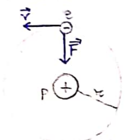
MODELLO DI BOHR CLASSICO



ATOMO DI IDROGENO H

$r = 0.53 \cdot 10^{-10}$ m $= 0.53$ Ångström

Potenziale: $V = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r} = 27.2$ V

Energia potenziale: $U_e = -eV = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = -4.35 \cdot 10^{-18}$ J $= -27.2$ elettronVolt

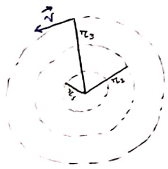
Per la legge di Newton: $m\vec{a} = m\frac{\vec{v}^2}{r} = \frac{e^2 \hat{n}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = e\vec{E}$

Energia cinetica: $E_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \Longrightarrow v = 2.19 \cdot 10^6$ m/s

$E_{TOT} = E_K + U_e = -\frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = -21.8 \cdot 10^{-19}$ J $= -13.6$ elettronVolt

$E_{TOT} < 0 \Longrightarrow$ il sistema è LEGATO

MODELLO DI BOHR-SOMMERFELD



Costante di Planck: $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ J·sec

$\hbar := \frac{h}{2\pi} = 1,055 \cdot 10^{-34}$ J·sec

Per un'orbita circolare di raggio r_n si ha che:

Momento angolare: $mvr_n = n\hbar \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$

Per la legge di Newton: $ma = m\frac{v^2}{r_n} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_n^2} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 m r_n}}$$

$$r_n = \frac{n\hbar}{mv} = \frac{n\hbar\sqrt{4\pi\varepsilon_0 m r_n}}{me} \Longrightarrow r_n = \frac{n^2\hbar^2 \cdot 4\pi\varepsilon_0 m}{m^2 e^2} =$$

$$= \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2 n^2}{me^2} = n^2 \cdot 0.529 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

$r_1 = 0.529 \cdot 10^{-10}$ m $\longleftarrow$ MODELLO DI BOHR CLASSICO

$r_2 = 2.116 \cdot 10^{-10}$ m

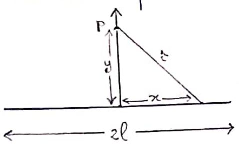
$r_3 = 4.761 \cdot 10^{-10}$ m

Energia totale: $E_{TOT} = -\frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n} = -\frac{1}{2}\frac{me^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2\hbar^2 n^2} = -\frac{13.6}{n^2}$ elettronVolt

Scansionato con CamScanner

POTENZIALE E CAMPO ELETTRICO DI UN FILO

Si ha una distribuzione di carica q distribuita su un filo di lunghezza 2l. Calcolare il potenziale V e il campo elettrico E a distanza y dal filo.



Potenziale dovuto alla carica infinitesima:

$$dV(r) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\lambda\, dx}{4\pi\varepsilon_0 \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{r}}$$

DENSITÀ LINEARE DELLA CARICA q SUL FILO DI LUNGHEZZA 2l

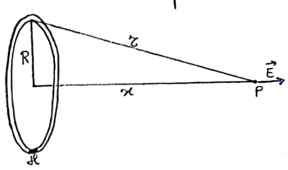
Integrando sul filo tra $-l$ e l si ha:

$$\int_{-l}^{l} dV(r) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{l+\sqrt{l^2+y^2}}{-l+\sqrt{l^2+y^2}}\right)$$

Campo elettrico: $E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 y\sqrt{x^2+y^2}}$

POTENZIALE E CAMPO ELETTRICO DI UN ANELLO

Si ha una carica distribuita su un anello di raggio R. Calcolare il potenziale V e il campo E sull'asse del disco a distanza x dal centro.



Densità di carica: $\lambda = \frac{q}{2\pi R}$

Potenziale: $\int dV(r) = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\int dl =$

$dq = \lambda\, dl$ RAPPRESENTA LA CARICA DI UNA PORZIONE INFINITESIMALE DELL'ANELLO

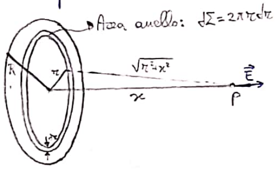
$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_0^{2\pi} R\, d\Phi = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0 r}$$

Campo elettrico: $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}}\right) = \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0 (R^2+x^2)^{3/2}}$

Scansionato con CamScanner

POTENZIALE E CAMPO ELETTRICO DI UN DISCO

Si ha una carica distribuita su un disco di raggio R. Calcolare il potenziale V e il campo E sull'asse del disco a distanza x dal centro.



