

30/09/2020

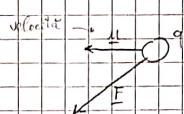
Campo elettrico

Campo magnetico
causato da induzione magnetica

I VETTORI SI INDICANO CON LETTERE SOTTOLINEATE: \underline{E} , \underline{B}

\vec{F} che agisce su una carica in movimento:

$$\underline{F} = \underline{F}_e(q) + \underline{F}_m(q, \underline{v}) = q(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})$$



\underline{F} , \underline{E} , \underline{B} sono in generale funzioni dello spazio e del tempo:

$$\underline{E}(x, t) = \underline{E}(x, y, z; t) \quad \underline{B}(x, t) = \underline{B}(x, y, z; t)$$

Lo spostamento dielettrico \underline{D} [$C \cdot m^{-2}$] e il campo magnetico \underline{H} [$A \cdot m^{-2}$] si ottengono da:

$$\underline{D} = \epsilon \underline{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \underline{E} \quad (\epsilon \approx \frac{1}{36\pi} 10^{-9} F \cdot m^{-1})$$

$$\underline{H} = \frac{\underline{B}}{\mu} = \frac{\underline{B}}{\mu_0 \mu_r} \quad (\mu \approx 4\pi \cdot 10^{-7} H \cdot m^{-1})$$

Equazioni di Maxwell:

$$\oint \underline{E} \cdot d\underline{s} = - \frac{\partial}{\partial t} \iint \underline{B} \cdot \underline{n}_0 dS \quad \rightarrow \text{LEGGI DI FARADAY}$$

$$\oint \underline{H} \cdot d\underline{s} = \frac{\partial}{\partial t} \iint \underline{D} \cdot \underline{n}_0 dS + \iint \underline{J} \cdot \underline{n}_0 dS \quad \rightarrow \text{LEGGI DI AMPÈRE}$$

In ogni caso, nel nostro caso specifico:

SENZA VOLTE

\rightarrow RELAZIONI DIFFERENZIALI CORRISPONDENTI:

Solo i correnti da induttore e descritto in modo sufficientemente accurato i fenomeni di cui ci occupiamo. Tuttavia, a differenza delle relazioni in forma integrale, non lasciano SENZA VOLTE.

$$\nabla \times \underline{E} = - \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \quad \rightarrow \text{VORTICI DI } \underline{E}$$

$$\nabla \times \underline{H} = \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} + \underline{J} \quad \rightarrow \text{VORTICI DI } \underline{H}$$

PER IL TEOREMA DI STOKES:

$$\iint \nabla \times \underline{E} \cdot \underline{n}_0 dS = \oint \underline{E} \cdot \underline{t}_0 d\underline{s}$$

COSTANTE INSIEME S
C'è UNA CINTURA

\rightarrow TANGENTE ALL'ELEMENTO INFINTESIMO
SOPRA LINEA CHIUSA; VARIA LA PIANO APERTO

ATTRAVERSO CONTINUITÀ NEL VOLUME FRACCIONATO NELL'ESTERNO E

$$\oint \underline{n}_0 \cdot \underline{D} d\underline{s} = q \quad \rightarrow \text{LEGGI DI GAUSS}$$

$$\iint \underline{n}_0 \cdot \underline{B} dS = 0$$

"In assenza di corrente magnetica, senza solo i dipoli magnetici"

\rightarrow RELAZIONI DIFFERENZIALI CORRISPONDENTI:

$$\nabla \cdot \underline{D} = \rho$$

SORGENTI $\rightarrow \underline{D}$

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0$$

SORGENTI $\rightarrow \underline{B}$ NULO

$$\hookrightarrow \text{PER IL TEOREMA DELLA DIVERGENZA: } \iiint_V \nabla \cdot \underline{F} \, dV = \oint_S \underline{F} \cdot \underline{n} \, dS$$

Operatore Nabla: \rightarrow operatore di tipo differenziale che ha caratteristiche simili

$$\nabla [] = x_0 \frac{\partial []}{\partial x} + y_0 \frac{\partial []}{\partial y} + z_0 \frac{\partial []}{\partial z}$$

Sia $\phi(x, y, z)$ una funzione scalare:

$$\nabla \phi = \text{grad } \phi = x_0 \frac{\partial \phi}{\partial x} + y_0 \frac{\partial \phi}{\partial y} + z_0 \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

\sim DIVERGENZA DI UNA VARIABILE SPAZIALE CON GRANDEZZA SPAZ.

$$\text{Sia } \underline{F}(x, y, z) = x_0 \underline{F}_x(x, y, z) + y_0 \underline{F}_y(x, y, z) + z_0 \underline{F}_z(x, y, z)$$

$$\nabla \cdot \underline{F} = \text{div } \underline{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\text{LAPLACIANO: } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\nabla \times \underline{F} = \text{rot } \underline{F} = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = x_0 \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + y_0 \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + z_0 \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$$

06/10/2020

$$a \cdot b = a_{x_0} b_{x_0} + a_{y_0} b_{y_0} + a_{z_0} b_{z_0} \quad a \times b = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ a_{x_0} & a_{y_0} & a_{z_0} \\ b_{x_0} & b_{y_0} & b_{z_0} \end{vmatrix}$$

Corrente di conduzione:

$$J := \text{DENSITÀ (SUPERFICIALE) DI CORRENTE} \quad [A/m^2]$$

PIOMALE TRA OFFICE DI S;
E VIRETA VERSO L'ESTERNO

$$\text{Corrente che attraversa una data superficie } S : \quad I_s = \iint_S J \cdot \underline{n} \, dS \quad [A]$$

$$\rightarrow J = \rho \underline{u} \quad \text{dove } \rho \text{ è una densità di carica volumetrica e } \underline{u} \text{ è la velocità media con cui si muovono le cariche}$$

MEDIA IN VOLUME E MIGRATIVA

$$\text{EQUAZIONE DI CONTINUITÀ: } \iint_S J \cdot \underline{n} \, dS = \iiint_V \nabla \cdot J \, dV = - \frac{\partial}{\partial t} \iint_V \rho J \, dV$$

$$\text{In forma differenziale: } \nabla \cdot J = - \frac{\partial J}{\partial t}$$

Legge di Ohm della condutibilità elettrica:

$$J = g \underline{E} \quad \text{dove } g = \text{condutibilità } [S/m^2]$$

CARICA DI CANCELLAZIONE → rappresenta una corrente legata (diretta) a un campo elettro-

In corso che non è necessario lo scambiare energia.

Parametri del mezzo:

Un mezzo è caratterizzato elettromagneticamente da:

- COSTANTE ELETTRICA ϵ
- COSTANTE MAGNETICA μ
- COSTANTE DI CONDUTTIVITÀ ELETTRICA σ

Rispetto a ciascuno di questi parametri, il mezzo è:

→ OMOGENEO (o uniforme) se il parametro non varia con le coordinate.

→ LINEARE se il parametro è indipendente dall'intensità dei campi.

↳ per campi particolarmente intensi, questa proprietà, in generale, viene meno

→ ISOTROPO se il parametro è indipendente dalla direzione dei campi.

↳ e.g. se il mezzo è isotropo, in $\underline{J} = g \underline{E}$ si ha che $\underline{J} \parallel \underline{E}$. ↳ AVVIGLIA \Leftrightarrow IL PARAMETRO È UNO SCALARE

Se il mezzo è ANISOTROPO (= non isotropo), viene caratterizzato da un'ESPRESSIONE TENSORIALE del parametro.

PRODOTTO TRA MATRICE (\rightarrow
tavola) E VETTORE

ESEMPIO:

$$[\underline{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

In particolare, in un mezzo anisotropo rispetto a un parametro, i vettori di una delle seguenti coppie $(\underline{E}, \underline{D})$, $(\underline{H}, \underline{B})$, $(\underline{E}, \underline{J})$ possono non essere paralleli tra loro, e sono valide le seguenti relazioni:

$$\underline{D} = [\underline{\varepsilon}] \underline{E} ; \quad \underline{B} = [\mu] \underline{H} ; \quad \underline{J} = [g] \underline{E}$$

ESEMPIO:

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

Dove $\underline{E} = E_x \underline{x}_0 + E_y \underline{y}_0 + E_z \underline{z}_0$.

CONDIZIONE DI ISOTROPIA

Affinché $\underline{D} \parallel \underline{E}$, $[\underline{\varepsilon}]$ deve essere una matrice centrale o un suo multiplo.

→ Un mezzo si dice CHIRALE quando i vettori elettrici e magnetici dipendono dai corrispondenti vettori di entrambi i tipi:

$$\underline{D} = \varepsilon \underline{E} + \alpha_c \underline{B} \quad \underline{H} = \mu^{-1} \underline{B} + \alpha_c \underline{E}$$

Dove α_c [Siemens] è l'ammittenza di chiralità.

Grandezze implesse:

Ponendo $\underline{J} = g \underline{E}$:

$$\nabla \times \underline{E} = - \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \underline{H} = \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} + g \underline{E}$$

} Sono equazioni omogenee
(= senza termini noto)

→ Il campo elettromagnetico viene generato da processi che trasformano energia di un qualsiasi tipo (e.g. energia chimica) in energia elettromagnetica.

In particolare, descriviamo questi fenomeni di trasformazione attraverso grosse imprese come la CORRENTE IMPRESA \underline{J}_i . In definitiva:

$$\nabla \times \underline{H} = \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} + \underline{\sigma E} + \underline{J}_i \quad \underline{J}_i \neq \underline{\sigma E}$$

RAPPRESENTA LA GENERAZIONE DEI CAMPI → RAPPRESENTA IL TERMINI NOTO DELL' EQUAZIONE → DESCRIVE LA GENERAZIONE DI FENOMENI DI TIPO ELETROMAGNETICO

Nell'uso comune, la generazione del campo elettromagnetico avviene mediante il trasferimento di energia elettromagnetica da una frequenza a un'altra.

→ LA PARTEZIONE DI SPAZIO CHE NON CONTIENE LE SORGENTI (LELLA CORRENTE IMPRESA) VENGONO DESCRITTA TRAMITE LE EQUAZIONI OMogenee VISTE PRIMA

Ci sono casi in cui non si ha una corrente impressa effettiva, ma è necessario introdurre una grandezza (una sorgente) equivalente per motivi matematici.

Un esempio di questo tipo è la corrente magnetica impressa \underline{J}_{im} che non è "fisica", bensì "matematica", e funge da termine noto nella prima equazione di Maxwell.

INOLTRE, L'AGGIUNTA

→ ANCHE DI \underline{J}_{im} PORTA PURE A UNA SIMMETRIA TRA LE 2 EQ. MAXWELL CHE ABBIANO RICONSIDERATO POCO FA (J_{im} := concetto di corrente magnetica)

$$\nabla \times \underline{E} = - \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} - \underline{J}_{im} - \underline{J}_{um}$$

$$\nabla \times \underline{H} = \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} + \underline{J} + \underline{J}_i$$

Poiché la struttura delle equazioni è formalmente simmetrica, ciascuna equazione si trasforma nell'altra mediante le seguenti corrispondenze:

PRINCIPIO DI DUALITÀ:
coll'asta corrispondente
trasformare gli operatori
Maxwell nell'altro

$$\underline{E} \rightarrow \underline{H}$$

$$\underline{J} \rightarrow \underline{J}_{im}$$

$$\underline{H} \rightarrow -\underline{E}$$

$$\underline{J}_{im} \rightarrow -\underline{J}$$

$$\epsilon \leftrightarrow \mu$$

*Per esempio si fa uso di queste simmetri equivalenti per avere un'approssimazione di un modello reale che ha delle simmetri fisiche difficili da trattare.
→ IN QUESTO CASO DAPPRESERVANO COMPLETAMENTE IL CONTESTO

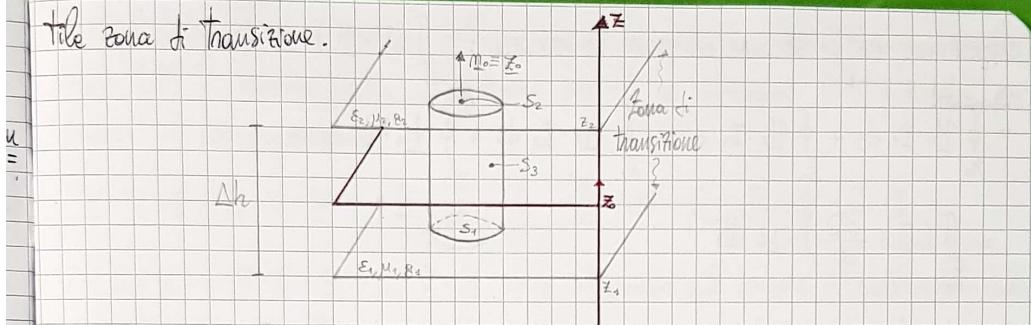
10 07/10/2020

Condizioni al contorno:

Componenti normali:

La forma differenziale delle equazioni di Maxwell, per esempio, rappresenta delle vere e proprie equazioni differenziali che, per avere una soluzione unica, devono essere affiancate a delle condizioni al contorno. Uno scenario che possiamo immaginare è quello con due mezzi omogenei con parametri diversi separati da una sot-

Utile zona di transizione.



$$\text{LEGGE DI GAUSS: } \oint_{S} \underline{D} \cdot \underline{n}_0 d\underline{S} = \iiint_V \rho dV = \iint_{S_1} \underline{D}_1 \cdot \underline{n}_1 d\underline{S} + \iint_{S_2} \underline{D}_2 \cdot \underline{n}_2 d\underline{S} + \iint_{S_3} \underline{D}_3 \cdot \underline{n}_3 d\underline{S}$$

$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$

V carica nel conduttore

$\underline{D}_1 \rightarrow -\underline{M}_1 \rightarrow -\underline{Z}_1$ DIRETTA INFORGI

$\underline{D}_2 \rightarrow -\underline{M}_2 \rightarrow -\underline{Z}_2$ DIRETTA LUNGO \underline{Z}_2

$\underline{D}_3 \rightarrow -\underline{M}_3 \rightarrow -\underline{Z}_3$ VARIATA A PUNTO A PUNTO

Quando $\Delta h \rightarrow 0$ si ha che $S_3 \rightarrow 0$, $S_2 \rightarrow S_1$, $Z_1 \rightarrow Z_2 \rightarrow Z_0$.

e dunque: $\iint_S (\underline{D}_2 - \underline{D}_1) \cdot \underline{n}_0 d\underline{S} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \iint_V \rho dV$

ρ densità volumetrica di carica

Si hanno due casi:

1) ρ finita: $\iint_V \rho dV$ s'annisce. $\Rightarrow \iint_S (\underline{D}_2 - \underline{D}_1) \cdot \underline{n}_0 d\underline{S} = 0 \Rightarrow \underline{D}_1 \cdot \underline{n}_0 = \underline{D}_2 \cdot \underline{n}_0$

2) ρ "infinita" (e.g. quando si ha una tensità superficiale finita, in cui si considera \underline{v} una superficie a spessore nullo) $\rightarrow \rho = \sigma \delta(z - z_0)$; per la proprietà di camponamento della funzione impulsiva: $(\underline{D}_2 - \underline{D}_1) \cdot \underline{n}_0 = \sigma$

σ DENSITÀ SUPERFICIALE DI CARICA (FINITA)

Per dualità, la condizione per \underline{B} è: $(\underline{B}_2 - \underline{B}_1) \cdot \underline{n}_0 = \sigma_m \equiv 0$

Componenti tangenziali:

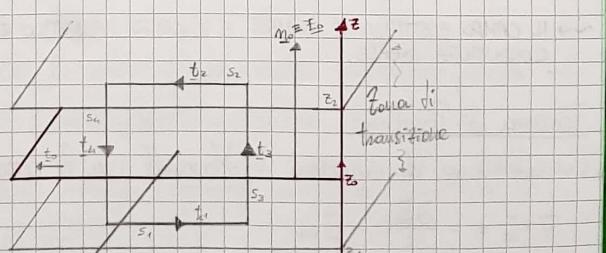
Consideriamo una spira

che circonda S in un piano

contenente \underline{n}_0 e parallelo

e alle superfici di transizione.

Δh



CIRCOLAZIONE PER LA SECONDA EQUAZIONE DI MAXWELL: $\iint_S (\nabla \times \underline{H}) \cdot \underline{\nu}_0 dS =$

$$= \oint_{S_1} \underline{H}_1 \cdot \underline{t}_1 dS + \oint_{S_2} \underline{H}_2 \cdot \underline{t}_2 dS + \oint_{S_3} \underline{H}_3 \cdot \underline{t}_3 dS + \oint_{S_4} \underline{H}_4 \cdot \underline{t}_4 dS =$$

$$= \iint_S \left(\underline{J} + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} \right) \cdot \underline{\nu}_0 dS$$

Quando $\Delta h \rightarrow 0$, si ha che $S_3 \rightarrow S_4 \rightarrow 0$, $S_1 \rightarrow S_2$, $-t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow t_0$, per cui:

$$\iint_S (\underline{H}_2 - \underline{H}_1) \cdot \underline{t}_0 dS = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \iint_S \left(\underline{J} + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} \right) \cdot \underline{\nu}_0 dS$$

Si hanno due casi:

1) Sia \underline{J} , sia $\frac{\partial \underline{D}}{\partial t}$ si mantengono finite (\rightarrow variazioni "lente" del campo):

$$\iint_S \left(\underline{J} + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} \right) \cdot \underline{\nu}_0 dS \xrightarrow{\text{svanisce}} 0 \quad \text{e} \quad (\underline{H}_2 - \underline{H}_1) \cdot \underline{t}_0 = 0 \Rightarrow \underline{H}_2 \cdot \underline{t}_0 = \underline{H}_1 \cdot \underline{t}_0$$

2) $\frac{\partial \underline{D}}{\partial t}$ è finita ma $\underline{J} = K \delta(z - z_0)$; per la proprietà di campionamento della funzione impulsiva:

$$(\underline{H}_2 - \underline{H}_1) \cdot \underline{t}_0 = K \cdot \underline{\nu}_0$$

Quanto, dato che $t_0 = \underline{\nu}_0 \times \underline{n}_0$, $\underline{\nu}_0$ è in direzione arbitraria, $\underline{n}_0 \times (\underline{H}_2 - \underline{H}_1) = K$

Il caso 2 è tipico di un conduttore ideale, con densità volumetrica di carica ρ infinita e sulla cui superficie la densità superficiale di corrente K è finita.

Per dualità, la condizione per \underline{E} è:

$$\underline{n}_0 \times (\underline{E}_1 - \underline{E}_2) = K_m \equiv 0$$

Supponiamo che la densità di corrente magnetica è idealmente nulla.

\rightsquigarrow IL CAMPO ELETTRICO È NORMALE E IL CAMPO MAGNETICO È TANGENTE ALLA SUPERFICIE DI UN CONDUTTORE IDEALE.

Teorema di Poynting: \leftarrow BILANCIO ENERGETICO

Consideriamo le equazioni di Maxwell con le commenti impresse:

$$\nabla \times \underline{E} = - \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} - \underline{J}_{im}$$

$$\nabla \times \underline{H} = \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} + \underline{J} + \underline{J}_i$$

Moltiplichiamo tutti i termini della 1^a equazione per \underline{H} , moltiplichiamo scalarmente tutti i termini della 2^a equazione per $-\underline{E}$ e sommiamo tutti i membri per "fondere" le due equazioni:

$$\underline{H} \cdot \nabla \times \underline{E} - \underline{E} \cdot \nabla \times \underline{H} = -\underline{H} \cdot \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} - \underline{E} \cdot \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} - \underline{g} \underline{E} \cdot \underline{E} - \underline{J}_{im} \cdot \underline{H} - \underline{J}_i \cdot \underline{E}$$

$$\nabla \cdot (\underline{E} \times \underline{H}) = \nabla \times \underline{E} \cdot \underline{H} - \underline{E} \cdot \nabla \times \underline{H} \Rightarrow \text{integrandi sul volume } V \text{ contornato dalla superficie } S,$$

ARBITRARIO

$$\oint_S \underline{E} \times \underline{H} \cdot n_o dS + \iiint_V (\underline{H} \cdot \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} + \underline{E} \cdot \frac{\partial \underline{D}}{\partial t}) dV + \iint_V \underline{g} \underline{E} \cdot \underline{E} dV =$$

Campo sulla superficie

$$= \iiint_V (-\underline{J}_i \cdot \underline{E} - \underline{J}_{im} \cdot \underline{H}) dV$$

IN GENERALE NON SONO uguali (vediamo al vertice delle pagine)!

Campo nella sorgente

08/10/2020

Analizziamo i termini presenti nell'ultima equazione che abbiamo scritto:

$-\underline{J}_i \cdot \underline{E}$

Se in una regione dello spazio una densità di carica ρ si muove con velocità \underline{v} ,

Alla densità di carica ρ con velocità \underline{v} è associata la densità di corrente

$\underline{J} = \rho \underline{v}$. Se è presente campo elettrico \underline{E} , esso esercita una forza $\underline{F} = \rho \underline{E}$ sulla carica nel volume unitario e cede la potenza $\rho \underline{E} \cdot \frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{J} \cdot \underline{E}$ al

la corrente nel volume unitario.

Quindi $-\underline{J} \cdot \underline{E}$ è la potenza ceduta dalla corrente al campo.

Poiché la corrente nel generatore, protetta da cause esterne, è opposta al campo, $-\underline{J}_i \cdot \underline{E}$ è una grandezza positiva.

$-\underline{J}_{im} \cdot \underline{H}$

ovvero nel caso in cui \underline{J}_{im} rappresenta una sorgente equivalente

Se non nullo, rappresenterebbe la potenza ceduta dalla "sorgente magnetica" al campo magnetico. Anche essa è una grandezza positiva.

\Rightarrow POTENZA EROGATA DALLE CORRENTI IMPRESSE (SORGENTI ELETTRICHE/MAGNETICHE) =

$$= \iiint_V -(\underline{J}_i \cdot \underline{E} + \underline{J}_{im} \cdot \underline{H}) dV$$

Tale potenza si suddivide in tre parti:

$$1) \iiint_V g E \cdot E dV = \iiint_V \vec{E} \cdot \vec{E} dV$$

↳ Potenza che il campo cede alle correnti di conduzione e che viene dissipata per effetto Joule.

$$2) \iiint_V g E \left(H \cdot \frac{\partial B}{\partial t} + E \cdot \frac{\partial D}{\partial t} \right) dV = \frac{\partial W_m}{\partial t} + \frac{\partial W_e}{\partial t}$$

↳ Potenza che va a variare l'energia immagazzinata nel campo elettromagnetico.

$$3) \iint_S \vec{E} \times \vec{H} \cdot \vec{n}_o dS$$

Tipicamente è da considerarsi come la potenza che arriva a un ricevitore

↳ Potenza che fluisce (esce) attraverso la superficie S che racchiude V .

→ Data che la superficie S è arbitraria, si ha flusso di potenza elettromagnetica a qualunque distanza dalle sorgenti (es. STELE).

⇒ $\vec{E} \times \vec{H}$ è il VETTORE DI POYNTING (densità superficiale di potenza [Wm^{-2}]).

In definitiva, il teorema di Poynting afferma che la potenza erogata dalle sorgenti in parte si dissipà per effetto Joule, in parte va a variare l'energia immagazzinata nel campo elettromagnetico, in parte fluisce attraverso la superficie S che racchiude il volume V .

Applicazioni a sorgenti armoniche:

Sorgenti/campi come funzioni sinusoidali del tempo sono esprimibili come:

$$\cdot \vec{J} = J \sin(\omega t) \vec{i}_o$$

$$\cdot \vec{E} = E \sin(\omega t + \varphi_e) \vec{e}_o$$

$$\cdot \vec{H} = H \sin(\omega t + \varphi_h) \vec{h}_o$$

La pulsazione ω è costante
e uguale per le 3 grandezze

φ_e = angolo di spazio
mentre tra \vec{J} , \vec{E}

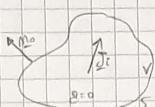
φ_h = angolo di spazio
mentre tra \vec{J} , \vec{H}

→ In generale, ampiezza, direzione e fase dipendono dalla posizione.
solo funzioni di punto

CASO PIÙ FACILE: MEZZO NON DISSIPATIVO ($g=0$)

Consideriamo una superficie arbitraria S che racchiude la sorgente di tipo el-

trico J_i .



