OPERAZIONI DA TENERE A MENTE

Gradiente: $\mathrm{Grad}(H) = \nabla H = \dfrac{\partial H}{\partial x}\hat{\imath} + \dfrac{\partial H}{\partial y}\hat{\jmath} + \dfrac{\partial H}{\partial z}\hat{k}$ $\rightsquigarrow$ è un vettore (in un campo conservativo)

$H(x,y,z)$ = funzione

Divergenza: $\mathrm{div}(\vec{V}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \dfrac{\partial V_x}{\partial x} + \dfrac{\partial V_y}{\partial y} + \dfrac{\partial V_z}{\partial z}$ $\rightsquigarrow$ è uno scalare

$\vec{V}$ = vettore qualunque

TEOREMA DELLA DIVERGENZA: $\Phi_S(\vec{V}) = \underbrace{\int_S \vec{V}\cdot\hat{n}\,dS}_{\text{integrale di superficie}} = \underbrace{\int_\tau \mathrm{div}(\vec{V})\,d\tau}_{\text{integrale di volume}}$

$$\mathrm{div}(\vec{V}) = \mathrm{div}(\mathrm{Grad}(H)) = \nabla^2(H) = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2}$$

Rotore: $\mathrm{Rot}\,\vec{V} = \vec{\nabla}\wedge\vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \hat{\imath}\left(\dfrac{\partial V_z}{\partial y} - \dfrac{\partial V_y}{\partial z}\right) + \hat{\jmath}\left(\dfrac{\partial V_x}{\partial z} - \dfrac{\partial V_z}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\dfrac{\partial V_y}{\partial x} - \dfrac{\partial V_x}{\partial y}\right)$

è uno pseudo-vettore perché dipende dalle coordinate di riferimento

Laplaciano: $\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ $\rightsquigarrow$ è uno scalare

Operatore Nabla: $\vec{\nabla} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ $\rightsquigarrow$ è uno pseudo-vettore

LEGGE DI COULOMB

$\vec{F} = K\,\dfrac{q_1 q_2}{r^2}\,\hat{u}$ $\qquad K = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ $\rightarrow$ costante dielettrica nel vuoto

Campo elettrostatico: $\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q_0} = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i^2}\,\hat{u}_i$

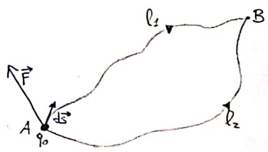
ESEMPIO: campo elettrostatico tra due lastre cariche

ALL'INTERNO: $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ $\qquad$ ALL'ESTERNO: $E = 0$

LAVORO ELETTRICO

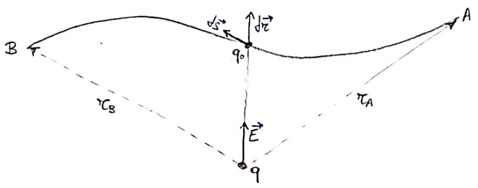
$W(A\to B) = \displaystyle\int_{l_1} \vec{F}\cdot d\vec{s} = q_0\int_{l_1} \vec{E}\cdot d\vec{s}$

$\vec{E}$ campo conservativo $\Longrightarrow q_0\displaystyle\int_{l_1} \vec{E}\cdot d\vec{s} = q_0\int_{l_2} \vec{E}\cdot d\vec{s}$



$\vec{E}$ campo conservativo $\Longrightarrow W(A \to A) = \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = q_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$

$\Longrightarrow$ fem $= \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$



La carica q esercita un campo elettrico su una carica di prova q_0

$$\overset{W_{AB}}{W(A \to B)} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

Potenziale: $V(r) = \int \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} + \underbrace{A}_{\text{costante}}$

Energia potenziale: $U(r) = q_0 \int \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} + \underbrace{B}_{\text{costante}}$

Variazione di potenziale tra A e B: $V(B) - V(A) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) = -\frac{W_{AB}}{q_0}$

Variazione di energia potenziale tra A e B: $U(B) - U(A) = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) = -W_{AB}$

$\longrightarrow$ SISTEMA DI CARICHE $q_1, q_2, \dots, q_n$ NELLE POSIZIONI $r_1, r_2, \dots, r_n$ E UNA CARICA DI PROVA q_0 NEL PUNTO P

Energia potenziale elettrostatica: $U_e = U_e(q_0) + U_e(\text{sistema})$

$U_e(\text{sistema}) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{i,j}} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} q_i V_{i,j}$ $\longrightarrow$ potenziale che q_j genera nel punto in cui si trova q_i

$\longrightarrow$ MOTO DI UNA CARICA (DA UN PUNTO A A UN PUNTO B) $\Longrightarrow$ CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

$W = \Delta E_K = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = -\Delta U_e = U_e(A) - U_e(B) = q_0 V_A - q_0 V_B \quad \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \frac{1}{2} m v_A^2 + q_0 V_A = \frac{1}{2} m v_B^2 + q_0 V_B = E_K + U_e = E_{TOT}$

Se $\vec{E}$ è un campo uniforme (costante in modulo, direzione e verso):

$V_A - V_B = \vec{E} \int_A^B d\vec{s} = \vec{E} \cdot \vec{r}_{AB} = E(z_B - z_A) \Longrightarrow V_A = -E z_A + C \; ; \quad V_B = -E z_B + D$

$\Longrightarrow \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = q_0 E (z_B - z_A) = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$

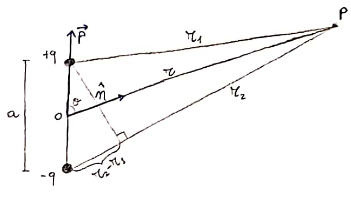
Variazione di potenziale in un tratto infinitesimo $d\vec{r}$:

$$dV = V(x+dx,\ y+dy,\ z+dz) - V(x,y,z) = -\vec{E}\cdot d\vec{r} = -E_x\,dx - E_y\,dy - E_z\,dz$$

PER IL TEOREMA DEL DIFFERENZIALE TOTALE: $dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$

$$\Longrightarrow E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}\ ;\quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}\ ;\quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad \Longrightarrow \vec{E} = -\nabla V = -\mathrm{Grad}(V)$$

DIPOLO ELETTRICO



Momento di dipolo: $\vec{p} = q\vec{a}$

Potenziale in P: $V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}\right) =$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \xrightarrow{r \gg a \rightarrow r_2 - r_1 = a\cos\theta;\ r_1 r_2 = r^2}$$

$$\Longrightarrow V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{p\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec{p}\cdot\hat{n}}{r^2}$$

Campo elettrico in coordinate sferiche:

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{p\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}\ ;\qquad E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\ ;\qquad E_\Phi = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \Phi} = 0$$

$$\Longrightarrow \vec{E} = E_r\hat{n}_r + E_\theta\hat{n}_\theta = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\,\hat{n}_r + \sin\theta\,\hat{n}_\theta\right) \Longrightarrow$$

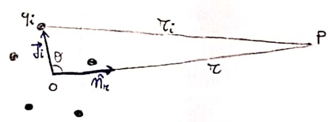
$$\Longrightarrow E = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{3\cos^2\theta + 1}$$

Momento di dipolo in coordinate sferiche: $\vec{p} = p\cos\theta\,\hat{n}_r - p\sin\theta\,\hat{n}_\theta$

$$\Longrightarrow \vec{E} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\,\hat{n}_\theta + \sin\theta\,\hat{n}_\theta\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(3p\cos\theta\,\hat{n}_r - \vec{p}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[3(\vec{p}\cdot\hat{n}_r)\,\hat{n}_r - \vec{p}\right]$$