Densità di carica: $\sigma = \frac{q}{\pi R^2}$

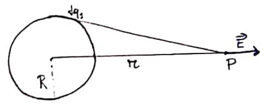
Consideriamo un anello di raggio r che possiede la carica infinitesima $dq = 2\pi r \sigma dr$

Potenziale: $\int dV(r) = \int_{-R}^{R} \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+x^2}} = \int_{-R}^{R} \frac{\sigma r dr}{2\varepsilon_0\sqrt{r^2+x^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+x^2} - x\right)$

Campo elettrico: $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{-q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\left(\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}} - 1\right)$

CAMPO ELETTRICO E POTENZIALE DI UNA SFERA VUOTA

Calcolare il campo E e il potenziale V dentro e fuori da una sfera vuota con densità di carica superficiale σ.



CALCOLO DEL CAMPO ELETTRICO

- $r > R$

$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \oint \vec{E}\cdot\hat{n}\, d\Sigma = E\Sigma = E\cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$ → SI DEVE IMMAGINARE LA SFERA DI RAGGIO R COME INGLOBATA IN UN'ALTRA IPOTETICA SFERA DI RAGGIO r

$q = 4\pi R^2\sigma \Rightarrow E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}$

- $r < R$

$E = 0$ poiché non ci sono cariche e il flusso è nullo.

- $r \to R$ con $r > R$

$E(r = R^+) = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

CALCOLO DEL POTENZIALE

- $r > R$

$\vec{E} = -\nabla V \Rightarrow V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

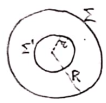
- $r \leq R$

$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} = $ costante

Scansionato con CamScanner

CAMPO ELETTRICO E POTENZIALE DI UNA SFERA PIENA

Calcolare il campo E e il potenziale V dentro e fuori da una sfera piena con densità di carica di volume $\rho(x,y,z)$.



CALCOLO DEL CAMPO ELETTRICO

• $r > R$

Come nell' esempio precedente, $E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ con $q = \underbrace{\frac{4}{3}\pi R^3}_{\text{Volume}}\rho$

• $r < R$

$\Phi_{\Sigma'}(\vec{E}) = \oint \vec{E}\cdot\hat{n}\, d\Sigma' = E\Sigma' = 4\pi r^2 E = \frac{q'}{\varepsilon_0}$ → CARICA CONTENUTA ALL'INTERNO DELLA SUPERFICIE Σ' DI RAGGIO r

$$q' = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{q}{4/3\,\pi R^3}\,\frac{4}{3}\pi r^3 = q\frac{r^3}{R^3}$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = q\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R^3} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

CALCOLO DEL POTENZIALE

• $r > R$

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

• $r = R$

$$V(r=R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}$$

• $r < R$

$$V(r) - V(R) = \int_r^R \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_r^R \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\, dr = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}(R^2 - r^2)$$

$$\Rightarrow V(r) = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}(R^2 - r^2) + V(R) = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}(3R^2 - r^2) = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

• $r = 0$

$$V(r=0) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}R^2 = \frac{3q}{8\pi\varepsilon_0 R} = \frac{3}{2}V(r=R)$$

Scansionato con CamScanner

CAMPO ELETTRICO E POTENZIALE DI UN CILINDRO

Si ha un cilindro di altezza h e raggio R. Calcolare il campo E e il potenziale V.