Poiché non c'è dissipazione, il teorema di Poynting si scrive nel seguente modo:

$$\iiint_V -J_i \cdot E \, dV = \iiint_V (E \cdot \frac{\partial D}{\partial t} + H \cdot \frac{\partial B}{\partial t}) \, dV + \oint_S E \times H \cdot n \, dS$$

Per l'andamento sinusoidale:

$$\begin{aligned} - \iiint_V JE i_o \cdot e_0 \sin \omega t \cdot \sin(\omega t + \psi_e) \, dV &= \\ \iiint_V \left[EE^2 \sin(\omega t + \psi_e) \frac{d \sin(\omega t + \psi_e)}{dt} + \mu H^2 \sin(\omega t + \psi_h) \frac{d \sin(\omega t + \psi_h)}{dt} \right] \, dV \\ &+ \oint_S E \times H \cdot n \, dS \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin p + \sin q &= 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \\ \sin p - \sin q &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} \\ \cos p + \cos q &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \\ \cos p - \cos q &= -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} \end{aligned}$$

(*)

DUPPLICAZ. e PROSTAFERESI $\rightarrow -\frac{1}{2} \iiint_V JE i_o \cdot e_0 [\cos \psi_e - \cos(2\omega t + \psi_e)] \, dV =$

$$=\frac{\omega}{2} \iiint_V [EE^2 \sin[2(\omega t + \psi_e)] + \mu H^2 \sin[2(\omega t + \psi_h)] \, dV + \oint_S E \times H \cdot n \, dS$$

\rightarrow Nella misurazione si deve considerare, istante a istante, la media bilanciata della potenza in un periodo. La potenza associata alle variazioni di energia immagazzinata nel campo è periodica con periodo $\frac{T}{2}$, bilanciata dalle quantità periodiche nel termine di sorgente (e nel flusso di potenza).

** Ciò è dovuto al fatto che la frequenza associata alle variazioni di potenza è il doppio rispetto alla frequenza associata alle variazioni dei campi (da notare il $\cos(\omega t + \psi)$ e $\sin(\omega t + \psi)$).

Valori medi in un periodo T :

$$-\frac{1}{2} \iiint_V JE i_o \cdot e_0 \frac{1}{T} \int_0^T [\cos \psi_e - \cos(2\omega t + \psi_e)] \, dt \, dV =$$

$$= -\frac{1}{2} \iiint_V JE i_o \cdot e_0 \cos \psi_e \, dV =$$

CORRENTE NEL GENERATORE \rightarrow CAMPO NEL GENERATORE \Rightarrow Sono due grandezze nulle se il generatore non è incluso nel volume considerato

$$= \frac{\omega}{2} \iiint_V [EE^2 \frac{1}{T} \int_0^T \sin[2(\omega t + \psi_e)] \, dt + \mu H^2 \frac{1}{T} \int_0^T \sin[2(\omega t + \psi_h)] \, dt] \, dV +$$

\rightarrow \bullet è un termine di media nulla

$$+ \frac{1}{T} \int_0^T \oint_S E \times H \cdot n \, dS \, dt =$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T \oint_S \underline{E} \times \underline{H} \cdot \underline{n}_0 dS dt$$

CAMPUS RELATIVO ALLA SUPERFICIE (in generale non è uguale al campo relativo alla sorgente!)

CHE GENERALMENTE È CONTORNATO DA UN SETTO VOLUTO DI V

→ I termini corrispondenti alle variazioni di energia immagazzinata sono a metà nulla.

→ Il valore medio nel tempo della potenza erogata dalle sorgenti coincide con il valore medio della potenza che fluisce attraverso la superficie che circonda la sorgente.

→ La potenza media erogata dipende dallo sfasamento Ψ_e fra densità di corrente e campo elettrico.

Assunto $\underline{i}_0 \cdot \underline{e}_0 > 0$:

- Se $\frac{\pi}{2} < \Psi_e \leq \frac{3}{2}\pi \Rightarrow \cos \Psi_e < 0 \Rightarrow$ la potenza erogata POSITIVA (ma sima per $\Psi_e = \pi$) fluisce da S.

- Se $\Psi_e = \frac{\pi}{2}$ (+ QUADRATURA tra corrente e campo) \Rightarrow le sorgenti non erogano potenza.

- Se $0 < \Psi_e < \frac{\pi}{2}$ oppure $\frac{3}{2}\pi < \Psi_e < 2\pi \Rightarrow \cos \Psi_e > 0 \Rightarrow$ la potenza "erogata" dalle "sorgenti" è NEGATIVA (perciò non si tratta propriamente di sorgenti, bensì di elementi dissipativi) ed è bilanciata dalla potenza entrante (+ flusso negativo) attraverso S.

13/10/2020

SECONDO CASO: MEZZO DISSIPATIVO ($\sigma \neq 0$) CONTORNATO DA UN INVOLUCRO DI CONDUTTORE IDEALE (con $\sigma \rightarrow \infty$)

→ CAMPO ELETTRICO \perp SUPERFICIE

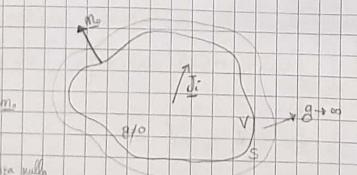
→ CAMPO MAGNETICO \parallel SUPERFICIE

→ VETTORE POINTING \parallel SUPERFICIE

MA IL CAMPO MAGNETICO $\rightarrow \underline{H} \perp \underline{n}_0$

$\rightarrow \oint_S \underline{E} \times \underline{H} \cdot \underline{n}_0 dS = 0$

S → flusso di potenza nulla



Esempio tipico:
FORNO A MICROONDE

$$\hat{\underline{E}} = \hat{E}_x \underline{x} + E_{xz} \underline{z}$$

$$= E_{xx} \underline{x}$$

$$\underline{E}_r = E_{ox} \underline{x}$$

$$\underline{E}_s = E_{ox} \underline{x}$$

$\hat{\underline{E}}$ è una

non è \underline{E}

Teorema di Poynting con $S \equiv$ superficie interna del metallo:

$$\iiint_V -\underline{J} \cdot \underline{E} dV = \iiint_V (\underline{E} \cdot \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} + \underline{H} \cdot \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}) dV + \iiint_V g \underline{E} \cdot \underline{E} dV$$

Mettendo su un periodo:

$$\begin{aligned} \text{me} = -\frac{1}{2} \iiint_V \underline{J} \underline{E} \underline{i}_0 \cdot \underline{e}_0 \cos \varphi_e dV &= \iiint_V \frac{1}{T} \int_0^T g E^2 \sin^2(\omega t + \varphi_e) dt dV = \\ &= \iiint_V g \frac{E^2}{2} dV \end{aligned}$$

→ Tutta la potenza erogata dalla sorgente si dissipata nel materiale dissipativo.

co2 Se $g=0$ all'interno di $V \rightarrow \varphi_e = \pi/2 \Rightarrow$ il campo elettrico è in quadratura con la corrente e , quindi non eroga potenza (NO EROGAZIONE & NO DISSIPAZIONE).

→ Questo è il caso tipico del filo a microonde, in cui il vetro dissipativo è rappresentato dal cito il quale viene scalato.

Notazioni complesse:

us Consideriamo delle sorgenti sinusoidali: abbiamo un campo elettromagnetico che varia sinusoidalmente con pulsazione costante ω .

$$E(t) = E_{ox}(t) \underline{x}_0 + E_{oy}(t) \underline{y}_0 + E_{oz}(t) \underline{z}_0$$

$$E_{ox}(t) = E_{ox} \cos(\omega t + \phi_x) \quad \rightarrow E \cos \varphi \quad E_y(t), E_z(t)$$

$$\hat{E}_{ox} = E_{ox} e^{j\phi_x} = E_{ox} (\cos \phi_x + j \sin \phi_x) = E_{ox}^r + j E_{ox}^i \quad \begin{matrix} \text{parte reale} \\ \text{parte immag.} \end{matrix}$$

$$\hat{E}_{ox} e^{j\omega t} = E_{ox} e^{j(\omega t + \phi_x)} = E_{ox} [\cos(\omega t + \phi_x) + j \sin(\omega t + \phi_x)]$$

$$\Rightarrow E_{ox}(t) = \operatorname{Re} [\hat{E}_{ox} e^{j\omega t}] \quad \rightarrow E \cos \varphi \quad E_y(t), E_z(t)$$

$$\begin{aligned} \hat{E} &= \hat{E}_{ox} \underline{x}_0 + \hat{E}_{oy} \underline{y}_0 + \hat{E}_{oz} \underline{z}_0 = (E_{ox}^r + j E_{ox}^i) \underline{x}_0 + (E_{oy}^r + j E_{oy}^i) \underline{y}_0 + (E_{oz}^r + j E_{oz}^i) \underline{z}_0 = \\ &= E_{ox}^r \underline{x}_0 + E_{oy}^r \underline{y}_0 + E_{oz}^r \underline{z}_0 + j (E_{ox}^i \underline{x}_0 + E_{oy}^i \underline{y}_0 + E_{oz}^i \underline{z}_0) = E_r + j E_i \end{aligned}$$

$$E_r = E_{ox} \cos \phi_x \underline{x}_0 + E_{oy} \cos \phi_y \underline{y}_0 + E_{oz} \cos \phi_z \underline{z}_0 \quad \rightarrow \text{VETTORE REALE}$$

$$E_i = E_{ox} \sin \phi_x \underline{x}_0 + E_{oy} \sin \phi_y \underline{y}_0 + E_{oz} \sin \phi_z \underline{z}_0 \quad \rightarrow \text{VETTORE IMMAGINARIO}$$

\hat{E} è una quantità complessa di carattere vettoriale ("VETTORE COMPLESSO"); non è rappresentabile nello spazio ordinario.

→ E_r, E_i singolarmente sono rappresentabili

VETTORE FUNZIONE DEL TEMPO:

$$\underline{E}(t) = \operatorname{Re} [\hat{\underline{E}} e^{j\omega t}] = \operatorname{Re} [(E_x + jE_y)(\cos \omega t + j \sin \omega t)] = E_x \cos \omega t - E_y \sin \omega t$$

NB: E_x, E_y non sono componenti di un vettore euclideo.

L'ampiezza di $\underline{E}(t)$, in generale, è funzione del tempo.

→ $\underline{E}(t)$ è un vettore che si ottiene dalla combinazione di due vettori, E_x, E_y , le cui ampiezze variano sinusoidalmente nel tempo.

Poiché due vettori individuano un piano, si ha che il campo varia in quel piano.

14/10/2020

La variabilità di una funzione sinusoidale è data solo dalla pulsazione ω .

Campi nel dominio della frequenza:

Applicando la trasformata di Fourier, possiamo scrivere un campo vettoriale con generica dipendenza dal tempo nel seguente modo:

$$\underline{A}(\underline{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\underline{A}}(\underline{x}, \omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \rightarrow \text{SPECTRO ELETTRONICO} \approx \text{densità di potere in frequenza}$$

→ Se adesso usato la frequenza l'azieciò la pulsazione ω , questo fattore non ci sarebbe!

$$\text{dove } \hat{\underline{A}}(\underline{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{A}(\underline{x}, t) e^{-j\omega t} dt$$

$\hat{\underline{A}}(t)$ è una variabile fisica reale, $\hat{\underline{A}}(-\omega) = \hat{\underline{A}}^*(\omega)$

$$\Rightarrow \underline{A}(\underline{x}, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \operatorname{Re} [\hat{\underline{A}}(\underline{x}, \omega) e^{j\omega t}] d\omega$$

$\underline{A}(\underline{x}, t)$ è dato dalla somma, secca (in ampiezza e fase), dei campi vettoriali armonici, ottenuti preseendo la parte reale di "vettori" rappresentativi complessi $\hat{\underline{A}}(\underline{x}, \omega)$ moltiplicati per $e^{j\omega t}$.

Per variazione puramente armonica con pulsazione ω_0 , lo spettro ha forma impulsiva:

$$\underline{A}(\underline{x}, t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} [\hat{\underline{A}}(\underline{x}) e^{j\omega_0 t}]$$

→ COSTANTE NEL TEMPO, PUÒ VARIARE AL VARIARE DELLA POSIZIONE

Campi elettrico e magnetico sinusoidali:

$$\underline{E}(\underline{x}, t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} [\hat{\underline{E}}(\underline{x}) e^{j\omega t}]$$

$$\underline{H}(\underline{x}, t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} [\hat{\underline{H}}(\underline{x}) e^{j\omega t}]$$

PIANO DI PULSAZIONE
L'estremo libero di $\underline{E}(t)$ è confinato nel piano individuato dai vettori E_x, E_y .

Vettore funzione del tempo:

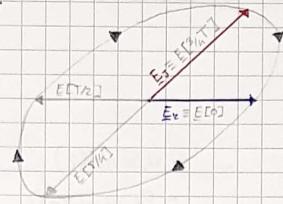
$$\underline{E}(t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} [(E_x + jE_y)(\cos \omega t + j \sin \omega t)] = \frac{1}{\pi} (E_x \cos \omega t - E_y \sin \omega t)$$

NB: fattore riduttivo che non verrà considerato.

Polarizzazione di un vettore:

inoltre

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad t=0 &\rightarrow E(t) = E(0) \\ \omega t = \frac{\pi}{2} &\rightarrow E(t) = -E(0) \\ \omega t = \pi &\rightarrow E(t) = -E(0) \\ \omega t = \frac{3\pi}{2} &\rightarrow E(t) = E(0) \end{aligned}$$



→ Il vettore è polarizzato ellitticamente

INFATI: l'estremo libero di $E(t)$ descrive in generale un'ellisse nel piano di E_x , E_y

Si

In casi particolari, l'ellisse degenera in:

- Una CIRCONFERENZA quando $E_r \perp E_\theta \wedge |E_r| = |E_\theta|$ → VETTORE POLARIZZATO CIRCOLARMENTE
- Un SEGMENTO DI RETTA quando $E_r \parallel E_\theta$ → VETTORE POLARIZZATO RETTILINEARMENTE
OPPURE $E_r = 0 \vee E_\theta = 0$

CHE

USCIRÀ

UNA

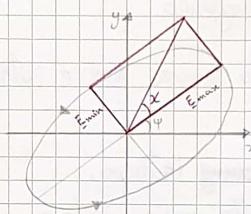
STATO

DI

STATE

DE

Lo STATO DI POLARIZZAZIONE di un vettore è individuato da due parametri di polarizzazione (due angoli): ψ, χ



N.B.: Il modo di scrivere una polarizzazione non è unico; la stessa polarizzazione può essere rappresentata da diverse opere di vettori (E_x, E_y , E_r, E_θ).

NUFFO

fare)

nucc;

ante

ppre

(ψ, χ)

;

;

;

;

;

;

;

;

;

;

;

;

;

;

;

;

;

;

;

;

;

;

;

;

;

;

;

;

;

;

;

;

;

SIVIA:

$$\chi = \pm \arctg \frac{E_{\min}}{E_{\max}}$$

4- LUNGHEZZA DEL SEMIASSE MINORE DELL'ELLISSE
4- LUNGHEZZA DEL SEMIASSE MAGGIORE DELL'ELLISSE

→ ROTAZIONE IN SENSO ANTORARIO \Rightarrow SI PRENDE IL SEGNO - DELL'ARCTG \Rightarrow POLARIZZAZIONE DESTRA
→ ROTAZIONE IN SENSO ORARIO \Rightarrow SI PRENDE IL SEGNO + DELL'ARCTG \Rightarrow POLARIZZAZIONE SINISTRA

• DEGENERAZIONE IN UN SEGMENTO DI RETTA PER $\chi = 0$

• DEGENERAZIONE IN UNA CIRCONFERENZA PER $\chi = \pm \frac{\pi}{4}$

→ La variazione di χ è tra $-\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{4}$; al di fuori di questo intervallo, il semiasse minore e quello maggiore invertono i loro ruoli.

→ La variazione di ψ , invece, è tra 0 e π (oppure tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$).

\hookrightarrow ELLISSE PER $\psi = 0 \equiv$ ELLISSE PER $\psi = \pi$

Nella polarizzazione circolare, il valore di ψ è indeterminato.

15/10/2020

Esercizio 1:

$$[\underline{\epsilon}] = \begin{bmatrix} \epsilon [1 + \cos(Kz)] & \epsilon a \sin(Kz) & 0 \\ \epsilon a \sin(Kz) & \epsilon [1 - \cos(Kz)] & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_0 \end{bmatrix}$$

$a \neq 0$

Un mezzo caratterizzato da questo tensore NON è omogeneo perché la matrice dipende dalla coordinate spaziale z .

Se $a=0 \Rightarrow$ il mezzo sarebbe omogeneo e, in particolare sarebbe il voto (si avrebbero solo degli ϵ_0 sulla diagonale principale).

Se $K=0 \Rightarrow$ il mezzo sarebbe omogeneo.

Un mezzo caratterizzato da questo tensore NON è isotropo perché la matrice non è multipla di quella unitaria.

Se $a=0 \Rightarrow$ il mezzo sarebbe ~~omogeneo~~ isotropo.

Se $K=0 \Rightarrow$ il mezzo non sarebbe ancora isotropo.

Un mezzo caratterizzato da questo tensore è lineare perché la matrice è in dipendente dall'intensità dei campi.

Per rendere il mezzo non lineare, basterebbe moltiplicare una componente o l'intera matrice per il modulo di E (ϵ_0 di B).

Esercizio 2:

Calcolare il campo magnetico sulla superficie ~~di~~ di un conduttore tale che $K = 10(x_0 - jy_0)$.

→ CAPPEZO

Esercizio 3:

$$\hat{E}_1 = jE_0 \chi_0$$

← VETTORE COMPLESSO

$$E_{1r} = 0$$

→ VETTORE REALE

$$E_{1j} = E_0 \chi_0$$

→ VETTORE IMMAGINARIO

$\rightarrow \hat{E}$

$$\underline{E}(t) = \underline{E}$$

$$\hat{E}_2 = i$$

$\rightarrow \hat{E}_2$

$$\underline{E}(t) =$$

$$\hat{E}_3 = \hat{E}_1$$

$\rightarrow \hat{E}_3$

$$\underline{E}(t) = \underline{E}_2$$

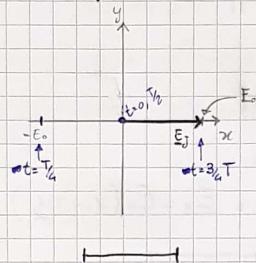
→ Si

zio

$\rightarrow \hat{E}_2$ è polarizzato linearmente.

$$\underline{E}(t) = E_x \cos \omega t - E_y \sin \omega t$$

a $k \neq 0$



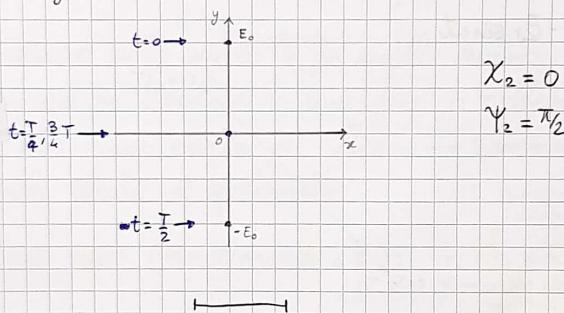
$$\begin{aligned} X_1 &= 0 \\ Y_1 &= 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Polarizzazione} \\ \text{lineare orizzontale} \\ (\text{h}) \end{array} \right\}$$

strisce $\hat{E}_2 = E_0 \hat{y}_0 \rightarrow E_{2x} = E_0 \hat{y}_0 ; E_{2y} = 0$

$\rightarrow \hat{E}_2$ è polarizzato linearmente.

? ruoto $\underline{E}(t) = E_x \cos \omega t - E_y \sin \omega t$

moltiplica



$$X_2 = 0$$

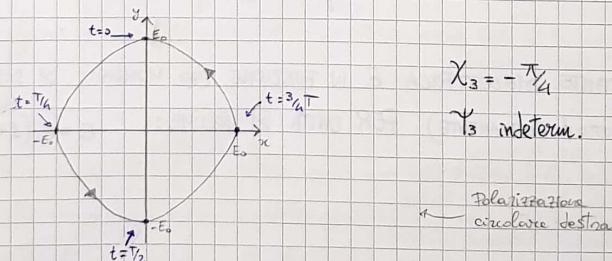
$$Y_2 = \pi/2$$

e è in $\hat{E}_3 = \hat{E}_1 + \hat{E}_2 \rightarrow E_{3x} = E_0 \hat{y}_0 ; E_{3y} = E_0 \hat{x}_0$

ente o $\rightarrow \hat{E}_3$ è polarizzato circolarmente.

$\underline{E}(t) = E_x \cos \omega t - E_y \sin \omega t$

tale



$$X_3 = -\pi/4$$

Y_3 indetermin.

Polarizzazione circolare destra

\Rightarrow Si può scrivere una polarizzazione circolare come somma di due polarizzazioni lineari ortogonali tra loro.

→ Più vettori diversi possono rappresentare la stessa polarizzazione (cambia solo l'istante iniziale).

$$\hat{E}_n = E_0(x_0 + y_0)$$

→ \hat{E}_n è polarizzato linearmente.

NB: Occorre a non confonderlo con: $\hat{E}_s = E_0(x_0 + jy_0)$ che è polarizzato circolare.

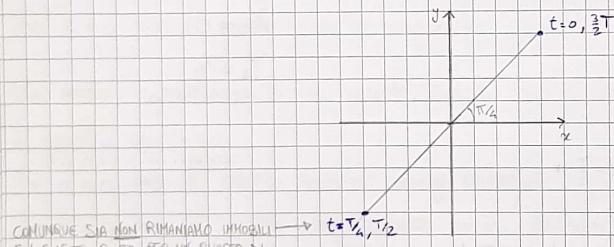
$$\hat{E}_{cr} = E_0 [(x_0 + y_0) + j(x_0 - y_0)]$$

$$E_{cr} = E_0(x_0 + y_0);$$

$$E_{cj} = E_0(x_0 + y_0)$$

→ \hat{E}_o è polarizzato linearmente.

$$E(t) = E_r \cos \omega t - E_j \sin \omega t$$



20/10/2020

Costante dielettrica e condutività nel dominio della frequenza:

Consideriamo dei metà travefatti non pluri.

A BASSA DENSITÀ (e.g. G10)

B COMPOSTI DA MOLECOLE A POLARITÀ NULLA

COSTANTE DIELETTRICA ϵ IN FUNZIONE DEL MOMENTO DI DIPOLO ELETTRICO INDOTTO P

(INDOTTO o PERMANENTE) PER UNITÀ DI VOLUME: $\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi) = \epsilon_0 \left(1 + \frac{P}{\epsilon_0 E_0}\right)$

cioè fa sì che la costante dielettrica ϵ_0 sia diversa da ϵ_0 se non ci troviemo nel vuoto (in particolare se ci troviamo nei dielettrici)

→ Se il mezzo è isotropo ($P \parallel E$): $D(t) = \epsilon_0 E(t) + P(t)$

→ Se il mezzo è lineare, nel dominio della frequenza:

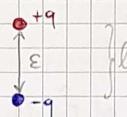
$$D(\omega) = \epsilon_0 E(\omega) + P(\omega) = \epsilon(\omega) E(\omega)$$

$$\text{Quindi: } \varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left[1 + \frac{P(\omega)}{\varepsilon_0 E(\omega)} \right]$$

Ricordiamo che abbiamo preso
in esame un gas

In particolare, un materiale non polare è un aggregato di cariche la cui distribuzione spaziale fa coincidere i baricentri di cariche positive e negative.

