

01/12/2020

II PARTE DEL CORSO

Propagazione:

I POTENZIALI ELETTRODINAMICI sono delle grandezze ausiliarie.

Consideriamo un mezzo continuo con $\mu = \mu_0$, $\epsilon = \epsilon_0 (\epsilon' + j\epsilon'')$, $\eta \neq 0$ e delle sorgenti solo elettriche.

Il campo magnetico \underline{H} (solenoidale) può derivare da un potenziale vettore magnetico \underline{A} a divergenza arbitraria: $\underline{H} = \nabla \times \underline{A}$

PRIMA EQUAZIONE DI MAXWELL:

$$\nabla \times \underline{E} = -j\omega \mu_0 \nabla \times \underline{A}$$

$$\Rightarrow \underline{E} = -j\omega \mu_0 \underline{A} - \nabla V$$

Dove V è il potenziale scalare elettrico arbitrario

Integrando l'espressione precedente, si ottiene una costante di integrazione C .

La

teg

SECONDA EQUAZIONE DI MAXWELL: $\nabla \times (\nabla \times \underline{A}) = j\omega \epsilon_0 (-j\omega \mu_0 \underline{A} - \nabla V) + \underline{J}_i$

$$\Rightarrow \nabla \nabla \cdot \underline{A} - \nabla^2 \underline{A} = j\omega \epsilon_0 (-j\omega \mu_0 \underline{A} - \nabla V) + \underline{J}_i$$

Dove ϵ_0 è la costante dielettrica equivalente ed è uguale a:

$$\epsilon_0 = \epsilon - j \frac{\sigma}{\omega} = \epsilon_0 \left[\epsilon' - j \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} + |\epsilon''| \right) \right]$$

NOTA: $\epsilon_0 \equiv \epsilon$

Le funzioni arbitrarie $\nabla \cdot \underline{A}$, V sono legate dalla seguente relazione:

$$\nabla \cdot \underline{A} = -j\omega \epsilon_0 V$$

→ CONDIZIONE DI LORENTZ

$$\Rightarrow -j\omega \nabla(\epsilon_0 V) - \nabla^2 \underline{A} = -j\omega \epsilon_0 \nabla V - j\omega \nabla \nabla \epsilon_0 - \nabla^2 \underline{A} = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \underline{A} - j\omega \epsilon_0 \nabla \underline{V} + \underline{J}_i$$

Posto $K^2 := \omega^2 \mu_0 \epsilon_0$, l'espressione $\nabla^2 \underline{A} + K^2 \underline{A} = -j\omega \nabla \nabla \epsilon_0 - \underline{J}_i$

fornisce il potenziale vettore in funzione delle sorgenti in un mezzo disomogeneo.

Se consideriamo solo correnti magnetiche, l'equazione sarebbe espressa in termini del potenziale vettore elettrico.

Se consideriamo elettricità e magnetismo, scrivendo la somma dei contributi dei potenziali vettori:

APPROXIMAZIONE DI UN MEZZO DEBOLMENTE DISOMOGENEO: $\nabla^2 \underline{A}(\Sigma) + K^2(\Sigma) \underline{A}(\Sigma) = -\underline{J}_i \quad \rightarrow \frac{|\nabla \epsilon_0|}{\epsilon_0} \ll \omega^2 \mu_0^2$

EQUAZIONE DELLE Onde (A COEFFICIENTI NON COSTANTI) ALL'ESTERNO DELLE SORGENTI (EQ. OMogenea): $\nabla^2 \underline{A} + K^2(\Sigma) \underline{A} = 0$

Se si ricava \underline{H} dalla prima equazione di Maxwell e lo si sostituisce nella seconda:

$$\nabla \times \nabla \times \underline{E} = \nabla \nabla \cdot \underline{E} - \nabla^2 \underline{E} = K^2 \underline{E}$$

Dato che all'esterno delle sorgenti

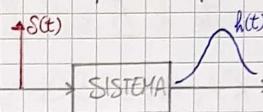
$$\nabla \cdot D = \nabla \cdot (\epsilon E) = E \cdot \nabla \epsilon + \epsilon \nabla \cdot E = \rho = 0$$

$$\nabla \cdot E = -\frac{1}{\epsilon} E \cdot \nabla \epsilon$$

Il problema di questa rappresentazione (che abbiamo usato tempo adatto) è che non è adeguata per rappresentare il termine di sorgente.

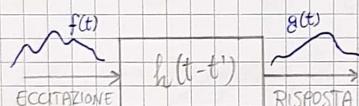
Irradiazione elettromagnetica:

Un sistema lineare è caratterizzato dalla risposta impulsiva $h(t)$.

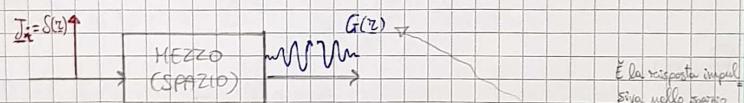


La risposta $g(t)$ a una generica eccitazione $f(t)$ si esprime attraverso l'integrale di convoluzione:

$$g(t) = f(t) \otimes h(t) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(t') h(t-t') dt'$$



Nell'elettromagnetismo la sorgente è sinusoidale nel tempo e impulsiva nello spazio.



È la risposta impulsiva nello spazio libero

Risposta impulsiva riferita al potenziale vettore \Rightarrow FUNZIONE SCALARE DI GREEN $G(\xi)$

$$A(\xi) = J_i(\xi) \otimes G(\xi) = \iiint_V G(\xi - \xi') J_i(\xi') dV'$$

Consente di ottenere il potenziale vettore tramite la convoluzione con il termine di sorgente

$$E(\xi) = (-j\omega \mu + \frac{\nabla \nabla \cdot}{j\omega \epsilon}) A(\xi)$$

È UNA CONVOLUZIONE TRIDIMENSIONALE

è un'espressione matematica

Il legame tra J_i , E è meno diretto \Rightarrow introduciamo la FUNZIONE DI GREEN $[G(\xi)]$ che trasforma il campo vettoriale delle correnti J_i nella sorgente nel campo elettrico innescato:

$$E(\xi) = \iiint_V [G(\xi - \xi')] \cdot J_i(\xi') dV'$$

Non useremo questa espressione perché è complessa compitamente

Il legame tra eccitazione e risposta è stabilito dall'equazione delle onde non omogenee.

CORRENTE IMPRESA
SPAZIALMENTE IMPULSIVA \Rightarrow POTENZIALE VETTORE
(RISPOSTA IMPULSIVA IN A)

$$\nabla^2 \underline{A}(\underline{r}) + K^2 \underline{A}(\underline{r}) = -\delta(\underline{r} - \underline{r}') t_0$$

Per \int_0^t
 $\frac{1}{4\pi r}$

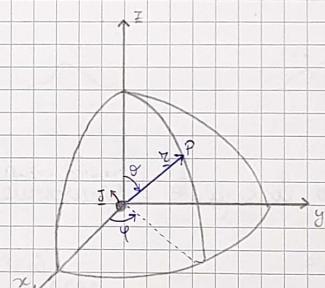
\rightarrow è il versore della corrente "impulsiva": se lo poniamo sugli assi otteniamo un'equazione per ciascuna delle tre componenti.

Ciascuna componente di \underline{A} soddisfa la seguente equazione:

$$\nabla^2 A_i(\underline{r}) + K^2 A_i(\underline{r}) = -\delta(\underline{r} - \underline{r}') Y_i \quad i=1,2,3 \Rightarrow$$

La FUNZIONE SCALARE di GREEN è la soluzione quando il termine moto impulsivo è Qua
v è unitario:
 $\hookrightarrow Y_i = 1$ $\nabla^2 G(\underline{r}) + K^2 G(\underline{r}) = -\delta(\underline{r} - \underline{r}')$

$$\Rightarrow \underline{A}(\underline{r}) = G(\underline{r}) t_0$$



Poniamoci

in un MEZZO OMogeneo infinito, all'esterno di una sfera di raggio r_0 (escludendo il punto di sorgente), tutto che metto e sorgente sono indipendenti dalle coordinate angolari:

Le termini delle derivate risp. θ, ϕ del Laplaciano si annullano $\rightarrow \frac{\partial^2}{\partial r^2} [r^2 \frac{\partial}{\partial r} G(r)] + r^2 K^2 G(r) = 0$

$$\Rightarrow r \frac{d^2}{dr^2} (\tau G) + r^2 K^2 G = 0$$

SEMPLIFICO UN
FATORE r^2

EQUAZIONE DELLE Onde MONODIMENSIONALE NELL'INCognita $\tau G(r)$:

$$\frac{d^2}{dr^2} (\tau G) + K^2 (\tau G) = 0$$

$$\Rightarrow \tau G(r) = C_1 e^{-JKr} + C_2 e^{JKr}$$

ONDA CHE SI ALLONTANA DALL'ORIGINE

L'onda sferica che collassa non è accettabile, per cui: $G(r) = C \frac{e^{-JKr}}{r}$

ONDA SFERICA USCENTE DAL PUNTO DI SORGENTE

Per determinare C , si integra sulla sfera di raggio r_0 :

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \frac{d}{dr} G) r^2 dr + K^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_{r_0}^{\infty} Gr^2 dr = -1$$

$$2\pi \cdot 2 \cdot r^2 \frac{d}{dr} G + K^2 \cdot 2\pi \cdot 2 \int_0^{\infty} Gr^2 dr = -1 \quad \text{INTEGRALE DI } -\delta(r-r_0)$$

$$\frac{d}{dr} \left(C \frac{e^{-jk_r}}{r} \right) = -\frac{1}{4\pi r^2} - \frac{K^2 C}{r^2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-jk_r}}{\pi} r^2 dr \quad \begin{array}{l} \text{Divido tutto per } 4\pi r^2 \\ \text{e sostituisco } G \end{array}$$

$$\Rightarrow C \left(jk + \frac{1}{r} \right) \frac{e^{-jk_r}}{r} = \frac{1}{4\pi r^2} + \frac{K^2 C}{r^2} \int_0^{\infty} e^{-jk_r} r^2 dr$$

Quando $r_0 \rightarrow 0$, $\frac{e^{-jk_r}}{r}$ e $\frac{1}{4\pi r^2}$ diventano infiniti di ordine superiore:

$$\frac{C}{r^2} = \frac{1}{4\pi r^2} \Rightarrow C = \frac{1}{4\pi}$$

FUNZIONE SCALARE DI GREEN
PER SORGENTE NELL'ORIGINE: $G(r) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-jk_r}}{r}$

Se la sorgente è in Σ' , una trasformazione di coordinate dà:

$$G(\Sigma - \Sigma') = \frac{e^{-jk(\lvert \Sigma - \Sigma' \rvert)}}{4\pi (\lvert \Sigma - \Sigma' \rvert)}$$

~ONDA SFERICA UNIFORME CHE SCATURISCE DAL PUNTO Σ'

POTENZIALE VETTORE IN Σ
PRODOTTO DAUE CORRENTI IMPRESSE IN Σ' : $A(\Sigma) = \iiint_V J_i(\Sigma') \frac{e^{-jk(\lvert \Sigma - \Sigma' \rvert)}}{4\pi (\lvert \Sigma - \Sigma' \rvert)} dV'$

PRINCIPIO DI SO
~> VRAPPPOSIZIONE
BEATI EFFETTI

Il potenziale vettore (e, di conseguenza, il campo) deriva dall'interferenza delle onde sferiche che scaturiscono dagli elementi di sorgente $J_i dV'$.

~Le onde elementari si compongono in ampiezza e fase.

~Esistono regioni di interferenza costruttiva e altre di interferenza distruttiva.

La distribuzione spaziale di A dipende da:

- Frequenza \rightarrow sta nel termine k
- Aampiezza e fase della corrente impressa
- Forma e dimensioni del volume di sorgente

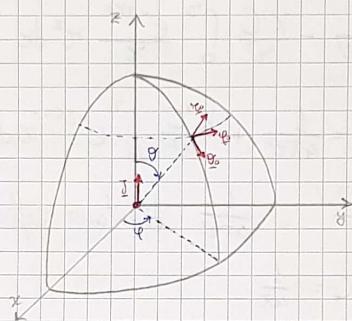
RIVESTA ESPRESSIONE APPENA CALCOLATA DEL POTENZIALE VETTORE PUÒ ESSERE UTILIZZATA ANCHE NEI PROBLEMI DI SINTESI DELLE ANTENNE, IN LUI, DATA UNA DISTRIBUZIONE GENERALE MASSICCIATA DEL CAMPO, SI DEVONO DETERMINARE DIMENSIONI, FORMA, DISTRIBUZIONE DI CORRENTE E FREQUENZA DEL GENERATORE DELL'ANTENNA CHE VOGLIALO AMPIARE A PROGETTARE.

18/04/2021

Il campo elettromagnetico di una sorgente impulsiva:

Abbiamo ora i mezzi per calcolare il campo generato da una corrente elettrica impressa spazialmente impulsiva, di momento $\underline{M} = M \underline{z}_0$. ($J_i = M \delta(x) \underline{z}_0$).

Ora racchiusa in uno spazio infinito



$$\underline{A}(z) = G(z) \underline{M} = \frac{e^{-jkr}}{4\pi\epsilon_0 c} M \underline{z}_0$$

$$\underline{H} = \nabla \times \underline{A} = -\frac{\underline{z}_0}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\underline{x}_0}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} + \frac{\underline{y}_0}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right]$$

Sappiamo che c'è una simmetria assiale della sorgente \Rightarrow le derivate rispetto a ϕ sono nulle.

$$\Rightarrow \underline{H} = \frac{jKcM}{4\pi\epsilon_0 c} \left(1 + \frac{1}{jKr} \right) e^{-jkr} (\sin \theta) \underline{z}_0$$

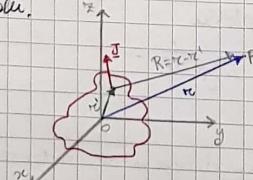
Dalla seconda equazione di Maxwell:

$$\underline{E}(r, \theta) = \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \times [\underline{H}(r, \theta) \underline{z}_0]$$

$$\Rightarrow \underline{E} = \frac{m_0 M}{2\pi\epsilon_0} \left(1 + \frac{1}{jKr} \right) e^{-jkr} \cos \theta \underline{z}_0 + \frac{j\omega\mu_0 M}{4\pi\epsilon_0 c} \left(1 + \frac{1}{jKr} - \frac{1}{K^2 r^2} \right) e^{-jkr} \sin \theta \underline{z}_0$$

Forsezione da sorgenti di dimensioni finite:

Consideriamo una distribuzione spaziale $J_i(z)$ di corrente elettrica impressa in un mezzo privo di dissipazioni.



$$\underline{H} = \nabla \times \underline{A} = \nabla \times \iiint_{V^1} J_i(\underline{r}') G(R) dV'$$

Integrale al vertice di V^1 all'interno del volume V^1
Lo è molto complicato

Il rotore opera rispetto alle coordinate di osservazione, mentre l'integrazione è nelle coordinate di sorgente:

to ciò vuol dire che i due operatori sono tra loro indipendenti
e possiamo invertire il loro ordine

$$\underline{H} = \iiint_{V^1} \nabla \times [J_i(\underline{r}') G(R)] dV'$$

$$\text{dove: } \nabla \times [J_i(\underline{r}') G(R)] = \nabla G(R) \times J_i(\underline{r}')$$

$$\nabla G(R) = \frac{\partial}{\partial R} \frac{e^{-j\beta R}}{4\pi R} R_0 = \left(-j\beta \frac{e^{-j\beta R}}{4\pi R} - \frac{1}{R} \frac{e^{-j\beta R}}{4\pi R} \right) R_0 = -\left(j\beta + \frac{1}{R}\right) \frac{e^{-j\beta R}}{4\pi R} R_0$$

Il gradiente della funzione di Green contiene:

- Un fattore costante con R e inversamente proporzionale a λ . (3)
- Un fattore inversamente proporzionale a R .

Assegnata la frequenza, ciascuno di questi termini prevale a seconda della distanza

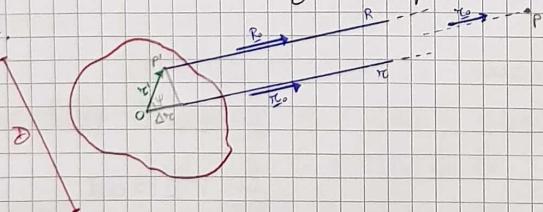
→ A DISTANZA PICCOLA RISPETTO A λ :

$$\underline{H} \approx - \iiint_{V^1} \frac{1}{R} \frac{e^{-j\beta R}}{4\pi R} R_0 \times J_i(\underline{r}') dV' \quad \rightarrow \text{Integrale complicato da calcolare}$$

→ A DISTANZA GRANDE RISPETTO A λ :

$$\underline{H} \approx -j\beta \iiint_{V^1} \frac{e^{-j\beta R}}{4\pi R} R_0 \times J_i(\underline{r}') dV'$$

È anche qui si ha una notevole complessità analitica. Tuttavia, l'espressione si semplifica ulteriormente se la distanza è grande rispetto alla massima dimensione D della sorgente.



Per $\frac{R}{D} \gg 1 \Rightarrow R_0 \approx r_0 \approx \text{costante in } V^1$, mentre $R \approx r$.

$$\Rightarrow \underline{H} \approx -\frac{j\beta}{4\pi r_0} r_0 \times \iiint_{V^1} J_i(\underline{r}') e^{-j\beta R} dV'$$

Nota: all'esponentiale non possiamo effettuare l'approssimazione $R \approx r$

L'approssimazione $R \approx r$ è possibile al denominatore ma è falso se effettuata all'esponente, che è immaginario. Infatti, l'esponenziale è una funzione periodica di periodo λ , per cui R può essere sostituita da r solo quando $R-r \ll \lambda$ (ovvero per dimensioni della sorgente piccole rispetto a λ). Altrettanto: se $R = r$, il prodotto $e^{-j\beta R}$ considererebbe l'onda di diversi periodi.