CALCOLO DEL CAMPO ELETTRICO

• $r > R$

$\Phi(\vec{E})$ ATTRAVERSO LE BASI È NULLO PERCHÉ $\vec{E} \parallel$ BASI $\Rightarrow \vec{E} \perp$ VETTORE NORMALE ALLE BASI

$$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \oint \vec{E}\cdot\hat{n}\, d\Sigma = E\Sigma = 2\pi r h E = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$q = \int_V \rho\, dV = \rho\pi h R^2 =: \lambda h$$

dove $\lambda := \rho\pi R^2$ è la carica contenuta in un cilindro di altezza unitaria

$$\Longrightarrow \Phi_\Sigma(\vec{E}) = 2\pi r h E = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} \Longrightarrow E = \frac{\lambda h}{2\pi r h \varepsilon_0} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}$$

• $r < R$

$$\Phi_{\Sigma'}(\vec{E}) = \oint \vec{E}\cdot\hat{n}\, d\Sigma' = E\Sigma' = 2\pi r h E = \frac{q'}{\varepsilon_0}$$

SUPERFICIE DEL CILINDRO PIÙ PICCOLO

CARICA DENTRO IL CILINDRO PIÙ PICCOLO CHE HA LA STESSA ALTEZZA h

$$q' = \int_V \rho\, dV = \rho\pi h r^2 = \lambda h \frac{r^2}{R^2} \Longrightarrow E = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} = \frac{r\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R^2}$$

CALCOLO DEL POTENZIALE

• $r > R$

$$V(r) - V(R) = \int_r^R E\, dr = \int_r^R \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\, dr = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{r}{R}$$

• $r < R$

$$V(r) - V(R) = \int_r^R E\, dr = \int_r^R \frac{\lambda r}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\, dr = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R^2}(R^2 - r^2)$$

Scansionato con CamScanner

MODELLO DI DRUDE-LORENTZ

Supponiamo di avere un materiale conduttore costituito da ioni fissi positivi e da elettroni liberi di muoversi e di urtare gli ioni e gli altri elettroni.

$\tau :=$ TEMPO MEDIO TRA UN URTO E L'ALTRO

$l :=$ CAMMINO LIBERO MEDIO DI UN ELETTRONE TRA UN URTO E L'ALTRO

Velocità degli elettroni nel conduttore: $v = \frac{l}{\tau}$

Se si applica un campo elettrico localmente, ogni elettrone risente di una forza pari a: $\vec{F} = m\vec{a} = -e\vec{E} \implies \vec{a} = -\frac{e\vec{E}}{m}$

$\vec{v}_d :=$ VELOCITÀ DI DERIVA = velocità media di tutti gli elettroni che si spostano lungo il conduttore per effetto del campo elettrico

$\vec{v}_i :=$ VELOCITÀ DOPO L'I-ESIMO URTO

$\vec{v}_{i+1} := \vec{v}_i - \frac{e\tau}{m}\vec{E}$

$\implies \vec{v}_d = \sum_i \frac{\vec{v}_{i+1}}{N} = \sum_i \frac{\vec{v}_i}{N} - \frac{e\tau}{m}\vec{E}$ dove N è il numero degli elettroni

Possiamo assumere che, dopo gli urti, le velocità degli elettroni assumano tutte le direzioni possibili: $\sum_i \frac{\vec{v}_i}{N} = 0 \implies \vec{v}_d = -\frac{e\tau}{m}\vec{E}$

Quantità di moto: $\vec{p} = m\vec{v}_d = -e\tau\vec{E}$

Densità di corrente: $\vec{J} = -ne\vec{v}_d = \frac{ne^2\tau}{m}\vec{E} =: \sigma\vec{E}$ → CONDUTTIVITÀ DEL CONDUTTORE

In generale, considerando sia le cariche positive che quelle negative, si ha che:

$\vec{J} = n_+ e\vec{v}_+ - n_- e\vec{v}_- = ne^2\left(\frac{\tau_+}{m_+} + \frac{\tau_-}{m_-}\right)\vec{E} = \sigma\vec{E}$ ← LEGGE DI OHM DELLA CONDUZIONE ELETTRICA

Espressione alternativa della legge di Ohm: $\vec{E} = \rho\vec{J}$ → RESISTIVITÀ DEL CONDUTTORE ($1/\sigma$)

Potenza per mantenere in moto una carica: $P = \vec{F}\cdot\vec{v}_d = e\vec{E}\cdot\vec{v}_d$

Se in un'unità di volume ci sono n portatori di carica, la potenza per unità di volume è: $P_\tau = nP = ne\vec{v}_d\cdot\vec{E} = \vec{J}\cdot\vec{E} \xRightarrow{\vec{J}=\sigma\vec{E}} P_\tau = \sigma E^2 = \frac{J^2}{\sigma}$

Scansionato con CamScanner