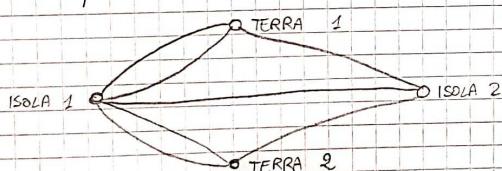
Euler si imbatté in un problema matematico che non era risolvibile con gli strumenti matematici tradizionali: si ha un fiume con due isole collegate alla terraferma tramite dei ponti disposti nel seguente modo:



Il problema consiste nel trovare un percorso che parta qui, termini qui e attraversi tutti i ponti una e una sola volta.

CIRCUITO EUCLERIANO

Schematizzazione del problema:



Si può convertire il problema in un problema basato sul modello dei grafi: esiste un percorso sul grafo che inizia e termina sullo stesso nodo e che attraversa tutti gli archi una e una sola volta?

Non esiste alcun percorso che soddisfi i requisiti richiesti, poiché esiste almeno un nodo adiacente a un numero di archi dispari (a partire da quel nodo non è sempre possibile andare e tornare, cosa che invece sarebbe necessaria per risolvere il problema).

Perciò, la condizione per cui tutti i nodi abbiano un numero di archi pari è NECESSARIA. Ma è anche SUFFICIENTE? (\rightarrow vale anche il se e solo se?)

(\forall : La questione ha senso per grafi connessi)

GRADO

28/09/2020

Definizione:

Un GRAFO $G(V, E)$ è una coppia di insiemi V, E , dove V è l'insieme di nodi ed E è l'insieme di SPIGOLI (o ARCHI).

V è finito; mentre V è un insieme di elementi, E è un insieme di coppie non ordinate di vertici. → L'utilizzo delle parentesi graffe implica che l'insieme/coppia non è ordinato.

Esempio:

$$V = \{a, b, c, d, e\}$$

$$E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{e, a\}, \{b, d\}, \{c, e\}\}$$

Questo grafo in particolare è SEMPLICE

(non ci sono coppie del tipo $\{a, a\}$ in E).

Inoltre E NON è un MULTI-INSIEME

(ogni coppia è presente al massimo una volta in E).

→ COPPIE con MOLTEPLICITÀ MAGGIORE DI 1 SONO Dette SPIGOLI PARALLELI

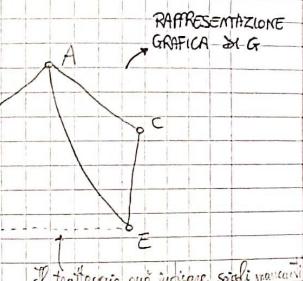
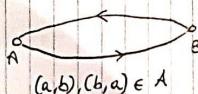
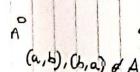
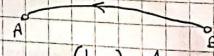
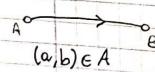
→ Un grafo con spigoli paralleli è detto MULTIGRAFO.

Definizione:

Un GRAFO ORIENTATO è un grafo $G(N, A)$, dove N è l'insieme di nodi ed A è l'insieme di archi.

Mentre N è un insieme di elementi, A è un insieme di coppie ordinate di vertici. → L'utilizzo delle parentesi tonde implica che la coppia è ordinata

Dati due nodi a, b , esistono 4 possibilità:



D



Un grafo ORIENTATO SEMPLICE NON presenta situazioni di questo tipo:

→ Nella un grafo ^{NON} ORIENTATO rappresenta delle relazioni simmetriche tra coppie di elementi, un grafo ORIENTATO, in generale, no.

Definizione:

- Se uno spigolo $\{x, y\} \in E$ ($\{x, y\} \in A$), si dice che $\{x, y\}$ è INCIDENTE in x, y e che x, y sono ESTREMI di $\{x, y\}$.
- Due spigoli sono INCIDENTI se hanno un estremo in comune.
- Due vertici x, y sono ADIACENTI se lo spigolo $\{x, y\} \in E$.
- Il GRADO di un vertice è il numero di spigoli incidenti in quel vertice.
 $\hookrightarrow \text{DEG}(v)$

Handshaking Lemma:

Sia $G(V, E)$ un grafo NON orientato e semplice.

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E| \quad \leftarrow \text{VALE ANCHE PER I MULTIGRAFI}$$

Corollario:

✓ grafo, il numero di vertici di grado dispari è un numero pari.

Definizione:

Sia $G(V, E)$ un grafo. Il complemento di $G(V, E)$, \bar{G} , ha gli stessi vertici di G e ha gli spigoli complementari, e cioè:
 $\bar{G}(V, \bar{E})$ è t.c. $\bar{V} = V$; \bar{E} comprende tutti e soli gli spigoli che NON appartenono a E .

→ Dati: $G(V, E)$, $\bar{G}(V, \bar{E})$:

$$|\bar{E}| + |E| = \frac{|V|(|V|-1)}{2} = \binom{|V|}{2}$$

In un qualunque insieme di 5 persone capita almeno una delle seguenti 2 affermazioni?

• □

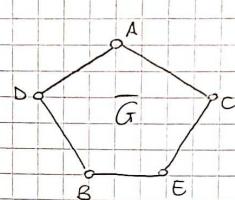
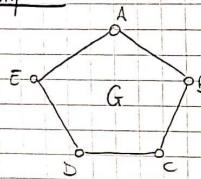
- Esistono 3 persone che si conoscono mutualmente
- Esistono 3 persone che NON si conoscono mutualmente

PIÙ IN GENERALE:

Avendo un grafo G con 5 vertici, ne esistono 3 che formano un triangolo in G oppure 3 che formano un triangolo in \bar{G} . È VERO?

La risposta è NO.

Controesempio:



29/09/2020

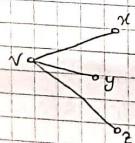
L'affermazione, tuttavia, diventa VERA per i grafhi composti da almeno 6 vertici:

$$G: |V(G)| \geq 6; \quad \text{sia } v \in V(G) \Rightarrow \deg_{G}(v) + \deg_{\bar{G}}(v) = |V(G)| - 1 \geq 5$$

\Rightarrow almeno uno tra $\deg_G(v)$, $\deg_{\bar{G}}(v) \geq 3$ \leftarrow cosa non più vera per $|V(G)| \leq 5$

DUE CASI:

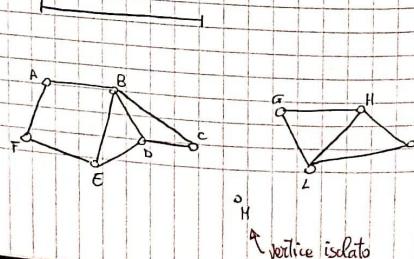
• $\deg_G(v) \geq 3$



\leftarrow se x, y sono adiacenti (oppure x, z ; y, z), abbiamo subito dimostrato che si ha un triangolo in G ; se ciò non fosse vero, si avrebbe un triangolo in G e i cui vertici sono x, y, z .

• $\deg_{\bar{G}}(v) \geq 3 \rightarrow$ il discorso è identico con i ruoli di G, \bar{G} invertiti.

Consideriamo un grafo:



ESEMPIO DI WALK (camminata passeggiata):

A, {A,B}, B, {B,E}, E, {E,D}, D, {D,B}, B, {A,B}, A, {A,F}, F

NODO RAGGIUNTO

ARCO ATTRAVERSATO

→ Lo stesso walk si può scrivere come

A, B, E, D, B, A, F + SUCCESSIONE
vertici visitati

TRAIL → è un WALK che evita di percorrere + volte uno stesso spigolo (è comunque consentito visitare + volte uno stesso vertice).

ESEMPIO DI TRAIL: A, B, D, E, B, C, D

PATH (cammino) → è un TRAIL che evita di visitare + volte uno stesso vertice.

ESEMPIO DI PATH: A, B, E, D, C

Definizione:

Un WALK si dice chiuso se inizia e termina sullo stesso vertice.

Anche un TRAIL e un PATH possono essere chiusi. In particolare, un path chiuso è definito CICLO, mentre un trail chiuso è detto CIRCUITO.

ESEMPIO DI CICLO: A, B, D, E, F, A

Se è un walk, è anche un trail e un path

Definizione:

Due vertici di un grafo si dicono connessi se \exists almeno un walk che ha quei due vertici come estremi.

Consideriamo la relazione di connessione tra vertici di un grafo non orientato.

→ È RIFLESSIVA

→ È SIMMETRICA

→ È TRANSITIVA

} \Rightarrow È d'equivalenza

Una relazione di equivalenza permette di partizionare un insieme di partenza.

PARTIZIONARE = dividere ~~in~~ l'insieme di partenza in sottoinsiemi DISGIUNTI e tali da coprire l'intero insieme. Tali sottoinsiemi sono detti CLASSI.

Nel nostro esempio, ci sono 3 classi: $\{A, B, C, D, E, F\}$, $\{G, H, I, L\}$, $\{M\}$.
 I vertici che costituiscono ciascuna classe, insieme ai relativi spigoli, costituiscono una **COMPONENTE CONNESSA** del grafo.

\hookrightarrow È UNA CLASSE INDIVIDUATA DAGLI RELATIVI SPIGOLI DI EQUIVALENZA DELLA CONNESSIONE

Definizione:

Un grafo è CONNESSO se ha una sola componente连通.

Circuiti euleriani:

Sono trail chiusi che visitano ogni spigolo esattamente una volta.

La domanda a cui Euler tentava di rispondere è: in quali casi $G(V, E)$ ammette un circuito euleriano?

• $G(V, E)$ ammette un circuito euleriano se e solo se:

- 1) $\forall r \in V \quad \deg(r)$ è pari
- 2) $G(V, E)$ è connesso

Per dimostrare questa affermazione, enunciando in qualche altra maniera:

• Sia G connesso. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1) G ammette un circuito euleriano.

2) $\forall r \in V(G) \quad \deg(r)$ è pari.

3) $E(G)$ può essere partitionato in circuiti C_1, C_2, \dots, C_i tali che $E(C_i) \cap E(C_j) = \emptyset \quad \forall i \neq j$; $E(C_1) \cup E(C_2) \cup \dots \cup E(C_i) = E(G)$.

01

02

03

04

05

06

07

08

09

10

11

12

13

14

15

16

17

18

19

20

21

22

23

24

25

26

27

28

29

30

31

32

33

34

35

36

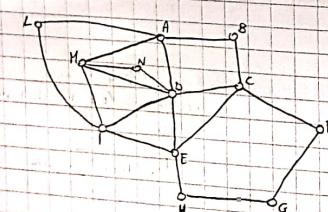
37

38

39

40

ESEMPIO:



CIRCUITI:

ABC $\overleftarrow{C_1}$ FGHECDA

ALIMA $\overleftarrow{C_2}$

A $\overleftarrow{C_3}$ NEIDMN

1) \Rightarrow 2)

01/10/2020

Dimostrazione del teorema:

2) \Rightarrow 3) Se $\forall v \in V(G)$ $\deg(v)$ è pari, è possibile riconoscere un circuito col seguente algoritmo:

Si parte da un nodo A e si attraversa il grafo marcando via via gli spigoli che vengono percorsi; gli spigoli marcati non possono essere attraversati nuovamente. Nel momento in cui si torna nel nodo A , il circuito è stato individuato. Sicuramente ciò accade poiché il numero totale di spigoli è finito.

Una volta preso il circuito, se ne eliminano gli spigoli dal grafo si provoca, ottenendo così un nuovo grafo G' , il quale ha la caratteristica di avere sempre tutti i nodi di grado pari (potrebbe non essere连通 ma non è un problema). Dopo di che si procede iterativamente con questa logica a partire da G' , finché non si ottiene un grafo senza spigoli. I circuiti ricavati tramite queste iterazioni ^{saranno} quindi partizioni del grafo iniziale. \square

3) \Rightarrow 1) Se ~~la~~ il partizionamento ~~ha~~ da cui si parte comprende un unico circuito (che effettivamente è euleriano), l'asserto è ovvio.

In caso contrario, è possibile concatenare tra loro i circuiti finché non se ne ottiene uno che comprende tutti gli spigoli appartenenti al grafo. Nell'esempio della pagina precedente:

$$C_{13} \rightarrow ABCFGHEIMDNDECDA$$

$$C_{123} \rightarrow ABCFGHEIMALIDMNDDECDA$$

Si considera un nodo appartenente al 1° circuito considerato (e.g. il nodo 1 nel circuito C_{13}) che sia adiacente a uno spigolo non appartenente a tale circuito. La concatenazione avviene a partire da questo nodo. \square

1) \Rightarrow 2) Implicazione già osservata nella prima lezione.

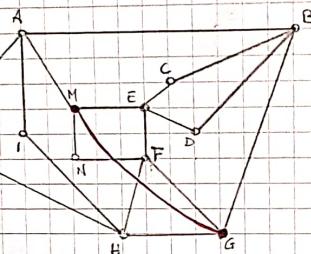
Teorema:

Un grafo G ammette un trail euleroiano se e solo se:

- G è连通的
- G ha al più 2 vertici di grado dispari

M, G sono i nodi iniziali.
di grado dispari

se si aggiunge uno
spigolo tra M, G per
rendere questi due nodi
di grado pari *



$$* G + \{m, g\} = G'$$

G' ammette un circuito euleroiano C'

$$C' = H, G, B, C, \dots, M$$

→ Un trail euleroiano nel grafo G
si ottiene da C' eliminando lo
spigolo $\{m, g\}$.

05/10/2020

Dimostrazione per induzione:

Sia $P(n)$ un'affermazione vera per qualunque n . Vediamo come possiamo dimostrarla per induzione (seguendo il 1° PRINCIPIO):

- PROVO CHE $P(1)$ È VERA, $h = \#$ "PICCOLO"
- PROVO CHE, SE $P(m)$ È VERA $\Rightarrow P(m+1)$ È VERA

→ Quanto vale la somma dei primi $n \neq$ dispari?

$$\sum_{h=0}^{m-1} (2h+1) = m^2$$

• L'affermazione è vera per $m=1$ ($1 = 1^2$ ✓)

• Supponiamo che l'affermazione sia vera per un certo m e la dimostriamo per $m+1$.
Supponiamo quindi $\sum_{h=0}^{m-1} (2h+1) = m^2$.

Consideriamo $\sum_{h=0}^m (2h+1)$.

$$\sum_{h=0}^m (2h+1) = \sum_{h=0}^{m-1} (2h+1) + 2m+1 = m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2$$

Somma prima
 $m+1 \neq$ dispari

Sia $P(n)$ un'affermazione vera^{V_n}. Vediamo come possiamo dimostrarla per induzione (seguendo il 2° PRINCIPIO):

- PROVO CHE $P(h)$ È VERA PER h "piccolo"
- PROVO CHE SE $P(i)$ È VERA $\forall i \leq n \Rightarrow P(n+1)$ È VERA

\rightarrow Un qualunque $n \in \mathbb{N}$ può essere fattorizzato (\equiv scampato in prodotti di # primi).

- $n=1 : 1 = 1 \times 1$
- Supponiamo che $\forall k \leq n$ sia fattorizzabile.

