MODELLO 1° APPELLO GEOMETRIA

ESERCIZIO 1

Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ con rappresentazione cartesiana

$$\begin{cases} x+y+2t=0 \\ x+3t=0 \\ z-t=0 \end{cases}$$

Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $(-1,1,1,-1), (-1,1,-1,1), (0,0,1,-1)$.
Calcolare una base ed una rappresentazione cartesiana di U+V.

SVOLGIMENTO

Prima di tutto, vado a calcolare una base di V scartando gli eventuali vettori sovrabbondanti dallo Span. Per fare ciò, costruisco una matrice mettendo in riga i tre vettori che generano V, la riduco a scala e le eventuali righe che si annulleranno corrispondono ai vettori sovrabbondanti.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_{21}(-1)} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_{32}(\frac{1}{2})} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il vettore $(0,0,1,-1)$ è sovrabbondante e una base di V è $\{(-1,1,1,-1), (-1,1,-1,1)\}$.

Adesso vado a calcolarmi una base di U risolvendo il sistema della sua rappresentazione cartesiana. Quindi controllo se ci sono equazioni sovrabbondanti creando una matrice le cui righe sono composte dai coefficienti delle variabili x, y, z, t.

NOTA: è inutile introdurre la colonna dei termini noti perché sarebbe nulla in quanto il sistema è omogeneo.

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & t \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \xrightarrow{e_{21}(-1)} \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & t \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Le incognite sono 4 e i pivot per riga sono 3.
Perciò, c'è una variabile libera.

Ora riscrivo il sistema partendo dalla matrice ridotta a scala.

$$\begin{cases} x+y+2t=0 \\ -y+t=0 \\ z-t=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=-3t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$$

La soluzione è: $\begin{pmatrix} -3t \\ t \\ t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Perciò, il vettore $(-3,1,1,1)$ compone la base di U.

Posso calcolarmi così una base dello spazio U+V. Per farlo, mi basta mettere insieme la base di U, la base di V e verificare se i vettori sono tutti linearmente indipendenti o meno.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[e_{31}(-1)]{e_{21}(-3)} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

I 3 vettori sono linearmente indipendenti e una base di $U+V$ è: $\{(-1,1,1,-1),(-1,1,-1,1),(-3,1,1,1)\}$.

Per ricavare la rappresentazione cartesiana di $U+V$ devo costruire una matrice in cui le prime colonne corrispondono ai vettori dello spazio vettoriale considerato, mentre l'ultima colonna è costituita da delle variabili. Dopodiché, riduco a scala la matrice.

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 & x \\ 1 & 1 & 1 & y \\ 1 & -1 & 1 & z \\ -1 & 1 & 1 & t \end{bmatrix} \xrightarrow[e_{41}(-1)]{e_{21}(1),\ e_{31}(1)} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 & x \\ 0 & 0 & -2 & x+y \\ 0 & -2 & -2 & x+z \\ 0 & 2 & 4 & t-x \end{bmatrix} \xrightarrow{P_{23}} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 & x \\ 0 & -2 & -2 & x+z \\ 0 & 0 & -2 & x+y \\ 0 & 2 & 4 & t-x \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{e_{42}(+1)} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 & x \\ 0 & -2 & -2 & x+z \\ 0 & 0 & -2 & x+y \\ 0 & 0 & 2 & z+t \end{bmatrix} \xrightarrow{e_{43}(1)} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & x \\ 0 & -2 & -2 & x+z \\ 0 & 0 & -2 & x+y \\ 0 & 0 & 0 & x+y+z+t \end{bmatrix}.$$

Adesso devo considerare tutte le righe che hanno tutte le componenti tranne l'ultima uguali a zero e imporre anche l'ultima componente uguale a zero.

$x+y+z+t=0$

Questa è la forma cartesiana dello spazio $U+V$.

RISPOSTA

Una base di $U+V$ è: $\{(-1,1,1,-1),(-1,1,-1,1),(-3,1,1,1)\}$, mentre la sua rappresentazione cartesiana è: $x+y+z+t=0$

ESERCIZIO 1 BIS

Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ con rappresentazione cartesiana

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+t=0 \end{cases}$$

E sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori: $(-3,0,1,6)$, $(-6,-1,2,9)$, $(-9,-1,3,15)$.
Calcolare una base per $U \cap V$, ed una rappresentazione cartesiana di $U+V$.

SVOLGIMENTO

Per prima cosa, vado a calcolare una base di V. Si vede a occhio che il vettore $(-9,-1,3,15)$ è la somma degli altri 2 e che, quindi è sovrabbondante. D'altra parte, $(-3,0,1,6)$ e $(-6,-1,2,9)$ sono linearmente indipendenti perché non sono uno multiplo dell'altro. Se non mi fossi accorto di tutto ciò, avrei messo i 3 vettori a matrice e avrei applicato la riduzione a scala. In definitiva, una base di V è: $\{(-3,0,1,6), (-6,-1,2,9)\}$.

