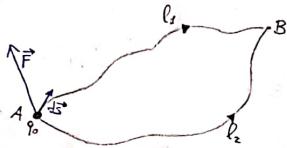


$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = q_0 \int_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

zurativo $\Rightarrow q_0 \int_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} = q_0 \int_{C_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}$



2) $\int \Pi_{GF} (\lambda_G + \mu_G + \mu_F) = \Pi_{GF} \lambda_G + \Pi_F \cdot 2\lambda_G + \Pi_{GF} \cdot \lambda_F$
+ 6 equationi

EQUAZIONE DI CONGRUENZA

3) $P[\text{NUOVA CHIAMATA DEL FIGLIO È BLOCCATA}] = \frac{\text{freq. arrivo nuovo del figlio bloccato}}{\text{freq. arrivo del figlio (non avallati)}}$

$$= \frac{\Pi_{2G} \lambda_F}{\Pi_0 \lambda_F + \Pi_{1G} \lambda_F + \Pi_{2G} \lambda_F} = \frac{\Pi_{2G}}{\Pi_0 + \Pi_{1G} + \Pi_{2G}}$$

15/05/2020

PARTE SEGNALI

SEGNALE = funzione del tempo $x(t)$

Tratteremo $x(t)$ reali
 $x(t) = a(t) + j b(t) = p(t) e^{j\varphi(t)}$

$$e^{j\varphi(t)} = \cos [\varphi(t)] + j \sin [\varphi(t)]$$

$$\cos \alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}$$

$$\sin \alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}$$

SEGNALI MODULATI: hanno un andamento di questo genere:

$$A(t) \cdot \cos [2\pi f_0 t + \varphi(t) + \alpha] = \operatorname{Re} [A(t) e^{j[2\pi f_0 t + \varphi(t) + \alpha]}]$$

Spesso utilizzeremo una notazione semplificata (per lavorare):

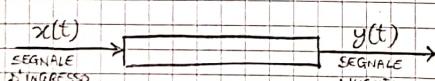
$$A(t) e^{j\varphi(t)} \quad \text{o che chiaramente non è equivalente}$$

$$p(t) = \sqrt{a^2(t) + b^2(t)}$$

$$\varphi(t) = \operatorname{arctg} \left(\frac{b(t)}{a(t)} \right) + \frac{\pi}{2} \left[1 - \operatorname{sgn} \frac{a(t)}{b(t)} \right]$$

} COORDINATE POLARI

$$= \begin{cases} 2 \operatorname{se} a(t) > 0 \\ 1 \operatorname{se} a(t) < 0 \end{cases}$$



Trasferimento di segnale ferito: $y(t)$ è una copia di $x(t)$:

$$y(t) = (g)x(t-t_0) \quad \text{RITARDO}$$

ALTRÒ MODO PER DESCRIVERE UN ANNI TRASF. SEGNALE FEDELE:
(caso dei segnali modulati)

$$A(t)e^{j\varphi(t)} \xrightarrow{\sim} p A(t-t_0) e^{j[\varphi(t-t_0) + \delta]}$$

Nel è più problematico se la fase iniziale è diversa

$$\leadsto \text{PIÙ IN GENERALE } y(t) = g e^{j\varphi(t-t_0)}$$

con φ costante reale

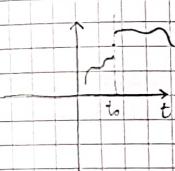
Un segnale CONTINUO è tale che $\lim_{t \rightarrow t_0^-} x(t) = \lim_{t \rightarrow t_0^+} x(t) = x(t_0)$

Un esempio di segnale continuo è il segnale ARMONICO:

$$A \cos[2\pi f_0 t + \varphi]$$

$$f_0 = 1/T_0$$

→ DISCONTINUITÀ DI 1° SPECIE:



$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} x(t) \neq \lim_{t \rightarrow t_0^+} x(t)$$

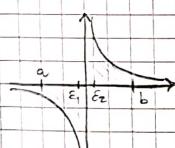
$$x(t_0) = \frac{x(t_0^-) + x(t_0^+)}{2}$$

che non sono rilevanti
PER ESEMPIO PUNTI ISOLATI

Definizione:

Due segnali sono uguali se differiscono per insiemi $\{t\}$ misurati nulla.

→ DISCONTINUITÀ DI 2° SPECIE: → almeno uno dei due limiti non esiste o va all'infinito



→ SE IL SEGNALE È $\frac{1}{x}$, IN GENERALE, L'INTEGRALE TRA a E b NON È DEFINITO

→ PARTE PRINCIPALE DI CAUCHY: PRENDIAMO $\epsilon_1 = -\epsilon_2$; IN QUEL CASO L'INTEGRALE TRA $a-\epsilon_1$ E $a+\epsilon_1$ È ∞ TRA $b-\epsilon_1$ E $b+\epsilon_1$ È NULLO

→ Quindi si potrebbe affermare che l'integrale tra a e b è zero anche se al livello matematico non è rigoroso

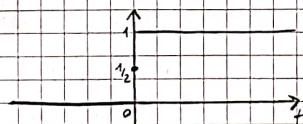
→ DISCONTINUITÀ DI 3° SPECIE:

$$x(t_0^-) = x(t_0^+) \neq x(t_0)$$

(DISCONTINUITÀ ELIMINABILE)

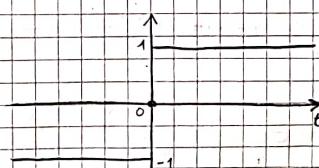
Gradino unitario:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1/2 & t=0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$



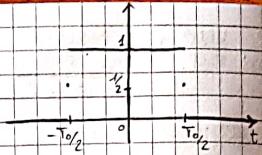
Segnale segno:

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 0 & t=0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$



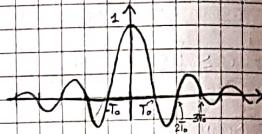
$$\vec{E} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_{L_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$\text{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right) = \begin{cases} 0 & |t| > T_0/2 \\ 1/2 & |t| = T_0/2 \\ 1 & |t| < T_0/2 \end{cases}$$



$$\text{sinc}\left(\frac{t}{T_0}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)}{\frac{\pi t}{T_0}}$$

$$\text{Area compresa tra } -T_0, T_0 : A = \frac{1+2\int_0^{T_0/2}}{2} = T_0$$



Impulso:

Non è un segnale, ma ha una sua funzione che, se è continua in zero, è tale che:

$$\int_{a \rightarrow 0}^{b \rightarrow 0} \delta(t) f(t) dt = f(0)$$

IN MODO COMFORMATO

$$\int_a^b f(t) \delta(t-t_0) dt = \begin{cases} f(t_0) & t=t_0 \\ 0 & t \neq t_0 \end{cases}$$

$$\int_{a \rightarrow 0}^{b \rightarrow 0} \delta(t-t_0) f(t) dt = f(t_0)$$

\approx È UN INTEGRALE NELL'INTORNO DI t_0
(SI PUÒ SCRIVERE COME $\int_{t_0}^{t_0}$)

$$\int_{a \rightarrow 0}^{b \rightarrow 0} \delta(t) f(t) dt = \int_0^{b \rightarrow 0} \delta(t) f(t) dt = \frac{f(0)}{2}$$

$\Rightarrow \delta(t)$ è pari rispetto
al tempo
 $\delta(t) = \delta(-t)$ per ogni t
 $\delta(t-t_0) = \delta(t_0-t)$

Facciamo un esempio:

Supponiamo che una palla venga colpita con impulso $\delta(t)$ che si manifesta in un intervallo di tempo "piccolo".

$$\xrightarrow{\text{SG}} \bullet$$

$$f(t) = m \delta(t)$$

$$\delta(t) = m \frac{d\gamma}{dt} \Rightarrow \int \delta(t) dt = \int m \frac{d\gamma}{dt} dt$$

$\boxed{\text{SE } f \equiv 1} \Rightarrow \int \delta(t) \cdot 1 dt = 1 \xrightarrow{f(t) = 1 \forall t, \text{ in questo caso}} 1 = m \sqrt{v_0}$
L'integrale $\int \delta(t) dt$ ha la $f(t) \equiv 1$, se ci ricordiamo a $\int f(t) dt = \int \delta(t) dt$

Possiamo affermare che:

$$\delta(t) = \lim_{T_0 \rightarrow 0} \frac{1}{T_0} \text{sinc}\left(\frac{t}{T_0}\right)$$

$\xrightarrow{\text{E la derivata di}} u(t) = \lim_{T_0 \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{t_0} \text{sinc}(x) dx$

$\xrightarrow{\text{2' area compresa tra } -T_0, T_0 \text{ diventa}} A = \frac{T_0}{T_0} = 1$

$$\int_{a \rightarrow 0}^{b \rightarrow 0} \delta'(t) dt$$

Possiam
⇒

$$\int_{a \rightarrow 0}^{b \rightarrow 0} \delta'(t) dt$$

$$\int_{a \rightarrow 0}^{b \rightarrow 0} \delta'(t) dt$$

Noi i
P = 1

$$= |V|^2.$$

Possiam

Affini

CROSS

Suppon
Possiam

$x_i(t)$,
Segnali
te è s

→ Cy

$$\int_{-\infty}^{b>0} \delta'(t) \cdot t dt = \delta(t) \cdot t \Big|_{-\infty}^{b>0} - \int_{-\infty}^{b>0} \delta(t) dt$$

$\Rightarrow 0 \rightarrow$ È definibile solo in un intorno arbitrariamente piccolo intorno

Possiamo quindi ragionevolmente dire che: $\delta'(t) \cdot t = -\delta(t)$

$$\Rightarrow \delta'(t) = -\frac{\delta(t)}{t}$$

$$\text{In generale: } \delta^k(t) = \frac{(-1)^k k! \delta(t)}{t^k}$$

$$\int_{-\infty}^{b>0} \delta'(t) f(t) dt = \delta(t) f(t) \Big|_{-\infty}^b - \int_{-\infty}^b \delta(t) f'(t) dt = -f'(0)$$

$$\text{In generale: } \int_{-\infty}^{b>0} \delta^k(t) f(t) dt = (-1)^k f^{(k)}(0)$$

Usiamo i segnali per studiare, per esempio, l'energia:

$$P = \operatorname{Re}[V \cdot I^*] =$$

$$= |V|^2 \cdot \operatorname{Re}\left[\frac{1}{Z^*}\right] = \operatorname{Re}\left[V \frac{V^*}{Z^*}\right]$$

$Z = \text{impedenza del segnale (che a noi non interessa)}$

Possiamo definire l'energia come $E_x = \int |x(t)|^2 dt$ \leftarrow È REALE PER DEF

Affinità tra segnali:

$$\text{CROSS / ITER CORRELATION: } C_{xy}(\tau) = \int x(t+\tau) \cdot y^*(t) dt$$

Supponiamo di ricevere un segnale ignoto $x(t) + m(t)$.