Tuttavia, possiamo comunque sfruttare la seguente approssimazione:

$$R \approx r - \gamma_0 \cos \psi = r - \gamma_0 (\gamma_0' \cdot \gamma_0) \quad \text{a} \sim \text{STATO ASSUMENDO } \gamma_0, \gamma_0' \text{ QUASI-PARALLELI}$$

$$\Rightarrow \underline{H}_{\infty}(\underline{\xi}) = \lim_{r \rightarrow \infty} \underline{H}(\underline{\xi}) = -j\beta \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} \gamma_0 \times \iiint_{V'} J_i(\underline{\xi}') e^{j\beta \underline{\xi}' \cdot \underline{\gamma}_0} dV'$$

La seconda equazione di Maxwell dà:

$$\underline{E}_{\infty}(\underline{\xi}) = \lim_{r \rightarrow \infty} \underline{E}(\underline{\xi}) = j\omega \mu \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} \gamma_0 \times \left[\gamma_0 \times \iiint_{V'} J_i(\underline{\xi}') e^{j\beta \underline{\xi}' \cdot \underline{\gamma}_0} dV' \right]$$

TERMINI COMUNI A TUTTE LE ANTENNE TERMINI CHE CARATTERIZZANO LA SINGOLA ANTENNA

20/04/2021

Recapitando, i campi a grande distanza sono il prodotto di tre fattori:

→ Una costante.

→ Un termine di aura sferica.

→ Un termine rettangolare complesso funzione del solo versore $\underline{\gamma}_0$.

Il rapporto tra la costante in \underline{E}_{∞} e quella in \underline{H}_{∞} è l'impermeabilità intrinseca del mezzo ϵ_{∞} , \underline{H}_{∞} sono ortogonali tra loro e a $\underline{\gamma}_0$.

Applicando la dualità, possiamo subito calcolare il campo normale alla corrente impressa magnetica.

CONDIZIONI DI RADIAZIONE:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} [\underline{\gamma}_0 \times \eta \underline{H} + \underline{E}] = 0$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} [\underline{\gamma}_0 \times \underline{E} - \eta \underline{H}] = 0$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} |r \underline{E}| = \text{cost}$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} |r \underline{H}| = \text{cost}$$

Reciprocità elettromagnetica:

Consideriamo due sorgenti monodimensionali (= alla stessa frequenza) con correnti impresse elettriche e magnetiche:

Supponiamo di trovarci in un mezzo lineare, isotropo, ma possibilmente disomogeneo. Il campo prodotto dalla prima sorgente (A_1) soddisfa le seguenti relazioni:

$$\nabla \times \underline{E}_1 = -j\omega \mu \underline{H}_1 - \underline{J}_{m1} \quad \leftarrow \text{MOLTIPLICHEREMO TUTTO PER } \underline{\mu}_1 \text{ (SCALARE)}.$$

$$\nabla \times \underline{H}_1 = j\omega \epsilon \underline{E}_1 + \underline{J}_{e1} \quad \leftarrow \text{MOLTIPLICHEREMO TUTTO PER } \epsilon_1 \text{ (SCALARE)}$$

Analogamente:

$$\nabla \times \underline{E}_2 = -j\omega \mu \underline{H}_2 - \underline{J}_{m2} \quad \leftarrow \text{MOLTIPLICHEREMO TUTTO PER } -\underline{\mu}_2 \text{ (SCALARE)}$$

$$\nabla \times \underline{H}_2 = j\omega \epsilon \underline{E}_2 + \underline{J}_{e2} \quad \leftarrow \text{MOLTIPLICHEREMO TUTTO PER } -\epsilon_2 \text{ (SCALARE)}$$

$$\Rightarrow \underline{H}_2 \cdot \nabla \times \underline{E}_1 - \underline{E}_1 \cdot \nabla \times \underline{H}_2 - (\underline{\mu}_1 \cdot \nabla \times \underline{E}_2 - \underline{E}_2 \cdot \nabla \times \underline{H}_1) = \nabla \cdot (\underline{E}_1 \times \underline{H}_2 - \underline{E}_2 \times \underline{H}_1) =$$

$$= \underline{J}_{e2} \cdot \underline{E}_2 - \underline{J}_{m1} \cdot \underline{H}_2 - (\underline{J}_{e1} \cdot \underline{E}_1 - \underline{J}_{m2} \cdot \underline{H}_1)$$

Integrando su un volume V arbitrario contornato da una superficie S con normale n_o :

$$\oint_S (\underline{E}_1 \times \underline{H}_2 - \underline{E}_2 \times \underline{H}_1) \cdot n_o dS = \iiint_V (\underline{J}_{e2} \cdot \underline{E}_2 - \underline{J}_{m1} \cdot \underline{H}_2) dV_1 - \iiint_V (\underline{J}_{e1} \cdot \underline{E}_1 - \underline{J}_{m2} \cdot \underline{H}_1) dV_2$$

Questa è l'espressione formale generale del TEOREMA DI RECIPROCA.

NB: Il teorema è valido solo se il mezzo è isotropo e lineare. Infatti:

→ PER UN MEZZO ANISOTROPICO: $([\mu] \cdot \underline{H}_1) \cdot \underline{H}_2 \neq ([\mu] \cdot \underline{H}_2) \cdot \underline{H}_1$
 $([\epsilon] \cdot \underline{E}_1) \cdot \underline{E}_2 \neq ([\epsilon] \cdot \underline{E}_2) \cdot \underline{E}_1$

→ PER UN MEZZO NON LINEARE: $\mu(\underline{H}_1) \underline{H}_2 \cdot \underline{H}_2 \neq \mu(\underline{H}_2) \underline{H}_2 \cdot \underline{H}_1$
 $\epsilon(\underline{E}_1) \underline{E}_1 \cdot \underline{E}_2 \neq \epsilon(\underline{E}_2) \underline{E}_2 \cdot \underline{E}_1$

D'altra parte, l'espressione rimane valida per un mezzo comunque disomogeneo e/o dissipativo.

Invegianza delle reazioni:
 Se il volume V invade tutto lo spazio, per le condizioni di radiazione:

$\lim_{V \rightarrow \infty} \nabla \cdot \underline{E} = \text{cost} \Rightarrow \underline{E} \rightarrow 0$
 $\lim_{V \rightarrow \infty} \nabla \cdot \underline{H} = \text{cost} \Rightarrow \underline{H} \rightarrow 0$

$$\oint_{S_\infty} (\underline{E}_1 \times \underline{H}_2 - \underline{E}_2 \times \underline{H}_1) \cdot \underline{n}_0 dS = 0$$

$$\Rightarrow \iiint_{V_1} (\underline{J}_{i1} \cdot \underline{E}_2 - \underline{J}_{m1} \cdot \underline{H}_2) dV_1 = \iiint_{V_2} (\underline{J}_{i2} \cdot \underline{E}_1 - \underline{J}_{m2} \cdot \underline{H}_1) dV_2$$

→ REAZIONE \underline{I}_{12} DELLA SORGENTE A_2 SULLA SORGENTE A_1 =
= REAZIONE \underline{I}_{21} DELLA SORGENTE A_1 SULLA SORGENTE A_2

APPLICAZIONE A DUE SOTTILI:

Consideriamo due sorgenti costituite da filamenti di corrente elettriche in un mezzo isotropo e lineare, eventualmente dissimmetrico e dissipativo:



$$\iiint_{V_1} \underline{J}_{i1} \cdot \underline{E}_2 dV_1 = \iiint_{V_2} \underline{J}_{i2} \cdot \underline{E}_1 dV_2$$

- \underline{E}_2 è prodotto dalla corrente I_2 nei punti della sorgente A_1 .
- \underline{E}_1 è prodotto dalla corrente I_1 nei punti della sorgente A_2 .

Se i volumi delle sorgenti hanno forma cilindrica:

$$\iint_{S_1} \underline{J}_{i1} \cdot \underline{E}_2 dS_1 = \iint_{S_2} \underline{J}_{i2} \cdot \underline{E}_1 dS_2$$

Se i cilindri sono sottili, $\underline{J}, \underline{E}$ sono approssimativamente costanti su ciascuna sezione

$$\Rightarrow I_1 \iint_{S_1} \underline{J}_{i1} \cdot \underline{E}_2 dL = I_2 \iint_{S_2} \underline{J}_{i2} \cdot \underline{E}_1 dL \Rightarrow I_1 V_{12} = I_2 V_{21}$$

Tensione indotta ai morsetti
del componente A_1 dalla corrente
che fluisce nell'elemento A_2

Tensione indotta ai morsetti
dalla corrente in A_2

Né conseguono che le due impedenze mutue relative alle sorgenti elettriche sono uguali: $Z_{12} = Z_{21}$

Questo è un risultato netto della teoria dei circuiti reciproci, ed è ottenuto in condizioni generali, anche in assenza di connessioni fisiche tra i componenti.

Comunque sia, anche qui la validità del risultato è subordinata alla linearità e all'isotropia del mezzo.

SORGENTE DI TEST:

È una sorgente impulsiva ("irradia poco"): $J_t = M \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) t_0$

Serve a misurare un'altra sorgente generica A e a calcolarne il campo prodotto. Infatti, per l'uguaglianza delle reazioni:

$$I_{At} \equiv \iiint_V J_t \cdot E_t dV = \iiint_V J_t \cdot E_A dV \equiv I_{EA}$$

→ Per la proprietà di campionamento della delta: $I_{At} = M E_A(\vec{r}) \cdot t_0$

Di base, i valori di J_t , E_t sono noti → il campo elettrico prodotto da A in \vec{r} può essere calcolato attraverso l'integrale di reazione su A (I_{At}) di una sorgente elettrica impulsiva posta in \vec{r} e orientata secondo il campo.

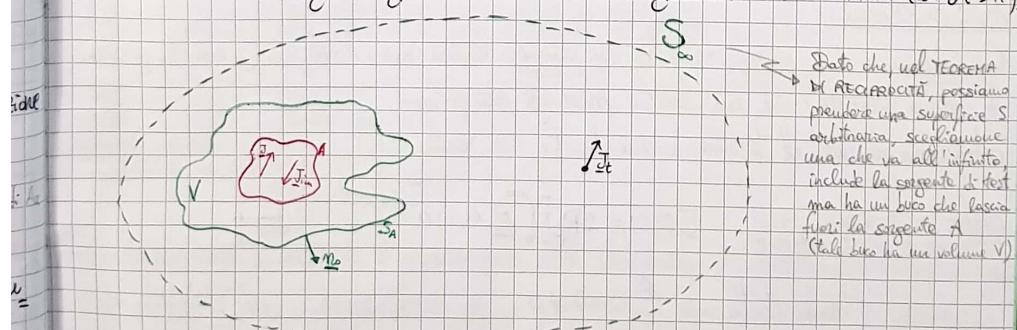
Nella pratica, si usano tre seguenti di test mutuamente ortogonali per determinare il vettore E .

Per determinare E , invece, si utilizzano sorgenti magnetiche di test.

21/04/2021

Teorema di equivalenza:

Consideriamo una sorgente generica A e una sorgente di test • UNITARIA (con $M=1 \text{ Am}$).



$$\text{on } M=1 \text{ Am} \Rightarrow I_{At} = M E_A(\vec{r}) \cdot t_0 =: E \cdot t_0$$

Applichiamo il teorema di reciprocità:

$$\mathbf{I}_{ta} = \iiint_{V_t} \mathbf{J}_t \cdot \mathbf{E} dV = \oint_{S_t} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}_t - \mathbf{E}_t \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n}_t dS \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{E} \cdot \mathbf{t}_o = \oint_{S_t} (\mathbf{M}_o \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{H}_t - \mathbf{E}_t \cdot \mathbf{H} \times \mathbf{M}_o) dS$$

Componente tangenziale del campo elettrico
E sulla superficie S_t

Componente tangenziale del campo magnetico
 H sulla superficie S_t

La definisco come una CORRENTE MAGNETICA EQUIVALENTE $-J_{ms}$

La definisco come una CORRENTE ELETTRICA EQUIVALENTE $-J_s$

$$\Rightarrow \mathbf{E} \cdot \mathbf{t}_o = \oint_{S_t} (J_s \cdot \mathbf{E}_t - J_{ms} \cdot \mathbf{H}_t) dS$$

ENUNCIAZIONE DEL TEOREMA DI EQUIVALENZA:

Le correnti equivalenti distribuite su una superficie chiusa arbitraria S_t che racchiude la sorgente A sono equivalenti alla sorgente A stessa (ovvero producono lo stesso campo elettromagnetico di A).

L'equivalenza vale solo all'esterno di S_t .

IMPORTANZA APPLICATIVA DELL'EQUIVALENZA:

Consente di sostituire alle sorgenti reali, spesso di difficile trattazione e tridimensionali, un sistema di correnti bidimensionali distribuite su una superficie arbitraria che può essere scelta in modo da semplificare di molto i calcoli.

Dispersione:

Il campo monochromatico è invece caratterizzato dalla singola sinusode

Consideriamo la propagazione di un campo QUASI MONOCROMATICO (= con larghezza di banda STRETTA) in un mezzo privo di dissipazioni.

Assumiamo che il termine dominante \hat{E}_o sia reale.

$$\text{CAMPO IN FUNZIONE DELLA POSIZIONE } S \text{ E DEL TEMPO } t: \quad \mathbf{E}(s, t) = 2 \operatorname{Re} \left[\int_0^{\infty} \hat{E}_o(s, \omega) e^{-j[\phi(s, \omega) - \omega t]} d\omega \right]$$

ANTITRASFORMATA DI FOURIER

Larghezza di banda stretta $\Rightarrow \hat{E}_o(s, \omega) \neq 0$ per $\omega_1 < \omega < \omega_2$ con $\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} \ll 1$

$\tilde{\epsilon}$ la pulsazione di riferimento dell'intervallo \rightarrow UN VALORE DELLA PULSAZIONE CHE CADE ALL'INTERNO DELLA NOSTRA BANDA STRETTA

\rightsquigarrow La funzione $\phi(s, \omega)$ all'esponente ora ingloba $\tilde{\epsilon}$.

Applichiamo lo sviluppo di Taylor al primo ordine alla funzione $\phi(s, \omega)$:

$$\phi(s, \omega) \approx \phi(s, \omega_0) + \frac{\partial \phi(s, \omega)}{\partial \omega} \Big|_{\omega_0} (\omega - \omega_0) =: \phi_0 + \phi'_0 (\omega - \omega_0)$$

$$\text{Posto } \Delta\omega := \omega - \omega_0 \Rightarrow \omega = \Delta\omega + \omega_0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underline{E}(s, t) &\approx 2\operatorname{Re} \left[\int_{\omega_0}^{\Delta\omega + \omega_0} \hat{E}_0(s, \Delta\omega + \omega_0) e^{-j[\phi_0 + \phi'_0 \Delta\omega - (\omega_0 + \Delta\omega)t]} d(\Delta\omega) \right] = \\ &= 2\operatorname{Re} \left[e^{-j(\phi_0 - \omega_0 t)} \int_{\omega_0}^{\Delta\omega + \omega_0} \hat{E}_0(s, \Delta\omega + \omega_0) e^{-j\Delta\omega(\phi'_0 - t)} d(\Delta\omega) \right] \end{aligned}$$

Possiamo riconoscere due fattori, entrambi dipendenti dallo spazio e dal tempo:

→ Fattore che conosciamo già perché è relativo alla fase di una singola onda; si tratta dell'esponentiale che varia periodicamente nel tempo con pulsazione ω_0 e che si propaga lungo s con velocità:

$$M = \frac{\omega_0}{\frac{\partial \phi(s, \omega)}{\partial s}} \quad \begin{array}{l} \curvearrowright \text{VELOCITÀ DI FASE} \\ \text{ALLA PULSAZIONE } \omega_0 \\ \text{è propria della perturba} \end{array}$$

→ Involucro che modula nello spazio e nel tempo l'esponentiale e che viaggia lungo s con velocità tale che:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\partial \phi(s, \omega)}{\partial \omega} \Big|_{\omega_0} \right] ds - dt = 0 \quad \begin{array}{l} \curvearrowright \text{Come nel caso della singola sinusoida, è la} \\ \text{velocità con cui bisogna propagare lungo la} \\ \text{direzione di propagazione per conservare la} \\ \text{variazione temporale di fase} \end{array}$$

$$\Rightarrow M_g = \frac{ds}{dt} = -\frac{1}{\frac{\partial^2 \phi(s, \omega)}{\partial s \partial \omega} \Big|_{\omega_0}} \quad \begin{array}{l} \curvearrowright \text{VELOCITÀ DI GRUPPO} \\ (\neq \text{Velocità di fase}) \\ \curvearrowright \text{È propria dell'informazione} \end{array}$$

Vediamo quindi che velocità di fase e velocità di gruppo coincidono:

$$\frac{\omega_0}{\frac{\partial \phi(s, \omega)}{\partial s}} = \frac{1}{\frac{\partial^2 \phi(s, \omega)}{\partial s \partial \omega} \Big|_{\omega_0}} \Rightarrow \omega_0 \frac{\partial^2 \phi(s, \omega)}{\partial s \partial \omega} \Big|_{\omega_0} = \frac{\partial}{\partial s} \left[\omega_0 \frac{\partial \phi(s, \omega)}{\partial \omega} \Big|_{\omega_0} \right] = \frac{\partial \phi(s, \omega_0)}{\partial s}$$

$$\xrightarrow{\text{INTEGRO IN } s} \omega_0 \frac{\partial \phi(s, \omega_0)}{\partial \omega} \Big|_{\omega_0} = \phi(s, \omega_0) + C_s \quad \begin{array}{l} \curvearrowright \text{COSTANTE RISPETTO A } s \\ \curvearrowright \underline{L}(s, \omega) \end{array}$$

Ricontrolliamo che l'ecuazione è proporzionale alla lunghezza del percorso elettromagnetico:

$$\phi(s, \omega) = K_0 \int_{s_0}^s n(s, \omega) ds = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \underline{L}(s, \omega)$$

$$\Rightarrow \omega_0 \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \underline{L}(s, \omega_0) + C_s K_0 \frac{\partial \underline{L}(s, \omega)}{\partial \omega} \Big|_{\omega_0} = \omega_0 \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \underline{L}(s, \omega_0) + C_s \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_0 K_0 \frac{\partial \int(s, \omega)}{\partial \omega} \Big|_{\omega_0} = C_s = \text{costante}$$

$$\Rightarrow \text{Per qualunque percorso: } \frac{\partial \int(s, \omega)}{\partial \omega} \Big|_{\omega_0} = \int_{s_i}^s \frac{\partial n(s, \omega)}{\partial \omega} \Big|_{\omega_0} ds = \text{costante}$$

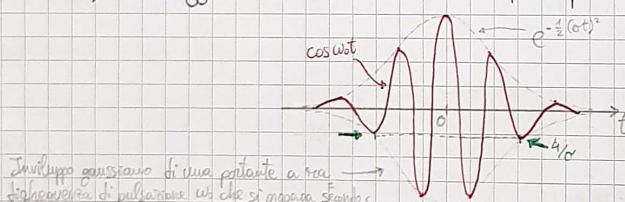
Ma il valore di un integrale rimane costante al variare degli estremi di integrazione quando l'integrandus è nullo:

$$\frac{\partial n(s, \omega)}{\partial \omega} \Big|_{\omega_0} = 0$$

In definitiva, velocità di fase e velocità di gruppo coincidono se l'indice di rifrazione del mezzo è indipendente dalla frequenza nell'intorno di ciò. In questo caso, si dice che il mezzo è NON DISPERSIVO.