Consideriamo $n+1$; ci sono due casi:

1) $n+1$ è primo: $n+1 = (n+1) \times 1$ ✓

2) $n+1$ non è primo: $n+1 = p \times q$, $2 \leq p, q \leq n$

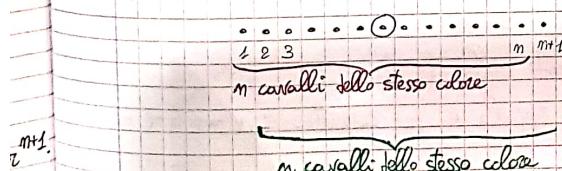
PER HP INDUTTIVA, p, q SONO ENTRAMBI FATTORIZZABILI IN # PRIMI
 \Rightarrow ANCHE $n+1$, CHE È DATO DAL PRODOTTO DI p, q , È FATTORIZZABILE IN # PRIMI

$\rightarrow \forall$ insieme di n cavalli è formato da cavalli dello stesso colore.

• $n=1 \rightarrow$ L'AFFERMAZIONE È BANALMENTE VERA (\equiv l'unico valore di n per cui il passo base è ok)

• Assumiamo che $P(n)$ è vera (\equiv ogni insieme di n cavalli è formato da cavalli dello stesso colore).

Prendiamo $n+1$ cavalli (\equiv insieme di $n+1$ cavalli).



$\textcircled{1} \in \textcolor{red}{R} \cap \textcolor{green}{V} \Rightarrow$ Tutti gli $n+1$ cavalli hanno lo stesso colore.

In questa dimostrazione c'è evidentemente una falla: in effetti c'è un errore logico nel passaggio da $n=1$ a $n=2$, in cui l'intersezione tra l'insieme "rosso" e l'insieme "verde" non esiste!

Grafi aciclici:

Un grafo è ACICLICO se non ammette cicli.

Sia $G(V, E)$ un grafo con n vertici. Qual è il numero minimo di spigoli affinché G sia连通的?

$$\rightarrow |E(G)| \geq n-1$$

✓ È UNA CONDIZIONE NECESSARIA MA NON SUFFICIENTE (lo vedremo domani)

Sia $G(V, E)$ un grafo con n vertici. Qual è il numero massimo di spigoli affinché G sia aciclico?

$$\rightarrow |E(G)| \leq n-1$$

✓ È UNA CONDIZIONE NECESSARIA MA NON SUFFICIENTE (lo vedremo domani)

\Rightarrow I grafi连通的 e aciclici con n vertici hanno necessariamente $n-1$ spigoli e sono definiti ALBERI.

06/10/2020

Lemma:

Sia $G(V, E)$ un grafo e sia $e \in E$.

Se G è连通的 $\Rightarrow G-e$ ha al più due componenti connesse. In particolare, se $G-e$ ha due componenti connesse, allora gli estremi di e appartengono alle due diverse componenti connesse.

Idea della dimostrazione:

~~Se G è连通的~~. Siano u, v i due nodi collegati da e .

\rightarrow Se \exists path che non utilizza lo spigolo e per connettere $u, v \Rightarrow G-e$ rimane连通的.

\rightarrow Altrimenti, il grafo non rimane连通的 ed effettivamente $u, v \in$ componenti connesse diverse.

\rightarrow Le componenti connesse di $G-e$ non possono essere tre; se fossero tre, in $G-e$ esisterebbe un nodo x scnesso sia da u che da v ; ma in G dovrebbe essere connesso ad almeno uno dei due nodi non utilizzando ~~non~~ lo spigolo e \Rightarrow ASSURDO.

Lemma

Sia G

Se G

nesse

Idea

Cousic

restau

gati

spigoli

$G-e$

Sia G

natior

la co

$G-e$

Teorema

Sia G

Lemma:

Sia $G(V, E)$ un grafo e sia $e \in E$.

Se G è aciclico, allora $G - e$ è ancora aciclico e il suo # di componenti connesse è pari al # di componenti connesse di G + 1.

Idea della dimostrazione:

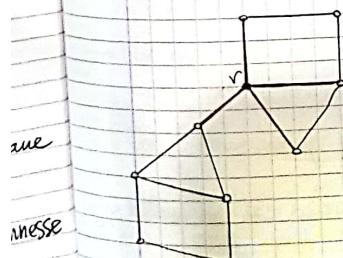
Consideriamo solo la componente连通的 comprendente lo spigolo e (le altre restano invariate). In tale componente连通的, siano u, v i due nodi collegati da e . Se essi fossero connessi tramite un path che non utilizza lo spigolo e , contratte l'ipotesi dell'aciclicità del grafo G . Per questo motivo, $G - e$ deve essere tale che u, v appartengano a due componenti connesse diverse.

↑ → ↓

Sia $G(V, E)$ un grafo. La rimozione di un vertice $v \in V(G)$ implica l'eliminazione di v stesso e di tutti gli spigoli incidenti a v (che compongono la cosiddetta "stella^{incidenti} di v " = $\delta(v)$).

$$G - v \rightarrow \begin{cases} V(G - v) = V(G) \setminus \{v\} \\ E(G - v) = E(G) \setminus \delta(v) \end{cases}$$

NB: $|\delta(v)| = \deg(v)$



Se $G(V, E)$ è连通的 e $v \in V \Rightarrow$
 $G - v$ ha al più $|\delta(v)|$ componenti connesse.

↑
È UN COROLLARIO DEL LEMMA PRECEDENTE

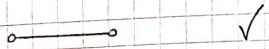
Teorema:

Sia $G(V, E)$ un grafo连通的 $\Rightarrow |E| \geq |V| - 1$.

Se e

Dimostrazione (usando il 2° principio di induzione):

$$n := \# \text{ vertici} = |V|$$



• PASSO BASE: $m = 2$

• PASSO INDUTTIVO: supponiamo che ogni grafo连通的 con $h \leq n$ vertici abbia almeno $h-1$ spigoli \Rightarrow

Dobbiamo dimostrare che un grafo连通的 con $n+1$ vertici ha almeno n spigoli.

Sia $G : |V(G)| = m+1$, G 连通的. Prendo $v \in V(G)$ e considero $G-v$.

Il grafo $G-v$ ha K componenti connesse G_1, G_2, \dots, G_K con $K \leq \deg(v)$.*

Notiamo che $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \dots \cup E(G_K) \cup S(v)$ è una partizione.

(\Rightarrow ciascuno spigolo $\in E(G)$, dopo la rimozione di v , va a finire o in una delle componenti connesse $E(G_i)$ o in $S(v)$).

In particolare: $|E(G)| = |E(G_1)| + \dots + |E(G_K)| + \deg(v) \Rightarrow$

ciascuno $E(G_i)$ ha al più m vertici (dato che sicuramente non comprende v).

\Rightarrow possiamo applicare l'ipotesi induttiva:

$$\begin{aligned} |E(G)| &= |E(G_1)| + \dots + |E(G_K)| + \deg(v) \geq |V(G_1)| - 1 + \dots + |V(G_K)| - 1 + \deg(v) = \\ &= |V(G_1)| + \dots + |V(G_K)| - K + \deg(v) = |V(G)| - 1 - K + \deg(v) \geq |V(G)| - 1 \end{aligned}$$

* ≥ 0

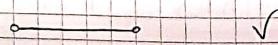
Teorema:

Sia $G(V, E)$ un grafo aciclico $\Rightarrow |E(G)| \leq |V(G)| - 1$.

Dimostrazione (usando il 2° principio di induzione):

$$m := \# \text{ spigoli} = |E|$$

• PASSO BASE: $m = 1$



• PASSO INDUTTIVO: per ogni supponiamo che ogni grafo aciclico con $h \leq m$ spigoli abbia almeno $h+1$ vertici \Rightarrow

Dobbiamo dimostrare che un grafo aciclico con $m+1$ spigoli ha almeno $m+2$ vertici.

G aciclico, $|E(G)| = m+1$

Sia $e \in E(G)$. Considero $G-e$. $G-e$ ha K componenti connesse, $K \geq 2$.

Siano G_1, G_2, \dots, G_K le c.c. (=componenti connesse) di $G-e$:

ciascuna componente è aciclica, $|E(G_i)| \leq m \quad \forall i$

$$|E(G)| = 1 + \sum_{i=1}^K |E(G_i)| \leq 1 + \sum_{i=1}^K (|V(G_i)| - 1) = 1 + \sum_{i=1}^K |V(G_i)| - K =$$

$$= |V(G)| + \underbrace{1-K}_{\leq -1} \leq |V(G)| - 1$$

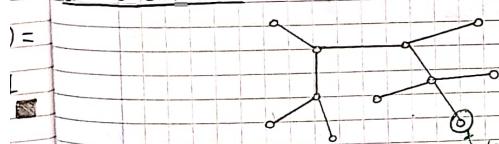
—————

In definitiva, abbiamo visto che:

- G CONNESSO $\Rightarrow |E(G)| \geq |V(G)| - 1$
- G ACICLICO $\Rightarrow |E(G)| \leq |V(G)| - 1$
- G CONNESSO \wedge ACICLICO $\Rightarrow |E(G)| = |V(G)| - 1$

).

ESEMPIO DI ALBERO:



→ È un grafo MINIMALMENTE CONNESSO
e MASSIMALMENTE ACICLICO

VERTICE DI GRADO 1 = Foglia

→ Un qualunque albero ha almeno due foglie. Dimostriamolo:

$$|E(G)| = |V(G)| - 1$$

Per l'handshaking lemma: $2|E(G)| = \sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2|V(G)| - 2$

Partiziono $V(G)$ in due classi:

- $V_1 \rightarrow$ vertici di G con grado 1 [FOGLIE]
- $V_{\geq 2} \rightarrow$ vertici di G con grado ≥ 2

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) \stackrel{\text{grado di ogni vertice è ALMENO 2}}{\leq} |V_1| + 2|V_{\geq 2}|$$

→ Mettiamo insieme i pezzi: $2|V(G)| - 2 \geq |V_1| + 2|V_{\geq 2}|$

$$\Rightarrow 2(|V_1| + |V_{>1}|) - 2 \geq |V_1| + 2|V_{>1}| \Rightarrow |V_1| \geq 2$$

Questo risultato è vero a seguito dell'assunzione che l'albero abbia almeno due vertici ($|V(G)| \geq 2$).

08/10/2020

Due definizioni equivalenti di ALBERO:

- È un grafo连通 e aciclico.
- È un grafo G 连通 e tale che $|V(G)| = |E(G)| + 1$.
- È un grafo G aciclico e tale che $|V(G)| = |E(G)| + 1$.

Comunque sia, esiste anche una definizione algoritmica di albero:

Growing tree procedure:

A partire da un unico nodo, aggiungere via via altri vertici tali che l'ultimo inserito sia di grado 1 (quindi ogni volta che si aggiunge un vertice v , esso deve essere collegato al resto dell'albero con un unico spigolo).

Teorema:

Un grafo G è un albero \Leftrightarrow viene costruito tramite la growing tree procedura.

Idea della dimostrazione:

\Leftarrow) Per induzione: l'aggiunta di crescere modo (tale che sia di grado 1), non fa perdere al grafo né la proprietà di essere连通, né la proprietà di essere aciclico (\Rightarrow in un ciclo tutti i vertici hanno grado ≥ 2).

\Rightarrow) Rimozione iterativa dei vertici fino a ottenere un unico nodo; sicuramente il grafo non perde mai la proprietà di essere aciclico; i pochi affinché non perda mai neanche la proprietà di essere连通, se devono rimuovere le foglie (che in un albero ci sono sempre).

Si sfrutta il fatto che il grafo è连通 se, per qualunque coppia di nodi x, y , esiste un path che connette x con y . Se viene rimossa una foglia f di x, y , poiché ha grado 1, non può mai fare parte di un path.

Ese

G,

Pas

gra

L

Re

- G["]

Se

So

m

Ese

ce

che

che

Qu

Esercizio 10 del compito 1:

G connesso con n vertici.

Possiamo sempre aggiungere $\lceil \frac{m}{2} \rceil$ spigoli a G in modo tale che il nuovo grafo ammetta un circuito euleriano.

↳ È POSSIBILMENTE UN MULTIGRAFO

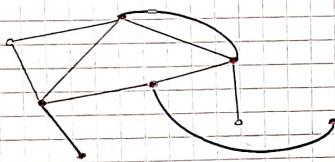
Provare che questa affermazione è vera.

• G ^(connesso) ammette un circuito euleriano se non ci sono vertici di grado dispari.

• Se G non ammette un circuito euleriano $\Rightarrow \exists n'$ vertici di grado dispari.

So che $n' \leq n$ e che n' è pari.

$n' = 2h$ vertici di grado dispari, con $h \leq \lceil \frac{m}{2} \rceil$.



Vertici inizialmente
di grado dispari

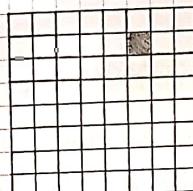
Spigoli aggiunti successivamente
per rendere tutti i vertici di grado pari
sono al + $\lceil \frac{m}{2} \rceil$ ✓

Esercizio 8 del compito 2:

1.

rie

=



← Scacchiera 8x8 "bucata"
(senza un quadratino)

te

spic

ne

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

Dimostrazione per intuizione:

→ Suddividere la scacchiera in 4 quadranti.



Il primo pezzo è la L rossa
che esclude il quadrante dove
si trova il buco.
E così via iterativamente.

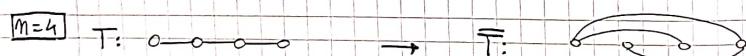
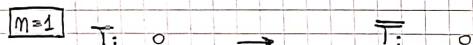
Esercizio 14 del compito 2:

Disegnare un albero T tale che \overline{T} anche il suo complementare \overline{T} è un
albero. Per quali valori di $|V(T)|$ questo è possibile?

So che $|E(T)| + |E(\overline{T})| = \binom{m}{2}$, dove $m = |V(T)|$

$$\Rightarrow m+1 + m-1 = \binom{m}{2} \Rightarrow m+1 + m-1 = \frac{m(m-1)}{2}$$

$$\Rightarrow 4(m-1) = m(m-1) \Rightarrow (m-4)(m-1) = 0 \Rightarrow m=1; m=4$$



Esercizio 7 del compito 2:

È vero che $\forall G$ uno tra G , \overline{G} è连通の?

La risposta è sì. Dimostriamolo per induzione:

• PASSO BASE: l'affermazione è banalmente vera per grafi con un vertice. ✓

• PASSO INDUTTIVO: supponiamo che l'affermazione sia vera per grafi con n vertici e consideriamo G : $|V(G)| = n+1$.

Sia $v \in V(G)$; consideriamo i seguenti tre casi:

$$\bullet \deg_G(v) = m$$

$$\bullet \deg_G(v) = 0$$

$$\bullet 0 < \deg_G(v) < m$$

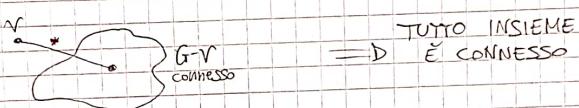
Nel 1° caso non c'è nulla da dimostrare, perché v è connesso con tutti gli altri n nodi di G , per cui il grafo è connesso.
Per ragioni analoghe, nel 2° caso \bar{G} è banalmente connesso.