Ora mi calcolo una base di U risolvendo il sistema della sua rappresentazione cartesiana. Non applico la riduzione a scala perché si tratta di un sistema facilmente risolvibile.

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+t=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+z=0 \\ x=-t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-z \\ x=-t \end{cases} \qquad \text{La soluzione è: } \begin{pmatrix} -t \\ -z \\ z \\ t \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Perciò, i vettori $(0,-1,1,0)$ e $(-1,0,0,1)$ compongono la base di U.

Per calcolare la rappresentazione cartesiana di $U+V$, occorre prima conoscere una sua base. Quindi mettiamo insieme le basi di U e V e verifichiamo se ci sono vettori indipendenti.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 6 \\ -6 & -1 & 2 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[e_{41}(-6)]{e_{31}(-3)} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_{42}(-1)} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_{43}(-1)}$$

$$\to \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il vettore $(-6,-1,2,9)$ è sovrabbondante e una base di $U+V$ è:

$\{(0,-1,1,0), (-1,0,0,1), (-3,0,1,6)\}$.

Per ottenere la rappresentazione cartesiana di $U+V$, metto incolonnati a matrice questi 3 vettori e, alla quarta colonna, affianco delle variabili. Dopodiché, procedo con la riduzione a scala.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 & x \\ -1 & 0 & 0 & y \\ 1 & 0 & 1 & z \\ 0 & 1 & 6 & t \end{bmatrix} \xrightarrow{P_{12}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & y \\ 0 & -1 & -3 & x \\ 1 & 0 & 1 & z \\ 0 & 1 & 6 & t \end{bmatrix} \xrightarrow[e_{42}(1)]{e_{31}(1)} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & y \\ 0 & -1 & -3 & x \\ 0 & 0 & 1 & y+z \\ 0 & 0 & 3 & x+t \end{bmatrix} \xrightarrow{e_{43}(-3)}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & y \\ 0 & -1 & -3 & x \\ 0 & 0 & 1 & y+z \\ 0 & 0 & 0 & x+t-3y-3z \end{bmatrix}$$

Ora considero le righe che hanno tutte le componenti nulle tranne l'ultima e impongo anche questa componente uguale a zero.

$x+t-3y-3z=0$

Questa è la rappresentazione cartesiana di $U+V$.

Per conoscere una base di $U \cap V$, mi servono le rappresentazioni cartesiane degli spazi U e V. Mi manca solo la seconda, che ora vado a calcolare.

$$\begin{bmatrix} -3 & -6 & x \\ 0 & -1 & y \\ 1 & 2 & z \\ 6 & 9 & t \end{bmatrix} \xrightarrow[e_{41}(2)]{e_{31}(1/3)} \begin{bmatrix} -3 & -6 & x \\ 0 & -1 & y \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}x+z \\ 0 & -3 & 2x+t \end{bmatrix} \xrightarrow{e_{42}(-3)} \begin{bmatrix} -3 & -6 & x \\ 0 & -1 & y \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}x+z \\ 0 & 0 & 2x-3y+t \end{bmatrix}$$

La rappresentazione cartesiana di V dunque sarà:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x+z=0 \\ 2x-3y+t=0 \end{cases}$$

Adesso mi calcolo la rappresentazione cartesiana di $U \cap V$, che si ottiene mettendo insieme le rappresentazioni cartesiane di U e di V ed eliminando le equazioni sovrabbondanti attraverso una riduzione a scala. Dopodiché, risolvo il sistema per calcolarmi una base di $U \cap V$.

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+t=0 \\ \frac{1}{3}x+z=0 \\ 2x-3y+t=0 \end{cases} \qquad \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[e_{41}(-1)]{e_{21}(-2),\ e_{31}(-1/3)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[e_{42}(-1/5)]{e_{32}(-1/15)}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{4}{15} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \xrightarrow{e_{43}(3/4)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{4}{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il sistema quindi diventa:

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ -5y-2z-t=0 \\ \frac{4}{5}z-\frac{4}{15}t=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+3z=0 \\ -5y-5z=0 \\ 3z-t=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=-3z \\ y=-z \\ t=3z \end{cases}$$

La soluzione è: $\begin{pmatrix} -3z \\ -z \\ z \\ 3z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

RISPOSTA

Rappresentazione cartesiana di $U+V$: $x+t-3y-3z=0$ Base di $U \cap V$: $\{(-3,-1,1,3)\}$

ESERCIZIO 2

Al variare del parametro K in $\mathbb{R}$, si consideri il seguente sistema lineare S_K nelle variabili x, y, z:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+(3-K)y-2z=0 \\ x+y+(K^2-5K+7)z=K-2 \end{cases}$$

Dire per quali valori di K il sistema lineare assegnato S_K ammette un'unica soluzione, per quali K ammette infinite soluzioni, per quali K non ha soluzioni. Rispondere alla stessa domanda per il sistema lineare omogeneo associato S_K^*.