$\longrightarrow$ SISTEMA DI CARICHE IN UNA REGIONE DI SPAZIO RISTRETTA DI DIMENSIONE d E CON CENTRO O



Potenziale in P: $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}$

$$r_i = r - d_i\cos\theta = r - \vec{d}_i\cdot\hat{n}_r \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{r_i} = \frac{1}{r - \vec{d}_i\cdot\hat{n}_r} = \frac{r + \vec{d}_i\cdot\hat{n}_r}{r^2 - (\vec{d}_i\cdot\hat{n}_r)^2} \approx \frac{r + \vec{d}_i\cdot\hat{n}_r}{r^2}$$

$$\Longrightarrow V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i\,(r + \vec{d_i}\cdot\hat{n}_r)}{r^2} \quad \xRightarrow{Q := \sum_i q_i} \quad \longrightarrow \text{carica totale del sistema}$$

$$\Longrightarrow V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i\,\vec{d_i}\cdot\hat{n}_r}{r^2} \quad \xRightarrow{\vec{p} := \sum_i q_i \vec{d_i}} \quad \longrightarrow \text{momento di dipolo elettrico del sistema rispetto al punto O}$$

$$\Longrightarrow V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\hat{n}_r}{r^2} = V_0 + V_{dip}$$

V_0: potenziale prodotto da una carica di valore Q posta nel punto O (monopolo)

V_{dip}: termine di dipolo

Se si approssima $\vec{p} = \sum_i q_i \vec{d_i} \approx Q\vec{d}$ $\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \frac{V_{dip}}{V_0} = \frac{\vec{p}\cdot\hat{n}_r}{rQ} \approx \frac{Qd}{rQ} = \frac{d}{r} \ll 1 \Longrightarrow V_{dip} \ll V_0$$

$\longrightarrow$ DIPOLO ELETTRICO LE CUI CARICHE $-q, +q$ SI TROVANO RISPETTIVAMENTE NEI PUNTI $P_1 = (x, y, z)$, $P_2 = (x+a_x,\ y+a_y;\ z+a_z)$

$$U_e = q\,V(x+a_x,\ y+a_y,\ z+a_z) - q\,V(x,y,z)$$

Se a è molto piccolo, si può sviluppare in serie il potenziale (approssimazione di dipolo):

$$U(x+a_x,\ y+a_y, z+a_z) = U(x,y,z) + \frac{\partial V}{\partial x}a_x + \frac{\partial V}{\partial y}a_y + \frac{\partial V}{\partial z}a_z \underset{\vec{E}=-\nabla V}{=} -\vec{p}\cdot\vec{E} = -pE\cos\theta$$

Forze che agiscono su $-q, +q$: $\vec{F_1} = -q\vec{E}$; $\vec{F_2} = q\vec{E}$

Momento sul dipolo: $\vec{M} = \vec{r_1}\wedge\vec{F_1} + \vec{r_2}\wedge\vec{F_2} = (\vec{r_1} - \vec{r_2})\wedge q\vec{E} = q\vec{a}\wedge\vec{E} = \vec{p}\wedge\vec{E} \xRightarrow{W = M d\theta = -dU_e}$

$$\Longrightarrow M = -p\sin\theta E = -\frac{dU_e}{d\theta}$$

ROTORE DEL CAMPO ELETTRICO

Circuitazione di $\vec{E}$ lungo una superficie $d\Sigma$: $dR = dR_x + dR_y + dR_z =$

$$= \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)d\Sigma_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)d\Sigma_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)d\Sigma_z =$$

$$= \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\cos\hat{n}_x\, d\Sigma + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\cos\hat{n}_y\, d\Sigma + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\cos\hat{n}_z\, d\Sigma =$$

$$= \text{rot}\,\vec{E}\cdot\hat{n}\,d\Sigma$$

TEOREMA DI STOKES: $\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_\Sigma rot\,\vec{E}\cdot\hat{n}\,d\Sigma = \int_\Sigma (\vec{\nabla}\wedge\vec{E})\,\hat{n}\,d\Sigma$

$$\Longrightarrow rot\,\vec{E} = \vec{\nabla}\wedge\vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{n}_x & \hat{n}_y & \hat{n}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\hat{n}_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\hat{n}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\hat{n}_z$$

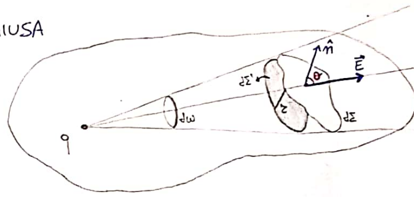
$\vec{E}$ campo conservativo $\Longrightarrow \vec{\nabla}\wedge\vec{E} = 0$ $\quad\rightsquigarrow$ forma locale di $\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = 0$ ("fem")

FLUSSO DEL CAMPO ELETTRICO

$$d\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \vec{E}\cdot\underset{\substack{\downarrow \\ \text{normale alla superficie}}}{\hat{n}}\,d\Sigma \Longrightarrow \Phi_\Sigma(\vec{E}) = \int_\Sigma \vec{E}\cdot\hat{n}\,d\Sigma$$

$\longrightarrow$ TEOREMA DI GAUSS

CASO A: CARICA q INTERNA ALLA SUPERFICIE CHIUSA



$$d\omega = \frac{d\Sigma'}{r^2}$$

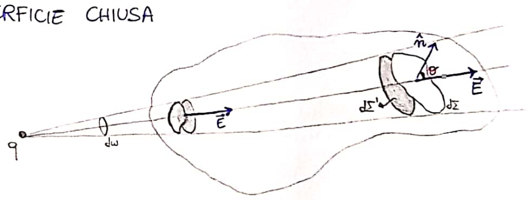
$$d\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \vec{E}\cdot\hat{n}\,d\Sigma = E\cos\theta\,d\Sigma =$$

$$= E\,d\Sigma' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}r^2\,d\omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,d\omega$$

$$\Longrightarrow \Phi_\Sigma(\vec{E}) = \int_\Sigma d\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \int_0^{4\pi}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,d\omega = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

CASO B: CARICA q ESTERNA ALLA SUPERFICIE CHIUSA

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{il flusso entrante si semplifica col flusso uscente}}}{d\Phi_1(\vec{E}) + d\Phi_2(\vec{E}) = 0}$$



Se si hanno n cariche dentro una superficie chiusa: $\quad \Phi_\Sigma(\vec{E}) = \sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{\varepsilon_0}$

Se si ha un corpo non puntiforme carico: $\quad \Phi_\Sigma(\vec{E}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_\Sigma \rho(x,y,z)\,dV$

⟶ LEGGE DI GAUSS DIFFERENZIALE

$$d\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \vec{E}\cdot\hat{n}\,d\Sigma = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz \xrightarrow{d\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \frac{\rho(x,y,z)\,dV}{\varepsilon_0}}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon_0}$$

Divergenza in coordinate cartesiane: $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(x,y,z)$

Divergenza in coordinate cilindriche: $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(rE_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$

Divergenza in coordinate sferiche: $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2E_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(E_\theta \sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_\Phi}{\partial\Phi}$

EQUAZIONI DI MAXWELL

$\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = 0$ ⤳ campo conservativo

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ ⤳ legge di Gauss

EQUAZIONE DI POISSON

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

EQUAZIONE DI LAPLACE (nello spazio vuoto)

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Laplaciano in coordinate cartesiane: $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

Laplaciano in coordinate cilindriche: $\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

Laplaciano in coordinate sferiche: $\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\Phi^2}$

CONDUTTORI

Carica distribuita superficialmente su un conduttore: $q = \oint \sigma(x,y,z)\,d\Sigma$

Potenziale: $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint\frac{\sigma(x,y,z)}{r^2}\,d\Sigma$

