

26/04/2021 **II PARTE DEL CORSO**

Stabilità dei sistemi lineari:

STABILITÀ $\begin{cases} \text{INTERNA: relativa alle risposte libere (si studia tramite le equazioni fatti da } \dot{x} = Ax) \\ \text{ESTERNA: relativa alle risposte forzate} \end{cases}$

Definizione:

Un sistema lineare si dice STABILE ESTERNAMENTE \Leftrightarrow o STABILE BIBO (Bounded Input Bounded Output)

se a partire da condizioni iniziali nulle si ha

$$|y(t)| \leq M_y < +\infty \quad \forall t \quad \text{quando} \quad |u(t)| \leq M_u < +\infty \quad \forall t.$$

Teorema sulla stabilità esterna:

Un sistema lineare è stabile esternamente \Leftrightarrow tutti i poli della sua funzione di trasferimento hanno parte reale strettamente negativa.

Dimostrazione:

$$Y(s) = Y_f(s) = W(s)U(s) = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\alpha_{i,j}}{(s-p_i)^j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_f(t) = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{i,j} e^{p_i t} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} \delta_{i,j}(t)$$

Risposta $y_f(s)$, questi poli hanno qualche ingresso $u(t)$ limitato, e fanno

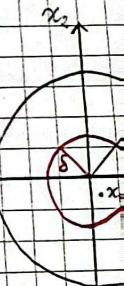
di valle di queste considerazioni, gli unici momento $W(s)$ affinché la risposta y_f mente negativa.

Definizione:

Un sistema lineare si dice STABILE INTERNA

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che $\|x(t)\| < \epsilon$

ESEMPIO ($x(t) \in \mathbb{R}^2$):



Dobbiamo vedere quando è che, per $t \rightarrow +\infty$, ciascun termine $a_{ij} e^{\Re\{p_i\}t} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} S_{ij}(t)$

converge:

1) $\Re\{p_i\} < 0 \rightarrow$ in tal caso, l'esponentiale manda tutto il prodotto a zero.

2) $\Re\{p_i\} = 0 \wedge m_i = 1 \rightarrow$ in tal caso, non c'è l'esponentiale ($\Re\{p_i\} = 0$) ma non c'è neanche il fattore polinomiale ($m_i = 1$).

Ora, la $y(t)$ appena considerata viene finita sia dalla funzione di trasferimento sia dall'ingresso:

\rightarrow Poiché per ipotesi $U(t) \leq M_u < +\infty \quad \forall t$, il termine $U(s)$ ha necessariamente poli p_i tali che $\Re\{p_i\} < 0$ e/o poli p_i tali che $\Re\{p_i\} = 0 \wedge m_i = 1$.

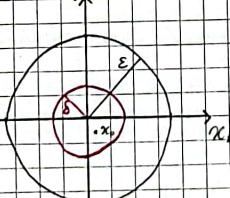
\rightarrow Per quanto riguarda la funzione di trasferimento, i suoi poli si aggiungono a quelli relativi all'ingresso. Perciò, i poli p_i tali che $\Re\{p_i\} < 0$ non daranno problemi; i poli con parte reale nulla, invece, pur avendo $m_i = 1$ in $W(s)$, potrebbero essere uguali a qualche polo (con parte reale nulla) in $U(s)$: di conseguenza, nella risposta $y(s)$, questi poli hanno molteplicità algebrica maggiore di uno per qualche ingresso $U(t)$ limitato, e faranno divergere dunque la funzione $y(t)$ per $t \rightarrow +\infty$.

Per valle di queste considerazioni, gli unici poli ammessi nella funzione di trasferimento $W(s)$ affinché la risposta $y(t)$ converga sono quelli con parte reale strettamente negativa.

Definizione:

Un sistema lineare si dice STABILE INTERNALEMENTE se $\|x(t)\| < +\infty \quad \forall t, \forall x_0$ e, quindi, $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che $\|x(t)\| < \epsilon \quad \forall t$ se $\|x_0\| < \delta$.

ESEMPIO ($x(t) \in \mathbb{R}^2$):



27/10

Osser

J poli

vabile

soltans

→ La

→ Uu

Esemp

Causid

A =

det(A)

⇒ G

⇒ J

Per q

W(s)

= (sI - A)

Imp

• ||X_i(t)||

• Stab

• Stab

x₀ -x₀ -

Raccia

caso

Definizione:

Un sistema lineare è STABILE ASINTOTICAMENTE se:

- È stabile (internamente)
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = 0 \quad \forall x_0 \quad \leftarrow$ ATTRATTIVITÀ DELL'ORIGINE

NB: Nei sistemi lineari l'attrattività dell'origine implica la stabilità ma nei sistemi non lineari questo potrebbe non essere vero.

Teorema sulla stabilità interna:Siano $\lambda_i(A)$ gli autovalori della matrice dinamica A del sistema. Allora:

- Se $\text{Re}\{\lambda_i\} < 0 \quad \forall i \Rightarrow$ STABILITÀ ASINTOTICA
- Se esiste anche un solo λ_k con $\text{Re}\{\lambda_k\} > 0 \Rightarrow$ INSTABILITÀ
- Se $\text{Re}\{\lambda_i\} \leq 0 \quad \forall i$, si considerino solo i λ_k con parte reale nulla:
 - Se per ciascuno di essi: $m_k \equiv \mu_k \Rightarrow$ STABILITÀ non asintotica
 - Se anche solo per uno di essi: $m_k > \mu_k \Rightarrow$ INSTABILITÀ

dove m_k = moltiplicità algebrica di λ_k , μ_k = moltiplicità geometrica di λ_k .Idea della dimostrazione:

$$X_i(s) = (sI - A)^{-1} x_0$$

COMPONENTE i-ESIMA DEL VETTORE $X_i(s)$:

$$\Rightarrow X_{i,j}(s) = \sum_{l=0}^m \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} e^{s_l t} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} \delta_{i,l}(t)$$

→ $s_l = \nu_i$, $\nu_i \leq m$ a causa delle possibili semplificazioni in $X_i(s)$

- Se $\text{Re}\{\lambda_i\} < 0 \Rightarrow$ l'esponentiale manda tutto il prodotto a zero.
- Se $\text{Re}\{\lambda_i\} \geq 0 \Rightarrow$ l'esponentiale manda tutto il prodotto a infinito.
- Se $\text{Re}\{\lambda_i\} = 0 \Rightarrow$ l'esponentiale non c'è e, in particolare, si hanno due casi:
 - Se $\nu_i = 1 \Rightarrow$ non compare neanche il fattore polinomiale, per cui il termine $\alpha_{ij} e^{\nu_i t} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} \delta_{i,l}(t)$ non va a zero ma converge comunque per $t \rightarrow +\infty$.
 - Se $\nu_i > 1 \Rightarrow$ il fattore polinomiale c'è e manda tutto il prodotto a infinito.

Si dimostra che, relativamente all'autovalore λ_i , si ha che $\nu_i = 1 \Leftrightarrow M_i = \mu_i$.

→ Tuttavia, non lo vediamo nel libro.

27/04/2021

Osservazione:

I valori della funzione di trasferimento sono relativi alla parte raggiungibile e osservabile del sistema \Rightarrow la funzione di trasferimento ha in generale come polo solo un sottouso dei valori degli autovalori di A . Di conseguenza:

- \rightarrow La stabilità asintotica implica la stabilità esterna.
- \rightarrow Un sistema instabile internamente può essere stabile esternamente.

Esempio:

Consideriamo un sistema lineare caratterizzato dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2)$$

$$\Rightarrow \text{Gli autovalori di } A \text{ sono: } \lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = 2$$

\Rightarrow Il sistema è internamente INSTABILE.

Per quanto riguarda la stabilità BIBO:

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2 - s - 2} \begin{bmatrix} s & 2 \\ 1 & s-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \\ = \frac{1}{(s+1)(s-2)} [s \ 2] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{s-2}{(s+1)(s-2)} = \frac{1}{s+1} \Rightarrow \text{Il sistema è esternamente STABILE.}$$

Implicazioni della stabilità asintotica:

• $\|x_i(t)\|$ limitato $\forall t \quad \forall x_0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t)\| = 0$

• Stabilità esterna (non solo sulla risposta in uscita ma su tutto lo stato)

• Stabilità dei movimenti:



\rightarrow SE IL SISTEMA HA UN CERTO ANDAMENTO $x(t)$ NELLO STATO CON CONDIZIONI INIZIALI x_0 , ALLORA, CON CONDIZIONI INIZIALI \bar{x}_0 LEGGERMENTE DISGIUNTE DA x_0 , AVRÀ UN ANDAMENTO $\bar{x}(t)$ NELL'STATO CHE ASINTOTICAMENTE TENDE A $x(t)$.

Proviamo che la stabilità asintotica implica la stabilità dei movimenti:

CASO 1:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

CASO 2:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = A\bar{x} + Bu \\ \bar{x}(0) = \bar{x}_0 \end{cases}$$

Sia $\bar{z} := x - \bar{x} \Rightarrow \dot{\bar{z}} = \dot{x} - \dot{\bar{x}} = Ax + Bu - (A\bar{x} + Bu) = A(x - \bar{x}) = Az$

Ma, per ipotesi, un sistema del tipo $\dot{x} = Ax$ ($\equiv \bar{z} = Az$), essendo asintoticamente stabile, è tale che $\|x(t)\| \rightarrow 0$ per $t \rightarrow \infty$. Ciò implica che, nel nostro caso, $\|x(t) - \bar{x}(t)\| \rightarrow 0$ per $t \rightarrow \infty$.

IMPOR
punto

281

Abbi

ferma

Tutta

socie

parte

Gute

Ama

te s

reale

Per

PC

TUM

=> C

Cos

→ SISTEMA LINEARE: senza gli ingressi, il sistema di equazioni è $\dot{x} = Ax$.

Avere $x(t) = x_e = \text{cost. } \forall t$ implica $\dot{x} = 0 \Rightarrow Ax = 0$

Perciò, un punto di equilibrio è $x_e \in \mathbb{R}^n$: $Ax_e = 0$ Ker(A)

In altre parole, $x_e = 0$ è l'origine o è un vettore dell'autospazio di $\lambda = 0$.

Possiamo giungere a due conclusioni:

• $x_e = 0$ è sempre un punto di equilibrio.

• $x_e \neq 0$, se esiste, non è mai un punto di equilibrio isolato.

↪ INFATTI, SE \exists UN VETTORE $\in \text{Ker}(A) \Rightarrow$ FINCHE TUTTI I SUOI MULTIPLI $\in \text{Ker}(A)$.

→ SISTEMA NON LINEARE: Senza gli ingressi, il sistema di equazioni è $\dot{x} = F(x)$

ESEMPIO DI SISTEMA NON LINEARE - PENDOLO:

$$x = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = F(x)$$

↪ Non è lineare perché in effetti contiene un $\sin(\theta)$

Questo sistema ha in particolare due punti di equilibrio:

$$x_{e1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

STABILITÀ ASINTOTICA

$$x_{e2} = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$$

EQUILIBRIO INSTABILE

Si tratta di due situazioni di equilibrio completamente diverse tra loro: in effetti, non ha senso parlare di stabilità nel caso di sistemi non lineari.

↪ ce siamo riferiti alla stabilità lineare: è quest'ultimo il focus della trattazione.

In un sistema lineare tutti i punti di equilibrio hanno le stesse proprietà di stabilità.

Infatti, dato il sistema $\dot{x} = Ax$ e dato $\bar{x} := x - x_e$:

$$\dot{\bar{x}} = \dot{x} - \dot{x}_e = \dot{x} = Ax = Ax - Ax_e = A(x - x_e) = Az \rightarrow$$

Ciò in pratica significa che un sistema stabile che ha condizioni iniziali "vicine" a un punto di equilibrio rimarranno nei pressi di x_e (stabilità).

Dopo
sono

IMPORTANTE: Se un sistema lineare è asintoticamente stabile \Rightarrow solo $x_0 = 0$ è un punto di equilibrio.

\Rightarrow E, COME SAPIAMO, $\|x(t)\| \rightarrow$ ORIGINE PER $t \rightarrow \infty$ QUASI SIA LA CONDIZIONE INIZIALE.

\hookrightarrow PER QUESTO MOTIVO SI DICE CHE LA STABILITÀ ASINTOTICA DELL'ORIGINE È SEMPRE GLOBALE

28/04/2021

Abbiamo visto che, per stabilire se un sistema lineare è stabile esternamente / interamente / asintoticamente, è necessario analizzare le radici di un polinomio.

Tuttavia, non sempre è facile scomporre un polinomio, per cui potrebbe essere necessario ricorrere a un approccio alternativo per vedere se le sue radici hanno parte reale positiva, negativa o nulla.

Criterio di Routh:

Analizzeremo in realtà una versione semplificata del criterio di Routh, che permette semplicemente di stabilire se le radici di un dato polinomio hanno tutte la parte reale strettamente negativa oppure no.

Per vedere come funziona, scriviamo direttamente un esempio:

$$p(s) = 4s^4 + 3s^3 + 5s^2 + 2s + 1$$

TUTTI i coefficienti del polinomio sono STRETTAMENTE positivi \Rightarrow

\Rightarrow c'è speranza che tutte le radici abbiano parte reale strettamente negativa.

Costruiamo la seguente tabella:

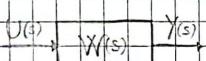
4	5	1	
3	2		$= -\frac{1}{3} \det \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$
$\frac{7}{3}$	1		$= -\frac{1}{3} \det \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$
$\frac{5}{4}$			$= -\frac{3}{4} \det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ \frac{7}{3} & 1 \end{bmatrix}$
1			$= -\frac{1}{5} \det \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & 1 \\ \frac{5}{4} & 0 \end{bmatrix}$

← Volevo di anche possibile indicare / dividere un'intera riga della tabella per un coefficiente positivo per semplificare i calcoli.

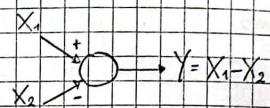
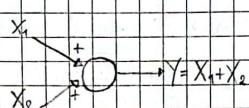
Dobbiamo guardare ora tutti gli elementi della prima colonna della tabella: poiché sono tutti strettamente positivi, tutte le radici di $p(s)$ hanno parte reale strettamente negativa.

29/04/2021

Elementi degli schemi a blocchi:

• Blocco  dove $W(s)$ = funzione di trasferimento del blocco

• Nodo sommatore

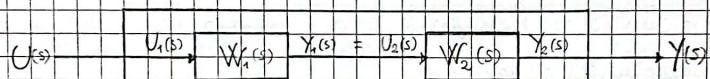


• Punto di prelievo



Regole di composizione dei sistemi:

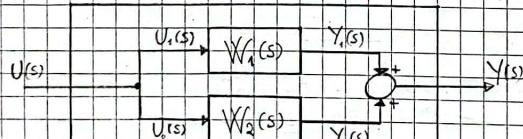
• Cascata (o serie)



$$Y(s) = Y_2(s) = W_2(s)U(s) = W_2(s)Y_1(s) = W_2(s)W_1(s)U(s) = \underbrace{W_2(s)W_1(s)}_{W(s)}U(s)$$

$$\Rightarrow W(s) = W_2(s)W_1(s)$$

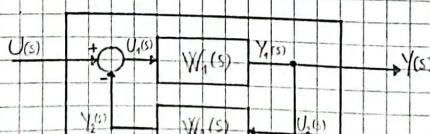
• Parallello



$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) = W_1(s)U(s) + W_2(s)U(s) = W_1(s)U(s) + W_2(s)U(s) = \underbrace{(W_1(s) + W_2(s))}_{W(s)}U(s)$$

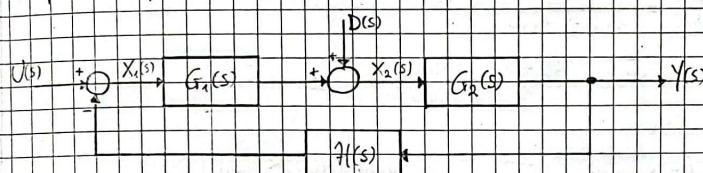
$$\Rightarrow W(s) = \{W_1(s) + W_2(s)\}$$

• Controllate anche



$$\begin{aligned}
 Y(s) &= Y_1(s) = W_1(s) U_1(s) = W_1(s)(U(s) - Y_2(s)) = W_1(s)(U(s) - W_2(s) U_2(s)) = \\
 &= W_1(s)(U(s) - W_2(s) Y(s)) = W_1(s) U(s) - W_1(s) W_2(s) Y(s) \\
 \Rightarrow Y(s) + W_1(s) W_2(s) Y(s) &= W_1(s) U(s) \Rightarrow (1 + W_1(s) W_2(s)) Y(s) = W_1(s) U(s) \\
 \Rightarrow Y(s) &= \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s) W_2(s)} U(s) \quad \Rightarrow \quad W(s) = \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s) W_2(s)}
 \end{aligned}$$

Esempio di composizione tipo:



Vogliamo scrivere l'uscita $Y(s)$ nella seguente forma: $Y(s) = W_{uy}(s) U(s) + W_{dy}(s) D(s)$

$$Y = G_2 X_2 = G_2(D + G_1 X_1) = G_2 D + G_2 G_1 (U - H Y) = G_2 D + G_2 G_1 U - G_2 G_1 H Y$$

$$\Rightarrow Y + G_2 G_1 H Y = G_2 D + G_2 G_1 U$$

$$\Rightarrow Y = \frac{G_2}{1 + G_2 G_1 H} D + \frac{G_2 G_1}{1 + G_2 G_1 H} U$$

PRODOTTO TRA LE FUNZIONI DI TRASFERIMENTO CHE SI TROVANO NEL COLLEGAMENTO DIRETTO TRA U E Y (ANALOGAMENTE PER LA PRIMA FRAZIONE)
 I DUE DENOMINATORI SONO uguali e sono della forma
 1 + PRODOTTO TRA TUTTE LE FUNZIONI DI TRASFERIMENTO

Effetti della connessione di sistemi:

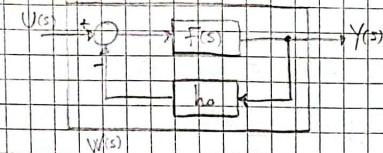
Supponiamo che ogni blocco sia raggiungibile e osservabile (comunque sia, se così non fosse, affinché il sistema sia trattabile, la parte non raggiungibile e/o non osservabile deve essere stabile asintoticamente). Cosa accade quando si compongono sistemi?

• Connessione in serie

$$(s) \quad \boxed{\rightarrow W_1(s) \rightarrow W_2(s) \rightarrow} \quad W_1(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)} \quad W_2(s) = \frac{N_2(s)}{D_2(s)}$$

$W(s) = W_1(s) W_2(s) \rightarrow$ Se non ci sono cancellazioni tra $N_1(s)$ e $D_1(s)$, né tra $N_2(s)$ e $D_2(s)$, allora anche $W(s)$ rappresenta completamente il sistema complessivo; altrimenti, si ha perdita di raggiungibilità e/o osservabilità.

• Connessione in controllazione istantanea \rightarrow Il termine "istantanea" si riferisce al fatto che la funzione di trasferimento non dipende da s .



Supponiamo che $F(s)$ rappresenti completamente il sistema e sia strettamente propria.

QUESTA IPOTESI SERVE AD ASSICURARCI CHE IL SISTEMA SIA "BEN CONNESSO".