Possiamo supporre che sia stato ~~dato~~ trasmesso uno dei segnali tra $x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)$. Applicando la CROSS-ITERAZIONE a tali segnali, quello che fa il risultato più alto è quello che presumibilmente è stato effettivamente trasmesso.

$$\rightarrow C_{yx}(\tau) = C_{xy}^*(\tau)$$

$$I_0 \int E \cdot d\vec{s}$$



$$\rightarrow |C_{xy}(\tau)|^2 \leq E_{xx} \cdot E_{yy} \quad \leftarrow \text{RELAZIONE DI SCHWARTZ}$$

$E_{xy} = C_{xy}(0) = (x, y)$ = prodotto scalare
in termini vettoriali

$$\rightarrow \text{ENERGIA MUTUA: } E_{xy} = C_{xy}(0) = (x, y) \quad \rightarrow \text{INDICA QUANTO UN SEGNALE HA}$$

in termini energetici

$\rightarrow \text{AUTOCORRELAZIONE: } C_{xx}(\tau) = \int x(t+\tau) x^*(t) dt$ \rightarrow INDICA QUANTO UN SEGNALE HA

MEMORIA DI SE STESO (quanto resta "costante" rispetto all'istante t=0)

$$\rightarrow E_{xx} = C_{xx}(0) = (x, x) \quad \rightarrow \text{Il prodotto scalare di un segnale per sé stesso dà sempre la sua energia}$$

$$\rightarrow |C_{xx}(\tau)| \leq E_{xx}$$

$$\rightarrow (x, y) = \int x(t) \cdot y^*(t) dt \quad \rightarrow (x, x) = \int x(t) \cdot x^*(t) dt$$

I segnali ORTHONORMALI costituiscono un insieme $\{\psi_k\}$ tale che:

$$(\psi_k, \psi_h) = \begin{cases} 1 & \text{se } k=h \\ 0 & \text{se } k \neq h \end{cases}$$

I segnali ORTONORMALI costituiscono un insieme $\{\psi_k\}$ tale che

$$(\psi_k, \psi_h) = \begin{cases} 1 & \text{se } k=h \\ 0 & \text{se } k \neq h \end{cases}$$

I segnali armonici sono dei particolari segnali ortognormali:

$$\{\psi_k\} = \left\{ e^{j2\pi \frac{kt}{T_0}} \right\} = \left\{ e^{j2\pi K f_0 t} \right\}, \quad f_0 = \frac{1}{T_0}$$

Serie di Fourier:

Dato un segnale periodico $x(t)$ di periodo T_0 :

$$x(t) = \sum_k C_k e^{j2\pi \frac{kt}{T_0}}$$

FREQUENZA FONDAMENTALE: $f_0 = \frac{1}{T_0}$

$$C_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi \frac{kt}{T_0}} dt = \frac{1}{T_0} (x(t), \psi_k(t))$$

Coefficiente di Fourier

INTEGRALE NEL PERIODO T_0

es. $t \in [-T_0/2, T_0/2]$

19/05/2020

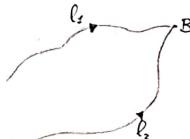
$$C_h = \left(\frac{x(t)}{T_0}, e^{j2\pi \frac{ht}{T_0}} \right)$$

PRODOTTO SCALARE TRA I SEGNALI NORMALIZZATI

Questo è appunto il fattore di normalizzazione

$$C_h = \left(e^{j2\pi \frac{Kt}{T_0}}, e^{j2\pi \frac{ht}{T_0}} \right) = \begin{cases} 1 & \text{se } h=K \\ 0 & \text{se } h \neq K \end{cases}$$

PRODOTTO SCALARE TRA DUE QUALUNQUE SEGNALE ARMONICO



$$\int_T |x(t) - \sum_k C_k e^{\frac{j2\pi k t}{T}}|^2 dt \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad \leftarrow \text{SE QUESTO RISULTATO È VERO, ALLORA ABBIAMO RAFFRESENTATO "BEN" IL SEGNALE CON LA SERIE DI FOURIER}$$

È la distanza fraquenziale tra il segnale effettivo $x(t)$ e la nostra rappresentazione \sum_k ...

POSSIBILITÀ DI RAFFRESENTARE BENE UN SEGNALE:

$\int_T |x(t)|^2 dt$ FINITO è una condizione sufficiente ma non necessaria.

Se consideriamo che ci interessano sono le CONDIZIONI DI DIRICHET, per cui si deve avere un numero finito di discontinuità di 1ª specie.

$$\text{POTENZA: } W_{xx} = \frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_T \sum_k C_k e^{\frac{j2\pi k t}{T}} \cdot \sum_h C_h^* e^{-\frac{j2\pi h t}{T}} dt$$

$$= \frac{1}{T} \sum_k |C_k|^2 \cdot T = \sum_k |C_k|^2 \quad * \text{Per l'ortogonalità delle rappresentazioni dei segnali (vedi fine pag. precedente)}$$

$$\text{POTENZA MUTUA: } W_{xy} = \frac{1}{T} \int_T x(t) \cdot y^*(t) dt = \leftarrow (= \frac{1}{T} (x, y))$$

$$= \frac{1}{T} \int_T \sum_k C_k e^{\frac{j2\pi k t}{T}} \sum_h C_h^* e^{-\frac{j2\pi h t}{T}} dt =$$

$$= \frac{1}{T} \sum_k C_k C_k^* \cdot T = \sum_k C_k C_k^* = \sum_k \alpha_k \beta_k^*$$

RELATIVI AL SEGNALE Y

RELATIVI AL SEGNALE X

Rappresentazione di segnali tramite funzioni ortogonali:

Sia $x(t)$ un segnale e sia $\psi_k(t)$ un altro segnale appartenente all'insieme dei $\{\psi_k(t)\}$ ORTONORMALI.

$$x(t) = \sum_k C_k \psi_k(t)$$

$$C_k = (x(t), \psi_k(t))$$

$$\text{ENERGIA: } E_{xx} = \sum_k |C_k|^2$$

$$\text{PRODOTTO SCALARE: } (x, y) = \sum_k \alpha_k \beta_k^*$$

RELATIVO AL SEGNALE X

RELATIVO AL SEGNALE Y

Serie di Fourier per segnali non periodici:

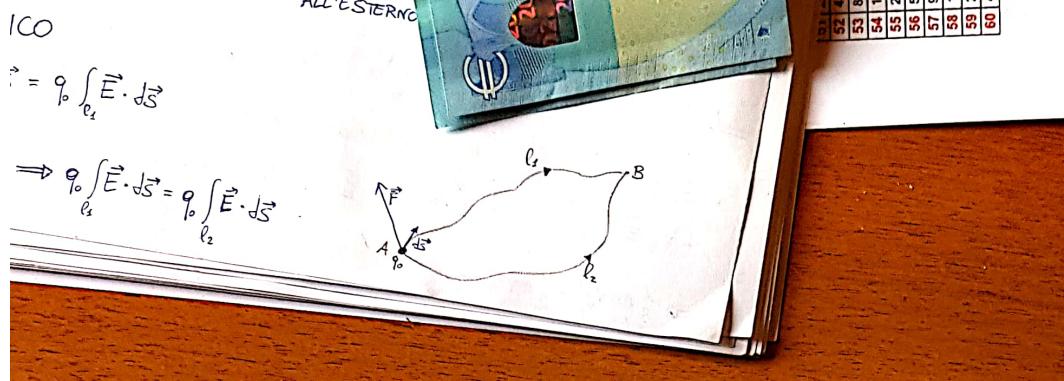
$$x(t) = \left[\sum_k C_k \cdot e^{\frac{j2\pi k t}{T_0}} \right] \text{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right)$$

A questo la siamo SARFEESE PERIODICAS

di partire dal segnale di partenza, abbiamo fissato un periodo $T_0 > T$, dove T è il tempo in cui il segnale non è nullo, e abbiamo fatto il segnale fittizio $x(t-T_0), x(t-T_0), \dots$

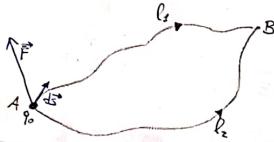
come?

abbiamo periodizzato il segnale



$$\vec{E} = \int_{l_1}^{\vec{l}_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$\Rightarrow \int_{l_1}^{\vec{l}_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{l_2}^{\vec{l}_1} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$



Dove, al solito:

$$C_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k t} dt$$

Spatio dei segnali:

A PARTIRE
DALL'INSIEME $\{x_h(t)\}$

Trovare $\{\psi_k(t)\}$

Per avere un'utilità pratica deve essere un insieme sfido

L'insieme dei segnali ortogonali
che rappresentano abbastanza ricchiamente tutti gli $x_h(t)$

$$x_i(t) = \sum_k C_k \psi_k(t)$$

PER SVARE UN'ANALOGIA CON ABBITI DIFFERENTI,
POSSIAMO RAFFRESENTARE UN VETTORE COME:

$$\vec{v} = \hat{i} v_x + \hat{j} v_y + \hat{k} v_z$$

$$\text{ENERGIA DEL SEGNALE: } E_{xx} = \sum_k |C_k|^2$$

Dove questi 3 versori costituiscono una base
ortogonale otta a rappresentare tutti i vettori
nello spazio tridimensionale

$$\text{PRODOTTO SCALARE: } (x, y) = \sum_k \alpha_k \beta_k^*$$

di $\{x_h(t)\}$

Per trovare le $\psi_k(t)$ a partire dai segnali v , si usa l'algoritmo di Gram-Schmidt:

$$\cdot \psi_1(t) = \frac{x_1(t)}{\sqrt{E_{x_1 x_1}}}$$

→ è praticamente la normalizzazione di $x_1(t)$

$$\cdot \bar{\psi}_2(t) = x_2(t) - (x_2, \psi_1) \psi_1(t)$$

→ PRODOTTO SCALARE TRA $\bar{\psi}_2(t)$ E $\psi_1(t)$:

$$(x_2(t) - (x_2, \psi_1) \psi_1(t), \psi_1(t)) = (x_2, \psi_1) - (\psi_1, \psi_1) = 0$$

Questo termine è di fatto moltiplicato per 2 che sarebbe il prodotto scalare tra $\psi_1(t)$ e $\psi_1(t)$ (se stesso)

⇒ $\bar{\psi}_2(t)$ è ortogonale a $\psi_1(t)$ ✓

Per ottenerne $\psi_2(t)$, dobbiamo fare in modo che abbia energia unitaria,
perché vogliamo segnali ortogonali:

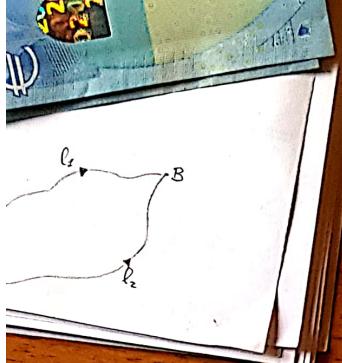
$$\psi_2(t) = \frac{\bar{\psi}_2(t)}{\sqrt{E_{\bar{\psi}_2 \bar{\psi}_2}}}$$

$$\cdot \bar{\psi}_3(t) = x_3(t) - (x_3, \psi_1) \psi_1(t) - (x_3, \psi_2) \psi_2(t)$$

$$\Rightarrow \psi_3(t) = \bar{\psi}_3(t) / \sqrt{E_{\bar{\psi}_3 \bar{\psi}_3}}$$

E così via





51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

Trasformata di Fourier:

$$\text{TRASFORMATA: } X(f) := \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad \begin{array}{l} \rightarrow \text{segnale qualunque (non necessariamente periodico)} \\ \rightarrow \text{notare che non è } f_0 \circ K_f \end{array}$$

$$x(t) = \sum_{f=0}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} \quad \begin{array}{l} \text{Vero solo se gli errori sono su} \\ \text{insieme ti misura nulla} \end{array}$$

IL SEGNALE $x(t)$ È SCOMPOSTO IN UNA SERIE DI ARMONICHE DI AMPIZZA

$X(f)$ DI FREQUENZA f :

$$X(f) e^{j2\pi ft} df$$

\rightarrow Condizione sufficiente ma non necessaria affinché

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df :$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt \text{ finito}$$

\rightarrow Le condizioni effettivamente necessarie sono quelle di Dirichlet.