SVOLGIMENTO

Innanzitutto costruisco una matrice le cui righe sono composte dai coefficienti delle 3 variabili x, y, z e hanno i termini noti come ultima componente. Poi riduco a scala la matrice.

$$\underbrace{\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & \text{termini noti} \end{array} \\ \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3-K & -2 & 0 \\ 1 & 1 & K^2-5K+7 & K-2 \end{array}\right]}_{\text{MATRICE INCOMPLETA}} \end{array}}_{\text{MATRICE COMPLETA}} \xrightarrow[e_{31}(-1)]{e_{21}(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2-K & -3 & -1 \\ 0 & 0 & \underbrace{K^2-5K+6}_{(K-3)(K-2)} & K-3 \end{array}\right]$$

Se denoto con A la matrice incompleta (senza la colonna dei termini noti), con B la matrice completa e con n il numero di variabili del sistema, so che:

- il sistema S_K ammette un'unica soluzione se $rkA = rkB = n$;
- S_K ammette infinite soluzioni se $rkA = rkB < n$;
- S_K non ammette soluzioni se $rkA < rkB$.

Se le componenti $2-K$ e $(K-3)(K-2)$ sono diverse da zero, allora sicuramente si ha che $rkA = rkB = n = 3$. Perciò, se $K \neq 2$ e $K \neq 3$, il sistema S_K è compatibile e ammette un'unica soluzione.

Se $K=3$, si annullerebbe la componente $(K-3)(K-2)$. Ma si annullerebbe anche la componente $K-3$ nella colonna dei termini noti, che si trova nella stessa riga di $(K-3)(K-2)$. Perciò, si avrebbe che sia l'ultima riga di A, sia l'ultima riga di B si annullano e, di conseguenza, che: $rkA = rkB = 2 < n$. Ne consegue che il sistema S_3 ammette infinite soluzioni.

Se $K=2$, si annullerebbero le componenti $2-K$ e $(K-3)(K-2)$. Di conseguenza, si annullerebbero 2 righe di A, ma nessuna di B per via della colonna dei termini noti. E si avrebbe che: $rkA = 1 < rkB = 3$. Perciò, il sistema S_2 non ammette alcuna soluzione.

NOTA: è sufficiente studiare le componenti sulla diagonale principale di A, che sono le uniche decisive sul rango di tale matrice.

Per rispondere alla seconda richiesta dell'esercizio, consideriamo la matrice ridotta a scala relativa al sistema omogeneo associato S_K^*, che ha le stesse componenti della matrice appena considerata, eccetto per la colonna dei termini noti, che stavolta è nulla.

$$\underbrace{\left[\begin{matrix} \underbrace{\begin{matrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2-K & -3\\ 0 & 0 & (K-3)(K-2)\end{matrix}}_{A^*} & \begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\end{matrix}\right]}_{B^*}$$

È utile ricordarsi che i sistemi omogenei associati sono sempre compatibili perché ammettono almeno la soluzione banale (nulla). Quindi le possibilità si riducono a un'unica soluzione e a infinite soluzioni. Nel caso dei sistemi omogenei:

- se $rk\,A^* = n$, allora esiste un'unica soluzione;
- se $rk\,A^* < n$, allora esistono infinite soluzioni.

Come prima, studiamo le componenti sulla diagonale principale; esse sono tutte non nulle per $K \neq 2$, $K \neq 3$. In questo caso, il rango di A^* è uguale a n (3) e il sistema S_K^* ammette un'unica soluzione.

Se invece $K = 2$ o $K = 3$, il rango di A^* è minore di n e il sistema $S_{2,3}^*$ ammette infinite soluzioni.

RISPOSTA

S_K ammette un'unica soluzione $\Longleftrightarrow K \neq 2$ e $K \neq 3$.

S_K ammette infinite soluzioni $\Longleftrightarrow K = 3$.

S_K non ammette soluzioni $\Longleftrightarrow K = 2$.

S_K^* ammette un'unica soluzione $\Longleftrightarrow K \neq 2$ e $K \neq 3$.

S_K^* ammette infinite soluzioni $\Longleftrightarrow K = 2$ o $K = 3$.

ESERCIZIO 3

L'operatore lineare $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ha come autospazio associato all'autovalore $\lambda=-2$ il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ rappresentato dall'equazione cartesiana $x+y-2z=0$. Inoltre il vettore $(-1,2,1)$ appartiene al nucleo di f. Calcolare la matrice rappresentativa $M_E^E(f)$ di f rispetto alla base canonica, una base per il nucleo ed una per l'immagine di f, il polinomio caratteristico e quello minimo di f, ed una base di autovettori di f.