PER CAPIRE MEGLIO QUESTO, SUPONIAMO CHE $F(s)$ SIA PROPRIA MA NON STRETTAMENTE.

$$F = \frac{N_F}{D_F} + D \quad \text{con} \quad \text{grado}(N_F) < \text{grado}(D_F)$$

$$\Rightarrow W(s) = \frac{F}{1+h_0 F} = \frac{\frac{N_F}{D_F} + D}{1 + h_0 \frac{N_F}{D_F} + h_0 D}$$

$$\text{Se } 1+h_0 D = 0 \Rightarrow W(s) = \frac{\frac{N_F}{D_F} + D}{h_0 \frac{N_F}{D_F}} = \frac{N_F + D \cdot D_F}{h_0 N_F} \quad \text{NON È PROPRIA}$$

Possiamo dunque scrivere $F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ con $\text{grado}(N(s)) < \text{grado}(D(s))$ e $N(s), D(s)$ primi tra loro.

Sotto queste ipotesi, anche il sistema completo (in controllazione istantanea) è del tutto raggiungibile e osservabile. Infatti:

$$W(s) = \frac{F}{1+h_0 F} = \frac{N/D}{1+h_0 N/D} = \frac{N}{D+h_0 N}$$

Iniziatelli notiamo che il grado di $D+h_0 N$ è uguale al grado di D .

La cosa ci rassicura poiché h_0 non dipende da s e dunque non può aumentare la dimensione dello spazio di stato del sistema originario $F(s)$.

Di conseguenza, se non si hanno semplificazioni tra il numeratore e il denominatore di $W(s)$, abbiamo provato che effettivamente $W(s)$ rappresenta tutto il sistema in controllazione istantanea.

Supponiamo per assurdo che esiste una semplificazione tra N e $D+h_0 N$, per cui:

$$N(s) = (s-p) P(s)$$

$$D+h_0 N = (s-p) Q(s)$$

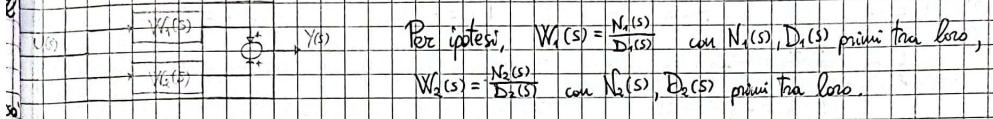
$$\Rightarrow D(s) = (s-p) Q(s) - h_0 N(s) = (s-p) Q(s) - h_0 (s-p) P(s) = (s-p) R(s)$$

$$\text{con } R(s) := Q(s) - h_0 P(s)$$

Ma in questo modo viene violata l'ipotesi secondo cui $N(s), D(s)$ sono primi tra loro \Rightarrow ASSURDO \Rightarrow la funzione di trasferimento $W(s)$ deve necessariamente non avere semplificazioni, rappresentando così l'intero sistema in controllazione.

• 01/05/2021

• Connessione in parallelo



$$W(s) = W_1(s) + W_2(s) = \frac{N_1(s)D_2(s) + N_2(s)D_1(s)}{D_1(s)D_2(s)}$$

Proviamo che si ha una semplificazione nella $W(s) \iff W_1(s), W_2(s)$ hanno uno o più poli in comune.

$$\iff \text{Se } D_1 = (s-p)\hat{D}_1, \quad D_2 = (s-p)\hat{D}_2$$

$$\Rightarrow W = \frac{N_1(s-p)\hat{D}_2 + N_2(s-p)\hat{D}_1}{(s-p)^2 \hat{D}_1 \hat{D}_2} = \frac{N_1 \hat{D}_2 + N_2 \hat{D}_1}{(s-p)\hat{D}_1 \hat{D}_2}$$

\Rightarrow Sia $(s-p)$ il fattore comune tra numeratore e denominatore di $W(s)$ e, senza perdita di generalità, si assuma che sia un polo di $W_1(s)$: $D_1(s) = (s-p)\hat{D}_1(s)$. Per avere una semplificazione, $(s-p)$ deve essere un fattore anche del denominatore di $W(s)$:

$$\text{Ora, } D_1(s)|_{s=p} = 0, \text{ per cui } N_1(s)\hat{D}_2(s) + N_2(s)\hat{D}_1(s)|_{s=p} = N_1(s)\hat{D}_2(s)|_{s=p} = 0$$

Poiché $N_1(s), D_1(s)$ sono primi tra loro, abbiamo che $N_1(s)|_{s=p} \neq 0$, per cui $\hat{D}_2(s)|_{s=p} = 0$, ovvero $\hat{D}_2(s) = (s-p)\hat{\tilde{D}}_2(s) \Rightarrow p$ è anche un polo di $W_2(s)$.

In conclusione, nella connessione in parallelo, si ha perdita di raggiungibilità e osservabilità $\iff W_1(s), W_2(s)$ hanno uno o più poli in comune.

Esempio:

Consideriamo due sistemi lineari e stazionari S_1, S_2 con funzione di trasferimento rispettivamente:

$$W_1(s) = \frac{1}{s-1} \quad W_2(s) = \frac{s-1}{s+1}$$

Ricaviamo innanzitutto una rappresentazione ISU (in particolare la forma canoneca di controllore) dei due sistemi:

$$1) \quad A_1 = 1$$

$$B_1 = 1$$

$$C_1 = 1$$

$$D_1 = 0$$

$$\Rightarrow S_1: \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + u_1 \\ y_1 = x_1 \end{cases}$$

$$2) A_2 = -1 \quad B_2 = 1$$

$$C_2 = -2$$

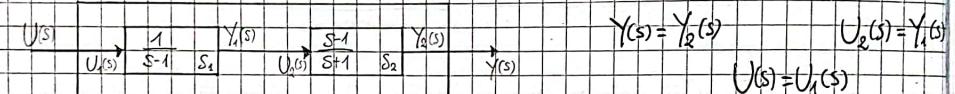
$$D_2 = 1$$

$$\Rightarrow S_2: \begin{cases} \dot{x}_2 = -x_2 + u_2 \\ y_2 = -2x_2 + u_2 \end{cases}$$

Vogliamo studiare gli effetti della connessione serie fra i due sistemi: la funzione di trasferimento complessiva comporta una semplificazione del fattore $s-1$ ed è data da

$$W(s) = W_1(s)W_2(s) = \frac{1}{s-1} \cdot \frac{s+1}{s+1} = \frac{1}{s+1}$$

CANCELLAZIONE polo-zero:



La rappresentazione LSU del sistema complessivo sarà data da:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + u_1 = x_1 + u \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u_2 = -x_2 + y_1 = x_1 - x_2 \\ y = y_2 = -2x_2 + u_2 = -2x_2 + y_1 = x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

Facendo l'analisi modale, notiamo che:

$$\triangleright \lambda_1 = -1 \quad w_1 = [0, -0.5]^T$$

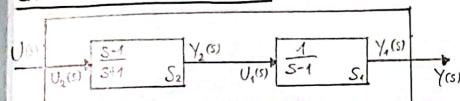
$$\triangleright \lambda_2 = 1 \quad w_2 = [1, 0.5]^T$$

$$\Rightarrow T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \Rightarrow T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow V_1^T = [1, -2] \quad V_2^T = [1, 0]$$

$V_1^T B = 1$; $V_2^T B = 1 \Rightarrow$ entrambi i modi sono eccitabili con impulsi dall'ingresso.
 $Cw_1 = 1$; $Cw_2 = 0 \Rightarrow$ il modo relativo a $\lambda_2 = 1$ non è osservabile.

Questo è un fatto del tutto generale: con la cancellazione polo-zero, si perde parte dell'osservabilità del sistema.

CANCELLAZIONE ZERO-POLO:



$$Y(s) = Y_1(s)$$

$$U_1(s) = Y_2(s)$$

$$U(s) = U_2(s)$$

La rappresentazione ISU del sistema complessivo sarà data da:

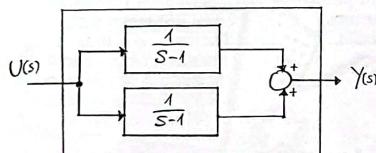
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + u_1 = x_1 + y_2 = x_1 - 2x_2 + u_2 = x_1 - 2x_2 + u \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u_2 = -x_2 + u \\ y = y_1 = x_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 0] \quad D = 0$$

Stavolta, facendo l'analisi matrice, giungiamo alla conclusione per cui, con la cancellazione zero-polo, si perde parte della raggiungibilità del sistema.

Esempio:

Riprendendo la funzione di trasferimento $W_1(s) = \frac{1}{s-1}$ dell'esercizio precedente, consideriamo la seguente connessione in parallelo:



La rappresentazione ISU del sistema complessivo sarà data da:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + u \\ \dot{x}_2 = x_2 + u \\ y = x_1 + x_2 \end{cases}$$

Applichiamo il seguente cambiamento di coordinate: $z_1 = x_1 - x_2$; $z_2 = x_1 + x_2$.

Ottieniamo così il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \dot{x}_1 - \dot{x}_2 = x_1 - x_2 = z_1 \\ \dot{z}_2 = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + 2u = z_2 + 2u \\ y = z_2 \end{cases} \quad u \rightarrow \begin{array}{c} z_1 \\ z_2 \end{array} \rightarrow y \quad \left. \begin{array}{l} \text{SI VEDA COME IL BLOCCETTO } z_1 \text{ NON} \\ \text{SIA NE RAGGIUNGIBILE NE OSSERVABILE} \end{array} \right)$$

Questo è un fatto del tutto generale: ogni volta che si hanno semplificazioni nella funzione di trasferimento relativa alla connessione parallelo, si perde sia la raggiungibilità che l'osservabilità di una parte del sistema.

03/05/2021

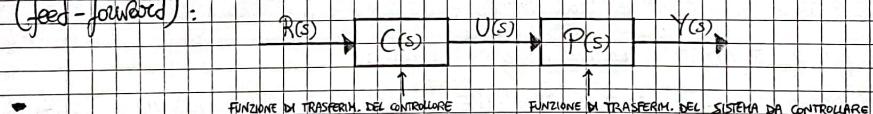
Il problema del controllo:

Dato un sistema con funzione di trasferimento $P(s)$, si vuole costruire un controllore (cioè un oggetto fisico che effettui la scelta dell'ingresso u) che assicuri le seguenti specifiche:

- La STABILITÀ ASINTOTICA del sistema complessivo.
- Un buon INSEGUIMENTO da parte dell'uscita $y(t)$ di un segnale di riferimento $r(t)$ assegnato in termini di:
 - i) PRECISIONE: l'uscita $y(t)$ a regime deve essere il più possibile vicina a $r(t)$.
 - ii) TRANSITORIO: la convergenza di $y(t)$ verso $r(t)$ deve essere sufficientemente rapida e presentare oscillazioni il più possibile contenute rispetto al riferimento.

Controllo a catena aperta:

Un possibile schema di controllo per ottenere questo scopo è quello a catena aperta (feed-forward):



Teoricamente, se riuscissimo a progettare un controllore tale che $C(s) = \frac{1}{P(s)}$, sarebbe fantastico, poiché otterremmo che: $Y(s) = P(s)C(s)R(s) = R(s)$, il che vuol dire che l'uscita sarebbe identicamente uguale al segnale di riferimento (=al comportamento desiderato) in qualunque istante temporale.

Tuttavia, in generale, questo tipo di controllo è inapplicabile per variati motivi:

- Se $P(s)$ è strettamente propria $\Rightarrow C(s) = \frac{1}{P(s)}$ è mai realizzabile. L'unico modo consisterebbe nel progettare un controllore con $C(s) = \frac{1}{P(s)} \cdot \frac{1}{(s-p_1)(s-p_2)\dots}$, dove p_1, p_2, \dots sono poli di $C(s)$ che contribuiscono a rendere propria la frazione e che possibilmente hanno parte reale strettamente negativa (in modo tale che i loro effetti diventino trascurabili in tempi ragionevolmente brevi).

↳ TUTTO SOMMATO, QUESTO È IL MINORE DEI MALE.

• Se $P(s)$ ha poli con parte reale maggiore o uguale a zero e, quindi, è relativa a un sistema non asintoticamente stabile, tramite il feed-forward non è possibile progettare un controllore che ci renda il sistema asintoticamente stabile come richiesto dalle specifiche. Infatti:

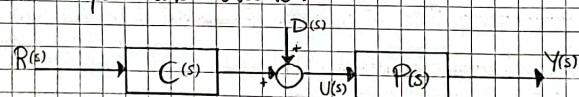
→ Se $C(s)$ non semplifica i fattori relativi ai poli di $P(s)$ con parte reale maggiore o uguale a zero, la funzione di trasferimento $P(s)C(s)$ risultante presenterà anche questi poli, per cui non può descrivere un sistema asintoticamente stabile.

→ Se invece $C(s)$ semplifica i fattori relativi ai poli di $P(s)$ con parte reale maggiore o uguale a zero, la funzione di trasferimento $P(s)C(s)$ risultante presenterà solo poli con parte reale strettamente negativa. Tuttavia, anche se non sembra, così è un disastro, poiché le porte non asintoticamente stabile del sistema non solo rimane, ma viene resa non raggiungibile ed non osservabile.

• Solo se $P(s)$ è la funzione di trasferimento di un sistema asintoticamente stabile lo schema può essere applicato, ma con i seguenti limiti:

→ Non possiamo mai conoscere ESATTAMENTE l'espressione della funzione di trasferimento del sistema da controllare: infatti, abbiamo sempre una $P(s)$ nominale e una $\tilde{P}(s) \neq P(s)$ reale. Questo ha come conseguenza che, nella realtà, un controllore tale che $C(s) = 1/P(s)$ non produce una risposta $Y(s) = R(s)$.

→ Eventuali disturbi contribuiscono a loro volta a generare una risposta $Y(s)$ che si discosta dal comportamento desiderato.



Controllo a catena chiusa:

È uno schema di controllo basato sulla sommazione in controazione (feedback). Orvia per quanto possibile ai problemi del controllo a catena aperta perché qui l'azione

ESEMPPIO STORICO: REGOLATORE DI VATT

di controllo si basa sull'osservazione dell'uscita:

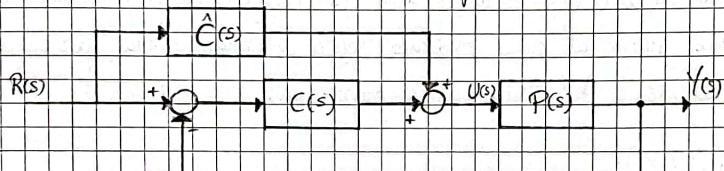


$$E(s) = R(s) - Y(s)$$

= ERRORE = differenza
tra valore desiderato e
quello vero

Sistema di controllo misto:

È uno schema di controllo che presenta sia una catena aperta, sia una catena chiusa
e ha i vantaggi di entrambi gli schemi descritti precedentemente:



- $\hat{C}(s)$ → RELATIVO ALLA CATENA APERTA → ad esempio, può migliorare le prestaz. del sistema.
- $\hat{C}(s)$ → RELATIVO ALLA CATENA CHIUSA → rende il sistema robusto.

Tornando al controllo a catena chiusa, possiamo osservare che permette di ottenere
un sistema asintoticamente stabile anche partendo da una $P(s)$ relativa a un sistema
non asintoticamente stabile, e anche non semplificando i fattori relativi ai poli di
 $P(s)$ maggiori o uguali a zero:

$$W = \frac{P_C}{1+P_C} = \frac{\frac{N_p}{D_p} \cdot \frac{N_c}{D_c}}{1 + \frac{N_p \cdot N_c}{D_p \cdot D_c}} = \frac{N_p N_c}{D_p D_c + N_p N_c}$$

È UN POLINOMIO COMPLETAMENTE DIVERSO DAL DENOMINATORE
di $P(s)$ (D_p), PER CUI LE RADICI SONO DIVERSE DA QUELLE DI D_p
SCEGLIENDO APPROPRIATAMENTE LA $C(s)$, È POSSIBILE OTTENERE
UNA $W(s)$ COMPLESSIVA CON SOLO POLI CON PARTE REALE STRETTOAM
NEGATIVA (= SISTEMA ASINTOTICAMENTE STABILE) INDEPENDENTEMENTE DA COM'È FATTA $P(s)$.

04/05/2021

Noi utilizzeremo per lo più schemi feedback. Ma quale blocco di controllo $C(s)$
ci mettiamo?

Regolatore Standard (PID):

È un regolatore in cui $C(s)$ comprende una combinazione tra le seguenti possibili azioni di controllo:

- PROPORZIONALE (P / K_p):

$$U(s) = K_p E(s) = K_p [R(s) - Y(s)] \rightarrow \text{NEL TEMPO: } u(t) = K_p [r(t) - y(t)]$$

$$\Rightarrow C(s) = K_p$$

L'effetto di questa azione di controllo è quello di una molla: di fatto, richiama l'uscita $Y(s)$ verso il riferimento $R(s)$, il quale rappresenta il punto di equilibrio.

Questo, però, ha come conseguenza il fatto che $Y(s)$ oscilla perpetuamente con una legge armonica intorno al punto desiderato, senza soffermarsi mai, per cui un controllore caratterizzato dalla sola azione proporzionale non è buono.

- DERIVATIVA (D / K_d):

$$U(s) = K_d s E(s) = K_d s [R(s) - Y(s)] \rightarrow \text{NEL TEMPO: } u(t) = K_d \frac{1}{t} [r(t) - y(t)]$$

$$\Rightarrow C(s) = K_d s$$

L'effetto di questa azione di controllo è il seguente:

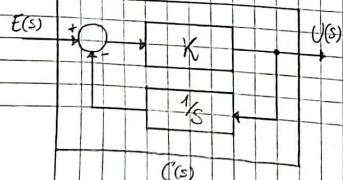
• Se la funzione $R(s) - Y(s)$ sta decrescendo, viene applicata una forza con verso negativo.

• Se la funzione $R(s) - Y(s)$ sta crescendo, viene applicata una forza con verso positivo.

• Se il sistema è in quiete, l'azione derivativa non agisce più.

In ognuno di questi casi, quello che fa l'azione derivativa è "oporsi al movimento": per esempio, in un sistema meccanico è assimilabile a un attrito viscoso.

NB: $C(s) = K_d s$ è una funzione non propria, per cui rappresenta un controllore non fisicamente realizzabile. Ciò che si può fare è approssimarla col seguente schema:



$$C(s) = \frac{K}{1 + \frac{1}{s}} = \frac{Ks}{s + 1}$$

K "grande" → s

O

Co

y(t)

Esistono dei casi in cui l'azione proporzionale e quella derivativa da sole non bastano.
Per convincersi di questo, utilizziamo l'esempio del carrello e assumiamone di trovarci su un piano inclinato:

$$U_p = K_p(r-y) \rightarrow \text{il carrello è in equilibrio quando } U_p \text{ bilancia perfettamente la forza peso. Però, fissata la costante } K_p, \text{ si ha equilibrio per un certo errore } r-y. (\text{che deve essere non nullo, altrimenti agirebbe solo la forza peso e il carrello se ne andrebbe giù!})$$

Una cosa che si potrebbe fare è aumentare K_p in modo che la forza U_p sia in grado di bilanciare la forza peso per errori $r-y$ più piccoli. Tuttavia, oltre al fatto che l'errore non può essere mai identicamente nullo, si aggiunge il problema per cui una K_p troppo elevata provoca delle oscillazioni eccessivamente forti nel transitorio, il che è indice di un cattivo controllore.

- INTEGRALE (I / K_I):

$$U(s) = \frac{K_I}{s} E(s) = \frac{K_I}{s} [R(s) - Y(s)] \rightarrow \text{NELL'TEMPO: } U(t) = K_I \int_0^t [r(\tau) - y(\tau)] d\tau$$

$$\Rightarrow C(s) = \frac{K_I}{s}$$

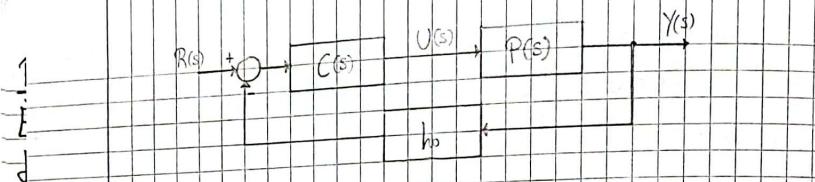
Questa azione di controllo garantisce l'annullamento dell'errore anche nel caso del piano inclinato dell'esempio precedente. Tuttavia, come per l'azione proporzionale, bisogna essere attenti nel non scegliere una K_I troppo elevata onde evitare eccessive oscillazioni nel transitorio.