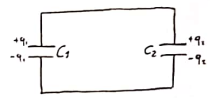
Capacità di un conduttore: $C = \frac{q}{V}$

Capacità di un condensatore sferico: $C = \frac{\varepsilon_0}{h} \cdot$ Area sfera

Capacità di un condensatore cilindrico: $C = \frac{\varepsilon_0}{h} \cdot$ Area cilindro

Capacità di un condensatore piano: $C = \frac{\varepsilon_0}{h} \cdot$ Area armatura

→ CONDENSATORI IN PARALLELO

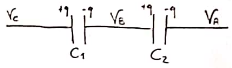


$q_1 = C_1 V$; $\quad q_2 = C_2 V$

$q_{TOT} = q_1 + q_2 = (C_1 + C_2) V$

$$C_{eq} = \frac{q_{TOT}}{V} = C_1 + C_2$$

→ CONDENSATORI IN SERIE



$V_C - V_B = \frac{q}{C_1}$; $\quad V_B - V_A = \frac{q}{C_2}$

$V_{TOT} = V_C - V_A = q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$

$$C_{eq} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

Supponendo che nel processo di carica di un condensatore sia stata trasferita già una quantità di carica q' con una differenza di potenziale V' tra le due armature, il lavoro per spostare un'ulteriore carica dq' attraverso V' è:

$$dW = V' dq' = \frac{q'}{C} dq' \implies W = \int dW = \int_0^q \frac{q'}{C} dq' = \frac{q^2}{2C}$$

Energia elettrostatica: $U_e = W = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} q V$

NEL CASO DI UN CONDENSATORE CON ARMATURE PARALLELE:

$$U_e = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0}{h} \Sigma (Eh)^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \tau = \int_\tau \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 d\tau$$

$\tau = \Sigma h$ è il volume del condensatore

Densità di energia elettrostatica: $u = \frac{U_e}{\tau} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$

CORRENTE ELETTRICA

Definizione di corrente: $i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$

Intensità di corrente attraverso una superficie $d\Sigma$: $di = n_+ e v_+ \, d\Sigma \cos\theta$

v_+: verso positivo della velocità di deriva delle cariche (v_d)

n_+: numero di portatori di carica positivi +e per unità di volume

Densità di corrente: $\vec{J} = n_+ e \vec{v}_+ \Longrightarrow$

$\Longrightarrow di = \vec{J} \cdot \hat{n} \, d\Sigma \Longrightarrow i = \int_\Sigma \vec{J} \cdot \hat{n} \, d\Sigma = \Phi_\Sigma(\vec{J})$

SE I PORTATORI DI CARICA SONO NEGATIVI: $\vec{J} = -n_- e \vec{v}_-$

SE CI SONO PORTATORI DI CARICA SIA POSITIVI CHE NEGATIVI: $\vec{J} = n_+ e \vec{v}_+ - n_- e \vec{v}_-$

Principio di conservazione della carica: $i = \oint \vec{J} \cdot \hat{n} \, d\Sigma = -\frac{dq_{INT}}{dt} \xRightarrow{q_{INT} = \int_\tau \rho \, d\tau}$

$\Longrightarrow \oint \vec{J} \cdot \hat{m} \, d\Sigma = -\int_\tau \frac{d\rho}{dt} d\tau \Longrightarrow \oint \vec{J} \cdot \hat{m} \, d\Sigma + \int_\tau \frac{d\rho}{dt} d\tau = 0 \xRightarrow{\text{TEOREMA DIVERGENZA}}$

$\Longrightarrow \int_\tau \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \, d\tau + \int_\tau \frac{d\rho}{dt} d\tau = 0 \Longrightarrow \int_\tau \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{d\rho}{dt} \right) d\tau = 0 \Longrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{d\rho}{dt} = 0$

equazione di continuità della corrente elettrica

IN REGIME STAZIONARIO: $\frac{d\rho}{dt} = 0 \Longrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$

Legge di Ohm della conduzione elettrica: $\vec{J} = \sigma \vec{E} = \frac{\vec{E}}{\rho} \xRightarrow{\cos\theta = 1}$

$\Longrightarrow i = J\Sigma = \frac{\Sigma}{\rho} E \Longrightarrow E = \frac{\rho}{\Sigma} i$

σ = CONDUTTIVITÀ DEL CONDUTTORE $\left[\frac{1}{\Omega m} \right] = \left[\frac{\text{siemens}}{m} \right]$

$\rho = \frac{1}{\sigma}$ = RESISTIVITÀ DEL CONDUTTORE $[\Omega m]$

cresce con l'aumentare della temperatura secondo la legge $\rho = \rho_{20}(1 + \alpha \Delta T)$

ρ_{20}: resistività a 20°C

Differenza di potenziale tra i capi A, B di un conduttore:

$V = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = Eh = \frac{\rho h}{\Sigma} i$

Resistenza del conduttore: $R = \frac{\rho h}{\Sigma}$

Legge di Ohm per i conduttori: $V = Ri$

Conduttanza: $G = 1/R$

Potenza per mantenere in moto una carica: $P = \vec{F} \cdot \vec{v_d} = e\vec{E} \cdot \vec{v_d}$

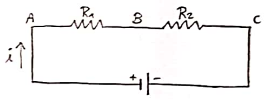
Potenza per unità di volume: $P_\tau = nP = ne\vec{v_d} \cdot \vec{E} = \vec{J} \cdot \vec{E} \xRightarrow{\vec{J} = \sigma \vec{E}}$

$$\Rightarrow P_\tau = \sigma E^2 = \sigma \left(\frac{\rho}{\Sigma} i\right)^2 = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\rho}{\Sigma} i\right)^2 = \rho \frac{i^2}{\Sigma^2}$$

$$dP = P_\tau \Sigma \, dh = \rho \frac{i^2}{\Sigma^2} \Sigma \, dh = \rho \frac{i^2}{\Sigma} dh \Rightarrow P = \int_A^B i^2 \rho \frac{1}{\Sigma} dh = \underbrace{i^2 R}_{\text{equazione dell'effetto Joule}}$$

$$dW = V dq = Vi\,dt \Rightarrow P = \frac{dW}{dt} = Vi = \frac{V^2}{R} \Rightarrow W = \int_0^t P\,dt = \int_0^t Ri^2 dt = Ri^2 t$$

→ RESISTORI IN SERIE

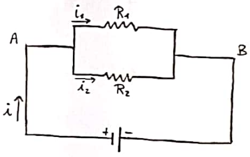


$V_A - V_B = R_1 i$; $\quad V_B - V_C = R_2 i$

$\Rightarrow V_A - V_C = (R_1 + R_2) i = R_{eq} i$

Potenza totale: $P = (V_A - V_C) i = (R_1 + R_2) i^2 = R_{eq} i^2$

→ RESISTORI IN PARALLELO



$$i = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{V}{R_{eq}}$$

$$\Rightarrow i_1 = \frac{V}{R_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i; \quad i_2 = \frac{V}{R_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i$$

Potenza totale: $P = V^2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{V^2}{R_{eq}} = R_{eq} i^2$

CAMPO MAGNETICO

Forza di Lorentz: $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$

IN MODULO: $F = qvB\sin\theta$

Lavoro: $W = \Delta E_k = \frac{1}{2}mv_q^2 - \frac{1}{2}mv_p^2 = \int_p^q \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$

→ CASO $\theta = \pi/2$ $(\vec{B} \perp \vec{v})$

$F = qvB = ma_n = m\frac{v^2}{r} \Longrightarrow r = \frac{mv}{qB} = \frac{p}{qB} = \text{costante} \Longrightarrow$ MOTO CIRCOLARE UNIFORME