SVOLGIMENTO

Innanzitutto mi calcolo una base di autovettori relativi all'autospazio associato all'autovalore $\lambda=-2$, che denoterò con V_{-2}. Quindi risolvo la sua forma cartesiana.

$x+y-2z=0 \Rightarrow x=2z-y$ La soluzione è: $\begin{pmatrix} 2z-y \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Gli autovettori ricercati sono $(-1,1,0)$ e $(2,0,1)$.

Inoltre so che $(-1,2,1) \in Ker(f)$. Per la definizione di nucleo, $f(-1,2,1)=\underline{0}$, ovvero $f(-1,2,1)=0(-1,2,1)$. Quest'ultima uguaglianza racchiude le definizioni di autovalore e di autovettore. Ne deduco che, se un vettore appartiene al nucleo di f, allora appartiene anche all'autospazio relativo all'autovalore $\lambda=0$, che denoterò con V_0.

Poiché siamo in $\mathbb{R}^3$, una base di autovettori di f sarà costituita esattamente da 3 vettori. E sono stati individuati già tutti. Se chiamo con $\mathcal{B}$ tale base, ho che:

$\mathcal{B} = \{(-1,2,1), (-1,1,0), (2,0,1)\}$

Se mi ricordo che la molteplicità geometrica di un autovalore λ è pari al numero massimo di autovettori linearmente indipendenti relativi a λ, deduco subito che $m_g(-2)=2$ e $m_g(0)=1$.

In più so che la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di f è uguale alla dimensione dello spazio vettoriale in cui ci stiamo muovendo. Tenendo anche conto che $m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$, sarà facile ipotizzare che $m_a(-2)=2$ e $m_g(0)=1$. Il polinomio caratteristico di f è quindi:

$p_f(t) = -t(t+2)^2$ (Il segno meno è dovuto al fatto che la dimensione dello spazio vettoriale è dispari).

Se non fossi stato in grado di seguire questo ragionamento, avrei calcolato il polinomio caratteristico trovando il determinante della matrice $\left(M_E^E(f) - It\right)$ dopo aver ricavato $M_E^E(f)$.

Noto che $m_g(-2)=m_a(-2)$ e $m_g(0)=m_a(0)$. Ciò implica che f è diagonalizzabile. E se f è diagonalizzabile, il suo polinomio minimo è composto dagli stessi fattori di $p_f(t)$, ma tutti con esponente pari a 1. Dunque, il polinomio minimo è: $m_f(t) = t(t+2)$.

La base del nucleo di f è uguale alla base di V_0. Perciò so tranquillamente che è formata dal solo vettore $(-1,2,1)$.

Quello che segue è il procedimento per trovare $M^{E}_{E}(f)$.
Per cominciare, l'unica informazione che ho su di f è come agisce sui vettori della base B grazie alle definizioni di autovalore e di autovettore:

$f(-1,2,1)=0(-1,2,1)=\underline{0}$; $f(-1,1,0)=-2(-1,1,0)=(2,-2,0)$; $f(2,0,1)=-2(2,0,1)=(-4,0,-2)$

Sono perciò in grado di calcolarmi la matrice rappresentativa di f rispetto alla base B, che denoterò con $M^{B}_{B}(f)$. Le colonne di $M^{B}_{B}(f)$ sono formate dalle coordinate di ciascun vettore appartenente alla base B rispetto alla base B stessa. Per esempio, per conoscere le componenti della prima colonna di $M^{B}_{B}(f)$, devo saper rispondere alla domanda "che coefficienti devo mettere davanti ai vettori della base B per ottenere $f(-1,2,1)=(0,0,0)$?" Poiché i 3 vettori sono liberi, l'unico modo per ottenere $(0,0,0)$ è mettere dei coefficienti nulli a moltiplicarli. Perciò la prima colonna della matrice rappresentativa sarà nulla.

Ora devo rispondere alla medesima domanda con $f(-1,1,0)=(2,-2,0)$. Poiché $(2,-2,0)$ è -2 volte il vettore $(-1,1,0)$, il coefficiente da mettere davanti al vettore $(-1,1,0)$ sarà -2, mentre gli altri pesi saranno nulli: le coordinate di $(2,-2,0)$ rispetto a B sono: $(0,-2,0)$. Queste 3 componenti formeranno la seconda colonna di $M^{B}_{B}(f)$. Se non me ne fossi accorto, avrei dovuto impostare la seguente uguaglianza:

$$(2,-2,0)=a(-1,2,1)+b(-1,1,0)+c(2,0,1)$$

E avrei dovuto risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases}-a-b+2c=2\\2a+b=-2\\a+c=0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}-a+2+2a-2a-2=0\\b=-2-2a\\c=-a\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}a=0\\b=-2\\c=0\end{cases}$$

Similmente, poiché $f(2,0,1)=(-4,0,-2)=-2$ volte $(2,0,1)$, le coordinate di $(-4,0,-2)$ sono $(0,0,-2)$.