Consideriamo il 3° caso: si ha che $\deg_G(v) \geq 0$, $\deg_{\bar{G}}(v) \geq 0$.

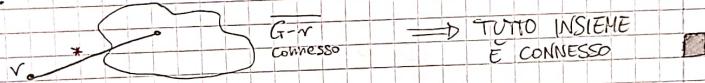
Possiamo il grafo $G-v$, che ha n vertici \Rightarrow per ipotesi induttiva,

$G-v$ è connesso oppure $\bar{G-v}$ è connesso

→ SOTTOCASO (a):



→ SOTTOCASO (b):



12/10/2020

CONTEGGIO

Regola del prodotto - regola della somma:

Consideriamo uno scenario di un reparto ospedaliero:

A: insieme dei medici ? PERSONALE
B: insieme degli infermieri ? OPERATIVO

$$A \cap B = \emptyset$$

Si vuole designare un rappresentante del personale operativo. In quanti modi diversi si può scegliere il rappresentante?

→ REGOLA DELLA SOMMA

Scelta alternativa: $|A| + |B|$ modi diversi

Se ho un processo che posso svolgere scegliendo alternativamente tra n opzioni diverse, ciascuna delle quali può essere svolta in p_i modi diversi, $i=1 \dots n$

→ posso svolgere il processo in $\sum_{i=1}^n p_i$ modi diversi.

C

Supponiamo ora di voler eleggere un rappresentante per i medici e un rappresentante per gli infermieri. In quanti modi diversi lo possiamo fare?

→ REGOLA DEL PRODOTTO

Se un certo processo richiede l'esecuzione di due compiti, il primo dei quali può essere svolto in n_1 modi diversi e il secondo in n_2 modi diversi \Rightarrow il processo può essere svolto in $n_1 \cdot n_2$ modi diversi.

G

Nel nostro esempio, in $|A| \cdot |B|$ modi diversi.

Si

no

Se invece si hanno n processi, ciascuno dei quali può essere svolto in p_i modi diversi, $i = 1 \dots n$, che devono essere svolti tutti \Rightarrow si può svolgere l'intero processo complessivo in $\prod_{i=1}^n p_i$ modi diversi.

Sì

A

D

JK

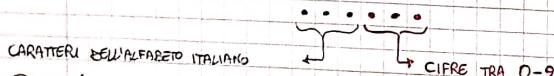
Quante sono le stringhe con 9 bit?

2^9 (s. devo svolgere 9 compiti elementari, ciascuno dei quali può essere svolto in 2 modi diversi).

Cu

l'

Si hanno dei codici formati da 6 caratteri:



Quanti codici diversi si possono ottenere?

$$21^3 \cdot 10^3$$

Quante sono le stringhe con 10 bit che hanno uno 0 in settima posizione?

2^9 : c'è una corrispondenza 1-a-1 tra

Pige

Se

al

con

Pige

Se

con

• L'insieme delle stringhe con 10 bit e uno 0 in settima posizione

• L'insieme delle stringhe con 9 bit

→ SI DEVE OMOLOGARE SE DUE DIREZIONI (in questo caso è abbastanza banale)

Quante sono le possibili password con 6 o 7 caratteri alfanumerici?

$$31^6 + 31^7$$

esem: REGOLA DELLA SOMMA: inizialmente si deve decidere se selezionare una password con 6 caratteri OPPURE una password con 7 caratteri.

Quante sono le possibili password con 6 o 7 caratteri alfanumeri tali che il primo carattere sia una cifra?

$$10 \cdot 31^5 + 10 \cdot 31^6$$

► →

Supponiamo ora di voler scegliere un rappresentante che sia un medico di nazionalità non italiana. Consideriamo i seguenti insiem OPPURE all'interno del nostro ospedale:

mo: A: insieme dei medici

D: ~~insieme~~ personale di nazionalità non italiana

$$A \cap D \neq \emptyset$$

Il rappresentante può essere scelto in $|A| + |D| - |A \cap D|$ modi diversi.

→ →

Quante sono le stringhe con 8 bit tali che il terzo bit è uno 0 oppure l'ottavo è un 1?

$$2^7 + 2^7 - 2^6$$

$$\underbrace{\dots 0 \dots \dots}_{2^7} + \underbrace{\dots \dots \dots 1}_{2^7} - \underbrace{\dots 0 \dots \dots 1}_{2^6}$$

Se fosse stato un OR esclusivo, la risposta sarebbe stata

$$\underbrace{2^6 + 2^6}_{2^6} + \underbrace{\dots 0 \dots \dots 0}_{2^6} + \underbrace{\dots 1 \dots \dots 1}_{2^6}$$

? Pigeonhole principle:

Se $n+1$ oggetti devono essere alloggiati in n scatole \Rightarrow \exists almeno 1 scatola con ≥ 2 oggetti.

Pigeonhole principle generalizzato:

Se n oggetti devono essere alloggiati in K scatole \Rightarrow \exists almeno 1 scatola con almeno $\lceil \frac{n}{K} \rceil$ oggetti.

Dimostrazione:

Supponiamo per assurdo che possiamo alloggiare gli oggetti in K scatole, con ognuna con al più $\lceil \frac{m}{K} \rceil - 1$ oggetti. Poiché vale sempre $\lceil \frac{m}{K} \rceil < \frac{m}{K} + 1$

$$\Rightarrow m \leq (\lceil \frac{m}{K} \rceil - 1)K < (\frac{m}{K} + 1 - 1)K = m \Rightarrow m < m \quad \text{ASSURDO}$$

↑
HP ASSURDO



Se ho 145 persone \Rightarrow ce ne sono almeno 13 che sono nate nello stesso mese ($\lceil \frac{145}{12} \rceil = 13$).

→ APPLICAZIONE PROBABILISTICA DEL PIGEONHOLE PRINCIPLE:

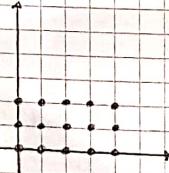
Qual è la probabilità che tra n persone ce ne siano 2 che hanno il compleanno lo stesso giorno?

* SE $n=23$, LA PROBABILITÀ CHE NE ESISTANO DUE NATE LO STESSO GIORNO È MAGGIORE DELLA PROBABILITÀ CHE NON NE ESISTANO.



Consideriamo l'insieme di punti in \mathbb{Z}_+^2 . Li vogliamo colorare con K colori, K finito.

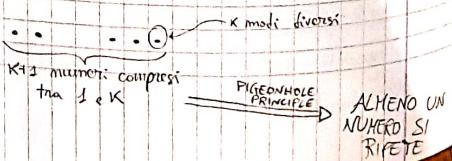
Comunque coloriamo i punti, necessariamente esisterà un rettangolo i cui vertici hanno lo stesso colore.



13/10/2020

Risolviamo prima la questione sui punti in \mathbb{Z}_+^2 . Per farlo, partiamo dalla seguente domanda:

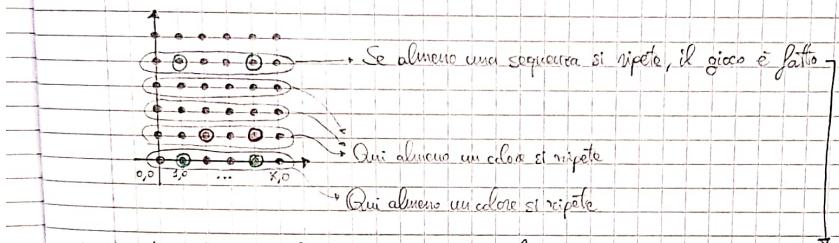
Quante diverse sequenze di lunghezza $K+1$ posso formare con numeri interi compresi tra 1 e K ?



La risposta è: K^{k+1} sequenze \Rightarrow se considero $K^{k+1} + 1$ sequenze di questo tipo Pigeonhole Principle $\rightarrow \exists 2$ sequenze uguali.

È facile convincersi che:

SCEGLIERE UN NUM. INTERO TRA 1 E $K \equiv$ SCEGLIERE UN COLORE TRA K



\therefore D'altronde, abbiamo la garanzia che almeno una sequenza si ripete nel momento in cui prenotiamo almeno $K^{k+1} + 1$ sequenze. \blacksquare

RE

Affrontiamo ora il paradosso del compleanno a cui abbiamo accennato ieri:

$$\text{PROBABILITÀ CHE DUE PERSONE SIANO NATE LO STESSO GIORNO} = \frac{1}{365}$$

$$\Rightarrow \text{PROBABILITÀ CHE LE DUE PERSONE NON SIANO NATE LO STESSO GIORNO} = \frac{364}{365}$$

$$\text{PROBABILITÀ CHE TRE PERSONE NON SIANO NATE LO STESSO GIORNO} = \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365}$$

$$\frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{362}{365} \cdots \frac{365-i+1}{365}$$

PER $i \geq 23$, LA PROBABILITÀ È $\leq \frac{1}{2}$

Calcolo combinatorio:

Sia X un insieme. Una PERMUTAZIONE di X è una disposizione ordinata degli elementi di X .

ESEMPIO: $X = \{a, b, c, d\}$ $\begin{matrix} bacd \\ basc \end{matrix} \}$ sono 2 permutazioni diverse

Quante sono le permutazioni di un insieme X ? $|X|!$

Si ottiene dalla regola del prodotto

UN
SI
TE

Una r -PERMUTAZIONE di X , $1 \leq r \leq |X|$, è una disposizione ordinata di r elementi di X .

ESEMPIO: $X = \{a, b, c, d\}$, $r=3$

$\begin{matrix} abc \\ bca \\ cdb \\ \dots \end{matrix}$

r -permutazioni

Quante sono le r -permutazioni di X ?

$$|X|(|X|-1) \dots (|X|-r+1) = \frac{|X|!}{(|X|-r)!} =: P(|X|, r)$$

NB: Per convenzione, $0! = 1$

Si ha una gara con 8 atleti. Quanti sono i possibili posti diversi?

$$P(8, 3) = 8 \cdot 7 \cdot 6 = \frac{8!}{5!}$$

Sia K_n = grafo completo con n vertici. Siano $u, v \in V(K_n)$.

Voglio contare quanti sono i diversi path che da u a v che usano esattamente r spigoli, $r \leq n-1$.

→ Due path sono diversi se ∃ spigolo che appartiene a un path e non all'altro.

I diversi path sono $P(n-2, r-1)$

INOLTRI A DISPOSIZIONE SONO TUTTI TRAINING u, v

UN PATH CON r SPIGOLI COMPRENDE u, v E PERTI $r-1$ VERTICI

Dato un insieme X , una r -COMBINAZIONE è un qualunque sottoinsieme X' di X con r elementi.

ESEMPIO: $X = \{a, b, c, d\}$, $r=3$

$\begin{matrix} \{a, b, c\} \\ \{a, c, d\} \\ \{c, d, b\} \end{matrix}$

sono alcune combinazioni

Quante sono le r -combinazioni di X ?

$$\frac{P(|X|, r)}{r!} = \frac{|X|!}{(|X|-r)!r!} = \binom{|X|}{r} =: C(|X|, r)$$

TUTTE LE PERMUTAZIONI SU r ELEMENTI STAVOLTA DEVONO ESSERE CONTATE UNA VOLTA

$$\sum_{k=0}^n$$

Perché
Possic
Cin cui
eo el

PROPRIETÀ:

$$\cdot C(m, r) = C(m, m-r)$$

$$\cdot |E(K_m)| = \binom{m}{r} = \frac{m(m-1)}{2}$$

$$\cdot \text{IDENTITÀ DI PASCAL: } C(m+1, r) = C(m, r) + C(m, r-1)$$

↳ Scelgo $x \in X$, $|X| = m+1$. Ci sono due possibilità:

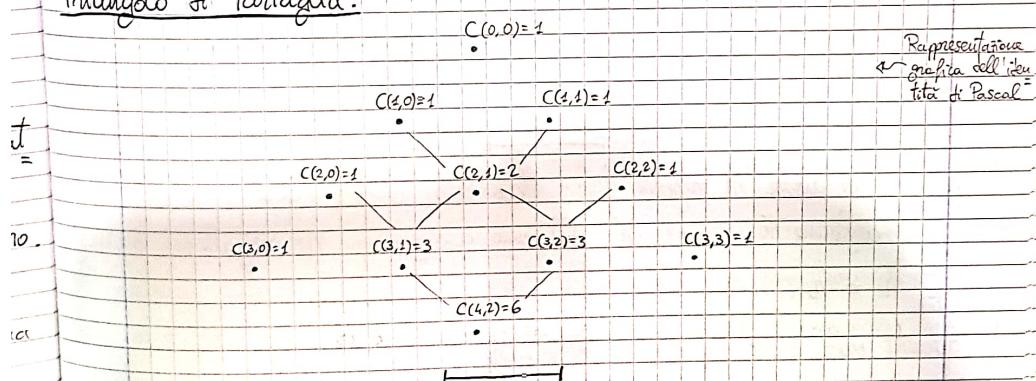
• $x \in$ sottoinsieme di ~~r~~ elementi di X AL SOTTOINSIEME AFFERENTE

• $x \notin$ sottoinsieme di ~~r~~ elementi di X AL SOTTOINSIEME AFFERENTE A ELEM. TRA

15/10/2020

$$\cdot C(m, m) = 1 ; \quad C(m, 0) = 1 ; \quad C(0, 0) = 1$$

Triangolo di Tartaglia:



$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} = 2^m \quad \leftarrow \text{Saranno tutti i sottoinsiemi di un insieme con cardinalità } m.$$

Perché il numero di questi ~~sottoinsiemi~~ è 2^m ?

Possiamo pensare al nostro insieme di cardinalità m come un vettore di m bit (in cui possiamo attribuire il valore zero al ~~bit~~ bit corrispondente ~~a~~ a uno specifico elemento • ~~NON~~ appartenente a un dato sottoinsieme e viceversa).

$$G(V, E) \rightarrow V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

Quanti sono i diversi grafi con n vertici?

→ Due grafi con n vertici sono diversi se hanno gli insiemi degli spigoli diversi.

Perciò, un grafo $G(V, E)$ con n vertici è tale che $E \subseteq E(K_n)$.

insieme di tutti i possibili spigoli

Sappiamo che $|E(K_n)| = \binom{n}{2} \Rightarrow$ il numero di grafi possibili è:

$$\binom{n}{2}$$



I coefficienti binomiali si chiamano così per il binomio di Newton:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} \cdot y^k = \underbrace{(x+y)(x+y) \dots (x+y)}_{n \text{ volte}}$$

Supponiamo di avere n regali diversi tra loro e K bambini.