Proprietà di dualità:

Se esiste una correlazione $x(t) \leftrightarrow X(f)$,
possiamo trovare un'altra coppia $x(f) \leftrightarrow X(t)$

Altre proprietà:

\rightarrow SCALATURA :

$$x(t) \leftrightarrow X(f)$$

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

\rightarrow INVERSIONE DI SEGNO:

$$x(t) \leftrightarrow X(f)$$

$$x(-t) \leftrightarrow X(-f)$$

($a = -1$)

\rightarrow TRASLAZIONE NEL TEMPO:

$$x(t) \leftrightarrow X(-f)$$

$$x(t-t_0) \leftrightarrow X(f) e^{-j2\pi ft_0}$$

$$\cdot \int x(t-t_0) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$\cdot t-t_0 = t' \rightarrow \int x(t') e^{-j2\pi f(t'+t_0)} dt'$$

\Rightarrow conservativo $\Rightarrow q_0 \int_{l_1}^l \vec{E} \cdot d\vec{s} = q_0 \int_{l_2}^l \vec{E} \cdot d\vec{s}$

$$\begin{aligned} t &= t' + t_0 \quad \rightarrow e^{-j2\pi f t_0} \cdot \int x(t) e^{-j2\pi f t'} dt' \\ \Rightarrow \mathcal{J}[x(t-t_0)] &= X(f) e^{-j2\pi f t_0} \end{aligned}$$

→ TRASLAZIONE FREQUENZIALE:

$$\begin{array}{ccc} x(t) & \longleftrightarrow & X(f) \\ x(t) e^{j2\pi f_0 t} & \longleftrightarrow & X(f - f_0) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int X(f-f_0) e^{j2\pi f t} df & \rightarrow \int X(f') e^{j2\pi (f+f_0)} df' \\ f-f_0 &= f' \\ f &= f'+f_0 \quad \rightarrow e^{j2\pi f t} \cdot \int X(f') e^{j2\pi f' t} df' \end{aligned}$$

→ DERIVAZIONE NEL TEMPO:

$$\begin{aligned} \text{Supponiamo che } \exists \quad \mathcal{J}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-j2\pi f t} dt = \\ &= x(t) e^{-j2\pi f t} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int x(t) j2\pi f e^{-j2\pi f t} dt \Rightarrow \\ &\text{perché la funz. a } \infty \text{ deve} \\ &\text{andare a zero per } \mathbb{H}_0 \quad \Rightarrow \mathcal{J}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = j2\pi f X(f) \end{aligned}$$

→ TRASFORMATA DELL'INTEGRALE:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}\left[\int_{-\infty}^t x(v) dv\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^t x(v) dv \cdot e^{-j2\pi f t} dt = \\ &= \left[\frac{\int_{-\infty}^t x(v) dv}{-j2\pi f} e^{-j2\pi f t} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(t) e^{-j2\pi f t}}{-j2\pi f} dt = \\ &= \frac{x(t)}{2\pi f} \end{aligned}$$

Questo perciò a $-\infty$ va benalmente a zero

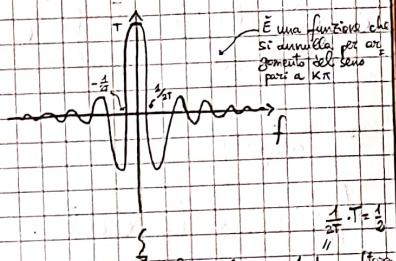
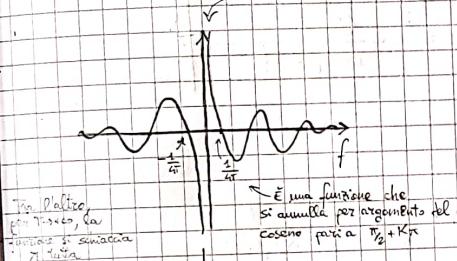
Ma a $+\infty$?

Chiamiamo $\int_{-\infty}^{+\infty} x(v) dv = A$

Vediamo come si comporta $\frac{Ae^{-j2\pi ft}}{-2\pi f j}$ per $t \rightarrow +\infty$

N.B.: l'esponenziale, essendo immaginario, non converge!

$$\frac{Ae^{-j2\pi ft}}{-2\pi f j} = \underbrace{\frac{A}{-j2\pi f} \cos(2\pi ft)}_{\text{Questo perco' rappresenta un impulso}} + \underbrace{\frac{A \sin(2\pi ft)}{j2\pi f}}_{\text{È una funzione che si dura solo per un momento del suo periodo a K\pi}}$$



L'area sotto da questa funzione è complessivamente nulla perché le parti positive e quelle negative si semplificano a vicenda

L'area sotto del grafico è $\frac{1}{2}$ base altezza

DATA DALLA PARTE CENTRALE DEL GRAFICO
IL RESTO SI SEMPLIFICA (PIÙ O MELO)

$$\Rightarrow \mathcal{J} \left[\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \right] =$$

$$= \frac{S(f) \cdot A}{2} + \frac{X(f)}{j2\pi f}$$

→ Data dalla componente sinusoidale dell'esponenziale

21/05/2020

→ DERIVAZIONE NELLA FREQUENZA:

$$\frac{dX(f)}{df} = \frac{1}{j\pi f} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) (-j2\pi t) e^{-j2\pi ft} dt =$$

$$= (-j2\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot t e^{-j2\pi ft} dt \quad \Rightarrow \quad \frac{dX(f)}{(j2\pi) df} = \mathcal{J}[t x(t)]$$

$$\text{In generale: } \frac{d^m X(f)}{(-j2\pi)^m df^m} = \mathcal{J}[t^m x(t)]$$

Facciamo ora degli esempi applicativi:

$$\mathcal{J}[e^{-at} u(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-j2\pi ft} dt = \left. \frac{e^{-(a+j2\pi f)t}}{-(a+j2\pi f)} \right|_0^{+\infty} =$$

$a > 0$
 $u(t) \neq 0$ per $0 < t < +\infty$

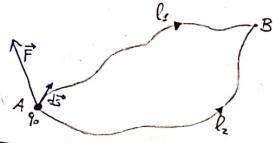
$$\text{ALL'INTERNO: } E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\text{ALL'ESTERNO: } E = 0$$

VORO ELETTRICO

$$A \rightarrow B = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = q_0 \int_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

campo conservativo $\Rightarrow q_0 \int_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} = q_0 \int_{C_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}$



$$= \frac{1}{\alpha + j2\pi f}$$

$$\Rightarrow e^{\alpha t} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{\alpha + j2\pi f}$$

$$\text{Applichiamo la dualità: } e^{\alpha f} \cdot u(-f) \leftrightarrow \frac{1}{\alpha + j2\pi t}$$

$$\mathcal{J}[e^{\alpha t} u(t)] = \int_{-\infty}^0 e^{\alpha t} e^{-j2\pi ft} dt = \left. \frac{e^{(\alpha - j2\pi f)t}}{\alpha - j2\pi f} \right|_{-\infty}^0 =$$

$\alpha \text{ reale} > 0$

$$= \frac{1}{\alpha - j2\pi f}$$

$$\text{Applichiamo la dualità: } e^{-\alpha f} u(f) \leftrightarrow \frac{1}{\alpha - j2\pi t}$$

La trasformata è lineare: trasformata della somma = somma delle trasformate

$$\mathcal{J}[e^{-\alpha t} u(t) + e^{-\alpha t} u(-t)] = \mathcal{J}[e^{-\alpha |t|}] = \left. \frac{1}{\alpha + j2\pi f} + \frac{1}{\alpha - j2\pi f} \right|_{\alpha \text{ reale} > 0} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}$$

$$\text{Applichiamo la dualità: } e^{-\alpha f t} \leftrightarrow \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}$$

$$\mathcal{J}[\text{rect}(\frac{t}{T})] = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi ft} dt = \left. \frac{-e^{-j2\pi ft}}{j2\pi f} \right|_{-T/2}^{T/2} =$$

$$= \frac{e^{-j2\pi f T/2} - e^{j2\pi f T/2}}{-j2\pi f} = \frac{T \sin(\pi f T)}{\pi f T} = T \text{sinc}(ft)$$

$$\text{Applichiamo la dualità: } \text{rect}(\frac{f}{\alpha}) \leftrightarrow \alpha \text{sinc}(t\alpha)$$

$$\mathcal{J}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt = 1(f) \xrightarrow{\text{significa}} \text{COSTANTE IN FREQUENZA}$$

$$\Rightarrow \delta(t) \leftrightarrow 1(f)$$

$$\text{Applichiamo la dualità: } S(f) \xrightarrow{\text{!}} 1(t)$$

$S(f) \xrightarrow{\text{!}} 1(t)$ Sappiamo che l'impulso è un operatore pa-

$\mathcal{J}[u]$

$\mathcal{J}[s_0]$

$= \frac{1}{j}$

\Rightarrow

Applic

$\mathcal{J}[c_0]$

$\mathcal{J}[s_0]$

$\mathcal{J}[\delta]$

$= J^2$

Appl

Jm

$\frac{J^m}{(j2\pi)^m}$

Torna

$$\mathcal{F}[u(t)] = \mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1 \cdot \delta(f)}{2}$$

PROPRIETÀ DELLA TRAS. DELL'INTEGRALE

$= 0$ finché $t < 0$
 $= 1$ se $t > 0$

$$\mathcal{F}[\operatorname{sgn}(t)] = \mathcal{F}[2u(t) - 1] = 2\left[\frac{1}{j2\pi f} + \frac{\delta(f)}{2}\right] - \delta(f) =$$

$$= \frac{1}{j\pi f} + \delta(f) - \delta(f) = \frac{1}{j\pi f}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sgn}(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j\pi f}$$

$$\text{Applichiamo la dualità: } \operatorname{sign}(-f) \longleftrightarrow -\frac{1}{j\pi f}$$

$$\text{Ovvero: } -j\pi \operatorname{sgn}(f) \longleftrightarrow \frac{1}{f}$$

$$\mathcal{F}[\cos(2\pi f_0 t)] = \mathcal{F}\left[\frac{1(t)e^{j2\pi f_0 t} + 1(t)e^{-j2\pi f_0 t}}{2}\right] = \frac{\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)}{2}$$

$$\mathcal{F}[\sin(2\pi f_0 t)] = \frac{\delta(f-f_0) - \delta(f+f_0)}{2j}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\delta'(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t) e^{-j2\pi ft} dt = \underbrace{\delta(t) e^{-j2\pi ft}}_0 \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) (-j2\pi f) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= j2\pi f \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt = j2\pi f \end{aligned}$$