Assumiamo E variabile
di segno nel tempo (verso
il tempo → nulla → verso
positivo) per vedere come
si comporta il sistema.
mentre E è il versamento,



Baricentri di:
cariche positive e negative
→ separate a una certa distanza
⇒ MOMENTO DI DIPOLO $P = ql$

* Il campo elettrico (polarizzato linearmente) induce uno spostamento della distruzione di carica positiva rispetto alla negativa, con momento di dipolo intuito per unità di volume: $P = P_{\text{po}} = ql_{\text{po}}$

Possiamo approssimare questo modello ^{microscopico} a un modello dinamico macroscopico con carica q e massa m vincolata da una forza di richiamo lineare in l .
(anti-elasticità fra la molecola dovuta al legame covalente)

Le cariche in moto cedono energia per collisioni → Smorzamento ("attrito") proporzionale alla velocità di spostamento.

$$\rightarrow \text{EQUILIBRIO DELLE FORZE (PARALLELAMENTE A } E): F_i + F_s + F_r = qE(t) \quad **$$

$$*** qE(t) = qE_0 \cos \omega t$$

FORZA ESERCITATA DAL CAMPO ELETTRICO

FORZA DI INERZIA
 $m \frac{d^2l}{dt^2}$

Libertà di movimento delle cariche

FORZA DI RICHIAMO ELAST.

$\text{coeff.} \times \text{spostamento} = cl$

In effetti la forza varia sinusoidalmente nel tempo

→ Se il moto è lineare (m , coeff., coeff. indipendenti da $l \Rightarrow E_0$ piccolo), si ottiene la seguente equazione differenziale:

$$m \frac{d^2l}{dt^2} + s \frac{dl}{dt} + cl = qE_0 \cos \omega t$$

a coeff.

coeff.

$$E = \text{Re} [\hat{E} e^{j\omega t}]$$

cost nel tempo

$$\text{FORMALISMO COMPLESSO: } l = \text{Re} [\hat{l} e^{j\omega t}] ;$$

cost nel tempo

→ Abbiamo imposto l'equivalenza agli interi termini: complessi e reale solo sul la parte reale (CONDIZIONE RESTRIKTION).

Definiamo:

- COEFFICIENTE DI SMORZAMENTO

$$\alpha = \frac{s}{2m}$$

- PULSAZIONE DI RISONANZA

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

Inoltre abbiamo
diviso tutto per
 $c \neq 0$

$$\Rightarrow (-\omega^2 + 2j\omega\alpha + \omega_0^2) q\hat{E} = \frac{q^2}{m} \hat{E}$$

Abbiamo moltiplicato a destra e
a sinistra per la carica q

$$\Rightarrow \text{FASORE DEL MOMENTO DI DIPOLO INDOTTO: } \hat{P} = q\hat{E} = \frac{q^2}{m} \hat{E} \cdot \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2j\omega\alpha}$$

Il termine immaginario dovuta da cui si ha quando c'è un termine di dissipazione / funzionamento dei sistemi sottilmente
Le è una dissipazione di tipo elettrico; rispetto alla dissipazione relativa alla conduttorilità (che abbiamo visto nel TMN e Poynting), è diverso dal punto di vista fisico ma è la stessa cosa: la perdita di vista energetica (sempre perdita di energia).

21/10/2020

Fattore di proporzionalità tra \hat{P} ed \hat{E} (a meno che $\alpha=0$):

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 \left(1 + \frac{\hat{P}}{\epsilon_0 \hat{E}} \right) = \epsilon_0 (\epsilon' + j\epsilon'')$$

\Rightarrow In generale è un fattore complesso:

$$\epsilon' + j\epsilon'' = 1 + \frac{q^2}{\epsilon_0 m} \cdot \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2 + 2j\omega\alpha)} = 1 + \frac{q^2}{\epsilon_0 m} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - 2j\omega\alpha}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\alpha^2}$$

\rightarrow La dipendenza da ω di $\epsilon' + j\epsilon''$ dipende dalle caratteristiche fisiche del mezzo (parametri q, m, α) e da ω_0 .

1° CASO: FREQUENZE "BASSE" ($\omega \ll \omega_0$)

$$\epsilon' \approx 1 + \frac{q^2}{\epsilon_0 m \omega_0^2}$$

$$-\epsilon'' \approx \frac{q^2}{\epsilon_0 m} \frac{2\omega\alpha}{\omega_0^4} \ll \epsilon'$$

$\rightarrow \epsilon'$ circa 1; ϵ'' trascurabile \Rightarrow per frequenze molto basse ci troveremo praticamente nel vuoto. Inoltre, $\epsilon \approx$ reale e indipendente da ω .

2° CASO: FREQUENZE "ALTE" ($\omega \gg \omega_0$)

$$\epsilon' \approx 1 - \frac{q^2}{\epsilon_0 m \omega^2}$$

$$-\epsilon'' \approx \frac{q^2}{\epsilon_0 m} \frac{2\alpha}{\omega^3} \ll \epsilon'$$

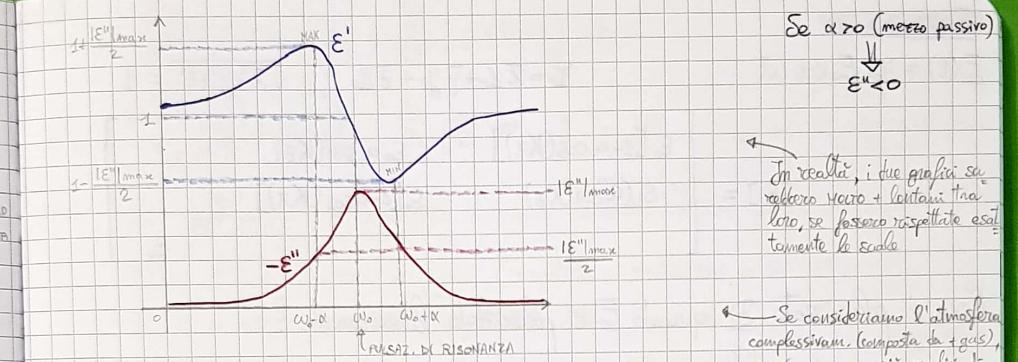
$\rightarrow \epsilon'$ circa 1; ϵ'' trascurabile \Rightarrow per frequenze molto alte ci troveremo di nuovo praticamente nel vuoto. Inoltre, $\epsilon \approx$ reale e con debole dipendenza da ω .

3° CASO: FREQUENZE NELL'INTORNO DELLA RISONANZA ($\omega \approx \omega_0$)

$$\epsilon' + j\epsilon'' \approx 1 + \frac{q^2}{\epsilon_0 m} \frac{2\omega_0(\omega_0 + \omega) - 2j\omega\alpha}{4\omega_0^2(\omega_0 + \omega)^2 + 4\alpha^2\omega_0^2} = 1 + \frac{q^2}{2\epsilon_0 m \omega_0} \left[\frac{\Delta\omega}{(\Delta\omega)^2 + \alpha^2} - j \frac{\alpha}{(\Delta\omega)^2 + \alpha^2} \right]$$

$$\text{Dove } \Delta\omega := \omega_0 - \omega$$

\rightarrow Si hanno sostanziali di ϵ' da 1 e $|\epsilon''|$ è dello stesso ordine di grandezza di ϵ' , con variazioni con ω .



Se $\alpha > 0$ (mezzo passivo)

$$\epsilon'' < 0$$

In realtà, i due grafici su rafforza vicino + lontano fra loro, se fossero rispettate esattamente le scale

Se consideriamo l'atmosfera complessivamente (composta da + gas), si sarebbe ottenuto più grafici diversi di questo tipo

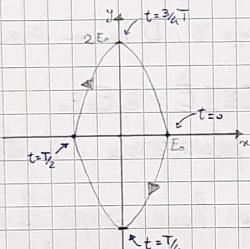
Anche un gas, se stimolato in modi diversi, può comportarsi in modi differenti

$$\chi = + \arctg(\frac{1}{2})$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

Esercizio 1:

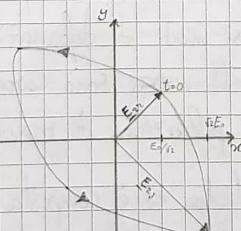
$$\hat{E}_x = E_0(x_0 + 2jy_0) \rightarrow E_{x0} = E_0 x_0 ; \quad E_{xj} = E_0 \cdot 2y_0 \\ \rightarrow \hat{E}_x \text{ polarizzato ellitticamente}$$



Polarizzazione sinistra \rightarrow

$$\hat{E}_x = E_0 \left[\frac{x_0 + jy_0}{\sqrt{2}} + j \cdot 2 \frac{x_0 - y_0}{\sqrt{2}} \right] \rightarrow E_{x0} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} (x_0 + y_0) ; \quad E_{xj} = \sqrt{2} E_0 (x_0 - y_0) \\ \rightarrow \hat{E}_x \text{ è polarizzato ellitticamente.}$$

Polarizzazione \rightarrow
destra



$$\chi = - \arctg(\frac{1}{2})$$

$$\varphi = + \frac{3}{4}\pi$$

$$E_{x0} \cdot E_{xj} = 1 \cdot 1 = 0 \Rightarrow i due vettori sono ortogonali.$$

Esercizio 2:

$$\vec{E}(t) = \vec{x}_0 E_0 \cos \omega t$$

$$\vec{x}_0 = \vec{x}_0 \vec{x}_0 + \vec{y}_0 \vec{y}_0 + \vec{z}_0 \vec{z}_0, \quad \sqrt{\vec{x}_0^2 + \vec{y}_0^2 + \vec{z}_0^2} = 1$$

$$[\underline{\epsilon}] = \begin{bmatrix} \epsilon_0 [1 + \alpha \cos(Kz)] & \epsilon_0 \alpha \sin(Kz) \\ \epsilon_0 (\alpha \sin(Kz)) & \epsilon_0 [1 - \alpha \cos(Kz)] \end{bmatrix}_{\epsilon_0}$$

Com'è polarizzato \vec{D} quando \vec{E} è polarizzato linearmente?

$$\rightarrow \text{PRENDIAMO } \hat{\vec{E}} = E_0 \vec{x}_0 \Rightarrow \hat{\vec{D}} = [\underline{\epsilon}] \hat{\vec{E}} = \epsilon_0 \epsilon_0 [1 + \alpha \cos(Kz)] \vec{x}_0 + \epsilon_0 \epsilon_0 \alpha \sin(Kz) \vec{y}_0$$

L'esempio di polarizzazione
lineare

$\Rightarrow \vec{D}_x = 0 \Rightarrow$ per \vec{E} polarizzato linearmente anche \vec{D} è polarizzato linearmente
(ma attenzione: se \vec{E} è polarizzato lungo \vec{z} , \vec{D} ha una direzione "qualsiasi", ma cmq diversa)

(INFATTO IL MEZZO È ANISOTROPICO)

$$\rightarrow \text{PRENDIAMO } \hat{\vec{E}} = E_0 \vec{z}_0 \Rightarrow \hat{\vec{D}} = [\underline{\epsilon}] \hat{\vec{E}} = \epsilon_0 E_0 \vec{z}_0$$

\Rightarrow in questo caso, invece, la polarizzazione è la stessa (può essere fuoriente).

In definitiva, poiché $\hat{\vec{E}}, \hat{\vec{D}}$ non hanno sempre la stessa polarizzazione, è evidente che il mezzo sia anisotropico.

22/10/2020

Mezzi composti (l'atmosfera):

Nella realtà esistono prevalentemente mezzi composti, in cui le molecole hanno + gradi di libertà, diversi modi di deformazione, diverse vibrazioni e diverse rotazioni. Perciò, questi mezzi sono caratterizzati da una sovrapposizione di $E(\omega)$ diversi, e di pulsazioni di risonanza diverse, ecc.

L'atmosfera ha queste caratteristiche ed è composta dal 78% di N_2 , dal 21% di O_2 e dal restante 1% da altri gas (vapore acqueo H_2O , CO_2 , ...)

Anche se poco presente, ha un forte impatto elettromagnetico

Consideriamo le molecole H_2O e O_2 con i relativi $N_{H_2O} + N_{O_2}$ modi di sovrapposizione (è caratteristiche diverse che si sovrappongono):

Sono i 2 elettroni che formano un interacc. più forte
Se nell'acqua compone solo un interacc. debole

NUMERO DI MOLECOLE DI H_2O
E NUMERO DI MOLECOLE DI O_2

$$\epsilon'(\omega) = \sum_{i=1}^{N_{H_2O}} [S^i F'(\omega)]_i + \sum_{i=1}^{N_{O_2}} [S^i F'(\omega)]_i + \bar{\epsilon}'$$

$$\epsilon''(\omega) = \sum_{i=1}^{N_{H_2O}} [S'' F''(\omega)]_i + \sum_{i=1}^{N_{O_2}} [S'' F''(\omega)]_i + \bar{\epsilon}''$$

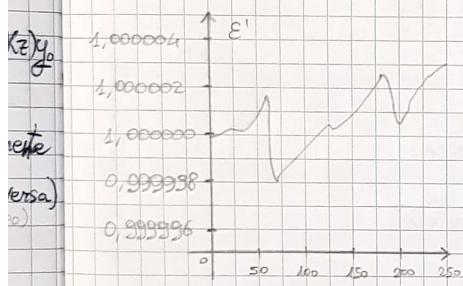
Dove: $S_i = \frac{q_i^2}{2\epsilon_m \omega_i}$ = intensità di rigore caratteristica della molecola

$F'(\omega)$, $F''(\omega)$ = funzioni di forma (rispettivamente relative a ϵ' , ϵ'')

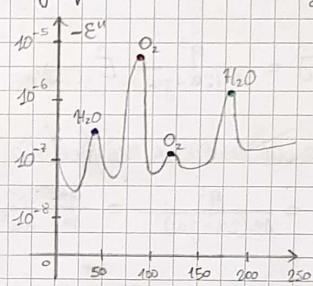
$\bar{\epsilon}'$, $\bar{\epsilon}''$ = altri contributi indipendenti dalla frequenza

S^i = ampiezza della curva relativa a ϵ'
 S''^i = ampiezza della curva relativa a ϵ''

• rappresenta l'andamento delle curve
 • le funzioni che descrive la curva



SCALA LINEARE



Frequenza (GHz)

SCALA LOGARITMICA

Lorenziana su piedistallo crescente con la frequenza

22,2 GHz	=	$f_{O_2}^{H_2O}$
61,2 GHz	=	$f_{O_2}^{O_2}$
118,8 GHz	=	$f_{O_2}^{H_2O}$
183,3 GHz	=	$f_{O_2}^{H_2O}$

Mezzi conduttori:

→ Si hanno degli elettroni in grado di staccarsi dalle molecole e muoversi nello spazio libero (o nella banda di convezione) ⇒ si hanno quindi cariche non vincolate, che non sono sottoposte alla forza di raddrizzamento.

EQUILIBRIO DELLE FORZE: $m \frac{d^2l}{dt^2} + S \frac{dl}{dt} = qE_0 \cos \omega t$

$$21\% \xrightarrow{\text{FORMA SEMPLIFICATA}} -\omega^2 \hat{l} + j\omega \frac{S}{m} \hat{l} = \frac{q}{m} \hat{E} \Rightarrow (-\omega^2 + j\omega \alpha) \hat{q} \hat{l} = \frac{q^2}{m} \hat{E}$$

Dove $\alpha = \frac{S}{2m}$ = coefficiente di smorzamento

$$\epsilon' + j\epsilon'' = 1 - \frac{q^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega^2 + \alpha^2} - j \frac{q^2}{\epsilon_0 m} \frac{2\alpha}{\omega(\omega^2 + \alpha^2)}$$

⇒ Anche in questo caso $\epsilon'' < 0$

e quindi si hanno oscillazioni puramente reale se α (il coefficiente di smorzamento) è nullo, e diversamente

Oltre alla costante elettrica, nei mezzi conduttori (che hanno elevata) è comodo considerare la CONDUCIBILITÀ.

→ Anche lì, prendiamo la velocità $u = \frac{dx}{dt}$ come incognita:

$$\text{EQUILIBRIO DELLE FORZE: } m \frac{du}{dt} + S u = q E_0 \cos \omega t \Rightarrow$$

$$m q \frac{du}{dt} + S u = q^2 E_0 \cos \omega t \Rightarrow$$

$$\text{NELL DOMINIO DELLA FREQUENZA: } j \omega m \hat{J} + 2\alpha m \hat{J} = q^2 \hat{E}$$

$$\Rightarrow \hat{J} = \frac{q^2}{m(2\alpha + j\omega)} \hat{E} \Rightarrow$$

CONDUCIBILITÀ COMPLESSA NELL DOMINIO DELLA FREQUENZA:

$$g(\omega) = \frac{q^2}{m(2\alpha + j\omega)} = \frac{q^2}{m} \frac{2\alpha}{4\alpha^2 + \omega^2} - j \frac{q^2}{m} \frac{\omega}{4\alpha^2 + \omega^2}$$

1° CASO: FREQUENZE "BASSE" ($\omega \ll \alpha$)

$$g(\omega) \approx \frac{q^2}{m} \cdot \frac{1}{2\alpha} - j \frac{q^2}{m} \frac{\omega}{4\alpha^2}$$

$\text{Re}[g] \rightarrow$ descrive le dissipazioni e effetto Joule

$|Im[g]| \ll Re[g] \Rightarrow$ La condutibilità può considerarsi reale

- Per i metalli (rame, alluminio,...) le radiofrequenze sono "basse" e la condutibilità è reale.

→ almeno dei fattori $E_0, \omega, Re[g]$ è uguale a $|Im[\epsilon]|$.

$$\hookrightarrow \epsilon'' = - \frac{Re[g]}{\omega E_0}$$

Per i mezzi molli conduttori, si può definire una grandezza \hat{g}_e (condutibilità equivalente) e, con le dovute attenzioni, si può mettere in relazione con la costante dielettrica.

N.B.: I meccanismi di dissipazione sono diversi \Rightarrow la dipendenza di $Re[g]$ da ω è diversa da quella di ϵ'' per i conduttori.

PER UN MEZZO CONDENSATO E RADIOFREQUENZE: $\epsilon'' \approx - \frac{g_e}{\omega E_0} \Rightarrow$

CONDUCIBILITÀ EQUIVALENTE DI UN DIELETTRICO: $g_e = -\omega E_0 \epsilon''$

27/10/2020

Esercizio 1:

• Scrivere un vettore complesso polarizzato linearmente lungo \hat{x} con fase 45° .

$$\rightarrow \text{EFFESO ANCHE LUI} \quad \underline{\underline{E}}(t) = E_0 \underline{\underline{x}_0} \cos(\omega t + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} E_0 \underline{\underline{x}_0} (\cos(\omega t) - \sin(\omega t))$$

$$\underline{\underline{E}} = \frac{\sqrt{2}}{2} E_0 \underline{\underline{x}_0} + j \frac{\sqrt{2}}{2} E_0 \underline{\underline{x}_0}$$

Relazioni nel dominio della frequenza:

$$\rightarrow 1^{\circ} \text{ EQUAZ. DI MAXWELL PRIVA DI SORGENTI: } \nabla \times \operatorname{Re}[\hat{\underline{\underline{E}}}(\underline{\underline{z}}) e^{j\omega t}] = - \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Re}[\hat{\underline{\underline{B}}}(\underline{\underline{z}}) e^{j\omega t}]$$

CONTRAPPUNTO A GRANDEZZE VARIABILI SINUSOIDALMENTE

$$\Rightarrow \operatorname{Re}[\nabla \times \hat{\underline{\underline{E}}}(\underline{\underline{z}}) e^{j\omega t} + \hat{\underline{\underline{B}}}(\underline{\underline{z}}) \frac{\partial}{\partial t} e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[\{\nabla \times \hat{\underline{\underline{E}}}(\underline{\underline{z}}) + j\omega \hat{\underline{\underline{B}}}(\underline{\underline{z}})\} e^{j\omega t}] = 0$$

\rightarrow La condizione di ugualanza a 0 per ogni t richiede che

$$\nabla \times \hat{\underline{\underline{E}}}(\underline{\underline{z}}) + j\omega \hat{\underline{\underline{B}}}(\underline{\underline{z}}) = 0 \quad \leftarrow \text{eq. differenziale nelle sole variabili spaziali}$$

Una cosa analoga vale per le altre equazioni di Maxwell.

Aggiungendo le sorgenti otteniamo che:

$$\nabla \times \hat{\underline{\underline{E}}}(\underline{\underline{z}}) = -j\omega \hat{\underline{\underline{B}}}(\underline{\underline{z}}) - \hat{\underline{\underline{J}}_{im}}(\underline{\underline{z}})$$

$$\nabla \times \hat{\underline{\underline{H}}}(\underline{\underline{z}}) = j\omega \hat{\underline{\underline{D}}}(\underline{\underline{z}}) + \hat{\underline{\underline{J}}_i}(\underline{\underline{z}}) + \hat{\underline{\underline{J}}_m}(\underline{\underline{z}})$$

$$\nabla \cdot \hat{\underline{\underline{D}}}(\underline{\underline{z}}) = \hat{\rho}(\underline{\underline{z}})$$

$$\nabla \cdot \hat{\underline{\underline{B}}}(\underline{\underline{z}}) = 0$$

$\underline{\underline{z}}$ \rightarrow vettore che indica la posizione all'interno dello spazio:
 $\underline{\underline{z}} = x\underline{\underline{x}_0} + y\underline{\underline{y}_0} + z\underline{\underline{z}_0}$

$\underline{\underline{z}}$ \rightarrow coordinate relative alle sorgenti

con: \rightarrow EQUAZIONI DIFFERENZIALI NELLE SOLE VARIABILI SPAZIALI

Dai vettori soluzione si ricavano i vettori elettromagnetici, funzioni dello spazio e del tempo: $\underline{\underline{E}}(\underline{\underline{z}}, t) = \operatorname{Re}[\hat{\underline{\underline{E}}}(\underline{\underline{z}}) e^{j\omega t}]$ $\underline{\underline{H}}(\underline{\underline{z}}, t) = \operatorname{Re}[\hat{\underline{\underline{H}}}(\underline{\underline{z}}) e^{j\omega t}]$

E ANALOGHE ($\underline{\underline{D}}, \underline{\underline{B}}, \underline{\underline{J}}, \hat{\rho}$)

$\underline{\underline{z}}$ è D'ORA IN poi: quantità armoniche \Rightarrow vettori/scalar complessi funzioni dello spazio. Le soluzioni delle 4 equaz. \rightarrow scrivremo sempre nel seguente moto:

$$\nabla \times \underline{\underline{E}} = -j\omega \underline{\underline{B}} - \underline{\underline{J}}_{im}$$

$$\nabla \times \underline{\underline{H}} = j\omega \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{J}}_i + \underline{\underline{J}}_m$$

$$\nabla \cdot \underline{\underline{D}} = \hat{\rho}$$

$$\nabla \cdot \underline{\underline{B}} = 0$$

(Nel seguito)

\rightarrow MEZZI ASSUNTI LINEARI, ISOTROPICI E CON CONDUTTIVITÀ REALE.