A seconda del tipo di sistema e di problema, si può scegliere una qualsiasi combinazione delle azioni precedenti (ma di base quella proporzionale c'è sempre). Se le consideriamo tutte e tre, si ottiene un controllore PID in cui $C(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s$.

Il settaggio dei parametri può ad esempio essere fatto con delle tecniche dette di Ziegler-Nichols (che non vedremo in questo corso), che si basano su prove sperimentali condotte sul sistema senza la necessità di conoscere la funzione di trasferimento $P(s)$.

05/05/2021

Consideriamo il seguente schema di controllo a controazione, in cui l'uscita $y(t)$ viene rilevata da un sensore che la restituisce moltiplicata per una costante $h_0 \in \mathbb{R}$:



- Vogliamo studiare tecniche per valutare l'asintotica stabilità del sistema complessivo (ANALISI) e per progettare una legge di controllo $C(s)$ che soddisfi le specifiche (SINTESI).
- In particolare, faremo riferimento a metodi basati sulla risposta in frequenza.

Risposta armonica di un sistema lineare asintoticamente stabile:

$$U(s) \rightarrow F(s) \rightarrow Y(s) \quad F(s) \text{ presenta esclusivamente poli con parte reale strettamente negativa.}$$

Se $u(t) = \cos(\omega t) \delta_+(t) \Rightarrow$ a regime $y(t) = M(\omega) \cos[\omega t + \varphi(\omega)] \delta_+(t)$

DIMOSTRAZIONE:

$$Y(s) = Y_r(s) + Y_f(s)$$

della risposta libera non ci preoccupiamo poiché a regime convergerà a zero a causa dell'asintotica stabilità.

$$Y_f(s) = F(s) U(s) = F(s) \frac{s}{s^2 + \omega^2} = \sum_{\text{POLI DI } F(s)} [\dots] + \frac{\alpha}{s - j\omega} + \frac{\alpha^*}{s + j\omega} \stackrel{j \in \mathbb{R}}{=} Y_r(s)$$

QUESTI TERMINI A REGIME CONVERGERANNO A ZERO SEMPRE A CAUSA DELL'ASINTOTICA STABILITÀ DEL SISTEMA

$$\alpha = \lim_{s \rightarrow j\omega} (s - j\omega) Y_f(s) = \lim_{s \rightarrow j\omega} (s - j\omega) F(s) \frac{s}{(s + j\omega)(s - j\omega)} = F(j\omega) \frac{j\omega}{2j\omega} = \frac{1}{2} F(j\omega)$$

► COEFFICIENTE DEI FRATTI SEMPLICI: $\alpha = M e^{j\varphi}$

► POLO: $p = \beta + j\omega = j\omega \Rightarrow \beta = 0$

$$\Rightarrow y_r(t) = 2M e^{j\omega t} \cos(\omega t + \varphi) \delta_+(t) = 2M \cos(\omega t + \varphi) \delta_+(t)$$

dove $M = |\alpha| = \frac{1}{2} |F(j\omega)|$; $\varphi = \angle \alpha = \arg F(j\omega)$

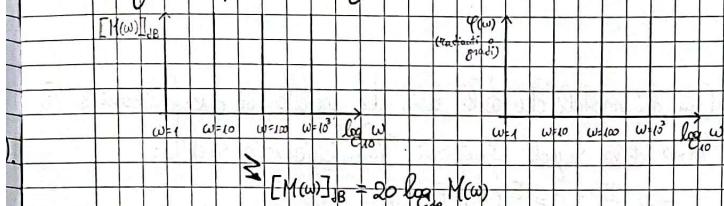
Posto $F(j\omega) := M(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$ $\Rightarrow M = \frac{1}{2} |F(j\omega)| = \frac{1}{2} M(\omega)$; $\varphi = \varphi(\omega)$

$$\Rightarrow y_r(t) = M(\omega) \cos[\omega t + \varphi(\omega)] \delta_+(t)$$

Vediamo ora come vengono graficate le funzioni $M(\omega)$, $\varphi(\omega)$.

Diagrammi di Bode:

Sono diagrammi fatti nel seguente modo:



Poiché $F(j\omega)$ è una funzione in cui i coefficienti e le costanti sono reali, si ha che:

$$[F(j\omega)]^* = F(-j\omega)$$

$$\text{Ma } F(j\omega) = M(\omega) e^{j\varphi(\omega)} \Rightarrow [F(j\omega)]^* = M(\omega) e^{-j\varphi(\omega)}$$

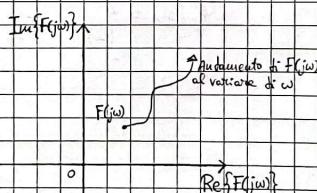
$$\left| \begin{array}{l} F(-j\omega) = M(-\omega) e^{j\varphi(-\omega)} \\ \varphi(-\omega) = -\varphi(\omega) \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} M(-\omega) = M(\omega) \\ \varphi(-\omega) = -\varphi(\omega) \end{array} \right. \rightarrow \begin{array}{l} \text{PARI} \\ \text{DISPARI} \end{array}$$

NB: I diagrammi di Bode, in realtà, possono essere tracciati per qualunque sistema lineare, anche per quelli non assiomaticamente stabili.

Diagramma polare:

QUELLO CHE SI FA COL DIA
GRAMMA POLARE È TRACCIARE
IL PERCORSO DI $F(j\omega)$ SUL PIA
NO COMPLESSO PER ω CHE VA DA
 $-\infty$ A $+\infty$.

ADICHE' $M(\omega)$ È PARI E $\varphi(\omega)$ È
DISPARI, $F(j\omega)$ E $F(-j\omega)$ SONO
SEMPRE SIMMETRICI RISPETTO
ALL'ASSE REALE, PER CUI È SUFF
ICIENTE DISegNARE IL DIAGRAM
MA PER $\omega < 0$ PER POI SPEC
CHIARO SULL'ASSE REALE.



NB: IL DIAGRAMMA POLARE SI TRACCIA DOPO I DIAGRAMMI DI BODE

Per tracciare il diagramma di Bode di una funzione $F(s)$, questa va portata nella
seguente forma:

$$F(s) = K \frac{(1 \pm T_1 s)(1 \pm T_2 s) \dots}{s^m (1 \pm T_1 s)(1 \pm T_2 s) \dots}$$

COEFFICIENTE DI GUADAGNO

Allora ci saranno le radici
sulle tutte le cui

1 Esempio:

$$F(s) = \frac{s+2}{(s+3)(s+4)} = \frac{2\left(1+\frac{s}{2}\right)}{3\cdot 4 \left(1+\frac{s}{3}\right)\left(1+\frac{s}{4}\right)} = \frac{1}{6} \frac{\left(1+s\tau_{m1}\right)}{\left(1+s\tau_{d1}\right)\left(1+s\tau_{d2}\right)}$$

n
7

$$\tau_{m1} = \frac{1}{2}, \quad \tau_{d1} = \frac{1}{3}, \quad \tau_{d2} = \frac{1}{4}$$

d) PROPRIETÀ FONDAMENTALE:

- Il diagramma di Bode (sia dei moduli che delle fasi) del prodotto di due funzioni è la somma dei diagrammi di Bode delle singole funzioni. Verifichiamolo subito:

Sia $F(s) = F_1(s)F_2(s) \Rightarrow F(j\omega) = F_1(j\omega)F_2(j\omega)$
 con $F_1(j\omega) = M_1(\omega)e^{j\varphi_1(\omega)}, \quad F_2(j\omega) = M_2(\omega)e^{j\varphi_2(\omega)}$

$$\Rightarrow F(j\omega) = M_f(\omega)e^{j\varphi_f(\omega)}$$

$$\text{con } M_f(\omega) = M_1(\omega)M_2(\omega) \Rightarrow [M_f(\omega)]_{dB} = [M_1(\omega)]_{dB} + [M_2(\omega)]_{dB}$$

$$\varphi_f(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega)$$

- Diagrammi di Bode e polar: di alcune funzioni di uso comune:

1) $F(s) = K \Rightarrow F(j\omega) = K \Rightarrow$

$$\Rightarrow M_f(\omega) = |K|; \quad \varphi_f(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{se } K > 0 \\ -\pi & \text{se } K < 0 \end{cases}$$

DIAGRAMMA DEI MODULI:

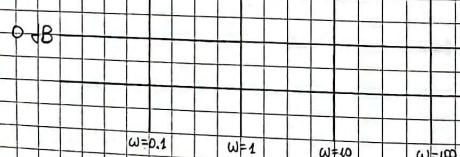


DIAGRAMMA DELLE FASI:

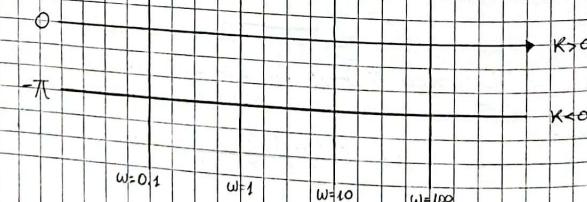
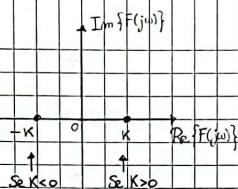


DIAGRAMMA POLARE:



la

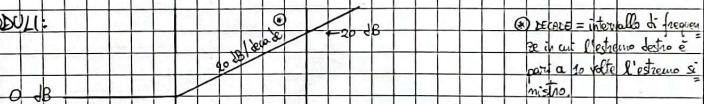
$$2) F(s) = 1 + s\tau \Rightarrow F(j\omega) = 1 + j\omega\tau \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M(\omega) = |F(j\omega)| = \sqrt{1 + (\omega\tau)^2}; \quad \varphi(\omega) = \angle F(j\omega) = \operatorname{atan} 2(\omega\tau, 1) = \operatorname{atan}(\omega\tau)$$

Lo studio di funzione di $M(\omega)$, $\varphi(\omega)$ non è immediato, per cui quello che si fa è tracciare dei diagrammi approssimati basati sull'andamento di $M(\omega)$, $\varphi(\omega)$ per $\omega \ll \frac{1}{\tau}$ e per $\omega \gg \frac{1}{\tau}$.

- $\omega \ll \frac{1}{\tau} \Rightarrow \omega\tau \ll 1 \Rightarrow M(\omega) = \sqrt{1 + (\omega\tau)^2} \approx 1 \Rightarrow [M(\omega)]_{dB} \approx 0 \text{ dB}$
- $\omega \gg \frac{1}{\tau} \Rightarrow \omega\tau \gg 1 \Rightarrow M(\omega) = \sqrt{1 + (\omega\tau)^2} \approx \omega\tau \Rightarrow [M(\omega)]_{dB} \approx 20 \log_{10}(\omega\tau)$
- $[H(\frac{1}{\tau})]_{dB} = 20 \log_{10}(\frac{1}{\tau} \cdot \tau) = 0 \text{ dB}; \quad [M(\frac{1}{\tau})]_{dB} = 20 \log_{10}(\frac{\omega}{\tau} \cdot \tau) = 20 \log_{10}(10) = 20 \text{ dB}$

DIAGRAMMA DEI MODULI:



- $\omega \ll \frac{1}{\tau} \Rightarrow \varphi(\omega) = \operatorname{atan}(\omega\tau) \approx \operatorname{atan}(0) = 0$
- $\omega \gg \frac{1}{\tau} \Rightarrow \varphi(\omega) = \operatorname{atan}(\omega\tau) \approx \pi/2$

DIAGRAMMA DELLE FASI:

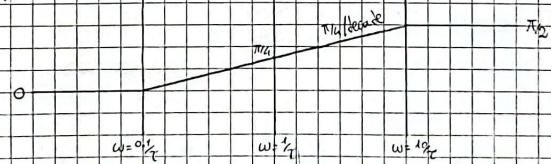
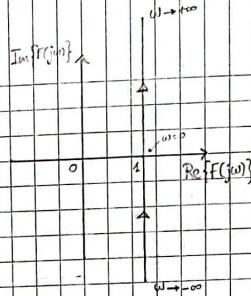


DIAGRAMMA POLARE:



$$3) F(s) = 1 - s\tau \Rightarrow F(j\omega) = 1 - j\omega\tau$$

Il diagramma dei moduli è identico a quello del caso (2).

DIAGRAMMA DELLE FASI:

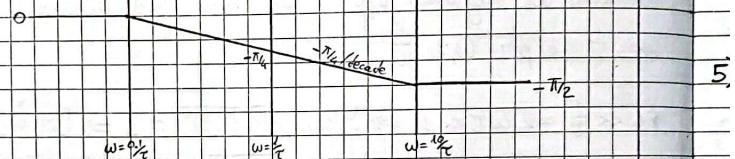
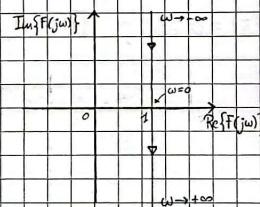


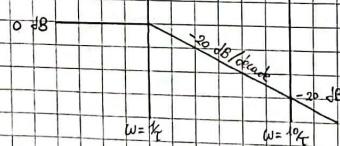
DIAGRAMMA POLARE:



$$4) F(s) = \frac{1}{1+s\tau} \Rightarrow F(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega\tau}$$

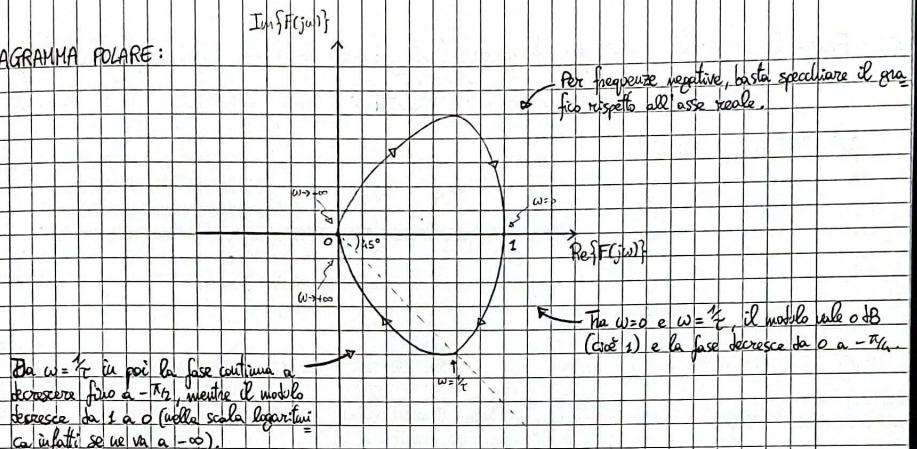
$$\text{Posto } 1+j\omega\tau = M(\omega)e^{j\phi(\omega)} \Rightarrow \frac{1}{1+j\omega\tau} = \frac{1}{M(\omega)e^{j\phi(\omega)}} = \frac{1}{M(\omega)} e^{-j\phi(\omega)}$$

DIAGRAMMA DEI MODULI:



Il diagramma delle fasi è identico a quello del caso (3).

DIAGRAMMA POLARE:



Da $\omega = \frac{1}{\omega}$ in poi la fase continua a decrescere fino a $-\pi$, mentre il modulo decresce da 1 a 0 (nella scala logaritmica cioè infatti se ω va a $-\infty$).

$$5) F(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow F(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -\frac{1}{\omega} j$$

$$\Rightarrow M(\omega) = \frac{1}{\omega} \Rightarrow [M(\omega)]_{dB} = 20 \log_{10} \frac{1}{\omega} = -20 \log_{10} \omega$$

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} \quad \forall \omega > 0$$

DIAGRAMMA DEL MODULI:

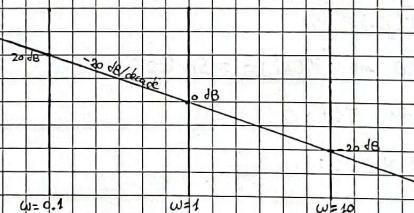
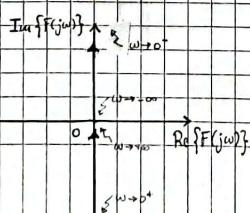


DIAGRAMMA DELLE FASI:



DIAGRAMMA POLARE:



6) $F(s) = \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s}$ \Rightarrow per disegnare i diagrammi di Bode, basta applicare la proprietà del prodotto fra funzioni.

DIAGRAMMA DEI MODULI:

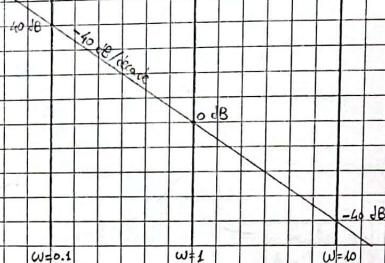


DIAGRAMMA DELLE FASI:



$$7) F(s) = s \Rightarrow F(j\omega) = j\omega$$

$$\Rightarrow M(\omega) = \omega \Rightarrow [M(\omega)]_{dB} = 20 \log_{10} \omega$$

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} \quad \forall \omega > 0$$

DIAGRAMMA DEI MODULI:

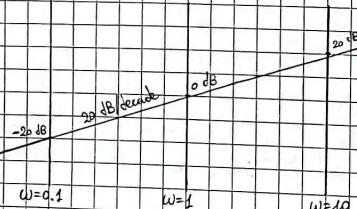
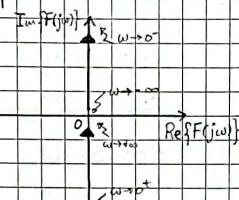


DIAGRAMMA DELLE FASI:



ta 06/05/2021

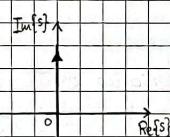
Riprendiamo il diagramma polare di $F(s) = \frac{1}{s}$:



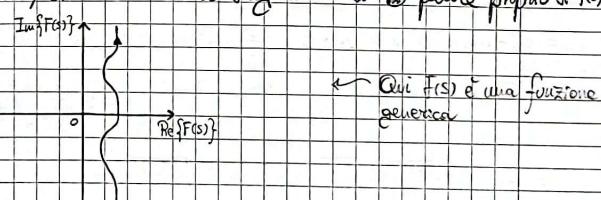
Si tratta di un diagramma polare che se ne va all'infinito (questo si verifica ogni volta che $F(s)$ presenta radici con parte reale nulla). In casi come questo, è necessario (per motivi che vedremo meglio dopo) introdurre il concetto di RAMO DI CHIUSURA ALL'INFINITO.

Chiusura all'infinito:

Consideriamo il diagramma polare di s :

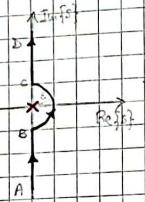


Applicando la funzione $F(s)$, otteniamo che ogni punto di s viene associato a un altro punto del piano complesso, ottenendo così il diagramma ~~di~~ plaro proprio di $F(s)$.