Agli i -esimi bambino i , $i=1 \dots K$, diamo assegnare m_i regali:

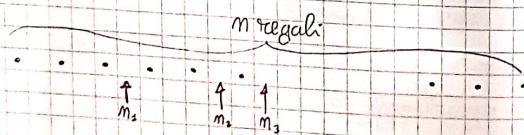
$$\sum_{i=1}^K m_i = n$$

In quanti modi diversi possiamo distribuire i regali?

$$\binom{n}{m_1} \cdot \binom{n-m_1}{m_2} \cdot \binom{n-m_1-m_2}{m_3} \cdot \dots \cdot \binom{n-m_1-m_2-\dots-m_{K-1}}{m_K}$$

Dove assegnare
 m_1 regali al
primo bambino
sugli m_2 restanti tra n

OPPURE:



→ Esistono $n!$ modi diversi di disporre i regali.

→ Nell'esempio in fondo alla pagina precedente (in cui $n=3$), se consideriamo tutte le $n!$ permutazioni, stiamo contando $3!$ volte la situazione in cui il primo bambino riceve sempre gli stessi 3 regali.

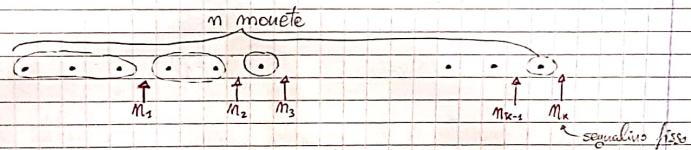
Quindi la soluzione è:

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

Supponiamo di avere K bambini ed n monete non distinguibili.

Dobbiamo dare a ogni bambino almeno 1 moneta.

Quanti sono i modi diversi di distribuire le monete tra i bambini?



→ IL SEGNALINO m_1 DEVE ANDARE ALLA SX DELLA 1^a MONETA

→ IL SEGNALINO m_{k-1} DEVE ANDARE ALLA SX DELLA ULTIMA MONETA

→ DUE SEGNALINI NON POSSONO SOVRAPPORSI

Tenendo conto di ciò, bisogna scegliere sole posizioni $K-1$ segnalini tra le posizioni $\{1, 2, \dots, n-1\}$ ⇒ questo è equivalente a scegliere $K-1$ interi tra $n-1$ totali: $\binom{n-1}{K-1}$ modi possibili

Come possiamo procedere se invece abbiamo la possibilità di non dare alcuna moneta a determinati bambini?

19/10/2020

Per rispondere all'ultima domanda che ci siamo posti, dobbiamo ricorrere alle combinazioni con ripetizione nel momento in cui consideriamo il nostro problema di distribuzione delle monete equivalente al problema di selezionare $K-1$ valori tra n numeri in modo tale che più valori scelti possono anche essere uguali tra loro.

Si tratta di un conteggio molto complicato. Procediamo invece con un modo diverso, mostrando un esempio:

→ Supponiamo di avere 10 monete e 4 bambini. Un modo possibile di distribuire le monete è:

$$\begin{array}{llll} m_1 = 4 & m_2 = 0 & m_3 = 5 & m_4 = 1 \\ \Rightarrow m_1 = 4 & m_2 = 4 & m_3 = 9 & m_4 = 10 \end{array}$$

dove $m_i = \#$ monete distribuite all'i-esimo bambino

$m_i = \#$ monete distribuite complessivamente ai primi i bambini

→ Prestiamo un'ulteriore moneta a ogni bambino: abbiamo così $n+k$ monete totali:

$$\begin{array}{llll} m_1 = 5 & m_2 = 1 & m_3 = 6 & m_4 = 2 \\ m_1 = 5 & m_2 = 6 & m_3 = 12 & m_4 = 14 \end{array}$$

→ Distribuire n monete a K bambini con la possibilità di dare 0 monete a qualche bambino è EQUIVALENTE A distribuire $n+k$ monete a K bambini col vincolo che ogni bambino deve ricevere almeno 1 moneta

→ Il numero di modi di distribuire n monete a K bambini con la possibilità di dare 0 monete a qualche bambino è: $\binom{n+k-1}{k-1}$

Consideriamo una sequenza di n^2+1 numeri interi diversi tra loro.

ESEMPIO ($n=3$):

10, 3, 13, 7, 8, 4, 2, 9, 6, 5

È una sottosequenza di $n+1$ elementi che è strettamente crescente oppure strettamente decrescente.

ESEMPIO: • 13, 8, 4, 2

• 3, 7, 8, 9

Non devono essere né forza elementi consecutivi ma devono essere presi nello stesso ordine delle elementi consecutivi della sequenza iniziale

Dimostrazione:

Consideriamo la sequenza generica $a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1}$

$\forall k \in \{1, 2, \dots, n^2+1\}$ sia s_k la lunghezza della massima sottosequenza che inizia in a_k e che è strettamente decrescente; sia d_k la lunghezza della massima sottosequenza che inizia in a_k e che è strettamente crescente.

NELLESEMPIO: $s_1 = 4$ $d_1 = 2$
 $s_2 = 3$ $d_2 = 1$
 $\downarrow 9, 6, 5$ $\downarrow 9$

Per assurdo, se il claim fosse falso $\Rightarrow \exists i \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq d_i \leq n$

$\Rightarrow \exists$ al più n^2 coppie diverse (s_i, d_i) [REGOLA DEL FRONTO]

\Rightarrow Se abbiamo n^2+1 numeri diversi e n^2 coppie diverse (s_i, d_i) , per il PIGEONHOLE PRINCIPLE, $\exists i, j \in \{1, \dots, n^2+1\} : i \neq j \wedge (s_i, d_i) = (s_j, d_j)$

$\Rightarrow \exists a_i, a_j : s_i = s_j \wedge d_i = d_j$; per ipotesi abbiamo che $a_i \neq a_j$

SPDG $i < j$; si hanno 2 casi:

- $a_i < a_j$
 $a_i \dots a_j \dots \cdot \dots \cdot \dots \cdot$
sottosequenza strettam. crescente (d_j)

$i < j$: Ma se $i < j$, a_i si trova prima di a_j :

$a_i \dots a_j \dots \cdot \dots \cdot \dots \cdot$
 $a_i < a_j \Rightarrow$ sottosequenza strettam. crescente ($d_i = d_j + 1$) \Rightarrow NON VA BENE

- $a_i > a_j \rightarrow$ stesso ragionamento ma considerando sottosequenze decrescenti.

we \Rightarrow Siamo giunti a una contraddizione \Rightarrow ASSURDO

Preso un qualunque insieme X , il # di sottoinsiemi di X di cardinalità pari è uguale al # di sottoinsiemi di X di cardinalità dispari.

Dimostrazione:

$|X| = n$; dobbiamo provare che:

$$\sum_{k=0, k \text{ pari}}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0, k \text{ dispari}}^n \binom{n}{k} \Rightarrow \sum_{k=0, k \text{ pari}}^n \binom{n}{k} - \sum_{k=0, k \text{ dispari}}^n \binom{n}{k} = 0$$

$$\sum_{k=0, k \text{ pari}}^n \binom{n}{k} - \sum_{k=0, k \text{ dispari}}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0, k \text{ pari}}^n \binom{n}{k} (1)^k + \sum_{k=0, k \text{ dispari}}^n \binom{n}{k} (-1)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k (1)^{n-k} = (-1+1)^n = 0 \quad \checkmark$$

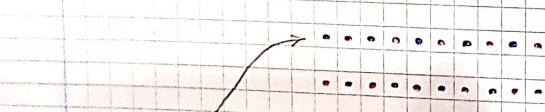
20/10/2020

Esercizio 7 del compito 3:

Si hanno n uomini e m donne. Quanti sono i modi diversi per disporre le persone in fila in modo tale che uomini e donne si alternano?

→ # disposizioni in cui la prima persona è un uomo =

= # disposizioni in cui la prima persona è una donna.



$$n \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots = n! \cdot m!$$

modi per scegliere il 1° uomo # modi per scegliere la 1° donna

⇒ Risposta: $2 \cdot n! \cdot m!$

OPPURE:

- Fissiamo una permutazione degli uomini: u_1, u_2, \dots, u_n
- Fissiamo una permutazione delle donne: d_1, d_2, \dots, d_m
- ⇒ Possiamo scegliere $n!$ permutazioni diverse per gli uomini e $m!$ permutazioni diverse per le donne.

Ec

Si

Qu

→

Po

uu

e:

nc

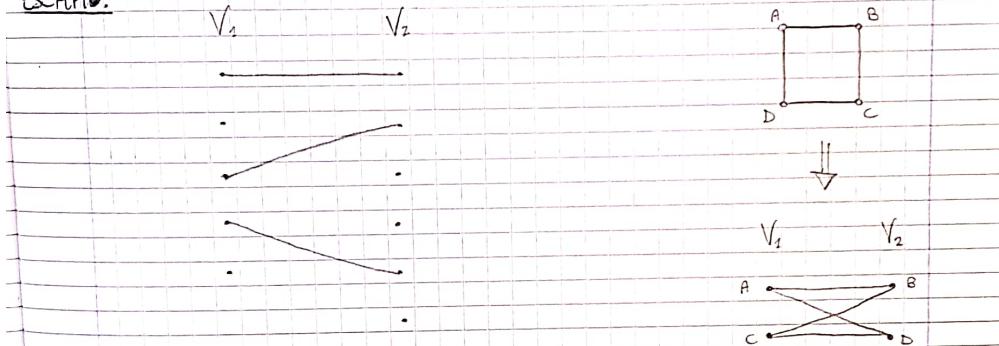
ter

Infine, bisogna scegliere se la file inizia con un zero oppure con una bina. In definitiva: $2 \cdot n! \cdot n!$

Definizione:

Un GRAFO BIPARTITO $G(V_1 \cup V_2, E)$ $\{V_1 \cap V_2 = \emptyset, V_1 \cup V_2 = V\}$ è un grafo con la seguente proprietà: non esistono spigoli tra vertici di una stessa classe (dove le classi sono V_1, V_2).

ESEMPIO:



Esercizio:

Sia G un grafo bipartito completo tale che $|V_1| = |V_2| = 7$

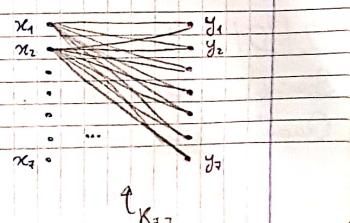
→ Ha tutti gli spigoli che vanno da una classe all'altra

Quanti spigoli ha G ?

NOTA: Un grafo bipartito completo in realtà si indica con $K_{m,n}$, $m=|V_1|$, $n=|V_2|$

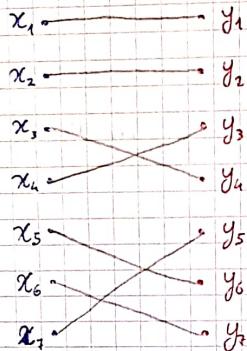
→ Il numero di spigoli di un grafo bipartito completo è $m \cdot n$;
nell'esercizio sono 49.

- Posto che un MATCHING (\equiv accoppiamento) è una collezione di spigoli del grafo t.c.
se 2 spigoli $e, f \in M \Rightarrow e, f$ non hanno estremi in comune, e che un MATCHING PERFETTO per $K_{7,7}$ è un matching M : $|M|=7$,



quanti sono i possibili matching perfetti di $K_{7,7}$?

ESEMPIO DI MATCHING PERFETTO:



→ Trovare tutti i diversi matching in $K_{7,7}$ è equivalente a permutare in tutti i modi possibili i vertici di V_2 ($\equiv \{y_1, y_2, \dots, y_7\}$).

⇒ Il numero di matching perfetti è 7!

Esercizio:

Sia $K_{m,n}$ un grafo bipartito completo tale che $V = \{v_1, v_2, \dots, v_6\}$.

Quanti sono i diversi modi possibili per disegnare $K_{m,n}$?

→ Questo problema è equivalente a contare i diversi modi di scegliere i nodi appartenenti alla classe V_1 (tranne per un fattore 2, poiché, se scambiamo V_1 con V_2 otteniamo comunque lo stesso grafo).

$$\hookrightarrow K(V_1, V_2) = K(\bar{V}_1, V_1)$$

In altre parole, dobbiamo contare tutti i sottinsiemi possibili di V e dividere il risultato per 2 \Rightarrow RISPOSTA: $2^6 / 2 = 2^5 = 32$

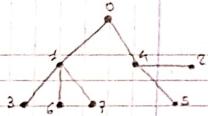
22/10/2020

Sia l'insieme di vertici $V = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$.

Quanti alberi diversi possono essere costruiti con questo insieme di vertici?

insieme di spigoli diversi

→ Un albero può essere rappresentato tramite una matrice di adiacenza:



	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0							
1		0						
2			0					
3				0				
4					0			
5						0		
6							0	
7								0

← L'arco (3,4) non c'è (\rightarrow bit corrisp. = 0)

← L'arco (4,2) c'è (\rightarrow bit corrisp. = 1)

→ È una matrice simmetrica, per cui è rilevante solo la parte triangolare superiore, ovvero $\frac{n(n-1)}{2}$ bit. (I)

SAPPIAMO CHE: Se vogliamo assegnare a K oggetti un codice binario univoco \Rightarrow il codice binario deve almeno $\lceil \log_2 K \rceil$ bit. (II)

PERCÒ: per la (I), # alberi $\leq 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$

MA ↳ la matrice simmetrica è comunque una rappresentazione inefficiente per gli alberi (utilizza sempre e comunque $n-1$ bit pari a 1).

→ Un albero può essere rappresentato anche tramite una lista di spigoli (= una doppia lista di vertici).

Nell'albero che abbiamo preso come esempio, le sue liste sarebbero:

$$a = [0\ 0\ 1\ 1\ 2\ 4]$$

$$b = [1\ 4\ 3\ 6\ 7\ 5]$$

SPICCIOLATO

→ Per questa rappresentazione, servirebbero $2(n-1) \log_2 n$ bit. (III)

Per la (III), # alberi $\leq 2^{2(n-1) \log_2 n}$

MA ↳ anche questa rappresentazione può dar luogo a un numero di copie di liste molto maggiore al numero di alberi costruibili.

→ COPPIE DI LISTE POSSONO RAPPRESENTARE LO STESSO ALBERO

→ alcune copie di liste non rappresentano proprio alberi

→ È possibile scegliere un nodo con "più importanza":

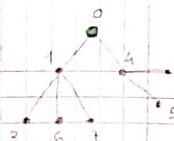
il NODO RADICE (nel nostro esempio 0).

Ogni vertice tranne 0 ha un padre.

In particolare: $0, 4, 1, 0, 4, 1, 1$ è il CODICE PADRE del ns albero

↓ PADRE DI

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7



Per

Per.

Ora

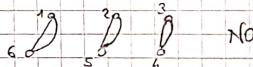
univ.

Così:

→ Per questa rappresentazione sono necessari $(n-1) \log_2 n$ bit. (IV)

Per la (IV) e la (II), #alberi $\leq 2^{(n-1) \log_2 n}$

MAL → CONTROESEMPIO: il codice 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0 non costituisce un albero:



Prec

→

Nel

Segu

Codice di Prüfer:

• Ordina gli spigoli in modo inverso.

• Utilizza la Growing Tree Procedure (GTP).

→ Smontiamo il nostro albero secondo la GTP facendo priorità alle foglie con indice più basso (rimovendole per prime), TRANNE 0 (la radice).