Velocità angolare: $\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}$

IN TERMINI VETTORIALI: $q\vec{v} \wedge \vec{B} = m\vec{\omega} \wedge \vec{v} = -m\vec{v} \wedge \vec{\omega} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \vec{\omega} = -\frac{q}{m}\vec{B}$

Periodo: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB}$

Frequenza: $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{qB}{2\pi m}$

→ CASO θ QUALSIASI

$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} = q(\vec{v}_n + \vec{v}_{\parallel}) \wedge \vec{B} = q\vec{v}_n \wedge \vec{B}$

Raggio di curvatura della traiettoria: $r = \frac{mv_n}{qB} = \frac{mv\sin\theta}{qB} \Longrightarrow$ MOTO ELICOIDALE UNIFORME

Passo dell'elica: $p = v_{\parallel}T = \frac{2\pi mv\cos\theta}{qB}$

CONDUTTORE PERCORSO DA CORRENTE

In un tratto lungo dl di un conduttore con sezione Σ immerso in un campo magnetico ci sono $n\Sigma dl$ elettroni che risentono della forza di Lorentz data da:

$$d\vec{F} = n\Sigma dl\, d\vec{F}_e = -(\Sigma dl)en\vec{v}_d \wedge \vec{B} \underset{\vec{j} = -ne\vec{v}_d}{=} \underbrace{(\Sigma dl)}_{\text{volume infinitesimo}} \vec{j} \wedge \vec{B}$$

Forza per unità di volume: $\vec{F}_\tau = \vec{j} \wedge \vec{B}$

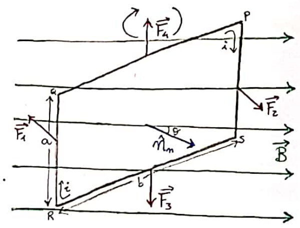
Seconda legge di Laplace: $d\vec F = i\, d\vec l \wedge \vec B$

$\Longrightarrow \vec F = \int_A^B d\vec F = i\int_A^B d\vec l \wedge \vec B$ con A,B = estremi del filo.

SE IL CAMPO MAGNETICO È UNIFORME: $\vec F = i\left(\int_A^B d\vec l\right)\wedge \vec B = \underbrace{i\,\vec{AB}\wedge\vec B}$

la forza dipende solo dai punti A,B e non dalla forma del conduttore ← sia se il conduttore è rettilineo, sia se è curvo

MOMENTI MECCANICI



Modulo del momento di coppia:

$M = b\sin\theta F = iabB\sin\theta = i\Sigma B\sin\theta$

Momento magnetico della spira:

$\vec m = i\Sigma \hat n_n \Longrightarrow \vec M = \vec m\wedge\vec B = i\Sigma\hat n_n\wedge\vec B$

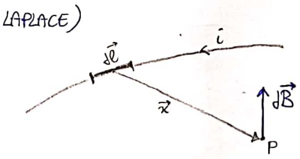
Se la spira è vincolata nel suo asse di rotazione e ha un suo momento di inerzia:

$M = -mB\theta = \frac{dL}{dt} = I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \Longrightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2}+\omega^2=0 \Longrightarrow \omega=\sqrt{\frac{mB}{I}}$

La spira oscilla di moto armonico

LEGGE DI BIOT-SAVART (O PRIMA LEGGE DI LAPLACE)

Induzione magnetica in P: $d\vec B = Ki\frac{d\vec l\wedge\vec x}{|\vec x|^3}$



$\xrightarrow{i=dq/dt;\ i\,d\vec l = q\vec v} d\vec B = Kq\frac{\vec v\wedge\vec x}{|\vec x|^3}$

Dove $K = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}\frac{H}{m}$ → costante di permeabilità magnetica nel vuoto $= 1.26\cdot10^{-6}\frac{H}{m}$

$\Longrightarrow d\vec B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,d\vec l\wedge\vec x}{|\vec x|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,d\vec l\wedge\hat n_x}{x^2}$

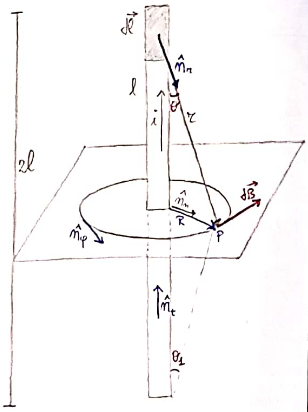
$\Longrightarrow \vec B = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\oint\frac{d\vec l\wedge\hat n_x}{x^2}$ ⟶ Legge di Laplace-Ampère

$\xrightarrow{J=\frac{i}{\Sigma};\ \vec J = nq\vec v} d\vec B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec v\wedge\hat n_x}{x^2}\, n\, d\tau$ dove $d\tau = \Sigma\, dl$

$\Longrightarrow \vec B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec v\wedge\hat n_x}{x^2} \xrightarrow{E(x)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\hat n_x} \vec B = \varepsilon_0\mu_0\vec v\wedge\vec E = \frac{1}{c^2}\vec v\wedge\vec E \Longrightarrow$

$\Longrightarrow c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 2.98\cdot10^8\ m/s$

FILO INDEFINITO PERCORSO DA CORRENTE



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\, d\vec{l} \wedge \hat{n}_r}{r^2} \Longrightarrow dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\, dl \sin\theta}{r^2}$$

$$\xrightarrow[l\,tg(\pi-\theta) = -l\,tg\theta = R \Rightarrow dl = R\,d\theta/\sin^2\theta]{r \sin(\pi-\theta) = r\sin\theta = R \Rightarrow 1/r^2 = \frac{\sin^2\theta}{R^2}} dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{\sin\theta\, d\theta}{R} =$$

$$= -\frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{d(\cos\theta)}{R}$$

Campo magnetico generato da metà filo:

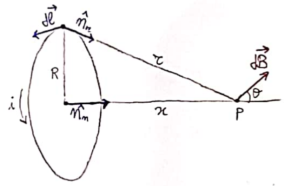
$$B_l = -\frac{\mu_0 i}{4\pi R}\int_{\cos\theta_1}^{0} d(\cos\theta) = \frac{\mu_0 i}{4\pi R}\cos\theta_1 =$$

$$= \frac{\mu_0 i}{4\pi R}\frac{l}{\sqrt{R^2+l^2}}$$

$$\Longrightarrow B = 2B_l = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}\frac{l}{\sqrt{R^2+l^2}} \qquad \Longrightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}\frac{l}{\sqrt{R^2+l^2}}\,\hat{n}_\varphi$$

$$\Longrightarrow \lim_{l\to+\infty}\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}\hat{n}_\varphi = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}\hat{n}_t \wedge \hat{n}_n$$

SPIRA CIRCOLARE



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\, d\vec{l} \wedge \hat{n}_r}{r^2} \xRightarrow{d\vec{l} \perp \hat{n}_r} dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\, dl}{r^2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow dB_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\, dl}{r^2}\cos\theta$$

$$\Longrightarrow \vec{B} = \oint dB_x = \oint \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\, dl}{r^2}\cos\theta = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{\cos\theta}{r^2}\,2\pi R\,\hat{n}_n = \frac{\mu_0 i}{2}\frac{\cos\theta}{r^2}R\,\hat{n}_n \xRightarrow{\cos\theta = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2+x^2}}}$$

$$\Longrightarrow \vec{B}(x) = \frac{\mu_0 i R^2}{2r^3}\hat{n}_n = \frac{\mu_0 i}{2}\frac{R^2}{(R^2+x^2)^{3/2}}\hat{n}_n$$

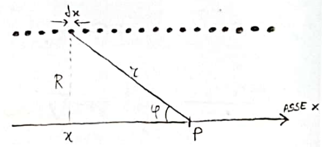
Campo magnetico al centro della spira: $\vec{B}(x=0) = \frac{\mu_0 i}{2R}\hat{n}_n$