Tuttavia, ogni qual volta che il diagramma polare di s incappa in un polo di $F(s)$ (nell'esempio precedente in $s=0$), per quel valore di s il diagramma di ~~di~~ $F(s)$ se ne va all'infinito. Per gestire tale situazione, si effettua la seguente modifica al

Diagramma di s (noi prenderemo in esame il polo $s=0$ ma il discorso si estende a tutti i poli con parte reale nulla):

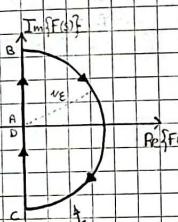


$$AB: s = j\omega, \omega \in (-\infty, -\varepsilon)$$

$$BC: s = \varepsilon e^{j\varphi}, \varphi \in (-\pi_2, \pi_2)$$

$$CD: s = j\omega, \omega \in (\varepsilon, +\infty)$$

$$\downarrow F(s) = \frac{1}{s}$$



$$AB: \frac{1}{s} = \frac{1}{j\omega} = -\frac{1}{\omega} j, \omega \in (-\infty, -\varepsilon)$$

$$BC: \frac{1}{s} = \frac{1}{\varepsilon} e^{-j\varphi}, \varphi \in (-\pi_2, \pi_2)$$

$$CD: \frac{1}{s} = -\frac{1}{\omega} j, \omega \in (\varepsilon, +\infty)$$

RATIO DI CHIUSURA DI RAGGIO $\frac{1}{\varepsilon}$: CIRCA IN SENSO ORARIO OGNI VOLTA CHE LASCIAVAMO IL POLO ALLA SINISTRA DEL DIAGRAMMA POLARE DI s È "MODIFICATO".

Se facciamo tendere ε a zero, otterremo esattamente il diagramma polare di s che avevamo tracciato in modo standard, con in più questa chiusura all'infinito che successivamente ci tornerà utile. → NB: la chiusura all'infinito è composta da tutti i mezzi giri quant'è la radice quadrata del fattore $\frac{1}{\varepsilon}$ nella f(s).

Diagrammi di Bode e polare di una funzione con radici complesse:

Consideriamo un termine quadratico $F(s) = s^2 + as + b$ con radici s_1, s_2 non reali. Allora

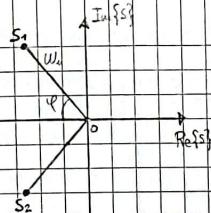
$$\Delta = a^2 - 4b < 0 \Rightarrow b > 0 \Rightarrow$$
 possiamo scrivere la $F(s)$ nella seguente forma:

$$F(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \quad \text{con} \quad \begin{cases} b = \omega_n^2 \\ a = 2\zeta\omega_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_n = \sqrt{b} \\ \zeta = \frac{a}{2\omega_n} \end{cases}$$

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{\zeta^2\omega_n^2 - \omega_n^2} = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{\zeta^2 - 1} \cdot \omega_n$$

$$\text{CONDIZIONE PER AVERE RADICI NON REALI: } |\zeta| < 1 \Rightarrow s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$|s_1|^2 = |s_2|^2 = \zeta^2\omega_n^2 + \omega_n^2(1-\zeta^2) = \omega_n^2 \Rightarrow |s_1| = |s_2| = \omega_n$$



← QUESTO È IL CASO $\zeta \in (0, i)$, IN CUI LE RADICI S_1, S_2 HANNO ENTRAMBE PARTE REALE NEGATIVA

Osservazione:

LO STESSO RAGIONAMENTO VALE PER S_2

$$\begin{aligned} \cdot \operatorname{Re}\{\zeta\}^2 &= -\omega_m \cos \varphi = -\zeta \omega_m \\ \cdot \operatorname{Im}\{\zeta\} &= \omega_m \sin \varphi = \omega_m \sqrt{1-\zeta^2} \end{aligned} \Rightarrow \zeta = \cos \varphi$$

Nel tracciare i diagrammi, in realtà, dobbiamo portare la nostra $F(s)$ nella seguente forma:

$$F(s) = 1 + \frac{2\xi}{\omega_m} s + \frac{s^2}{\omega_m^2}$$

CASO $\zeta \in (0, i)$

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= 1 + \frac{2\xi}{\omega_m} j\omega + \left(\frac{j\omega}{\omega_m}\right)^2 = \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2\right] + j \frac{2\xi\omega}{\omega_m} \\ \Rightarrow M(\omega) &= \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2\right]^2 + 4\xi^2 \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2} \\ \varphi(\omega) &= \operatorname{atan} 2\left(\frac{2\xi\omega}{\omega_m}, 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2\right) \end{aligned}$$

$$\triangleright \omega \ll \omega_m \Rightarrow M(\omega) \approx 1 \Rightarrow [M(\omega)]_{\text{dB}} \approx 0 \text{ dB}$$

$$\varphi(\omega) \approx \operatorname{atan} 2(0, z) = 0$$

$$\triangleright \omega \gg \omega_m \Rightarrow M(\omega) \approx \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2 \Rightarrow [M(\omega)]_{\text{dB}} \approx 20 \log_{10} \left[\left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2\right] = 40 \log_{10} \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)$$

$$\varphi(\omega) \approx \operatorname{atan} 2\left(\frac{2\xi\omega}{\omega_m}, -\left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2\right) \approx \pi$$

IL SECONDO ARGOMENTO DELL'ARCTAN() VA ALL'INFINITO + VELOCHEM. DEL PRIMO

$$\triangleright \omega = \omega_m \Rightarrow \varphi(\omega_m) = \operatorname{atan} 2(2\xi, 0) = \frac{\pi}{2}$$

DIAGRAMMA DEL MODULO

PER $\zeta \neq 0$:

PER $\zeta = 0$ L'APPROSSIMAZIONE
È VENUTA MACCHINALE

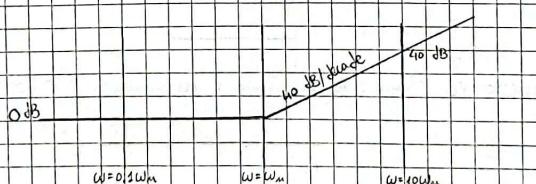


DIAGRAMMA DEI MODULI
PER $\zeta = 0$:

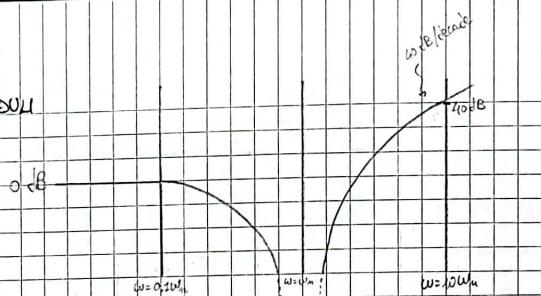


DIAGRAMMA DELLE FASI
PER $\zeta \neq 0$:

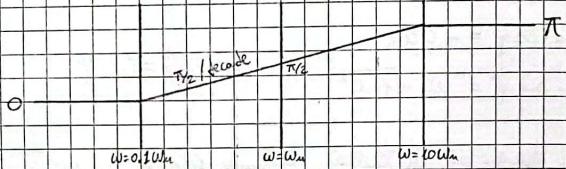
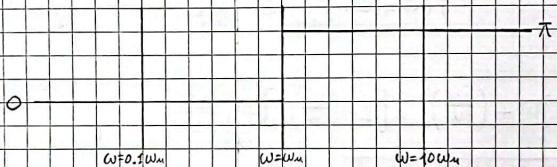


DIAGRAMMA DELLE FASI
PER $\zeta = 0$:



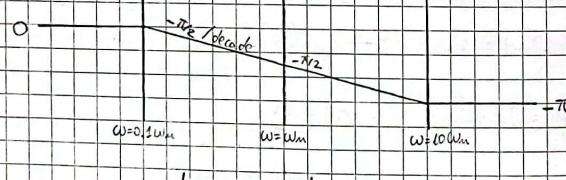
08/05/2021

CASO $\zeta \in (-1, 0)$

$$M(\omega) = \sqrt{[1 - (\frac{\omega}{\omega_m})^2]^2 + 4\zeta^2(\frac{\omega}{\omega_m})^2} \rightarrow \text{È ESATTAMENTE IDENTICO AL CASO } \zeta \in (0, 1)$$

$$\varphi(\omega) = \arctan 2 \left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_m}, 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_m} \right)^2 \right) \rightarrow \text{IL PRIMO ARGOMENTO HA SEGNO OPPOSTO RISpetto AL CASO } \zeta \in (0, 1)$$

DIAGRAMMA DELLE FASI:



Consideriamo adesso la seguente funzione (assumendo $\zeta \in (0, 1)$):

$$F(s) = \frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_m} s + \frac{s^2}{\omega_m^2}} = \frac{1}{M(\omega) e^{j\varphi(\omega)}} = \frac{1}{M(\omega)} e^{-j\varphi(\omega)}$$

$$\rightarrow \text{SAPPiamo che } 20 \log_{10} \frac{1}{M(\omega)} = -20 \log_{10} M(\omega)$$

\Rightarrow Come già sappiamo, i diagrammi di Bode di funzioni reciproche sono l'uno l'opposto dell'altro (sia per quanto riguarda i moduli sia per quanto riguarda le fasi).

DIAGRAMMA DEI MODULI
PER $\xi \neq 0$:

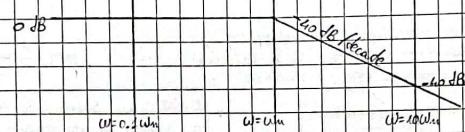


DIAGRAMMA DEI MODULI
PER $\xi = 0$:

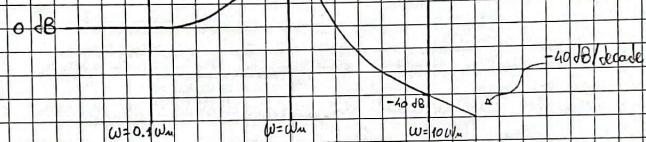


DIAGRAMMA DELLE FASI
PER $\xi \neq 0$:

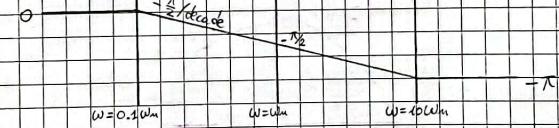


DIAGRAMMA DELLE FASI
PER $\xi = 0$:



DIAGRAMMA POLARE
PER $\xi \neq 0$:

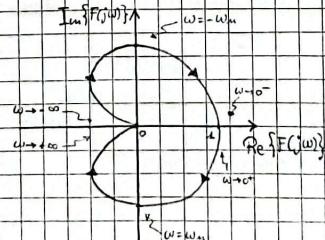


DIAGRAMMA POLARE

PER $\xi = 0$:



Notiamo che è un diagramma che va all'infinito: infatti, per $\xi = 0$, la nostra $F(s)$

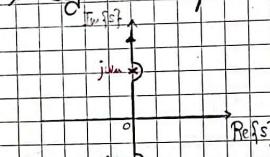
è:

$$F(s) = \frac{1}{1 + \frac{s^2}{\omega_0^2}}$$

\rightarrow I POLI SONO $s_{1,2} = \pm j\omega_0$ CHE, EVIDENTEMENTE, TE SONNO PARTE REALE NULLA.

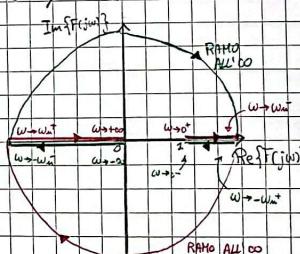
Perciò, ci occorre effettuare la seguente modifica al diagramma polare di s :

Abbiamo lasciato i poli alla sinistra della curva: ciò significa che stiamo considerando questi poli come se avessero parte reale negativa e funziona a zero. Avendo poi una parte reale negativa si è lontana oltre 90° . È questo il motivo per cui questo punto è come uno di quattro è nullo.



Questo senz'altro nel diagramma delle fasi, in cui si vede la fase varia tra 0, -π, mentre per $\omega > 0$ varia tra 0 e π.

Allora il diagramma polare per $\xi = 0$ diventerà:



Infatti vediamo come qui si tralasci i punti all'infinito girando in senso orario, con pertanto una variazione di fase di $+π$, il che è sufficientemente corretto altrimenti sarebbe altrimenti di $-π$ delle fasi per $\xi > 0$.

Criterio di Nyquist:

Consideriamo il seguente schema in catenazione:



SISTEMA COMPLESSIVO Σ

Definiamo:

$$\cdot G(s) := P(s)C(s) \rightarrow \text{GUADAGNO DELLA CATENA DIRETTA}$$

$$\cdot F(s) = h_0 P(s) \bar{C}(s) \rightarrow \text{GUADAGNO D'ANELLO O A CATENA APERTA}$$

Lo scriviamo nella seguente forma: $\frac{N(s)}{D(s)}$, in cui chiameremo n il grado di $D(s)$.

$$\cdot W(s) := \frac{P(s) / C(s)}{1 + h_0 P(s) C(s)} \rightarrow \text{FUNZIONE DI TRASFERIMENTO IN CATENA CHIUSA, CIÒE DEL SISTEMA COMPLESSIVO } \Sigma.$$

Facciamo inoltre le seguenti ipotesi:

- I blocchi $C(s)$, $P(s)$ rappresentano completamente i rispettivi sistemi e non ci sono cancellazioni tra di essi.

- La funzione $G(s)$ (e, quindi, $F(s)$) è strettamente propria, in modo tale che la matrice D sia uguale a zero e la controllatezza sia sicuramente ben connessa.

La condizione di buona connessione implica che il denominatore di $W(s)$ ha lo stesso grado n del denominatore di $F(s)$.

Teorema:

Assumiamo verificate le ipotesi appena elencate per il nostro schema in controllatezza. Sia inoltre P_0 il numero di poli con parte reale strettamente positiva di $F(s)$.

Allora il sistema complessivo Σ è asintoticamente stabile se e solo se valgono entrambe le seguenti due condizioni:

1) Il diagramma polare di $F(s)$ non passa per il punto -1 .

2) Indicando con N il numero di giri (che vanno contati col segno + se sono antiorari e col segno - se sono orari) che il diagramma polare di $F(s)$ fa attorno al punto -1 , si ha $N = P_0$.

Tale criterio è importante più che altro perché costituisce la base della sintesi del controllore (s) : se il sistema Σ infatti risulta instabile, l'idea è quella di modificare (con una (s) opportuna) il percorso del diagramma polare di $F(s)$ in modo da soddisfare le condizioni del teorema e da ottenere la stabilità asintotica del sistema complessivo.

10/05/2021

Dimostrazione del teorema:

$C(s), P(s)$ rappresentano completamente i rispettivi sistemi e non hanno cancellazioni.

$\Rightarrow F(s)$ rappresenta tutto il sistema in catena aperta

$\Rightarrow W(s)$ rappresenta tutto il sistema complessivo Σ

$\Rightarrow \Sigma$ è asintoticamente stabile se e solo se tutti i poli di $W(s)$ hanno parte reale strettamente negativa.

$$W(s) = \frac{P(s)C(s)}{1 + h_0 P(s)C(s)} = \frac{h_0 F(s)}{1 + F(s)} = \frac{1}{h_0} \frac{\frac{N_F}{D_F}}{1 + \frac{N_F}{D_F}} = \frac{1}{h_0} \frac{N_F}{D_F + N_F}$$

Se il diagramma polare di $F(s)$ passa per il punto $-1 \Rightarrow \exists \bar{\omega}: F(j\bar{\omega}) = -1$

$$\Rightarrow \frac{N_F(j\bar{\omega})}{D_F(j\bar{\omega})} = -1 \Rightarrow N_F(j\bar{\omega}) + D_F(j\bar{\omega}) = 0$$

\Rightarrow La $W(s)$ avrebbe un polo $j\bar{\omega}$ con parte reale nulla

$\Rightarrow \Sigma$ non sarebbe asintoticamente stabile

A questo punto possiamo dunque supporre che il diagramma polare di $F(s)$ non passi per -1 e che, quindi, $W(s)$ non abbia poli con parte reale nulla.

Definiamo le seguenti quantità:

$Z_p :=$ numero di poli di $W(s)$ con parte reale strettamente positiva

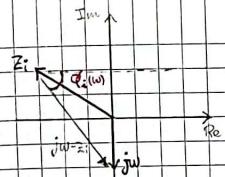
$n - Z_p :=$ numero di poli di $W(s)$ con parte reale strettamente negativa

Consideriamo il polinomio generico $q(s) = q_0 + q_1 s + \dots + q_m s^m + s^n$ di grado n ;

sia N_q il numero di radici con parte reale strettamente positiva di $q(s)$.

Scomponendo il polinomio in fattori si ha: $q(s) = (s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_n)$.

Ponendo $s = j\omega$, $q(j\omega)$ è un numero complesso la cui fase $\phi_q(\omega)$ cambia al varire di ω . Vediamo quanto vale la variazione complessiva di fase $\Delta\phi_q$ quando ω va da $-\infty$ a $+\infty$:



→ Questo è il caso $\operatorname{Re}\{z_i\} < 0$: notiamo che per $w \rightarrow -\infty$ $\phi_i(w)$ va a $-\pi/2$, mentre per $w \rightarrow +\infty$ $\phi_i(w)$ va a $\pi/2$. Se $\operatorname{Re}\{z_i\} > 0$, sarebbe stato il contrario e avremmo avuto una variazione di $\phi_i(w)$ da $\pi/2$ a $-\pi/2$. Se invece $\operatorname{Re}\{z_i\} = 0$, consideriamo z_i come se avesse parte reale negativa: in tal caso, in effetti modificheremmo il diagramma di jw in modo tale da "schivare" la singolarità con un arco, lasciando la singolarità stessa alla sinistra della curva.

$$\text{Di conseguenza: } \Delta\phi_i = \begin{cases} \pi & \text{se } \operatorname{Re}\{z_i\} \leq 0 \\ -\pi & \text{se } \operatorname{Re}\{z_i\} > 0 \end{cases}$$

Per analizzare $q(jw)$, dobbiamo mettere insieme i vari fattori moltiplicativi $jw - z_i$. Poiché la fase di un prodotto di funzioni è pari alla somma delle fasi delle singole funzioni, combinando gli effetti di tutti gli zeri z_i , si ottiene:

$$\Delta\phi_q = \sum_{i=1}^m \Delta\phi_i = -N_q \pi + (m - N_q) \pi = (m - 2N_q) \pi$$

Consideriamo ora la seguente funzione:

$$1 + F(s) = \frac{D_F(s) + N_F(s)}{D_F(s)} \quad \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{DENOMINATORE DI } W(s)} \\ \xrightarrow{\text{DENOMINATORE DI } F(s)} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{entrambi hanno grado } m \\ \text{e } D_F(s) \neq 0 \end{array}$$

- $D_F(s) + N_F(s)$ ha Z_p radici con parte reale strettamente positiva e $m - Z_p$ radici con parte reale strettamente negativa.
- $D_F(s)$ ha P_p radici con parte reale strettamente positiva e $m - P_p$ radici con parte reale minore o uguale a zero.

$$\Rightarrow \Delta\phi_{1+q} = \Delta\phi_{D_F+N_F} - \Delta\phi_{D_F} = (m - Z_p) \pi - (m - 2P_p) \pi = m\pi - Z_p 2\pi - m\pi + 2P_p \pi = (P_p - Z_p) 2\pi$$

$$\Rightarrow N = \text{numero di giri che il diagramma polare di } 1 + F(s) \text{ fa intorno all'origine} = P_p - Z_p$$

$$\Rightarrow N = P_p - Z_p = \text{numero di giri che il diagramma polare di } F(s) \text{ fa intorno al punto } -1.$$

Affinché Σ sia asintoticamente stabile, è necessario che $Z_p = 0 \Rightarrow N = P_p$.

L'equazione $N = P_p - Z_p$ è possibile risolvere quando la parte reale strettamente positiva della funzione si trasferisce a catena ($\operatorname{cat}(s)W(s)$).

11/05/2021

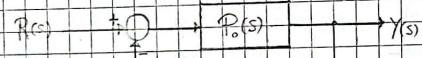
→ 1.

Esercizio:

Sia data la funzione $P_o(s) = \frac{50(s+1)}{(s+10)(s+4)}$.

► Tracciare i diagrammi di Bode e il diagramma polare.