Alla fine, si ha che $$M^{B}_{B}(f)=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-2&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$$

Sapendo che $M^{E}_{E}(f)=M^{B}_{E}(id_V)\cdot M^{B}_{B}(f)\cdot M^{E}_{B}(id_V)$, vado a trovarmi la matrice $M^{B}_{E}(id_V)$, che si ottiene semplicemente mettendo in colonna i vettori di B:

$$M^{B}_{E}(id_V)=\begin{bmatrix}-1&-1&2\\2&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$$

Inoltre, la matrice $M^{E}_{B}(id_V)$ è l'inversa di $M^{B}_{E}(id_V)$, e me la vado a calcolare seguendo l'algoritmo di Gauss-Jordan.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[e_{31}(1)]{e_{21}(2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{e_{32}(-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[e_3(-1)]{\substack{e_1(-1)\\ e_2(-1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[e_{23}(4)]{e_{13}(2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{e_{12}(-1)}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Perciò, $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(id_V) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Ora ho tutte le informazioni per calcolare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica, che è uguale a:

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -4 & -6 & 8 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Per concludere l'esercizio, mi ricordo che la base dell'immagine di f corrisponde a una base dello spazio delle colonne della matrice rappresentativa. Se mi ricordo le proprietà del nucleo e dell'immagine, so che $\dim \operatorname{Im}(f) = \operatorname{rk} M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = \dim V - \dim \operatorname{Ker}(f)$. Di conseguenza, si ha che: $\dim \operatorname{Im}(f) = 3 - 1 = 2$. Mi basta quindi scegliere 2 colonne linearmente indipendenti da $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$.
Per esempio, una base per l'immagine di f è formata dai vettori $(0,-4,-2)$ e $(2,-6,2)$.
In alternativa, avrei potuto ricorrere a una riduzione a scala per vedere quali sono le colonne libere di $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$.

RISPOSTA

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -4 & -6 & 8 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Una base per il nucleo di f è formata dal vettore $(-1,2,1)$.

Una base per l'immagine di f è formata dai vettori $(0,-4,-2)$ e $(2,-6,2)$.

$p_f(t) = -t(t+2)^2 \qquad m_f(t) = t(t+2)$

Una base di autovettori di f è formata dai vettori $(-1,2,1)$, $(-1,1,0)$ e $(2,0,1)$.

ESERCIZIO 4

Una matrice A è quadrata di ordine 4, non è diagonalizzabile, e soddisfa le seguenti condizioni: $(A-I)^4 = 4(A-I)^2 = 9(A-I)^2$. Elencare tutte le possibilità per la forma canonica di A, il polinomio caratteristico, ed il polinomio minimo.

SVOLGIMENTO

Dalla catena di uguaglianze posso dedurre che:

$$\begin{cases}(A-I)^4 = 4(A-I)^2 \\ (A-I)^4 = 9(A-I)^2\end{cases}$$

Ora scrivo le 2 equazioni non in funzione della matrice A, bensì in funzione di una variabile:

$$\begin{cases}(t-1)^4 = 4(t-1)^2 \\ (t-1)^4 = 9(t-1)^2\end{cases}$$

E scompongo il tutto in fattori.

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases}(t^2-2t+1)^2-4t^2+8t-4=0 \\ (t^2-2t+1)^2-9t^2+18t-9=0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}t^4+4t^2+1-4t^3+2t^2-4t-4t^2+8t-4=0 \\ t^4+4t^2+1-4t^3+2t^2-4t-9t^2+18t-9=0\end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases}t^4-4t^3+2t^2+4t-3=0 \\ t^4-4t^3-3t^2+14t-8=0\end{cases}$$

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 1 & -4 & 2 & 4 & -3 \\ 1 & & 1 & -3 & -1 & 3 \\ \hline & 1 & -3 & -1 & 3 & // \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc|c} & 1 & -4 & -3 & 14 & -8 \\ 1 & & 1 & -3 & -6 & 8 \\ \hline & 1 & -3 & -6 & 8 & // \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases}(t-1)(t^3-3t^2-t+3)=0 \\ (t-1)(t^3-3t^2-6t+8)=0\end{cases}$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -3 & -1 & 3 \\ 1 & & 1 & -2 & -3 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & // \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -3 & -6 & 8 \\ 1 & & 1 & -2 & -8 \\ \hline & 1 & -2 & -8 & // \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases}(t-1)^2(t^2-2t-3)=0 \\ (t-1)^2(t^2-2t-8)=0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}(t-1)^2(t+1)(t-3)=0 \\ (t-1)^2(t+2)(t-4)=0\end{cases}$$