$\delta'(-f) = -\delta(f)$ PERCHÉ LA DERIVATA DI UNA DISTRI
BUZIONE FARI È DISPARI

$$\text{Applichiamo la dualità: }$$

In generale:

$$\frac{\delta^m(f)}{(j2\pi)^m} \longleftrightarrow t^m$$

$$-\delta'(f) \longleftrightarrow j2\pi t$$

$$\text{Ovvero: } -\frac{\delta'(f)}{j2\pi} \longleftrightarrow t$$

$$\text{Ovvero: } \frac{\delta(f)}{j2\pi f} \longleftrightarrow t$$

$\delta'(f) = -\frac{\delta(f)}{f}$

$$\text{Tornando alla definizione, } x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

SPESSO DI FREQUENZA DI $x(t)$

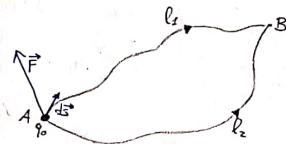
SPazio: campo elettostatico tra due lastre caricate
all'interno: $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

All'esterno: $E = 0$

LAVORO ELETTRICO

$$W(A \rightarrow B) = \int_{l_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} = q_0 \int_{l_1} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

campo conservativo $\Rightarrow q_0 \int_{l_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} = q_0 \int_{l_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}$



Sappiamo che $C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau) \cdot y^*(t) dt$

$$\mathcal{F}[C_{xy}(\tau)] = X(f) \cdot Y^*(f)$$

$$\Rightarrow C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} [X(f) \cdot Y^*(f)] e^{j2\pi f t} df$$

$$\Rightarrow E_{xy} = C_{xy}(0) = (x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) Y^*(f) df$$

Sappiamo inoltre che $C_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau) \cdot x^*(t) dt$

$$\mathcal{F}[C_{xx}(\tau)] = X(f) X^*(f) = |X(f)|^2$$

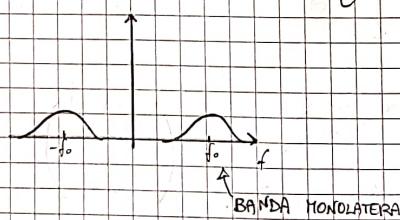
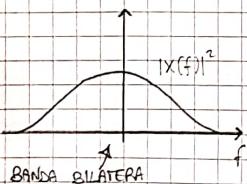
$$\Rightarrow C_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 e^{j2\pi f \tau} df$$

$$\Rightarrow E_{xx} = C_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

Perciò, $|X(f)|^2$ è lo spettro (di frequenza) dell'energia di $x(t)$.

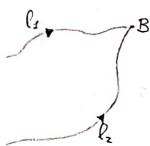
Banda di un segnale:

È un intervallo frequenziale dove è contenuta l'energia del segnale.



→ Si può dire che la banda o contiene tutta l'energia del segnale, o ne contiene una determinata frazione (per esempio il 99%), perché magari una frazione è poco significativa (per esempio le frequenze alte hanno poca energia).

Una BANDA DEL SISTEMA, invece, è un intervallo di frequenziale che il sistema considerato è in grado di trasmettere.



Spettro di segnali ripetitivi (periodici):

$$\text{Sappiamo che } x(t) = \sum_k C_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

$$f_0 = \frac{1}{T_0}$$

$$\mathcal{F}[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} [C_k e^{j2\pi k f_0 t}] e^{-j2\pi ft} dt$$

* Quindi avremo una trasformata pari a $C_k \delta(f - kf_0)$

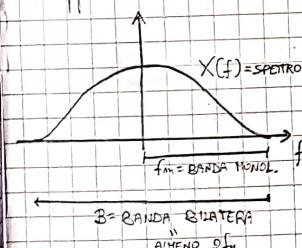
CIASCUN C_k È COSTANTE * MA HA UNA FREQUENZA DIFFERENTE
→ TRASLAZIONE DELLA FREQUENZA : $C_k \cdot \delta(f - kf_0)$ = trasformata effettiva di ogni C_k

$$\Rightarrow \mathcal{F}[x(t)] = \sum_k C_k \delta(f - kf_0)$$

Tavola del campionamento:

Nella realtà c'è bisogno di rappresentare un ~~segnale continuo~~ segnale continuo con un insieme di campioni (discreti), ovvero con NUMERI BINARI (stringhe di bit).
= VALORI DEL SEGNALE

Supponiamo di avere un segnale a banda strettamente limitata:



→ PERIODICIZZIAMO QUESTO SEGNALE:

$$X(f) = \sum_k C_k e^{\frac{j2\pi fk}{B}} \quad \begin{matrix} f \text{ al posto del tempo} \\ B \text{ al posto del periodo} \end{matrix}$$

intervallano completamente $X(f)$

$$C_k = \frac{1}{B} \cdot \int_B X(f) e^{-\frac{j2\pi fk}{B}} df \quad \begin{matrix} \text{SULLA DE} \\ \text{FINIZIONE} \\ \text{INIZIALE DI} \\ C_k \end{matrix}$$

MA POICHÉ SAPPIAMO CHE $x(t) = \int_B X(f) e^{j2\pi ft} df$, AVENDO $t = -\frac{k}{B}$:

$$C_k = \frac{1}{B} x\left(-\frac{k}{B}\right) \quad \text{con } B = 2f_m \text{ e } \frac{1}{B} = T_c = \text{tempo di campionamento}$$

Dunque:

$$X(f) = \sum_k C_k e^{\frac{j2\pi fk}{B}} = \sum_k \frac{1}{B} x(-kT_c) e^{\frac{j2\pi kf}{B}}$$

* Abbiamo considerato un generico contributo della sommatoria

$$x(t) = \int_B \left[\frac{1}{B} \sum_k x(-kT_c) e^{\frac{j2\pi kf}{B}} \right] e^{j2\pi ft} df$$

$$\text{Sviluppiamo } \frac{1}{B} \int_B x(-kT_c) e^{\frac{j2\pi kf}{B}} e^{j2\pi ft} df = \frac{1}{B} x(-kT_c) \int_B e^{\frac{j2\pi kf}{B}} e^{j2\pi ft} df$$

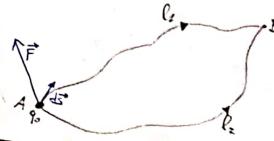
campo elettrostatico tra due lastre caricate
ALL'INTERNO: $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

LAVORO ELETTRICO

$$W(A \rightarrow B) = \int_{l_1}^l \vec{F} \cdot d\vec{s} = q_0 \int_{l_1}^l \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

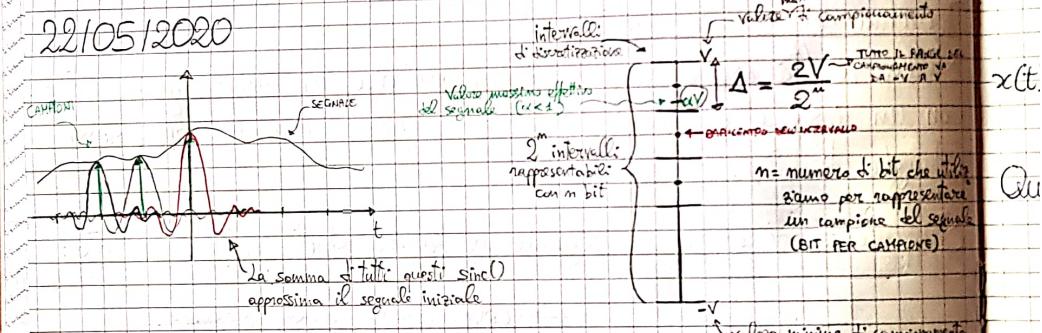
$$\vec{E} \text{ campo conservativo} \Rightarrow q_0 \int_{l_1}^l \vec{E} \cdot d\vec{s} = q_0 \int_{l_2}^l \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

ALL'ESTERNO: $E = 0$



$$\begin{aligned} &= \frac{1}{B} x(Kt_c) \int_{l_1}^{l_2} e^{j2\pi \frac{Kt_c + t}{\epsilon_0} f} df = \frac{1}{B} x(-Kt_c) \int_{-B/2}^{B/2} e^{j2\pi (Kt_c + t)f} df = \\ &= \frac{e^{j2\pi (Kt_c + t)f}}{j2\pi (Kt_c + t)} \Big|_{-B/2}^{B/2} \cdot \frac{1}{B} x(-Kt_c) = \frac{1}{B} x(-Kt_c) \cdot \frac{e^{j2\pi (\frac{Kt_c + t}{\epsilon_0})} - e^{-j2\pi (\frac{Kt_c + t}{\epsilon_0})}}{j2\pi (Kt_c + t)} = \\ &= x(-Kt_c) \cdot \frac{\sin[\pi(\frac{Kt_c + t}{\epsilon_0})]}{\pi(\frac{Kt_c + t}{\epsilon_0})} = x(-Kt_c) \cdot \operatorname{Sinc}\left(\frac{t+Kt_c}{\epsilon_0}\right) \end{aligned}$$

22/05/2020



$$\text{ERRORE MASSIMO: } \rho_m = \frac{\Delta}{2} = \frac{\pi V}{2 \cdot 2^m} = \frac{V}{2^m}$$

$$\text{ERRORE EFFICACE: } \rho_{eff} = \frac{\rho_m}{\sqrt{2}} = \frac{\rho_m}{\sqrt{2} \cdot 2^m}$$

$$\text{SEGNALE MASSIMO: } S_m = \alpha V$$

$$\text{SEGNALE EFFICACE: } S_{eff} = \frac{\alpha V}{\sqrt{2}}$$

$$\text{RAPPORTO SEGNALE/RUORE: } \frac{S}{N} = \left(\frac{\alpha V}{\sqrt{2} \cdot 2^m} \right)^2 = \alpha^2 \cdot 2^{2m}$$

l'errore di quantizzazione viene percepito come rumore (RUORE DI QUANTIZZAZIONE)

$$\frac{S}{N} [\text{dB}] = 10 \log_{10} (\alpha^2 \cdot 2^{2m}) = 10 \log_{10} \alpha^2 + m - 10 \log_{10} 2^2 =$$

$$= 10 \log_{10} \alpha^2 + 6m$$

Dipende dall'ente $\alpha \propto K$

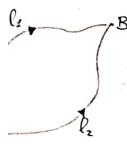
Involucro complesso:

$$\operatorname{Re}[A e^{j(2\pi f_0 t + \varphi)}]$$

Dà origine a un'armonica, ovvero:

$$A w \sin(2\pi f_0 t + \varphi)$$

Il nostro obiettivo è mostrare che tutti i segnali modulati possono essere rappresentati con questo inviluppo.



Partiamo da un segnale $x(t)$ reale.