Nel nostro esempio, rimuoviamo i vertici nel seguente ordine:

2, 3, 5, 4, 6, 7, 1

↓ SPIGOLI RIMOSSI
di conseguenza
(2,1) (3,1) (5,1) (4,0) (6,1) (7,1) (1,0)

vertici rimossi:
 $a = [2, 3, 5, 4, 6, 7, 1]$
è sentire 0

$b = [4, 1, 4, 0, 1, 1, 0]$
4 vertici adiacenti
agli spigoli rimossi di
conseguenza

Aless
un e

Dopo l'
non bi
non es

→ Non è necessario memorizzare il vettore a ;
abbiamo ottenuto così un codice padre con un valore in meno (lo 0 finale
in effetti non è necessario memorizzarlo).

Per questa rappresentazione sono necessari $(m-2) \log_2 n$ bit. (v)

Per la (v) e la (i), $\# \text{alberi} \leq 2^{(m-2)\log_2 n} = n^{m-2}$
se n potenza di 2

Oraabbiamo dimostrato che il codice di Prüfer dà una rappresentazione univoca degli alberi che decodifica ESCLUSIVAMENTE alberi.

(iv) Consideriamo il codice $\begin{array}{ccccccc} 2 & 3 & 5 & 4 & 6 & 7 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$ ← lista delle foglie rimosse
m-2 valori compresi tra 0 e m-1

un Prendiamo un qualunque albero T e un qualunque vertice $v \in T \rightarrow v \text{ è padre oppure foglia.}$

Nel nostro caso i parchi sono $\{0, 1, 4\} \Rightarrow 2, 3, 5, 6, 7$ sono foglie.
Seguito la GTP:

	FADRI	FOGLIE
ITERAZIONE 1 :	0, 1, 4	2, 3, 5, 6, 7
" 2 :	0, 1, 4	3, 5, 6, 7
" 3 :	0, 1, 4	5, 6, 7
" 4 :	0, 1	4, 6, 7
" 5 :	0, 1	6, 7
" 6 :	0, 1	7
" 7 :	0	1

effettivamente così abbiamo ricostruito perfettamente l'albero

Adesso prendiamo un codice a caso e vediamo se riusciamo a risalire a un albero:

$\begin{array}{ccccccc} 4 & 3 & 5 & 6 & 2 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & 2 & 7 & 1 & 0 \end{array}$	← lista ordinata delle foglie aggiunte
---	--

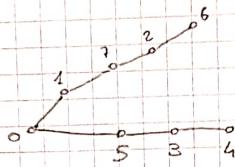
Dopo la 1^a iterazione, la parte a sinistra bisogna contarla più (e come se non esistesse)

(e così via con le altre iterazioni)

inizialmente le foglie sono quelle che non compare nel codice dato. Dopo l'aggiunta della foglia finale

all'inizio ALMENO una foglia c'è sempre (ma c'è sempre)

Albero relativo al codice posto alla fine della pagina precedente:



Teorema di Cayley:

Il # di alberi diversi con un insieme di vertici fissato $\{0, 1, \dots, n-1\}$ è uguale a n^{n-2} .

26/10/2020

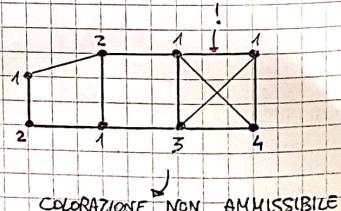
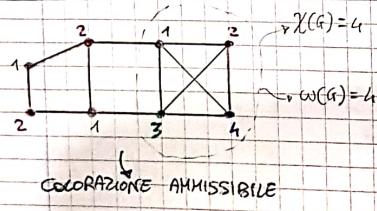
PROBLEMI DI COLORAZIONE DI UN GRAFO

Sia $G(V, E)$ un grafo. Una ^{sua} colorazione è una funzione
 $f: V \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ con $|V| = n$

Definizione:

Una colorazione f è AMMISSIBILE se $f(u) \neq f(v) \quad \forall \{u, v\} \in E$ (con $u, v \in V$).

ESEMPIO:



→ I vertici adiacenti non possono avere lo stesso colore.

Definizione:

$G(V, E)$ è K -COLORABILE se \exists una colorazione ammissibile

$$f: V \rightarrow \{1, \dots, K\}$$

Definizione:

L'INDICE DI COLORAZIONE (o NUMERO CROMATICO) di G è il più piccolo intero K : G è K -colorabile, e si indica con $\chi(G)$.

Definizione:

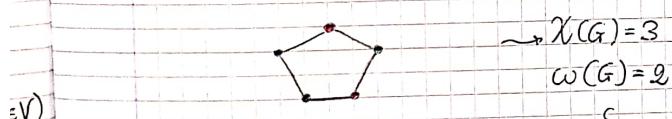
In un grafo $G(V, E)$, $C \subseteq V$ è una CLIQUE se $\forall u, v \in C$ $\{u, v\} \in E$ (\equiv "C è un sottografo completo").

Definizione:

Il CLIQUE NUMBER di un grafo G è la cardinalità della massima clique di G , e si indica con $\omega(G)$.

→ SICURAMENTE VALE LA SEGUENTE RELAZIONE: $\chi(G) \geq \omega(G)$

Consideriamo il seguente grafo:



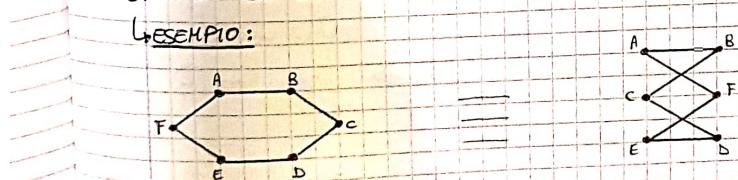
$\vdash V$.

Questa situazione si verifica ogni volta che si ha a che fare con figure geometriche con un numero di vertici dispari (\equiv cicli dispari).

- Se $\chi(G)=2 \Rightarrow G$ non ha cicli dispari.
- Vale anche il viceversa: G non ha cicli dispari $\Rightarrow \chi(G)=2$.

→ GRAFO BICOLORABILE \equiv GRAFO BIPARTITO

ESEMPIO:

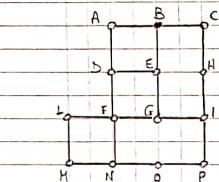


DI CONSEGUENZA: G è bipartito \Leftrightarrow NON ammette cicli dispari.

: 27

Dimostrazione:

Bisogna ancora provare che G privo di cicli dispari $\Rightarrow G$ bipartito.



Senza perdita di generalità, assumiamo G connesso.

Eseguiamo i seguenti passi: \rightarrow A CONTINUO FINI COMMESSA DI EN

D

T

T₁

\Rightarrow

• Scegliamo un vertice $v \in V(G)$ (nel nostro esempio: B)

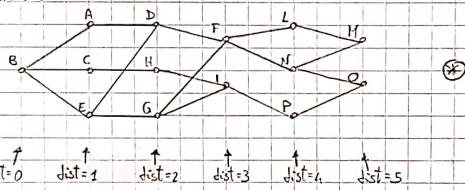
ESE

• Calcoliamo la DISTANZA di ogni vertice u da v

La DISTANZA tra due vertici u, v connessi è la lunghezza del cammino più breve da u a v .

Per calcolare la distanza tra due vertici, è sufficiente effettuare una visita in AHPIEZZA.

NEL NOSTRO ESEMPIO:



IDE

Voi

-

-

Vero in qualche grafo \rightarrow Se $\{u, v\} \in E \Rightarrow |l(u) - l(v)| \leq 1$, dove

$l(u)$ è il livello cui appartiene u , livello = distanza

Guardando il grafo \oplus , non ci sono spigoli che connettono vertici dello stesso livello, altrimenti si avrebbero dei cicli dispari.

\Rightarrow Se $\{u, v\} \in E \Rightarrow |l(u) - l(v)| = 1$ \leftarrow Vero se assente di cicli dispari.

A questo punto possiamo colorare con un colore i vertici a distanza pari da B e con un altro colore i vertici a distanza dispari da B.

\Rightarrow Abbiamo così dimostrato che:

G privo di cicli dispari $\Rightarrow G$ bipartito

A

Se

fara

Ri

Ri

\rightarrow o!

\rightarrow o!

27/10/2020

Dato un grafo $G(V, E)$, in tempo $O(|E|)$ possiamo:

• Trovare una bipartizione ammmissibile (se esiste) OPPURE

• Trovare un ciclo di lunghezza dispari.

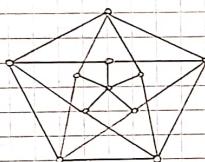
↑ Certificato del fatto che \nexists partizione

\Rightarrow Abbiamo un algoritmo polinomiale (di fatto lineare) che ci dà una 2-colorazione oppure un motivo per cui \nexists .

ESEMPIO DI GRAFO NON BICOLORABILE (PERCHÉ CONTENENTE CICLI DISPARI):

2

2A



$$\rightarrow \chi(G) = 4$$

↳ Grafo non bicolorabile

IDEALMENTE:

Vorrei un algoritmo che, dato un grafo G : $\chi(G) \geq 2$, in tempo polinomiale:

• Individua una 3-colorazione OPPURE

• Restituisce un certificato che tale colorazione \nexists

(3-colorabile \equiv tripartito)

→ A oggi non esiste alcun algoritmo NOTO in grado di fare ciò.

2B

2C

Se non ho un algoritmo polinomiale per risolvere un problema, cosa posso fare per risolverlo?

• Ricorrere a un algoritmo non polinomiale (\equiv RIASSARE IL VINCOLO SUL TEMPO)

• Ricorrere a un algoritmo non esatto (ancora un'EURISTICA) (\equiv RIASSARE L'ESATTEZZA)

→ Algoritmo esponenziale per la 3-colorazione: BRUTE-FORCE oppure BACKTRACKING (\equiv ENUMERAZIONE)

→ Algoritmo non esatto per la 3-colorazione: ALGORITMO GREEDY (colora in base a quello che sembra meglio localmente)



Algoritmo greedy:

• Ordino i vertici $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$

[COLORI: 1, 2, 3, ...]

Din

Cons

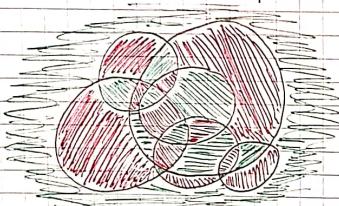
• Per $i = 1, \dots, n$:

Assegno a v_i il colore "più basso" non assegnato ad alcun vertice adiacente a v_i tra i vertici v_1, v_2, \dots, v_{i-1} .

↳ In alcuni casi è un algoritmo esatto, ma in altri è comunque distorto.



Disegniamo dei cerchi nel piano:



→ Comunque prendiamo dei cerchi, è sempre possibile colorare le regioni con 2 soli colori senza che due regioni adiacenti abbiano lo stesso colore.

→ È possibile dimostrarlo così per induzione o sostituendo ciascuna area con un vertice e ciascuna adiacenza tra due zone con uno spigolo.

Ju (

→ Due f(u)

29/10/2020

Dimostrazione per induzione sul numero di cerchi:

→ PASSO BASE: $n=1$



→ PASSO INDUTTIVO: Supponiamo di partire da n cerchi con una certa colorazione ammessa e di aggiungere un $n+1$ -esimo cerchio.

Cambiando colore a tutte le zone interne all' $n+1$ -esimo cerchio, si ottiene ancora una colorazione ammessa.

↳ Le zone sono divise in 3 gruppi:

- Zone interne all' $n+1$ -esimo cerchio: cambiano tutte di colore ✓
- Zone esterne all' $n+1$ -esimo cerchio: non cambiano di colore ✓
- Zone "tagliate" dall' $n+1$ -esimo cerchio: parte esterna → rimane invariata
parte interna (adiacente a quella esterna) ↳ cambia colore ✓

→ Per

FOR

• Sc

• Pu

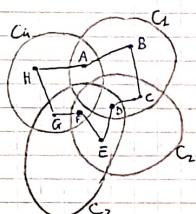
Supponi
dette
e assab

Dimostrazione ricorrendo ai grafi:

(un ciclo)

Consideriamo 4 cerchi qualsiasi e un sottografo che se ne può ottenere:

e



→ Ogni cerchio deve essere "attraversato" un numero pari di volte (se vi accedi, tuo anche uscire); poiché ogni spigolo del ciclo corrisponde un attraversamento di un cerchio, il ciclo stesso deve avere un numero pari di spigoli
⇒ nel grafo "complessivo" i solo cerchi pari → tale grafo è bipartito.

con
i a
indu
a con
tra

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

</div



INTERVALLI TEMPORALI

1° JOB:	$[1, 7]$	(A)
2° JOB:	$[2, 3]$	(B)
3° JOB:	$[4, 6]$	(C)
4° JOB:	$[5, 12]$	(D)
5° JOB:	$[8, 11]$	(E)
6° JOB:	$[9, 10]$	(F)

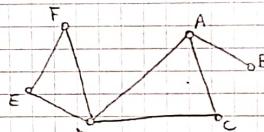
Voglio utilizzare meno macchine possibili per l'assegnazione di questo job.

Si f
SIN

Tale problema si può ricondurre a un problema di colorazione di un grafo: i job possono essere associati a dei nodi; i job i cui intervalli temporali si sovrappongono saranno dei nodi collegati con uno spigolo.

PRO
Se
➡

Grafo 3-colorabile →



← "GRAFO DEI CONFLITTI"

O2.
Anal

Dato un insieme di intervalli di tempo $[a_i, b_i]$, $i = 1, \dots, n$, vogliamo assegnare a ogni intervallo un colore in modo tale che:

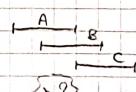
- Intervalli che si sovrappongono ricevono colori diversi.
- Sia usato un numero minimo di colori.

COLORAZIONE SUL GRAFO DEI CONFLITTI TRA INTERVALLI

DIMO

Hanno tutti i grafi dei grafi dei conflitti? No.

CONTROESEMPIO: qualunque ciclo composto da 4 o più spigoli.



Non può esistere un intervallo D che si sovrappone con A, C ma non con B.

→ I grafi dei conflitti sono grafi senza cicli di lunghezza ≥ 3 che non abbiano corde.

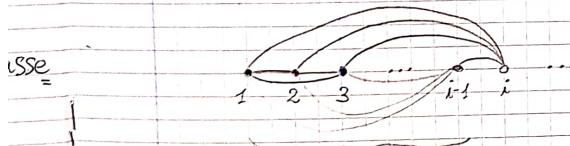
GRAFI INTERVALLO \equiv GRAFI DEI CONFLITTI

Una colorazione ottima (\equiv con numero di colori minimo) di un grafo intervallo si può ottenere con l'algoritmo greedy. SE ORDINIAMO I VERTICI PER ESTREMI SINISTRI DEGLI INTERVALLI NON DECRESCENTI.