DISPERSSIONE DI UN FRACCHETTO D'ONDE - PROPAGAZIONE DI UN CAMPO MONOCHROMATICO:

Consideriamo un'onda che trasporta informazione (e.g. interpretabile con dei bit, dove $N=1$, $\nu=0$) soggetta a una modulazione di tipo impulsivo:

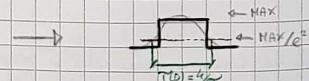


$$\text{CAMPO ELETTRICO IN FUNZIONE DEL TEMPO IN } s=0: E(0, t) = E_0 e^{-\frac{(ct)^2}{2}} \cos \omega t = \\ = \frac{E_0}{2} e^{-\frac{(ct)^2}{2}} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$$

► σ (che ha la grandezza dell'inverso del tempo) determina la durata iniziale $T(0)$ dell'impulso, che è l'intervallo temporale entro cui $e^{-\frac{(ct)^2}{2}} > \frac{1}{e^2}$:

$$T(0) = \frac{4}{\sigma}$$

è anche detta LARGHEZZA DELLA GAUSSIANA



Vogliamo ora vedere cosa succede quando il nostro impulso si propaga da un trasmettore posto in $s=0$ a un ricevitore posto in una posizione generica s . Per farlo, seguiamo i seguenti passaggi:

→ Calcoliamo lo spettro in frequenza (= la trasformata) del campo per $s=0$.

→ Facciamo propagare ciascuna componente armonica da $s=0$ a s .

→ Ricomponiamo le componenti armoniche e ricostruiamo l'andamento temporale nella posizione generica s a partire dallo spettro propagato.

Trasformando secondo Fourier:

$$\hat{E}_0(s, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_0(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{E_0 \sqrt{2\pi}}{2\sigma} \left[e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\omega - \omega_0}{\sigma} \right)^2} + e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\omega + \omega_0}{\sigma} \right)^2} \right]$$

Questo è uno spettro con due bande gaussiane di larghezza 4σ , inversamente proporzionali alla durata dell'impulso, centrate su $-\omega_0$ e ω_0 :



Per quanto riguarda la propagazione, teniamo conto che ciascuna componente spettrale si propaga con la corrispondente funzione elionale $\phi(s, \omega)$:

SPESSO DEL CAMPO NELLA POSIZIONE GENERICA s :

$$\hat{E}_0(s, \omega) = \frac{E_0 \sqrt{2\pi}}{2\sigma} e^{-j\phi(s, \omega)} \left[e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\omega - \omega_0}{\sigma} \right)^2} + e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\omega + \omega_0}{\sigma} \right)^2} \right]$$

dove possiamo assumere E_0 indipendente da s .

Per avere l'andamento del tempo nella posizione s , dobbiamo autotrasformare l'espressione di $\hat{E}_0(s, \omega)$ appena ottenuta:

$$E(s, t) = \frac{E_0 \sqrt{2\pi}}{2\pi \cdot 2\sigma} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\omega - \omega_0}{\sigma} \right)^2 - j\phi(s, \omega)} e^{j\omega t} d\omega + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\omega + \omega_0}{\sigma} \right)^2 - j\phi(s, \omega)} e^{j\omega t} d\omega \right]$$

Applichiamo lo sviluppo di Taylor al secondo ordine rispetto a ω alla funzione $\phi(s, \omega)$, con punto iniziale ω_0 :

$$\phi(s, \omega) \approx \phi(s, \omega_0) + \frac{\partial \phi(s, \omega)}{\partial \omega} \Big|_{\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi(s, \omega)}{\partial \omega^2} \Big|_{\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 =$$

$$= \phi_0 + \phi'_0 (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \phi''_0 (\omega - \omega_0)^2$$

Effettuiamo infine l'autotrasformata della banda spettrale centrata su ω_0 :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega-\omega_0}{\sigma}\right)^2 - j\phi(s, \omega)} e^{j\omega t} d\omega \approx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega-\omega_0}{\sigma}\right)^2 - j[\phi_0 + \phi'_0(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\phi''_0(\omega - \omega_0)^2]} e^{j\omega t} d\omega =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\omega}{\sigma}\right)^2 - \frac{j}{2}\phi''_0\Delta\omega^2} \cdot e^{j(t - \phi'_0)\Delta\omega} \cdot e^{-j(\phi_0 - \omega_0 t)} d(\Delta\omega)$$

con $\Delta\omega = \omega - \omega_0$

Definito $\tilde{\sigma}^2 := \frac{1}{\sigma^2} + j\phi''_0$; $\tilde{t} := t - \phi'_0$, otteniamo che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega-\omega_0}{\sigma}\right)^2 - j\phi(s, \omega)} e^{j\omega t} d\omega = e^{-j(\phi_0 - \omega_0 t)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\omega}{\tilde{\sigma}}\right)^2} e^{j\tilde{t}\Delta\omega} d(\Delta\omega) =$$

$$= \sqrt{2\pi} \tilde{\sigma} e^{-\frac{1}{2}(\tilde{\sigma}^2\tilde{t})^2} \cdot e^{-j(\phi_0 - \omega_0 t)}$$

22/04/2021

Effettuiamo ora l'auttrasformata della banda spettrale centrata su $-\omega_0$.

Chiamiamo $\phi^-(s, \omega)$ lo sviluppo di Taylor al secondo ordine di $\phi(s, \omega)$ con punto iniziale $-\omega_0$:

$$\phi^-(s, \omega) \approx \phi^-(s, \omega_0) + \frac{\partial \phi^-(s, \omega)}{\partial \omega} \Big|_{-\omega_0} (\omega + \omega_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi^-(s, \omega)}{\partial \omega^2} \Big|_{-\omega_0} (\omega + \omega_0)^2$$

Dobbiamo impostare che le coppie di componenti spettrali a pulsazione $\pm\omega$ si propaghi nello stesso verso e con la stessa velocità, per cui:

$$\begin{aligned} \phi^-(s, \omega_0) &= -\phi(s, \omega_0) \\ \frac{\partial \phi^-(s, \omega)}{\partial \omega} \Big|_{-\omega_0} &= \frac{\partial \phi(s, \omega)}{\partial \omega} \Big|_{\omega_0} \\ \frac{\partial^2 \phi^-(s, \omega)}{\partial \omega^2} \Big|_{-\omega_0} &= -\frac{\partial^2 \phi(s, \omega)}{\partial \omega^2} \Big|_{\omega_0} \end{aligned}$$

$\Delta\omega = \omega + \omega_0$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega+\omega_0}{\sigma}\right)^2 - j\phi^-(s, \omega)} e^{j\omega t} d\omega \approx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega+\omega_0}{\sigma}\right)^2 + j[\phi_0 - \phi'_0(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2}\phi''_0(\omega + \omega_0)^2]} e^{j\omega t} d\omega =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\omega}{\sigma}\right)^2 + \frac{j}{2}\phi''_0\Delta\omega^2} \cdot e^{j(t - \phi'_0)\Delta\omega} \cdot e^{-j(\phi_0 - \omega_0 t)} d(\Delta\omega) = e^{-j(\phi_0 - \omega_0 t)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\omega}{\tilde{\sigma}}\right)^2} e^{j\tilde{t}\Delta\omega} d(\Delta\omega)$$

$$= \sqrt{2\pi} \tilde{\sigma} * e^{-\frac{1}{2}(\tilde{\sigma}^2\tilde{t})^2} \cdot e^{j(\phi_0 - \omega_0 t)}$$

Sommando le due quantità così ottenute otteniamo il campo in funzione del tempo nella posizione s :

$$E(s, t) = \frac{E_0 \sqrt{2\pi}}{2\pi \cdot 2\sigma} \sqrt{2\pi} \left\{ \tilde{\sigma} e^{-\frac{1}{2}(\tilde{\sigma}^2\tilde{t})^2} \cdot e^{-j(\phi_0 - \omega_0 t)} + \tilde{\sigma} * \left[e^{-\frac{1}{2}(\tilde{\sigma}^2\tilde{t})^2} \right]^* e^{j(\phi_0 - \omega_0 t)} \right\} =$$

$$= E_0 \operatorname{Re} \left[\tilde{\sigma} e^{-\frac{i}{2}(\tilde{\sigma} t)^2} e^{-i(\phi_0 - \omega t)} \right]$$

Posto $\tilde{\sigma} = |\tilde{\sigma}| e^{j\gamma}$; $e^{-\frac{i}{2}(\tilde{\sigma} t)^2} = e^{-\alpha} e^{j\beta}$; $\Psi = \omega t - \phi_0$
MAGNITUDINE E FASE \rightarrow L'ESPANSIONE NELLA PERTINENTE

$$\Rightarrow E(s,t) = E_0 \operatorname{Re} \left[\frac{|\tilde{\sigma}| e^{j\gamma}}{\tilde{\sigma}} e^{-\alpha} e^{j\beta} e^{i\Psi} \right] = E_0 \frac{|\tilde{\sigma}|}{\tilde{\sigma}} e^{-\alpha} \cos(\beta + \gamma + \psi)$$

Abbiamo un prodotto di tre fattori:

$\rightarrow \frac{|\tilde{\sigma}|}{\tilde{\sigma}}$ determina l'ampiezza.

$\rightarrow e^{-\alpha}$ determina forma e velocità di trasporto.

$\rightarrow \cos(\beta + \gamma + \psi)$ determina la propagazione, con $\delta := \beta + \gamma$.

FATTORE DI AMPIEZZA:

$$\frac{|\tilde{\sigma}|}{\tilde{\sigma}^2} = \frac{1}{\tilde{\sigma}^2 + j\phi_0''} \Rightarrow \tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{\tilde{\sigma}^2 + j\phi_0''} = \frac{\tilde{\sigma}^2(1 - \tilde{\sigma}^2\phi_0'')}{1 + (\tilde{\sigma}^2\phi_0'')^2}$$

$$\Rightarrow \frac{|\tilde{\sigma}|}{\tilde{\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\tilde{\sigma}^2\phi_0'')^2}} = \left\{ 1 + \left[\tilde{\sigma}^2 \frac{\partial^2 \phi(s, \omega)}{\partial \omega^2} \Big|_{\omega_0} \right]^2 \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

Quando $\frac{\partial^2 \phi(s, \omega)}{\partial \omega^2} \Big|_{\omega_0} \neq 0$, tale fattore è crescente ~~verso~~ all'aumentare di s .

Poiché $\frac{\partial^2 \phi(s, \omega)}{\partial \omega^2} \Big|_{\omega_0}$ si trova al denominatore, ciò implica che l'ampiezza del campo decresce all'aumentare della distanza percorsa dal pacchetto d'onde.

FATTORE DI TRASPORTO:

$$e^{-\alpha} e^{j\beta} = e^{-\frac{1}{2}(\tilde{\sigma} t)^2} \Rightarrow e^{-\alpha} = e^{-\frac{1}{2} \operatorname{Re}[(\tilde{\sigma} t)^2]} = e^{-\frac{1}{2} \frac{\tilde{\sigma}^2(t - \phi_0')^2}{1 + (\tilde{\sigma}^2\phi_0'')^2}}$$

- La forma temporale dell'impulso (inviluppo) rimane gaussiana.

\Rightarrow La velocità dell'inviluppo gaussiano è determinata da $t - \phi_0' = \text{costante}$

\Rightarrow il pacchetto d'onde, a cui è associata l'energia elettromagnetica, viaggia con la velocità di gruppo.

\Rightarrow La durata dell'impulso è: $\Rightarrow T(s) = \frac{1}{\tilde{\sigma}} \sqrt{1 + (\tilde{\sigma}^2\phi_0'')^2} = T(0) \sqrt{1 + [\tilde{\sigma}^2\phi_0''(s)]^2}$

Quando $\frac{\partial^2 \phi(s, \omega)}{\partial \omega^2} \Big|_{\omega_0} \neq 0$, tale fattore è crescente all'aumentare di s .

Poiché $\frac{\partial^2 \phi(s, \omega)}{\partial \omega^2} \Big|_{\omega_0}$ si trova al numeratore della durata dell'impulso, ciò implica

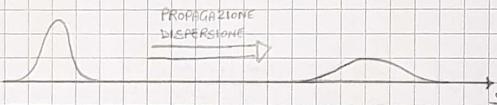
che quest'ultima cresce all'aumentare della distanza percorsa dal pacchetto d'onda. Questo vuol dire che l'energia elettromagnetica si spande (si disperde) nel tempo e nello spazio, e si dice che il mezzo è **DISPERSIVO**.

Ciò in effetti è dovuto al fatto che le singole onde si propagano in moto diverso e, quando le riuniamo a ricomporre nella posizione s , otteniamo un pacchetto d'onda deformato (in particolare allargato).

Per la conservazione dell'energia, l'allungamento è accompagnato dalla diminuzione di ampiezza.

NB: DISPERSIVO NON è SINONIMO DI DISSIPATIVO !!

All'inizio avevamo posto che, sopra una certa soglia, il bit corrispondente vale 1 e viceversa. Se non teniamo conto della dispersione, con la propagazione tutte le informazioni andrebbero perse!



→ Ricongideremo l'eccuale in funzione dell'indice di rifrazione:

$$\phi(s, \omega) = K_0 \int_{s_i}^s m(s, \omega) ds \Rightarrow \frac{\partial^2 \phi(s, \omega)}{\partial \omega^2} \Big|_{\omega_0} = 2\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \left[\frac{\partial m}{\partial \omega} \Big|_{\omega_0} ds + \omega_0 \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \int_{s_i}^s \frac{\partial^2 m}{\partial \omega^2} \Big|_{\omega_0} ds \right]$$

Se l'indice di rifrazione è indipendente dalla frequenza, il pacchetto d'onda non si disperde (e l'ampiezza del campo non diminuisce), per cui il mezzo è non dispersivo.

FATTORE DI PROPAGAZIONE $\cos(\Psi + \delta)$:

S'è lentamente variabile con s, t (varia molto più lentamente rispetto a Ψ).

L'onda nel pacchetto, modulata in ampiezza e fase, si propaga lungo s con velocità di fase:

$$n = \frac{\omega_0}{\frac{\partial \phi(s, \omega)}{\partial s}} = \frac{\omega_0}{K_0 m(s)} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} m(s)} = \frac{c_0}{m(s)}$$

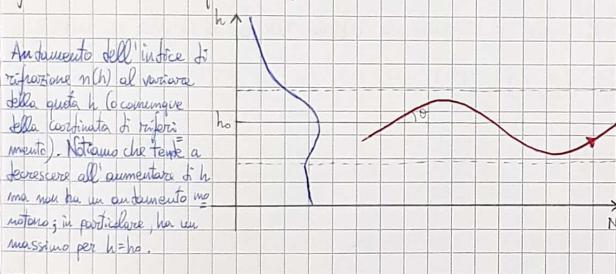
25/04/2021

Propagazione guidata in mezzi debolmente dissomogenei:

La propagazione di un'onda elettromagnetica si dice GUIDATA quando non avviene nel lo spazio libero, bensì in una regione chiusa e ristretta.

Nel momento in cui, ad esempio, sono delle strutture dielettriche a guidare la potenza elettromagnetica, può succedere che per un punto passi più di un raggio elettromagnetico, il che rende la determinazione del campo laboriosa. Perciò, in tal caso, anziché tramite la tecnica dei raggi, il campo elettromagnetico va determinato mediante l'ANALISI MODALE.

Preniamo in esame un CONDOTTO ATMOSFERICO (o una LAMINA DIELETTRICA, che ha effetti del tutto equivalenti).



Ricordiamo che la propagazione di un'onda elettromagnetica fa in basezione di ∇n (quindi in base alla variazione dell'indice di rifrazione). Per questo motivo, le traiettorie elettromagnetiche sono incurvate verso l'alto per $h < h_0$ (dove $n(h)$ è crescente), e verso il basso per $h > h_0$. Se la curva iniziale dei raggi ha un angolo iniziale θ che non supera l'angolo limite θ_c , i raggi rimangono confinati nell'intorno di h_0 e vengono "guidati".