TRASFORMATA
DI FOURIER: $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) [\cos(2\pi ft) + j\sin(2\pi ft)] dt$

REALE E PARI IN f IMMAGINARIA E DISPARA IN f

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [A(f) + jB(f)] e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{+\infty} [A(f) + jB(f)] [\cos(2\pi ft) + j\sin(2\pi ft)] df$$

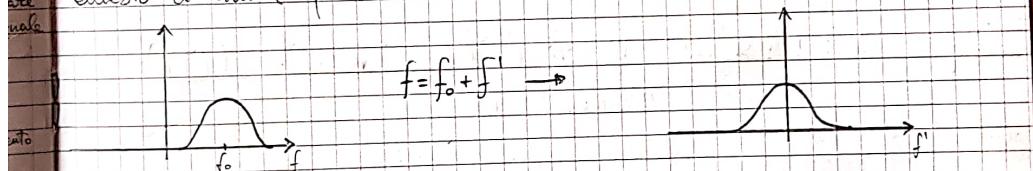
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} [A(f) \cos(2\pi ft) - B(f) \sin(2\pi ft)] df + j \int_{-\infty}^{+\infty} [A(f) \sin(2\pi ft) + B(f) \cos(2\pi ft)] df$$

REALE E PARI IN f

IMMAGINARIA E DISPARA IN f

$$x(t) = 2 \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \right\}$$

Questo ci aiuta quando abbiamo una banda base non centrata nell'origine



$$x(t) = 2 \operatorname{Re} \int_{f_0}^{+\infty} X(f_0 + f') e^{j2\pi(f_0 + f')t} df' = 2X(f_0 + f') =: I(f)$$

$$= \operatorname{Re} \left\{ e^{j2\pi f_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} I(f) e^{j2\pi f t} df \right\}$$

Modulo e fase: $A(t) e^{j\varphi(t)}$

ESPRIMIBILE COME

Parti reali/immag.: $a(t) + j b(t)$

$$x(t) = \operatorname{Re} \left\{ e^{j2\pi f_0 t} \cdot A(t) e^{j\varphi(t)} \right\} = A(t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi(t))$$

SEGNALI AM: $A(t) \cos(2\pi f_0 t)$ con $s(t)$ (proporz. al segnale)

SEGNALI PH: $A \cos(2\pi f_0 t + \varphi(t))$

SEGNALI FM: $A \cos(2\pi f_0 t + \varphi(t))$ con $\Delta f(t) \propto s(t) \rightarrow \Delta f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{ds(t)}{dt}$

→ I 3 gruppi dei segnali ANALOGICI.

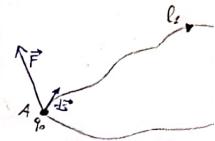
Campo elettrico statico tra due lastre caricate
All'interno: $E = \frac{q}{\epsilon_0}$

All'esterno: $E = 0$

LAVORO ELETTRICO

$$W(A \rightarrow B) = \int_{l_1}^{\vec{l}_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = q_0 \int_{l_1}^{\vec{l}_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$\vec{E} \text{ campo conservativo} \Rightarrow q_0 \int_{l_1}^{\vec{l}_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = q_0 \int_{l_2}^{\vec{l}_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$



Possiamo scrivere $x(t)$ anche come:

$$x(t) = \operatorname{Re} [(a(t) + j b(t)) (\cos(2\pi f_0 t) + j \sin(2\pi f_0 t))] =$$
$$= a(t) \cos(2\pi f_0 t) - b(t) \sin(2\pi f_0 t)$$

FASE EQUIVALENTA

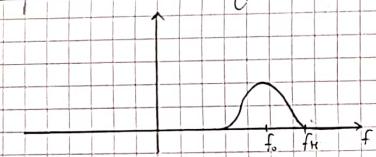
J due segnali (i due pezzi) viaggiano in modo indipendente
perché i segnali coseno, seno sono ortogonali tra loro

per qualunque segnale a banda stretta (modulato)

Tutti i segnali si basano
sulla stessa cosa a banda stretta

BANDA STRETTA VUL
DIRE CHE $B \ll f_0$

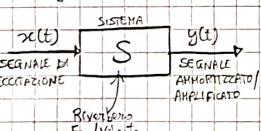
Campionamento dei segnali a banda stretta:



$B \ll f_0$ la frequenza di campionamento è questa

C'è bisogno di considerare i campioni REALI e i campioni IMMAGINARI (separatamente)

Trasformazioni (di segnali) lineari a tempo invariante (LTI):



Lineare: VALE IL PRINCIPIO DELLA SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI
Tempo invariante: $y(t)$ NON DIPENDE DALL'ISTANTE DI TEMPO

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad \leftarrow \text{CONVOLUZIONE}$$

Excitazione Funzione relativa al sistema S

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau) h(t-\tau) d\tau = (h(t)) \quad \rightarrow \text{Risposta impulsiva}$$

Case in cui l'excitazione
non è un impulso (troppo rispetto a t)

Ripetiamo la convoluzione:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau) h(\tau) d\tau$$

$$Y(f) = X(f) \cdot H(f)$$

$\hat{=} \mathcal{F}[h(t)]$

Se invece ho in ingresso un impulso...

$$x(t) \xrightarrow{h(t)} Y(f) = H(f) \cdot 1(f)$$

Se vediamo il sistema in funzione della frequenza:

$$X(f) \xrightarrow{H(f)} Y(f)$$

Potremmo avere anche più sistemi a cascata, dove l'uscita di un sistema è l'ingresso di un altro sistema:

$$X(f) \xrightarrow{H_1(f)} X(f)H_1(f) \xrightarrow{H_2(f)} X(f)H_1(f)H_2(f)$$

$$Y(f) = X(f) \prod_k H_k(f)$$

CONDIZIONE: le condizioni di sistema in ingresso e in uscita devono essere uguali prima del collegamento "a cascata" e dopo il collegamento.

Consideriamo il caso in cui il segnale d'uscita è fedele:

$$x(t) \xrightarrow{y(t)}$$

$$y(t) = g x(t-t_0)$$

$$Y(f) = H(f) X(f) = g X(f) e^{-j2\pi f t_0}$$

$$\text{PER LA FEDELTA': } H(f) = g e^{-j2\pi f t_0}$$

Ampiezza = costante

Fase = funzione lineare nel tempo ($\varphi = -2\pi f t_0$)
 $t_0 = -\frac{\varphi}{2\pi f}$

Se la fase non fosse lineare nel tempo:

$$\text{RITARDO DI GRUPPO: } t_g = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(f)}{df}$$

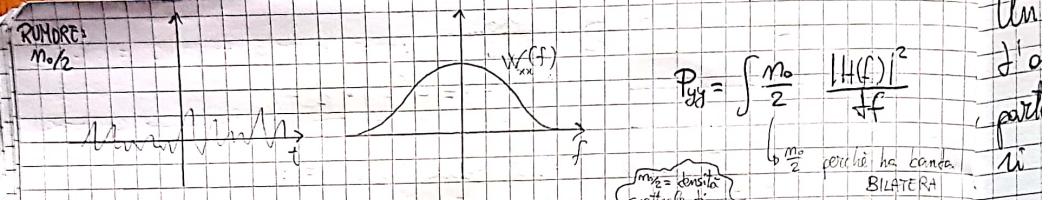
26/05/2020

$$Y(f) = X(f) H(f) \Rightarrow H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \text{funzione di trasferimento in frequenza}$$

VEDIAMO QUALCHE APPLICAZIONE:

$$E_{gg} = \int |Y(f)|^2 df \quad = \quad \int |X(f)|^2 |H(f)|^2 df$$

SPESSO DELL'ENERGIA IN INGRESSO
MODULO QUADRATO DELLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO



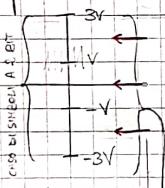
$$P_{yy} = \int \frac{m_2}{2} \frac{|H(f)|^2}{f} df$$

Un
d'o
part
li

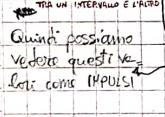
BAN

Transmissione Numerica:

Si ha una sorgente numerica che trasmette un flusso di bit, composto da bit singoli o da simboli (gruppi da n bit).


 È facile che ci sia rumore che può alterare in parte la percezione del segnale, per cui si è opportuno suddividere l'intervallo in cui il segnale può essere definito in più sottointervalli, per poi stabilire quale sottointervallo un dato segnale si trova.

FREC

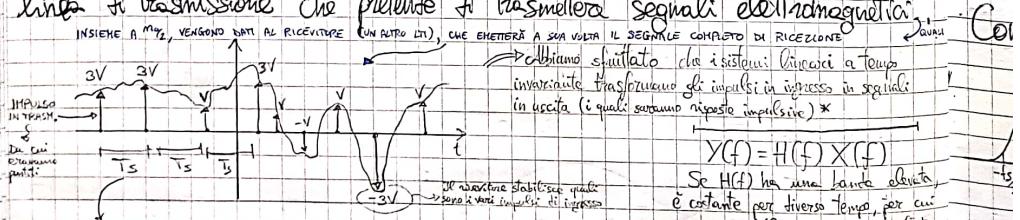

 Più bit compongono un simbolo, più è alta la precisione. N.B.: c'è comunque una possibilità di scagliare l'intervallo a causa del rumore che altera il segnale ricevuto.

La

YF

In particolare, dobbiamo trasformare i nostri bit/simboli in segnali elettrici, mettendo poi in un sistema lineare a tempo invariante, cosicché diventano segnali elettrici che possono essere inviati su linea di trasmissione che prenderà di trasmettere segnali elettromagnetici.

Col


 Dobbiamo spiegare che i sistemi lineari a tempo invariante trasformano gli impulsi in ingresso in segnali in uscita (i quali saranno risposto impulsivo). * $Y(f) = H(f) X(f)$

Se $H(f)$ ha una banda elevata, è costante per diverso tempo, per cui $Y(f)$ per tutto quel tempo è fedele a $X(f)$.

Tempo di simbolo = tempo tra un impulso e un altro (il ricevitore deve leggere il segnale negli istanti giusti (Sincronizzazione)).

affinché il segnale d'uscita sia fedele a quello di ingresso, è necessario avere una banda molto grande \rightarrow È UN PROBLEMA, perché la banda non è una risorsa molto grande.

→ Perciò, quello che dobbiamo cercare di fare, è riconoscere qual è il segnale di ingresso.

Col

se

RUMORI

cioché perché il sistema (LTI) è composto da:

PARTE IN TRANSMISSIONE - CANALE DI TRANSMISSIONE - CANALE DI RICEZIONE

Un buon modo per RESTRINGERE la banda è impostare che le forme d'onda dei vari "impulsi" (i segnali* che costituiscono insieme il segnale di partenza) non interferiscono tra loro, per cui il loro valore al di fuori del loro tempo di simbolo deve tendere a zero.