Adesso mi trovo il massimo comun divisore delle due espressioni, ovvero i fattori che si trovano in entrambe le equazioni:

$$MCD\left\{(t-1)^2(t+1)(t-3),\ (t-1)^2(t+2)(t-4)\right\} = (t-1)^2$$

Il polinomio minimo di A consiste in uno o più fattori dell'MCD. In questo caso può essere $(t-1)$ oppure $(t-1)^2$. Poiché so che il polinomio minimo di A è composto solo da fattori con esponente 1 se e solo se A è diagonalizzabile, e il problema mi dice che A non lo è, allora il polinomio cercato è necessariamente $(t-1)^2$.

Inoltre, poiché il polinomio minimo e il polinomio caratteristico compaiono con i medesimi fattori, e il grado di $p_c(t)$ corrisponde all'ordine della matrice A, so anche che: $p_c(t) = (t-1)^4$

Le informazioni per ottenere la forma canonica di Jordan le ricavo dal polinomio caratteristico e da quello minimo: il primo mi dice che J_A è una matrice 4x4 che ha $\lambda = 1$ come unico autovalore; il secondo, invece, mi suggerisce che J_A ha almeno un blocco di Jordan di ordine 2 (l'esponente), mentre tutti gli altri sono di ordine ≤ 2. In base a queste informazioni, si può affermare che ci sono 2 possibili forme canoniche di Jordan, e sarebbero:

$$J_A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad J_A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

RISPOSTA

Le 2 possibilità per la forma canonica di A sono:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$m_f(t) = (t-1)^2 \qquad p_f(t) = (t-1)^4$$

ESERCIZIO 4 BIS

La matrice A è quadrata di ordine n ed ha un solo autovalore $\lambda = 2$. Sapendo che $rK(A-2I) = 5$ e che $rK(A-2I)^4 = 1$, determinare la forma canonica J_A di A, il suo polinomio caratteristico $p_A(t)$, e quello minimo $m_A(t)$.

SVOLGIMENTO

So che, se una matrice A ha un solo autovalore λ, allora la matrice $A - \lambda I$ è nilpotente. Con questo presupposto, se $(A-\lambda I)^\alpha$ ha rango 1, allora l'indice di nilpotenza è $p = \alpha + 1 = 5$

Adesso sono in grado di impostare il seguente sistema:

$$\begin{cases} \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5 = n \\ \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 = rK(A-2I) = 5 \\ \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = rK(A-2I)^2 \\ \mu_1 + \mu_2 = rK(A-2I)^3 \\ \mu_1 = rK(A-2I)^4 = 1 \end{cases}$$

Devo calcolarmi il rango di $(A-2I)^2$ e di $(A-2I)^3$, o comunque devo escogitare un modo per ricavarmi μ_2 e μ_3.

Poiché è necessario che: $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3 \leq \mu_4 \leq \mu_5$

e so che: $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 = 5 = 1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4$,

sarà facile intuire che $\mu_2 = 1$, $\mu_3 = 1$, $\mu_4 = 2$. Perciò, il sistema diventerebbe:

$$\begin{cases} 1+1+1+2+\mu_5 = n \\ \mu_4 = 2 \\ \mu_3 = 1 \\ \mu_2 = 1 \\ \mu_1 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \mu_5 = n-5 \\ \mu_4 = 2 \\ \mu_3 = 1 \\ \mu_2 = 1 \\ \mu_1 = 1 \end{cases}$$

NOTA: non ho informazioni sufficienti per conoscere l'ordine n della matrice A.

La forma canonica J_A dipende dai valori di μ_1, $\mu_2 - \mu_1$, $\mu_3 - \mu_2$, $\mu_4 - \mu_3$, $\mu_5 - \mu_4$:

$$\begin{cases} \mu_1 = \#\text{ blocchi relativi all'autovalore } \lambda=2 \text{ di ordine massimo } (5) = 1 \\ \mu_2 - \mu_1 = \#\text{ blocchi relativi all'autovalore } \lambda=2 \text{ di ordine } 4 = 1-1=0 \\ \mu_3 - \mu_2 = \#\text{ blocchi relativi all'autovalore } \lambda=2 \text{ di ordine } 3 = 1-1=0 \\ \mu_4 - \mu_3 = \#\text{ blocchi relativi all'autovalore } \lambda=2 \text{ di ordine } 2 = 2-1=1 \\ \mu_5 - \mu_4 = \#\text{ blocchi relativi all'autovalore } \lambda=2 \text{ di ordine } 1 = n-5-2 = n-7 \end{cases}$$