Modi di propagazione guidata da una struttura planare:

Consideriamo un mezzo stratificato piano (il cui indice di rifrazione varia lungo una sola direzione - ad esempio y), con il piano xz posto in corrispondenza del massimo dell'indice di rifrazione $n(y)$. Supponiamo che il trasporto di potenza avvenga lungo z e che, quindi, il campo sia indipendente da x .

$$\text{EQUAZIONE DELLE Onde IN E (OMOGENEA): } \nabla^2 E + K^2(y) E = 0$$

Risolviamo l'equazione per separazione delle variabili: $E(y, z) := T(y) Z(z) e^{i\phi}$

dove $e^{i\phi}$ è un verso complesso indipendente dalle coordinate e caratterizza la polarizzazione di E .

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) T(y) Z(z) + K^2 T(y) Z(z) = 0$$

$$\Rightarrow Z \frac{d^2 T}{dy^2} + T \frac{d^2 Z}{dz^2} + TZ K^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + K^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2 T}{dy^2} + K_y^2 T = 0 \\ \frac{d^2 Z}{dz^2} + K_z^2 Z = 0 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{aligned} K_y^2 + K_z^2 &= K^2 = K_0^2 n^2(y) \\ &\text{con } K_z \text{ indipendente dalle coordinate.} \end{aligned}$$

Affinché possiamo scrivere questo sistema, K_y, K_z devono essere costanti arbitrarie vincolate dalla CONDIZIONE DI SEPARABILITÀ:

$$\text{SOLUZIONE DELLA SECONDA EQUAZIONE DEL SISTEMA: } Z(Z) = C_1 e^{j K_z Z} + C_2 e^{-j K_z Z}$$

↳ È la sovrapposizione di due onde viaggiante in verso opposto:

► ONDA DIRETTA, che viaggia con velocità positiva nel verso delle z positive

► ONDA RIFLESSA

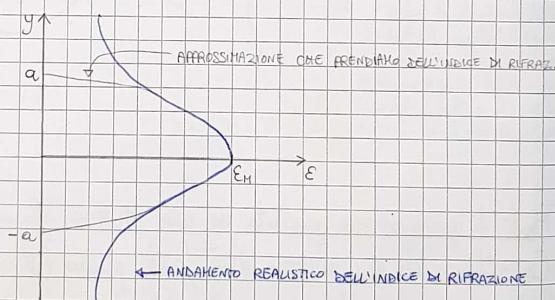
Nel seguito di questa trattazione considereremo solo l'onda diretta.

$$\text{PRIMA EQUAZIONE DEL SISTEMA: } \frac{d^2 T}{dy^2} + [K_0^2 n^2(y) - K_z^2] T = 0$$

Assumiamo per semplicità che l'indice di rifrazione abbia un andamento parabolico, ovvero:

$$n^2(y) = n_{\infty}^2 \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)$$

o è una misura dello "spessore" → della struttura dielettrica (entro cui l'onda oscilla)



Posto $K_H = K_0 n_M$, $\zeta := \sqrt{\frac{K_H}{a}} y$, l'equazione diventa:

$$\frac{d^2 T}{d\zeta^2} \frac{K_H}{a} + \left[K_H^2 \left(1 - \frac{\zeta^2}{K_H^2 a^2}\right) - K_z^2 \right] T = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 T}{d\zeta^2} + \left[a K_H \left(1 - \frac{\zeta^2}{a K_H^2}\right) - \frac{K_z^2}{K_H^2} a \right] T = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 T}{d\zeta^2} + \left(a \frac{K_H^2 - K_z^2}{K_H^2} - \zeta^2\right) T = 0$$

$$\text{Posto } \gamma := a \frac{K_H^2 - K_z^2}{K_H^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 T}{d\zeta^2} + (\gamma - \zeta^2) T = 0$$

Questa è l'EQUAZIONE DI SCHRÖDINGER per l'oscillatore armonico monodimensionale. Ha infinite soluzioni, che consistono nelle FUNZIONI DI GAUSS-HERMITE.

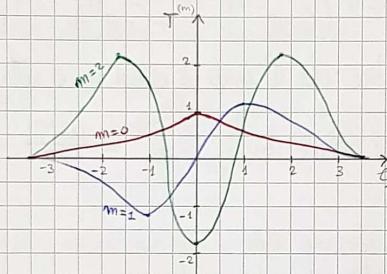
Le funzioni di Gauss-Hermite sono AUTOFUNZIONI $T^{(m)}$ relative agli autovalori γ_m .

Ciò significa che esiste un OPERATORE A che, se applicato a $T^{(m)}$, dà come risultato $\gamma_m \cdot T^{(m)}$.

$$T^{(m)}(\xi) = H_m(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}} \quad m=0,1,2,\dots$$

Dove H_m è il POLINOMIO DI HERMITE di ordine m :

$$H_m(\xi) = (-1)^m e^{\xi^2} \frac{d^m}{d\xi^m} e^{-\xi^2}$$



$$\Rightarrow \text{ESPRESSIONE DEL CAMPO ELETTRICO: } E(y, z) = H_m\left(\sqrt{\frac{K_H}{a}} y\right) e^{-\frac{K_H}{2a} y^2} I(z) \epsilon_0$$

A ogni m corrisponde una configurazione di campo che chiamiamo Modo di propagazione guidata di ordine m .

Come già accennato, esistono infinite configurazioni ammissibili.

In particolare, l'autofunzione $T^{(m)}$ corrisponde al seguente autovalore:

$$\gamma_m = 2\left(m + \frac{1}{2}\right)$$

\rightarrow COSTANTE DI PROPAGAZIONE

Da qui siamo in grado di calcolare $K_z^{(m)}$ a partire dalla condizione di separabilità:

$$K_z^{(m)} = K_H \sqrt{1 - \frac{\gamma_m}{a K_H}} \quad [m^{-1}]$$

Ciascun modo guidato si propaga con la corrispondente costante di propagazione:

$$E(y, z) = H_m\left(\sqrt{\frac{K_H}{a}} y\right) e^{-\frac{K_H}{2a} y^2} (C_1 e^{-j K_z^{(m)} z} + C_2 e^{j K_z^{(m)} z}) \epsilon_0$$

Notiamo che $K_z^{(m)}$ può assumere sia valori reali che valori immaginari.

\rightarrow Quando il radicando è positivo

\rightarrow Quando il radicando è negativo

CUT-OFF:

$$1^{\circ} \text{ CASO: } 1 - \frac{\gamma_m}{\alpha K_H} > 0 \implies \omega > \frac{\gamma_m}{\alpha \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} n_H} =: \omega_c^{(m)}$$

$\Rightarrow K_z^{(m)}$ del modo m -esimo è reale e il campo con la configurazione $T^{(m)}$ si propaga.

$$2^{\circ} \text{ CASO: } 1 - \frac{\gamma_m}{\alpha K_H} < 0 \implies \omega < \omega_c^{(m)}$$

$\Rightarrow K_z^{(m)}$ è immaginaria e il modo corrispondente varia esponenzialmente (si attenua) con z senza propagarsi:

$$\underline{E}(y, z) = H_{mm}(\sqrt{\frac{K_H}{\alpha}} y) e^{-\frac{K_H}{\alpha} y^2} (C_1 e^{-|K_z^{(m)}| z} + C_2 e^{|K_z^{(m)}| z}) \underline{e}_z$$

In questo secondo caso si dice che il modo di ordine m è sotto cut-off.

$$\xrightarrow{\text{FREQUENZA DI CUT-OFF}} \text{FREQUENZA DEL MODO DI ORDINE } m: \quad f_c^{(m)} = \frac{\omega_c^{(m)}}{2\pi} = \frac{\gamma_m c_0}{2\pi \alpha n_H}$$

\rightarrow Dipende inversamente da n_H .

\rightarrow Dipende inversamente dallo spessore $2a$.

\rightarrow Aumenta all'aumentare dell'ordine del modo.

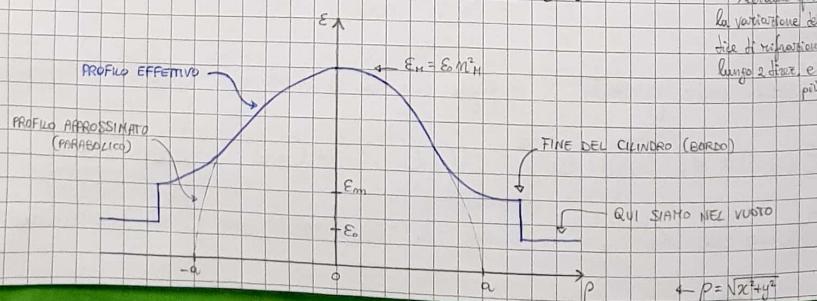
Il minimo valore di γ_m è $\gamma_0 = 1$ e $f_c^{(0)} = \frac{c_0}{2\pi \alpha n_H} \neq 0$

\Rightarrow Per frequenze $f < f_c^{(0)}$ il campo elettromagnetico non si può propagare in alcuna configurazione.

Inoltre, il modo di ordine $m=0$ si propaga alle frequenze più basse e, per questo motivo, viene detto MODO DOMINANTE.

Modo di propagazione guidata da una fibra ottica:

Consideriamo un cilindro dielettrico il cui indice di rifrazione decresce radialmente dal valore massimo n_H sull'asse al valore minimo n_m sul bordo:



EQUAZIONE DELLE Onde IN \underline{E} (OMOGENEA): $\nabla^2 \underline{E} + K^2(\rho) \underline{E} = 0$

dove $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ è la coordinate radiale.

Risolviamo l'equazione per separazione delle variabili: $\underline{E}(x,y,z) = \underline{T}(x,y) \underline{Z}(z)$ e

Scomponiamo il laplaciano in un operatore trasverso e uno longitudinale:

$$\nabla^2 := \nabla_t^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

a) $\Rightarrow (\nabla_t^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) \underline{T} \underline{Z} + K^2 \underline{T} \underline{Z} = 0 \Rightarrow \frac{1}{T} \nabla_t^2 T + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + K^2 = 0$

27/04/2021

Come nel caso precedente, ottieniamo così due equazioni:

$$\begin{cases} \nabla_t^2 T + K_t^2 T = 0 \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + K_z^2 Z = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Affinché possiamo scrivere questo sistema, } K_t, K_z \text{ devono essere pari} \\ \text{metà arbitrarie vincolate dalla CONDIZIONE DI SEPARABILITÀ:} \\ K_t^2 + K_z^2 = K^2 = \omega^2 / \mu E(\rho) \quad \text{con } K_z \text{ costante} \end{array}$$

SOLUZIONE DELLA SECONDA EQUAZIONE DEL SISTEMA: $\underline{Z}(z) = C_1 e^{j K_z z} + C_2 e^{-j K_z z}$

PRIMA EQUAZIONE DEL SISTEMA: $\nabla_t^2 T + [\omega^2 \mu E(\rho) - K_z^2] T = 0$

Assumiamo che E abbia un profilo parabolico: $E(\rho) = E(x,y) = E_M \left(1 - \frac{x^2+y^2}{a^2}\right)$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \left[K_M^2 \left(1 - \frac{x^2+y^2}{a^2}\right) - K_z^2 \right] T = 0$$

Posto $K_M := \omega \sqrt{\mu E_M} = \frac{2\pi}{\lambda_p} M_M$, $\xi := \sqrt{\frac{K_M}{a}} x$, $\varsigma := \sqrt{\frac{K_M}{a}} y$, l'equaz. diventa:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \varsigma^2} + \left(\frac{K_M^2 - K_z^2}{K_M} a - \xi^2 - \varsigma^2 \right) T = 0$$

Posto $\gamma := \frac{K_M^2 - K_z^2}{K_M} a$, $T(x,y) := X(\xi)Y(\varsigma)$, ottieniamo:

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial \xi^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varsigma^2} - (\xi^2 + \varsigma^2) = -\gamma$$

L'equazione così ottenuta si scomponga in:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 X}{\partial \xi^2} + (\gamma_x - \xi^2) X = 0 \\ \frac{\partial^2 Y}{\partial \varsigma^2} + (\gamma_y - \varsigma^2) Y = 0 \end{cases}$$

Affinché possiamo scrivere questo sistema, γ_x, γ_y devono essere costanti arbitrarie vincolate dalla CONDIZIONE DI SEPARABILITÀ:
 $\gamma_x + \gamma_y = \gamma$

Anch'esse sono equazioni di Schrödinger per l'oscillatore armonico monodimensionale.

Stavolta abbiamo una doppia infinità di funzioni di Gauss-Hermitte:

$$X(\xi) = H_m(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}}; \quad Y(\xi) = H_n(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

dove H_m , H_n sono polinomi di Hermite rispettivamente di ordine m ($m=0,1,2,\dots$) ed n ($n=0,1,2,\dots$).

Queste funzioni di Gauss-Hermitte corrispondono ai seguenti autovalori:

$$\gamma_x^{(m)} = 2(m + \frac{1}{2})$$

$$\gamma_y^{(n)} = 2(n + \frac{1}{2})$$

Definiamo dunque $T^{(m,n)}(x,y)$ nel seguente modo:

$$T^{(m,n)}(x,y) = X^{(m)}(x) Y^{(n)}(y) = H_m\left(\sqrt{\frac{K_H}{a}} x\right) H_n\left(\sqrt{\frac{K_H}{a}} y\right) e^{-\frac{K_H}{2a}(x^2+y^2)}$$

$$\text{con autovalori} \quad \gamma_{m,n} = 2(m+n) + 2 \quad (m,n) = 0,1,2,\dots$$

⇒ Nella fibra ottica, il campo elettrico può assumere una doppia infinità di configurazioni trasverse.

Ora, per la condizione di separabilità: $\gamma_{m,n} = \frac{K_H^2 - [K_z^{(m,n)}]^2}{K_H} a$

Tale condizione determina il legame tra configurazione del campo (ordine e moto) e costante K_z con cui si propaga:

$$K_z^{(m,n)} = K_H \sqrt{1 - \frac{\gamma_{m,n}}{a K_H}} = K_H \sqrt{1 - \frac{2(m+n)+2}{a K_H}} \quad [m^{-1}]$$

$$\rightarrow K_z^{(m,n)} \text{ è reale se: } \frac{\gamma_{m,n}}{a K_H} = \frac{2(m+n)+2}{a K_H} < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a K_H = a \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_H} \geq 2(m+n) + 2 = \gamma_{m,n}$$

Di conseguenza, il moto (m,n) ha frequenza di cut-off (di taglio):

$$f_c^{(m,n)} = \frac{\gamma_{m,n}}{2 \pi a \sqrt{\mu_0 \epsilon_H} K_H} = \frac{(m+n+1) c_0}{\pi a K_H} \quad (m,n) = 0,1,2,\dots$$

cui corrisponde una lunghezza d'onda di taglio:

$$\lambda_{oc}^{(m,n)} = \frac{\pi a K_H}{m+n+1} \quad (m,n) = 0,1,2,\dots$$

Se $f > f_c^{(m,n)}$, il campo coi valori m,n si propaga.

Altrimenti, varia solo esponenzialmente con ξ .

La frequenza di taglio aumenta con l'ordine del modo e diminuisce con il raggio della fibra e con il valore massimo dell'indice di rifrazione (viceversa per la lunghezza d'onda di taglio).

$$\rightarrow \text{NB: } f_c^{(m,n)} = f_c^{(n,m)} \quad \forall m, n$$

Impedenza d'onda:

Vediamo che relazione c'è tra il campo magnetico del modo di ordine m e il relativo campo elettrico.

$$\text{ESPRESSIONE SEMPLIFICATA DEL CAMPO ELETTRICO: } \underline{E}^{(m,n)}(x, y, z) = E_0^{(m,n)}(x, y) e^{-jK_z^{(m,n)}z} =$$

$$= T^{(m,n)}(x, y) e^{-jK_z^{(m,n)}z} \underline{e}_0$$

QUI STIAMO CONSIDERANDO SOLO L'ONDA DIRETTA

$$\text{PRIMA EQUAZIONE DI MAXWELL: } -jK_z^{(m,n)} e^{-jK_z^{(m,n)}z} \underline{\underline{\epsilon}}_0 \times [T^{(m,n)}(x, y) \underline{e}_0] + e^{-jK_z^{(m,n)}z} \nabla \times$$

$$[T^{(m,n)}(x, y) \underline{e}_0] = -j\omega \mu_0 H_0^{(m,n)}(x, y) e^{-jK_z^{(m,n)}z}$$

→ Il termine a sin dell'uguale è il rotore di \underline{E} ; si ha una somma tra due termini perché si è applicata la legge di conservazione del prodotto.

$$\Rightarrow jK_z^{(m,n)} T^{(m,n)}(x, y) \underline{\underline{\epsilon}}_0 \times \underline{e}_0 - \nabla \times [T^{(m,n)}(x, y) \underline{e}_0] = j\omega \mu_0 H_0^{(m,n)}(x, y)$$

$$\Rightarrow H_0^{(m,n)}(x, y) = \frac{K_z^{(m,n)}}{\omega \mu_0} T^{(m,n)}(x, y) \underline{\underline{\epsilon}}_0 \times \underline{e}_0 - \frac{1}{j\omega \mu_0} \nabla \times [T^{(m,n)}(x, y) \underline{e}_0]$$

Notiamo che se ci limitiamo ad un solo modo d'onda $\underline{H}_0^{(m,n)}$ $\Rightarrow K_z^{(m,n)}$ è reale \Rightarrow campo elettrico e campo magnetico solo in fase

29/04/2021

$$\text{Se } \underline{e}_0 = \underline{y} \Rightarrow \underline{H}_0^{(m,n)} = \frac{1}{jK_z^{(m,n)}} \underline{\underline{\epsilon}}_0 \times \underline{b}_0 + \frac{1}{j\omega \mu_0} \left[\frac{\partial}{\partial x} T^{(m,n)} - \frac{\partial}{\partial y} T^{(m,n)} \right] \underline{\underline{\epsilon}}_0$$

$\eta_z^{(m,n)} = \frac{\omega \mu_0}{K_z^{(m,n)}}$ è l'IMPEDENZA D'ONDA: infatti non dipende solo dai parametri del mezzo ma anche da frequenza e ordine del modo.