* CHE NELLO SPECIFICO Sono DEI SINGOLI LSI (Inter Symbol Interference) nulli

BANDA BASE MINIMA: $B_{\minima} = \frac{1}{2}$ frequenza di simbolo =

com = $= \frac{1}{2h}$ frequenza di bit, dove h = numero di bit per simbolo

$$\Rightarrow B_{\minima} = \frac{f_s}{2} = \frac{f_b}{2h}$$

FREQUENZA BINARIA: $f_s = f_b$

" QUATERNARIA: $f_s = f_b/2$

" OCTONERIA: $f_s = f_b/3$

L'insieme di queste sin(x) genera il segnale d'uscita

$$\pm 3V \leftrightarrow \pm 3 \sin(\frac{x}{T_s})$$

$$\pm V \leftrightarrow \pm \sin(\frac{x}{T_s})$$

Saranno le funzioni di trasferimento globali

$$\text{frequenza di trasferimento globale} = \sin(\frac{x}{T_s})$$

La funzione di trasferimento in FREQUENZA globale è:

$$Y(f) = \operatorname{rect}\left(\frac{f}{f_s}\right) \rightarrow H_{\text{totale}}(f) = \frac{1}{f_s} \operatorname{rect}\left(\frac{f}{f_s}\right)$$

→ È UN SEGNALE PRATICAMENTE IMPOSSIBILE DA REALIZZARE PERCHÉ DOVREREE TRASMETTERE FEDELEMENTE FINO A UNA CERTA FREQUENZA HA POCO NON DOVREREE TRASMETTERE PIÙ IN ASSOLUTO

Uma → È una variazione troppo drastica

Compromesso:

$$P = \text{roll off}$$

$$\text{BANDA MINIMA IDEALE} = B_H = \frac{f_s}{2}$$

$$\text{BANDA MINIMA VERA} = B_V = \frac{f_s}{2}(1+p)$$

Consideriamo un sistema binario (in cui in ingresso può entrare $\pm S_R(t)$; se fosse stato quaternario, le possibilità sarebbero state $\pm S_R(t), \pm 3S_R(t)$, ecc.)

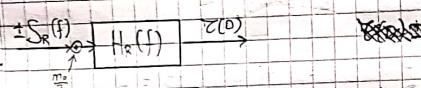
$$S_R(t) \rightarrow S_R(f) \quad (\text{LTI in frequenza})$$

$$\text{FRENDO IL RUMORE } \frac{M_0}{2} \text{ in W/Hz,}$$

IN MODO CHE SIA COSTANTE NELLA SUA BANDA

SEGNALE RICEVUTO A TEMPO ZERO: $\tau(0) = \int S_r(f) H_r(f) df$

$$\text{POTENZA} \rightarrow \sigma^2 = \int \frac{m_0}{2} |H_r(f)|^2 df$$

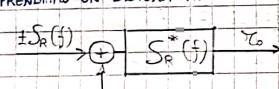


$$\text{POTENZA} \rightarrow |\tau(0)|^2 = \left| \int S_r(f) H_r(f) df \right|^2$$

$$\frac{S}{N} = \frac{\left| \int S_r(f) H_r(f) df \right|^2}{\frac{m_0}{2} \int |H_r(f)|^2 df} \leq \frac{\int |S_r(f)|^2 df \cdot \int |H_r(f)|^2 df}{\frac{m_0}{2} \int |H_r(f)|^2 df}$$

$$\Rightarrow \frac{S}{N}_{\max} \leq \frac{\int |S_r(f)|^2 df}{m_0/2}$$

PRENDIAMO UN SISTEMA FATTO COSÌ:



$$\tau_o = \pm \int S_r(f) S_r^*(f) df = \int |S_r(f)|^2 df$$

$$\sigma^2 = \frac{m_0}{2} \int |S_r^*(f)|^2 df = \frac{m_0}{2} \int |S_r(f)|^2 df$$

$$\frac{|\tau_o|^2}{\sigma^2} = \frac{(\int |S_r(f)|^2 df)^2}{\frac{m_0}{2} \int |S_r(f)|^2 df} = \frac{(\int |S_r(f)|^2 df)^2}{\frac{m_0}{2}} = E_b$$

$$\tau_o = E_b; \quad \sigma^2 = \frac{m_0}{2} E_b$$

ENERGIA PER BIT
DEL SEGNALE

Per la disegualanza di Schwarz,
questo è il tipo di sistema che dà
il rapporto segnale/rumore massimo
possibile

Il sistema ha detto FILTRO ADATTATO

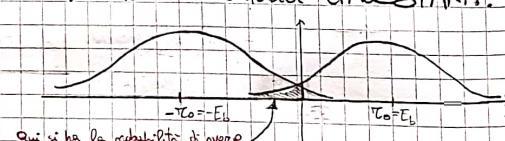
In realtà, il rumore è una variabile aleatoria GAUSSIANA.

P_{eb} := PROBABILITÀ DI ERRORE
DI UN BIT

$$P_{eb} = \int_{-\infty}^{-E_b} \frac{e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma} dv = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{m_0}} \right), \quad \frac{E_b}{m_0} =: \gamma$$

QUESTO VALE PER LE TRASMISSIONI BINARIE DI BIT

Nel caso, l'errore binario potrebbe essere:
sia nella parte sinistra, che in quella destra della
transmissione. (Proprio questo potrebbe interferire con -Eb, se si
è in un bit a 1)



qui si ha la probabilità di avere
un errore nella trasmissione di un bit

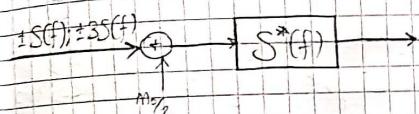
ANTIFIDALI (in cui si può scegliere se
trasmettere +S_r(t) o -S_r(t))

$$P_{\text{eb}} \approx \frac{e^{-x}}{3\pi} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{L'approssimazione diventa troppo scadente per probabilità di errore molto bassa} \\ (\text{dell'ordine di } 10^{-2} \text{ o inferiore}) \end{array}$$

Di norma, la trasmissione è considerata buona se $P_{\text{eb}} = 10^{-6}$, che si ha per $x \approx 10,5 \text{ dB}$

28/05/2020

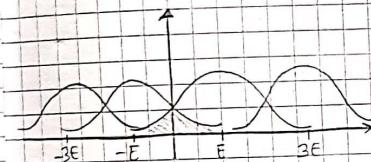
analizziamo ora la trasmissione quaternaria (2 bit per simbolo).



→ Sistema col massimo SNR possibile

→ ENERGIA DEL SEGNALE ELEMENTARE: $E = \int |s(t)|^2 dt$

↳ STAVOLTA NON È L'ENERGIA PER BIT!



$$P[\text{ERRORE}] = P_e = \frac{1}{2} \left[\operatorname{erfc} \sqrt{\frac{E}{m_0}} + \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{1}{3} \frac{E}{m_0}} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{E}{m_0}} = \left(\frac{1}{2} \cdot 1.5 \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{E}{m_0}} \right) = \frac{1.5 e^{-\frac{E}{m_0}}}{3\pi}$$

→ Le coppie di bit associate a ciascuna anta sono nell'ordine:

00 - 01 - 11 - 10 ^{→ CODICE DI GRAY} → perciò, in caso di interferenza, ci si può sbagliare al massimo per 1 bit su 2 \Rightarrow
 $\Rightarrow P[\text{ERRORE DI UN BIT}] = P_b \approx \frac{1}{2} P_e = \frac{1.5 e^{-\frac{E}{m_0}}}{6\pi}$

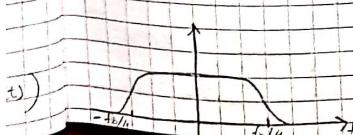
ENERGIA MEDIA = media dell'energia nel caso del segnale $s(t)$ e dell'energia nel caso del segnale $3s(t) = \frac{E+9E}{2} = 5E =: E_N$

ENERGIA MEDIA PER 2BT = $E_b = \frac{E_N}{2} = \frac{5}{2} E$

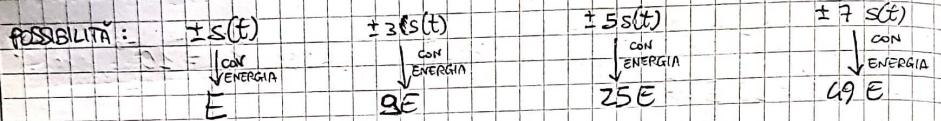
$$\Rightarrow P_b \approx \frac{1.5 e^{-\frac{E}{m_0}}}{6\pi} = \frac{1.5}{2} e^{-\frac{E}{3m_0}} \quad \rightarrow \text{Per avere la stessa prob. di errore nello stesso trasm. binario, devo moltiplicare l'energia per bit di un fattore } \frac{5}{2}$$

$$\Delta x = \frac{\Delta E_b}{m_0} = \frac{5}{2} \stackrel{(x)}{\Rightarrow} 4 \text{ dB}$$

→ Rispetto alla trasmissione binaria, è possibile incrementare la banda in parità di flusso di bit
 \downarrow
 ↳ Questo è l'aumento della portata



E se la trasmissione è ottonica...



$$P_e = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{E}{m_0}} + \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{E}{m_0}} + \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{E}{m_0}} + \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{E}{m_0}} \right] =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{E}{m_0}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{2} e^{-\frac{E}{m_0}}$$

(Con l'aumentare dei bit per simbolo, questo fattore si può approssimare a 2 (già da 16 livelli))

P_e Anche qui, in caso di interferenza, ci si può sbagliare al massimo per 1 bit su 3 \Rightarrow

$$\Rightarrow P_b = \frac{P_e}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{4} e^{-\frac{E}{m_0}}$$

POTENZA RICEVUTA: $P_r = \frac{E_b}{T_b} = E_b f_b$

ENERGIA MEDIA: $E_m = \frac{E + 9E + 25E + 49E}{4} = 21E$

ENERGIA DI 8T: $E_b = \frac{E_m}{3} = 7E \Rightarrow E = \frac{E_b}{7}$

$$\Rightarrow P_b = \frac{7}{3 \cdot 4} e^{-\frac{E}{m_0}}$$

Per avere la stessa probabilità di errore risp. tra sm. binaria, c'è bisogno di un'energia per bit 3 volte + grande

Su 16 livelli il fattore diventa $\frac{1}{4} \Rightarrow \Delta Y = 7 \stackrel{(\approx)}{=} 8.5 \text{ dB}$

\rightarrow In compenso, la banda può essere $\frac{1}{3}$ rispetto a quella della trasm. binaria:
 $f_s = \frac{f_b}{3}$; BANDA MINIMA = $\frac{f_b}{6}$

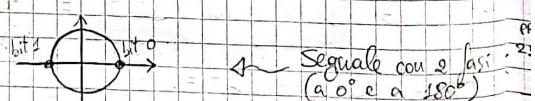
Banda traslata (\rightarrow modulazione):

2PSK = 2 Phase Shift Key

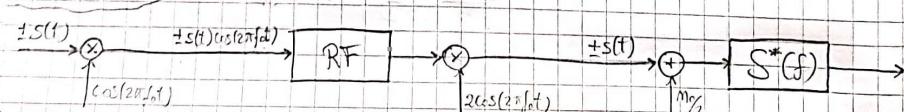
$\cdot \cos(2\pi f_t t)$

$\cdot \cos(2\pi f_t t + \pi) = -\cos(2\pi f_t t)$

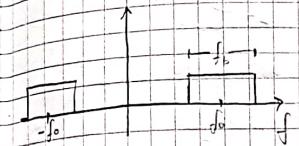
NOTA: la trasmissione è in linea col nostro es.