Bilancio energetico:

$$\nabla \times \underline{E} = -j\omega \mu \underline{H} - \underline{J}_{im}$$

→ MOLTIPLICHEREMO SCALARMENTE PER \underline{H}^*

$$\nabla \times \underline{H}^* = [j\omega \epsilon \underline{E} + g \underline{E} + \underline{J}_i]^*$$

→ MOLTIPLICHEREMO SCALARMENTE PER $-\underline{E}$

$$\text{SOMMIAMO I MEMBRI: } \underline{H}^* \cdot \nabla \times \underline{E} - \underline{E} \cdot \nabla \times \underline{H}^* = j\omega \epsilon^* \underline{E} \cdot \underline{E}^* - j\omega \mu \underline{H} \cdot \underline{H}^* - g \underline{E} \cdot \underline{E}^* + - \underline{J}_i^* \cdot \underline{E} - \underline{J}_{im} \cdot \underline{H}^*$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot (\underline{E} \times \underline{H}^*) + j\omega (\mu \underline{H} \cdot \underline{H}^* - \epsilon^* \underline{E} \cdot \underline{E}^*) + g \underline{E} \cdot \underline{E}^* = - \underline{J}_i \cdot \underline{E} - \underline{J}_{im} \cdot \underline{H}^*$$

Integrando su un generico volume V contornato da una superficie S :

(e dividendo a destra e a sinistra per 2)

$$\begin{aligned} & \iiint \left(-\frac{\underline{J}_i^* \cdot \underline{E}}{2} - \frac{\underline{J}_{im} \cdot \underline{H}^*}{2} \right) dV = \\ & = \iiint_V g \frac{\underline{E} \cdot \underline{E}^*}{2} dV + j\omega \iiint_V \left(\mu \frac{\underline{H} \cdot \underline{H}^*}{2} - \epsilon^* \frac{\underline{E} \cdot \underline{E}^*}{2} \right) dV + \frac{1}{2} \oint_S (\underline{E} \times \underline{H}^*) \cdot \underline{n} dS \end{aligned}$$

SIGNIFICATO DEI TERMINI:

- Termine di sorgente: $\iiint \left(-\frac{\underline{J}_i^* \cdot \underline{E}}{2} - \frac{\underline{J}_{im} \cdot \underline{H}^*}{2} \right) dV$

$$-\frac{\underline{J}_i^* \cdot \underline{E}}{2} = -\frac{1}{2} \int \underline{E} \cdot \underline{i}_o \cdot \underline{e} \cos \psi_e - \frac{1}{2} \int \underline{E} \cdot \underline{i}_o \cdot \underline{e} \sin \psi_e \quad \xrightarrow{\text{PER COMODITÀ, CONSIDERIAMO POLARIZZAZ. LINEARI}}$$

$$\rightarrow \text{Se } \underline{J}_i(t) = \underline{J} \sin(\omega t) \underline{i}_o, \text{ sapendo che } \underline{J}_i(t) = \underline{J}_i \cos(\omega t) - \underline{J}_{i\perp} \sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow \underline{i}_i = \underline{i}_{i\parallel} + \underline{i}_{i\perp} = \underline{0} - \underline{J} \cdot \underline{i}_o$$

Analogamente per \underline{E}

28

Pes

D

le

ES

→

→ PARTE REALE: potenza media in un periodo erogata nell'unità di volume dalle sorgenti elettriche (vedi parte sul Thm di Poynting nel dominio del tempo)

→ PARTE IMMAGINARIA: misura della potenza, a media nulla (ma che comunque esiste), fornita dalle sorgenti (vs l'esterno) e recuperata nei semiperiodi successivi.

↓ POTENZA REATTIVA

- $\iiint g \frac{\underline{E} \cdot \underline{E}^*}{2} dV$

Analogamente per le sorgenti magnetiche

→ UN TERMINE REALE: rappresenta la potenza media in un periodo dissipata per condutibilità.

- $j\omega \iiint_V \left(\mu \frac{\underline{H} \cdot \underline{H}^*}{2} - \epsilon^* \frac{\underline{E} \cdot \underline{E}^*}{2} \right) dV$

$$\mu \frac{\underline{H} \cdot \underline{H}^* - \epsilon^* \frac{\underline{E} \cdot \underline{E}^*}{2}}{2} = \frac{1}{2} [\mu_0 (\mu'' + j\mu'') \underline{H} \cdot \underline{H}^* - \epsilon_0 (\epsilon' - j\epsilon'') \underline{E} \cdot \underline{E}^*] =$$

$$= \frac{1}{2} (\mu_0 \mu' \underline{H} \cdot \underline{H}^* - \epsilon_0 \epsilon' \underline{E} \cdot \underline{E}^*) + \frac{j}{2} (\mu_0 \mu'' \underline{H} \cdot \underline{H}^* + \epsilon_0 \epsilon'' \underline{E} \cdot \underline{E}^*)$$

→ DATO CHE μ'' , ϵ'' SONO NEGATIVE (cheza passi), LA PARTE REALE È LA POTENZA MEDIA IN UN PERIODO DISSIPATA PER POLARIZZAZIONE DIELETTRICA E MAGNETICA:

$$\frac{1}{2} \text{ cu} \iiint (\mu_0 \cdot |\mu''| \cdot \underline{H} \cdot \underline{H}^* + \epsilon_0 \cdot |\epsilon''| \cdot \underline{E} \cdot \underline{E}^*) dV$$

→ La parte reale è questa perché l'integrale è moltiplicato per $j\omega$

→ Si hanno cariche vincolate ma, chi coi loro movimenti, dissipano riserves, potenza

→ LA PARTE IMMAGINARIA MISURA L'AMPIZZA DELLA VARIAZIONE DI ENERGIA IMMAGAZINATA NEL CAMPO ELETTRICO E NEL CAMPO MAGNETICO:

$$\frac{1}{2} \omega \iiint (\mu_0 \mu' \underline{H} \cdot \underline{H}^* - \epsilon_0 \epsilon' \underline{E} \cdot \underline{E}^*) dV$$

→ è una potenza reattiva, a media nulla ma diversa da zero istante per istante

$$\bullet \frac{1}{2} \oint_S (\underline{E} \times \underline{H}^*) \cdot \underline{m} dS$$

← IN GENERALE È COMPLESSO

→ PARTE REALE: potenza media su un periodo che fluisce attraverso S.

→ Non viene dissipata ma esce definitivamente dal vol.

→ PARTE IMMAGINARIA: potenza reattiva su S.

→ diversa da zero istante per istante ma a media nulla

$$\underline{P} = \frac{1}{2} \underline{E} \times \underline{H}^*: vettore di Poynting complesso \quad (\text{Wfm}^{-2})$$

← LA PARTE REALE

← LA PARTE IMMAGINARIA

28/10/2020

Punto $\underline{D} = \epsilon \underline{E} = \epsilon_0 (\epsilon' + j\epsilon'') \underline{E}$, con ϵ quantità complessa, la conseguenza su \underline{D} rispetto al caso di ϵ reale sta nel fatto che \underline{D} ha uno sfasamento iniziale per $t=0$.

ESEMPIO: $\underline{E} = E_0 \underline{x}_0 \rightarrow \underline{E}(t) = E_0 \underline{x}_0 \cos \omega t$

→ Se ϵ reale ($\epsilon = \epsilon_0 \epsilon'$): $\underline{D} = \epsilon_0 \epsilon' E_0 \underline{x}_0 \Rightarrow$

$$D_r = \epsilon_0 \epsilon' E_0 \underline{x}_0$$

$$D_j = 0$$

$$\underline{D}(t) = D_r \cos \omega t - D_j \sin \omega t = \epsilon_0 \epsilon' E_0 \underline{x}_0 \cos \omega t$$

• Lo sfasamento tra \underline{D} e \underline{E} è più grande che non si può dire da cosa siano cui, cari ϵ (o anche μ) immaginari, il termine $\iiint (\mu_0 \mu' \underline{H} \cdot \underline{H}^* + \epsilon_0 \epsilon'' \underline{E} \cdot \underline{E}^*) dV$
NON c'è a media nulla

→ Se ϵ complesso ($\epsilon = \epsilon_0 (\epsilon' + j\epsilon'')$): $\underline{D} = \epsilon_0 (\epsilon' + j\epsilon'') E_0 \underline{x}_0 \Rightarrow$

$$D_r = \epsilon_0 \epsilon' E_0 \underline{x}_0$$

$$D_j = \epsilon_0 \epsilon'' E_0 \underline{x}_0$$

$$\underline{D}(t) = D_r \cos \omega t - D_j \sin \omega t = \epsilon_0 E_0 (\epsilon' \cos \omega t - \epsilon'' \sin \omega t) \underline{x}_0 = \epsilon_0 E_0 (\bar{E} \cos(\omega t + \varphi))$$

↑ Sfasamento

BILANCIO ENERGETICO (CONCLUSIONI):

- La potenza media in un periodo erogata dalle sorgenti viene in parte dissipata per effetto della condutività e delle polarizzazioni elettrica e magnetica del mezzo e in parte fluisce attraverso una qualunque superficie S che circonda le sorgenti (potenza voraciata). \rightarrow PARTE REALE DELLA POTENZA
- Parte della potenza ceduta dalle correnti al campo ritorna periodicamente alle sorgenti bilanciando le variazioni periodiche di energia immagazzinata nei campi e l'eventuale risparmio periodico di potenza attraverso S . \rightarrow PARTE IMMAG. DELLA POTENZA

Se il mezzo è privo di dissipazioni $\Rightarrow \eta = 0$ e sia ϵ sia μ sono reali
 \Rightarrow la potenza media erogata dalle sorgenti è tutta voraciata attraverso S .

L'e
tali

IND

Sog

\rightarrow

D'A INFO
SULLA

Per

Presenza di dissipazioni \Rightarrow parametri ϵ, μ complessi \Rightarrow sfasamento tra campo elettrico e sostanziovo campo magnetico e induzione magnetica nel dominio del tempo.

Propagazione in mezzi non dissipativi:

MEZZO PRIVO DI DISSIPAZIONI $\Rightarrow \eta = 0, \epsilon'' = 0$

Ricaviamo H dalla prima equazione di Maxwell e la sostituiamo nella seconda: $\nabla \times H = J \epsilon \epsilon'' E = (\nabla \times \nabla \times E) - \nabla^2 E = (J \omega \epsilon) (-J \omega \mu_0) E = K^2 E$

$$\begin{aligned} \nabla \times E &= -J \omega \mu_0 H \Rightarrow H = \frac{J}{\omega \mu_0} \nabla \times E \\ \nabla \times H &= J \epsilon \epsilon'' E = (\nabla \times \nabla \times E) - \nabla^2 E = (J \omega \epsilon) (-J \omega \mu_0) E \end{aligned}$$

DAT

PER

Che

Quindi $\nabla^2 E = -K^2 E$ dove $K^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon$

Perche siamo all'esterno delle sorgenti: $\nabla \cdot D = \nabla \cdot (\epsilon E) = E \cdot \nabla \epsilon + \epsilon \nabla \cdot E = \rho = 0$

$$\nabla \cdot E = -\frac{1}{\epsilon} E \cdot \nabla \epsilon \quad \Rightarrow \quad \text{SIANO ALL'ESTERNO DELLE SORG.}$$

$$\nabla \cdot E = -\nabla \left(\frac{1}{\epsilon} E \cdot \nabla \epsilon \right) \quad \Rightarrow \quad \text{ASSENZA DI CARICHE}$$

$$\nabla^2 E + K^2 E + \nabla \left(E \cdot \frac{\nabla \epsilon}{\epsilon} \right) = 0$$

Variare molto piano ϵ : E EQUAZ. DELLE Onde

MEZZO DEBOLMENTE DISOMOGENEO \Rightarrow $|\nabla \epsilon| \rightarrow 0 \Rightarrow \nabla^2 E + K^2(\epsilon) E = 0$

Loc. g. ATTRAVERSO le cui variaz. delle caratteristiche elettriche variano molto gradualmente \Rightarrow es. al variare della qu.

stessa epoca. (la stessa approssimazione.)

\Rightarrow Si ha anche per $\omega \rightarrow \infty$: altissime frequenze ($f > 100 \text{ THz}$), OTICA GEOMETRICA

e f

CAMP

L'equazione delle onde vale in moto approssimato per qualsiasi coppia $|\nabla \varepsilon|, \omega$
tale che $|\frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon}| \ll K^2 = \omega^2/\mu_0 \varepsilon$

mezzo
e soluz.
INDICE DI RIFRAZIONE: $n(\underline{z}) := \sqrt{\varepsilon(\underline{z})}$ POICHÉ $\mu_0 = 1$
 $\Rightarrow \varepsilon = \frac{\varepsilon}{n(\underline{z})}$
 $K_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon}$ $K(\underline{z}) = n(\underline{z}) K_0$

alle Sostituisco
campi → Ipotizziamo che la soluzione $E(\underline{z})$ abbia la forma
ENZA $E(\underline{z}) = E_0 e^{-jK_0 \phi(\underline{z})}$ con E_0 indipendente dalle coordinate
 ϕ funzione di punto (reale)

DA INFORMATO SULLO STATO DI POLARIZZAZIONE E SULL'AVELLENZA DEL CAMPO

TERMINI CHE VARIANO SOLO LA FASE DI $E(\underline{z})$

Per essere accettabile, $E(\underline{z})$ deve soddisfare l'equazione delle onde:

$$\nabla^2 E_0 e^{-jK_0 \phi(\underline{z})} + K_0^2 n^2(\underline{z}) E_0 e^{-jK_0 \phi(\underline{z})} = 0$$

ovvero

$$E_0 \nabla^2 e^{-jK_0 \phi(\underline{z})} + K_0^2 n^2(\underline{z}) E_0 e^{-jK_0 \phi(\underline{z})} = 0$$

DATO CHE: $\nabla^2 e^{-jK_0 \phi} = -jK_0 (-jK_0 \nabla \phi \cdot \nabla \phi + \nabla^2 \phi) e^{-jK_0 \phi}$

La soluzione
 $E_0 = 0$ è banale
e non ci interessa

PER SODDISFARE L'EQUAZ. È NECESSARIO CHE: $-jK_0 (-jK_0 \nabla \phi \cdot \nabla \phi + \nabla^2 \phi) + K_0^2 n^2 = 0$

conta: cioè: $-K_0^2 \nabla \phi \cdot \nabla \phi - jK_0 \nabla^2 \phi + K_0^2 n^2 = 0$ Abbiamo semplificato gli esponenti

$\Rightarrow \begin{cases} n^2 - \nabla \phi \cdot \nabla \phi = 0 & \leftarrow \text{PARTE REALE (senza i } K_0 \text{ a fattore che sicuramente } \neq 0\right) \\ \nabla^2 \phi = 0 & \leftarrow \text{PARTE IMMAGINARIA ("")}\end{cases}$

$\Rightarrow n^2 - |\nabla \phi|^2 = 0$ → EQUAZIONE EICONALE
 $\downarrow \phi \text{ reale} \Rightarrow \nabla \phi \text{ reale}$ Lo fornisce la funz. di fase $\phi(\underline{z})$ compatibile con $n(\underline{z})$

Ci dice come deve essere la soluz. affinché sia compatibile col mezzo considerato.

IN PARTICOLARE COME DEVE ESSERE FATTA LA $\phi(\underline{z})$ DIPENDENTEMENTE DAL MEZZO

29/10/2020

Onda elettromagnetica: $E(\underline{z}) = E_0 e^{-jK_0 \phi(\underline{z})}$

È un vettore complesso, prodotto di un fattore vettoriale E_0 (che determina completezza e polarizzazione) per un fattore di fase $e^{-jK_0 \phi(\underline{z})}$.

CAMPO FUNZIONE DI SPAZIO E TEMPO: $E(\underline{z}, t) = \operatorname{Re}[E(\underline{z}) e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[E_0 e^{-j[K_0 \phi(\underline{z}) - \omega t]}]$

Il fattore $e^{-j[K_0\phi(\xi) - \omega t]}$ è funzione dello spazio e del tempo.

Assunto E_0 reale, le componenti di $\vec{E}(\xi, t)$ in funzione dell'ascissa ξ lungo una direzione $\hat{\xi}_0$, nell'intorno di ξ si ha:

$$E_i(\xi, t) = E_{0i} \cos [K_0 \phi(\xi) - \omega t] \quad i = x, y, z$$

\hookrightarrow A partire da $E(t) = E_0 \cos(\omega t) - E_0 \sin(\omega t)$ dove $E_0 = 0$ è l'argomento in seno e coseno è $K_0 \phi(\xi) + \omega t$

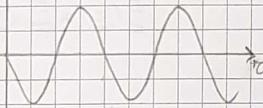
$\vec{\xi} \uparrow \quad \xi = \text{costante} \Rightarrow K_0 \phi(\xi) \text{ è la fase}$



$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow \text{PERIODO TEMPORALE}$$

caso $\xi = \text{cost}$

$\vec{\xi} \uparrow \quad t = \text{costante} \Rightarrow \omega t \text{ è la fase}$

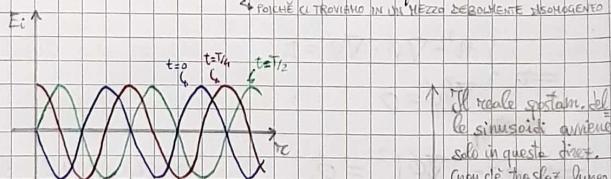


$$\lambda(\xi) = \frac{2\pi}{K_0} \frac{1}{m(\xi)} \rightarrow \text{PERIODO SPAZIALE} = \text{LUNGHEZZA D'ONDA LOCALE}$$

(valore solo nel punto ξ)

- In ciascun punto dello spazio le componenti del campo sono funzioni sinusoidali del tempo.
- Fissato un istante, le componenti sono funzioni sinusoidali dell'ascissa ξ in intorno di ciascun punto sufficientemente piccoli affinché la fase possa essere considerata funzione lineare dell'ascissa ξ \Rightarrow la lunghezza d'onda locale $\lambda(\xi)$ ($=$ periodicità spaziale del campo) è variabile lentamente nello spazio.

(*) Affinché $\phi(\xi)$ possa essere approssimata al suo sviluppo di Taylor del primo ordine e, quindi, a una funzione lineare in ξ .



\uparrow Il reale spostm. del le sinusoidi avviene solo in questa direz. Cosa c'è traslat. lungo ξ : l'apparito spaziale. \downarrow è tutto a una sorta di sincronizz. delle sinusoidi

In istanti successivi, il valore della E_i rimane invariato per ascisse ξ crescenti, in modo tale che $K_0 \phi(\xi)$ compensa la variazione $j\omega t$.

La sinusoida che rappresenta ciascuna componente E_i è come se traslassasse \Rightarrow L'ONDA SI PROPAGA.

Nello spazio, $E_i(\xi) = \text{costante}$ se $K_0 \phi(\xi) - \omega t = \text{costante}$.

PER OGNI ISTANTE t RAFFIGURA UNA SUPERFICIE NELLO SPAZIO (SUPERFICIE D'ONDA).

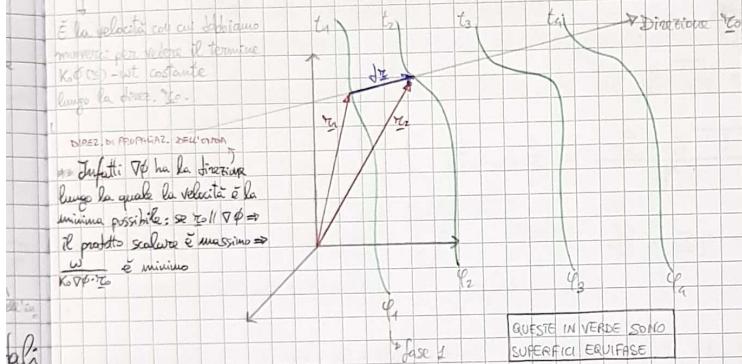
\uparrow È la stessa condizione di costanza di $E_i(\xi)$ di prima salvo il fatto che ora $\phi(\xi)$ è una funzione variabile

Al trascorrere del tempo la superficie d'onda trasla \Rightarrow l'onda si propaga nello spazio
Se il tempo varia di Δt , lo spostamento dr lungo $\underline{\tau}_0$ che annulla il differenziale
è:

$$K_0(\nabla\phi) \cdot \underline{\tau}_0 \Delta t - \omega \Delta t = 0$$

VELOCITÀ DI PROPAGAZIONE NELLA DIREZIONE $\underline{\tau}_0$:

$$\frac{d\underline{\tau}}{dt} \Big|_{\underline{\tau}_0} = \frac{\omega}{K_0 \nabla\phi \cdot \underline{\tau}_0} = \mu \underline{\tau}_0$$



È una traslazione che consente di calcolare le formazioni dell'onda che dipendono da come è fatto l'indice di refrattione n .
Lo che è anche dovuto al fatto che ω non è esattamente lineare (cioè qui lungo all'1° ordine vale solo questo).

La velocità si dipende dalla direzione $\underline{\tau}_0$ (a cui dipende la lunghezza Δt)

Ad prescindere dalla direzione, il tempo si passa da una fase all'altra (e.g. da t_1 a t_2) dove rimanere invariato

$$\rightarrow \text{Se } \underline{\tau}_0 \parallel \nabla\phi \Rightarrow \mu = \frac{\omega}{K_0 |\nabla\phi|} \stackrel{\text{ERIZZ. ECONALE}}{=} \frac{\omega}{\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

← VELOCITÀ DELLA LUCE NELL'HEZZO E NEL PUNTO CONSIDERATO

$$\text{in } \mu = \frac{c_0}{\omega} \quad (\text{MINIMA})^** \quad \text{con } c_0 \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

← velocità minima = velocità di propagazione

→ nel vuoto $\mu = 1$

→ ricordiamoci che, in realtà, mai si sta muovendo molto in quella direzione (abbiamo visto che il movimento è solo "su e giù")

per cui non andiamo in contraddizione con i principi della relatività ristretta

Relazioni tra i campi e la direzione di propagazione:

$$\text{Se } \underline{E} = E_0 e^{-jk_0 \phi(\underline{\tau})} \Rightarrow \text{anche } \underline{H} = H_0 e^{-jk_0 \phi(\underline{\tau})}$$

DALLA PRIMA EQUAZIONE DI MAXWELL:

$$\nabla \times [E_0 e^{-jk_0 \phi(\underline{\tau})}] = -j\omega \mu_0 H_0 e^{-jk_0 \phi(\underline{\tau})}$$

$$(\nabla \times E_0) e^{-jk_0 \phi(\underline{\tau})} - E_0 \times \nabla e^{-jk_0 \phi(\underline{\tau})} = -j\omega \mu_0 H_0 e^{-jk_0 \phi(\underline{\tau})}$$

$$-E_0 \times [-jk_0 \nabla \phi(\underline{\tau})] = -j\omega \mu_0 H_0$$

$$jk_0 \nabla \phi \times E_0 = j\omega \mu_0 H_0$$

$$\nabla \phi \times E_0 = \frac{\omega \mu_0}{\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} H_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H_0$$

ANALOGAMENTE, DALLA SECONDA EQUAZIONE DI MAXWELL:

$$\nabla \phi(\Sigma) \times \underline{H}_0 = -\frac{\epsilon \underline{E}_0}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

④ In particolare, $\underline{E}_0, \underline{H}_0$, se formano una Terna trirettangolare e $\underline{E}_0, \underline{H}_0$, se formano un'altra Terna trirettangolare detta

Poniamo

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

IMPEDENZA INTRINSECA DEL VUOTO $\approx 377 \Omega$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

IMPEDENZA INTRINSECA DEL MEZZO senza dissipazione.

$$\nabla \phi = |\nabla \phi| \underline{s} = n \underline{s}_0 = \sqrt{\epsilon'} \underline{s}_0$$

$$\cdot \underline{H}_0 = \frac{\nabla \phi \times \underline{E}_0}{\eta_0} = \frac{\sqrt{\epsilon'} \underline{s}_0 \times \underline{E}_0}{\eta_0} = \frac{1}{\eta} \underline{s}_0 \times \underline{E}_0$$

$$\cdot \underline{E}_0 = -\frac{\nabla \phi \times \underline{H}_0}{\epsilon \mu_0} = -n \underline{s}_0 \times \underline{H}_0$$

$$\begin{array}{l} \text{o MEZZO} \rightarrow \underline{E}_0 \perp \underline{H}_0 \\ \underline{E}_0 \perp \underline{s}_0 \quad \underline{H}_0 \perp \underline{s}_0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \underline{E}_0 \perp \underline{H}_0 \\ \underline{H}_0 \perp \underline{s}_0 \end{array}$$

Le componenti reali e immaginarie di $\underline{E}_0, \underline{H}_0$ sono ortogonali sia tra loro che alla direzione di propagazione \underline{s}_0 ($\underline{E}_0 \perp \underline{H}_0, \underline{E}_0 \perp \underline{s}_0, \underline{H}_0 \perp \underline{s}_0$)

↳ formano una Terna TRIETANGOLA

$$\underline{E}_0 = |\underline{E}_0| \underline{e}_0, \quad \underline{H}_0 = |\underline{H}_0| \underline{h}_0, \quad \underline{h}_0 = \underline{s}_0 \times \underline{e}_0, \quad \underline{e}_0 = -\underline{s}_0 \times \underline{h}_0$$

I piani di polarizzazione

di $\underline{E}_0, \underline{H}_0$ costituiscono poi due piani ortogonali ortogonalmente a \underline{s}_0

Raggi elettromagnetici:

Consideriamo il VETTORE DI POYNTING:

$$\underline{P} = \frac{1}{2} \underline{E} \times \underline{H}^* = \frac{1}{2} \underline{E}_0 \times \underline{H}_0^* = \frac{1}{2} \underline{E}_0 \times \frac{\underline{s}_0 \times \underline{E}_0^*}{\eta} = \frac{1}{2} \frac{\underline{E}_0 \cdot \underline{E}_0^*}{\eta} \underline{s}_0$$

$$\underline{s} \perp \underline{E}_0$$

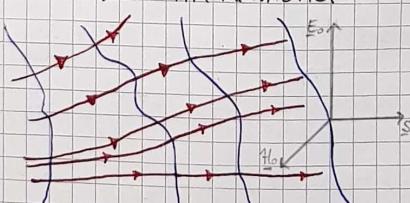
→ \underline{P} ha direzione e verso di \underline{s}_0 , ortogonale alle superfici d'onda $\phi(\Sigma) = \text{costante}$.