Campo magnetico per $x \gg R$: $\vec{B}(x) \approx \frac{\mu_0 i R^2}{2x^3}\hat{n}_n = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{2\pi R^2}{x^3}\hat{n}_n \approx \frac{\mu_0 i \cdot 2\vec{m}}{4\pi r^3}$

dove $\vec{m}$ = momento magnetico della spira $= i\Sigma\hat{n}_n' = i\pi R^2\hat{n}_n$

Dipolo magnetico (in coordinate sferiche): $\vec{B} = B_r\hat{n}_r + B_\theta\hat{n}_\theta = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}(2\cos\theta\,\hat{n}_r + \sin\theta\,\hat{n}_\theta)$

SOLENOIDE RETTILINEO



d = LUNGHEZZA $\quad$ R = RAGGIO

N = NUMERO TOTALE DI SPIRE $\quad$ $n = N/d$ = DENSITÀ DI SPIRE

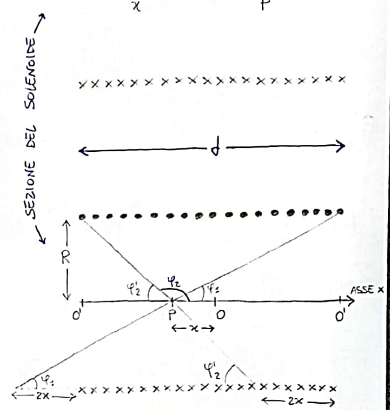
$$dB(x) = \frac{\mu_0 i}{2} \frac{R^2}{r^3} n\, dx \xrightarrow[(x-x_0)/R = -\cot g\varphi \Rightarrow dx = \frac{R d\varphi}{\sin^2\varphi}]{R = r\sin\varphi;}$$

$$\Longrightarrow dB(x) = \frac{\mu_0}{2} \frac{iR^2}{r^3} n\, dx = \frac{\mu_0 i}{2} n \sin\varphi\, d\varphi$$

$$\Longrightarrow B(x) = \frac{\mu_0 i n}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin\varphi\, d\varphi = \frac{\mu_0 i n}{2} (\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2) =$$

$$\underset{\varphi_2' = \pi - \varphi_2}{=} \frac{\mu_0 i n}{2} (\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2') =$$

$$= \frac{\mu_0 i n}{2} \left[\frac{d+2x}{\sqrt{(d+2x)^2 + 4R^2}} + \frac{d-2x}{\sqrt{(d-2x)^2+4R^2}} \right]$$



Campo magnetico al centro del solenoide: $\quad B_0(x=0) = \mu_0 i n \frac{d}{\sqrt{d^2+4R^2}}$

Campo magnetico al bordo del solenoide: $\quad B_{0'}(x = d/2) = \frac{\mu_0 i n}{2} \frac{d}{\sqrt{d^2+R^2}}$

SE $d \gg R$, AL CENTRO SI HA UN CAMPO MAGNETICO PARI A: $\quad B_\infty = \mu_0 i n$

ELETTRODINAMICA

Consideriamo due fili paralleli, distanti r, di lunghezza dl_1, dl_2 e attraversati dalle correnti i_1, i_2.

Il filo dl_2 risente della forza $d\vec{F}_{1,2}$ dovuta alla presenza del campo magnetico $d\vec{B}_1$ prodotto dal filo dl_1:

$$d\vec{F}_{1,2} = i_2\, d\vec{l}_2 \wedge d\vec{B}_1 \xrightarrow{d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i_1 d\vec{l}_1 \wedge \hat{n}_{r_1}}{r^2}} d\vec{F}_{1,2} = i_2\, d\vec{l}_2 \wedge d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 i_2 i_1}{4\pi} \frac{d\vec{l}_2 \wedge (d\vec{l}_1 \wedge \hat{n}_{r_1})}{r^2}$$

Allo stesso modo si ha: $\quad d\vec{F}_{2,1} = i_1\, d\vec{l}_1 \wedge d\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \frac{d\vec{l}_1 \wedge (d\vec{l}_2 \wedge \hat{n}_{r_2})}{r^2}$

$$\Longrightarrow \vec{F}_{1,2} = \frac{\mu_0 i_2 i_1}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \frac{d\vec{l}_2 \wedge (d\vec{l}_1 \wedge \hat{n}_{r_1})}{r^2} = \frac{\mu_0 i_2 i_1}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \frac{(d\vec{l}_2 \cdot \hat{n}_{r_1}) d\vec{l}_1 - (d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1) \hat{n}_{r_1}}{r^2}$$

$$\vec{F}_{2,1} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \oint_2 \oint_1 \frac{d\vec{l}_1 \wedge (d\vec{l}_2 \wedge \hat{n}_{r_2})}{r^2} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \oint_2 \oint_1 \frac{(d\vec{l}_1 \cdot \hat{n}_{r_2}) d\vec{l}_2 - (d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) \hat{n}_{r_2}}{r^2}$$

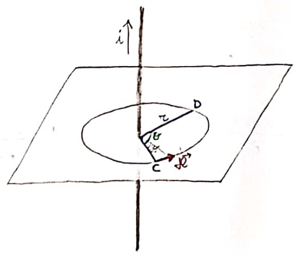
$$\frac{\hat{n}_{r_1}}{r^2} = -\nabla\left(\frac{1}{r}\right) \Longrightarrow \frac{\mu_0 i_2 i_1}{4\pi}\oint_1\oint_2 \frac{(d\vec{l}_2\cdot\hat{n}_{r_1})\,d\vec{l}_1}{r^2} = \frac{\mu_0 i_2 i_1}{4\pi}\oint_1\oint_2 -\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\left(d\vec{l}_2\cdot d\vec{l}_1\right) =$$

$$= \frac{\mu_0 i_2 i_1}{4\pi}\oint_1\left[\oint_2 -\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\left(d\vec{l}_2\right)\right] d\vec{l}_1 \longrightarrow$$ integrale nullo poiché la circuitazione di un gradiente è sempre nulla

Stessa considerazione per $\vec{F}_{2,1}$, $\frac{\hat{n}_{r_2}}{r^2}$.

$$\hat{n}_{r_1} = -\hat{n}_{r_2} \Longrightarrow \vec{F}_{1,2} = \frac{\mu_0 i_2 i_1}{4\pi}\oint_1\oint_2 \frac{(d\vec{l}_2\cdot d\vec{l}_1)\,\hat{n}_{r_1}}{r^2} = -\vec{F}_{2,1}$$

LEGGE DI AMPÈRE



$$\vec{B}\cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\,dl = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\,d\theta$$

$$\Longrightarrow \int_C^D \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_C^D \frac{\mu_0 i}{2\pi}\,d\theta = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\,\theta$$

$$\int_D^C \vec{B}\cdot d\vec{l} = -\frac{\mu_0 i}{2\pi}\,\theta$$

Integrale lungo una linea chiusa: $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\oint\theta$

DUE CASI:

1) IL PERCORSO CHIUSO CONCATENA LA CORRENTE

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\oint\theta = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\,2\pi = \mu_0 i$$

2) IL PERCORSO CHIUSO <u>NON</u> CONCATENA LA CORRENTE

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\oint\theta = 0$$

Legge di Ampère

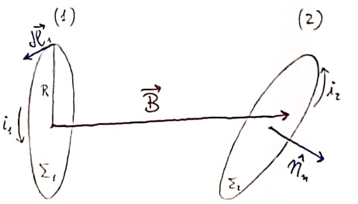
→ FORMA LOCALE DELLA LEGGE DI AMPÈRE

Per il teorema di Stokes: $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_\Sigma \text{rot}\,\vec{B}\cdot\hat{n}\,d\Sigma = \int_\Sigma (\vec{\nabla}\wedge\vec{B})\cdot\hat{n}\,d\Sigma$