► Valutare la stabilità asintotica del seguente sistema mediante Nyquist:



Immanenzialmente $P_o(s)$ va posta nella seguente forma:

$$P_o(s) = \frac{50(1+s)}{10(1+\frac{s}{10})(1+s^2)} = \frac{5(1+s)}{(1+0.1s)(1+s^2)} = \frac{5(1+T_n s)}{(1+T_n s)(1+\frac{2s}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2})}$$

dove $T_n = 1 \Rightarrow T_n = 1$; $T_d = 0.1 \Rightarrow T_d = 10$; $\zeta = 0$; $\omega_n = 1$
+ da intendersi come 0^+

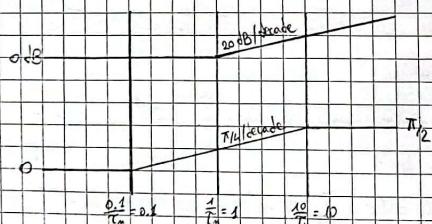
Disegniamo i diagrammi di Bode dei singoli fattori:

→ $K = 5$

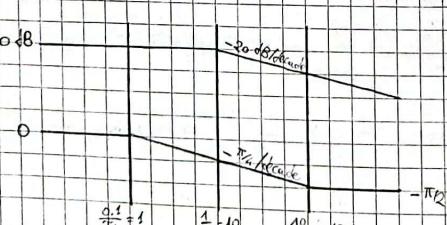
sogli $|K| \approx 14.8$

0

→ $1+T_n s = 1+s$

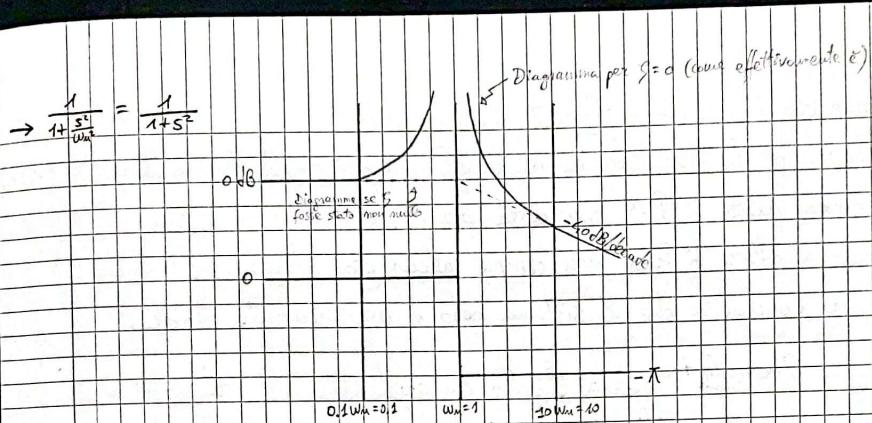


→ $\frac{1}{1+T_n s} = \frac{1}{1+0.1s}$

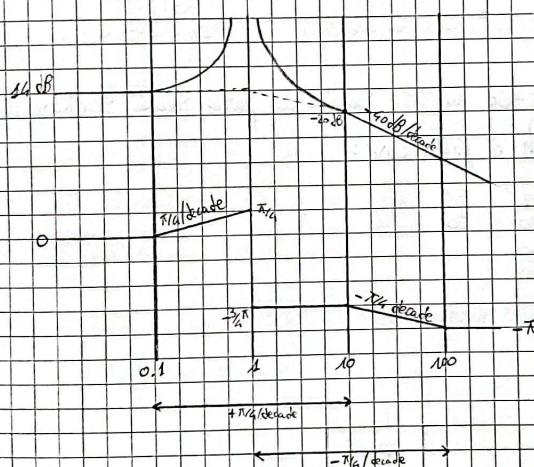


Soluz
a P_o

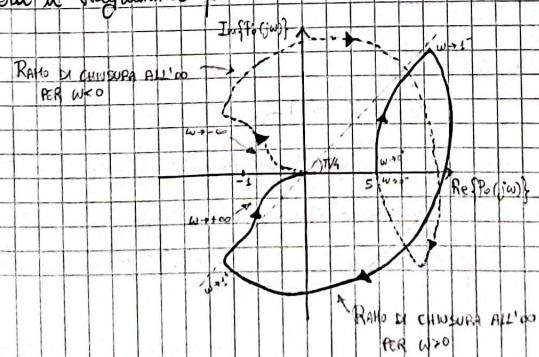
Traci



Sommiamo le quattro coppie di diagrammi così ottenute in modo da ricavare quella relativa a $P_0(s)$:



Tracciamo ora il diagramma polare di $P_0(s)$:



Applichiamo ora il criterio di Nyquist. Notiamo che:

- $P_0(s)$ (che sarebbe la $F(s)$) non ha alcun polo con parte reale strettamente positiva ($P_p=0$).

- Il diagramma polare di $P_0(s)$ non passa per -1 .

- Il diagramma polare di $P_0(s)$ non compie alcun giro intorno a -1 ($N=0=P_p$).

→ Possiamo concludere che il sistema dato è asintoticamente stabile.

Confrontiamo il risultato appena ottenuto con quello dato dal criterio di Routh applicato al denominatore della funzione di trasferimento $W(s)$ del sistema in carico.

Razionale:

$$W(s) = \frac{P_0(s)}{1+P_0(s)} = \frac{\frac{50(s+1)}{(s+10)(s^2+1)}}{1+\frac{50(s+1)}{(s+10)(s^2+1)}} = \frac{50(s+1)}{(s+10)(s^2+1)+50(s+1)} = \frac{50(s+1)}{s^3+10s^2+51s+60} \quad \begin{matrix} \text{TUTTI COEFFICIENTI Sono} \\ \text{TAMENTE POSITIVI} \end{matrix}$$

Il polinomio $s^3+10s^2+51s+60$ ha tutte radici con parte reale strettamente negativa.

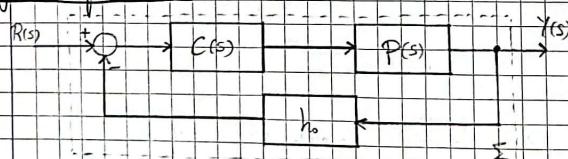
Inoltre, la tabella di Routh è fatta così:

1	51
10	60
45	
60	

→ Possiamo confermare che il nostro sistema in carico è asintoticamente stabile.

12/05/2021

Specifiche di precisione:



Sia $y_d(t) = K_f r(t)$ il valore desiderato a raggiungere per l'uscita $y(t)$ e si definisca l'errore di inseguimento $E(t)$ come $E(t) := K_f r(t) - y(t)$.

Definendo $\varepsilon_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} E(t)$, la specifica di precisione sarà: $|\varepsilon_\infty| \leq c$, dove $c > 0$ è una costante (eventualmente nulla quando si desidera un inseguimento a regime per $r(t)$).

Noi risolveremo il problema solo per una classe di riferimenti $r(t)$: quella dei RIFERIMENTI DI TIPO K.

Definizione:

Un riferimento $r(t)$ è di tipo K se è una funzione del tipo $r(t) = \frac{t^k}{K!} \delta_+(t)$, dove K è una costante intera non negativa.

Per soddisfare la specifica di precisione occorre innanzitutto scegliere $h_0 = \frac{1}{K!}$.

Dopo che, rimane da occuparsi del controllore, la cui funzione di trasferimento sarà costituita da due blocchi (due fattori):

$$C(s) := C_1(s) C_2(s)$$

→ $C_1(s)$ terrà conto appunto della specifica di precisione.

→ $C_2(s)$ terrà conto della stabilità asintotica e del transitorio, e non dovrà mai ricevere il contributo alla precisione di $C_1(s)$ (per cui il suo limite per $t \rightarrow \infty$ dovrà essere diverso per $s=0$).

Per ora assumiamo $C_2(s) = 1$, con $C(s) = C_1(s)$.

La funzione $C_1(s)$ viene scelta del seguente tipo: $C_1(s) = \frac{K_c}{s^\alpha}$, dove K_c è una costante e α è un intero non negativo.

Definiamo la funzione di trasferimento in catena diretta: $G(s) := P(s) C(s) = P(s) C_1(s)$ e la si scriva nella forma generale:

$$G(s) := \frac{K_p(1 + \dots)}{s^\alpha(1 + \dots)}$$

COSTANTE ← (K_p(1+...)) → POLINOMIO IN S CON
TERMINI NOTI UNITARIO
INTERO NON NEGATIVO

Scriuiamo $P(s)$ nella stessa forma:

$$P(s) := \frac{(K_p(1 + \dots))}{s^\alpha(1 + \dots)}$$

COSTANTE ← (K_p(1+...)) → POLINOMIO IN S CON
TERMINI NOTI UNITARIO
INTERO NON NEGATIVO

Poiché $G(s) = P(s) C(s)$, abbiamo che:

$$K_p = K_p K_c$$

$$\nu = \nu_p + \alpha$$

Definizione:

Il sistema in controazione raffigurato nella pagina precedente è detto di tipo ν .

(dove ν è una costante intera non negativa) se la funzione di trasferimento $G(s)$ in catena diretta ha un polo in 0 di ordine ν .

Teorema:

Si consideri il solito sistema in controllazione (con $C(s), P(s), h_0$), con $h_0 = \frac{1}{K_p}$, e si intichi con ν il tipo del sistema. Si assuma di voler inseguire un riferimento di tipo K (con $y(t) = K_r r(t)$). Allora, se il sistema complessivo Σ è asintoticamente stabile, vale la seguente formula per l'errore di inseguimento a regime E_∞ :

$$E_\infty = \begin{cases} 0 & \text{se } \nu > K \\ \frac{K_p^2}{K_p} & \text{se } \nu = K \geq 1 \\ \frac{K_p^2}{K_p + K_d} & \text{se } \nu = K = 0 \\ \infty & \text{se } \nu < K \end{cases}$$

Esempio:

Sia $P(s) = \frac{s+10}{s(s+1)(s^2+2s+5)}$. Supponiamo di voler inseguire con errore nullo a regime il riferimento $r_c(t) = \frac{t^2}{2} \delta_{-1}(t)$ con $K_d = 2$ (cioè l'uscita desiderata è $y_p(t) = K_d r_c(t) = t^2 \delta_{-1}(t)$) di

$$r_c(t) = \frac{t^2}{2} \delta_{-1}(t) \Rightarrow K = 2$$

$$P(s) = \frac{10}{5} \frac{1+0.1s}{s(s+1)} \Rightarrow \begin{cases} K_p = \frac{10}{5} = 2 \\ \nu_p = 1 \end{cases}$$

$K=2$ e noi vogliamo un errore a regime nullo $\Rightarrow \nu > 2 \Rightarrow$ scegliamo $\nu = 3$ perché come vedremo dopo, più è basso, più è facile rendere il sistema complessivo Σ asintoticamente stabile. \rightarrow ANCHE SE, IN REALTA', NON È UNA REGOLA "FISSA".

$$\nu = \nu_p + \alpha = 1 + 2 \Rightarrow \alpha = 2$$

Poiché $E_\infty = 0$, la costante K_d (e dunque K_c) è del tutto influente: noi scegliemmo pari a 1 (anche essa più è piccola e meglio è per l'asintotica stabilità del sistema Σ).

$$\text{In definitiva, abbiamo che } C_c(s) = \frac{K_c}{s^\alpha} = \frac{1}{s^2}.$$

$$\text{Per quanto riguarda } h_0, \text{ abbiamo che: } h_0 = \frac{1}{K_p} = \frac{1}{2}.$$

Consideriamo adesso la stessa identica situazione precedente ma con un errore a regime minore richiesto minore uguale a 0,01.

Anche qui $h_0 = \frac{1}{K_0} = \frac{1}{2}$.

Stavolta però ci basta una $\nu=2 \Rightarrow \alpha=\nu-\nu_p=2-1=1$

Le costante K_c , invece, va scelta in modo tale che: $\frac{K_c^2}{1K_p K_d} \leq 0,01 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{4}{2K_c} \leq 0,01 \Rightarrow K_c \geq 200 \Rightarrow$ sceglieremo proprio $K_c=200$.

Allora quindi che $C_1(s) = \frac{K_c}{s^\alpha} = \frac{200}{s}$.

Osservazione:

Se con la $P(s)$ dell'esempio precedente si richiedesse un errore a regime minore o uguale a 0,01 per riferimenti di tipo $K=0$, sarebbe bastato un sistema di tipo $\nu=0$. Tuttavia, poiché il processo ha già un polo in zero di ordine $\nu_p=1$ e α va scelto non negativo, non possiamo in alcun modo ottenere un sistema di tipo $\nu=\alpha+\nu_p$ minore di 1. In tal caso, prenderemo dunque $\alpha=0$ che, con una qualsiasi costante K_c , fornisce un errore a regime nullo. Sarebbe stato un errore prendere $\alpha=-1$ (cancellando quindi il polo di $P(s)$)!

Dimostrazione del teorema:

Ricorriamo al teorema del valore finale secondo cui, quando la $X(s)$ ammette un'ascissa di convergenza non positiva e i seguenti limiti esistono, sussiste la relazione

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$$

se s è asintoticamente stabile, i poli della funzione di trasf. $V(s)$ hanno parte reale negativa e quindi $V(s)$ ha ascissa compresa < 0 ✓

Si ha allora:

$$E_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [K_f r(t) - y(t)] = \lim_{s \rightarrow 0} s [K_f R(s) - Y(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} s [K_f - W(s)] R(s)$$

Scriviamo la $G(s)$ in questo modo: $G(s) = \frac{K_f (1+\dots)_N}{s^N (1+\dots)_D}$

$$\Rightarrow W(s) = \frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)} = \frac{G(s)}{1+h_0 G(s)} = \frac{\frac{K_d(1+\dots)_n}{s^v(1+\dots)_b}}{1+h_0 \frac{K_d(1+\dots)_n}{s^v(1+\dots)_b}} = \frac{K_d(1+\dots)_n}{s^v(1+\dots)_b + h_0 K_d(1+\dots)_n}$$

$$\Rightarrow K_d - W(s) = \frac{K_d s^v(1+\dots)_b + K_d h_0 K_d(1+\dots)_n - K_d(1+\dots)_n}{s^v(1+\dots)_b + h_0 K_d(1+\dots)_n}$$

$h_0 = \frac{1}{K_d} \Rightarrow K_d h_0 = 1 \Rightarrow$ l'espressione precedente si semplifica in:

$$K_d - W(s) = \frac{K_d s^v(1+\dots)_b}{s^v(1+\dots)_b + h_0 K_d(1+\dots)_n}$$

Nel caso di referimento di tipo X si ha $R(s) = \frac{1}{s^{n+1}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow E_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K_d s^v(1+\dots)_b}{s^v(1+\dots)_b + h_0 K_d(1+\dots)_n} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_d(1+\dots)_b}{s^v(1+\dots)_b + h_0 K_d(1+\dots)_n} s^{n+1} \sim E_f$$

Qua è evidente che:

$$\bullet E_\infty = 0 \text{ se } v > K$$

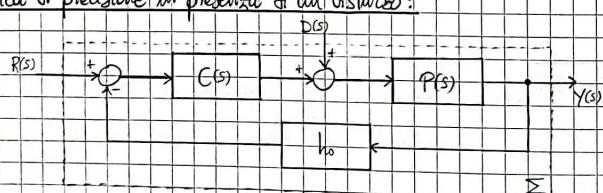
$$\bullet E_\infty = \text{cost.} \text{ se } v = K$$

$$\bullet E_\infty \rightarrow +\infty \text{ se } v < K$$

$$[\text{CASO } v = K > 0] \quad E_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_d(1+\dots)_b}{s^v(1+\dots)_b + h_0 K_d(1+\dots)_n} = \frac{K_d}{h_0 K_d} = \frac{K_d^2}{K_d} = K^2$$

$$[\text{CASO } v = K = 0] \quad E_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_d(1+\dots)_b}{(1+\dots)_b + h_0 K_d(1+\dots)_n} = \frac{K_d}{1+h_0 K_d} = \frac{K_d^2}{K_d + K_d} = K^2$$

Specificare la precisione in presenza di un disturbo:



Stavolta illustriamo la specifica di precisione direttamente con un esempio.

Sia $P(s) = \frac{s+10}{s(s+1)(s^2+2s+5)}$ e sia $D(s)$ un segnale di disturbo costante di ampiezza fissata a 10, e cioè: $D(t) = 10 f_1(t) \Rightarrow D(s) = \frac{10}{s}$

Supponiamo di voler inseguire un errore complessivo a regime minore o uguale a 0.01

il.

dim

Per

\Rightarrow

E

dim

all'

Come

giore

E_∞

don

Σ

\Rightarrow

E_∞

don

Σ

\Rightarrow

E_∞

• $\alpha = 0$

il riferimento $r(t) = tS_{-1}(t)$ con $K_r = 2$ (in cui l'uscita desiderata è $y_d(t) = 2tS_1(t)$).

Inizialmente sceglieremo $h_0 = \frac{1}{K_d} = \frac{1}{2}$.

Per la sovrapposizione degli effetti: $y(t) = \hat{y}^{(r)}(t) + \hat{y}^{(d)}(t)$

\Rightarrow Anche l'errore di inseguimento potrà scomporsi in due contributi:

$$E(t) = K_r r(t) - y(t) = K_r r(t) - \hat{y}^{(r)}(t) - \hat{y}^{(d)}(t) = E^{(r)}(t) + E^{(d)}(t), \text{ dove:}$$

$$\begin{cases} E^{(r)}(t) = K_r r(t) - \hat{y}^{(r)}(t) \end{cases} \rightarrow \text{ERRORE RELATIVO AL RIFERIMENTO}$$

$$\begin{cases} E^{(d)}(t) := -\hat{y}^{(d)}(t) \end{cases} \rightarrow \text{ERRORE DOVUTO AL DISTURBO}$$

\rightarrow ERRORE A REGIME DI INSEGUIMENTO: $E_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} E(t) =: E_\infty^{(r)} + E_\infty^{(d)}$, dove:

$$E_\infty^{(r)} = \lim_{t \rightarrow \infty} E^{(r)}(t); \quad E_\infty^{(d)} = \lim_{t \rightarrow \infty} E^{(d)}(t)$$

In generale, un disturbo è qualcosa di non moto. Non sapendo a priori se i due contributi all'errore di inseguimento si sommeranno o si elimeranno tra loro, si definirà piuttosto come errore totale a regime la somma dei loro valori assoluti (cioè ci si ponrà nel caso peggiore possibile): $E_\infty = |E_\infty^{(r)}| + |E_\infty^{(d)}|$

$$E_\infty^{(r)} = \begin{cases} 0 & \text{se } \nu > K \Rightarrow \alpha+1 > 1 \Rightarrow \alpha > 0 \\ \frac{K^2}{K_d} = \frac{2}{K_d} & \text{se } \nu = K \Rightarrow \alpha+1 = 1 \Rightarrow \alpha = 0 \end{cases}$$

Per quanto riguarda $E_\infty^{(d)}$, sempre utilizzando il teorema del valore finale, si ha:

$$E_\infty^{(d)} = \lim_{t \rightarrow \infty} E^{(d)}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} -\hat{y}^{(d)}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} -sV_{dy}(s)D(s)$$

$$\text{dove } V_{dy}(s) = \frac{P(s)}{1+h_0P(s)C(s)}, \quad P(s) = \frac{\prod_{i=1}^n (1+\dots)_N}{s^{\alpha+1}(1+\dots)_\alpha}; \quad D(s) = \frac{10}{s}$$

$$\Rightarrow E_\infty^{(d)} = -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{10K_p(1+\dots)_N s^\alpha}{s^{\alpha+1}(1+\dots)_\alpha + h_0K_cK_d(1+\dots)_\alpha} = -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{20(1+\dots)_N s^\alpha}{s^{\alpha+1}(1+\dots)_\alpha + K_c(1+\dots)_\alpha}$$

$$\Rightarrow E_\infty^{(d)} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 1 \\ -\frac{20}{K_c} & \text{se } \alpha = 0 \end{cases}$$

Ponendo un errore complessivo a regime minore o uguale a 0.01, sceglieremo:

$$0.01 \cdot \alpha = 0 \quad \cdot K_c \text{ tale che } \frac{22}{K_c} \leq 0.01 \Rightarrow K_c \geq 2200 \Rightarrow \text{noi sceglieremo } K_c = 2200$$

Osservazioni:

- 1) Se il disturbo entra in un punto diverso dello schema, avremo una funzione di trasferimento $W_{ij}(s)$ differente. Per il resto il resto il motivo rimane comunque uguale.
- 2) Il fatto che a regime nell'uscita non appaia l'effetto del disturbo (cioè si ha $E_{\text{out}}^{(d)} = 0$) viene indicato col termine di ASTATISMO: il sistema viene detto ASTATICO rispetto al disturbo.