→ Il trasporto di potenza avviene ortogonalmente alle $\phi(\Sigma) = \text{costante}$.

→ Le curve ortogonali in ogni punto alle superfici d'onda sono traiettorie dell'energia elettromagnetica \Rightarrow RAGGI ELETROMAGNETICI

I raggi elettromagnetici (in rosso) sono perpendicolari alle superfici equidistanti

L'uso dei raggi elettromagnetici riduce il problema della propagazione da 3 dimensioni a monodimensionale.



Per risolvere i problemi con i raggi elettromagnetici basterebbe semplicemente determinare il raggio (in particolare la linea che contiene la retta del punto di riconoscimento).

In generale, vanno determinate poi ampiezza, fase e polarizzazione del raggio.

03/11/2020

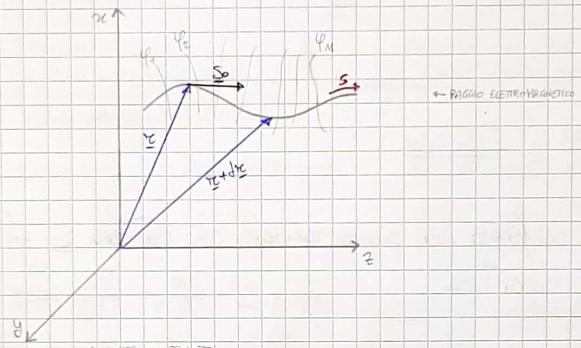
Poiché $\nabla\phi = n \underline{s}_0 \Rightarrow \nabla\phi \cdot \underline{s}_0 = \frac{d\phi}{ds} = n$ se s è l'ascissa curvilinea lungo il raggio

Quindi: $\nabla n = \nabla \frac{d\phi}{ds} = \frac{1}{ds} \nabla\phi = \frac{1}{ds} (n \underline{s}_0)$

Per definizione, $\underline{s}_0 = \frac{d\underline{r}}{ds}$ $\Rightarrow \nabla n = \frac{1}{ds} [n(\underline{\Sigma}) \frac{d\underline{r}}{ds}]$

Eq. che permette di individuare il raggio
lungo il raggio
(eq. del raggio)

EQUAZIONE DEL RAGGIO: individua il raggio elettromagnetico come traiettoria dell'estremo libero del vettore posizione \underline{r} al variare dell'ascissa curvilinea s .



Poiché

$$\frac{d}{ds}(n \underline{s}_0) = \underline{s}_0 \frac{dn}{ds} + n \frac{d\underline{s}_0}{ds} = \nabla n$$

IN PARTICOLARE, IL RAGGIO SI INCURVA NEL PIANO CHE CONTIENE \underline{s}_0 E ∇n

* TERMINE CHE INDICA QUALE È LA DIREZIONE DI SPERIMENTAZIONE DEL RAGGIO.

* TERMINE CHE INDICA COME VARIA \underline{s}_0 (COME VARIA LA DIREZ. DEL RAGGIO) CON LE COND.

- Il raggio rimane localmente confinato nel piano individuato da \underline{s}_0 e ∇n .
- La traiettoria si incurva nel piano che contiene la direzione di massima variazione dell'indice di rifrazione. $\rightarrow \nabla n$

Per definizione, la curvatura $\frac{1}{\rho}$ del raggio elettromagnetico (dove ρ è il raggio di curvatura) è data da:

$$\frac{m_0}{\rho} = \frac{d\underline{s}_0}{ds}$$

Normale principale della curva = Normale che va verso il centro della curva approssimativa.

$$m_0 \frac{1}{\rho} = m_0 \cdot \frac{d\underline{s}_0}{ds} = m_0 \left(\frac{\nabla n}{n} - \frac{\underline{s}_0}{n} \frac{dn}{ds} \right) = m_0 \cdot \frac{\nabla n}{n}$$

RAGGIO DELLA CRF OSCULATRICE (CRF APPROSSIMANTE LA CURVA IN UN PIANO LARGO INTORNO)

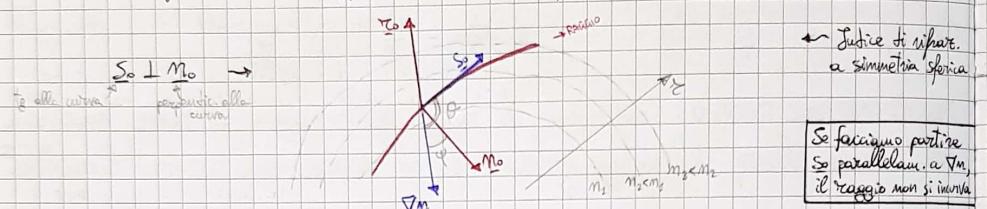
A partire di n , la curvatura aumenta con $|\nabla n|$ e la concavità ($\rho > 0$) è rivolta verso la regione con indice di rifrazione crescente.

Il raggio elettromagnetico è localmente rettilineo se $\underline{s}_0 \parallel \nabla n$.

Se il mezzo è omogeneo $\nabla n = 0 \Rightarrow$ il raggio è rettilineo ovunque

Raggi in metri stratificati radialmente:

Pensiamo momentaneamente all'atmosfera con telle caratteristiche che variano solo con la quota (è un'approssimazione un po' troppo...).



$$\nabla n = -|\nabla n| \frac{z_0}{z_0} \quad (\text{troposfera}) \quad \rightarrow \text{l'indice di rifrazione diminuisce con la quota}$$

$$\frac{ds}{ds} = -\frac{|\nabla n|}{n} \frac{z_0}{z_0} - \frac{s_0}{n} \cdot \frac{dn}{ds} \quad \rightarrow \text{fino a una decina di km si quota}$$

— EQUAZ. RAGGIO

Il raggio è confinato nel piano cartesiano che contiene s_0 ed è incurvato verso il basso con curvatura

$$\frac{1}{P} = \frac{m_0}{s_0} \cdot \frac{\nabla n}{n} = \frac{|\nabla n|}{n} \cos \theta = \frac{|\nabla n|}{n} \sin \theta$$

PERCORSO ELETROMAGNETICO E PRINCIPIO DI FERMAT:

Un raggio elettromagnetico che passa per due punti P_1, P_2 è tale che la lunghezza L del percorso elettromagnetico è pari a:

Se $n(z)$ è costante, $V = C n(z) c$

lunghezza, per cui $\int ds$ è ridotto a

tempo x passato da uno superato dall'altro

equivalente all'altro

possiamo vedere così come funziona un percorso + lungo

$$L = \int_{P_1}^{P_2} n(z) ds$$

ed è STAZIONARIA,

Considerata una qualunque curva che congiunge i due punti, quelle che rendono STAZIONARIO (generalmente minimo) il valore dell'integrale di linea dell'indice di rifrazione $n(z)$ sono le traiettorie dell'energia elettromagnetica.

Questa è una tecnica numerica per determinare i raggi, anche se siamo in presenza di riflessioni, come nell'esempio seguente:

— Vanno bene entrambi

Il raggio riflettente in rosso

è un esempio di percorso

(curva) che rende STAZIONARIO

ma non minimo il valore

dell'integrale L (il raggio tratti

teggiato la curva minima)

Gli "raggi" solo teorici \Rightarrow
il metodo è analogico

TEMPO CHE L'ENERGIA ELETROMAGNETICA IMPIEGA TRA I DUE PUNTI

Noto l'avallamento dell'indice di rifrazione, la misura di t dà la distanza tra trasmettitore e ricevitore (tra i due punti)

→ Con tre o più trasmettitori, la misura dei tre o più tempi fornisce la posizione (= le tre coordinate del ricevitore)

→ Più sono i trasmettitori, più il calcolo della posizione è preciso

3 TRASV. (=SATELLI) IDEALMENTE BASTANO, MA SE NON SI CONOSCE PERFETTAMENTE L'ALZAMENTO DI M(%) LA PRECISIONE SUL CALCOLO DELLA POSIZIONE RICEVUTA VIENE MEGLIO

Application: GPS - RADAR

Global Positioning System

Radio detection and ranging

Determina la distanza di un oggetto (nave, aereo, superficie terrestre) dalla misura dell'intervallo di tempo Δt tra il momento in cui viene trasmessa l'energia eletromagnetica e quello in cui viene ricevuto l'eco (energia ricevuta)

Un'altra possibile applicazione è utilizzare fasi diverse di trasmisori diversi per comporre una mappa di "orario" (sopra che è vicina all'orizzonte della radura)

$$R = \frac{c_0 \cdot \Delta t}{2}$$

LUNGHEZZA D'ONDA: $\lambda = \frac{c_0}{f}$

→ Visto 2 perché Δt è un tempo di andata e ritorno

In condizioni di propagazione costante, una misura di fase consente di misurare la distanza con precisione proporzionale alla frazione della lunghezza d'onda

ESEMPIO: $\lambda = \frac{c_0}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^9} = 0.1 \text{ m}$

Se $f = 3 \text{ GHz} = 3 \cdot 10^9 \text{ Hz} \Rightarrow \lambda = 0.1 \text{ m}$

→ Precisione dell'ordine dei cm

04/11/2020

Esercizio 1:

Cubo di lato $l = 10 \text{ cm}$

$$\underline{J}_i = 4(x_0 + 2jy_0 + 0,5z_0) \text{ A/m}^2 \rightarrow \text{Vettore polarizzato ellitticamente}$$

Calcolare la potenza che attraversa una sfera contenente il cubo e il cui materiale è privo di dissipazioni nei casi in cui:

$R = 100 \text{ m}$

$\underline{E}_1 = -50 \text{ V/m}^{-1}$

$R = 200 \text{ m}$

$\underline{E}_2 = +j50 \text{ V/m}^{-1}$

} All'interno del cubo

→ Sfruttiamo il Thm di Poynting, ponendo pari a zero i termini relativi alla dissipazione.

$V :=$ volume della sfera

$V' :=$ volume del cubo

$$-\iiint_V \frac{\underline{J}_i^* \cdot \underline{E}}{2} dV =$$

$$\textcircled{1} \quad -\iiint_V \underline{J}_i^* \cdot \underline{E} dV = -4(x_0 - 2jy_0 + 0,5z_0) \cdot 50 = -200$$

$$\Rightarrow -\iiint_V \frac{\underline{J}_i^* \cdot \underline{E}}{2} dV = 100 \iiint_V dV = 0,1 \text{ W}$$

La parte immaginaria di altri termini non è nulla!

$$\text{Per il Thm di Poynting: } \text{Re} \left[-\iiint_V \frac{\underline{J}_i^* \cdot \underline{E}}{2} dV \right] = \text{Re} \left[\int_S \frac{(\underline{E} \times \underline{H})^*}{2} dS \right] = 0,1 \text{ W}$$

Casi se $R = 100 \text{ m}$

Casi se $R = 200 \text{ m}$

$$\textcircled{2} \quad \underline{J}_i^* \cdot \underline{E}_o = 4(x_o - 2jy_o + 0,5z_o) \cdot 50jx_o = 200j$$

$\tilde{\underline{E}}$ a media nulla
nel periodo

$$-\iiint_V \frac{\underline{J}_i \cdot \underline{E}}{2} dV = -0,1 j \text{ VA} \rightarrow \text{potenza reattiva (è tutta immaginaria)}$$

ciò vuol dire che \underline{J}_i e \underline{E} sono in quadratura (hanno uno sfasamento pari a $\pi/2$)

STAVOLTA DI RICCIOLI $R = 2 \mu$

con $\theta = 0$

~ E se all'interno della sfera si ha un materiale dissipativo con

$$g = 3 \cdot 10^{-2} \text{ Sm}^{-1}, \quad \epsilon = (3 - j0,12)\epsilon_0$$

e a forma di cilindro con raggio $R' = 10 \text{ cm}$ e altezza $h = 10 \text{ cm}$, quanto è uguale la potenza dissipata all'interno di questo cilindro?

Onde piane in mezzi uniformi:

~ Si può pensare a un mezzo trasmissivo omogeneo (con un'approssimazione) quando si ha a che fare con volumi trasmettenti o con la comunicazione tra due satelliti al di fuori dell'atmosfera.

METTO UNIFORME $\Rightarrow \nabla\phi = m\underline{s} = \text{costante}$

L'energia elettromagnetica si propaga lungo traiettorie rettilinee (dato che ϕ è costante).

$$\phi(s) = m \int_{s_i}^s ds = ms + \text{cost}$$

è lineare nel percorso geometrico s .

ESF

Le superfici d'onda $\phi(\underline{x}) = \text{costante}$ possono essere dei piani: Onde piane

$$\Rightarrow \phi(\underline{x}) = Y_x x + Y_y y + Y_z z$$

La soluz. dell'equaz. delle onde

$$\text{CAMPO: } \underline{E}(\underline{x}) = \underline{E}_0 e^{-jk_o(x_x x + y_y y + z_z z)}$$

eq. di un piano

$$Y := Y_x x_o + Y_y y_o + Y_z z_o = \nabla(Y_x x + Y_y y + Y_z z) = \nabla\phi = m\underline{s}_0$$

~ Just visualizza la traiettoria elettromagnetica (direzione e verso di propagazione) poiché parallelo a \underline{s}_0 .

$$\text{VETTORE DI PROPAGAZIONE: } \underline{k} := k_o \underline{Y} = k_o \nabla\phi = K_x x_0 + K_y y_0 + K_z z_0$$

$$\Rightarrow \text{ONDA PIANA: } \underline{E}(\underline{x}) = \underline{E}_0 e^{-jk_o \cdot \underline{x}}$$

I parametri del mezzo, la posizione delle sorgenti e le condizioni al contorno determinano \underline{k} .

L'onda piana deve soddisfare l'equazione delle onde (a coefficienti costanti):

$$\nabla^2 (E_0 e^{-jkz}) + K^2 E_0 e^{-jkz} = 0$$

Sappiamo che è rappresentata in funzione di E e quindi dell'impedenza di propagazione se questo sarà zero in media sospeso, è un valore costante (una varia più con la costitutività)

$$E_0 \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) e^{-jk(x+K_y y + K_z z)} + K^2 e^{-jkz} \right] = 0$$

Sono due concetti come dati ma distinti!

$$E_0 \left[-(K_x^2 + K_y^2 + K_z^2) + K^2 \right] = 0$$

\rightarrow NB: K rappresenta il mezzo di propagazione

$$K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 = K \cdot K = K^2$$

K rappresenta l'onda

$$K = K_x x + K_y y + K_z z$$

CONDIZIONE EQUIVALENTE ALL'EQUAZIONE DI PROPAGAZIONE

Vediamo già la stessa e potrebbe essere complessa

Se il mezzo è dissipativo, $K^2 = (j\omega e + g)(-j\omega \mu)$ è complessa \Rightarrow

$\rightarrow K$ è complesso: $K := \beta - j\alpha$

$$\text{con } K^2 = (\beta - j\alpha) \cdot (\beta - j\alpha) = \beta^2 - \alpha^2 - 2j\alpha \cdot \beta$$

(α, β = ampiezza dei vettori α, β)

QUINDI: $\alpha \neq 0$, α NON ORTOGONALE A β

\rightarrow Allora α ha parte immaginaria di β e quindi la parte immaginaria di K^2 si annulla

K può essere complesso anche se il mezzo è senza dissipazioni:

$$K \cdot K = \beta^2 - \alpha^2 - 2j\alpha \cdot \beta = K^2$$

REALE

\rightarrow Allora K^2 dovrebbe negativo

\hookrightarrow SODDISFATTA SE $\alpha = 0$ MA ANCHE SE $\alpha \perp \beta$, CON $\beta > \alpha$

ESPRESSIONE GENERALE DI UN'ONDA PIANA:

$$E(z) = E_0 e^{-jkz} = E_0 e^{-j(\beta - j\alpha)z} = E_0 e^{-\alpha z} \cdot e^{-j\beta z}$$

RAPPRESENTA LA PROPAGAZIONE IN UNA DIREZIONE CHE È LA PROPAGAZIONE (qualsiasi della situazione)

$e^{-\alpha z}$ è il fattore di ampiezza $\Rightarrow \alpha$ è il fattore di attenuazione ($\rightarrow e^{-\alpha z} \leq 1$ sempre)

$e^{-j\beta z}$ è il fattore di fase $\Rightarrow \beta$ è il vettore di fase \rightarrow se $\beta = 0 \Rightarrow$ L'onda non c'è

α INDIVIDUA I PIANI DI AMPIZZA $\alpha \cdot z$ = costante, ORTOGONALI A α .

β INDIVIDUA I PIANI EQUIFASE $\beta \cdot z$ = cost., ORTOGONALI A β .

Un'onda piana è UNIFORME quando i piani equipase coincidono con quelli equiampiezza, ovvero quando $\alpha = 0$ oppure $\alpha \parallel \beta$.

05/11/2020

\rightarrow Se $\alpha = 0 \Rightarrow$ la tutta la direzione è quindi anche quella parallela a $\beta \Rightarrow$ questo significa l'ampiezza è la stessa in tutta la sezione per cui lo è anche sui piani equipase \rightarrow L'onda è PIANA UNIFORME

$\alpha \parallel \beta \rightarrow$ L'onda si attenua nella stessa direzione in cui si propaga.

$\alpha \perp \beta \rightarrow$ L'onda si attenua nella direzione perpendicolare in cui si propaga

(ASSENZA DI DISSIPAZIONI)

\rightarrow chiarimento meglio + avanti.

VELOCITÀ DI FASE NELLA DIREZIONE \hat{r}_0 AD ANGOLO θ CON $\hat{\beta}$:

$$u|_{\hat{r}_0} = \frac{\omega}{\beta \cdot \hat{r}_0} = \frac{\omega}{\rho \cos \theta}$$

VELOCITÀ DI PROPAGAZIONE: velocità $u|_{\hat{\beta}}$ nella direzione di $\hat{\beta}$ (valore minimo).
 → $u|_{\hat{\beta}}$ dipende dall'uniformità dell'onda.

MEZZO SENZA DISSIPAZIONI:

→ Per un'onda uniforme:

$$u|_{\hat{\beta}} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} = c$$

→ Per un'onda non uniforme:

$$u|_{\hat{\beta}} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 \mu \epsilon + \alpha^2}} < c$$

⇒ Un'onda non uniforme ha velocità di fase minore di un'onda uniforme.

Relazioni tra campi e vettore di propagazione:

Dato che $K = K_0 \nabla \phi$, le equazioni di Maxwell danno:

$$\underline{K} \times \underline{E}_0 = \omega \mu \underline{H}_0 \Rightarrow \underline{H}_0 = \frac{\underline{K} \times \underline{E}_0}{\mu \omega}$$

Se E_0 è polarizzato lineare, in generale H_0 è polarizzato ellittico, a meno che l'onda sia più uniforme (in cui $K = \beta - j\alpha$ con $\alpha \parallel \beta$)

$$-\underline{K} \times \underline{H}_0 = \omega \epsilon \underline{E}_0 \Rightarrow \underline{E}_0 = -\frac{\underline{K} \times \underline{H}_0}{\omega \epsilon}$$

Nota che non possiamo fare le stesse considerazioni sulle ampiezze: è valida se il mezzo è lineare. Dicono: K è diverso da 0 , è complesso

E_0, H_0 sono legati mutualmente attraverso il prodotto vettore con $K = \beta - j\alpha$.

④ PER UN'ONDA PIANA UNIFORME, $K = (\beta - j\alpha) \hat{\beta}_0 = K \hat{\beta}_0$:

$$\bullet \underline{H}_0 = \frac{\underline{K} \hat{\beta}_0 \times \underline{E}_0}{\omega \mu} = \frac{\omega \sqrt{\mu \epsilon}}{\omega \mu} \hat{\beta}_0 \times \underline{E}_0 = \frac{\hat{\beta}_0 \times \underline{E}_0}{\eta}$$

È qui che scriviamo la relazione che lega tra E_0, H_0 , che abbiamo visto nel caso del mezzo del tutto dissipativo

$$\bullet \underline{E}_0 = -\eta \hat{\beta}_0 \times \underline{H}_0$$

In particolare, E_0 coincide con \underline{E}_0 con la differenza che \underline{E}_0 non varia con $\hat{\beta}_0$ come E_0 .

Le onde che abbiamo visto nel mezzo secondo esempio, non erano piane, ma erano uniformi

Le componenti (reale e immaginaria) di E_0, H_0 di un'onda piana uniforme sono ortogonali:

→ Tra loro

→ Al vettore di propagazione e quindi al vettore di fase $\hat{\beta}$

→ Per un mezzo dissipativo, anche al vettore di attenuazione α

Per un'onda piana uniforme: $\rightarrow \alpha \parallel \beta, \delta \neq 0, \beta \neq 0$
Mezzo con dissipazione.

- La COSTANTE DI PROPAGAZIONE $K = K_r - jK_j = \beta - j\alpha$ determina le caratteristiche di propagazione (per progressione di fase) β e di attenuazione α .
- L'IMPEDENZA INTRINSECA η determina il legame tra i campi.
 \rightarrow i.e. il rapporto tra le ampiezze

COSTANTE DI PROPAGAZIONE:

- Mezzo dissipativo per conduttabilità: $\sigma \neq 0$, ϵ, μ reali

$$K = K_r - jK_j = \sqrt{-j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)}$$

$$K_r = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} + 1 \right]}$$

$$K_j = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} - 1 \right]}$$

$$\rightarrow \text{se } \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad K_r \approx \omega\sqrt{\mu\epsilon} \quad ; \quad K_j \approx \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad \Rightarrow$$

Il mezzo "si comporta da dielettrico".

Risultato ottenuto a seguito di uno sviluppo per la 1^a radice di $1+x^2$ (ovvero $\sqrt{1+(\frac{\sigma}{\omega\epsilon})^2}$) senza di questo, avremmo ottenuto 0.

Mezzo PLESSO RISP. K_r

$$\rightarrow \text{se } \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1 \quad \Rightarrow \quad K_r \approx K_j \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \quad \Rightarrow$$

Il mezzo "si comporta da conduttore".

$\rightarrow \sigma$ prevale su ϵ
si hanno dissipazioni
+ fatto rispetto al
caso precedente

N.B.: Il comportamento del mezzo dipende anche dalla frequenza ω :

→ Ad "alta" frequenza il mezzo tende al dielettrico.