Poiché A è di ordine n e ha come unico autovalore $\lambda = 2$, il polinomio caratteristico è uguale a:

$p_A(t) = (-1)^n (t-2)^n$

Inoltre, poiché l'indice di nilpotenza di A è 5, il polinomio minimo è uguale a:

$m_A(t) = (t-2)^5$

RISPOSTA

La forma canonica J_A è costituita da 1 blocco di ordine 5, 1 blocco di ordine 2 e $n-7$ blocchi di ordine 1, tutti relativi all'autovalore $\lambda = 2$. $p_A(t) = (-1)^n (t-2)^n$ $m_A(t) = (t-2)^5$

ESERCIZIO 5

Risolvere il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -5x_1 + 2x_2 - x_3 & x_1(0) = 1 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 2x_3 & x_2(0) = 1 \\ \dot{x}_3 = -3x_1 + 6x_2 - 7x_3 & x_3(0) = -1 \end{cases}$$

e verificare che il risultato ottenuto sia corretto.

SVOLGIMENTO

La soluzione dell'esercizio è della forma: $\underline{y}(t) = e^{At}\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} = e^{At}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

~~Andiamo~~ Vado a calcolare e^{At}.

A è una matrice che ha per righe i coefficienti delle variabili x_1, x_2, x_3:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -3 & 6 & -7 \end{bmatrix}$$

Ora mi trovo il polinomio caratteristico di A calcolando il determinante della matrice $A - It$, che sarebbe:

$$\begin{vmatrix} -5-t & 2 & -1 \\ -2 & -t & -2 \\ -3 & 6 & -7-t \end{vmatrix} \overset{e^{3'}(-1)}{=\!=} \begin{vmatrix} -5-t & 2 & t+4 \\ -2 & -t & 0 \\ -3 & 6 & -t-4 \end{vmatrix} = (t+4)\begin{vmatrix} -5-t & 2 & 1 \\ -2 & -t & 0 \\ -3 & 6 & -1 \end{vmatrix} \overset{e_{31}(1)}{=\!=} (t+4)\begin{vmatrix} -5-t & 2 & 1 \\ -2 & -t & 0 \\ -8-t & 8 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\overset{\text{LAPLACE RISP. 3° COLONNA}}{=\!=} (t+4)(-16-t^2-8t) = -(t+4)^3 = p_A(t)$$

Poiché A ha un solo autovalore, $\lambda = -4$, non è necessario ricorrere alla forma canonica di Jordan e alla base a stringhe, perché la matrice $A + 4I$ è nilpotente. Denoterò quest'ultima matrice con B.

$$B = A - \lambda I|_{\lambda=-4} = A + 4I = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

Adesso vado a vedere qual è l'indice di nilpotenza p di B:

$$B^2 = B \cdot B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ne consegue che $p = 2$.

Ora sono in grado di calcolare e^{At}:

$$e^{At} = e^{(-4I+B)t} = e^{-4It+Bt} = e^{-4t} \cdot e^{Bt} = e^{-4t}\left(I + Bt + \overset{=0}{\frac{B^2t^2}{2!}}\right) = e^{-4t}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}\right)$$

$$= e^{-4t}\begin{bmatrix} 1-t & 2t & -t \\ -2t & 1+4t & -2t \\ -3t & 6t & 1-3t \end{bmatrix}$$

Quindi la soluzione è:

$$e^{At}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = e^{-4t}\begin{bmatrix}1-t & 2t & -t\\ -2t & 1+4t & -2t\\ -3t & 6t & 1-3t\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = e^{-4t}\begin{pmatrix}1+2t\\1+4t\\-1+6t\end{pmatrix} = \underline{y}(t)$$

Dove:

y_1 = la prima componente della soluzione $= e^{-4t}(1+2t)$

y_2 = la seconda componente della soluzione $= e^{-4t}(1+4t)$

y_3 = la terza componente della soluzione $= e^{-4t}(-1+6t)$

Adesso devo provare che la soluzione provata sia corretta, e lo faccio verificando che tutte le condizioni siano rispettate.