DUE POSSIBILI SEGNALE CHE POSSIAMO TRASMETTERE SONO: $\pm s(t) \cos(2\pi f_t t)$



$$\pm s(t) \cos(2\pi f_0 t) = \pm \frac{s(t)}{2} [e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}]$$



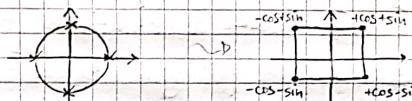
LA TRASFORMATRA

$$\text{SPECTRUM: } \frac{S(f-f_0) + S(f+f_0)}{2}$$

$$P_b \approx \frac{e^{-8}}{3\pi}$$

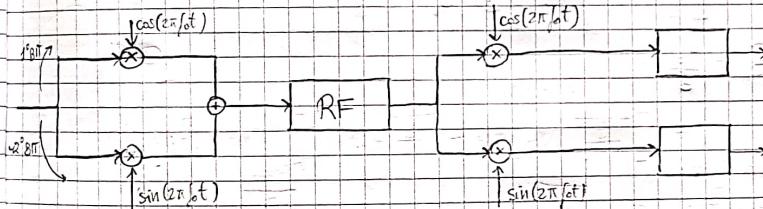
$$\text{BANDA MINIMA: } B_M = f_b \quad (\text{non più } \frac{f_b}{2})$$

Passiamo al 4PSK (con 4 fasi):



$$\text{Combinationi possibili: } \pm s(t) \cos(2\pi f_0 t) \quad \pm s(t) \sin(2\pi f_0 t)$$

$$\text{cioè } \begin{matrix} + & + \\ - & + \end{matrix}, \begin{matrix} + & - \\ - & + \end{matrix}, \begin{matrix} - & + \\ + & - \end{matrix}, \begin{matrix} - & - \\ - & - \end{matrix}$$



La probabilità di errore di bit è esattamente uguale a quella della trasmissione binaria perché i bit vengono mandati (simistati) in due flussi di ca-

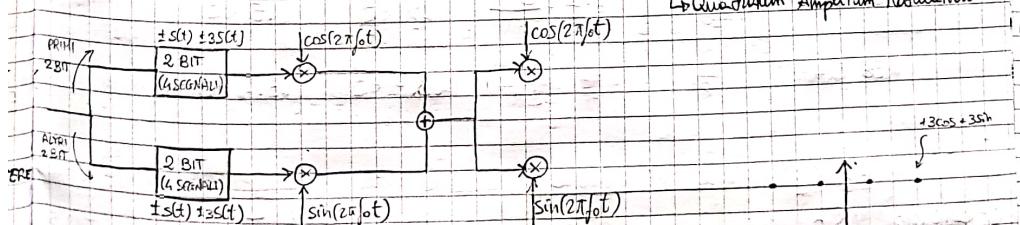
mali differenti e indipendenti:

$$P_b \approx \frac{e^{-8}}{3\pi}$$

Quel che cambia è la banda minima, che diventa: $B_M = f_b/2$

Passiamo ora alla modulazione a 16 LIVELLI (16 QAM)

\rightarrow Quadrature Amplitude Modulation



La probabilità di errore di bit è esattamente uguale a quella della trasmissione quaternaria perché i bit

vengono simpatetici in due flussi di canali indipendenti:

$$P_b \approx \frac{1.5}{2} \cdot \frac{e^{-\frac{\gamma_{2.5}}{2\pi}}}{3\pi} ; \quad (1-P_b) = (1-P_b)^4$$

$$\text{BANDA MINIMA: } B_m = \frac{f_b}{4}$$

$\rightarrow P[\text{ERRORE DI SIMBOLO}]$

$\rightarrow D[\text{NON ERRORE DI SIMBOLO}] = P[\text{NON ERRORE DI VERSO} \leq 4 \text{ BIT}]$

Analizziamo adesso la 64 QAM:

È fatta dalla combinazione di due trasmissioni orizzontale (graficamente sempre una per ogni asse cartesiano) \Rightarrow le combinazioni totali possibili

Per gli stessi motivi di prima, la probabilità di errore è la stessa del sistema binario:

$$P_b = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{e^{-\frac{\gamma_7}{2\pi}}}{3\pi}$$

$$\text{BANDA MINIMA: } B_h = \frac{f_b}{6}$$

29/05/2020

MODULAZIONE	BANDA MINIMA	P_b	POTENZA PER $P_b \approx 10^{-6}$	ΔY
2 PSK	f_b	$\frac{e^{-\gamma}}{3\pi}$	10.5 dB	
4 PSK	$\frac{f_b}{2}$	$\frac{e^{-\gamma}}{3\pi}$	10.5 dB	
16 QAM	$\frac{f_b}{4}$	$\frac{1.5}{2} \cdot \frac{e^{-\frac{\gamma_{2.5}}{2\pi}}}{3\pi}$	14.5 dB	4 dB
64 QAM	$\frac{f_b}{6}$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{e^{-\frac{\gamma_7}{2\pi}}}{3\pi}$	19 dB	8.5 dB
256 QAM	$\frac{f_b}{8}$	$\frac{2}{4} \cdot \frac{e^{-\frac{\gamma_{12}}{2\pi}}}{3\pi}$	23.7 dB	13.2 dB

Cotici a ~~la~~ correzione di errore:

Abbiamo visto che in un sistema 4PSK, a livello teorico, $\gamma_{min} = 10.5$ dB per avere una P_b minimizzata.

Ma, nel 1948, Shannon pubblicò un articolo in cui mostrò che, nel

la pratica, nei sistemi GPSK, la potenza è in media appena 1.7dB
 ~ Ci sono 9 dB di differenza (che corrispondono a un ordine di grandezza !) ~ Si conclude che i sistemi di telecomunicazione nella pratica fanno scarsi ~ Necessità di correggere gli errori nella trasmissione

→ DISTANZA = numero di bit di differenza tra due parole (o sequenze di bit)
 → Il ricevitore, tra i possibili parole tra cui scegliere, ~~sceglie~~ la parola effettivamente trasmessa in base alla distanza che intercorre tra le parole possibili e quella che effettivamente il ricevitore legge.
 Più le parole tra cui scegliere stanno (→ sono diverse) tra loro, più è facile per il ricevitore individuare la parola effettivamente trasmessa (e quindi correggere gli eventuali errori). È per questo motivo che si aggiungono dei bit aggiuntivi (diversi) alle varie parole.

MASSIMO NUMERO DI ERRORI POSSIBILI AFFINCHÉ SI POSSANO CORREGGERE:

$$t = \frac{d-1}{2} \Rightarrow j = 2t+1 \quad (j \text{ è la distanza tra le parole})$$

MASSIMO NUMERO DI ERRORI POSSIBILI AFFINCHÉ SI POSSANO ALMENO RILEVARE:

$$t = j - 1 \Rightarrow j = t + 1$$

PAROLA ORIGINALE	BIT AGGIUNTIVI (DI PARTE)
K	$m-K$

BIT $\underbrace{\dots}_{m}$ SONO POSSIBILI 2^m PAROLE IN TUTTO

Non possono essere considerate tutte perché devono rispettare una distanza minima j (per garantire un certo t)

→ Aggiungendo gli $m-K$ bit, a parità di bit rate, il throughput diminuisce
 → BIT RATE COSTANTE SI HA PER BANDA COSTANTE

$$R_c := \text{RAPPORTO TRA BIT UTILI E BIT TOTALI} \Rightarrow \text{thr} = R_c \cdot \text{bit rate}$$

N.B.: La probabilità di errore di bit non cambia; quella che diminuisce è la probabilità di errore nell'intera parola ($P_{bc} = P_{bmc}$)

→ Se il throughput è costante ⇒ la banda deve aumentare con un fattore $R_c (= m/k)$

$$\text{NUOVA POTENZA RICEVuta: } Y' = Y \cdot \frac{K}{n}$$

$$P_{bc} > P_{bmc} \xrightarrow[\text{SENZA ITA}]{} \text{SENZA ITA}$$

Su

J=

La

Me

Codice BCH: \rightsquigarrow BINARIO

$n = 127$ bit

Supponiamo che ci sia un oracolo in grado di correggere ~~un~~ un oracolo.

Per far ciò, lui ha bisogno di riconoscere:

\rightarrow 1 configurazione se non ci sono errori

\rightarrow 127 configurazioni per individuare 1 errore

\Rightarrow TOTALE: 128 configurazioni, che si hanno con 7 bit $\Rightarrow K=120$; $n-K=7$

E se l'oracolo volesse correggere anche il secondo errore?

Avebbe bisogno di riconoscere:

\rightarrow 1 altra configurazione se non c'è il secondo errore

\rightarrow 126 altre configurazioni ~~per~~ per individuare il 2° errore

\Rightarrow TOTALE: 127 configurazioni, che si hanno con 7 bit, che, aggiunti ai 7 bit calcolati precedentemente, fanno 14 bit $\Rightarrow K=113$; $n-K=14$

In generale, correggere un errore in più richiede 7 bit in più nel campo aggiuntivo da $n-K$ bit:

BCH (127, 120, 1) \rightarrow 1 ERRORE

BCH (127, 113, 2) \rightarrow 2 ERRORE

BCH (127, 106, 3) \rightarrow 3 ERRORE

\Rightarrow Il BCH non è molto efficiente dal punto di vista del throughput.

Non si devono avere a disposizione $n=127$ bit, ma in generale un numero $n = 2^h - 1$, dove h si rivela essere il numero di bit necessari per correggere un errore.

PARTICOLARITÀ DEI VALORI n NON PRIMI (es. $n=63$):

6 bit per 1 errore

6 bit per 6 errori

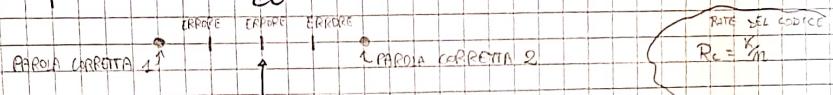
2·6 bit per 2 errori

4·6+3 bit per 5 errori

3·6 bit per 3 errori

\hookrightarrow È SEMPRE UN SOTTOMULTIPLO DI 6

Supponiamo di avere un codice BCH $(127, 120, 1)$ (con distanza tra le parole $d=3$) ; se aggiungiamo un ulteriore bit ottengono il codice $(128, 120, 1)$, la distanza tra le parole diventa $d=4$; in questo modo, non viene aumentata la capacità di correggere un errore, ma solo di rilevarlo !



$$RATE DEL CODICE \\ R_c = \frac{k}{n}$$

Nel passaggio da $d=3$ a $d=4$, viene aggiunta questa possibilità che non permette di decidere se siamo partiti dalla PAROLA CORRETTA 1 o dalla PAROLA CORRETTA 2 !

$$1 - P_p = \sum_{h=0}^t \binom{m}{h} P_{bc}^h (1 - P_{bc})^{m-h}$$

← codice lungo m che correge al massimo t bit

prob. errore parola

$$P[\text{ERRORE DI BIT DOPO CODIFICA}] = \frac{d}{m} P_p$$

← Se sbagliamo a scegliere la parola giusta, nella ricezione scriviamo a impostare i bit sbagliati (che è invertire la distanza tra le sequenze di bit possibili)

= $\rightarrow P_b \rightarrow$ prob. errore bit prima della codifica
 \rightarrow bit rate è costante (\rightarrow il throughput diminuisce)

Codici di Reed Solomon (RS): \rightarrow NON BINARI

$n = 2^h - 1$ simboli, dove ciascun simbolo è composto da h bit.