→ A "bassa" frequenza il mezzo tende al conduttore.

- Mezzo dielettrico dissipativo: $\sigma = 0$, ϵ complessa, μ reale

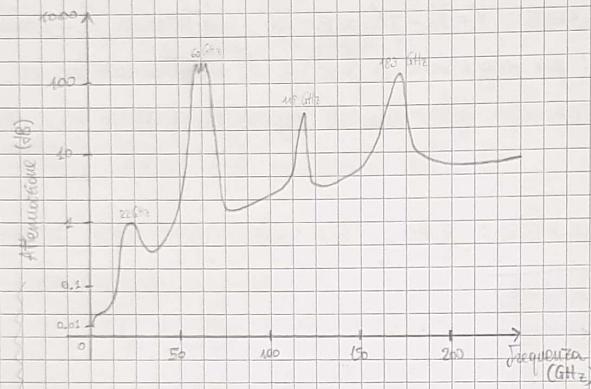
$$K_r - jK_j = \omega \sqrt{\mu\epsilon (\epsilon' + j\epsilon'')}$$

$$\text{se } |\epsilon''| \ll \epsilon' \Rightarrow \quad K_r \approx \omega \sqrt{\mu\epsilon \epsilon'} \quad ; \quad K_j \approx \frac{\omega}{2} \sqrt{\mu\epsilon} \frac{|\epsilon''|}{\epsilon'} \ll K_r$$

Dal punto di vista propagativo, il mezzo può essere considerato privo di dissipazioni; dal punto di vista dell'attenuazione non lo sappiamo a priori dato che, per la presenza del fattore ω , K_j può essere elevata anche quando $|\epsilon''|$ è bassa.

\rightarrow È IL CASO DELLA TROPOSPERA

ATTENUAZIONE TOTALE TERRA-SATELLITE:



→ È un grafico molto simile a quello di $|E|$

← Notiamo che la scala è logaritmica, per cui, coi dB, abbiamo una rappresentazione dissipativa logaritmica.

→ Diminuzione del vettore di Poynting (dovuta alla diminuzione dell'ampiezza dei campi) nella propria percorrenza tramite l'atmosfera tra la superficie terrestre e il satellite

$$\rightarrow \text{Se } A \text{ l'attenuazione} \rightarrow A_{dB} = 10 \log \frac{A}{A_0}, \quad A = \frac{\text{POTENZA TRASMESSA}}{\text{POTENZA RICEVUTA}} > 1$$

IMPEDIMENTO INTRINSECO:

- Metto dissipativo per condutibilità: $\sigma \neq 0, \epsilon, \mu$ reali

$$\eta = \eta_r + j\eta_j = \frac{\omega\mu}{\sqrt{-j\omega\mu(\epsilon+j\omega\sigma)}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon - j\frac{\sigma}{\omega}}} = \sqrt{\frac{\mu(\epsilon + j\frac{\sigma}{\omega})}{\epsilon^2 + (\frac{\sigma}{\omega})^2}} \rightarrow$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu\epsilon(1 + j\frac{\sigma}{\omega\epsilon})}{1 + (\frac{\sigma}{\omega\epsilon})^2}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sqrt{\frac{1 + j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}{1 + (\frac{\sigma}{\omega\epsilon})^2}}$$

→ Se η complesso \Rightarrow i campi elettrico e magnetico hanno la stessa polarizzazione, ma sono sfasati (succede la stessa cosa rispetto al caso di $D = \epsilon E$ con ϵ complesso)

→ Se il metto "si comporta da filo elettrico" $\Rightarrow \eta_r \approx \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}, \eta_j \approx \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\sigma}{2\omega} \ll \eta_r$

→ Se il metto "si comporta da conduttore" $\Rightarrow \eta_r \approx \eta_j \approx \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$

$$\Sigma \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0$$

10/11/2020

Esercizio 1:

$$\beta = \beta_x X_0 + \beta_y Y_0 + \beta_z Z_0$$

$$\Sigma = X X_0 + Y Y_0 + Z Z_0$$

$$\Rightarrow \beta \cdot \Sigma = \beta_x X + \beta_y Y + \beta_z Z$$

$$E(\Sigma) = E_0 e^{j\alpha \cdot \Sigma} e^{-j\beta \cdot \Sigma}$$

Se $\underline{E}(\xi)$ rappresenta il campo elettrico in un'onda piana uniforme e ci troviamo in un mezzo senza dissipazioni $\Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow \underline{E}(\xi) = \underline{E}_0 e^{j\beta \cdot \xi}$, K^2 reale.

Da questi presupposti, vogliamo costruire un'onda (piana uniforme) che si propaga lungo la direzione x_0 .

$$\beta = \beta x_0 \Rightarrow \underline{\beta} \cdot \underline{\xi} = \beta x$$

$$\text{MEZZO SENZA DISSIPAZIONI} \Rightarrow \beta^2 = K^2 = \omega^2 \mu \epsilon \Rightarrow \beta = \sqrt{\mu \epsilon} \omega \\ \Rightarrow \underline{\beta} \cdot \underline{\xi} = \omega \sqrt{\mu \epsilon} x \Rightarrow \underline{E}(\xi) = \underline{E}_0 e^{-j\omega \sqrt{\mu \epsilon} x}$$

ONDA PIANA UNIFORME $\Rightarrow \underline{E}(\xi) \perp \underline{\beta}$

Pretendiamo un $\underline{E}(\xi)$ polarizzato linearmente: $\underline{E}_0 = E_0 y_0 + E_0 z_0$

Pretendiamo un $\underline{E}(\xi)$ polarizzato circolarmente: $\underline{E}_0 = E_0 (y_0 + j z_0)$

Ora pensiamo a un'onda che si propaga lungo una direzione che giace sul piano (x, z) e che forma un angolo di π_3 rispetto all'asse x :

$$\rightarrow \beta = \beta (\cos \pi_3 x_0 + \sin \pi_3 z_0) = \\ = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \left(\frac{1}{2} x_0 + \frac{\sqrt{3}}{2} z_0 \right) \\ \Rightarrow e^{-j\beta \cdot \xi} = e^{-j\omega \sqrt{\mu \epsilon} \left(\frac{x_0 + \sqrt{3} z_0}{2} \right)}$$

ONDA PIANA UNIFORME $\Rightarrow \underline{E}(\xi) \perp \underline{\beta}$

Pretendiamo un $\underline{E}(\xi)$ polarizzato linearmente: $\underline{E}_0 = E_0 y_0$

Pretendiamo un $\underline{E}(\xi)$ polarizzato circolarmente: $\underline{E}_0 = E_0 y_0 + j E_0 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x_0 - \frac{1}{2} z_0 \right)$

VETTORE REALE E VETTORE IMMAGINARIO DEVONO ESSERE PERPENDICOLARI TRA LORO E ORTOGONALI A $\underline{\beta}$ Polarizzaz. dx

Consideriamo ora un mezzo con dissipazioni e proviamo a creare un'onda che si propaga lungo x_0 e con $\underline{E}(\xi)$ polarizzato linearmente lungo y_0 :

$$\underline{E}(\xi) = \underline{E}_0 e^{-jK\xi} = \underline{E}_0 e^{-j(\beta - j\alpha) \cdot \xi} = \underline{E}_0 e^{-j(\beta - j\alpha) \cdot \xi}$$

ONDA PIANA UNIFORME
 $(\xi \parallel \underline{\beta})$

$$\text{POLARIZZAZ. LINEARE LUNGO } y_0 \Rightarrow \underline{E}(\xi) = E_0 y_0 e^{-j(\beta - j\alpha) x} = E_0 y_0 e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}$$

→ Da qui possiamo ricavare il vettore di Poynting $\vec{P} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^*$,
 dove $\vec{H} = \vec{H}_0 e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}$, dove $\vec{H}_0 = \frac{1}{\eta} (\vec{\mu}_0 \times \vec{E}_0)$
 ↳ STESSA PARTE EXPONENZIALE RISPECTO AL CAMPO ELETTRICO

11/11/2020

Ripetiamo l'esercizio del 04/11/2020 in presenza del materiale dissipativo al
 l'interno della sfera...

$$g \neq 0 \Rightarrow \text{sicuramente non è più valida la relazione } \operatorname{Re} \left[- \iiint_V \frac{\vec{E} \cdot \vec{E}^*}{2} dV \right] = \operatorname{Re} \left[\iiint_S \frac{\vec{H} \cdot \vec{E}^*}{2} dS \right]$$

Il Thm di Poynting nel nostro caso diventa:

$$\iiint_V \frac{\vec{E} \cdot \vec{E}^*}{2} dV - \frac{\omega}{2} \iiint_V \varepsilon |\vec{E}|^2 \vec{E} \cdot \vec{E}^* dV = \operatorname{Re} \left[- \iiint_V \frac{\vec{H} \cdot \vec{E}^*}{2} dV \right] \quad \begin{array}{l} \text{Potenza erogata} \\ \text{(è l'unico che} \\ \text{possiamo calcolare} \\ \text{immediatamente)} \end{array}$$

NB: \vec{E} è il campo elettrico nella sorgente (nel cubetto!) → Il cilindro era il

→ g, ε SONO DATI INUTILI !!! → ANCHE IL VOLUME DEL CILINDRO

→ Tutta la potenza erogata viene dissipata dal cilindro

Ripetiamo ora l'ultimo esercizio di ieri e calcoliamo il vettore di Poynting:

$$\vec{P} = \frac{1}{2} \vec{E}_0 e^{-j\beta x} e^{-\alpha x} \times \vec{H}_0^* e^{-\alpha x} e^{j\beta x} = \frac{1}{2} \vec{E}_0 \times \vec{H}_0^* e^{-2\alpha x} \quad \begin{array}{l} \text{ANCHE NEL VERITÀGGIO DI} \\ \text{POYNTING LE DISSIPAZIONI} \\ \text{AVVENGONO DENTRO LA} \\ \text{DIREZIONE DI PROPAGAZIONE} \end{array}$$

$$\vec{H}_0 = \frac{\vec{\mu}_0 \times \vec{E}_0}{\eta} \Rightarrow \vec{H}_0^* = \frac{\vec{\mu}_0 \times \vec{E}_0^*}{\eta^*}$$

→ Con dissipazioni c'è un termine complesso

$$\Rightarrow \vec{P} = \frac{1}{2} \frac{\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^*}{\eta^*} e^{-2\alpha x} \vec{B}_0 \quad [\text{W/m}^2] \quad \rightarrow \text{Densità superficiale di potenza trasportata}$$

→ SE FISSIMO STATI SENZA DISSIPAZIONI:

$$\vec{P} = \frac{1}{2} \frac{\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^*}{\eta} \vec{P}_0$$

Esercizio 1:

Si ha un cubo piano uniforme che trasporta una densità di potenza pari a a a W/m^2 e si propaga lungo l'asse z in un mezzo tale che $g=0$, $\varepsilon=2\varepsilon_0$, $\mu=\mu_0$. L'onda è polarizzata circolarmente. Scrivere l'espressione del campo elettrico.

$g=0$, ε reale \Rightarrow mezzo senza dissipazioni $\Rightarrow \alpha=0$

Direzione $\vec{z} \Rightarrow \beta = \beta \vec{z}$

$$\text{Polarizzazione circolare} \Rightarrow \vec{E}(z) = E_0(x_0 + jy_0) e^{-jBz}$$

$$\rho = \frac{(m)E_0^2}{2\eta} z_0 = 4 z_0 \quad \Rightarrow \quad E_0 = 2\sqrt{\eta}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(z) = 2\sqrt{\eta} (x_0 + jy_0) e^{-j\omega\sqrt{2\varepsilon_0\mu_0}z}$$

$$\downarrow \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \quad \downarrow \beta = K = \omega/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$$

Siamo in assenza di dissipazioni

Riflessione e rifrazione delle onde piane:

MATERIALE DIELETTRICO:

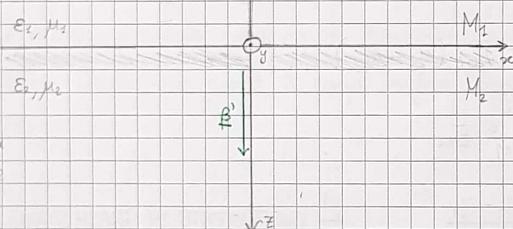
Consideriamo due mezzi M_1, M_2 privi di dissipazioni con parametri reali ε_1, μ_1 , ε_2, μ_2 :

μ_1 & ε_2, μ_2 :

$$\beta \uparrow \quad \beta''$$

La separazione tra i 2 mezzi ha una dimensione indefinita

10



giving:

Incidenta normale

Supponiamo che la M_1 un'onda piana uniforme β incida normalmente sul piano di separazione (piano (x, y)). Allora si avranno:

trasposta → Un'onda RIFRATTA β' con stessa direzione e verso di β .

→ Un'onda RIFLESSA β'' con stessa direzione di β e verso opposto.

VETTORI DI FASE:

$$\beta = \omega \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} z_0$$

→ INCIDENTE

$$\beta' = \omega \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} z_0$$

→ RIFRATTA

$$\beta'' = -\omega \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} z_0 = -\beta$$

→ RIFLESSA

espres Per $z=0$, i campi sono determinati nel seguente modo:

$$\text{GONZ. AL CENTRO} \quad \underline{E}_0 + \underline{E}'' = \underline{E}'$$

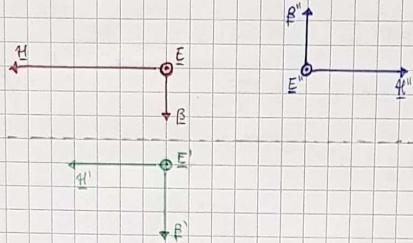
$$\underline{H}_0 + \underline{H}'' = \underline{H}'$$

CHE IMPORTEGGIANO CONTINUITÀ TRA I CAMPPI SULLE 2 MEZZI SONO DIELETTRICI

Notiamo che i campi sono tangenziali al piano (x, y) , che è il piano di polarizzazione (che è ortogonale a β)

Assunti: $\underline{E}_0 = E_0 \underline{e}_0$, $\underline{H}_0 = H_0 \underline{h}_0 \Rightarrow$ i vettori rifratti \underline{E}' , \underline{H}' e riflessi

E_o , H_o hanno gli stessi vettori unitari e_o , h_o .



$$\text{ONDA RIFLESSA: } E_o'' = E_o'' e_o$$

$$\text{ONDA RIFRATTA: } E_o' = E_o' e_o$$

$$H_o'' = -H_o'' h_o$$

$$H_o' = H_o' h_o$$

Proiettando sugli assi:

$$\text{le equaz. } E_o + E_o'' = E_o^{\prime\prime}, \quad H_o + H_o'' = H_o'$$

$$E_{oi} + E_{o''} = E_{o'}$$

$$\frac{E_{oi}}{n_2} - \frac{E_{o''}}{n_2} = \frac{E_{o'}}{n_2}$$

$$\Rightarrow E_{oi} (n_2 + n_1) = E_{oi} (n_2 - n_1)$$

$$\Rightarrow E_{oi}'' = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} E_{oi}$$

$$q_E = \frac{E_{oi}''}{E_{oi}} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}$$

COEFFICIENTE DI RIFLESSIONE DEL CAMPO ELETTRICO PER INCIDENZA NORMALE

$$q_E = 0 \quad \text{se} \quad n_1 = n_2 \quad (\rightarrow \text{se il mezzo è lo stesso})$$

$$q_H = \frac{H_{oi}''}{H_{oi}} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} = q_E \quad \text{COEFFICIENTE DI RIFLESSIONE DEL CAMPO MAGNETICO}$$

NB: Se il campo elettrico riflesso è concorde a quello incidente, il campo magnetico è discordo, e viceversa.

$$t_E = \frac{E_{oi}'}{E_{oi}} = 1 + \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} = \frac{2n_2}{n_2 + n_1} = 1 + q_E \quad \text{COEFFICIENTE DI TRASMISSIONE DEL CAMPO ELETTRICO}$$

$$t_H = \frac{H_{oi}'}{H_{oi}} = 1 - \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} = \frac{2n_1}{n_2 + n_1} = 1 - q_E \quad \text{COEFFICIENTE DI TRASMISSIONE DEL CAMPO MAGNETICO}$$

$$t_E = t_H = 1 \quad \text{se} \quad n_1 = n_2 \quad (\rightarrow \text{se il mezzo è lo stesso})$$

12/11/2020

MATERIALE DISSIPATIVO (CONDUTTORE):

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\omega \mu_2}{2g}} + j \sqrt{\frac{\omega \mu_2}{2g}}$$

$\rightarrow M_2$: ARIA / VACUO ($\rightarrow g=0$)
 M_2 : MATERIALE CONDUTTORE

$$\frac{M_2}{M_1} = \sqrt{\frac{\omega \mu_2}{2g}} \frac{E_1}{\mu_1} + j \sqrt{\frac{\omega \mu_2}{2g}} \frac{H_1}{\mu_1}$$

Possiamo assumere che $\mu_2 \approx \mu_1$, E_2 è dello stesso ordine di grandezza di E_1 (\rightarrow costanti dielettriche 10 volte + grandi di ϵ_0 sono particolarmente alte).

$$\Rightarrow q_E \approx -1 \quad q_H \approx -1 \quad t_E \approx 0 \quad t_H \approx 2$$

- L'onda incidente viene riflessa (quasi) completamente.
- Il campo elettrico in un materiale conduttore è praticamente nullo.
- Il campo magnetico tangenziale nello strato superficiale del conduttore è il doppio di quello incidente ma decade esponenzialmente con la profondità (in un conduttore ideale, con $g \rightarrow \infty$, il campo magnetico giù a profondità $\rightarrow 0^+$ tende a zero).

$$H_2 - H_1(0^-) = \int_0^z J(z) dz$$

Quando $g \rightarrow \infty$, $J(z) \rightarrow k \epsilon(z)$ \wedge $H_2(0^+) \rightarrow 0$ \wedge $q_H \rightarrow -1$

All'esterno del conduttore si ha una sovrapposizione delle onde incidente e riflessa:

$$E_{tot} = E_0 e^{-j\beta z} + E_0'' e^{j\beta z} \stackrel{E_0'' = E_0 q_H \approx -E_0}{=} E_0 (e^{-j\beta z} - e^{j\beta z}) = -2j E_0 \sin \beta z$$

$$H_{tot} = H_0 e^{-j\beta z} + H_0'' e^{j\beta z} = H_0 (e^{-j\beta z} + e^{j\beta z}) = 2H_0 \cos \beta z$$

I CAMPI NON SI PROPAGANO \Rightarrow Onde STAZIONARIE

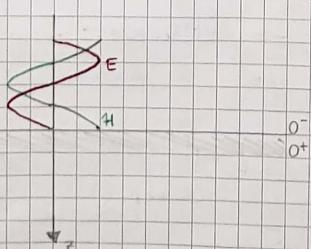
(\rightarrow questo perché non c'è nessuna variazione di fase che si ha con un esponentiale inneggiante all'interno dell'espressione dei campi)

Si hanno solo variazioni di ampiezza

La sovrapposizione di entrambe le onde non fa lungo la \rightarrow
un'onda

$g \rightarrow \infty$

L'onda stazionaria ha
ampiezza costante se
non è un'onda in senso stretto



$$P_{\text{tot}} = -2j \frac{|E_0|^2}{\eta} \sin \beta z \cos \beta z \underline{z}_0 = -j \frac{|E_0|^2}{\eta} \sin(2\beta z) \underline{z}_0$$

$$\underline{P} = \frac{1}{2} \underline{E} \times \underline{H}^*$$

POTENZA REATTIVA: il campo elettromagnetico non trasporta potenza reale (\rightarrow non trasporta potenza)

VETTORE DI POYNTING
DELL'ONDA INCIDENTE:

$$\underline{P} = \frac{|E_0|^2}{2\eta} \underline{z}_0$$

LA POTENZA DEL CAMPO TOTALE NON È
LA SOMMA DI QUESTE 2 POTENZE (che, tra
l'altro, sono reali)
 $\rightarrow \underline{P} + \underline{P}'' \neq \underline{P}_{\text{tot}}$

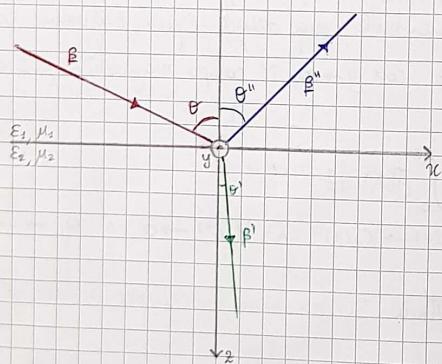
VETTORE DI POYNTING
DELL'ONDA RIFLESSA:

$$\underline{P}'' = -\frac{|E_0|^2}{2\eta} \underline{z}_0$$

Incidenza obliqua:

MATERIALE DIELETTRICO:

Consideriamo un'onda piana uniforme che incide con angolo θ :



Condizioni al contorno sui campi:

• INCIDENTI $\underline{E} = E_0 e^{-j(\beta_x x + \beta_z z)} = E_0 e^{-j(\beta \sin \theta \frac{x}{z} + \beta \cos \theta z)}$

$$\underline{H} = H_0 e^{-j(\beta_x x + \beta_z z)}$$

• RIFLESSI $\underline{E}'' = E_0'' e^{-j(\beta_x'' x + \beta_z'' z)} = E_0 e^{-j(\beta'' \sin \theta'' x + \beta'' \cos \theta'' z)}$

$$\underline{H}'' = H_0'' e^{-j(\beta_x'' x + \beta_z'' z)}$$

• RIFRATTI $\underline{E}' = E_0' e^{-j(\beta_x' x + \beta_z' z)} = E_0 e^{-j(\beta' \sin \theta' x + \beta' \cos \theta' z)}$

$$\underline{H}' = H_0' e^{-j(\beta_x' x + \beta_z' z)}$$

Le condizioni di continuità per $z=0$ dei componenti tangenziali E_t, H_t si chiedono che:

$$E_{ot} e^{-j\beta_x x} + E_{ot}'' e^{-j\beta_x'' x} = E'_o e^{-j\beta_x' x} \quad \begin{matrix} \text{Stabilità} \\ \text{i campi non sono più} \\ \text{tangenziali al piano} (x_0) \end{matrix}$$

ovunque sul piano xy è il valore dei campi incidente, riflesso e rifratto.

\Rightarrow da qui si determinano gli angoli di riflessione e rifrazione

Affinché l'ugualianza sia verificata, è necessario che:

$$e^{-j\beta_x x} = e^{-j\beta_x'' x} = e^{-j\beta_x' x} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta_x = \beta_x'' = \beta_x' \Rightarrow \beta \sin \theta = \beta \sin \theta'' = \beta \sin \theta'$$

• LEGGE DI ERONE: $\theta = \theta''$

• LEGGE DI SNELL: $\frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = \frac{\beta'}{\beta}$

Ugualianza delle velocità di fase lungo x delle tre onde \Rightarrow
i campi Tangenziali sono continui ovunque.

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = \frac{\beta'}{\beta} = \frac{\sqrt{\mu_2 \epsilon_2}}{\sqrt{\mu_1 \epsilon_1}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{n_2}{n_1} = M_{21} = \begin{matrix} \text{indice di rifrazione del secondo mezzo rispetto} \\ \text{al primo} \end{matrix}$$

Dove v_s, μ_s sono le velocità di propagazione, n_1, n_2 sono gli indici di rifrazione dei due mezzi

Se M_2 è il vuoto $\Rightarrow \frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = \sqrt{\mu_2 \epsilon_2} = M = \text{INDICE DI RIFRAZIONE DI } M_2$

Proviamo ora a determinare i coefficienti di riflessione.