PROPRIETÀ (DA VERIFICARE INDUTTIVAMENTE): VALIDA PER I GRAFI INTERVALLO
 Yo: Se al vertice i do un colore $K \Rightarrow$ \exists clique che contiene i e che ha K vertici
 $\stackrel{m}{\Rightarrow}$ PER I GRAFI INTERVALLO: $\chi(G) = \omega(G)$

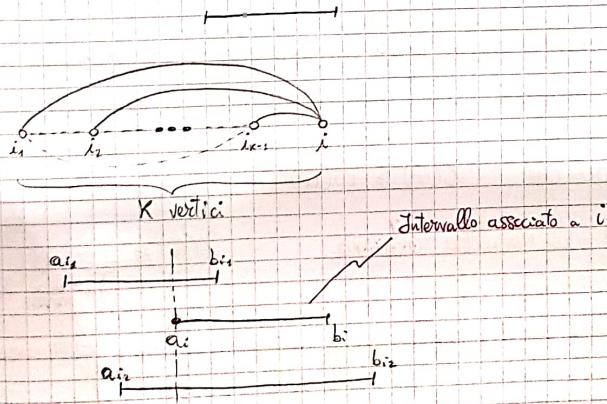
02/11/2020

Actualizziamo quest'ultima proprietà che abbiamo enunciato:



Vertici adiacenti ad i che abbiano un colore K

Dimostrazione:



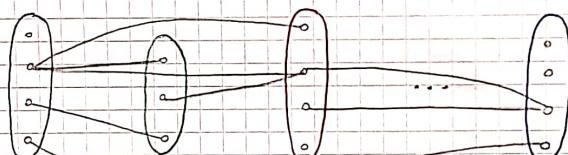
not: $\left\{ \begin{array}{l} a_{i_k} \leq a_i \leq b_{i_k} \\ a_{i_{k+1}} \leq a_i \leq b_{i_{k+1}} \end{array} \right.$

a_i è sempre "interno" a tutti gli altri intervalli \Rightarrow gli altri intervalli si sovrappongono tutti \Rightarrow i vertici i_1, \dots, i_{k-1} dovranno essere connessi anche dagli spigoli "trotteggiati" $\Rightarrow i_1, \dots, i$ è una K -clique.

Per un qualsiasi grafo $G(V, E)$ \exists un ordinamento v_1, v_2, \dots, v_n dei vertici tale Prob
 che l'algoritmo greedy, se utilizza quell'ordinamento, individua una colorazione ANAL
ANAL
ANAL

→ SAPPIANO CHE: Se G è K -colorabile $\Rightarrow \exists f: V \rightarrow \{1, 2, \dots, K\}$:
 $\text{se } \{u, v\} \in E \Rightarrow f(u) \neq f(v)$.

Da queste affermazioni, possiamo raggruppare i vertici di G in K classi (tali che \nexists spazio tra due vertici della stessa classe):



→ JL
 *
 tu

→ Basterebbe ordinare i vertici in modo tale che per prima comparenno quelli della classe 1 (nera), poi quelli della classe 2 (verde), e così via.

Tuttavia, algoritmamente parlando, favorire questo ordinamento non è ~~possibile~~ ^{semplice} in tempo polinomiale (basti pensare che tutti gli ordinamenti possibili sono $N!$!).

Cous

ABBIAMO DETTO CHE $\chi(G) \geq \omega(G) \quad \forall G$

Introduciamo ora un'altra relazione:

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1 \quad \forall G$$

$$\Delta = \max_{v \in V(G)} \deg(v)$$

Risulta valida con l'algoritmo greedy con un qualsiasi ordinamento.

→ $\chi(G) = \Delta(G) + 1$ è verificata per i grafî completi.

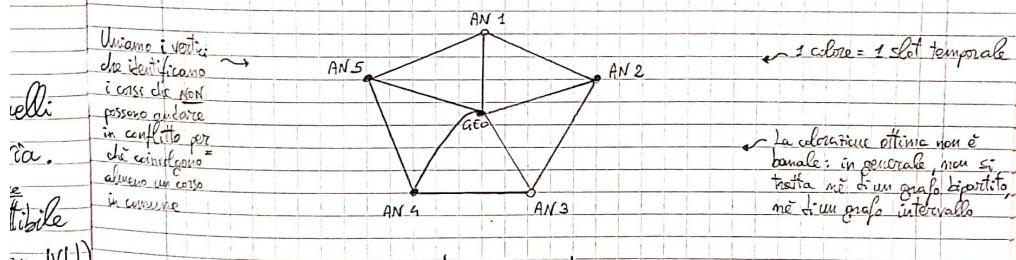
Si dicono mappe per po un ca

Le Problema del calendario:

ZONE ANALISI 1 = $\{x_1, x_2, z_1\}$
 ANALISI 2 = $\{x_2, x_3, z_2\}$
 ANALISI 3 = $\{x_3, x_4, z_3\}$
 ANALISI 4 = $\{x_4, x_5, z_4\}$
 ANALISI 5 = $\{x_1, x_5, z_5\}$
 GEOMETRIA = $\{z_1, z_2, \dots, z_5\}$

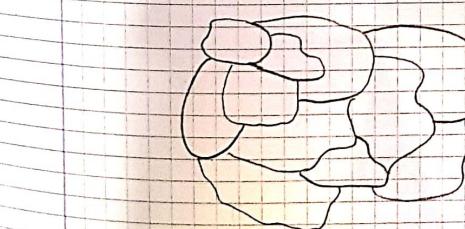
$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5$
 sono dei corsi di studio

→ Il problema consiste nello schedolare le lezioni in modo tale che lezioni che interessano gli stessi corsi di studio non si sovrappongano; si vuole inoltre utilizzare il minor numero di slot temporali possibili.



La soluzione ottima non è banale: in generale, non si tratta né di un grafo bipartito, né di un grafo intervallo

Consideriamo una mappa con tante regioni:



QUANTI COLORI DIVERSI SI POSSONO UTILIZZARE PER COLORARE LA MAPPA IN MODO TALE CHE REGIONI CONFINANTI ABBIANO SEMPRE COLORI DIVERSI?

Comunque sia fatta la mappa, bastano 4 colori (al più)

Si dimostra ricorrendo a "tutte le infinite" mappe in un numero finito di configurazioni, per poi dare tali configurazioni come input a un calcolatore elettronico

Teorema dei quattro colori

03/11/2020

Esercizio 8 del compito sulla 1^a parte del corso:

Quanti sono gli anagrammi della parola OMONIMO?

→ Se tutte le lettere fossero diverse tra loro, le possibili permutazioni sarebbero $7!$.

Il numero di modi di permutare tra loro le tre O e le due M sono $3! \cdot 2!$ (quindi esisterebbero $3! \cdot 2!$ modi per generare la stessa parola).

Perciò, il numero di permutazioni possibili è: $\frac{7!}{3!2!}$

Esercizio 9 del compito sulla 1^a parte del corso:

• Si ha un campionato con 20 squadre (supponiamo solo girone d'andata).

• Una rete televisiva ha solo 5 canali a disposizione ma vuole trasmettere tutte le partite. In contemporanea a ciascuna partita se ne giocano al + altre 4.

→ Le partite in tutto sono 190 \Rightarrow consideriamo un grafo con 190 vertici.

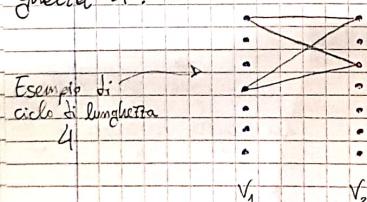
Collegiamo ciascun nodo ai soli vertici che identificano le partite che si giocano in contemporanea $\Rightarrow \Delta(G) \leq 4$

SAPPIAMO CHE: $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1 \Rightarrow$ il grafo è 5-colorabile \Rightarrow

\Rightarrow se associamo un colore per ogni canale, possiamo concludere che la rete televisiva, con 5 canali, riesce a trasmettere tutte le partite.

Esercizio 11 del compito sulla 1^a parte del corso:

Consideriamo il grafo bipartito completo $K_{7,7}$. Quanti sono i cicli di lunghezza 4?



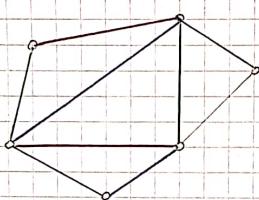
C'è una corrispondenza 1-a-1 tra le coppie (coppia di v_1 , coppia di v_2) e i cicli di lunghezza 4.

$$\text{LA RISPOSTA È } \binom{7}{2} \cdot \binom{7}{2}$$

Edge-coloring:

Dato un grafo $G(V, E)$, l'edge coloring è una funzione $f: E \rightarrow \{1, 2, \dots, K\}$ tale che, presi $e_1, e_2 \in E$, se e_1, e_2 sono incidenti $\Rightarrow f(e_1) \neq f(e_2)$.

ESEMPIO:



EDGE CHROMATIC NUMBER = $\chi'(G)$ = più piccolo intero K tale che G è K -edge-colorabile.

$$\chi'(G) \geq \Delta(G)$$

Teorema di Vizing:

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Non è noto alcun algoritmo polinomiale che stabilisca, dato un qualunque grafo G , se $\chi'(G) = \Delta(G)$ oppure $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

Consideriamo il calendario della Serie A con 20 squadre. Il problema dell'organizzare TUTTE le partite d'andata in sole 19 giornate si può associare a un problema di edge-coloring di un grafo che ha un vertice per ogni squadra e uno spigolo per ogni partita; il colore di uno spigolo è relativo a una giornata di campionato.

Il grafo è chiaramente completo (ogni squadra deve giocare contro tutte le altre).

Ottieniamo quindi che $\chi'(K_{20}) = 19$

Questo vale per qualsiasi numero ^{PARI} di squadre: $\chi'(K_m) = m-1$, m PARI

Se il numero di squadre è dispari: $\chi'(K_m) = m$, m DISPARI

Dimostriamo quest'ultima affermazione:

Proviamo col provare che $\chi'(K_n) \geq n-1$ se n pari e $\chi'(K_n) \geq n$ se n dispari.

Sappiamo che $E(K_n) = \frac{n(n-1)}{2}$

• CASO n PARI: $\chi'(K_n) \geq \Delta(K_n) = n-1$.

• CASO n DISPARI: Supponiamo per assurdo che $\chi'(K_n) \leq n-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \left[\frac{\frac{n(n-1)}{2}}{n-1} \right]$ spigoli che ricevono lo stesso colore \Rightarrow

$\Rightarrow \exists \left[\frac{n}{2} \right]$ spigoli che ricevono lo stesso colore \Rightarrow

$\Rightarrow \exists \frac{n+1}{2}$ spigoli che ricevono lo stesso colore \Rightarrow

\Rightarrow Due spigoli incidenti su ricevono lo stesso colore \Rightarrow

\Rightarrow ASSURDO \Rightarrow per n dispari $\chi'(K_n) \geq n$

Ora resta da dimostrare che $\chi'(K_n) = n-1$ per n pari e $\chi'(K_n) = n$ per n dispari.

Analizziamo il caso con n dispari:

$$0 \leq i, j \leq n-1 \Rightarrow \begin{cases} (i+j) \bmod n = i+j & \text{se } i+j < n \\ (i+j) \bmod n = i+j-n & \text{se } i+j \geq n \end{cases}$$

ESEMPIO:

$$\text{Se } n=7 \Rightarrow 3+2=5$$

$$3+6=2$$

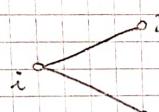
$$3+4=0$$

Siano i, j, j' : $0 \leq i, j, j' \leq n-1$ ALLORA

$$(i+j) \bmod n = (i+j') \bmod n \Leftrightarrow j=j'$$

Consideriamo gli n vertici del grafo K_n :

$$V(K_n) = \{0, 1, \dots, n-1\}$$

spigolo $\{i, j\}$, o $i, j \leq m-1$, $i \neq j$
 $f(\{i, j\}) = (i+j) \bmod m$ \Rightarrow le squadre i, j si scambiano nella giornata
 $\#$ compreso tra $0, m-1$ $(i+j) \bmod m$
 Abbiamo numerato le squadre da 0 a $m-1$
 Ora dobbiamo solo assicurarsi che spigoli adiacenti non abbiano ricevuto lo stesso colore:


Effettivamente, gli spigoli $\{i, j\}$, $\{i, j'\}$ ricevono lo stesso colore
 $\Leftrightarrow (i+j) \bmod m = (i+j') \bmod m$
 $\Leftrightarrow j = j'$
 NON PUÒ SUCCEDERE

In definitiva, abbiamo ottenuto che $\chi'(K_m) = m$ per m dispari.

05/11/2020

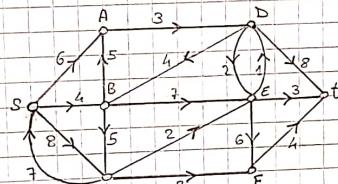
Problemi di FLUSSO MASSIMO

- Grafo orientato $D(N, A, u)$

- Nodo sorgente $s \in N$

- Nodo destinazione $t \in N$

- $u: A \rightarrow \mathbb{Z}_+$ capacità



Il problema consiste nel trovare una collezione di cammini \vec{P} orientati dal nodo s al nodo t $\{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ tale che:

- il numero K di cammini sia il massimo possibile.

$\forall (u, v) \in A$, il numero di cammini che contengono (u, v) sia $\leq u(v)$

ESEMPIO DI COLLEZIONE DI CAMMINI:

$$P_1 = S, A, D, t$$

$$P_2 = S, A, D, t$$

$$P_3 = S, A, D, B, E, t$$

$$P_4 = S, B, E, t$$

$$P_5 = S, C, F, t$$

$$P_6 = S, C, F, t$$

È una soluzione ammessa
 e possibile di valore 6
 (sono 6 cammini)

Definizione:

Il flusso di un arco (A, B) è il $\#$ di cammini della collezione $\{P_1, \dots, P_k\}$ che usano l'arco (A, B) .

CONDIZ. AMMISSESSIBILITÀ: $f(A, B) \leq u(A, B)$

Un vettore di flusso viene identificato col numero di volte in cui ogni arco viene realtamente attraversato all'interno delle collezioni di cammini stetti.

Da una soluzione ammissibile in forma di cammini possiamo ricavare un VETTORE DI FLUSSO AMMISSIBILE ($f(u,v) \leq u(u,v) \quad \forall u, v \in N$). \oplus

Definizione:

Se f è un vettore di flusso s-t ammissibile, il VALORE di f è definito come:

$$val(f) := \sum_{(s,v) \in A} f(s,v) - \sum_{(v,s) \in A}$$

NELL'ESEMPIO PRECEDENTE: il valore del vettore di flusso s-t è uguale a 6.

A questo punto, vorremmo andare a identificare delle condizioni semplici per cui, da un vettore che soddisfa le condizioni di ammissibilità, ottieniamo una soluzione ammissibile $P_1, P_2, \dots, P_{val(f)}$. (\rightarrow IL VICEVERSA DI \oplus)

Proviamo a descrivere tali condizioni:

• $f: A \rightarrow \mathbb{Z}_+$ vettore di flusso $\stackrel{s-t}{\Rightarrow} f(u,v) \leq u(u,v)$

$$\cdot \sum_{u:(v,u) \in A} f(v,u) = \sum_{u:(u,v) \in A} f(u,v) \quad \forall v \in N, v \neq s, t$$

Anchi uscenti
da v

Anchi entranti
in v

Vincolo
capacità

\rightarrow Vincolo conservazione
del flusso

\rightarrow Questa seconda condizione dice che, per ogni nodo $v \neq s, t$, il flusso uscente da v deve essere uguale al flusso entrante in v.