CASO
ASU

Specifiche sul transitorio:

Abbiamo detto che il controllore che vogliamo progettare è del tipo $C(s) = C_1(s) \cdot C_2(s)$.

Il fattore $C_2(s)$ serve a soddisfare le specifiche sull'asintotica stabilità e sul transitorio (analizzeremo soprattutto quest'ultimo) e ha la seguente forma:

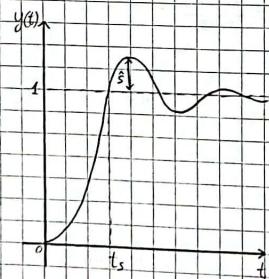
$$C_2(s) = \frac{(1+\dots)}{(1+\dots)} \quad \rightarrow \text{È evidente che il suo limite per } s \rightarrow \infty \text{ è uguale a 1, per cui non va a perturbare la precisione stabilità del fattore } C_1(s).$$

Per quanto riguarda le specifiche sulla risposta transitoria, le definiamo considerando la risposta del sistema al gradino unitario (è a partire da condizioni iniziali nulle).

Se il sistema è asintoticamente stabile, la $y(t)$ a regime si assesterà su un valore costante. Supponendo che a regime tale valore costante sia pari a 1, la qualità di una risposta transitoria può essere definita mediante i seguenti due parametri:

- Tempo di salita t_s
- Somma d'armoniche \hat{s}

CASO DI RISPOSTA OSCILLATORIA:



→ \hat{s} = rapporto tra lo scostamento massimo della $y(t)$ rispetto al suo valore di regime e il suo valore di regime stesso.

13/€

Per e
sta a

buoni

polare

pretab

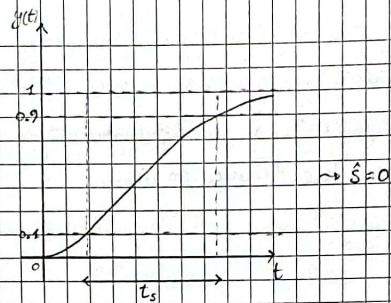
tarci

fivent

Questo

vato, p

CASO DI RISPOSTA ASINTOTICA:



Le specifiche sul transitorio si trasformano in termini di sovralungazione e tempo di solita ragionevolmente bassi, e cioè: $\hat{s} < \hat{s}^*$ $t_s \leq t_s^*$

$\hat{s} < \hat{s}^*$

$t_s \leq t_s^*$

VALORI MASSIMI ACCETTABILI

Occorre tuttavia osservare che un tempo di solita troppo piccolo corrisponde a un sistema troppo reattivo, che non filtra i disturbi. Per questo motivo generalmente la specifica sul tempo di solita viene fatta in questi altri termini: $t_s \approx t_s^*$.

Riassumendo:

SPECIFICHE SUL TRANSITORIO

$\hat{s} < \hat{s}^*$

$t_s \approx t_s^*$

13/05/2021

Per essere tranquilli che la stabilità del sistema che auxiamo a progettare sia robusta a frode di incertezze parametriche / distorsioni trascurati / ecc., è necessario avere un buon MARGINE DI STABILITÀ, che è relativo alla distanza minima del diagramma polare di $F(s) = h_0 P(s) C(s)$ dal punto -1: più questa distanza è elevata, meno è probabile che il numero di giri del diagramma polare di $F(s)$ intorno al punto -1 varii con le incertezze parametriche, e meno è probabile che il sistema complessivo diventi instabile con le incertezze parametriche.

Questo discorso è legato al valore della sovralungazione: più quest'ultimo è elevato, più il sistema tende all'instabilità.

Tuttavia, la distanza minima del diagramma polare della $F(s)$ dal punto -1 potrebbe non essere facile da calcolare e, una volta calcolata, potrebbe non essere immediato capire come intervenire progettualmente per aggiungere degli elementi nel controllore $C(s)$ in modo da aumentare tale distanza minima.

$\rightarrow JL$

m_1

$\rightarrow JL$

m_2

$\rightarrow JL$

m_{gn}

Sistemi a stabilità regolare:

Sono sistemi tali che:

\rightarrow La $F(s)$ ha un coefficiente di guadagno K_F positivo.

\rightarrow La $F(s)$ non ha poli con parte reale strettamente positiva (ovvero $P_p = 0$).

\rightarrow Il loro diagramma polare positivo (= il ramo del diagramma polare corrispondente alle ω positive) presenta un'unica intersezione sia col cerchio unitario sia con l'asse reale negativo.

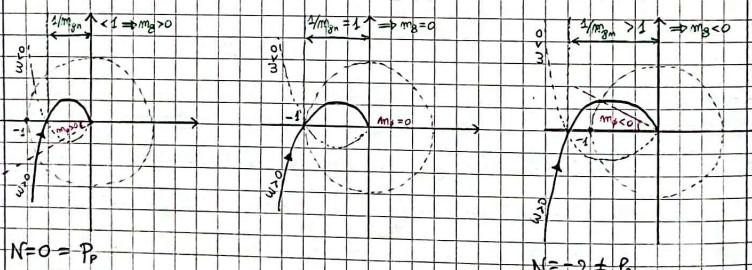
\rightarrow Sono assintoticamente stabili solo per valori di K_F sufficientemente piccoli (cioè per $0 < K_F < \bar{K}_F$) e perdono di stabilità quando K_F raggiunge \bar{K}_F . In effetti, \bar{K}_F è il valore di K_F per cui il diagramma polare di $F(s)$ passa per -1 .

Vediamo

toxicau

$K_F < \bar{K}_F$

$K_F > \bar{K}_F$



Proprietà per un
stesso sistema
due punti

Definizione:

Sia ω la pulsazione ω per cui il diagramma polare positivo interseca la circonferenza unitaria (e quindi $|F(j\omega)| = 1 \Rightarrow |F(j\omega)|_{dB} = 0 \text{ dB}$) (tale pulsazione viene detta di TAGLIO o di ATTRaversamento).

di massimo
sulla linea
tangente.

Sia $\tilde{\omega}$ la pulsazione ω per cui il diagramma polare positivo interseca l'asse reale negativo. Allora:

polare

→ IL MARGINE DI FASE m_ϕ del sistema viene definito nel seguente modo:

$$m_\phi := \phi(\omega_r) - (-180^\circ), \quad \text{dove } \phi(\omega) \text{ è la fase di } F(j\omega).$$

→ IL MARGINE DI GUADAGNO (o di ampiezza) m_g viene invece definito nel seguente modo:

$$m_g := -20 \log_{10} |F(j\tilde{\omega})|$$

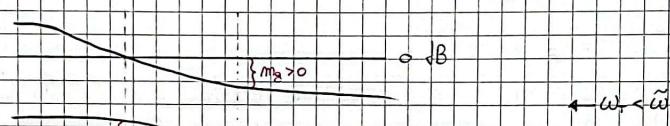
→ IL MARGINE NATURALE DI GUADAGNO m_{g_n} viene definito nel seguente altro modo:

$$m_{g_n} := 10^{\frac{m_g}{20}} = \frac{1}{|F(j\tilde{\omega})|} \quad \Rightarrow m_g = 20 \log_{10} (m_{g_n})$$

Vediamo ora i diagrammi di Nyquist della $F(s)$ nel caso $K_F < \bar{K}_F$ (sistema asintoticamente stabile) e nel caso $K_F > \bar{K}_F$ (sistema instabile):

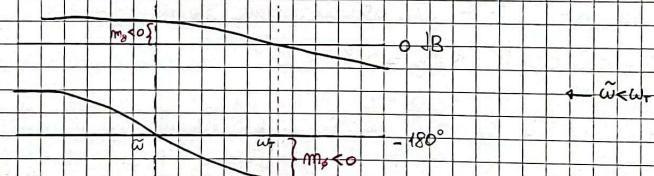
$\boxed{K_F < \bar{K}_F}$

sia



$\boxed{K_F > \bar{K}_F}$

allo



Proprietà:

Per un sistema Σ a stabilità regolare, i margini m_g, m_ϕ hanno sempre lo stesso segno e il sistema complessivo Σ è asintoticamente stabile se e solo se questi due parametri sono positivi.

Il margine di guadagno e il margine di fase ci danno entrambi delle indicazioni sulla robustezza della stabilità asintotica del sistema a fronte di incertezze parametriche. In particolare, più sono elevati e più siamo sicuri che il diagramma polare di $F(s)$ passa lontano da -1:

→ Un margine di guadagno alto ci garantisce robustezza a fronte di incertezza sul coefficiente di guadagno di $F(s)$.

→ Un margine di fase alto ci garantisce robustezza a fronte di ritardi temporali.

Vediamo con maggiore dettaglio questo fatto.

Sia $F(s)$ la funzione di trasferimento nominale a catena aperta e sia $m_g > 0$ il margine di guadagno ottenuto. Sia ora $F_p(s) = K_{F_p} F(s)$ la funzione di trasferimento a catena aperta perturbata, cioè quella nominale moltiplicata per una costante $K_{F_p} > 0$ che potrebbe modellare un'incertezza.

$$F(j\omega) = M(\omega) e^{j\phi(\omega)}$$

$$F_p(j\omega) = K_{F_p} M(\omega) e^{j\phi(\omega)} \rightarrow \text{IL DIAGRAMMA DI POLE E ZERI NON CAMBIA}$$

Il margine di guadagno $m_{g,p}$ del sistema perturbato è quindi dato da:

$$m_{g,p} = -20 \log_{10} |F_p(j\omega)| = -20 \log_{10} |K_{F_p} F(j\omega)| = -20 \log_{10} |K_{F_p}| - 20 \log_{10} |F(j\omega)| = -20 \log_{10} |K_{F_p}| + m_g$$

Il sistema perturbato rimane asintoticamente stabile se:

$$m_{g,p} > 0 \Rightarrow 20 \log_{10} |K_{F_p}| < m_g \Rightarrow K_{F_p} < 10^{\frac{m_g}{20}}$$

Si:

Analogamente, sia $m_\phi > 0$ il margine di fase ottenuto con il controllore progettato per la $F(s)$ nominale. Sia ora $F_p(s) = e^{-s\tau} F(s)$ la funzione di trasferimento a catena aperta perturbata, che è quindi quella nominale moltiplicata per l'esponenziale complesso $e^{-s\tau}$. Tale termine esponenziale corrisponde a un ritardo τ presente nella funzione di trasferimento a catena aperta.

$$F(j\omega) = M(\omega) e^{j\phi(\omega)}$$

$$F_p(j\omega) = e^{-j\omega\tau} M(\omega) e^{j\phi(\omega)} = M(\omega) e^{j[\phi(\omega) - \omega\tau]} \rightarrow \text{IL DIAGRAMMA DI POLE E ZERI NON CAMBIA}$$

2)

Il margine di fase $m_{\phi,p}$ del sistema perturbato è quindi dato da:

$$m_{\phi,p} = \phi(\omega_r) - (-180^\circ) = \phi(\omega_r) - \omega_r \tau - (-180^\circ) = \phi(\omega_r) - (-180^\circ) - \omega_r \tau = m_\phi - \omega_r \tau$$

3)

Il sistema perturbato rimane asintoticamente stabile se:

$$m_{\phi,p} > 0 \Rightarrow \omega_r \tau < m_\phi \Rightarrow \tau < \frac{m_\phi}{\omega_r}$$

4)

15/05/2021

NB: In realtà, abbiamo anche che più il margine di fase è alto, più la sovrae-
longazione decresce. Di conseguenza, la moshia specifica sulla sovraelongazione
(oltre a quella sulla stabilità asintotica) si traduce nella seguente specifica sul
margine di fase: $M_p \geq M_p^*$ → VALORE MINIMO ACCETTABILE

a) Osserviamo, si dimostra che la pulsazione di taglio e il tempo di salita sono
inversamente proporzionali. Però, la moshia specifica sul tempo di salita si tra-
duce nella seguente specifica sulla pulsazione di taglio: $\omega_t \approx \omega_t^*$

Riassumendo:

SPECIFICHE DI STABILITÀ ASINTOTICA → SUL TRANSITORIO PER UN SISTEMA A STABILITÀ REGOLARE

$\omega_t \approx \omega_t^*$ → riferita alla specifica $t_s \approx t_s^*$ → è facoltativa

$M_p \geq M_p^*$ → garantisce la stabilità asintotica e $\hat{s} \leq s^*$ → è obbligatoria

Sistemi a stabilità non regolare:

1) IL DIAGRAMMA POLARE POSITIVO DI $f(s)$ HA UN'UNICA INTERSEZIONE SIA COL CERCHIO UNITARIO
SIA CON L'ASSE REALE NEGATIVO, MA $K_F < 0 \vee P_p > 0$: m_g, m_p in generale non ci
danno informazioni corrette (potremmo avere ad esempio $M_p > 0$ ma un numero di
già intorno al punto -1 diverso da P_p); in tal caso, sarebbe necessario ri-
definire i margini in modo opportuno.

2) $K_F > 0, P_p = 0$ E IL DIAGRAMMA POLARE POSITIVO DI $f(s)$ HA UN'UNICA INTERSEZIONE
CON L'ASSE REALE NEGATIVO MA NESSUNA INTERSEZIONE COL CERCHIO UNITARIO:
 m_g è ben definito e ci dà delle informazioni corrette; m_p non è definito ma,
se consideriamo il caso in cui il diagramma polare di $f(s)$ è interamente
contenuto nel cerchio unitario, possiamo considerarlo come pari a $+\infty$, poiché
vale la relazione $N = P_p = 0$ e un qualunque ritardo temporale non è in grado
di impattare sulla stabilità asintotica del sistema.

3) $K_F > 0$, $P_p = 0$ E IL DIAGRAMMA POLARE POSITIVO DI $F(s)$ HA UN'UNICA INTERSEZIONE CON CERCHIO UNITARIO MA NESSUNA INTERSEZIONE CON L'ASSE REALE NEGATIVO:

m_p è ben definito e ci dà delle informazioni corrette; m_g non è definito ma possiamo considerarlo come pari a $+\infty$, poiché la relazione $N = P_p = 0$ vale per QUALUNQUE coefficiente di guadagno $K_F > 0$, per cui nessuna incertezza parametrica su K_F sarebbe in grado di impattare sulla stabilità assintotica del sistema.

4) $K_F > 0$, $P_p = 0$ E IL DIAGRAMMA POLARE POSITIVO DI $F(s)$ HA UN'UNICA INTERSEZIONE CON CERCHIO UNITARIO MA PIÙ DI UN'INTERSEZIONE CON L'ASSE REALE NEGATIVO:

m_p è ben definito, mentre m_g va scelto in base all'intersezione del diagramma polare positivo di $F(s)$ con l'asse reale negativo più vicina al punto -1 .

5) $K_F > 0$, $P_p = 0$ E IL DIAGRAMMA POLARE POSITIVO DI $F(s)$ HA UN'UNICA INTERSEZIONE CON L'ASSE REALE NEGATIVO MA PIÙ DI UN'INTERSEZIONE CON CERCHIO UNITARIO:

m_p è ben definito, mentre m_g va scelto in base all'intersezione del diagramma polare positivo di $F(s)$ col cerchio unitario più vicino al punto -1 .

Esempio di un caso patologico di un sistema a stabilità lineare:



PICCOLA NOTA: Non c'è una formula esatta che lega w^* con t_s^* e m_p^* con \hat{s}^* ; in effetti, le tecniche di sintesi del controllore (Cs) a partire da specifiche su t_s^* , \hat{s}^* vengono dette TECNICHE DI SINTESI PER TENTATIVI.

17/05/2021

Reti correttive:

Sono delle funzioni di trasferimento che possono essere combinate per dare luogo a una funzione $C_a(s)$ che permette di soddisfare le specifiche sul margine di fase e sulla frequenza di taglio.

Le reti correttive sono di due tipi:

a) RETE ANTICIPATRICE, che attua un anticipo di fase e viene utilizzata per alzare il diagramma delle fasi della $F(s)$ in modo da incrementare il margine di fase fino al valore desiderato.

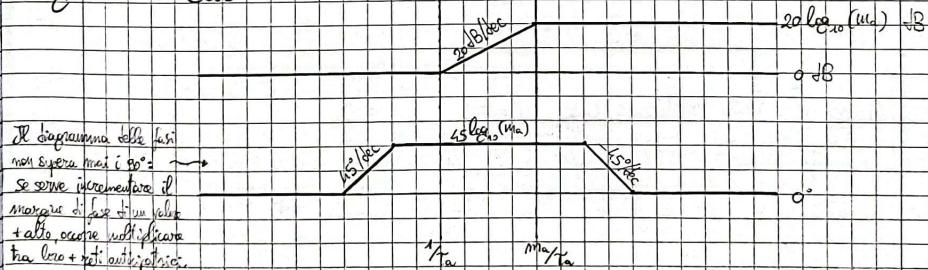
b) RETE RITARDATRICE, che attua un ritardo di fase e viene utilizzata per abbassare il diagramma dei moduli della $F(s)$ in modo da ottenerne la ω_c desiderata.

RETE ANTICIPATRICE:

Funzione di trasferimento: $C_a(s) = \frac{1 + T_a s}{1 + \frac{T_a}{m_a} s}$

dove $T_a > 0$ è una costante di tempo e $m_a > 1$ è un parametro reale.

Diagramma di Bode:

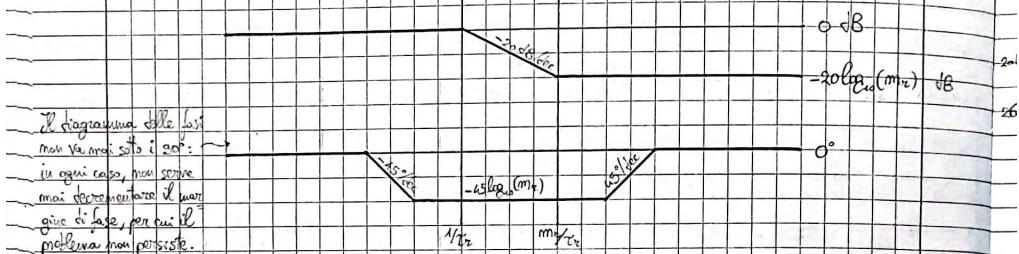


RETE RITARDATRICE:

Funzione di trasferimento: $C_r(s) = \frac{1 + \frac{T_r}{m_r} s}{1 + T_r s}$

dove $T_r > 0$ è una costante di tempo e $m_r > 1$ è un parametro reale.

Diagramma di Bode:



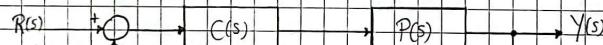
Esercizio:

Dato il sistema con funzione di trasferimento $P(s) = \frac{1}{(4+s)(2+s)}$,

progettare un controllore affinché si abbia:

- Una precisione rispetto a un riferimento $r(t) = t$, con $K_r = 1$, pari a $\varepsilon_\infty < 0,05$.
- $m_p \geq 50^\circ$
- $\omega_r \approx 5 \text{ rad/sec}$

$h_0 = \gamma_{K_r} = 1 \Rightarrow$ utilizziamo il seguente schema in controreazione:



Osservando la $P(s)$ notiamo che $K_p = 1$, $\gamma_p = 0$.