Inizio con la condizione iniziale, che sarebbe $\underline{x}(0) = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$. Devo provare che $\underline{y}(0) = \underline{x}(0) = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ e, per farlo, vado a sostituire zero al posto di t all'interno della soluzione:

$$y(0) = \begin{pmatrix}1+0\\1+0\\-1+0\end{pmatrix}e^0 = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \quad \checkmark$$

Dopodiché verifico le tre uguaglianze del sistema. Nella prima, ad esempio, devo vedere se la derivata prima della prima componente della soluzione è uguale a -5 volte la prima componente +2 volte la seconda componente - 1 volta la terza componente. Un discorso analogo vale per le altre due equazioni.

$$\dot{y}_1 = \left(e^{-4t}\,\dot{(1+2t)}\right) = -4e^{-4t}(1+2t) + e^{-4t}\cdot 2 = e^{-4t}(2t-8t)$$

$$-5y_1 + 2y_2 - y_3 = -5\left(e^{-4t}(1+2t)\right) + 2\left(e^{-4t}(1+4t)\right) - e^{-4t}(-1+6t) = e^{-4t}(-2-8t) = \dot{y}_1 \quad \checkmark$$

$$\dot{y}_2 = \left(e^{-4t}\,\dot{(1+4t)}\right) = -4e^{-4t}(1+4t) + e^{-4t}\cdot 4 = e^{-4t}(-16t)$$

$$-2y_1 - 2y_3 = -2e^{-4t}(1+2t) - 2e^{-4t}(-1+6t) = e^{-4t}(-16t) = \dot{y}_2 \quad \checkmark$$

$$\dot{y}_3 = \left(e^{-4t}\,\dot{(-1+6t)}\right) = -4e^{-4t}(-1+6t) + e^{-4t}(6) = e^{-4t}(10-24t)$$

$$-3y_1 + 6y_2 - 7y_3 = e^{-4t}(-3-6t+6+24t+7-42t) = e^{-4t}(10-24t) = \dot{y}_3 \quad \checkmark$$

Tutte le condizioni sono state rispettate, perciò la soluzione trovata è corretta.

RISPOSTA

La soluzione del Problema di Cauchy è:

$$y(t) = e^{-4t}\begin{pmatrix}1+2t\\1+4t\\-1+6t\end{pmatrix}$$

ESERCIZIO 6

Sia (V, q) lo spazio pseudoeuclideo dove:

$V = \mathbb{R}^3$ $\qquad q = x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 6x_2^2 - 20x_2x_3 + 8x_3^2$

Polarizzare la forma quadratica $q: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, calcolare una base ortogonale $\mathcal{B}$ per (V, q) e i suoi invarianti.

SVOLGIMENTO

Per prima cosa, mi costruisco la matrice di Gram di q rispetto alla base canonica. Sulla diagonale principale metto ordinatamente i coefficienti di x_1^2, x_2^2, x_3^2. Nelle componenti g_{12}, g_{21} (1° riga - 2° colonna / 2° riga - 1° colonna) metto il coefficiente dimezzato di x_1x_2. Nelle componenti g_{13}, g_{31} metto il coefficiente dimezzato di x_1x_3. Nelle componenti g_{23}, g_{32} metto il coefficiente dimezzato di x_2x_3.

$$G_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(q) = \begin{array}{c c} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & -10 \\ 3 & -10 & 8 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} & \end{array}$$

Polarizzare q significa scrivere la forma bilineare simmetrica, in cui il coefficiente di x_1y_1 è uguale alla prima componente di $G_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(q)$, il coefficiente di x_2y_1 corrisponde alla seconda componente della matrice $G_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(q)$, e così via. Quindi:

$$\phi(\underline{x}, \underline{y}) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_1y_3 + 3x_3y_1 + 6x_2y_2 - 10x_2y_3 - 10x_3y_2 + 8x_3y_3$$

Ora mi ricavo la matrice diagonale $\mathcal{D}$ congruente a $G_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(q)$ e la matrice P^T tale che: $\mathcal{D} = P^T G_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(q)\, P$. Il calcolo avverrà mediante l'algoritmo di Gauss-Lagrange:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & -10 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[e_{31}(-3)]{e_{21}(2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[e^{31}(-3)]{e^{21}(2)}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[e^{32}(2)]{e_{32}(2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad -9}_{\mathcal{D}} & & & \underbrace{1 \quad 2 \quad 1}_{P^T} & & \end{array}\right]$$

La base ortogonale $\mathcal{B}$ sarà costituita dalle righe di P^T (ovvero dalle colonne di P). Perciò:

$\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (2, 1, 0), (1, 2, 1)\}$

Inoltre, sapendo che gli invarianti sarebbero:

- n = dim V = ordine della matrice D
- p = rk D = # componenti sulla diagonale principale di D non nulle
- r = l'indice di D = # componenti sulla diagonale principale di D positive
- s = la segnatura di D = differenza fra # componenti sulla diagonale principale di D positive e # componenti sulla diagonale principale di D negative

posso ricavare facilmente gli invarianti di (V,q):

$(n,p,r,s) = (3,3,2,1)$

RISPOSTA

La polarizzazione di q è: $\phi(\underline{u},\underline{v}) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_1y_3 + 3x_3y_1 + 6x_2y_2 - 10x_2y_3 - 10x_3y_2 + 8x_3y$

$B = \{(1,0,0),(2,1,0),(1,2,1)\}$

$(n,p,r,s) = (3,3,2,1)$