\rightarrow Le due condizioni messe insieme fanno luogo a un FLUSSO s-t AMMISSIBILE.

Definizione:

Dato un nodo $v \in N$, il FLUSSO NETTO USCENTE DA v è pari a:

$$\sum_{u:(v,u) \in A} f(v,u) - \sum_{u:(u,v) \in A} f(u,v)$$

• FLUSSO NETTO = 0 $\forall v \neq s, t$

• FLUSSO NETTO = $val(f)$ se $v = s$

• FLUSSO NETTO = $-val(f)$ se $v = t$

* ampi

ha dimostrato che, a partire da un vettore di flusso s-t ammissibile, possiamo ottenere univocamente una collezione di cammini P_1, P_2, \dots, P_k ammissibile.

HIPOTESI TEMPORANEA (NON È NECESSARIA: CI SEMPLIFICA SOLO LA DEMOSTRAZIONE):

$D(N, A)$ privo di cicli orientati.

Sia f un vettore di flusso s-t ammissibile. A partire da questo, basta ricavare i cammini iterativamente, partendo dal nodo t e attraversando gli archi con flusso non nullo fino ad arrivare al nodo s . Per ogni cammino trovato, i flussi degli archi coinvolti fa tale cammino deve diminuire di 1. Le iterazioni terminano nel momento in cui TUTTI gli archi hanno flusso nullo.

↳ Nella scuola, sono ammessi reti/grafi con cicli ma ciò che non ha senso è trovare cammini contenenti cicli (ANALIZZEREMO QUESTO CASO CON GRAFI CON CICLI)

09/11/2020

Senza perdita di generalità, possiamo supporre che un vettore f di flusso s-t sia aciclico.

↳ Esiste un algoritmo polinomiale che ci fa passare da un flusso "ciclico" a un flusso aciclico preservandone il valore.

Definizione:

Un flusso f è aciclico se $D(N, A(f))$ è aciclico, dove

$$A(f) = \{(u, v) \in A : f(u, v) > 0\}$$

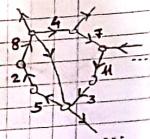
Definizione:

Un grafo orientato è aciclico se non presenta cicli orientati.

Sia f un vettore di flusso t.c. $A(f)$ ha un ciclo orientato C .

$$\forall (u, v) \in C \quad f(u, v) > 0$$

* ammissibile



• Diminuiamo f sugli archi di C per un valore ε .

• Lasciamo immutato il valore di f sugli archi $\notin C$.

↳ Definiamo un nuovo vettore di flusso f' in questo modo

↓
 f' continua a essere un flusso ammissibile: in particolare, continua a valere il vincolo di conservazione del flusso e si ha che
 $\text{val}(f') = \text{val}(f)$

\Rightarrow A questo punto, basta prendere $\varepsilon = \min_{(u,v) \in C} (f(u,v))$, in modo tale da eliminare l'arco in C col flusso più piccolo, mantenendo il flusso s.t (ovvero il flusso uscente da s) invariato.

Abbiamo quindi provato che da un flusso ciclico si può sempre ottenere un flusso aciclico equivalente.

Se f è un flusso ammissibile di valore $\text{val}(f) > 0$ e f è aciclico

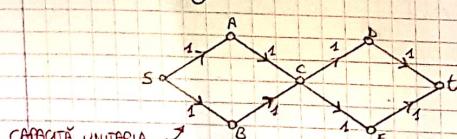
$$\Rightarrow \sum_{v:(v,s) \in A} f(v,s) = 0 \quad \wedge \quad \sum_{v:(t,v) \in A} f(t,v) = 0$$

↳ Il flusso entrante in s è nullo

↳ Il flusso uscente da t è nullo

\Rightarrow S.P.D.G. \nexists archi uscenti da t , \nexists archi entranti in s .

Consideriamo la seguente rete:



$$f^{(1,1,1,1,1,1,1)} ; \text{val}(f)=2$$

→ $\exists!$ vettore f di massimo flusso

(→ flusso unitario su tutti gli archi).

Si può notare che però \exists due copie di cammini che danno il flusso massimo (ma si può assumere che sono del tutto equivalenti!).

↳ i cammini aggiungono un po' di "riconnanza"

Definizione:

Il TAGLIO s-t è una partizione di N in due classi V_1, V_2 t.c. $s \in V_1, t \in V_2$.

Definizione:

Gli archi del taglio s-t $[V_1, V_2]$ si dividono in due categorie (due classi):

• concordi: $(u, v) \in A : u \in V_1, v \in V_2$

• discordi: $(v, u) \in A : u \in V_1, v \in V_2$

Equazioni di continuità nei nodi di V_1 :

$$f_{sa} + f_{se} + f_{sc} - f_{sb} - f_{dc} = 0$$

$$f_{si} + f_{ce} + f_{cf} - f_{sc} - f_{bc} = 0$$

$$f_{ri} - f_{ef} - f_{cf} = 0$$

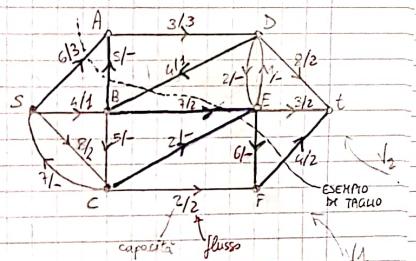
$$f_{sa} + f_{sb} + f_{sc} - f_{cs} = \text{val}(f)$$

↓ somma

$$f_{si} + f_{fc} + f_{ce} + f_{ba} + f_{be} - f_{ef} - f_{db} = \text{val}(f)$$

→ RESTA SOLO

Gli archi che attraversano il taglio



$$\text{FLUSSO NETTO ATTRaverso IL TAGLIO} = \sum_{\substack{\text{CONVEVA:} \\ \text{U,V} \in V_1}} f(u,v) - \sum_{\substack{\text{CONVEVA:} \\ \text{U,V} \in V_2}} f(v,u) = \text{val}(f)$$

→ Quelli concordi compongono
col segno + e viceversa.

→ TAGLIO s-t IL FLUSSO NETTO ATTRaverso IL TAGLIO È PARI AL VALORE DEL FLUSSO ($\text{val}(f)$).

→ Finora abbiamo incoscientemente usato il taglio in cui solo $s \in V_1$ e tutti gli altri nodi $\in V_2$.

10/11/2020

Consideriamo un altro taglio sulla medesima rete:

$$V_2 = \{s, D, C\}$$

$$V_2 = \{A, B, E, F, t\}$$

$$\text{FLUSSO NETTO ATTRaverso IL TAGLIO} = f_{sa} + f_{dg} + f_{ce} + f_{cf} + f_{bc} + f_{de} + f_{sb} + \\ - f_{ad} - f_{ed} - f_{bc} =$$

$$= 3+1+0+2+2+0+1-3-0-0 = 6 = \text{val}(f)$$

!)

→ Inizialmente volevamo massimizzare il valore del flusso: iniziamo ora a trovarne un limite superiore.

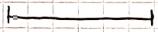
$$val(f) = \sum_{\substack{(u,v) \in A: \\ u \in V_1, v \in V_2}} f(u,v) - \sum_{\substack{(u,v) \in A: \\ u \in V_2, v \in V_1}} f(u,v) \leq \sum_{\substack{(u,v) \in A: \\ u \in V_1, v \in V_2}} c(u,v) - 0$$

Capacità del taglio $[V_1, V_2] =$

= SOMMA DELLE CAPACITÀ SUGLI ARCHI DIRETTI
(= CONCORDI) DEL TAGLIO

→ VALORE DI UN QUALSIASI FLUSSO ≤ CAPACITÀ DI UN QUALSIASI TAGLIO

⇒ VALORE DEL MASSIMO FLUSSO ≤ CAPACITÀ DEL MINIMO TAGLIO



Consideriamo dei nuovi cammini sulla nostra rete che si aggiungono ai 6 che abbiamo preso inizialmente:

$$P_7 = S, B, E, D, t$$

$$P_8 = S, C, E, F, t$$

$$P_9 = S, C, E, F, t$$

$$P_{10} = S, B, E, t$$

} Cammini s-t AUMENTANTI rispetto a f

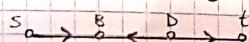
↳ Con loro il valore del flusso sale a 10

Non possiamo aggiungere altri cammini ottenendo altri vettori di flusso ammissibili

↳ Ma magari esistono altre collezioni (diverse) di cammini (diverse) che contengono + cammini

È in effetti: NON esiste alcun taglio con capacità 10.

Consideriamo ora il seguente cammino (apparentemente anomalo):

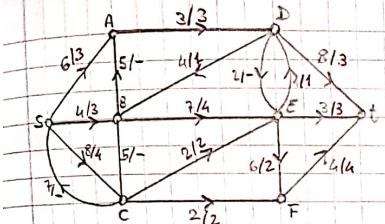


Stiamo "allargando" la definizione dei cammini consentiti nel seguente modo:

CAMMINO S-t NON NECESSARIAMENTE ORIENTATO T.C. GLI ARCHI CONCORDI SONO
NON SATURI E GLI ARCHI DISCORDI SONO NON VUOTI.

→ ARCO SATURO: ha flusso e capacità uguali.

→ ARCO VUOTO: ha flusso nullo.



← In rosso si hanno i flussi ottenuti appena dopo aver aggiunto i 4 cammini aumentanti (in cui $\text{val}(f) = 10$)

i cammini con archi discordi, come SBDT, li trattiamo nel seguente modo:

→ aggiungiamo un valore ε ai flussi sugli archi concordi (a patto che NON siano saturi).

→ Sottraiamo un valore ε ai flussi sugli archi discordi (a patto che NON siano vuoti).

⇒ ε "piccolo" non violano le condizioni di ammissibilità, perché, in particolare, non violano il vincolo di conservazione del flusso, e in più stiamo aumentando il flusso netto uscente da S (e quindi il valore del flusso) di un valore ε .

Per $\varepsilon = 1$, ottieniamo che $\text{val}(f) = 11$.

Dopo aver aggiunto il cammino SBDT, non riusciamo più a individuarne un altro, nemmeno considerando gli archi discordi non vuoti.

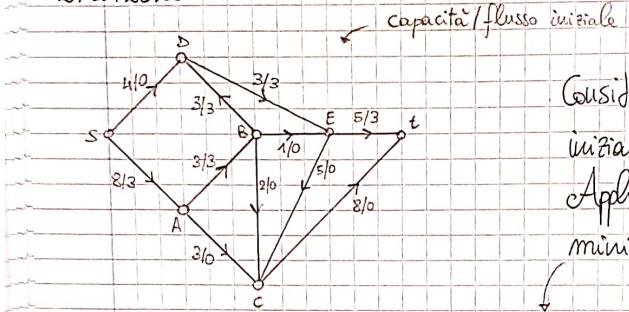
↳ Questo accade quando ci imbattiamo in un taglio completamente saturato

→ Ciò vuol dire che, nel nostro esempio, il taglio con capacità 11 è saturo: $V_1 = \{S, A, C\}$

Tutti i suoi archi concordi sono saturi e tutti i suoi archi discordi sono vuoti.

→ In definitiva, abbiamo utilizzato il cosiddetto ALGORITMO DEI CAMMINI AUMENTANTI (di Ford & Fulkerson).

12/11/2020



Consideriamo questa rete con flusso iniziale pari a 3 ($\text{val}(f)=3$).
Applichiamo l'algoritmo dei cammini aumentanti.

- $S-A-C-t \rightarrow$ può essere preso 3 volte.
- $S-D-B-E-t \rightarrow$ può essere preso 1 volta.
- $S-D-B-C-t \rightarrow$ può essere preso 2 volte.

→ A questo punto, coi cammini aumentanti, riusciamo a raggiungere solo i nodi $S, A, D \Rightarrow$

► VALORE FLUSSO MAX = 9

► CAPACITÀ DEL TAGLIO MINIMO $[\{S, A, D\}, \{B, C, E, t\}] = 9$

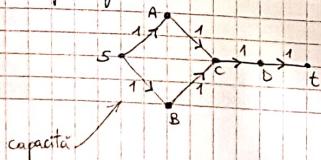
Ora aumentiamo la capacità dell'arco AB da 3 a 4. Così riusciamo a raggiungere anche il nodo B ma non riusciamo più ad andare avanti coi cammini aumentanti. Infatti, anche il seguente taglio ha capacità 9: $[\{S, A, D, B\}, \{C, E, t\}]$

Diverso sarebbe stato il discorso se avessimo aumentato la capacità dell'arco DE .

In conclusione:

- In generale \exists più tagli di capacità minima.
- In generale \exists più flussi di valore massimo.

↳ ESEMPIO:



Come troviamo algoritmica mente i cammini aumentanti?

Consideriamo un algoritmo A che, dato un grafo orientato e due nodi s, t, restituisce un cammino orientato da s a t, se esiste (se non esiste, restituisce NULL).

1^o FASE: TROVARE I CAMMINI AUMENTANTI DEL 1^o TIPO (in cui tutti gli archi vengono percorsi nel loro verso):

• Basta prendere la rete, buttare eventuali archi saturi e fare in input il grafo ottenuto ad A.

Nel momento in cui A restituisce NULL, la 1^o fase termina.

2^o FASE: TROVARE I CAMMINI AUMENTANTI DEL 2^o TIPO (in cui gli archi possono essere percorssi anche nel verso opposto):

• Basta prendere la rete e analizzare le capacità residue di tutti gli archi.

→ Se un arco è vuoto, rimane così.

→ Se un arco è saturo, bisogna invertirgli il verso.

Il risultato di questi 3 passi si è la cosiddetta RETE RESIDUA;

→ Se un arco mai è né saturo, né vuoto, bisogna aggiungere un altro arco

con verso opposto che connette i medesimi due nodi.

Nel momento in cui A restituisce NULL, l'algoritmo dei cammini aumentanti termina.

PER COSTRUZIONE: Cammino aumentante s → t sulla rete originale

↓ ↑ È EQUIVALENTE A

Cammino orientato s → t sulla rete residua

Questo algoritmo termina in tempo finito poiché:

• La capacità del taglio minima è finita.

• Stiamo ragionando coi numeri interi, perciò non incappiamo mai in limiti asintotici.

→ L'algoritmo dei cammini aumentanti termina in al più $|VAL|$ (MAX FLOW) iterazioni.

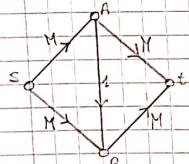
Inoltre, ogni iterazione è polinomiale (gli algoritmi di visita sono polinomiali).

Ma chi ce lo dice che il massimo flusso possibile sia necessariamente intero? Anche frazionando i flussi non violiamo né il vincolo di capacità, né il vincolo di conservazione.

Ebbene, esiste un teorema che afferma che:

Data una rete in cui ogni arco ha capacità intera, il flusso massimo ha valore intero e il flusso di ogni singolo arco è sempre intero.