→ Lega le componenti trasverse di \underline{E} e \underline{H} (quelle ortogonali alla direzione di propagazione).

→ Determina il componente del vettore di Poynting nella direzione di propagazione.

IL VETTORE DI POYNTING HA COMUNQUE UN COMPONENTE IMMAGINARIO ORTHOGONALE ALLA DIREZIONE DI PROPAGAZIONE.

Notiamo che:

- Se il campo \underline{E} è polarizzato ortogonalmente alla direzione di propagazione (per cui possiamo parlare di ONDA TRASVERSA ELETTRICA TE) $\Rightarrow \underline{H}$ ha una componente anche lungo la direzione di propagazione.
- Viceversa, se \underline{H} è ortogonale alla direzione di propagazione (per cui possiamo parlare

di ONDA TRASVERSA MAGNETICA TM) $\Rightarrow \vec{E}$ ha una componente anche lungo la direzione di propagazione.

- Nel caso di onda TE, la componente longitudinale di \vec{H} è proporzionale alla fermità trasversa della componente trasversa di \vec{E} . Un discorso analogo vale per l'onda TM.
- Se i campi variano lentamente nello spazio \Rightarrow le derivate di $T^{(m,n)}$ sono trascurabili \Rightarrow le onde tendono a essere TEM (ONDE TRASVERSE ELETTROMAGNETICHE).
- I componenti longitudinali dei campi sono immaginari, per cui non contribuiscono al trasporto di potenza.

Velocità di fase e di gruppo in una fibra ottica:

VELOCITÀ DI FASE:

La funzione circolare dell'onda diretta relativa a un modo, per $f > f_c^{(m,n)}$, vale

$$\phi(z) = K_z^{(m,n)} z \quad \text{con}$$

$$K_z^{(m,n)} = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} n_m \sqrt{1 - \frac{\gamma_{mn}}{\omega \mu_0 \epsilon_0 n_m}} = K_0 n_m \sqrt{1 - \frac{\gamma_{mn} c_0}{\omega \mu_0 n_m}} = K_0 n_m \sqrt{1 - \frac{w_c^{(m,n)}}{\omega}}$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{\omega}{\frac{\partial \phi(E, \omega)}{\partial z}} = \frac{\omega}{K_z^{(m,n)}(\omega)} = \frac{c_0}{n_m \sqrt{1 - \frac{f_c^{(m,n)}}{f}}} = \frac{c_0}{n_m \sqrt{1 - \frac{\lambda_0}{\lambda c^{(m,n)}}}}$$

\Rightarrow La velocità di fase dipende dal modo e dalla frequenza.

$$\text{Se } n_m \sqrt{1 - \frac{f_c^{(m,n)}}{f}} < 1 \quad (\text{ovvero } f < \frac{E_n f_c^{(m,n)}}{E_n - \epsilon_0}) \quad \Rightarrow \mu^{(m,n)} > c_0$$

OK PERCHÉ NON È UNA VELOCITÀ DI TRASPORTO PER FASCICOLO (N)

VELOCITÀ DI GRUPPO:

$$M_g = \frac{1}{\frac{\partial^2 \phi(z, \omega)}{\partial z \partial \omega}} = \frac{1}{\frac{\partial K_z^{(m,n)}(\omega)}{\partial \omega}} = \frac{1}{\frac{K_z^{(m,n)}}{\omega}}$$

\rightarrow È inversa della velocità di fase ma dipende anche da essa sia dal modo sia dalla frequenza.

In particolare, $M_g \neq 1$ a prescindere dalla dipendenza dell'indice di rifrazione dalla frequenza
 \Rightarrow la fibra ottica è una struttura intrinsecamente dispersione.

Dispersione nelle fibre ottiche multimodali:

DISPERSIONE MODALE:

Poiché nel campo guidato la costante di propagazione ha una dipendenza non lineare dalla frequenza, si ha che

$$\frac{\partial^2 \phi(z, \omega)}{\partial \omega^2} = \frac{d^2 K_z^{(m,n)}}{d \omega^2} \neq 0$$

La dispersione è dunque una caratteristica intrinseca della propagazione guidata in generale.

→ ECCEZIONE: guida con cavo metallico non semplicemente connesso (e.g. cavo coassiale), nelle quali $K_z^{(m,n)}$ dipende linearmente dalla frequenza e possa dunque esistere un f con frequenza di cut-off pur a zero.

Comunque sia, la dispersione modale si riduce quando si opera a frequenze alte rispetto alla frequenza di taglio: $\frac{d^2\phi(z, \omega)}{dz^2} \rightarrow 0$ quando $f \gg f_c$.

DISPERSIONE DEL MATERIALE:

La si ha quando la costante dielettrica ^{del mezzo varia dipende} della frequenza; in tal caso, la dipendenza di n_m va a combinarsi con quella di K_0 e della radice:

$$K_z^{(m,n)}(\omega) = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} n_m(\omega) \sqrt{1 - \frac{\omega_{c(m)}}{\omega}} \quad \rightarrow \text{qui la costante di propagazione è una funzione complicata della frequenza.}$$

In un materiale vetroso (i.e. in una fibra ottica), il minimo della dipendenza di n_m da ω si ha per $\lambda \approx 1,3 \mu\text{m}$.

DISPERSIONE INTERMODALE:

Poiché onde relative a modi diversi si propagano con velocità diverse, la dispersione intermodale si presenta quando si propagano onde relative a più di un modo.

Per prevederla, basta mettersi in una frequenza tale che l'unico modo che si propaga è $(m, n) = (0, 0)$ (o $m=0$ nel caso delle lame dielettriche), ovvero in una frequenza f_0 tale che: $f_0 = \frac{c_0}{\pi a n_m} < f_0 < f_c^{(0,0)} = f_c^{(0,1)} = \frac{2c_0}{\pi a n_m}$

Fissata f_0 , bisogna poi determinare di conseguenza l'ampiezza di elo l'indice di rifrazione massimo n_m .

Tuttavia, c'è un problema: i vincoli tecnologici attuali impongono $a \approx 30 \mu\text{m}$, $n_m \approx 1,5$ e dunque conforzano a $f_c^{(0,0)} \approx 2 \text{ THz}$ con $2 \text{ THz} < f_0 < 4 \text{ THz}$

A queste frequenze (che corrispondono al lontano infrarosso, con $75 \mu\text{m} < \lambda < 150 \mu\text{m}$), le dissipazioni sono estremamente elevate.



Dal grafico si evince che le lunghezze d'onda utilizzabili sono tali che $1,2 \mu\text{m} < \lambda_0 < 1,7 \mu\text{m}$.

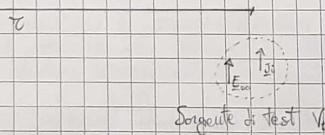
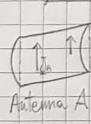
In tal modo, però, si propagano decine di modi, causando dispersione intermodale.

Per aggirare questo problema, si utilizzano le FIBRE MONOMODALI, che sono strutture calessiali con profilo discontinuo di indice di rifrazione (STEP INDEX): infatti, il cilindro interno (CORE) ha indice di rifrazione leggermente maggiore del mantello (CLADDER).

Qui la frequenza di taglio del modo dominante supera i 100 THz , in modo tale che si propaghi un modo solo con bassa attenuazione.

01/05/2021

Direttività di un'antenna in funzione dell'integrale di reazione:



Se la sorgente elettrica di test (di momento M) è a grande distanza da A e è orientata secondo E_{∞} , la reazione di A su tale sorgente sarà pari a:

$$I_{EA} = M E_{\infty}$$

Orientando la conica della sorgente di test lungo la ~~sovrapposizione~~ direzione \hat{t}_0 , si ha che:

$$E_{\infty} = \frac{I_{TA}}{M} \hat{t}_0$$

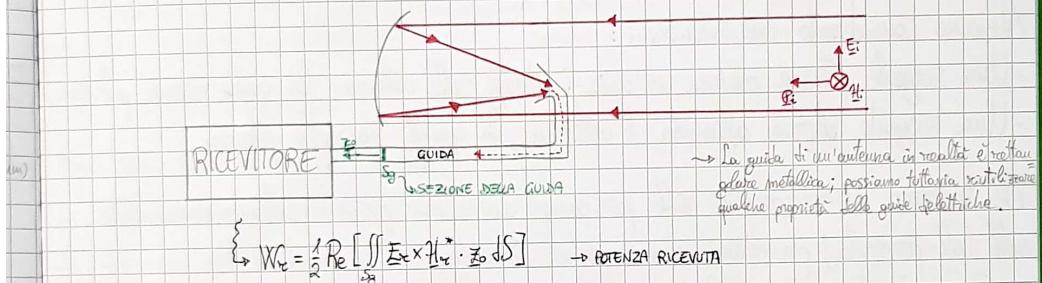
DIAGRAMMA DI RADIAZIONE
IN POTENZA DELL'ANTENNA:

$$P(\theta, \phi) = \pi c^2 \frac{1}{2} \frac{|E_{\infty}|^2}{\eta_0} = \frac{\pi c^2}{2 \eta_0} \frac{|I_{TA}|^2}{M^2}$$

FUNZIONE DI DIRETTIVITÀ
DELL'ANTENNA:

$$D(\theta, \phi) = \frac{2\pi c^2 |I_{TA}|^2}{\eta_0 M^2}$$

Potenza ricevuta in funzione dell'integrale di reazione:



Per una linea priva di dissipazioni, la potenza ricevuta è pari a:

$$W_r = \int_S \frac{1}{2} E_{\text{ext}} \times H_{\text{rec}}^* \cdot \hat{z}_0 dS$$

dove E_{ext} , H_{rec} sono i componenti trasversi dei campi nella linea quando sull'antenna incide un'onda piana uniforme.

$$H_{\text{rec}} = \hat{z}_0 \times \frac{E_{\text{ext}}}{\eta_2}$$

Posto $E_{\text{ext}}(\xi, \varsigma) = V_r e_r(\xi, \varsigma)$

$$H_{\text{rec}}(\xi, \varsigma) = I_r h_r(\xi, \varsigma) = \frac{V_r}{\eta_2} \hat{z}_0 \times e_r(\xi, \varsigma),$$

} NB: e_r , h_r non sono necessariamente versati!

è sempre possibile conglobare in V_r , I_r le costanti, in modo da avere:

$$\int_S e_r(\xi, \varsigma) \cdot e_r^*(\xi, \varsigma) dS = 1$$

$$\Rightarrow W_r = \frac{1}{2} V_r I_r^* \int_S [e_r \times (\hat{z}_0 \times e_r)] \cdot \hat{z}_0 dS = \frac{1}{2} \frac{|V_r|^2}{\eta_2} \Rightarrow |V_r|^2 = 2 \eta_2 W_r$$

Lo stesso identico sistema (= la stessa identica antenna) può essere usato in trasmissione, sostituendo un trasmettitore al ricevitore.

Per la trasmissione possiamo dunque considerare lo schema di prima, tenendo conto che stavolta la direzione di propagazione (e quindi del trasporto di potenza, che avevamo indicato con le frecce rosse) è in senso opposto. Di conseguenza, la terna trivettuale della destra sarà fatta così:



E_T , H_T sono legati alla potenza W_T erogata dal trasmettitore in questo modo:

$$W_T = \iint_{S_T} \frac{1}{2} E_T \times H_T^* \cdot (-z_0) dS = \frac{1}{2} \frac{|V_T|^2}{\eta_z} \implies |V_T|^2 = 2\eta_z W_T$$

Abbiamo considerato due situazioni:

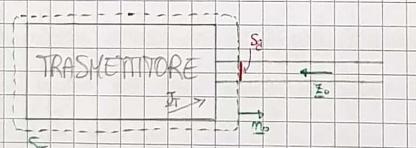
- Una sorgente esterna profila un'onda incidente sull'antenna, la quale riceve potenza.
- Una sorgente interna alimenta l'antenna, la quale trasmette potenza.

Il teorema di reciprocità vale per campi anche non presenti contemporaneamente.

All tal proposito, prendiamo una superficie S_T che:

→ Racchiude le sorgenti del trasmettitore ma esclude la sorgente esterna.

→ Aderisce all'inducrio del trasmettitore, in modo tale da attraversare la linea di trasmissione che collega il trasmettitore stesso all'antenna.



$$\begin{aligned} I_{At} &= \iint_{S_T} (E_T \times H_i - E_i \times H_T) \cdot n_o dS = \iint_{S_T} (E_T \times H_i - E_i \times H_T) \cdot (-z_0) dS = \\ &= \iint_{S_T} \left[E_{Or} \cdot \left(-\frac{E_{Or}}{\eta_z} \right) - E_{Or} \cdot \frac{E_{Or}}{\eta_z} \right] dS = -2 \frac{V_T V_r}{\eta_z} \iint_{S_T} e_T \cdot e_r dS = -2 \frac{V_T V_r}{\eta_z} \end{aligned}$$

Potenza $V_T V_r / \eta_z$ in uscita
che $\iint_{S_T} e_T \cdot e_r dS = 1$

LEGAME TRA CAMPO RICEVUTO E QUELLO VIRTUALMENTE TRASMESSO:

$$V_r = -\frac{\eta_z I_{At}}{2 V_T}$$

$$\implies W_r = \frac{1}{2} \frac{\eta_z^2 |I_{At}|^2}{\eta_z \cdot 4 |V_T|^2} = \frac{|I_{At}|^2}{16 W_T}$$

"VIRTUALMENTE" RICEVONO I CAMPI RICAVATO E TRA
ESSO NON SONO PRESENTI CONTEMPORANEAMENTE
E NON STABILISCONO CHE C'È UN'ANTENNA CHE
RICEVENDO

→ Stesso legame tra le caratteristiche radiative e quelle carattistiche dell'antenna.

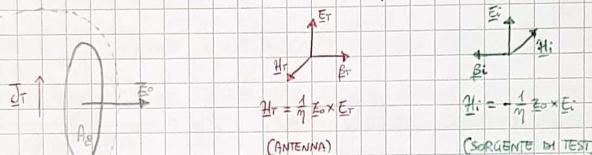
Le proprietà fisiche dell'antenna (dimensioni, forma, struttura,...) sono implicitamente e completamente contenute nel campo trasverso virtuale.

→ OVVERO IN $|I_{At}|^2$, W_T

02/05/2021

Effetto della polarizzazione:

Supponiamo che sulla nostra antenna incida un'onda piana uniforme erogata da una sorgente di test e che l'antenna stessa sia in grado di trasmettere un campo virtuale con le caratteristiche di un'onda piana uniforme.



Prendiamo una superficie S_A che:

→ Escluda la sorgente di test esterna.

→ Aderisca all'antenna e si appoggi alla sua bocca esterna A_B : questo ha come conseguenza che il campo virtuale trasmesso è non nullo solo su A_B .

Applichiamo il teorema di reciprocità sotto queste ipotesi:

$$\begin{aligned} I_{\text{at}} &= \oint_{S_A} (E_T \times H_i - E_i \times H_T) \cdot dS = \iint_{A_B} (E_T \times H_i - E_i \times H_T) \cdot Z_0 dS = \\ &= \iint_{A_B} (E_T \cdot H_i \times Z_0 - E_i \cdot H_T \times Z_0) dS = \iint_{A_B} [E_{T0} \cdot (-\frac{1}{m_0 Z_0} E_{i0}) \times Z_0 - E_{i0} \cdot (\frac{1}{m_0 Z_0} E_{T0}) \times Z_0] dS = \\ &= -\frac{2}{m_0} \iint_{A_B} E_{T0} \cdot E_{i0} dS \quad \xrightarrow{\substack{\text{Sostituisco questo risultato all'espressione di } W_{\text{rc}} \text{ calcolata} \\ \text{precedentemente}}} \\ &\Rightarrow W_{\text{rc}} = \frac{\left| \iint_{A_B} E_{T0} \cdot E_{i0} dS \right|^2}{4 m_0^2 W_T} \end{aligned}$$

- Se la polarizzazione del campo incidente è ADATTATA a (è la stessa di) quella del campo virtuale trasmesso, il prodotto scalare $E_{T0} \cdot E_{i0}$ è massimo e si ha la massima potenza ricevuta.

- Se la polarizzazione del campo incidente è INCROCIATA a quella del campo virtuale trasmesso, il prodotto scalare $E_{T0} \cdot E_{i0}$ è nullo così come la potenza ricevuta.

ESEMPI DI POLARIZZAZIONI INCROCIATE

→ Polarizzazione circolare destra & polarizzazione circolare sinistra

→ Polarizzazione lineare orizzontale & polarizzazione lineare verticale (1)

Grazie a quest'ultima proprietà, è possibile far incidere contemporaneamente su un'unica antenna due onde con polarizzazioni ortogonali, ciascuna relativa a un canale (a un reticollegamento).