Stabilità l'ugualianza degli esponenziali, le condizioni di continuità si ri-

ducono a:

$$E_{ot} + E_{ot}'' = E'_o ; \quad H_{ot} + H_{ot}'' = H'_o$$

CAMPO INCIDENTE: • $E_o = E_{oy} + E_{ov} = E_{oy} y_0 + E_{ov} v_0$

orizzontale ↑ verticale

Dove $v_0 = x_0 \cos \theta - z_0 \sin \theta$

$$\bullet H_o = \frac{E_o \times E_o}{M_1} = - \frac{E_{oy}}{M_1} y_0 + \frac{E_{ov}}{M_1} z_0$$

Nella pagina seguente vedrai riportato un grafico coi vettori dei campi e
di \vec{p} per le onde incidente, riflessa e rifratta.

17/1

► COME

→ C

C

C

•

Se

⇒

b)

► COME

→ C

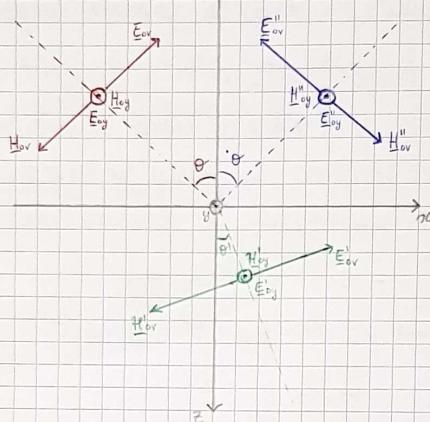
C

=

Se

E

si av



$$\text{ONDA RIFLESSA: } \cdot E_0^u = E_{0h}^u + E_{0v}^u = E_{0y}^u y_0 + E_{0x}^u x_0$$

$$\cdot H_0^u = \frac{\mu_0^u \times E_0^u}{\eta_1} = -\frac{E_{0y}^u}{\eta_1} y_0^u + \frac{E_{0x}^u}{\eta_1} x_0^u$$

$$\text{Dove } y_0^u = -x_0 \cos\theta - z_0 \sin\theta$$

$$\text{ONDA RIFRATTA: } \cdot E_0' = E_{0h}' + E_{0v}' = E_{0y}' y_0' + E_{0x}' x_0'$$

$$\cdot H_0' = \frac{\mu_0' \times E_0'}{\eta_2} = -\frac{E_{0y}'}{\eta_2} y_0' + \frac{E_{0x}'}{\eta_2} x_0'$$

$$\text{Dove } y_0' = x_0 \cos\theta' - z_0 \sin\theta'$$

Condizioni al contorno:

$E_{0y} + E_{0y}^u = E_{0y}'$ → Dobbiamo prenderle a partire dalle componenti tangenziali dei campi: la componente lungo \underline{x} la prendiamo per intero, mentre la componente lungo \underline{y} si dobbiamo prendere la proiezione sull'asse x .

$$E_{0x} \cos\theta - E_{0v} \cos\theta = E_{0v}' \cos\theta'$$

$$-\frac{E_{0y}}{\eta_1} \cos\theta + \frac{E_{0y}^u}{\eta_1} \cos\theta = -\frac{E_{0y}'}{\eta_2} \cos\theta'$$

$$\frac{E_{0v}}{\eta_1} + \frac{E_{0v}^u}{\eta_1} = \frac{E_{0v}'}{\eta_2}$$

→ E_{0h}, E_{0v} sono le POLARIZZAZIONI PRINCIPALI \Rightarrow le quattro equazioni si dividono in due sistemi a due incognite.

Le componenti E_{0h}, E_{0v} vengono riflesse e rifatte con magnitudini indipendenti.

SISTEMA RETTILIO AGLI E_{0h}, E_{0v} SISTEMA RELATIVO AGLI E_{0h}, E_{0v}

17/11/2020

► COMPONENTE ORIZZONTALE: $\frac{\cos\theta}{\eta_1} (E_{oy} - E_{ox}) = - \frac{E_{oy} + E_{ox} \cos\theta}{\eta_2} \cos\theta'$

→ Coefficiente di riflessione q_{Eh} :

$$q_{Eh} = \frac{E_{ox}}{E_{oy}} = \frac{\eta_2 \cos\theta - \eta_1 \cos\theta'}{\eta_2 \cos\theta + \eta_1 \cos\theta'}$$

LEGGI DI SNELL $\Rightarrow \frac{\sin\theta}{\sin\theta'} = \eta_{21}$

NB: η_2 maggiore
bassa se l'incidenza
è più avvincente su un
conduttore

$$\Rightarrow q_{Eh} = \frac{\cos\theta - \frac{1}{\eta_{21}} \frac{\eta_2}{\eta_1} \sqrt{\eta_{21}^2 - \sin^2\theta}}{\cos\theta + \frac{1}{\eta_{21}} \frac{\eta_2}{\eta_1} \sqrt{\eta_{21}^2 - \sin^2\theta}}$$

\Leftarrow

MA COME AI SOLITI
CONSIDERIAMO MEZZI
IN CUI $\mu_r = 1$

$$\eta_{21} \approx \sqrt{\epsilon_r} \mu_r$$

$$\frac{\eta_2}{\eta_1} = \sqrt{\frac{\epsilon_r E_{oy}}{\epsilon_0 \mu_r \eta_1}} = \sqrt{\frac{E_{oy}}{\mu_r \eta_1}}$$

CASI LIMITI:

- $\theta = 0 \Rightarrow$ incidenza normale
- $\theta = \pi/2 \Rightarrow$ incidenza radente

M_1 M_2

Se consideriamo l'incidenza dall'aria (\sim vuoto) su un materiale dielettrico:

$$q_{Eh} \approx \frac{\cos\theta - \sqrt{\epsilon_r - \sin^2\theta}}{\cos\theta + \sqrt{\epsilon_r - \sin^2\theta}} \quad \Leftarrow \text{perché } \sqrt{\epsilon_r - \sin^2\theta} > \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \cos\theta$$

(in particolare nei mezzi M_2 diversi dal vuoto)

$\Rightarrow |q_{Eh}|$ aumenta monotonicamente dal valore per incidenza normale al valore per incidenza radente.

► COMPONENTE VERTICALE: $\eta_1 (E_{ov} \cos\theta - E_{ov}' \cos\theta') = \eta_2 (E_{ov} \cos\theta' - E_{ov}' \cos\theta')$

→ Coefficiente di riflessione q_{Ev} :

$$q_{Ev} = \frac{E_{ov}'}{E_{ov}} = \frac{\eta_2 \cos\theta - \eta_1 \cos\theta'}{\eta_2 \cos\theta + \eta_1 \cos\theta'}$$

$$t_{Eh} = 1 + q_{Eh}$$

$$\Rightarrow q_{Ev} = \frac{\cos\theta - \frac{1}{\eta_{21}} \frac{\eta_2}{\eta_1} \sqrt{\eta_{21}^2 - \sin^2\theta}}{\cos\theta + \frac{1}{\eta_{21}} \frac{\eta_2}{\eta_1} \sqrt{\eta_{21}^2 - \sin^2\theta}}$$

$$t_{Ev} = \frac{\eta_2}{\eta_1} (1 + q_{Ev})$$

Se consideriamo l'incidenza dall'aria (\sim vuoto) su un dielettrico:

$$q_{Ev} = \frac{\epsilon_r \cos\theta - \sqrt{\epsilon_r - \sin^2\theta}}{\epsilon_r \cos\theta + \sqrt{\epsilon_r - \sin^2\theta}} \quad \Rightarrow |q_{Ev}| \text{ NON è monotono.}$$

(se però q_{Ev} si è un monotono crescente da zero a diff. si q_{Ev} passa da valori positivi a val. negativi)

\exists un angolo di incidenza θ_B (= ANGOLO DI BREWSTER) al quale q_{Ev} si annulla.

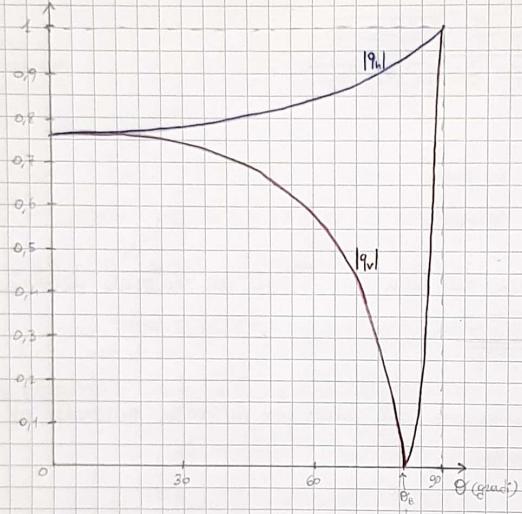
θ_B è tale che:

$$\cos \theta_B = \frac{1}{\mu_1} \frac{\eta_2}{\eta_1} \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2 \theta_B}$$

Per mezzi dielettrici, $\mu_2 \approx \mu_1 \approx \mu_0$:

$$\cos \theta_B = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_2}} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_0}} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_B} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_B} \Rightarrow$$

$$\sin \theta_B = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}}$$



Espressioni delle onde riflessa e rifratta:

$$E'' = [q_{Eh}(\theta) E_{eh} + q_{Ev}(\theta) E_{ev}] e^{-j(\beta_x x - \beta_z z)}$$

$$E' = [t_{Eh}(\theta) E_{eh} + t_{Ev}(\theta) E_{ev}] e^{-j(\beta'_x x + \beta'_z z)}$$

Il versore \hat{q}_L è lo stesso nelle due espressioni

→ Dato che $q_{Eh} \neq q_{Ev}$ tranne che per $\theta=0$, $\theta \rightarrow \pi/2$, la polarizzazione dell'onda riflessa è in generale diversa da quella incidente (e.g. se l'onda incidente è polarizzata circolarmente, quella riflessa è generalmente polarizzata ellitticamente).

→ L'onda riflessa è polarizzata rettilineamente (in particolare orizzontalmente) quando $\theta = \theta_B$, comunque sia polarizzata l'onda incidente.

18/11/11

MATERIALI

Sia M_e
CAMPI IN

$E_0 = E_0$

$H_0 = H_0$

$|q_L|$ = modulo del coefficiente di riflessione orizzontale

$|q_R|$ = modulo del coefficiente di riflessione verticale

CAMPO R

$E' = E_0$

$H' = H_0$

→ Calcolati in modo analogo i coefficienti di trasmissione

Per la c

Condizion

$\Rightarrow \alpha'$

$\alpha' \neq \beta'$

Riflessio

MEZZO PR

Considera

cui la

$\sqrt{\mu_1 \epsilon_1}$

CONTINUITÀ
TANGENZIALE

$$E(\infty) = E_0 (q_0 + j q_1) e^{-j \beta z}$$

$$E''(\infty) = [q_{Eh} E_0 + j q_{Ev} E_0] e^{-j \beta z}$$

PER ESERCIZIO

Lungo la frontiera \hat{q}_0

$$q_{Ev} = 0$$

Scansionato con CamScanner

18/11/2020

MATERIALE DISSIPATIVO:

Sia M_2 un mezzo dissipativo con $\eta \neq 0$.

CAMPI INCIDENTE E RIFLESSO:

$$\underline{E}^i = E_0 e^{-j(\beta_x x + \beta_z z)}$$

$$\underline{H}^i = H_0 e^{-j(\beta_x x + \beta_z z)}$$

$$\underline{E}^r = E_0 e^{-j(\beta_x x - \beta_z z)}$$

$$\underline{H}^r = H_0 e^{-j(\beta_x x - \beta_z z)}$$

CAMPO RIFRATTO CARATTERIZZATO DA UN VETTORE DI PROPAGAZIONE COMPLESSO:

$$\underline{E}^r = E_0 e^{-\alpha' x - j\beta' z}$$

$$\underline{H}^r = H_0 e^{-\alpha' x - j\beta' z}$$

Condizione sugli esponenti relativi
a onda incidente e a onda rifratta

Per l'onda riflessa vale sempre
 $\phi = \phi^r$ data dalla legge di Fresnel

Per la continuità a $z=0$:

$$e^{-jkz} = e^{-j\zeta' z} \Rightarrow e^{-j\beta_x x} = e^{-(\alpha'_x x + j\beta'_x x)} \quad \forall x$$

Siamo assunto dissipa-
zione solo nel secondo mezzo

Condizione sugli esponenti:

$$\Rightarrow \alpha'_x = 0, \beta'_x = \beta_x ; \quad \alpha' = \alpha' z_0, \beta' = \beta' \sin \theta' = \beta \sin \theta$$

$\alpha' \neq \beta'$ \Rightarrow ONDA NON UNIFORME IN M_2 (tranne nel caso di incidenza normale)

L'onda nel secondo mezzo si propaga lungo la direzione di β' ma si attenua lungo la direz. α'

Riflessione Totale:

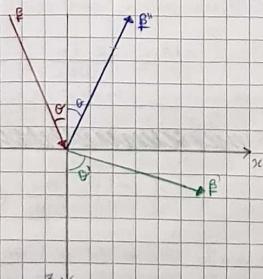
MEZZO PRIMO DI DISSIPAZIONI:

Consideriamo un'onda piana uniforme che incide obliquamente dal mezzo in cui la velocità di propagazione è minore (al contrario di tutti i casi visti finora):

$$\sqrt{\mu_2 \epsilon_2} > \sqrt{\mu_1 \epsilon_1}$$

CONTINUITÀ DELLE COMPONENTI TANGENZIALI DEI CAMPI:

$$\sin \theta' = \frac{\sin \theta}{n_{21}} = \sqrt{\frac{\mu_1 \epsilon_1}{\mu_2 \epsilon_2}} \sin \theta \Rightarrow \theta' > \theta$$



Per $\theta = \theta_i$ (angolo limite), tale che $\sin \theta_i = \sqrt{\frac{\mu_2 \epsilon_2}{\mu_1 \epsilon_1}}$, l'onda rifratta si muove parallelamente al piano di discontinuità. Per $\theta > \theta_i$, non è soddisfatta la continuità. Oltrepassato l'angolo limite, la velocità di fase lungo x dell'onda incidente è più bassa della minima v_e . Effettivamente di fase che un'onda piana uniforme può avere nel secondo mezzo:

$$\frac{\omega}{\beta \sin \theta} < \frac{\omega}{v_e} \quad \text{per } \theta > \theta_i$$

Per $\theta > \theta_i$, assumendo uniforme l'onda rifratta, si ha una soluzione particolare non compatibile con le condizioni al contorno.

Un'onda rifratta non uniforme è la soluzione generale. Essendo un'onda "lenta", può assicurare la continuità:

$$n' = \frac{\omega}{\beta'} = \frac{\omega}{\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2}} < \frac{1}{\sqrt{\mu_2 \epsilon_2}}$$

In definitiva, l'onda incidente genera un'onda rifratta piana uniforme per $\theta < \theta_i$ e non uniforme per $\theta > \theta_i$.

■ Secondo mezzo privo di dissipazione $\Rightarrow \alpha' \perp \beta'$

$$E' = E_0' e^{-\alpha' z - j\beta' x}$$

$$\beta' = \sqrt{\alpha'^2 + \omega^2 \mu_2 \epsilon_2} = \omega \sqrt{\mu_2 \epsilon_2} \sin \theta$$

$$\Rightarrow \alpha' = \omega \sqrt{\mu_1 \epsilon_1} \sqrt{\sin^2 \theta - \frac{\mu_2 \epsilon_2}{\mu_1 \epsilon_1}}$$

$$E' = E_0' e^{-\omega \sqrt{\mu_1 \epsilon_1} (\sin \theta - n_i) z + j \sin \theta x}$$

$$H_0' = \frac{(\beta' z_0 - j \alpha' z_0) \times E_0'}{\omega \mu_2}$$

Polarizzato ellitticamente (risulta che $\beta' > \alpha'$) nel caso in cui E_0' sia polarizzato linearmente

Trasporto di potenza:

Onda incidente polarizzata orizzontalmente \Rightarrow onda rifratta polarizzata orizzontalmente.

$$E_0' = E_0' \hat{y}_0 ; \quad H_0' = \frac{\beta' E_0'}{\omega \mu_2} \hat{x}_0 + j \frac{\alpha' E_0'}{\omega \mu_2} \hat{z}_0$$

$$\beta' = \frac{1}{2} E_0' \hat{y}_0 e^{-\alpha' z - j\beta' x} \times \left[j \frac{\alpha' E_0'}{\omega \mu_2} \hat{x}_0 + \frac{\beta' E_0'}{\omega \mu_2} \hat{z}_0 \right]^* e^{-\alpha' z + j\beta' x} =$$

$$= \frac{1}{2} j |E_0'|^2 \frac{\alpha'}{\omega \mu_2} e^{-2\alpha' z} \hat{z}_0 + \frac{1}{2} |E_0'|^2 \frac{\beta'}{\omega \mu_2} e^{-2\alpha' z} \hat{x}_0$$

→ DUE TERMINI → uno diretto secondo \hat{z}_0 e immaginario → POTENZA REATTIVA
→ uno diretto secondo \hat{x}_0 e reale

191:

Torna

Cons

omoge

si racc

Quella

abbiamo

che valo

da mole

uniforme

ha velocità di fase

inferiore

a quella

dell'onda

uniforme

nello

mezzo

perché

è idealm

te il dura

te si è

certificata

nell

J ria

in cu

Nel

→

Consi

couse

Re

E, H

Simai

J ria

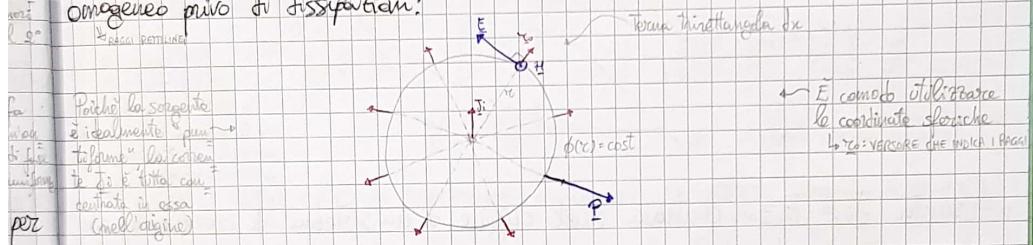
La us

- Quando l'incidenza avviene oltre l'angolo limite, non vi è flusso di potenza attraverso il piano di separazione, ma la potenza fluisce parallelamente a esso. (parallelamente a \hat{x})
- La potenza rimane confinata nel fiellettrico più denso. (nel mezzo in cui l'onda è incidente)
- Effetto di guida → STRUTTURE PLANARI PER LOTTICA INTEGRATA
GUIDE OTTICHE CON DIELETTRICO A GRADINO (STEP INDEX)

19/11/2020

Teoria di base dell'elettromagnetismo:

Consideriamo un campo prodotto da una sorgente elettrica "puntiforme" in un mezzo omogeneo privo di dissipazioni:



I raggi eletromagnetici scaturiscono dal punto (e.g. origine delle coordinate) in cui è posta la sorgente.

$$E(r) = E_0 e^{-jk_0 r} \quad \text{con } E_0 + H_0 \perp r \perp P$$

Nel mezzo omogeneo e privo di dissipazioni: $\phi(r) = m/r$

$$\Rightarrow E(r) = E_0 e^{-jk_0 r} \quad \rightarrow k_0 n = K$$

NON SI TRATTA DI UNA PIANA, RISULTA DI UNA SORGENTE DI TIPO SFERICO

LA GRANDE DISTANZA SONO CHI DEDUCIBILI A CADE DENTRO IN REGIONI LIMITATE

Considerata la sfera di generica superficie S centrata sulla sorgente, per la conservazione dell'energia:

$$\operatorname{Re} \left[\oint_S \frac{E \times H^*}{2} \cdot dS \right] = \operatorname{Re} \left[\oint_S \frac{E_0 \times H_0^*}{2} \cdot r \hat{r} dS \right] = \text{cost} \quad \forall S$$

E_0, H_0 non possono quindi essere indipendenti dalle coordinate ma, nell'approssimazione di ottica geometrica, devono decrescere come $\frac{1}{r}$.

I valori iniziali di E_0, H_0 dipendono inoltre dalla corrente di sorgente.

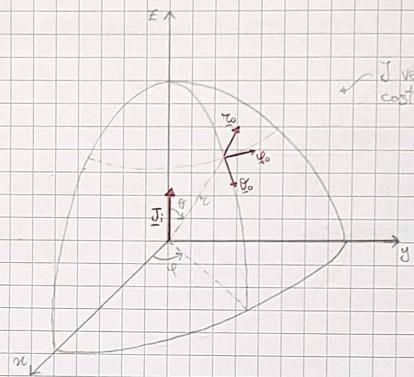
Le assunzioni fatte finora su E_0, H_0 sono ovviamente false.

Se si ricava \vec{H} dalla prima equazione di Maxwell, e si sostituisce nella seconda:

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} - \nabla \cdot \vec{E} = j_0 \mu_0 \vec{J}_i$$

→ EQUAZIONE NON OMogenea VETTORIALE CHE PUÒ ESSERE RISOLTA CON L'AUSILIO DEI POTENZIALI ELETRODINAMICI

$\varphi_0, \theta_0, \phi_0$ formano \rightarrow
una terza trinità angolare da



J versori non hanno direzione
costante con le coordinate
sferiche

In effetti, anche se riunissi
ma il sistema di coordinate
cartesiane, J rimarrebbe
sempre uguale

Assunta $\vec{J}_i = J_i \hat{z}_0$ centrata sull'origine di un sistema di coordinate sferiche, se J_i è indipendente da φ (simmetria assiale), anche E_0, H_0 sono indipendenti da φ , ma dipendono in generale da r, θ .

MOMENTO DELLA SORGENTE: $\vec{M} = M \hat{z}_0 = \iiint_{V'} J_i (\Sigma') dV$

dipende da J_i

V' → volume della sorgente

→ CAMPO ELETTRICO.
IRRADIATO:
(generato dalla sorgente)

$$\vec{E} = \frac{\eta M}{2\pi r^2} \left(1 + \frac{1}{jk r} \right) e^{-jk r} \cos \theta \hat{z}_0 +$$

$$+ \frac{j\omega \mu M}{4\pi r} \left(1 + \frac{1}{jk r} - \frac{1}{k^2 r^2} \right) e^{-jk r} \sin \theta \hat{y}_0$$

Proprietà M

$$\vec{H} = \frac{jk M}{4\pi r} \left(1 + \frac{1}{jk r} \right) e^{-jk r} \sin \theta \hat{x}_0$$

RICORDA CHE $k = \frac{2\pi}{\lambda}$
CON λ = LUNGHEZZA D'ONDA

• \vec{H} è ortogonale alla direzione della sorgente e alla direzione radiale.

• \vec{E} giace in un piano meridiano, contenente la direzione della sorgente.

La base dei VERSORI $\hat{x}_0, \hat{y}_0, \hat{z}_0$

Le espressioni dei campi contengono somme di potenze di $\frac{1}{jk r} = \frac{1}{jk r} = \frac{1}{j2\pi} \frac{\lambda}{r}$

Per cui, a seconda del rapporto $\frac{r}{\lambda}$:

- Possono prevalere i termini di ordine massimo o minimo.
- Può prevalere il componente meridiano di \underline{E} rispetto a quello radiale.

• A DISTANZA "PICCOLA" (RISPETTO A λ) DALLA SORGENTE:

$$\underline{E} \propto \frac{1}{r^3}$$

$$\underline{H} \propto \frac{1}{r^2}$$

→ Come nel caso statico di dipolo elettrico o magnetico

Il campo nelle "vicinanze" (rispetto a λ) della sorgente è detto CAMPO DI INDUZIONE, che può essere elevato anche se la potenza erogata dalla sorgente è bassa (predomina la potenza reattiva).

• A DISTANZA "GRANDE" (RISPETTO A λ) DALLA SORGENTE:

$$\underline{E} \approx j \frac{\eta M}{2\lambda r} e^{-j\beta r} \sin \theta \underline{\hat{d}}$$

$$\underline{H} \approx \frac{j\eta M}{2\lambda r} e^{-j\beta r} \sin \theta \underline{\hat{d}}$$

$$\underline{H} = \frac{\eta_0 \times \underline{E}}{M}$$

RANCHE CON UNA SORGENTE PIANA FORMA
NON SI HA UNA RADIAZIONE UNIFORME IN
TUTTE LE DIREZIONI NELLO SPAZIO

Il campo è detto CAMPO DI RADIAZIONE e trasporta la potenza erogata (iniettata) dalla sorgente.