Essendo il riferimento $r(t)$ di tipo $K=1$, il sistema dovrà essere di tipo $\nu=1$ per avere un errore a regime finito. Ma $\nu = \gamma_p + \alpha = \alpha \Rightarrow \alpha = 1$

$$\Rightarrow C_1(s) = \frac{K_c}{s^\alpha} = \frac{K_c}{s}$$

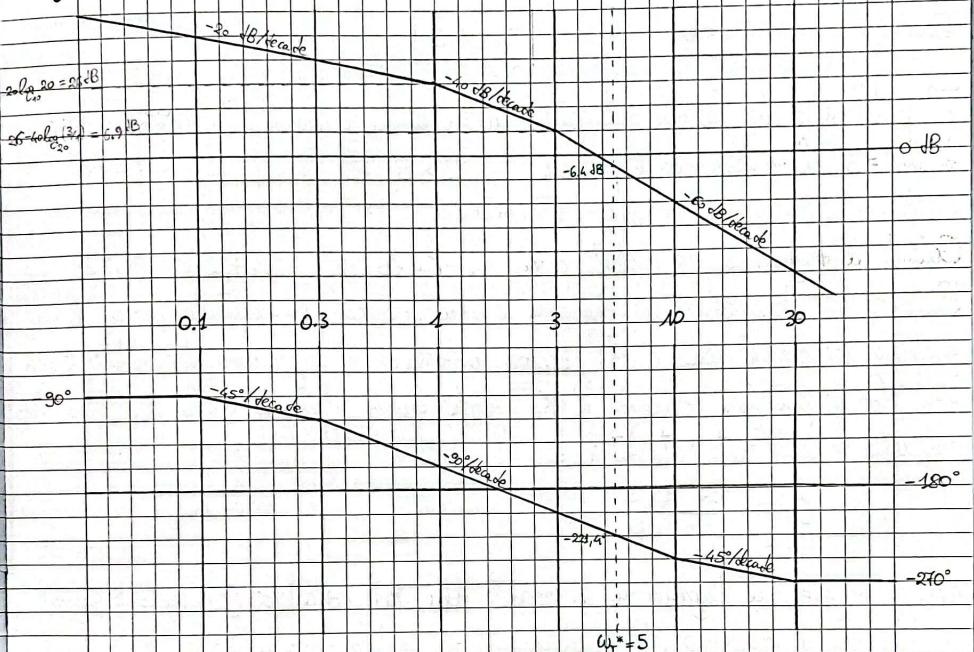
L'errore a regime è dato da: $\varepsilon_\infty = \frac{K_r}{K_a} = \frac{1}{K_c K_p} = \frac{1}{K_c} \leq 0,05 \Rightarrow K_c \geq 20$

$$\Rightarrow \text{noi scegliamo } K_c = 20 \Rightarrow C_1(s) = \frac{20}{s}$$

$$\text{Ora abbiamo } F(s) = h_0 C_1(s) P(s) = \frac{20}{s(4+s)(1+\frac{s}{2})}$$

$$\begin{array}{l} T_1 = 1 \\ \gamma_{T_1} = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} T_2 = 2 \\ \gamma_{T_2} = 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} T_3 = 3 \\ \gamma_{T_3} = 3 \end{array}$$

Diagrammi di Bode:



A $\omega = \omega_r^* = 5$ (pulsazione di attraversamento desiderata), si ha che $\phi(\omega_r^*) = -221,4^\circ$.

Tuttavia, per soddisfare la specifica su m_p , tale fase dovrebbe essere tale che:

$$50^\circ \geq \phi(\omega_r^*) - (-180^\circ) \Rightarrow \phi(\omega_r^*) \geq -130^\circ$$

Di conseguenza, occorre portare la fase da $-221,4^\circ$ a -130° e, quindi, alzare di circa 90° . Per far ciò, usiamo due reti anticipatici del tipo:

$$G_a(s) = \frac{1 + T_a s}{1 + T_{Ma} s}$$

Se invece utilizziamo una rete connessa in cascata, ci sarebbe comunque scorrere proprio la m_p in corrispondenza della fase inserita nel diagramma delle fasi, in modo tale da non dover ricorrere alla rete anticipatica.

Per scegliere T_a e m_p , dal diagramma ESATTO delle fasi delle reti correttive si vede che con $m_p = 6$ abbiamo un innalzamento massimo della fase pari a circa 45° , quindi con due reti in cascata otteniamo l'effetto voluto di circa 90° . T_a deve essere scelto in modo che il massimo si abbia per $\omega = \omega_r^* \approx 5$. Nell'ascissa delle reti correttive si legge che il massimo si ha per $\omega T_a \approx 2,5$.

Imponiamo pertanto $\omega_r^* T_a = 2,5 \Rightarrow T_a = \frac{2,5}{\omega_r^*} = \frac{2,5}{5} = 0,5$

Quindi: $m_a = 6$ $T_a = 0,5$

Il problema è che la rete anticipatrice alza anche i moduli. In corrispondenza di $\omega_r^* = 5$, l'innalzamento è pari a $2 \times 8 \text{ dB}$

Quindi il diagramma dei moduli passa da $-6,4 \text{ dB}$ a $-6,4 + 2 \times 8 = 9,6 \text{ dB}$

Siccome ω_r^* deve essere la frequenza di attraversamento (= frequenza per cui il diagramma dei moduli vale 0 dB), occorre abbassare il diagramma dei moduli di 9,6 dB. Non si può fare riducendo il K_c , perché questo influirebbe sulla precisione, per

cui usiamo una rete retardatrice: \rightarrow Se invece fosse stato necessario ALZARE il diagramma dei moduli, servirebbe aumentare il K_c scegliendo un K_{cr} tale nel seguente modo:

$$K_{cr} = K_c K_{crs}, \text{ dove } K_{crs} \text{ è tale che } \frac{m_r}{m_{r0}} = \frac{10}{10 - 9,6}$$

18/

Ese

Si,

Sar,

Xe

Ese

m_r si sceglie dal diagramma dei moduli della rete correttiva (cambiato di segno) in modo che il massimo dell'innalzamento del modulo (pari a $20 \log \frac{m_r}{m_{r0}}$) sia circa pari a 9,6 dB $\Rightarrow m_r = 3$

T_R è tale che le fasi intorno a ω_r^* restino come prima. L'effetto delle fasi si esce in due o tre decadi, per cui sceglieremo T_R in modo che $T_R \ll \omega_r^*$ (due o tre ordini di grandezza più piccolo). Ad esempio: $T_R = 1000$.

Quindi: $m_r = 3$ $T_R = 1000$

Il controllore complessivo è:

$$(C(s)) = \frac{20}{s} \left(\frac{1+0,5s}{1+\frac{0,5}{6}s} \right)^2 \frac{1+\frac{1000}{3}s}{1+1000s}$$

~ È possibile verificare che abbiamo avuto a che fare con un sistema a stabilità maggiore, per cui le specifiche sui m_r , ω_r^* avevano perfettamente senso.

Se m_r è maggiore
rispetto a ω_r^*
 $\frac{m_r}{T_R} \ll \omega_r^*$

F(s):

18/05/2021

Esercizio:

Si considera un sistema caratterizzato dalla seguente matrice dinamica A :

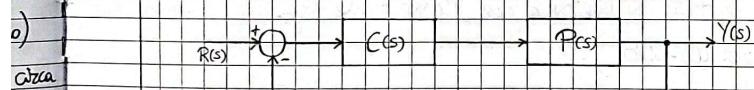
$$a) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinare i suoi punti di equilibrio.

Sappiamo che i punti di equilibrio x_e sono tali che $Ax_e = 0$

$$\begin{aligned} & \text{da} \\ & \begin{cases} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{cases} = \begin{cases} x_1 - x_5 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_5 \\ x_2 = x_3 = 0 \\ x_1 = x_4 \end{cases} \Rightarrow x_e = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ x \\ x \end{bmatrix}, x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Esercizio:



Siamo $P(s) = \frac{K_p}{s+5}$, $C(s) = \frac{1}{s^2+s}$. Utilizzando il criterio di Nyquist, e o intuiviamo per quali valori di $K_p > 0$ il sistema complessivo Σ risulta assiomaticamente stabile.

$$F(s) = h_o P(s) C(s) = \frac{K_p}{(s^2+s)(s+5)} = \frac{K_p/5}{s(s+1)(s+5)}$$

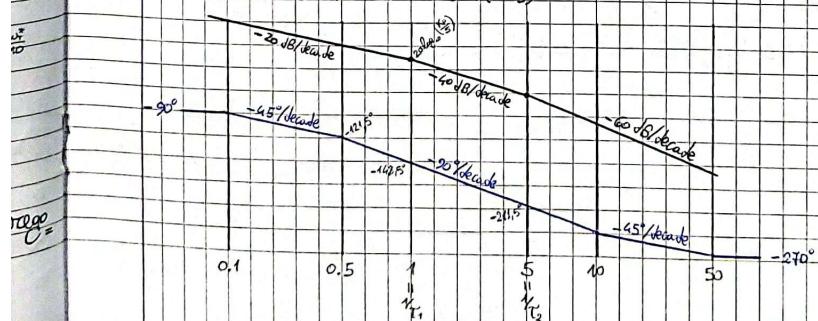
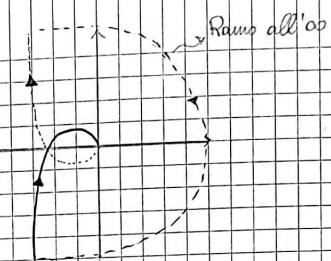


DIAGRAMMA POLARE:



Progett

$\cdot E_{\infty} \approx$

$\cdot J_d \approx$

$K_d = 4$

Voglia

$\Rightarrow \alpha$

$E_{\infty} =$

Per qu

den C

Perche

fisica

24/C

2009

Come

in con

ma ay

Stanch

F(s):

Taccio

1) $F(s)$

2) N_C

Z_1

3) J_m

Notiamo che la $F(s)$ non ha poli con parte reale strettamente positiva $\Rightarrow P_o = 0$
 \Rightarrow il sistema Σ è asintoticamente stabile se e solo se il diagramma polare di $F(s)$ non compie giri intorno al punto -1 \Rightarrow il sistema Σ è asintoticamente sta_{per qu}ble se e solo se il punto -1 si trova più a sinistra dell'intersezione del diagramma polare di $F(s)$ con l'asse reale negativo.

Per imporre questo, dobbiamo anzitutto trovare la pulsazione $\tilde{\omega}$ per cui il dia_{grafma polare di $F(s)$ si interseca con l'asse reale negativo (e, quindi), la} fase $\varphi(\tilde{\omega})$ è pari a -180° :

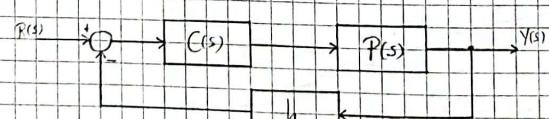
$$-168,5^\circ - 90^\circ \log_{10} \left(\frac{\tilde{\omega}}{1} \right) = -180^\circ \Rightarrow \log_{10} \tilde{\omega} = \frac{-168,5^\circ + 180^\circ}{90^\circ} = 0,35$$

$$\Rightarrow \tilde{\omega} = 10^{0,35} \approx 2,24 \text{ rad/s}$$

Vediamo ora quanto vale il modulo (in funzione di K_p) per $\tilde{\omega} = 2,24$, e troviamo la condizione per K_p affinché il modulo sia minore di 1 in scala naturale (= minore di zero in scala logaritmica):

$$20 \log_{10} \left(\frac{K_p}{5} \right) - 60 \log_{10} 2,24 < 0 \Rightarrow [K_p < 25,1]$$

Esercizio:



$$\text{Siano } P(s) = \frac{1}{s(s^2+1)}, \quad r_c(t) = \frac{t^2}{2}, \quad K_d = 4$$

Progettare $C(s)$, del tipo $\frac{K_c}{s^2}$, in modo che:

$$E_{\infty} \leq 0,01$$

Il sistema complessivo sia asintoticamente stabile.

$$K_J = 4 \Rightarrow h_0 = \frac{1}{4}$$

Vogliamo un errore costante e il riferimento è di tipo 2 ($K=2$) $\Rightarrow V=2$ $\xrightarrow{V_p=1}$

$$\Rightarrow \alpha \geq 1$$

$$= 0 \\ E_{\infty} = \frac{K_J^2}{K_C} = \frac{K_J^2}{1 \cdot K_C} \leq 0,01 \Rightarrow K_C \geq 1600$$

Per quanto riguarda la stabilità asintotica, applichiamo il criterio di Routh al denominatore di $W(s) = \frac{P(s)C(s)}{1 + h_0 P(s)C(s)}$, che vale:

$$\det(W(s)) = s^2(s^2 + 1) + 0,25 K_c = s^4 + s^2 + 0,25 K_c$$

Perché i coefficienti di s^3 , s sono nulli, \nexists alcun K_c che dia la stabilità asintotica del sistema complessivo.

24/05/2021

Luglio delle radici:

Come il criterio di Nyquist, è un metodo per studiare la stabilità di un sistema Σ in controreazione a partire dalla funzione di trasferimento $F(s) = h_0 P(s)C(s)$ in catena aperta.

Stavolta però scriviamo la $F(s)$ nella seguente forma:

$$F(s) = K^1 \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} \rightarrow \text{ZERI DI } F(s)$$

Facciamo alcune assunzioni:

1) $F(s)$ è strettamente propria (per cui $n > m$).

2) Non ci sono semplificazioni tra numeratore e denominatore (ossia nessuno zero z_i coincide con qualche polo p_j).

3) In generale (almeno nella sintesi del controllore) non abbiamo zeri z_i nulli.

Verifichiamo qual è il legame fra K' e il coefficiente di guadagno K :

$$F(s) = K' \frac{\prod_{i=1}^m (s-z_i)}{\prod_{j=1}^n (s-p_j)} = K \frac{(1+...)}{s^m (1+...)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{K' \prod_{i=1}^m (-z_i) (1+...)}{s^m \prod_{j,p_j \neq 0} (-p_j) (1+...)} = \frac{K (1+...)}{s^m (1+...)} \Rightarrow K = K' \frac{\prod_{i=1}^m (-z_i)}{\prod_{j,p_j \neq 0} (-p_j)}$$

Il coefficiente K' viene detto COEFFICIENTE DI GUADAGNO AD ACTA FREQUENZA perché in effetti caratterizza il comportamento del matrice di $F(j\omega)$ quando la pulsazione ω tende all'infinito (infatti, ponendo $s = j\omega$ e facendo tendere ω all'infinito, il matrice di $F(j\omega)$ si compone come $K' \omega^{m-n}$).

Ora, la funzione di trasferimento del sistema complessivo in catena chiusa è data da:

$$W(s) = \frac{\Phi(s)C(s)}{1 + h_0 P(s) C(s)} = \frac{h_0 F(s)}{1 + F(s)} = \frac{\frac{K'}{h_0} \frac{\prod_{i=1}^m (s-z_i)}{\prod_{j=1}^n (s-p_j)}}{1 + K \frac{\prod_{i=1}^m (s-z_i)}{\prod_{j=1}^n (s-p_j)}} = \frac{\frac{K'}{h_0} \prod_{i=1}^m (s-z_i)}{\prod_{j=1}^n (s-p_j) + K \prod_{i=1}^m (s-z_i)}$$

Si vede come il denominatore di $W(s)$ sia il seguente polinomio:

$$f(s, K') = \prod_{j=1}^n (s-p_j) + K' \prod_{i=1}^m (s-z_i)$$

Poiché abbiamo supposto $m < n$, tale polinomio ha grado n e quindi avrà n radici, che sono i poli di $W(s)$: la posizione di tali radici determina la stabilità del sistema retazionato, che sarà tanto più assicurata quanto più tali radici si troveranno in una regione del piano complesso opportunamente scelta dell'asse immaginario.

È in questo contesto che prende nome il luogo delle radici, che è definito come il percorso che le radici di $f(s, K')$ fanno nel piano complesso al variare di K' . In sostanza il luogo delle radici permette di rispondere alla seguente domanda: per quali valori di K' , se ce ne sono, il sistema in catena chiusa con funzione di trasferimento a catena aperta $F(s)$ è asintoticamente stabile (oppure ha le radici in una certa regione desiderata del piano complesso)?

Parl
che
di f

Ese

$F(s)$

Ese

$F(s)$

pos

NB:
faci
alcu
fettu

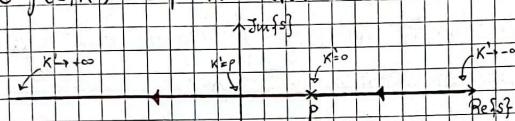
Parleremo di luogo positivo riferendoci al percorso delle radici di $f(s, K')$ per K' che varia da 0 a $+\infty$ e di luogo NEGATIVO riferendoci al percorso delle radici di $f(s, K')$ per K' che varia da $-\infty$ a 0.

Esempio preliminare 1:

$$F(s) = K' \frac{1}{s-p} \quad p > 0$$

dove \Rightarrow La funzione $f(s, K') = s - p + K'$ avrà come unica radice $s = p - K'$.

Per $F(s)$



da: Il sistema a catena chiusa è asintoticamente stabile $\forall K' > p$.

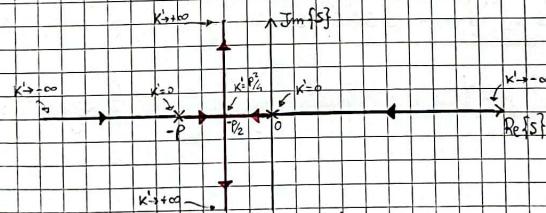
Esempio preliminare 2:

$$F(s) = K' \frac{1}{s(s+p)} \quad p > 0$$

\Rightarrow La funzione $f(s, K') = s(s+p) + K' = s^2 + ps + K'$ avrà come radici:

$$s_{1,2} = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - K'}$$

Perciò, il sistema chiuso ha due radici complesse con parte reale uguale a $-p/2$ e parte immaginaria uguale a $\pm \sqrt{K' - p^2/4}$.



Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per tutti i valori sufficientemente positivi di K' .

risulta:

NB: In questi esempi è stato possibile tracciare il luogo delle radici poiché era facile calcolare le radici stesse. In casi più generali è utile invece avvalersi di alcune proprietà del luogo delle radici che permettono di individuare delle regole su come effettuare il tracciamento del luogo in modo semplice.

Proprietà:

1) IL LUOGO HA n RAMI:

Il polinomio $f(s, K')$ per ogni valore di K' ha n radici. Al variare di K' queste n radici si muovono nel piano complesso: il luogo è quindi composto da n rami, dove il ramo i -esimo è il percorso della radice i -esima al variare di K' .

Per $K' = 0$ le radici di $f(s, K')$ sono proprio i poli della funzione a catena operata $F(s)$. Infatti, se $K' = 0$, si ha che $f(s, K') = \prod_{j=1}^n (s - p_j)$.

Pertanto, gli n rami positivi del luogo partono dagli n poli p_j di $F(s)$, mentre quelli negativi arriveranno in tali poli.

2) PUNTI SINGOLARI:

Sia \bar{K}' il valore di K' per cui la funzione $f(s, K')$ presenta una radice multipla in s_0 . Si ha allora: $f(s, \bar{K}') = (s - s_0)^h f_1(s)$, dove $h \geq 2$, $f_1(s_0) \neq 0$.

Inoltre, s_0 è il punto in cui alcuni rami del luogo si intersecano, e viene detto PUNTO SINGOLARE.