$\Rightarrow A_e(t)$
A parità
frequenza

$$\text{AREA EQUIVALENTE DI UN'ANTENNA: } A_{eq}(\theta, \phi) = \frac{W_{eq}(\theta, \phi)}{\rho_i} = \frac{|I_{eq}|^2}{16 W_T \rho_i} =$$

$$= \frac{|\iint_{A_g} E_T \cdot E_i^* dS|^2}{4 \eta_p^2 W_T \rho_i}$$

04/05,

Antenne

Un'ante-

niella è

un'unica

$$\text{Se assumiamo polarizzazione orizzontale} \Rightarrow A_e = \frac{|E_i|^2 \iint_{A_g} E_T dS|^2}{4 \eta_p^2 W_T \rho_i}$$

$$\text{POTENZA VIRTUALE TRASMESSA: } W_T = \frac{1}{2} \iint_{A_g} E_T \times H_T^* \cdot z_0 dS = \frac{1}{2 \eta_p} \iint_{A_g} E_T \cdot E_T^* dS$$

Posto $E_T := E_T E_r(\xi, \varsigma)$ elettr. dove $E_r(\xi, \varsigma)$ è la distribuzione del campo virtuale trasmesso sulla barra esterna

$$\Rightarrow A_e = \frac{|E_i|^2 |E_T|^2 \iint_{A_g} |E_r(\xi, \varsigma)|^2 d\xi d\varsigma}{4 \eta_p^2 \frac{1}{2 \eta_p} \iint_{A_g} |E_r(\xi, \varsigma)|^2 d\xi d\varsigma \frac{|E_i|^2}{2 \eta_p}} = \frac{\iint_{A_g} |E_r(\xi, \varsigma)|^2 d\xi d\varsigma}{\iint_{A_g} |E_r(\xi, \varsigma)|^2 d\xi d\varsigma}$$

$$\text{Per la disegualanza di Schwarz: } \left| \iint_{A_g} |E_r(\xi, \varsigma)|^2 d\xi d\varsigma \right|^2 \leq \iint_{A_g} |E_r(\xi, \varsigma)|^2 d\xi d\varsigma \Rightarrow A_e \leq A_g$$

L'uguaglianza tra A_e e A_g vale se $E_r(\xi, \varsigma) = \text{costante}$.

In generale, l'area equivalente di un'antenna ad apertura è una frazione dell'area geometrica: $A_e = \eta_p A_g$, $\eta_p \leq 1$ con η_p = RENDIMENTO DI APERTURA

ED SE SI RIUSCISSE A REALIZZARE UN CAMPO TRASMESSO UNIFORME, ALLORA $A_e = A_g$ (MA NELLA PRATICA È IMPOSSIBILE)

LEGAME TRA AREA EQUIVALENTE E DIRETTIVITÀ:

Consideriamo un'onda piana uniforme incidente su un'antenna A prodotta da una sorgente di test di momento M a distanza "grande". Possiamo stabilire un legame tra la direttività funzione di I_{ta} e l'area equivalente funzione di I_{at} : in particolare, se i mezzi sono reciproci: $\Rightarrow I_{ta} = I_{at}$.

$$\text{Sotto questa ipotesi, sapendo che } D(\theta, \phi) = \frac{2\pi r^2 |I_{ta}|^2}{\eta_p W_T M^2} \Rightarrow |I_{ta}|^2 = \frac{\eta_p W_T M^2 D}{2\pi r^2}$$

$$\Rightarrow A_e = \frac{|I_{at}|^2}{16 W_T \rho_i} = \frac{\eta_p W_T M^2 D}{2\pi r^2 \cdot 16 W_T \rho_i}$$

$$\text{dove } \rho_i = \frac{1}{2 \eta_p} |E_i|^2 = \frac{\eta_p M^2}{8 \pi^2 r^2}$$

VERA ESPRESSIONE LI SI GRANDE DIST. NELL'IRRADIATORE ELETROM.

A grande

$= j \beta e$

Per a <<

ezione,

ANTENNA

È tale c

parte,

$$\Rightarrow A_e(\theta, \phi) = \frac{\lambda^2}{4\pi} D(\theta, \phi)$$

PROPORTIONALITÀ DIRETTA TRA
AREA EQUIVALENTE E DIRETTIVITÀ

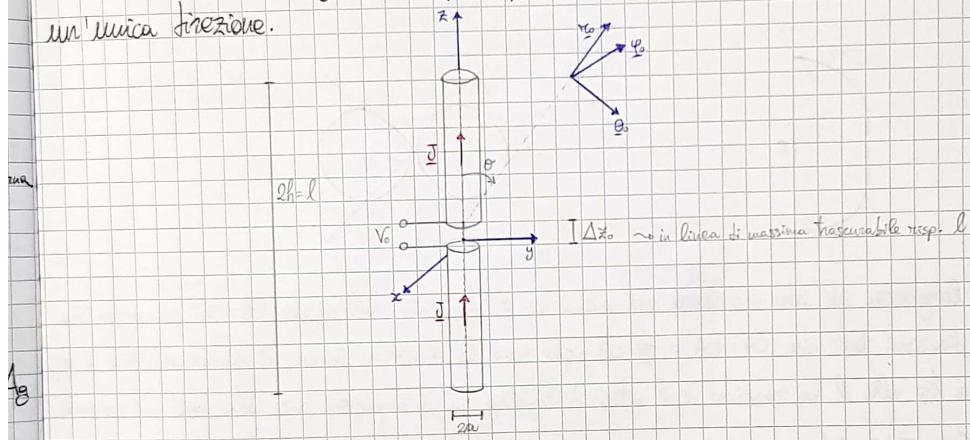
anche essa stabilisce un legame tra la
direttività in funzione di come esiste
che in particolare della antenna.

A parità di dimensioni della bocca esterna, la direttività cresce con il quadrato della
frequenza.

04/05/2021

Antenne lineari:

Un'antenna lineare è un tronco di cilindro metallico sezionato al centro, dove si
inietta la corrente di sorgente, la quale può essere pensata come distribuita lungo
un'unica direzione.



A grande distanza: $H_{\infty} = -j\beta \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} \times \int_{-h}^h \int_S J(z') e^{j\beta z' \cdot \hat{r}} dS dz' =$
 $= j\beta \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} \sin \theta \phi_0 \int_{-h}^h \int_S J(z') e^{j\beta z' \cdot \hat{r}} dS dz'$

Per $a \ll \lambda$, come è in pratica, i termini $J(z')$, $e^{j\beta z' \cdot \hat{r}}$ sono pressoché costanti sulla
sezione, per cui: $H_{\infty} = j\beta \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} \sin \theta \phi_0 \int_{-h}^h I(z') e^{j\beta z' \cdot \hat{r}} dz'$

dove $I(z') = \pi a^2 J(z')$

$\hookrightarrow I(z')$ dipende da $\frac{r}{\lambda}$ e da $\frac{a}{\lambda}$

ANTENNA CORTA:

È tale che $h \ll \lambda$; di conseguenza, I è approssimabilmente costante con z' e, d'altra
parte,

$$e^{j\beta z' \cdot \hat{r}} = e^{j2\pi \frac{z'}{\lambda} \cdot \hat{r}} \approx 1$$

$$\Rightarrow H_{\infty} = j \beta \frac{e^{-j\theta}}{4\pi c} \sin \theta \Phi M ; \quad E_{\infty} = \eta H_{\infty} \Theta$$

dove $M = 2hI$ è il momento di dipolo.

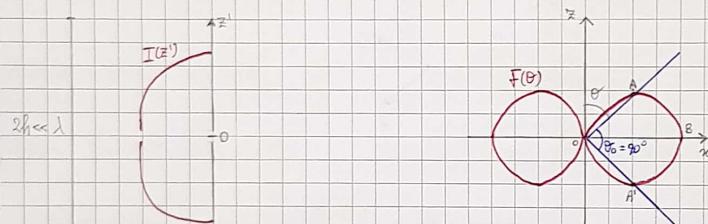
$$\Rightarrow \text{DIAGRAMMA DI RADIAZIONE} \quad F(\theta, \phi) = j \frac{\omega \mu M}{4\pi} \sin \theta \Theta = F_0(\theta) \Theta$$

→ Ha solo una componente lungo Θ .

→ Non dipende da ϕ (l'antenna è omidirezionale).

→ Dipende da θ secondo $\sin \theta$.

→ La larghezza di lobo è $\Theta_0 = 90^\circ$.



La larghezza del lobo d'antenna nel piano $z-z'$ è individuata dall'angolo $\Theta_0 = 90^\circ$ compreso tra le direzioni tali che $\overline{OA} = \overline{OA'} = \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{OB}$, che sono le direzioni in cui il campo elettrico è pari a $\frac{1}{\sqrt{2}}$ volte il suo massimo, e il vettore di Poynting ha un'ampiezza pari alla metà del suo max.

06/05/2021

Se invece la lunghezza dell'antenna non è trascurabile rispetto a λ , la corrente che scorre in essa non è più costante rispetto a z' , bensì va determinata risolvendo le quazioni di Maxwell e imponendo le condizioni al contorno sulla superficie cilindrica dell'antenna. Si ottiene così: $I(z') = I_0 \sin[\beta(h - |z'|)]$

ANTENNA A MEZZ'ONDA:

È tale che $2h = \frac{\lambda}{2}$ ($\Rightarrow h = \frac{\lambda}{4}$) ; di conseguenza, l'espressione della corrente diventa:

$$I(z') = I_0 \sin\left[\beta\left(\frac{\lambda}{4} - |z'|\right)\right] = I_0 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta|z'|\right) = I_0 \cos(\beta|z'|)$$

$$\Rightarrow \int_{-h}^h I(z') e^{j\beta z' \cdot \hat{z}} dz' = \int_{-h}^h \sin\left[\beta(h - |z'|)\right] e^{j\beta z' \cos \theta} dz' =$$

$$= \int_{-h}^h \frac{e^{j\beta z'(\hat{z} + \cos \theta)}}{2} dz' + \int_{-h}^h \frac{e^{j\beta z'(\cos \theta - \hat{z})}}{2} dz' =$$

$$= \frac{2j \sin[\beta h(1+\cos\theta)]}{2j\beta(1+\cos\theta)} + \frac{2j \sin[\beta h(\cos\theta-1)]}{2j\beta(\cos\theta-1)} = \frac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\beta(1+\cos\theta)} - \frac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\beta(\cos\theta-1)} =$$

$$= -\frac{2\cos(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\beta(\cos^2\theta-1)} = \frac{2}{\beta} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\sin^2\theta}$$

$$\Rightarrow H_{\infty} = j\beta \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} I_0 \sin\theta \frac{2}{\beta} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\sin^2\theta} \phi_0 = 2jI_0 \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\sin\theta} \phi_0$$

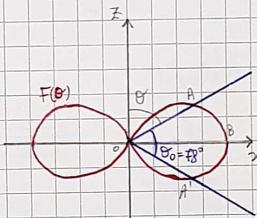
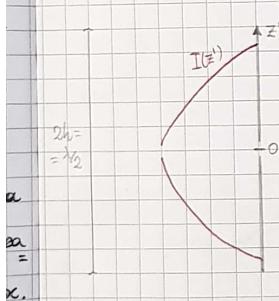
$$E_{\infty} = \eta H_{\infty} \phi_0$$

$$\Rightarrow \text{DIAGRAMMA DI RADIAZIONE DELL'ANTENNA A MEZZ'ONDA: } F(\theta, \phi) = \frac{j\eta I_0}{2\pi} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\sin\theta} \phi_0 = F_\theta(\theta) \phi_0$$

→ Ha solo una componente lungo ϕ_0 .

→ Non dipende da ϕ (l'antenna è omni direzionale).

→ La larghezza di lobo è $\Theta_0 = 78^\circ$.



ANTENNA A Onda Intera:

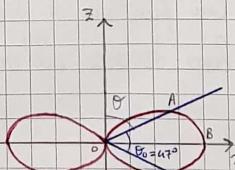
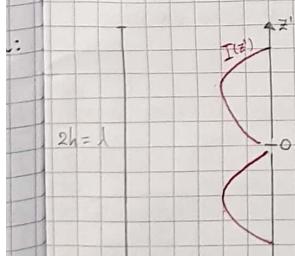
È tale che $2h = \lambda$; di conseguenza, l'espressione della corrente diventa:

$$I(z') = I_0 \sin\left[\beta\left(\frac{1}{2} - |z'|\right)\right] = I_0 \sin(\beta|z'|)$$

FACCENDO CON PRIMA

$$\Rightarrow H_{\infty} = 2jI_0 \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} \frac{\cos(\pi\cos\theta) + 1}{\sin\theta} \phi_0 ; \quad E_{\infty} = \eta H_{\infty} \phi_0$$

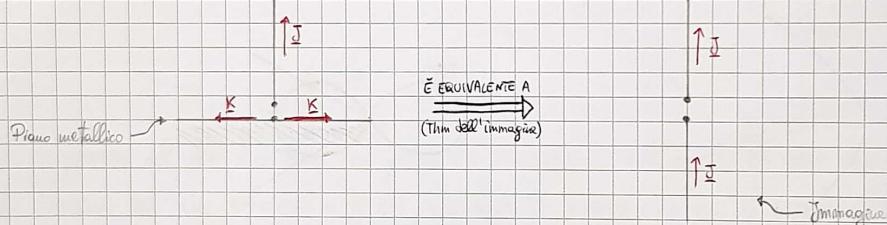
$$\Rightarrow \text{DIAGRAMMA DI RADIAZIONE DELL'ANTENNA A ONDA INTERA: } F(\theta, \phi) = \frac{j\eta I_0}{2\pi} \frac{\cos(\pi\cos\theta) + 1}{\sin\theta} \phi_0 = F_\theta(\theta) \phi_0$$



La potenza irradiata si concentra nell'intorno del piano $\Theta = \frac{\pi}{2}$ (piano xy) all'angolo di misurazione di $\frac{h_A}{\lambda}$.

Realizzazione pratica di antenne a filo:

La costruzione di un'antenna a filo verticale secondo lo schema mostrato precedente presenta difficoltà realizzative dovute alla necessità sia di mantenere elettricamente isolate le due metà dell'antenna, sia di alimentare la struttura nel punto centrale. Questi inconvenienti vengono eliminati se l'antenna è realizzata mediante un unico elemento posto verticalmente su un piano metallico. In questo caso, le correnti che scorrono sul piano creano l'immagine della corrente che scorre nell'elemento e costituiscono l'antenna nella sua globalità.



Caratteristiche dei diagrammi di radiazione delle antenne lineari:

- Non esiste un diagramma di radiazione sferico, per cui la cosiddetta "antenna isotropica" è fisicamente irrealizzabile.
- I diagrammi di radiazione sono indipendenti dall'angolo azimutale ϕ , per cui le antenne lineari sono adatte per la radiotiffusione e per le comunicazioni tra punti mobili.
- La densità di potenza massima si ha nelle direzioni ortogonali all'antenna (piano $\Theta = \frac{\pi}{2}$), in cui funzione di direttività e area equivalente sono massime.
- La larghezza del lobo decresce all'aumentare di $\frac{h_A}{\lambda}$.

Antenne ad apertura:



Le antenne ad apertura sono utilizzate per le frequenze più elevate (tipicamente dalle microonde in su) e sono ad alta direttività.

08/05/2021



→ PER CALCOLARCI I CAMPI, SFRUTTAMO IL TEOREMA DI EQUIVALENZA IN MODO DA:

- SCEGLIERE UNA SUPERFICIE DI INTEGRAZIONE CHE ADERISCA ALLA GUIDA E ALLA BOCCA DELL'ANTENNA: IN TAL MODO, L'UNICA PORZIONE IN CUI LA COMPONENTE TANGENZIALE DEI CAMPI NON DÀ FLUSSO NULLO È LA BOCCA A_g , PER CUI IL DOMINIO DI INTEGRAZIONE SI RIDUCE AD A_g (CHE È SEMPRE).
- DEFINIRE LA COMPONENTE TANGENZIALE DEL CAMPO ELETTRICO COME UNA CORRENTE MAGNETICA EQUIVALL. J_S .
- DEFINIRE LA COMPONENTE TANGENZIALE DEL CAMPO MAGNETICO COME UNA CORRENTE ELETTRICA EQUIVALL. J_{ms} .

$$E_{eo}(\xi) = j\beta \frac{e^{-j\beta\xi}}{\sqrt{\epsilon_0}} Z_0 \times \iint_{A_g} J_{ms}(\xi') e^{j\beta|\xi-\xi'|} dS + j\omega \mu \frac{e^{-j\beta\xi}}{\sqrt{\epsilon_0}c} Z_0 \times \left[Z_0 \times \iint_{A_g} J_S(\xi') e^{j\beta|\xi-\xi'|} dS \right]$$

dove le correnti superficiali equivalenti sono date da:

$$J_{ms}(x',y') = -Z_0 \times E(x',y')$$

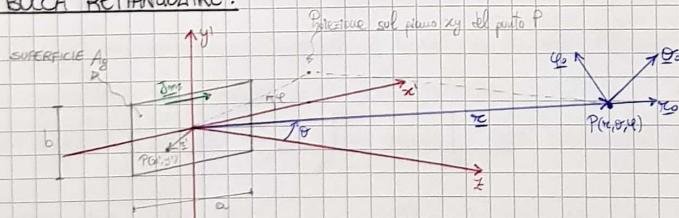
CAMPI PRESENTI SULLA BOCCA (SUL PIANO XY), ORTOGONALE A Z_0

A parte il fattore angolare dei prodotti vettoriali, il campo a grande distanza dipende da $\iint_{A_g} J \cdot e^{j\beta|\xi-\xi'|} dS$ e quindi da:

→ Forma e dimensioni di A_g .

→ Distribuzione in polarizzazione, ampiezza e fase del campo sulla bocca.

ANTENNA A BOCCA RETTANGOLARE:



Per il momento, consideriamo il solo campo elettrico e, quindi, la sola corrente magnetica.

ALLA PARTE DI CAMPO COSÌ INTERMINATA, VA SOMMATA LA PARTE DONATA ALLA CORRENTE ELETTRICA, SECONDO IL TEOREMA DI EQUIVALENZA.

Il campo elettrico è orientato lungo l'asse y' (\Rightarrow la corrente magnetica è orientata lungo l'asse x') e la sua ampiezza ha un andamento sinusoidale (in par-

teolare, è massima per $x' = 0$ ed è nulla per $x' = \pm \frac{a}{2}$).