SE LA SUPERFICIE Σ È ATTRAVERSATA DA UNA CORRENTE: $i = \int_\Sigma \vec{J}\cdot\hat{n}\,d\Sigma \Longrightarrow$

$$\xrightarrow{\text{LEGGE DI AMPÈRE}} \int_\Sigma (\vec{\nabla}\wedge\vec{B})\cdot\hat{n}\,d\Sigma = \mu_0\int_\Sigma \vec{J}\cdot\hat{n}\,d\Sigma \Longrightarrow \vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \mu_0\vec{J}$$

FLUSSO DEL CAMPO MAGNETICO



Dalla legge di Laplace-Ampère:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l} \wedge \hat{n}_r}{r^2}$$

Passiamo scrivere il flusso del campo magnetico generato dal circuito (1) attraverso la superficie del circuito (2) come:

$$\Phi_{1,2} = \int_{\Sigma_2} \left(\frac{\mu_0 i_1}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l}_1 \wedge \hat{n}_r}{r^2} \right) \cdot \hat{n}_n \, d\Sigma_2 = M_{1,2}\, i_1$$

→ coefficienti di mutua induzione

Analogamente per il circuito (2):

$$\Phi_{2,1} = \int_{\Sigma_1} \left(\frac{\mu_0 i_2}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l}_2 \wedge \hat{n}_r}{r^2} \right) \cdot \hat{n}_n \, d\Sigma_1 = M_{2,1}\, i_2$$

Il campo magnetico generato da un circuito produce un flusso anche attraverso se stesso (AUTOFLUSSO):

$$\Phi = \int_{\Sigma} \left(\frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l} \wedge \hat{n}_r}{r^2} \right) \cdot \hat{n}_n \, d\Sigma = L\, i$$

→ coefficiente di autoinduzione

Legge di Gauss per il campo magnetico: $\Phi(\vec{B}) = \oint \vec{B} \cdot \hat{n}_n \, d\Sigma = 0$

↳ il flusso di $\vec{B}$ attraverso una superficie chiusa è sempre nullo

$$\xrightarrow{\text{TEOREMA DIVERGENZA}} \oint \vec{B} \cdot \hat{n}_n \, d\Sigma = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \, dV = 0 \implies \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

forma locale della legge di Gauss ← la divergenza del campo magnetico è sempre nulla

POTENZIALE VETTORE $\vec{A}$

Il potenziale vettore è definito dalle relazioni: $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

$$\implies \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \nabla(\underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{A}}_{=0}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J} \implies \nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$

$$\implies A_i(x,y,z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{J_i(x',y',z')}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{1/2}} \, dx'dy'dz' \xrightarrow{\text{IN FORMA VETTORIALE}} \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}}{r} \, d\tau$$

Flusso di $\vec{B}$ in funzione di $\vec{A}$: $\Phi(\vec{B}) = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{n}_n \, d\Sigma = \int_{\Sigma} (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \cdot \hat{n}_n \, d\Sigma = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l}$

TRASFORMAZIONI GALILEIANE

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = z - vt \\ t' = t \end{cases}$$

↑ SISTEMA DI RIFERIMENTO IN MOVIMENTO

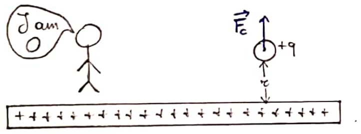
↑ SISTEMA DI RIFERIMENTO FERMO

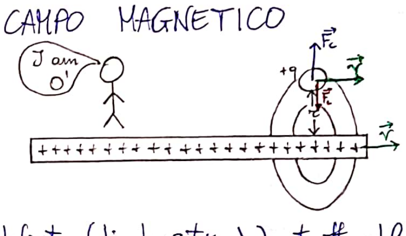
TRASFORMAZIONI DI LORENTZ

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(z - vt) \\ t' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(t - \frac{v}{c^2}z\right) \approx \frac{t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

$$\rightarrow L' = L\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

INTERPRETAZIONE RELATIVISTICA DEL CAMPO MAGNETICO





Applichiamo il teorema di Gauss al filo indefinito (di densità λ), trattandolo come un cilindro di raggio r e lunghezza l:

$$\Phi(\vec{E}) = 2\pi r l E = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0} \Longrightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Forza di Coulomb su q: $\quad F_c = qE = \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$

Forza di Lorentz dovuta al campo magnetico del filo: $\quad F_L = qvB$

Possiamo considerare la fila di cariche come una corrente di intensità:

$$i = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{qN}{\Delta t} = \frac{q(nv\Delta t)}{\Delta t} = qnv \xrightarrow{\lambda = qn \rightarrow i = \lambda v}$$

n: NUMERO DI CARICHE PER UNITÀ DI LUNGHEZZA

$$\Longrightarrow \oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = 2\pi r B = \mu_0 i \Longrightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} = \frac{\mu_0 \lambda v}{2\pi r} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow F_L = qvB = qv\frac{\mu_0\lambda v}{2\pi r} = \frac{\mu_0 q\lambda}{2\pi r}v^2 \xrightarrow{c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \rightarrow \varepsilon_0\mu_0 = 1/c^2}$$

$$\Longrightarrow F_L = \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\frac{v^2}{c^2}$$

Densità di carica per O': $\lambda' = \frac{N}{L'} = \frac{N}{L\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

Quantità di moto per O: $\Delta p = F_c \Delta t = qE\Delta t = \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\Delta t$

Quantità di moto per O': $\Delta p' = F'\Delta t' = F_{TOT}\Delta t' = \frac{q\lambda'}{2\pi\varepsilon_0 r}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\Delta t' =$

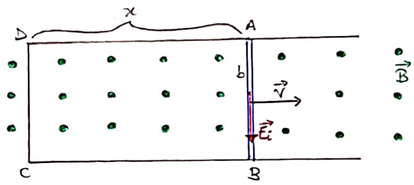
$$= \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r}\frac{\lambda}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \Longrightarrow \Delta p = \Delta p'$$

CAMPI ELETTROMAGNETICI LENTAMENTE VARIABILI NEL TEMPO

Corrente indotta dalla variazione del campo magnetico: $i = \frac{-\frac{d\Phi(B)}{dt}}{R}$

Forza elettromotrice: $f = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$

Campo elettromotore: $\vec{E}_i = \frac{\vec{F}}{-e} = \vec{v}\wedge\vec{B}$



Circuitazione di $\vec{E}_i$ lungo ABCD:

$$f = \int_{ABCD}(\vec{v}\wedge\vec{B})d\ell = \int_{AB}(\vec{v}\wedge\vec{B})d\ell = -vBb$$

Flusso di $\vec{B}$: $\Phi(\vec{B}) = \int_\Sigma \vec{B}\cdot\hat{m}_n\, d\Sigma = Bbx \Longrightarrow f = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -Bb\frac{dx}{dt} = -Bbv$

AUTOINDUZIONE

Sappiamo già che l'autoflusso di un circuito è pari a: $\Phi(\vec{B}) = Li$

$$\Longrightarrow f_L = -\frac{d\Phi(B)}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$ SE L È COSTANTE

Equazione di un circuito RL: $f_{GEN} + f_L = Ri \Longrightarrow \boxed{f_{GEN} = L\frac{di}{dt} + Ri} = Li' + Ri$

$$\Longrightarrow L\frac{di}{dt} = f_{GEN} - Ri \Longrightarrow \frac{di}{f_{GEN}-Ri} = \frac{dt}{L} \Longrightarrow \int\frac{di}{f_{GEN}-Ri} = \int\frac{dt}{L} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \ln(f_{GEN}-Ri) = -\frac{R}{L}t + cost \Longrightarrow \boxed{f_{GEN} - Ri = Ae^{-\frac{R}{L}t}}$$