In ogni punto singolare la derivata rispetto a s di $f(s, K')$, calcolata in s_0 , è pari a zero. Infatti:

$$\frac{\partial f(s, \bar{K}')}{\partial s} = h(s - s_0)^{h-1} f_1'(s) + (s - s_0)^h f_1'(s) \quad h \geq 2$$

Quindi le equazioni per trovare un punto singolare sono le seguenti:

$$\begin{cases} f(s, K') = 0 \\ \frac{\partial f(s, K')}{\partial s} = 0 \end{cases} \rightarrow \text{Questo chiaramente vale per tutti i punti del luogo}$$

Ricchiamo K' dalla prima equazione:

$$K' = -\frac{\prod_{j=1}^m (s - p_j)}{\prod_{i=1}^n (s - z_i)}$$

e sostituiamolo nella seconda:

$$\frac{\partial f(s, K')}{\partial s} = \frac{1}{ds} \left(\prod_{j=1}^m (s - p_j) \right) + K' \left(\frac{1}{ds} \prod_{i=1}^n (s - z_i) \right) =$$

$$= \frac{d}{ds} \left(\prod_{j=1}^n (s-p_j) \right) - \frac{\prod_{j=1}^n (s-p_j)}{\prod_{i=1}^m (s-z_i)} \frac{d}{ds} \left(\prod_{i=1}^m (s-z_i) \right) = 0$$

Moltiplicando per $\prod_{i=1}^m (s-z_i)$ si ottiene infine:

$$\frac{d}{ds} \left(\prod_{j=1}^n (s-p_j) \right) \prod_{i=1}^m (s-z_i) - \prod_{j=1}^n (s-p_j) \frac{d}{ds} \left(\prod_{i=1}^m (s-z_i) \right) = 0 \quad (*)$$

È facile vedere che il polinomio appena ottenuto ha grado $n+m+1$ e ammette quindi $n+m+1$ radici. Non tutte queste radici saranno punti singolari: infatti, i valori s_0 per cui l'equazione di partenza fornisce un valore di K' non reale vanno esclusi. Questo ci dice che il luogo delle radici potrà presentare al più $n+m+1$ punti singolari che sono alcune delle radici di $(*)$.

Notiamo che un polo p_j o uno zero z_i con moltiplicità maggiore di 1 soddisfa $(*)$ e, una volta che è stato sostituito nell'altra equazione, fornisce una K' reale.

Siamo adesso $Q_p(s) := \prod_{j=1}^n (s-p_j)$, $Q_z(s) := \prod_{i=1}^m (s-z_i)$. Allora:

$$\frac{d}{ds} (Q_p(s)) Q_z(s) - Q_p(s) \frac{d}{ds} (Q_z(s)) = 0 \quad \xrightarrow{\text{Applichiamo la derivata del prodotto}}$$

$$\Rightarrow Q_z(s) \sum_{j=1}^n \frac{Q_p(s)}{s-p_j} - Q_p(s) \sum_{i=1}^m \frac{Q_z(s)}{s-z_i} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_p(s) Q_z(s) \left[\sum_{j=1}^n \frac{1}{s-p_j} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{s-z_i} \right] = 0$$

Mettendo a denominatore comune i termini tra parentesi quadre di quest'ultima equazione, si nota che eventuali zeri z_i e poli p_j con moltiplicità $v > 1$ (che appaiono con potenza unitaria a denominatore) non cancellano completamente i termini $(s-z_i)^v$, $(s-p_j)^v$ presenti in $Q_z(s)$, $Q_p(s)$.

In definitiva, tutti i poli e gli zeri multipli sono punti singolari, e i punti singolari che non siano zeri o poli di $F(s)$ sono tutte o alcune fra le soluzioni dell'equazione

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{s-p_j} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{s-z_i} = 0$$

Fr 3) IL LUOGO DELLE RADICI È SIMMETRICO RISPETTO ALL'ASSE REALE:

1) Questa proprietà segue banalmente dal fatto che $f(s, K')$, per ogni valore di K' reale, presenta radici che sono o reali o complesse coniugate. Pertanto, se un certo s_* appartiene al luogo per cui detto valore è K' , o $s_* \in \mathbb{R}$ o anche s^* appartiene al luogo, rispettando in ogni caso la simmetria rispetto all'asse reale.

4) CONDIZIONE DELLE FASI E DEI MODULI:

Poiché il luogo delle radici è descritto dall'equazione $f(s, K') = 0$, possiamo scrivere:

$$\prod_{j=1}^m (s - p_j) + K' \prod_{i=1}^m (s - z_i) = 0 \implies \prod_{j=1}^m (s - p_j) = -K' \prod_{i=1}^m (s - z_i)$$

2)

Abbiamo appena ottenuto una relazione di ugualanza tra due numeri complessi, che vale quando tali numeri hanno lo stesso modulo e la stessa fase.

$$\rightarrow \text{CONDIZIONE DELLE FASI: } \sum_{j=1}^m \arg(s - p_j) = \pi + \arg(K') + \sum_{i=1}^m \arg(s - z_i) + 2\pi n$$

$$\rightarrow \text{CONDIZIONE DEI MODULI: } \prod_{j=1}^m |s - p_j| = |K'| \cdot \prod_{i=1}^m |s - z_i|$$

5) ASSE REALE:

Consideriamo un punto s sull'asse reale a destra di tutti i poli e di tutti gli zeri giacenti sull'asse reale. Un s simile è tale che la fase di $s - z_i$ e la fase di $s - p_j$ sono nulle per ogni z_i, p_j reali. Per quanto riguarda i poli e gli zeri complessi, il fatto che sono a coppie coniugate fa sì che in ogni caso la somma della fase di $s - z_i$ e della fase di $s - z_i^*$ è anche essa nulla.



Pertanto, la condizione delle fasi si riduce a: $0 = \pi + \arg(K') \Rightarrow \arg(K') = -\pi$
 cioè $K' < 0$. Perciò, tutti i punti sull'asse reale a destra di tutti i poli e tutti gli zeri reali appartengono al luogo negativo.

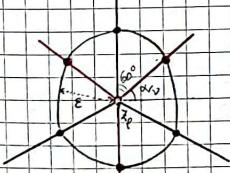
Andando verso sinistra lungo l'asse reale, quando si scavalca uno zero z_1 (o un polo p_1), si ha che la fase $\arg S(z)$ (o $\arg S(p)$) diventa π . Pertanto, ogni volta che si scavalca uno zero o un polo, cambia il segno di K' necessario per soddisfare la condizione delle fasi: il luogo positivo e negativo si alternano ogni volta che si scavalca uno zero o un polo. Però attenzione: se lo zero o il polo è doppio, il contributo alla fase è anche esso doppio e quindi il segno di K' non cambia.

In conclusione, tutti i punti sull'asse reale che hanno alla loro destra un numero complessivo dispari tra zeri e poli reali (contati con le loro molteplicità) appartengono al luogo positivo, mentre i restanti appartengono al luogo negativo.

25/05/2021

6) IN UN POLO (O IN UNO ZERO) DI MOLTEPLICITÀ ν CONVERGONO ν RAMI DEL LUOGO POSITIVO E ν

RAMI DEL LUOGO NEGATIVO CHE DIVIDONO LO SPAZIO IN SETTORI UGUALI:



Caso $\nu=3$: abbiamo preso un cerchietto intorno a uno zero z_0 di $F(z)$, il cui raggio ϵ è molto minore della distanza di z_0 da tutti gli altri zeri e poli di $F(z)$.

Questa domanda: ci sono punti su questa circonferenza che appartengono al luogo (positivo o negativo) per qualche valore di K' ? Se sì, quanti e dove sono?

Un qualsiasi punto s_ϵ sulla circonferenza può essere parametrizzato mediante la scrittura $s_\epsilon = s_\epsilon(\phi) = z_0 + \epsilon e^{i\phi}$, dove ϕ varia fra $-\pi$ e π .

Esiste un punto del cerchietto che appartiene per esempio al luogo positivo se è possibile

Trovare un valore di ϕ e di $K' > 0$ per cui la condizione delle fasi e quella dei moduli sono soddisfatte.

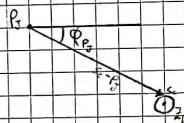
Partiamo dalla condizione delle fasi. Si ha:

$$\sum_{j=1}^n \arg(z_c - p_j) = \pi + \arg(K') + \sum_{i=1}^m \arg(z_c - z_i) + 2h\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n \arg(z_c + \epsilon e^{i\phi} - p_j) = \pi + \sum_{i=1}^m \arg(z_c + \epsilon e^{i\phi} - z_i) + 2h\pi$$

Consideriamo dapprima il luogo positivo, per cui $K' > 0$, $\arg(K') = 0$.

Si nota che se ϵ è molto minore della distanza di z_c dallo zero o del polo più vicino, i termini $\arg(z_c - p_j)$, $\arg(z_c - z_i)$, per $i \neq j$, sono praticamente costanti su tutto il cerchietto e sono circa uguali a rispettivamente a $\arg(z_c - p_j)$, $\arg(z_c - z_i)$.



Introduciamo quindi la seguente notazione:

$$\alpha = \sum_{j=1}^n \arg(z_c - p_j) - \sum_{i: z_i \neq z_c} \arg(z_c - z_i) - \pi$$

Se z_c ha multiplicità v , si ha:

$$\sum_{i: z_i = z_c} \arg(z_c - z_i) = \sum_{i: z_i = z_c} \arg(z_c + \epsilon e^{i\phi} - z_i) \approx \sum_{i: z_i = z_c} \arg(\epsilon e^{i\phi}) = v\phi$$

La condizione delle fasi si riduce dunque a: $v\phi \approx \alpha + 2h\pi$

$$\Rightarrow v \text{ soluzioni distinte: } \phi_h = \frac{\alpha}{v} + \frac{2h\pi}{v}, \quad h = 0, 1, \dots, v-1$$

$\Rightarrow \exists v$ punti su sulla circonferenza di raggio ϵ che appartengono al luogo positivo e che sono equispaziati tra loro formando un angolo col ramo vicino pari a $\frac{2\pi}{v}$.

Se consideriamo il luogo negativo, con $K' < 0$, $\arg(K') = \pi$, gli angoli saranno:

$$\phi_h = \frac{\alpha}{v} + \frac{\pi}{v} + \frac{2h\pi}{v}, \quad h = 0, 1, \dots, v-1$$

di Tali angoli presentano un contributo aggiuntivo di π_0 . Siccome i rami del luogo positivo formano settori con angolo $\frac{2\pi}{n}$, quelli del luogo negativo dividono a metà questi settori.

Per quanto riguarda la condizione dei moduli, abbiamo che:

$$|K'| = \frac{\prod_{j=1}^m |s - p_j|}{\prod_{i=1}^m |s - z_i|} \xrightarrow{s \rightarrow 0} +\infty$$

Pertanto, possiamo concludere che i rami del luogo positivo convergono a z_0 al tendere di K' all'infinito.

Tutto questo discorso fatto finora vale anche per i poli, con la seguente differenza:

$$|K'| = \frac{\prod_{j=1}^m |s - p_j|}{\prod_{i=1}^m |s - z_i|} \xrightarrow{s \rightarrow 0} 0$$

Perciò, possiamo concludere che i rami del luogo positivo convergono a p_0 al tendere di K' a zero da destra, e i rami del luogo negativo convergono a p_0 al tendere di K' a zero da sinistra.

26/05/2021

I) RAMI DEL LUOGO ALL'INFINITO E LORO ASINTOTI:

A seguito della proprietà 6, possiamo affermare che tutti gli n rami del luogo partono da qualche polo ma solo in di essi arrivano in uno zero. Ma abbiamo supposto $m < m$: che fine fanno, quando K' tende all'infinito, gli altri $n-m$ rami?

Per vedere questo in modo intuitivo, si considera dapprima uno zero z_0 di $F(s)$ di molteplicità r . Si può scrivere:

$$F(s) = K' \frac{(s - z_0)^r N_r(s)}{D(s)}$$

dove $N_r(s), D(s)$ sono due polinomi che non si annullano per $s = z_0$.

Si consideri ora il cambio di variabile $\alpha = 1/s$. Dall'espressione generale di $F(s)$ si ottiene:

$$\begin{aligned}
 F(\alpha) &= K' \frac{\prod_{i=1}^m (\frac{1}{\alpha} - z_i)}{\prod_{j=1}^n (\frac{1}{\alpha} - p_j)} = K' \frac{\frac{1}{\alpha^m} + b_{m-1} \frac{1}{\alpha^{m-1}} + \dots + b_0}{\frac{1}{\alpha^n} + a_{n-1} \frac{1}{\alpha^{n-1}} + \dots + a_0} \\
 &= K' \frac{\alpha^{n-m} + b_{m-1} \alpha^{n-m+1} + \dots + b_0 \alpha^n}{1 + a_{n-1} \alpha + \dots + a_0 \alpha^n} = K' \alpha^{n-m} \frac{N_\alpha(\alpha)}{D(\alpha)}
 \end{aligned}$$

multiplica num. e den. per α^n
con $N_\alpha(0) = 1 \neq 0$
 $D(0) = 1 \neq 0$

Confrontando le due espressioni di F , si vede come $F(\alpha)$ presenti uno zero in $\alpha = 0$ di molteplicità $n-m$. Esempio $\alpha = 1s$, questo significa che il punto all'infinito del piano complesso dove vive s (detto PUNTO IMPROPRI) è uno zero di molteplicità $n-m$. Nel punto improprio faranno quindi, per K' che tende all'infinito, gli $n-m$ rami che non finiscono in alcuno zero finito z_i .

Per giustificare questo fatto in modo più rigoroso, ma anche per capire in che modo vanno all'infinito i suffetti $n-m$ rami, riscriviamo $F(s)$ con problemi sviluppati:

$$F(s) = K' \frac{s^m - s^{m-1} \sum_{i=1}^m z_i + \dots}{s^n - s^{n-1} \sum_{j=1}^n p_j + \dots}$$

TERMINI DI GRADO INFERIORE

Dividendo il polinomio a denominatore per quello a numeratore si ottiene:

$$F(s) = K' \frac{1}{s^{n-m} - \left(\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i \right) s^{n-m-1} + \dots}$$

TERMINI IN s CHE, PER $s \rightarrow \infty$, DIVENGONO
TRASCURABILI RISPETTO AI PRIMI DUE

$$\text{Definiamo ora } \alpha_a := \frac{1}{n-m} \left(\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i \right) \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow (s - \alpha_a)^{n-m} &= s^{n-m} + (n-m)s^{n-m-1}(-\alpha_a) + \dots = \\
 &= s^{n-m} - \left(\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i \right) s^{n-m-1} + \dots
 \end{aligned}$$

PER $s \rightarrow \infty$ È CIRCA UGUALE AL DENOMINATORE DELLA $F(s)$
(CIRCA PERCHÉ I TERMINI DI GRADO + BASSO DIFFERISCONO)

Di conseguenza, $F(s)$ può essere approssimata a:

$$F(s) \approx K' \frac{1}{(s - \alpha_a)^{n-m}}$$

Perciò, le radici del polinomio a denominatore di $W(s)$ sono le radici delle seguenti equazioni:

$$(s - \alpha_a)^{n-m} + K' = 0 \implies (s - \alpha_a)^{n-m} = -K'$$

Parametrizziamo i punti del piano complesso s che si trovano su un cerchio molto grande (che circonda idealmente il punto improprio così come i cerchietti scelti in precedenza circondavano gli zeri al finito) definendo $s = \alpha_a + p e^{i\theta}$, con p molto grande e $\theta \in (-\pi, \pi)$.

Sostituendo tale parametrizzazione nell'equazione precedente si ha:

$$p^{n-m} e^{i\theta(n-m)} = -K'$$

MODULI: $|K'| = p^{n-m} \Rightarrow$ per $p \rightarrow \infty$ anche K' diverge

$$\Rightarrow \text{FASI (per } K' > 0\text{): } \Theta \cdot (n-m) = \pi + 2h\pi \Rightarrow \Theta_h = \frac{(2h+1)\pi}{n-m}, h = 0, 1, \dots, n-m-1$$

SUL CERCHIO DI RAGGIO p ci sono $n-m$ rami disposti a formare una stella con angoli tra loro pari a $\frac{2\pi}{n-m}$.
IL CENTRO DELLA STELLA È IL PUNTO $(\alpha_a, 0)$ CHE RAPPRESENTA QUINDI IL CENTRO DEGLI ASINTOTI.

= Regole per il tracciamento del luogo delle radici:

• **REGOLA 1:** si scriva la $F(s)$ nella sua forma canonica, individuando quanti zeri e poli della funzione. Si riportino nel piano complesso questi zeri e questi poli, utilizzando un qualche espediente per segnalare la molteplicità (visualmente i poli vengono rappresentati mediante cerchietti e gli zeri mediante cerchielli).

• **REGOLA 2:** individuare sull'asse reale i punti che appartengono al luogo positivo e quelli che appartengono al luogo negativo sfruttando la Proprietà 5.

• **REGOLA 3:** il luogo positivo è composto da n rami, ognuno dei quali parte da qualche polo. Solo m rami faranno negli zeri mentre $n-m$ rami se ne avranno all'infinito. Per capire come, calcolare il centro degli asintoti $(\alpha_a, 0)$ e determinare gli asintoti stessi, così come spiegato nella Proprietà 7. La stessa cosa vale per il luogo negativo dove in questo caso i rami tendono ai poli per K' che tende a zero e provengono dagli zeri / dal punto improprio per K' che viene da $-\infty$. In generale la stella degli asintoti si determina facilmente essendo l'asse reale sempre un asintoto per uno o entrambi i luoghi positivo e negativo.

• REGOLA 4: provare a tracciare i vari rami sia per $K' \geq 0$ sia per $K' < 0$ sapendo, come detto, che ogni ramo per $K' \geq 0$ parte da un polo e finisce in uno zero / nel punto improprio, mentre per $K' < 0$ i rami provengono dagli zeri / dal punto improprio e tendono ai poli. Per il tracciamento dei rami è importante anche individuare la presenza e l'ubicazione di eventuali punti singolari (si veda in proposito la Proprietà 2). Si tenga anche conto della simmetria del luogo rispetto all'asse reale (Proprietà 3).

• REGOLA 5: il criterio di Routh può aiutare a capire per quali valori di K' i vari rami intersecano l'asse immaginario: basta vedere infatti per quali valori di K' il criterio Positivo di Routh, applicato al polinomio $f(s, K')$ non è più verificato.

• REGOLA 6: le formule degli angoli con cui i rami raggiungono uno zero o un polo (si veda la Proprietà 6) possono migliorare la qualità del disegno del luogo che rimane comunque qualitativo se tracciato senza l'aiuto di strumenti di calcolo automatici.

Esempio:

$$P_1(s) = K' \frac{1}{s(s+2)(s+4)} \quad \begin{matrix} m=3 \\ m=0 \end{matrix} ; \quad \text{poli in } p_1=0, p_2=-2, p_3=-4$$

$$\alpha_a = \frac{1}{n-m} \left(\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i \right) = \frac{1}{3} (0-2-4) = -2 \quad \Rightarrow \text{Gli asintoti saranno centro nel punto } (-2,0)$$

Sull'asse reale ci sono tre poli consecutivi: questo è indice che tra questi poli ci devono essere dei punti singolari, che si calcolano nel seguente modo:

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{s-p_j} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{s-z_i} = 0 \Rightarrow \frac{1}{s} + \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+4} = 0 \Rightarrow \frac{(s+2)(s+4) + s(s+4) + s(s+2)}{s(s+2)(s+4)} = 0$$

$$\Rightarrow 3s^2 + 12s + 8 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = -2 \pm \frac{2\sqrt{3}}{3} = \{-3,15; -0,85\}$$

A partire da queste informazioni, possiamo tracciare il luogo (che viene riportato nella pagina seguente).