Possiamo dunque scrivere $J_{ms} = J_{ms} e_0$.

$$\Rightarrow E_{\text{oom}}(\Sigma) = j\beta \frac{e^{-jpx}}{4\pi c} e_0 \times \Sigma \iint_{\text{A}_g} J_{ms}(x') e^{j\beta \cdot x'} ds$$

dove $\beta = \beta \Sigma$ è il vettore di propagazione locale.

$$\text{Posto } e_0 := \Sigma \times \Sigma \Rightarrow E_{\text{oom}}(\Sigma) = j\beta \frac{e^{-jpx}}{4\pi c} e_0 \iint_{\text{A}_g} J_{ms}(x', y') e^{j(\beta_x x' + \beta_y y')} dx' dy'$$

$$\Rightarrow E_{\text{oom}}(\Sigma) = j\beta \frac{e^{-jpx}}{4\pi c} e_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} J_{ms}^T(x', y') e^{j(\beta_x x' + \beta_y y')} dx' dy' \quad (*)$$

dove $J_{ms}^T(x', y')$ è la distribuzione di corrente troncata:

$$\begin{cases} J_{ms}^T(x', y') \neq 0 & \text{per } -\frac{a}{2} < x' < \frac{a}{2}; \quad -\frac{b}{2} < y' < \frac{b}{2} \\ J_{ms}^T(x', y') = 0 & \text{per } x' < -\frac{a}{2}, \quad x' > \frac{a}{2}; \quad y' < -\frac{b}{2}, \quad y' > \frac{b}{2} \end{cases}$$

In altre parole, J_{ms}^T è definita come il prodotto fra J_{ms} e la FUNZIONE RETTANGOLARE BIIDIMENSIONALE:

$$J_{ms}^T(x', y') = J_{ms}(x', y') \square_{\frac{a}{2}, \frac{b}{2}}(x', y') = J_{ms}(x', y') \prod_{\frac{a}{2}}(x') \prod_{\frac{b}{2}}(y')$$

* Il campo a grande distanza è proporzionale all'antitrasformata bidimensionale di Fourier delle correnti sulla bocca rettangolare dell'antenna.

• x', β_x SONO VARIABILI CONIUGATE

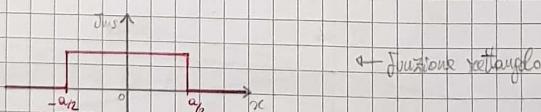
• y', β_y SONO VARIABILI CONIUGATE

• $\beta_x = B \sin \theta \cos \phi$ • $\beta_y = B \sin \theta \sin \phi$

Ora, per semplicità, assumiamo la corrente equivalente J_{ms} costante (è un simosidole).

La questo ha conseguenza il fatto che otterremo un rendimento di apertura $\eta_A = 1$ e quindi una rea equivalente pari a quella geometrica.

Di conseguenza, è chiaro che nella realtà J_{ms} non possa essere effettivamente costante.



La nostra corrente è dunque una funzione separabile nel prodotto delle funzioni rettangolo, per cui:

$$\mathcal{F}[J_{ms} \square_{\frac{a}{2}, \frac{b}{2}}(x', y')] = \mathcal{F}[J_{ms} \prod_{\frac{a}{2}}(x') \prod_{\frac{b}{2}}(y')] = J_{ms} a \operatorname{sinc}(t_x) b \operatorname{sinc}(t_y)$$

$$\text{tut } t_x = \frac{a}{2} \beta \sin \theta \cos \phi$$

$$t_y = \frac{b}{2} \beta \sin \theta \sin \phi$$

⇒ Il campo a grande distanza prodotto dalla corrente magnetica equivalente è:

$$E_{\text{ext}}(\theta) = j\beta \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi c} J_{\text{mo}}(\phi_0 \cos\theta \cos\phi + \phi_0 \sin\phi) \left[a \frac{\sin(\frac{1}{2}\beta \sin\theta \cos\phi)}{\frac{1}{2}\beta \sin\theta \cos\phi} b \frac{\sin(\frac{1}{2}\beta \sin\theta \sin\phi)}{\frac{1}{2}\beta \sin\theta \sin\phi} \right]$$

Per studiare l'aumento del campo a grande distanza e del diagramma di radiazione, conviene farlo su delle sezioni nello spazio e, in particolare, nei due piani principali (contro nel piano orizzontale xz e nel piano verticale yz).

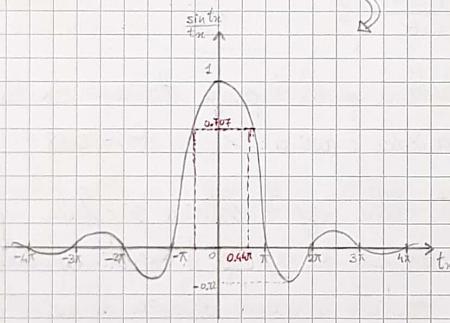
PIANO xz $\phi=0 \vee \phi=\pi \Rightarrow \phi_0 = y_0$ per $\phi=0$; $\phi_0 = -y_0$ per $\phi=\pi$ SULL'ASSE Z ANCHE E' LARGO LUNGO Y

$$\Rightarrow F(\theta) = -\frac{j}{2} \frac{ab}{\lambda} J_{\text{mo}} \frac{\sin(\frac{\pi a}{\lambda} \sin\theta)}{\frac{\pi a}{\lambda} \sin\theta} \cos\theta \phi_0$$

Nel piano orizzontale xz la polarizzazione di E è verticale (parallelo a quello "sorgente" sul piano di bacca).

Inoltre, l'aumento con θ è dato da una "sin(θ)" moltiplicata per un cosecno.

Dunque:



- 2). → Si ha il massimo assoluto nella direzione dell'asse (per $t_x=0$).
- Si ha una serie di zeri, alternati a massimi relativi decrescenti con θ .
- La regione angolare compresa tra $\theta = -\pi$ e $\theta = \pi$ è il LOBO PRINCIPALE; al suo interno è concentrata la maggior parte della potenza.
- Le regioni angolari comprese tra le altre coppie di zeri consecutivi sono i LOBI SECONDARI.
- LARGHEZZA DEL LOBO PRINCIPALE = doppio dell'angolo al quale il diagramma di radiazione in $|E|$ si riduce a 0,50 (e, quindi, il diagramma di radiazione in potenza si riduce a 0,5).

Le antenne ad apertura sono impiegate per generare lobi di radiazione stretti (in modo da avere un'altra diretività) $\Rightarrow a \gg \lambda$ TIPICAMENTE $a > 10\lambda$

Nella regione angolare del lobo principale e dei primi lobi secondari (= REGIONE PARASSIALE):

- $\cos \theta \approx 1$ (in particolare, $\cos \theta_0 \approx 0,996$ per $a = 10\lambda$)

- $\sin \theta \approx \theta$

\Rightarrow Nei dintorni dell'asse è sufficiente considerare la sola $\sin(\theta)$.

Dato che $\sin(t_x) = 0,707$ per $t = 0,44\pi$, allora θ_0 è tale che:

$$\frac{\pi a}{\lambda} \sin \frac{\theta_0}{2} = 0,44\pi \Rightarrow \theta_0 = 2 \arcsin(0,44 \frac{\lambda}{a}) \approx 0,88 \frac{\lambda}{a} \text{ rad}$$

QUI SI VEDA SENE CHE, PER MINIMIZZARE θ_0 (E QUINDI LA DISSIPATIVITÀ), SIA NECESSARIO AUMENTARE LA LARGHEZZA a DELL'ANTENNA (RISPELTO ALLA LUNGHEZZA D'ONDA).

PIANO YZ $\phi = \frac{\pi}{2} \vee \phi = \frac{3}{2}\pi$

$$\Rightarrow F(\theta) = \frac{j}{2} \frac{ab}{\lambda} J_{ms} \frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin\theta\right)}{\frac{\pi b}{\lambda} \sin\theta} \quad \theta_0 \quad \rightarrow \text{GIACE SUL PIANO VERTICALE XY}$$

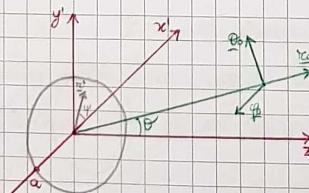
(E DI CONSEGUENZA ANCHE IL CAMPO E.)

Faccendo considerazioni analoghe a quelle di prima, ottieniamo che la larghezza del lobo principale Θ_r nel piano verticale è pari a: $\Theta_r = 0,88 \frac{\lambda}{b} \text{ rad}$

A questo punto, il contributo della sorgente elettrica si calcola applicando la dualità. Alla fine ottieniamo che i contributi dei due tipi di correnti equivalenti sono uguali.

Di conseguenza, il campo radiato a grande distanza da un'antenna ad apertura è il doppio di quello calcolato con una sola delle due correnti equivalenti.

ANTENNA A BOCCA CIRCOLARE:



La corrente equivalente sarà nulla ovunque tranne che all'interno della circonference di raggio a , per cui la distribuzione di corrente tangenziale J_{ms}^T sarà tale che:

$$J_{ms}^T(x', y') \neq 0 \quad \text{per } r' < a$$

$$J_{ms}^T(x', y') = 0 \quad \text{per } r' > a$$

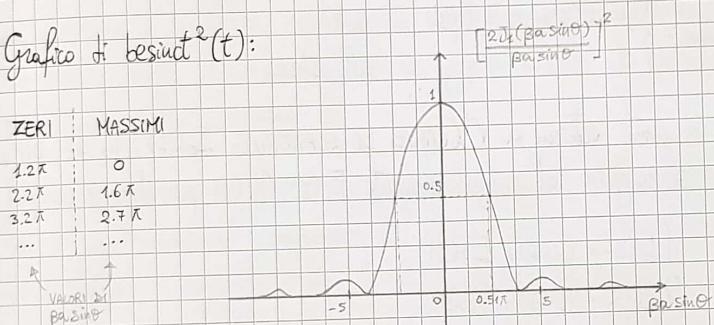
$$\text{Se } J_{ms} \text{ è diretta secondo } x' \Rightarrow E_{\text{com}}(x) = j\beta \frac{e^{-j\beta x}}{4\pi c} r_0 \times x_0 \int_0^a \int_0^{2\pi} J_{ms}(x', \psi) e^{j\beta x'} \frac{r_0}{c} d\tau' d\psi =$$

$$j2\pi \frac{e^{-j\beta x}}{4\pi c} J_{ms} r_0 \times x_0 \frac{\pi a^2}{\lambda} \frac{2J_1(\beta a \sin \theta)}{\beta a \sin \theta} = \text{besiut}(\beta a \sin \theta)$$

dove $J_1(\beta a \sin \theta)$ è la FUNZIONE DI BESSEL DEL PRIMO ORDINE.

$$\hookrightarrow \text{FUNZIONE DI BESSEL DI ORDINE } \alpha: J_\alpha(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n! I(\alpha+n+1)}$$

Grafico di $\text{besiut}^2(t)$:



La larghezza del lobo principale (a metà potenza) è tale che:

$$\beta a \sin \frac{\theta_0}{2} \approx 0.51 \pi \Rightarrow \theta_0 \approx 0.51 \frac{\lambda}{a}$$

\Rightarrow Le antenne grandi rispetto a λ sono molto direttive.

11/05/2021

Scattering elettromagnetico:

Abbiamo già studiato che, quando un'onda elettromagnetica incide sul piano di separazione tra due mezzi, si genera un'onda riflessa. Noi abbiamo esaminato il caso in cui la superficie di separazione sia piana e infinita; tuttavia, essa nella realtà non è perfettamente piana e ha dimensioni finite (\Rightarrow è un oggetto).

L'oggetto occupa un volume V' (con $E(x') = \epsilon_0 [E'(x') + jE''(x')]$,

$\mu(x') = \mu_0 [\mu'(x') + j\mu''(x')]$ in V') ed è immerso in uno spazio omogeneo che possiamo assimilare al vuoto.

Consideriamo le prime due equazioni di Maxwell omogenee:

$$\begin{cases} \nabla \times E = -j\omega \mu_0 H \\ \nabla \times H = j\omega \epsilon_0 E \end{cases}$$

Dato che $\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_r - \epsilon_i$ \Rightarrow la seconda equazione diventa:

$$\nabla \times \underline{H} = j\omega \epsilon \underline{E} + j\omega [\epsilon(\underline{r}') - \epsilon] \underline{E}$$

TERMINI PRESENTE A PRENDERE IN CONSIDERAZIONE DELL'OGGETTO

$j\omega [\epsilon(\underline{r}') - \epsilon]$ \underline{E} equivale a una corrente di sorgente nel volume occupato dall'oggetto.

$$\int \nabla \times \underline{E}(\underline{r}) = -j\omega \mu_0 \underline{H}(\underline{r})$$

$$\int \nabla \times \underline{H}(\underline{r}) = j\omega \epsilon \underline{E}(\underline{r}) + \underline{J}_{eq}(\underline{r})$$

$$\text{dove } \underline{J}_{eq}(\underline{r}') = \begin{cases} j\omega [\epsilon(\underline{r}') - \epsilon] \underline{E}(\underline{r}') & \text{in } V' \\ 0 & \text{all'esterno} \end{cases}$$

Il campo reirradiato in punti esterni a V' (CAMPO DI SCATTERING $\underline{E}_s(\underline{r})$, $\underline{H}_s(\underline{r})$, DIFFUSO DELL'OGGETTO) si sovrappone al campo incidente $\underline{E}_i(\underline{r})$, $\underline{H}_i(\underline{r})$ per dare il campo totale:

$$\underline{E}(\underline{r}) = \underline{E}_i(\underline{r}) + \underline{E}_s(\underline{r})$$

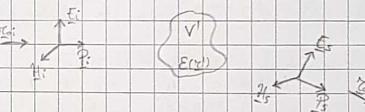
$$\underline{H}(\underline{r}) = \underline{H}_i(\underline{r}) + \underline{H}_s(\underline{r})$$

FUNZIONE DI SCATTERING:

Determiniamo il campo diffuso:

$$\underline{H}_s(\underline{r}) = \nabla \times \underline{A}_s(\underline{r})$$

$$\underline{E}_s(\underline{r}) = \frac{1}{j\omega \epsilon_0} \nabla \times \nabla \times \underline{A}_s(\underline{r})$$



\underline{A}_s è legato alla sorgente tramite la funzione scalare di Green:

$$\underline{A}_s(\underline{r}) = \iiint_V G_0(\underline{r}, \underline{r}') \underline{J}_{eq}(\underline{r}') dV' = j\omega \epsilon \iiint_V G_0(\underline{r}, \underline{r}') [\epsilon'(\underline{r}') + j\epsilon''(\underline{r}') - 1] \underline{E}(\underline{r}') dV'$$

$$\text{con } G_0(\underline{r}, \underline{r}') = \frac{e^{-jk_0(|\underline{r}-\underline{r}'|)}}{4\pi|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

Campo reirradiato a grande distanza:

$$\underline{H}_{s\infty}(\underline{r}) = \iiint_V \nabla G_0(\underline{R}) \times \underline{J}_{eq}(\underline{r}') dV' \approx -jk_0 \frac{e^{-jk_0 R}}{4\pi R} \iiint_V \underline{\tau}_{os} \times \underline{J}_{eq}(\underline{r}') e^{jk_0 \underline{r}' \cdot \underline{\tau}_{os}} dV'$$

$$\underline{E}_{s\infty}(\underline{r}) \approx j\omega \mu_0 \frac{e^{-jk_0 R}}{4\pi R} \iiint_V \underline{\tau}_{os} \times [\underline{\tau}_{os} \times \underline{J}_{eq}(\underline{r}')] e^{jk_0 \underline{r}' \cdot \underline{\tau}_{os}} dV'$$

La corrente equivalente è espressa in funzione del campo elettrico che l'onda incidente provoca nei vari punti all'interno dell'oggetto.

Se l'onda incidente è piatta e uniforme, con $K_{oi} = k_0 \tau_{oi}$, il campo interno è funzione

di \underline{r}_{oi} e il campo diffuso è funzione di $\underline{r}_{oi}, \underline{r}_{os}$.

A grande distanza: $E_{\text{scat}}(\underline{r}) = \frac{e^{-jkr}}{r} F(\underline{r}_{oi}, \underline{r}_{os})$

$$\Rightarrow F(\underline{r}_{oi}, \underline{r}_{os}) = \frac{\chi_0^2}{4\pi} \iiint \{ E(\underline{r}) - r_{os} [E_{\perp}(\underline{r})] \} [E'(\underline{r}) + jE''(\underline{r}) - 1] e^{jkr_{oi} \cdot \underline{r}_{os}} dV'$$

La funzione di scattering rappresenta ampiezza, fase e polarizzazione del campo lontano diffuso nella direzione \underline{r}_{os} da un oggetto investito da un'onda piana uniforme che si propaga nella direzione \underline{r}_{oi} .

$F(\underline{r}_{oi}, \underline{r}_{os}) = E_{\perp}(\underline{r}) - r_{os} [E_{\perp}(\underline{r}), E(\underline{r})] =: E_{\perp}(\underline{r}) \Rightarrow$ la sorgente dello scattering a grande distanza è proporzionale al componente del campo elettrico interno ortogonale alla direzione di scattering.

Infatti è pari al campo elettrico privato della sua componente lungo la direzione di scattering.
 $E_{\perp}(\underline{r})$ è determinabile analiticamente se il corpo (l'oggetto) ha una forma semplice. Altrimenti, è necessario ricorrere ad approssimazioni analitiche o a metodi numerici.
 QUESTO ARGOMENTO SERVE PER LE APPLICAZIONI DI OSSERVAZIONE DELLA TERRA MEDIANTE SISTEMI RADAR.

13/05/2021

Sezioni Transverse:

Come avevamo visto per le antenne vere e proprie: $|F(\underline{r}_{oi}, \underline{r}_{os})|^2 = 2\eta_p P_s$,
 dove P_s è la densità di potenza diffusa per unità di angolo solido nell'intorno della direzione \underline{r}_{os} (è il diagramma di radiazione in potenza).