→ CHIUSURA DEL CIRCUITO (con $i=0$ per $t=0$)

$$f_{GEN} - 0 = Ae^{-\frac{R}{L}(t=0)} = A \Longrightarrow f_{GEN} - Ri(t) = f_{GEN}e^{-\frac{R}{L}t} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow i(t) = \frac{f_{GEN}}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right) \underset{\uparrow}{=:} \frac{f_{GEN}}{R}\left(1-e^{-t/\tau}\right)$$

$\tau = L/R \rightsquigarrow$ costante di tempo del circuito RL

$$i_{t\to\infty} = \frac{f_{GEN}}{R} \qquad f_L = -L\frac{di}{dt} = -f_{GEN}\, e^{-t/\tau}$$

$\longrightarrow$ APERTURA DEL CIRCUITO (equivalente all'introduzione di una resistenza $R' \gg R$)

$$i(t) = \frac{f_{GEN}}{R} e^{-\frac{R'}{L}t} \underset{\uparrow}{=:} \frac{f_{GEN}}{R} e^{-t/\tau'} \qquad f_L = \frac{R'}{R} f_{GEN}\, e^{-t/\tau'}$$

$\tau' := \frac{L}{R'} \rightsquigarrow$ tempo di decadimento

ENERGIA MAGNETICA

Sappiamo che $\quad f_{GEN} = L\frac{di}{dt} + Ri \quad \Longrightarrow$

Potenza: $\quad i \cdot f_{GEN} = Li\frac{di}{dt} + Ri^2$

Lavoro: $\quad i \cdot f_{GEN}\, dt = Li\, di + Ri^2 dt$

- $i \cdot f_{GEN}\, dt$: Lavoro compiuto dal generatore
- $Ri^2 dt$: Lavoro speso per far circolare la corrente nel circuito e trasformato in calore per effetto Joule
- $Li\, di$: Lavoro speso contro la forza elettromotrice di autoinduzione per far aumentare la corrente da i a $i+di$

Lavoro contro il fenomeno di autoinduzione: $\quad W = \int_0^i Li\, di = \frac{1}{2}Li^2$

Energia intrinseca della corrente: $\quad U_L = \frac{1}{2}Li^2 \quad \xRightarrow{\text{in un solenoide di lunghezza } d\ (L=\mu_0 n^2\Sigma;\ B=\mu_0 in)}$

$$\Longrightarrow U_L = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}(\mu_0 n^2 \Sigma)i^2 = \frac{B^2}{2\mu_0}\Sigma d = \frac{B^2}{2\mu_0}\tau$$

LEGGE DI AMPÈRE-MAXWELL

Circuitazione di $\vec{B}$ in condizioni stazionarie: $\quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 i_c$

Corrente di spostamento in un condensatore: $\quad i_s = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(CV) \underset{C=\varepsilon_0\frac{\Sigma}{h}}{=} \frac{d}{dt}\left(\varepsilon_0 \frac{\Sigma}{h} V\right) =$

$$= \varepsilon_0 \frac{d}{dt}(\Sigma E) = \varepsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt}$$

Legge di Ampère-Maxwell (in condizioni non stazionarie): $\quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\left(i_c + \varepsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt}\right)$

EQUAZIONI DI MAXWELL

	Forma integrale	Forma differenziale	Forma integrale per $q=0$, $i=0$	Forma differenziale per $\rho=0$, $\vec{J}=0$	Se ci troviamo in un mezzo (1)	Se ci troviamo in un mezzo (2)
1	$\oint \vec{E}\cdot\hat{n}_n\, d\Sigma = \frac{q}{\varepsilon_0}$	$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\oint \vec{E}\cdot\hat{n}_n\, d\Sigma = 0$	$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$	$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$	$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho$
2	$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$	$\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$	$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$	$\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$	$\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$	$\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$
3	$\oint \vec{B}\cdot\hat{n}_n\, d\Sigma = 0$	$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$	$\oint \vec{B}\cdot\hat{n}_n\, d\Sigma = 0$	$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$	$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$	$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$
4	$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\left(i+\varepsilon_0\frac{d\Phi(\vec{E})}{dt}\right)$	$\vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \mu_0\vec{J}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$	$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\varepsilon_0\frac{d\Phi(\vec{E})}{dt}$	$\vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$	$\vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \mu\vec{J}+\varepsilon\mu\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$	$\vec{\nabla}\wedge\vec{H} = \vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}+\vec{P} = \varepsilon\vec{E}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu}$$

DOVE

$\vec{P}$ tiene conto del momento di dipolo

$\vec{M}$ tiene conto dei momenti di magnetizzazione degli atomi all'interno

$\vec{D}$ = vettore di induzione elettrica

$\vec{H}$ = campo magnetizzante

CONSERVAZIONE DELLA CARICA ELETTRICA

Applicando l'operatore divergenza all'equazione di Maxwell-Ampère, si ha:

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\mu_0\vec{J}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)=0 \quad \longleftarrow \text{POICHÉ LA DIVERGENZA DI UN ROTORE È SEMPRE NULLA } (\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{B})=0)$$

$$\Longrightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{J}+\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})=\vec{\nabla}\cdot\vec{J}+\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right)=0 \Longrightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

È un altro modo per dimostrare il principio di conservazione della carica elettrica

ONDE ELETTROMAGNETICHE PIANE

Partiamo dalle equazioni di Maxwell relative a un mezzo di costante dielettrica ε e permeabilità magnetica μ, con $\rho=0$, $\vec{J}=0$; consideriamo il caso particolare in cui la soluzione delle equazioni differenziali sia un'onda piana, in cui il campo elettrico e il campo magnetico dipendono solo dalla coordinata x e dal tempo. Quindi si ha che:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0 \Longrightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x}=0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}=0 \Longrightarrow \frac{\partial B_x}{\partial x}=0$$

$$(\vec{\nabla}\wedge\vec{E})_x=\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}=-\frac{\partial B_x}{\partial t} \Longrightarrow \frac{\partial B_x}{\partial t}=0$$

$$(\vec{\nabla}\wedge\vec{E})_y=\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}=-\frac{\partial B_y}{\partial t} \Longrightarrow \frac{\partial B_y}{\partial t}=\frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$(\vec{\nabla}\wedge\vec{E})_z=\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=-\frac{\partial B_z}{\partial t} \Longrightarrow \frac{\partial B_z}{\partial t}=-\frac{\partial E_y}{\partial x}$$

$$(\vec{\nabla}\wedge\vec{B})_x=\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z}=\varepsilon\mu\frac{\partial E_x}{\partial t} \Longrightarrow \frac{\partial E_x}{\partial t}=0$$

$$(\vec{\nabla}\wedge\vec{B})_y=\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x}=\varepsilon\mu\frac{\partial E_y}{\partial t} \Longrightarrow \frac{\partial E_y}{\partial t}=-\frac{1}{\varepsilon\mu}\frac{\partial B_z}{\partial x}$$

$$(\vec{\nabla}\wedge\vec{B})_z=\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}=-\frac{\partial E_z}{\partial t} \Longrightarrow \frac{\partial E_z}{\partial t}=\frac{1}{\varepsilon\mu}\frac{\partial B_y}{\partial x}$$

$\rightarrow$ 1° CONSEGUENZA:

$E_x(x,t)=0$; $\qquad B_x(x,t)=0$

$\hookrightarrow$ I campi $\vec{E}$, $\vec{B}$ oscillano solo lungo le direzioni y, z.