REALE poiché $\underline{E}, \underline{H}$ sono entrambi impaginari.

Il campo di radiazione:

- È un'onda sferica, la cui ampiezza decresce come $\frac{1}{r}$, come richiesto dalla conservazione dell'energia.
- $\underline{E}, \underline{H}$ sono trasversi tra loro e a \underline{r} (direzione del trasporto dell'energia e direzione locale di propagazione).
- Il rapporto tra \underline{E} e \underline{H} è l'impedenza intrinseca del mezzo.

Il campo assintotico ha le proprietà di un raggio elettromagnetico.

CONDIZIONI DI RADIAZIONE:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} |r\underline{E}| = \text{cost}$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} |r\underline{H}| = \text{cost}$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} [\underline{r}_0 \times \eta \underline{H} + \underline{E}] = 0$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} [\underline{r}_0 \times \underline{E} - \eta \underline{H}] = 0$$

Proprietà da sorgente corta filiforme:

Nel caso di una sorgente cilindrica corta e sottile, con j_0 int. delle coordinate.

$\Rightarrow M = Il$ (se l è la lunghezza del cilindro e I è la corrente in esso)

$$\text{CAMPO DI RADIAZIONE: } E_{\infty}(z) = \frac{\eta I}{2} \frac{l}{\lambda} \frac{e^{j\beta z}}{r^2} \sin \theta \hat{\theta}$$

$$H_{\infty} = \frac{\eta_0 \times E_{\infty}}{\eta}$$

La potenza irradiata è proporzionale a $(l/\lambda)^2$: se la sorgente è corta rispetto a λ , essa doratia "poco". $\rightarrow E_{\infty}(z), H_{\infty}(z)$ sarebbero "piccoli"

Per il generatore, il filamento di corrente che doratia equivale a una resistenza R_i (RESISTENZA DI RADIAZIONE) che dissipà la potenza W_i irradiata.

$$\begin{aligned} W_i &= \frac{1}{2\eta} \oint |E_{\infty}|^2 dS = \frac{1}{2\eta} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} |E_{\infty}|^2 r^2 \sin \theta d\theta d\phi = \\ &= \frac{1}{2\eta} \frac{\eta^2 I^2}{4} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} r^2 \sin \theta d\theta d\phi = \\ &= \frac{\eta}{8} I^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 2\pi \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta = \frac{\pi}{3} \eta I^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\text{POTENZA: } \frac{1}{2} R_i I^2 \Rightarrow R_i = \frac{2W_i}{I^2} = \frac{2}{3} \pi \eta \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$$

Poiché sappiamo
che la corrente impiega
una certa potenza al
cavetto

Dunque si tratta
di fissare che il ge-
neratore non vedi più

Qualunque elemento di circuito percorso da corrente è una sorgente che irradia.

Se $l \ll \lambda = \frac{c}{f}$, la sorgente è "corta" e l'elemento di circuito doratia "poco", ovvero presenta una bassa resistenza di radiazione.

Per dimensioni l dell'ordine del cm, almeno fino a frequenze dell'ordine delle centinaia di MHz ($\Rightarrow \lambda \approx 1 \text{ m}$), la radiazione è trascurabile e i circuiti possono essere analizzati con le approssimazioni quasi statiche. \rightarrow Come appunto si fa in Elettrotecnica

A microonde l'effetto dell'oradiazione è apprezzabile e la teoria dei circuiti si rivelà inadeguata.

Le antenne:

Toccano (agiscono da sorgente) e captano il campo elettromagnetico.



in cui si misura la potenza radiata

PARAMETRI DELLE ANTENNE:

- Diagramma di radiazione

CAMPO A GRANDE DISTANZA
DI UNA SORGENTE GENERICA:

$$E_{\infty}(\varphi) = C \frac{e^{-jB\varphi}}{\pi} f(\theta, \phi)$$

FATTORE DI Onda SFERICA
(COMUNE A TUTTE LE ANTENNE)

DIPENDE DA DIMENS., FORMA E
DISTRIBUZ. SPAZIALE DELLE COR-
RENTI = $f(\theta, \phi)$ È CARATTERISTICO
DELL'ANTENNA

Per esempio è estremamente
che risulti molto più intensa che non
se l'antenna è omogenea, per es.
caso

Le proprietà radiative di un'antenna sono descritte in ampiezza e fase
dal diagramma di radiazione in campo:

$$F(\theta, \phi) = r^2 e^{jB\varphi} E_{\infty}(\varphi, \theta, \phi) = F_\theta(\theta, \phi) \Theta + F_\phi(\theta, \phi) \Phi.$$

Sono inoltre descritte in potenza dal diagramma di radiazione in potenza:

$$P(\theta, \phi) = r^2 \cdot \frac{1}{2} |E_{\infty} \times H^*| = \frac{1}{2\pi} |F(\theta, \phi)|^2$$

MODULO VOLTAGE POINTINTA

Il diagramma di radiazione in potenza è la densità di potenza irradiata
per unità di angolo solido (W ster^{-1}). → Data una potenza irradiata, il diagramma di
radiazione di potenza indica quanto ne va in ciascuna direzione.

I diagrammi di radiazione dipendono dalla potenza irradiata.

Per avere un parametro che dipende solo dall'antenna si definisce la
FUNZIONE DI DIRETTIVITÀ.

STER = STERADIANTI = misura dell'angolo solido

- Funzione di direttività

È il diagramma di radiazione in potenza normalizzato alla densità angolare media di potenza irradiata (trasmessa):

$$D(\theta, \phi) = \frac{P(\theta, \phi)}{W/4\pi}$$

→ Adimensionale

POTENZA TRASMESSA ANGOLI SOLIDI COMPLETI

È UN VALORE ELEVATO PER LE ANTENNE CHE HANNO MOLTA PRESE
DI DIRETTIVITÀ PER UNA SPECIFICA DIREZIONE DI RADIAZIONE

La DIRETTIVITÀ di un'antenna è il valore max di $D(\theta, \phi)$.

- Area equivalente

$$A_{eq}(\theta, \phi) = \frac{W_{eq}(\theta, \phi)}{P}$$

→ È la potenza ricevuta W_{eq} normalizzata alla den-
sità superficiale P di potenza incidente (trasposta su
un'area piatta uniforme).

L'AREA EQUIVALENTE di un'antenna "ad apertura" è una frazione dell'a-

rea geometrica: $A_e = \eta_A A_g$

$$\eta_A \leq 1$$

η_A è il RENDIMENTO DI APERTURA

Se si riuscisse a realizzare una distribuzione di correnti impresse uniforme sull'apertura, l'area equivalente coinciderebbe con quella geometrica ($\eta_A = 1$).

Tuttavia, nella pratica: $0,5 \leq \eta_A \leq 0,8$

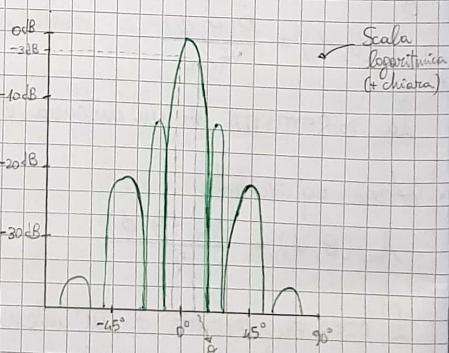
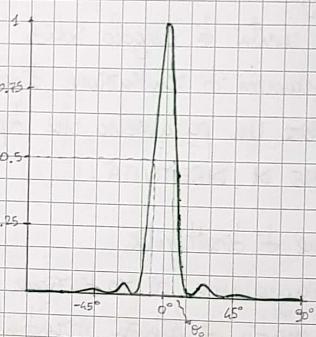
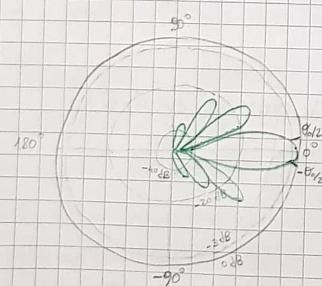
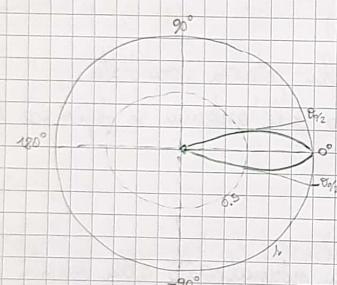
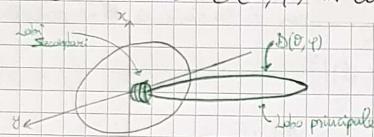
Coll.
Sian
 η_A

È funzione della direzione allo stesso modo della direttività

$$\text{PROPORTIONALITÀ TRA AREA EQUIVALENTE E DIRETTIVITÀ: } A_e(\theta, \phi) = \frac{\lambda^2}{4\pi} D(\theta, \phi)$$

24/11/2020

RAPPRESENTAZIONE DI $D(\theta, \phi)$ IN COORDINATE POLARI:



$\theta_0 := \text{ANGOLI A METÀ POTENZA}$ → angolo tra le direzioni a cui il d.d.r. in potenza si riduce a 0.5 del valore max

INDICA LA LARGHEZZA DEL LOBO PRINCIPALE, DA CUI DIPENDE LA DIRETTIVITÀ

Coll.
Sian
 η_A

P_1 è
 P_2 =
↓ se:

P_1 =
 P_2 =
COEFF
TRA L

Se
le a
↳ A_e

• Gl
• De
• Ga
dall
• No

Risch
Ogni
li.

Collegamento radio:

Siano A_1, A_2 due antenne a distanza "grande".

RISPETTO ALLA LUNGHEZZA D'ONDA E ALLE DIMENSIONI DELLE ANTENNE

$$W_2 = A_{e2} P_1$$

P_1 è la densità superficiale di potenza che A_1 crea sul piano di bocca di A_2 .

$$P_1 = \frac{1}{2} E_1 H_1^* = \frac{1}{2} E_{10} H_{10}^* e^{-2 \int_0^R K_j(\lambda, s) ds} = \frac{P_1}{R^2} e^{-2 \int_0^R K_j(\lambda, s) ds} \quad (*) P(B, \theta) = R^2 \cdot |P|$$

CARATTERISTICHE DISTINZIATIVE DEL METTO, CHE DIPENDONO DALLA LUNGHEZZA D'ONDA E, SE IL METTO È NON OMogeneo, DALLA DIREZIONE DI PROPAGAZIONE.

Se: • E_{10}, H_{10} sono i campi in assenza di attenuazione

• K_j è l'attenuazione specifica del metto attraversato

$$P_1 = \frac{D_1 W_1}{4\pi R^2} e^{-2 \int_0^R K_j(\lambda, s) ds}$$

POTENZA RICEVUTA

$$\text{COEFFICIENTE DI TRASMISSIONE TRA LE DUE ANTENNE : } T_{12} = \frac{W_2}{W_1} = \frac{D_1 A_{e2}}{4\pi R^2} e^{-2 \int_0^R K_j(\lambda, s) ds}$$

POTENZA TRASMESSA

$$\text{Se le antenne sono ad apertura, } T_{12} \text{ è in funzione delle aree geometriche delle antenne: } T_{12} = \eta_{A_1} \eta_{A_2} \frac{A_{e1} A_{e2}}{(4\pi R)^2} e^{-2 \int_0^R K_j(\lambda, s) ds}$$

Il coefficiente di trasmissione:

- Cresce con le dimensioni delle antenne
- Decresce con il quadrato della distanza
- Cresce con la frequenza, a meno che il fattore di attenuazione, che dipende dalla frequenza, non ne alteri la ~~frequenza~~ dipendenza.
- Non dipende dal verso di trasmissione (se il metto è reciproco).

Tutto questo è valido solo se antenna trasmettente e antenna ricevente hanno la stessa polarizzazione

Rischio elettromagnetico e normativa di sicurezza:

Ogni individuo è sempre esposto a campi elettromagnetici naturali o artificiali. Per questo motivo, può esserne danneggiato \Rightarrow INTRODUZIONE DELLE NORMATIVE DI SICUREZZA

* CAMPO ELETTROMAGNETICO NATURALE:

Ha un ampiissimo spettro di ~~frequenza~~ frequenze e un'elevata densità su superficie si poneva su tutto lo spettro.

- EMISSIONE TERMICA DELLA TERRA: $P_{\text{tot}} \approx 1 \text{ KW m}^{-2}$ ($T \approx 300 \text{ K}$) → nell'intervallo $\lambda = 0.4 - 4 \mu\text{m}$
- CAMPO MAGNETICO TERRESTRE: $H_{\text{max}} \approx 30 \text{ Am}^{-1}$
- CAMPO ATMOSFERICO \leftarrow CAMPO ELETTRICO STATICO ASSOCIATO ALLA IONIZZAZIONE: $E \approx 130 \text{ Ro V m}^{-1}$
CAMPI ELETTROMAGNETICI IRRADIAZIONI DAI TEMPORALI: $P \approx 20 \text{ W m}^{-2}$ con $f \approx 10 \text{ KHz}$
- CAMPI DI ORIGINE EXTRATERRESTRE \rightarrow RADIAZIONE SOLARE: $P_{\text{tot}} \approx 1 \text{ KW m}^{-2}$ nel visibile e infrarosso.
RADIAZIONE GALATTICA E PLANETARIA: densità di potenza basse

CAMPO ELETTROMAGNETICO ARTIFICIALE:

Può raggiungere valori molto alti in particolari intervalli di frequenza.

- LINEE DI TRASMISSIONE DELL'ENERGIA (50 Hz) E DI ALIMENTAZIONE FERROVIARIA
- TRASMETTITORI PER LE TELECOMUNICAZIONI E IL RILEVAMENTO (MHz - GHz)
↳ Telefoni cellulari, stazioni radio base, radar, ecc.
- APPARECCHIATURE PER USO INDUSTRIALE, MEDICO E SCIENTIFICO (KHz - GHz)
e.g. saldatrici ↳

EFFETTI DEL CAMPO ELETTROMAGNETICO SUGLI ESSERI VIVENTI:

Per conoscere gli effetti è necessario osservare i sintomi e associarli ai campi a cui gli esseri viventi sono sottoposti. Tuttavia, si tratta di un problema molto difficile:

- Difficoltà di determinare il campo prodotto dalle apparecchiature (→ sorgenti di forma complicata)
- Difficoltà di trasformare il campo esterno in quello interno agli organismi (→ disuniformità dei tessuti, forme irregolari)
- Difficoltà di stabilire la relazione causa-effetto
- Difficoltà epidemiologiche (→ sintomi spesso soggettivi e che potrebbero anche dipendere da altri fattori ambientali, alimentari, terapeutici, ecc.)
- Difficoltà di determinare i possibili effetti sulle cellule (→ anche esse sono complesse)

► EFFETTI OSSERVATI: aumento della temperatura corporea, danni agli occhi

► EFFETTI SALUARI: alterazioni del comportamento, cefalea, disturbi del sonno, debilità, impotenza, alterazioni cardiache, malattie neonatali dei figli, cancro.

↳ SU QUESTI EFFETTI I RISULTATI EPIDEMIOLOGICI SONO CONTRADDITTORI E NON CONSENTONO CONCLUSIONI FONDATE.

25/11/2020

NORMATIVA DI SICUREZZA:

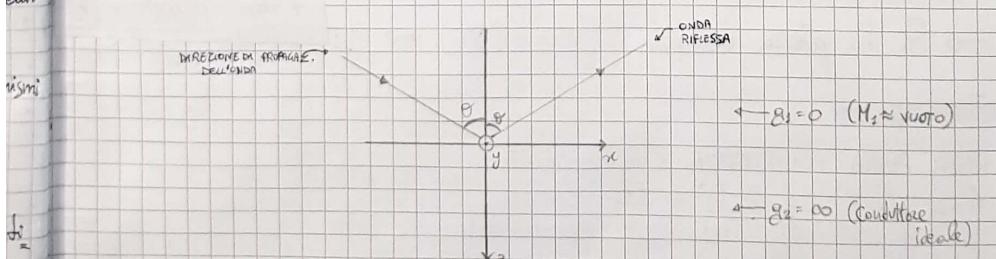
Stabilisce valori di campo e/o di densità di potenza che non devono essere superati in luoghi accessibili alle persone.

Tiene conto dei livelli che producono effetti accettati e di un coefficiente di sicurezza (princípio di precauzione).

La normativa italiana fissa valori limite di esposizione non continuativa della popolazione per i 50 Hz e per le frequenze tra 100 KHz e 300 GHz.

I decreti e la legge definiscono i valori limite come media "su un'area equivalente alla sezione verticale del corpo umano e su qualsiasi intervallo di sei minuti," definiscono modalità e procedure di misura e valutazione, e stabiliscono che la progettazione dei sistemi a radiofrequenza deve tendere a minimizzare l'esposizione della popolazione compatibilmente con la qualità del servizio. ↳ OBIETTIVI DI QUALITÀ

Esercizio 1:



CAMPO ELETTRICO POLARIZZATO LINEARMENTE LUNGO Y :

$$E(x) = E_0 y_0 e^{-j\beta(\sin\theta x + \cos\theta z)}$$

CAMPO ELETTRICO DELLA ONDA RIFLESSA :

$$E''(x) = -E_0 y_0 e^{-j\beta(\sin\theta x - \cos\theta z)}$$

$$E_{\text{tot}}(\xi) = E(\xi) + E''(\xi) = E_0 y_0 e^{-j\beta \sin \theta \xi} (e^{-j\beta \cos \theta \xi} - e^{j\beta \cos \theta \xi}) =$$

$$= E_0 y_0 e^{-j\beta \sin \theta \xi} [-2j \sin(\beta \cos \theta \xi)]$$

26/11/2020

Esercizio 1:

$$V_s = 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$\bar{J}_i = 4(x_0 + 2jy_0 + 0,5z_0) \text{ Am}^{-2}$$

$$E_s = -250 x_0 \text{ Vm}^{-1}$$

$$P = 0,03183 \text{ W m}^{-2}$$

Sfera S: $r=1 \text{ m}$ \leftarrow all'interno di essa si trova la sorgente
ESISTE UN MATERIALE DISSIPATIVO?

$$\rightarrow \text{THM. POYNTING: } \operatorname{Re} \left[\iiint_V -\frac{\bar{J}_i^* \cdot \bar{E}_s}{2} dV \right] = \iiint_V g \frac{\bar{E} \cdot \bar{E}^*}{2} dV = \operatorname{Re} \left[j\omega \iiint_V \varepsilon^* \frac{\bar{E} \cdot \bar{E}^*}{2} dV \right] + \operatorname{Re} \left[\oint_S P \cdot \underline{n} ds \right]$$

$$\bar{J}_i^* \cdot \bar{E}_s = -4(x_0 - 2jy_0 + 0,5z_0) \cdot 250x_0 = -1000$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re} \left[\iiint_V -\frac{\bar{J}_i^* \cdot \bar{E}_s}{2} dV \right] = \operatorname{Re} \left[\iiint_V \frac{1000}{2} dV \right] = 500 \cdot 10^{-3} \text{ W} = 0,5 \text{ W}$$

$$\operatorname{Re} \left[\oint_S P \cdot \underline{n} ds \right] = 0,03183 \iiint_{4\pi r^2} ds = 0,4 \text{ W} \neq \operatorname{Re} \left[\iiint_V -\frac{\bar{J}_i^* \cdot \bar{E}_s}{2} dV \right]$$

\Rightarrow Si ha potenza dissipata ($W_d = 0,1 \text{ W}$) \Rightarrow \exists materiale dissipativo.

Esercizio 2:

ONDA PIANA POLARIZZATA CIRCOLARMENTE

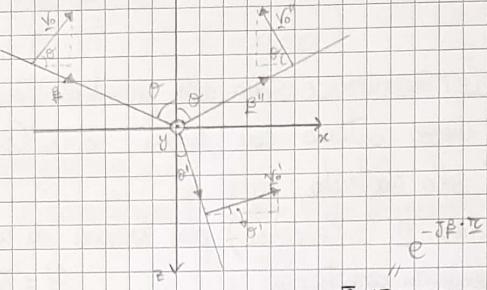
$$P = 4 \text{ W m}^{-2} = \frac{1}{2} \frac{E_0 \cdot \bar{E}_0^*}{\eta_2} = \frac{E_0^2}{\eta_2} \quad \text{Vero per la polarizzazione circolare}$$

$$f = 10 \text{ GHz}$$

$$\theta = 60^\circ \quad \leftarrow \text{Angolo di incidenza; il complementare è l'angolo di riflessione}$$

$$\varepsilon_1 = 2\varepsilon_0; \quad \varepsilon_2 = 6\varepsilon_0$$

PIANO DI INCIDENZA: (x, y)



ONDA INCIDENTE: $E(\Sigma) = E_0 (y_0 + j \gamma_0) e^{-j\beta \left(\frac{\sqrt{3}x+z}{2} \right)}$

$$\rightarrow E_0 = \sqrt{4\eta_1} = 32.65 \text{ V/m}^2$$

$$\rightarrow \gamma_0 = \frac{1}{2} x_0 - \frac{\sqrt{3}}{2} z_0$$

$$\rightarrow \beta = \omega \sqrt{\mu_1 \epsilon_1} = 2\pi f \sqrt{\mu_0 \cdot 2\epsilon_1} = \frac{\omega}{c} = \frac{\omega \sqrt{\epsilon_1}}{c_0} = 296.19 \text{ rad/m}$$

$$\Rightarrow E(\Sigma) = 2\sqrt{\eta_1} \left(y_0 + j \left(\frac{1}{2} x_0 - \frac{\sqrt{3}}{2} z_0 \right) \right) e^{-j \cdot 296.19 \left(\frac{\sqrt{3}x+z}{2} \right)}$$

ONDA RIFRATTATA: $\beta' = \omega \sqrt{\mu_2 \epsilon_2} \beta_0$

$$\rightarrow \sin \theta' = \sin \theta \frac{\beta_0}{\beta} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{2}{6}} = 0,5 \Rightarrow \theta' = 30^\circ \quad \leftarrow \text{Legge di Snell}$$

$$\rightarrow \gamma'_0 = x_0 \frac{\sqrt{3}}{2} - z_0 \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \beta'_0 = \frac{x_0 + \sqrt{3}z_0}{2} \Rightarrow \beta' \approx 512 \text{ m}^{-1}$$

$$\rightarrow t_{el} = 0,5 ; \quad t_{ter} = 0,577 \quad \leftarrow \text{Dati dal professore (verificato!)} \quad \begin{array}{l} \rightarrow n_{21} = \sqrt{3} \\ \rightarrow n_1 = 266,58 \\ \rightarrow n_2 = 153,91 \\ \rightarrow n_2/n_1 = 0,577 \end{array}$$

$$E'(\Sigma) = E_0 (t_{el} y_0 + j t_{ter} \gamma'_0) e^{-j\beta' \left(\frac{x+\sqrt{3}z}{2} \right)} \quad \rightarrow \text{POLARIZZATA ELLITTICAM.}$$

COEFFICIENTI DI RIFLESSIONE:

$$q_{er} = \frac{\cos \theta - \frac{1}{n_{21}} \frac{n_2}{n_1} \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2 \theta}}{\cos \theta + \frac{1}{n_{21}} \frac{n_2}{n_1} \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2 \theta}} = 0 \quad \leftarrow \theta = 60^\circ \quad \rightarrow \theta \text{ È L'ANGOLI DI BREWSTER}$$

$$\text{Infatti: } \sin \theta_B = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}} = \sqrt{\frac{6}{2+6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta_B = 60^\circ$$

$$\Rightarrow E''(\Sigma) = E_0 (q_{er} y_0 + j q_{ter} \gamma'_0) \quad \text{è polarizzata linearmente (orizzontalmente)}$$