16/11/2020



$$M \in \mathbb{Z}_+, \quad M \gg 1 \quad \rightarrow \text{capacità}$$

Corridiamo dei cammini aumentanti su questa rete.

• $s \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow t$

• $s \rightarrow B \leftarrow A \rightarrow t$

• $s \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow t$

• $s \rightarrow B \leftarrow A \rightarrow t$

iterazioni = valore max flow = $2M$

È un valore che NON dipende dalla dimensione del problema (in parte = colore, né dal numero di archi, né dal numero di nodi).

Dipende però dalle capacità degli archi che oltre alla dimensione del problema, determina la dimensione dell'input.

$$\# \text{ARCHI} / \# \text{NODI} / \text{CAPACITÀ}$$

Nel nostro caso, se $M=16$, noi all'algoritmo passeremo il seguente input:

10000
10000
10000
10000
1

archi = $M = 5$;
ciascun numero binario identifica
la capacità di uno specifico arco

DIMENSIONE DELL'INPUT $\approx M \log_2(M)$

Nel nostro caso specifico

$m \log_2 M$

MASSIMA CAPACITÀ (nel nostro caso: M)

iterazioni
dovette per
iterazioni

Il nostro algoritmo effettua un numero di operazioni elementari pari a: $2M \cdot O(m)$

DOMANDA: il numero di operazioni elementari può essere limitato polynomialmente nella dimensione dell'input?

C'è una relazione esponenziale tra il fattore $\log_2 M$ delle dimensioni dell'input e il fattore M del numero di operazioni elementari \Rightarrow
 \Rightarrow L'algoritmo NON è polinomiale.

ANCORA DI SALVEZZA: far scegliere all'algoritmo dei cammini che permettano di calcolare il flusso in un numero minore di iterazioni (evitando così di mettersi nel caso peggiore).

Teorema di Edmonds & Karp:

Se a ogni iterazione si sceglie un cammino aumentante con il numero minimo di archi \Rightarrow l'algoritmo di F&F termina in al più n iterazioni.

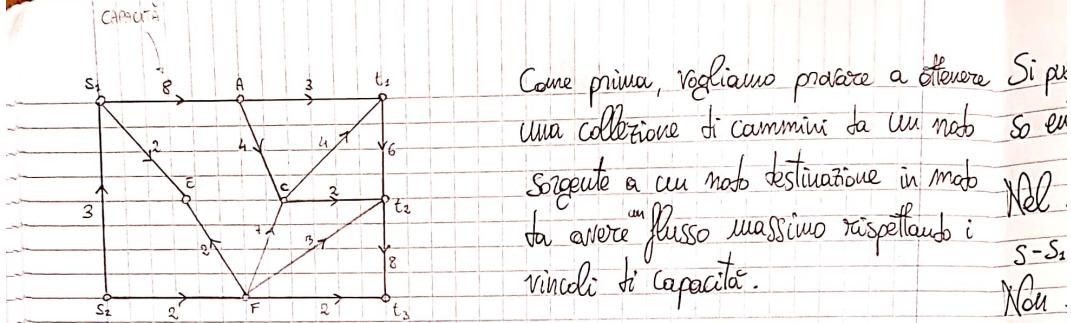
SI EFFETTUÀ UNA VISITA
IN ABBREZZA

FORD & FALKENSON

E DIVENTA
POLINOMIALE

19/11/2020

Consideriamo due centri di produzione (S_1, S_2) di un certo bene e tre centri di distribuzione (t_1, t_2, t_3) di questo bene all'interno di una rete.



Come prima, vogliamo produrre a ottenere Si per una collezione di cammini da un nodo So eu sorgente a cui nodo destinazione in modo da avere "flusso massimo rispettando i vincoli di capacità.

Nel

$S - S_1$

Non

[{S,

Un'idea può essere quella di aggiungere un nodo s collegato a S_1, S_2 e un nodo t collegato a t_1, t_2, t_3 , in modo da ricaducere a un problema singola sorgente - singola destinazione.

Di conseguenza, stiamo aggiungendo degli archi "fittizi" a cui bisognerebbe assegnare delle capacità. Possiamo considerare queste capacità "infinte", in modo da non cambiare i colli di bottiglia all'interno della rete (e.g., per qualche valore $x > 10$, se la capacità dell'arco (S, S_2) è pari a x , da S_2 può comunque uscire un flusso al massimo pari a $8+2=10$.

TAGLIO

(V_1, V_2)

Teoremu

Il Val

la Cap

La funz

nel ri

equival

di tagl

stazion

t_2, t_3)

do così

la cosa

NON pl

rete n

ta, va

mo imp

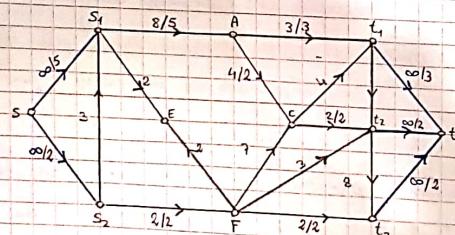
DEFINIAMO IL VALORE DEL FLUSSO "MULTI-SORGENTE":

$$val(f) = \sum_{i=1,2} \left(\sum_{(S_i, v) \in A} f(S_i, v) - \sum_{(v, S_i) \in A} f(v, S_i) \right)$$

INOLTRE, IL VETTORE DEL FLUSSO f MULTI-SORGENTE DEVE ESSERE TALE CHE:

$$f: \quad f(u, v) \leq u(v); \quad \sum_{(v, u) \in A} f(v, u) - \sum_{(u, v) \in A} f(u, v) = 0; \quad v \neq S_1, S_2, t_1, t_2, t_3$$

Consideriamo il seguente flusso di valore 7:



Si può notare che in tutti i nodi intermedi, inclusi s_1, s_2, t_1, t_2, t_3 , hanno un flusso pari a quello uscente.

Nel nostro esempio, esistono due cammini aumentanti uguali, del tipo $s-s_1-A-C-t_1-t$, raggiungendo un valore del flusso pari a 9. Non esistono ulteriori cammini aumentanti, dato che il taglio $\{[s, s_1, s_2, A, E], \{C, F, t_1, t_2, t_3, t\}\}$ ha una capacità pari a 9.

Se non volessimo considerare l'estensione data dai nodi s, t , possiamo estendere la definizione di taglio nel seguente modo:

TAGLIO MULTI-SORGENTE / MULTI-DESTINAZIONE = partizione dei nodi in due classi (V_1, V_2) che separa i nodi sorgente dai nodi destinazione.

Teorema:

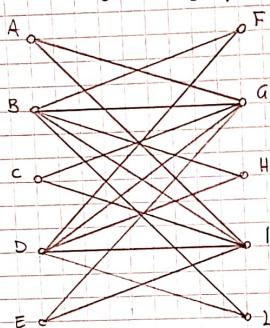
Il valore del massimo flusso di multi-sorgente / multi-destinazione è uguale alla capacità del minimo taglio multi-sorgente / multi-destinazione.

La dimostrazione di questo teorema sarebbe banale, se non fosse per il fatto che, nel ricordare il problema multi-sorgente / multi-destinazione a cui problema equivalente a singola sorgente / singola destinazione, "cambiamo" la definizione di taglio (\rightarrow originariamente, per definizione di taglio multi-sorgente / multi-destinazione, s_1, s_2 devono trovarsi nella stessa porzione del taglio (così come t_1, t_2, t_3), mentre, con l'estensione, è possibile separare i nodi s_1, s_2 , allargando così l'insieme di tutti i tagli possibili).

La cosa che ci salva è che, per costruzione, la capacità del minimo taglio non può essere data da un taglio mai previsto nella definizione per la rete multi-sorgente / multi-destinazione: questo taglio ha capacità infinita, dato che gli archi $(s, s_1), (s, s_2), (t_1, t), (t_2, t), (t_3, t)$ li abbiano imposti con capacità infinita.

REVIEW

Riconsideriamo il matching nei grafi bipartiti:



MATCHING = collezione di spigoli a coppie non incidenti.

Conti
match
Queste

Per r.
(ricor

Il problema che ci poniamo è quello di trovare un matching col numero massimo di spigoli. Analizziamolo secondo la seguente logica:

- I nodi di sinistra appartengono alla classe GENITORI 1
- I nodi di destra appartengono alla classe GENITORI 2
- Gli archi indicano la possibilità di un matrimonio tra i due nodi coinvolti.

→ Possiamo far sposare tutti e 10 i nodi con 5 matrimoni?

(È OVVIO CHE PIÙ DI 5 MATRIMONI NON POSSANO ESSERE, SE IPOTIZZIAMO CHE LO STESSO NODO NON POSSA SPOSARSI CON + NODI DIVERSI)

Nel nostro caso no: infatti ci sono tre nodi (A, C, E), che vogliono sposarsi tutti con gli stessi due nodi (G, I), per cui uno di loro rimarrà inerتابilmente fuori.

FORMALIZZIAMO QUESTA FACCENDA:

Sia $N(Q) := \{v \in Y : \exists (u, v) \text{ con } u \in Q\}$, dove $Q \subseteq X$,
dove X, Y sono le due classi di nodi.

Sia $G(X \cup Y, E)$ il nostro grafo.

Se $\exists Q \subseteq X : |N(Q)| < |Q| \Rightarrow \nexists$ matching di valore $|X| =$ MATCHING X-COMP.

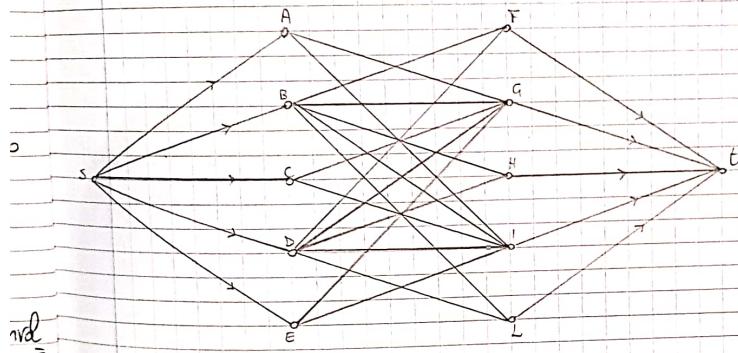
19/1:
Dato
X-co

Condizione necessaria perché un grafo bipartito $G(X \cup Y, E)$ ammetta un matching X -completo è che $\forall Q \subseteq X$ vale $|N(Q)| \geq |Q|$.

Questa condizione è anche sufficiente?

→ SI, ED È UN RISULTATO DATO DAL TEOREMA DEL MATEMATICO.
(che si intitola)

Per risolvere ALGORITMICAMENTE il problema, effettuiamo i seguenti artifici (riconducendoci al problema del flusso max multi-sorgente/multi-destinazione).



PONIAMO TUTTI GLI ARCHI ORIENTATI VERSO DESTRA.
ESSO CAPACITÀ
PER I 3
GLI ARCHI ADJACENTI A s , t AVRANNO CAPACITÀ FINITA;
TUTTI GLI ALTRI AVRANNO CAPACITÀ INFINTÀ.

⇒ Il corrispondenza 1-a-1 ha matching e flussi s-t (MATCHING MAX NEL PROBLEMA DEI MATCHING = FLUSSO MASSIMO NEL PROBLEMA DEI FLUSSI).

Nel nostro esempio, si ha infatti un flusso massimo di valore 4 → deve esistere un taglio di capacità 4.

PER ESEMPIO, SI PUÒ OTTENERE dai seguenti 4 CAMMINI: $S-A-G-t$ $S-B-F-t$
 $S-C-I-t$ $S-D-H-t$

UNA VOLTA TROVATI QUESTI CAMMINI, GLI UNICI NODI RAGGIUNGIBILI RIHANGONO S, A, G, C, E, I

CONSIDERANDO DUNQUE IL SEGUENTE TAGLIO: $\{S, A, G, C, E, I\}, \{B, D, F, H, L, t\}$

IL SUO TAGLIO HA CAPACITÀ FINITA A 4 (DATA DAGLI ARCHI (S, B) , (S, D) , (G, t) , (I, t))

19/11/2020

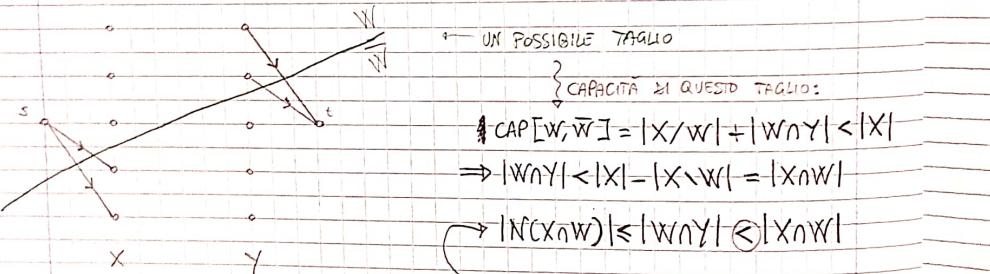
Dato un grafo bipartito $G(X \cup Y, E)$, ci stiamo chiedendo se \exists matching M X -completo, ovvero tale che $|M| = |X|$.

- Risolviamo l'opportuno problema di massimo flusso s-t. A volte della riso =
• C
luzione possono succedere due cose:
 - \exists flusso di valore $|X| \Rightarrow \exists$ matching di valore $|X|$.
 - \nexists flusso di valore $|X| \Rightarrow \nexists$ matching di valore $|X| \Rightarrow$ • R
 \exists insieme $Q \subseteq X : |N(Q)| < |Q|$.
Dim

Dimostriamo quest'ultima implicazione:

$$\nexists \text{ flusso di valore } |X| \Rightarrow \exists \text{ taglio di capacità } < |X|$$

SICURAMENTE NELL'É QUELLO CHE
CORRISPONDE SOLO A UNA PARTEZIONE

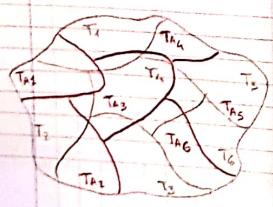


→ Non possono esserci archi: ~~con flusso~~
che partono da un nodo in $X \cap W$ e arrivano
a un nodo in $Y \cap W$ perché altrimenti il
nostro taglio avrebbe capacità infinita

E con questo abbiamo dimostrato il Teorema del Matrimonio.

Vediamo ora un'applicazione del Teorema del Matrimonio.

Consideriamo un'isola di 600 Km^2 partitionata in 6 frazioni da 100 Km^2 ,
ciascuna controllata da una tribù. Inoltre, supponiamo che l'isola abbia



una seconda partizione (in rosso) che divide
l'isola in altre 6 porzioni da 100 Km^2 , ciascu-
na ospitante una specie di tartaruga diversa.

riso Un giorno, le 6 tribù decidono di costruire un totem ciascuna. Ogni totem deve:

- Avere in effige l'immagine di una delle specie di tartaruga presente sul territorio di quella tribù.
- Ripetere una tartaruga diversa dagli altri totem.

Dimostrare che ciò è sempre possibile comunque siano fatti i territori.

zione

XI

100 Km²,
abbia
ride
ciascu
diversa.