P_s dipende da $J_{\text{ey}}(\underline{r})$ e quindi da E_i \Rightarrow possiamo definire la SEZIONE TRASVERSA DI SCATTERING BISTATICO $\sigma(\underline{r}_{oi}, \underline{r}_{os})$ normalizzando P_s alla densità superficiale di potenza incidente:

$$\sigma(\underline{r}_{oi}, \underline{r}_{os}) = 4\pi \frac{P_s(\underline{r}_{oi}, \underline{r}_{os})}{P_i(\underline{r}_{oi})} [\text{m}^2] \quad \rightarrow$$

Caratterizza le proprietà di scattering dell'oggetto indipendentemente dall'ampiezza dell'onda

In molti casi può interessare analizzare lo scattering lungo la stessa direzione dell'onda incidente (e.g. quando trasmettitore e ricevitore sono rappresentati dalla medesima antenna - vedi i radar).

\hookrightarrow QUI ASSUMO $\underline{r}_{os} = -\underline{r}_{oi} \Rightarrow$ DEFINIAMO $\sigma_b(\underline{r}_{oi}) := \sigma(\underline{r}_{oi}, -\underline{r}_{oi})$

$\sigma_s(\zeta_{oi})$ è la SEZIONE TRASVERSA DI SCATTERING MONOSTATICO (o sezione trasversa radar, o anche sezione trasversa di back-scattering).

Se si integra sull'angolo solido la sezione trasversa di scattering bistatico, si ha la potenza globalmente diffusa (in tutte le direzioni) per densità di potenza incidente unitaria:

$$\sigma_s(\zeta_{oi}) := \frac{1}{4\pi} \iint_{\text{unit}} \sigma_s(\zeta_{oi}, \zeta_{os}) d\Omega = \frac{W_s}{P_i} \quad \rightarrow \text{Osserviamo che il campo viene diffuso in TUTTE le direzioni e non solo lungo quella di osservazione}$$

↳ Questa è la FUNZIONE TRASVERSA DI SCATTERING, che rappresenta la capacità diffusa globale dell'oggetto, che è funzione della frazione di provenienza dell'onda incidente.

Se l'oggetto considerato è dissipativo, parte della potenza viene chiaramente dissipata:

$$\sigma_a(\zeta_{oi}) := \frac{WE \iint |E|^2 E \cdot E^* dV}{2P_i} \quad \rightarrow \text{FUNZIONE TRASVERSA DI ASSORBIMENTO}$$

→ SEZIONE TRASVERSA DI ESTINZIONE: $\sigma_e(\zeta_{oi}) := \sigma_s(\zeta_{oi}) + \sigma_a(\zeta_{oi})$

↳ Caratterizza come l'oggetto sottrae potenza a un'onda che lo investe.

→ ALBEDO DELL'OGGETTO NELLA DIREZIONE ζ_{oi} : $A(\zeta_{oi}) := \frac{\sigma_s(\zeta_{oi})}{\sigma_e(\zeta_{oi})}$

↳ Indica quant'è la potenza diffusa dell'oggetto rispetto a quella dissipata.

Tutti questi parametri introdotti ora non dipendono dalla polarizzazione dell'onda: infatti, quando calcoliamo $|E(\zeta_{oi}, \zeta_{os})|^2$, perdiamo le informazioni sulla polarizzazione.

Il problema è che, in generale, il campo ~~dell'onda~~ diffusa ha una polarizzazione diversa da quella dell'onda incidente. Per tener conto della polarizzazione, le sezioni trasverse di scattering bistatico e monostatico vanno sostituite con espressioni matriciali.

Equazione del radar:

Un radar (RADIO DETECTION AND RANGING) rileva un oggetto captando una (picchissima) parte retrodiffusa, determina la direzione in cui tale oggetto si trova (tramite la direzione di "puntamento" dell'antenna), ne misura la distanza (in base al tempo intercorso tra irradiazione e captazione dell'onda) e la velocità radiale (tramite lo spostamento Doppler), e infine ne identifica alcune caratteristiche (e.g. caratteristiche

IL RESTO DELLA POTENZA VIENE:
• DIFFUSA NELLE ALTRE DIREZIONI
• ASSORBITA

dell'eco).

Quando il radar trasmette la potenza W_t , sull'oggetto incide un'onda localmente piana e uniforme che trasporta una densità superficiale di potenza pari a:

$$P_i = \frac{DW_F}{4\pi R^2} e^{-2 \int_0^R \alpha(\lambda, s) ds} \quad \rightarrow \text{È LA STESSA ESPRESSIONE DELLA DENSITÀ SUPERFICIALE DI POTENZA IN UN COLLEGAMENTO RADIO}$$

I materiali di cui è costituito l'oggetto hanno $\epsilon \neq \epsilon_0$ (ed eventualmente $\mu \neq \mu_0$), per cui si ha scattering dell'onda incidente: la potenza è divisa nelle varie direzioni θ_{oi} secondo la $\sigma(\theta_{oi}, \theta_{os})$.

Nella direzione $\theta_{os} = -\theta_{oi}$ è inviata una densità angolare di potenza pari a:

$$P_s(\theta_{oi}, -\theta_{oi}) = \frac{\sigma_b(\theta_{oi}) P_i}{4\pi}$$

cui corrisponde una densità superficiale di potenza pari a:

$$P_s = \frac{\sigma_b(\theta_{oi}) P_i}{4\pi R^2} e^{-2 \int_0^R \alpha(\lambda, s) ds} = \frac{DW_F \sigma_b}{(4\pi R^2)^2} e^{-4 \int_0^R \alpha(\lambda, s) ds} \quad \begin{matrix} \text{ABBIANO UN } R^2 \text{ AL} \\ \text{DENOMINATORE!} \end{matrix}$$

\rightarrow Notiamo che l'attenuazione è forte con la distanza.

La nostra antenna A (di solito ricevitrasmittente) capta la potenza W_r :

$$W_r = A_e P_s = \frac{A_e D_OI}{(4\pi R^2)^2} W_t e^{-4 \int_0^R \alpha(\lambda, s) ds} \stackrel{A_e = \frac{1}{4\pi} D}{=} \frac{\frac{m^2 A_e^2 \sigma_b}{4\pi \lambda^2 R^4} e^{-4 \int_0^R \alpha(\lambda, s) ds}}{W_t}$$

\rightarrow Questa è l'EQUAZIONE DEL RADAR. \rightarrow Applicabile solo quando la polarizzazione è adatta.

La potenza captata W_r può essere molto bassa (per $R \approx 100$ Km, avremmo un fattore 10^{20} al denominatore senza contare l'attenuazione atmosferica!), per cui sono questi sistemi di ricezione sofisticati, alte potenze trasmesse (anche MW) e grandi antenne.

15/05/2021

Osservazione della Terra da radar satellitari:

Il monitoraggio per mezzo di radar satellitari si basa su misure di ampiezza, fase e polarizzazione del campo elettromagnetico diffuso dalla superficie (o dall'atmosfera). Il dato satellitare è un'immagine: si ottiene praticamente una mappa (normalizzata) di densità di potenza o ampiezza/fase del campo elettromagnetico diffuso, il che

dai informazioni sulla presenza di acqua / foreste / città / ecc. su ciascuna zona della superficie terrestre.

→ CIASCON PIXEL DELLA MAPPA AVRÀ UN COLORE SULLA SCALA DEI GRIGI CHE DIPENDE DAL VALORE DI σ (Vg) E, IN PARTICOLARE, DELL'INDICE: PIÙ IL COLORE È CHIARO, PIÙ LO SCATTERING È ELEVATO IN QUEL PUNTO (IL CHE È NORMALMENTE INDICE DI PRESENZA DI FORESTI).

OGNI PIXEL DELL'IMMAGINE È RELATIVO A UNA PORZIONE DI SUPERFICIE ΔA

→ L'IMMAGINE È LA MAPPA DELLA SEZIONE TRASVERSA DI BACKSCATTERING PER UNITÀ DI SUPERFICIE

COEFFICIENTE DI BACKSCATTERING: $\sigma^o = \frac{\sigma(\theta, \phi; \theta, \phi + \pi)}{\Delta A}$ → è la sezione trasversa di scattering monostatico

Il coefficiente di backscattering dipende da:

- Caratteristiche della superficie
- Parametri di sistema (frequenza, polarizzazione, angolo di incidenza)

Nella pratica si usano i coefficienti di backscattering per:

→ Le polarizzazioni principali (polarizzazione orizzontale σ_{hh}^o , polarizzazione verticale σ_{vv}^o)

IL TRASMETTORE GENERA CAMPO POLARIZZATO ORIZZONTALMENTE E IL RICEVITORE

È IN GRADO DI MISURARE IL CAMPO POLARIZZATO ORIZZONTALMENTE

→ La polarizzazione incrociata ($\sigma_{hv}^o / \sigma_{vh}^o$)

Anche polarizzazione e fase del campo diffuso (rispetto a quelle del campo incidente) sono influenzate dalle proprietà della superficie.

Radar polarimetrici:

Misurano la MATRICE DI SCATTERING MONOSTATICA $[S]$ che lega il campo incidente ad ~~il~~ campo retrodiffuso.

• CAMPO INCIDENTE: $E_{oi} = E_{ov}^{(i)} v_o + E_{oh}^{(i)} h_o$

• CAMPO RETRODIFFUSO: $E_{os} = E_{ov}^{(s)} v_o + E_{oh}^{(s)} h_o$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} E_{ov}^{(s)} \\ E_{oh}^{(s)} \end{bmatrix} = \frac{e^{jkr}}{R} [S] \begin{bmatrix} E_{ov}^{(i)} \\ E_{oh}^{(i)} \end{bmatrix} = \frac{e^{-jkr}}{R} \begin{bmatrix} f_{vv} & f_{vh} \\ f_{hv} & f_{hh} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{ov}^{(i)} \\ E_{oh}^{(i)} \end{bmatrix}$$

MATRICE CON COMPONENTI COMPLESSSE

TRA PIXEL E RADAR

Gli elementi f_{ij} di $[S]$ sono le FUNZIONI DI SCATTERING complesse:

$$f_{pq} = f_{pq}(f; \theta_i, \phi_i; \Delta_m)$$

$$p, q = v, h$$

el: Sono funzioni della frequenza f , della direzione di incidenza Θ_i, ϕ_i e dei parametri fisici e morfologici A_m ($m=1, 2, \dots$) dell'elemento di superficie.

16/05/2021

Esercizio 1:

RADAR CON ANTENNA AD APERTURA RETTANGOLARE

FICHE

DIMENSIONI: $4\text{m} \times 1\text{m}$

$$f = 3 \text{ GHz} \Rightarrow \lambda = 0.1 \text{ m} \quad \text{POTREBBE ESSERE UN VERSORE DEL TIPO } Z_0 + jY_0$$

$$E_{0T} = 3.77 \cdot 10^2 (h_0 + jY_0) \text{ V/m}^{-1}; \quad H_{0T} = Z_0 \times \frac{E_{0T}}{Y_0} \quad \rightarrow \text{CAMPO TRASMESSO}$$

$R = 50 \text{ Km}$

→ Calcolare il campo elettrico che incide sull'oggetto.

Per farlo, basta calcolare il campo a grande distanza generato dall'antenna rettangolare lungo l'asse di propagazione Z .

Poiché siamo lungo Z , abbiamo che $\Theta = 0$ e ϕ possiamo sceglierlo pari a 0 (per cui $Z_0 = Y_0$); in particolare, ci ricordiamo che in tale direzione il campo a grande distanza ha esattamente la stessa polarizzazione di quello sul piano di bocca dell'antenna, per cui, alla fine dei conti, il campo incidente E_i sarà uguale a:

$$E_i = 2 \cdot \frac{j}{2} \frac{ab}{\lambda} J_{mn} \frac{\sin(\frac{\pi a}{\lambda} \sin\theta)}{\frac{\pi a}{\lambda} \sin\theta} \cos\theta \cdot \frac{e^{-j\beta r}}{\pi} (h_0 + jY_0) =$$

FATTORE 2 DOVUTO AL $\frac{1}{2}$
FATTO CHE DOBBIANO CONSIDERARE IL
CAMPIONE RELATIVO ALLA SUCCESSIONE EQUIVALENTE
ELETTRICA SIA A QUELLA MAGNETICA

FA FA PARTE DEL FATTORIO DI FASE $(j + e^{j\pi/2})$

→ Calcolare il campo elettrico che ritorna sull'antenna del radar se l'oggetto è caratterizzato dalla seguente matrice di scattering: $[S] = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.05 \\ 0.05 & 0.2 \end{bmatrix}$

$$E_s = \frac{e^{-j\beta r}}{\pi} \begin{bmatrix} 0.1 & 0.05 \\ 0.05 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{0V}^{(i)} \\ E_{0H}^{(i)} \end{bmatrix} = j \frac{e^{-j\beta r}}{\pi^2} \frac{3.77 ab}{\lambda} \begin{bmatrix} 0.1 & 0.05 \\ 0.05 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= j \frac{e^{-j\beta r}}{\pi^2} \frac{3.77 ab}{\lambda} [(0.1j + 0.05)Y_0 + (0.05j + 0.2)h_0]$$

→ Calcolare la potenza ricevuta dal radar.

Il campo che ritorna sull'antenna ha una polarizzazione diversa da quella trasmessa
 quindi per calcolare la potenza ricevuta, occorre sfruttare la formula più generale:

$$W_r = \frac{\left| \iint_{A_q} E_{r0} \cdot E_{i0} dS \right|^2}{4\eta_0^2 W_t} = \frac{\left| \iint_{A_q} E_{r0} \cdot E_{i0} dS \right|^2}{2 \iint_{A_q} E_{r0} \cdot E_{i0}^* dS}$$

E_s

FIB

IND

→

Esercizio 2:

ANTENNA AD APERTURA CIRCOLARE: raggio $a = 2 \text{ m}$ → campi di bocca polarizzati circolarmente

comunica con ANTENNA QUADRATA: lato $l = 2 \text{ m}$ → campi di bocca polarizzati linearmente

$$f = 10 \text{ GHz} \quad R = 70 \text{ Km}$$

→ Calcolare il coefficiente di trasmissione tra le antenne.

$$T_{12} = \frac{W_{rc}}{W_{rq}}$$

↑ Campo virtuale trasmesso da Ac

$$W_{rc} = \frac{\left| \iint_{A_q} E_{rc} \cdot E_{iq} dS \right|^2}{4\eta_0^2 W_t}$$

↑ Campo a seconda distanza trasmesso da Aq

↓ Potenza virtualmente trasmessa da Ac

• Supponiamo che il campo sulla bocca dell'antenna quadrata sia $E_{eq} = E_{eq} e^{j\phi}$

$$\Rightarrow E_{iq} = j \frac{e^{j\phi}}{r} E_{eq} \frac{l^2}{\lambda} \xrightarrow{\text{A} \rightarrow A_{eq}} [AREA GEOMETRICA DELL'ANTENNA]$$

• Assumiamo che il campo virtualmente trasmesso da Ac sia $E_{rc} = E_{rc} (x_0 + jy_0)$

$$\Rightarrow W_{rc} = \frac{A_{rc}^2}{r^2} E_{rc}^2 E_{rc}^2 \frac{A_{eq}^2}{\lambda^2} \frac{1}{4\eta_0^2 W_t}$$

$$W_{rc} = \frac{1}{2\eta_0} \iint_{A_q} E_{rc} \cdot E_{rc}^* dS = \frac{1}{2\eta_0} A_{rc} \cdot 2E_{rc}^2 = \frac{1}{\eta_0} A_{rc} E_{rc}^2$$

$$\Rightarrow W_{rc} = \frac{A_{rc}^2}{r^2} E_{rc}^2 E_{rc}^2 \frac{A_{eq}^2}{\lambda^2} \frac{1}{4\eta_0^2 \frac{A_{eq}^2}{\eta_0} E_{rc}^2} = \frac{A_{rc} E_{rc}^2 A_{eq}^2}{r^2 \lambda^2 \cdot 4\eta_0}$$

$$W_{rq} = \frac{1}{2\eta_0} \iint_{A_q} E_{rq} \cdot E_{rq}^* dS = \frac{1}{2\eta_0} A_{eq} E_{eq}^2$$

$$\Rightarrow T_{12} = \frac{W_{rc}}{W_{rq}} = \frac{A_{rc} E_{rc}^2 A_{eq}^2}{r^2 \lambda^2 \cdot 4\eta_0} \frac{2\eta_0}{A_{eq} E_{eq}^2} = \frac{A_{rc} A_{eq}^2}{2r^2 \lambda^2}$$

Esercizio 3:

FIBRA OTICA CON RAGGIO $a = 10 \mu\text{m}$

INDICE DI RIFRAZIONE MASSIMO: $n_h = 1,46$

→ Calcolare le frequenze e le lunghezze d'onda di taglio dei quattro modi di ordine più basso.

$$f_c^{(m,n)} = \frac{(m+n+1) c_0}{\pi a n_h} \quad (m,n) = 0,1$$

$$\lambda_{oc}^{(m,n)} = \frac{\pi a n_h}{m+n+1} \quad (m,n) = 0,1$$

→ Scelta una lunghezza d'onda alla quale si propaga il modo dominante, calcolare le costanti di propagazione dei quattro modi. $\rightarrow K_z^{(m,n)}, (m,n) = 0,1$

Dobbiamo scegliere una lunghezza d'onda λ tale che $\lambda_{oc}^{(0,0)} < \lambda < \lambda_{oc}^{(0,0)}$.

$$K_z^{(m,n)} = K_h \sqrt{1 - \frac{2(m+n)+2}{a K_h}} \quad \text{dove } K_h = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_h} = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_h$$

→ È REALE SOLO PER IL MODO $(0,0)$.