→ 2° CONSEGUENZA:

Deriviamo $\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t}$ rispetto a x e $\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon\mu}\frac{\partial B_y}{\partial x}$ rispetto a t:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 B_y}{\partial x \partial t} \quad ; \quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon\mu}\frac{\partial^2 B_y}{\partial t \partial x} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

In modo analogo si ha: $\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2}$

Entrambe le componenti del campo elettrico e del campo magnetico delle ultime due equazioni trovate soddisfano le equazioni delle onde piane che si propagano con velocità v uguale:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad \Longrightarrow \quad v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}$$

Le soluzioni di tali equazioni sono del tipo:

$$\vec{E} = E_y(x-vt)\hat{n}_y + E_z(x-vt)\hat{n}_z$$

$$\vec{B} = B_y(x-vt)\hat{n}_y + B_z(x-vt)\hat{n}_z$$

Essendo $u = (x-vt)$ l'argomento delle soluzioni, si ha:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -v \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial u}$$

$$\Longrightarrow B_y(x-vt) = \int \frac{\partial B_y}{\partial t}\,dt = \int \frac{\partial E_z}{\partial u}\,dt = -\frac{1}{v}\int \frac{\partial E_z}{\partial u}\,du = -\frac{1}{v}E_z(x-vt)$$

Analogamente si ha: $B_z(x-vt) = \frac{1}{v}E_y(x-vt)$

$$\Longrightarrow \begin{aligned} \vec{E} &= E_y(x-vt)\hat{n}_y + E_z(x-vt)\hat{n}_z \\ v\vec{B} &= -E_z(x-vt)\hat{n}_y + E_y(x-vt)\hat{n}_z \end{aligned}$$

Modulo dei campi: $B^2 = B_y^2 + B_z^2 = \frac{1}{v^2}(E_y^2 + E_z^2) = \frac{1}{v^2}E^2 \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow E = vB \xrightarrow{\text{nel vuoto}} E = cB$$

Prodotto scalare: $\vec{E}\cdot\vec{B} = E_yB_y + E_zB_z = -\frac{1}{v^2}(-E_yE_z + E_zE_y) = 0$

I DUE VETTORI SONO SEMPRE PERPENDICOLARI TRA LORO

Prodotto vettoriale: $\vec{E} \wedge \vec{B} = \begin{bmatrix} \hat{n}_x & \hat{n}_y & \hat{n}_z \\ 0 & E_y & E_z \\ 0 & -\frac{E_z}{v} & \frac{E_y}{v} \end{bmatrix} = \frac{1}{v}(E_y^2 + E_z^2)\hat{n}_x = \frac{E^2}{v}\hat{n}_x =$

$= vB^2\hat{n}_x = EB\hat{n}_x$

POLARIZZAZIONE DELLA LUCE

La soluzione dell'equazione dell'onda elettromagnetica $\left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \right.$; $\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2}$; $\left. v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \right)$ può essere scritta come:

$E_y(x,t) = E_{oy} \sin(Kx - \omega t)$ $\qquad$ $E_z(x,t) = \pm E_{oz} \sin(Kx - \omega t + \delta)$

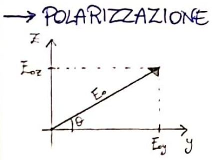
Dove: $\omega = Kv = 2\pi\nu$; $\quad \lambda\nu = v$; $\quad K = 2\pi/\lambda$

ν = frequenza $\quad$ λ = lunghezza d'onda $\quad$ ω = pulsazione

K = numero d'onda (= modulo del vettore d'onda) $\quad$ δ = fase iniziale

E_{oy} / E_{oz} = ampiezza

→ POLARIZZAZIONE RETTILINEA



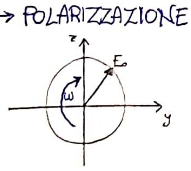
Posto $\delta = 0, \pi \rightsquigarrow E_y(x,t) = E_{oy} \sin(Kx - \omega t)$

$E_z(x,t) = \pm E_{oz} \sin(Kx - \omega t)$

$\Longrightarrow \frac{E_y}{E_z} = \pm \frac{E_{oy}}{E_{oz}} = tg\theta$ ← IL RAPPORTO DELLE COMPONENTI È COSTANTE

Ampiezza dell'oscillazione: $E_o = \sqrt{E_{oy}^2 + E_{oz}^2} \Longrightarrow E_{oy} = E_o \cos\theta$; $E_{oz} = E_o \sin\theta$

→ POLARIZZAZIONE CIRCOLARE



$E_y(x,t) = E_o \sin(Kx - \omega t)$

$E_z(x,t) = \pm E_o \sin(Kx - \omega t)$

$\Longrightarrow E_o$ = ampiezza costante

Energia di un'onda elettromagnetica: $u = u_e + u_m = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{B^2}{2\mu} \Longrightarrow$

$\xrightarrow{B = \frac{E}{v};\ v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}};\ c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_o\mu_o}}} u_e = u_m = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{E^2}{2\mu v^2} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = u_e \Longrightarrow u = 2u_e = \varepsilon E^2$

⟹ L'energia elettromagnetica è per metà dovuta al campo elettrico e per metà al campo magnetico.

Energia contenuta in un volume $d\tau$ attraversato da un'onda elettromagnetica:

$$dU = u\,d\tau = u\,d\Sigma\, v\,dt\cos\alpha = \varepsilon E^2 v\cos\alpha\, d\Sigma\, dt$$

Potenza che attraversa $d\Sigma$: $\quad dP = \varepsilon E^2 v\cos\alpha\, d\Sigma$

Vettore di Poynting: $\quad \vec{S} = \varepsilon E^2 \vec{v} = \frac{1}{\mu}(\vec{E}\wedge\vec{B})$

$$\vec{E}\wedge\vec{B} = \frac{E^2}{v}\hat{n}_x = vB^2\hat{n}_x = EB\hat{n}_x$$

$$\Longrightarrow dP = d\Phi_\Sigma(\vec{S}) = \vec{S}\cdot\hat{n}_n\, d\Sigma = \varepsilon E^2 v\cos\alpha\, d\Sigma = \varepsilon E^2 v\, d\Sigma_0$$

Modulo di $\vec{S}$ per un'onda polarizzata linearmente: $\quad S = \varepsilon E^2 v = \varepsilon v\left(E_0 \sin(Kx-\omega t)\right)^2$

$\Longrightarrow$ Valor medio di S: $\quad S_m = \varepsilon v E_m^2 = \varepsilon v \frac{1}{t}\int_0^t \left(E_0\sin(Kx-\omega t)\right)^2 dt = \frac{1}{2}\varepsilon v E_0^2$

$\longrightarrow$ CASO DI UN'ONDA ELETTROMAGNETICA PIANA TRASPORTATA RETTILINEARMENTE

Intensità: $\quad I = S_m = \varepsilon v E_m^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2$

$n := \sqrt{\frac{\varepsilon_r}{\mu_r}}$

$$I = I_y + I_z = \frac{1}{2}\varepsilon v\left(E_{0y}^2 + E_{0z}^2\right) \quad ; \quad \varepsilon v = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} =: \frac{1}{Z} =: \frac{n}{Z_0}$$

$$\Longrightarrow I = \frac{1}{2}\frac{n}{Z_0}E_0^2 = \frac{n}{Z_0}E_{eff}^2$$

$\longrightarrow$ CASO DI UN'ONDA POLARIZZATA CIRCOLARMENTE

$I_y = \frac{1}{2}\frac{n}{Z_0}E_0^2 \qquad I = I_y + I_z = \frac{n}{Z_0}E_0^2 \qquad I_y = I_z$