\rightarrow può essere anche chiamato BYTE

Prendiamo $n = 127$:

Per correggere un errore, come prima, servono 128 configurazioni totali che si hanno con 7 bit (quindi un solo simbolo). Ma serve anche un altro simbolo per fare com'è fatto il simbolo originario (cioè per correggere).

In generale, per correggere t errori, servono $2t$ simboli nella sezione composta dagli $n-K$ simboli.

$$(2t = n - K)$$

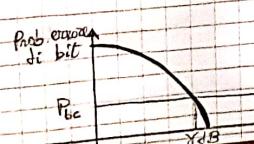
Al solito, $t = \frac{d-1}{2}$

$$1 - P_p = \sum_{h=0}^t \binom{m}{h} P_{sc}^h (1 - P_{sc})^{m-h}$$

prob. errore simbolo

04/06/2020

Coding gain:



\rightarrow Se il bit ha meno energia è + scattato a errori

Interleaver:

Burst burst: PAROLA CHE COMINCIA CON UN ERRORE, TERMINA CON UN ERRORE E CONTIENE AL SUO INTERNO UN NUMERO INDETERMINATO DI ERROTI

Supponiamo di avere un codice (BCH / R.S.) che corregge t errori.

PAROLA 1		PAROLA 2			
"		X	X	X	>
2		X	Y	>	>
"	2	X	X	>	>
"	4	Y	Y	X	X
"	5	Y	Y	>	X

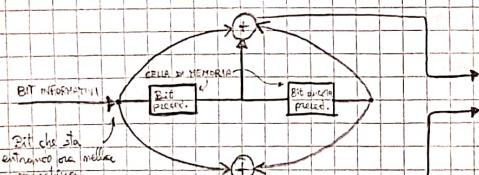
Se parole vanno analizzate per colonne

Se $t=4$, questo è il burst di errore massimo correggibile

ERRORE DI BURST MASSIMO CORREGGIBILE = $P \cdot t$

↳ PREZZO da pagare: RITARDO

Codici convolutional:



OBIETTIVO: aumentare la distanza fra le parole.

Nella macchina disegnata qui sopra, la coppia di parole
00000000 10000000

vengono decodificate in

0000000000000000 1110110000000000

⇒ la distanza d passa da 1 a 5

→ L'energia per bit aumenta di un fattore 5 perché la distanza è ora moltiplicata di un fattore 5 ma, nel frattempo, diminuisce di un fattore 2 perché vengono presi 2 bit per volta (il rate del codice diminuisce).

$$P_e \approx \frac{Q}{3\pi}$$

Aumento dell'energia di un fattore di 5² =

↳ A pari di probabilità di parola, si guadagnano 4 dB di potenza

Jm

L

e

i

-

]

S

C

N

→

E

F

E

T

U

E

R

]

Scansionato con CamScanner

In generale:

$$P_e \approx \frac{e^{-d_{free} \cdot R_c}}{3\pi}$$

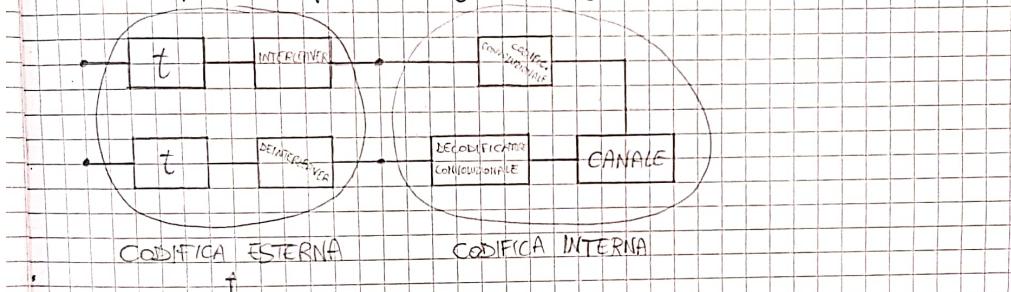
Nel caso precedente:

$$d_{free} = 5 \quad R_c = 1$$

DISTANZA minima tra le parole di uscita

La probabilità di errore di bit è pressoché uguale alla probabilità di errore di parola.

Il codificatore, quanto stoglia, stoglia tutto \rightarrow BURST DI ERRORE



Serve per gestire i burst di errore

Con i codici convoluzionali, aumenta il guadagno in codifica ma finge il rate!

ANCHE QUI CI VUOLE UN COMPROMESSO

\Rightarrow Utilizzo della PUNTURAZIONE, in cui si cerca di non far uscire il d_{free} più dei bit rispetto a quanti ne sono entrati, ma un po' meno.

ESEMPIO:

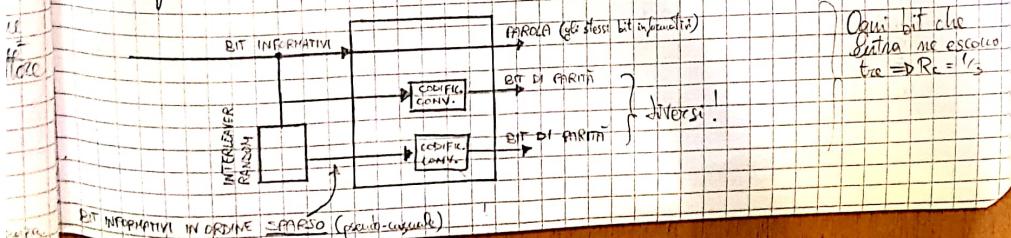
2 BIT ENTRANTI	
SI	NO
SI	SI

(POSSIBILE RATE CODE) \leftarrow Rispetto alla maggioranza di punturazione, si ha una maggiore efficienza ma una capacità crittografica minore

3 BIT USCENTI ANZICHÉ 4 $\Rightarrow R_c = \frac{2}{3}$

Tutto ciò:

È di fatto un insieme di due (o più) codici.



$$P_e = \frac{e^{-d_{\max} \cdot 8^{-1/3}}}{3\pi} \cdot \frac{1}{N}$$

+ prob. errore parola
(P_p)

DETERMINATA DA N BIT

J che convolutionali si compongono "male" allo stesso modo
(sullo stesso bit) con probabilità $\frac{1}{N}$, dove N = num. bit

Se 1

$C_3 +$

$C_1 +$

..

Perché comunque un bit capita nella stessa posiz
nei due convolutionali con probabilità $\frac{1}{N}$

In particolare: i codici

Eravate sbagliato e specie

avevate sbagliato per le pos

izioni: (es. due bit insieme)

ti a 2) e non distante

tra loro. La probabilità

che il bit 2 coincide con

la posizione sbagliata

che l'errore è $\frac{1}{N}$



→ è un buonico verso e proprio

In particolare, si fanno tante stime in serie parole
stimate da altri percorsi
queste si rispondono tra
loro una stima

Quel che mancava io
vedi tu e viceversa

L'ideale sarebbe che i due decodificatori facessero
telle stime più "simili" sui bit "complementari".

→ Si tratta di un sistema ottimo dal punto di vista delle corre-
zione degli errori ma ha molto ritardo (ha rate basso e necessita
di tante iterazioni).

Anche qui gli errori si propagano (i codici erano
se stagionati, sbagliano anche tutto il resto)

$\Rightarrow P_e \approx P_b$

LDPC (Low Density Parity Check - codice a bassa densità):

00000000	00000000	000000
10000000	11110000	000000
01000000	00001111	000000
00100000	00000000	1111

Parole originali
(informative)

Bit aggiuntivi x aumentare
la distanza tra le parole
(bit di parità/controlla)

È possibile allungare
le parole quanto si vuole.
Ma esse potrebbero diventare molto lunghe

Indice, il rate è
aggiustabile con delle
perturbazioni + efficienti

Ha comunque sembra un meccanismo efficiente per parole
inizialmente già lunghe, anche perché è ben + veloce del
TURBO CODICE

→ Parola che arriva: $C_1, C_2, C_3, \dots, C_{12}$ (per esempio)

MATRICE DEL CODICE:

Σ

Non vediamo come si trova
questa matrice ma possiamo
dire che esiste una matrice H
tale che il prodotto riga x colonna
che la parola ricevuta e H è
uguale a zero (se la parola è giusta)

0	1			
1	0			
0	0			
0	1			
1	0
1	0			
0	0			
0	0			
0	1			

Permette anche di
cambiare il rate R_c
(rate del codice)

Se la parola è corretta:

$$C_3 + C_6 + C_7 + C_8 = 0$$

→ In base agli s di ciascuna colonna della matrice

$$C_1 + C_2 + C_5 + C_{12} = 0$$

...

→ Se il prodotto riga per colonna alla fine non è zero, allora si salverà
no delle ipotesi sui bit della parola informativa ragionando sulle
proseguiture dei valori dei ~~bit~~ bit → belli ripetuti

→ Rispetto ai meccanismi visti precedentemente, questo è molto
complesso e macchinoso ma, come già detto, è molto +
veloce del Turbo codice.

08/06/2020

Esercizio 1:

$$\mathcal{F}[t^{1/2} \cdot u(t)]$$

→ Bisogna motivare il motivo per cui la trasformata esiste.

$$\mathcal{F}[t] \exists \rightarrow \text{A maggior ragione } \mathcal{F}[t^{1/2}] \exists \quad (\text{t tende a } +\infty \text{ più
lentamente di } t \text{ per } t \rightarrow \infty)$$

$$x(t) = t^{1/2} \cdot u(t)$$

SERVITA DI $u(t)$

$$\frac{dx(t)}{dt} = +\frac{1}{2} t^{-1/2} u(t) + \underbrace{t^{1/2} S(t)}_{=0 \text{ perché } S(t) \text{ è definito solo per un intervallo di tempo, in cui } t^{1/2} \geq 0} = +\frac{1}{2} \frac{t^{1/2}}{t} u(t) \rightarrow \frac{dx(t)}{dt} = +\frac{1}{2} \frac{x(t)}{t} \rightarrow t \frac{dx(t)}{dt} = +\frac{1}{2} x(t)$$

$$\text{Trasformiamo: } \frac{1}{(fj^2\pi)} \frac{d}{df} [\int j^{2\pi f} X(f)] = +\frac{1}{2} X(f)$$

$$\rightarrow \frac{dX(f)}{df} \cdot f + X(f) = -\frac{1}{2} X(f) \rightarrow \frac{dX(f)}{df} \cdot f = -\frac{3}{2} X(f)$$

$$\rightarrow \frac{dX(f)}{X(f)} = -\frac{3}{2} \frac{df}{f} \rightarrow \log(X(f)) = \frac{3}{2} \log(f) + C = \log K$$

$$\rightarrow \log(X(f)) = \log(f)^{-3/2} + C \rightarrow X(f) = \frac{K}{f^{3/2}}$$

Se c'è una condiz. iniziale tipo $\mathcal{F}[f=1] = \frac{0.056}{j^{3/2}} \dots$

$$X(f) = \frac{0.056}{(jf)^{3/2}}$$

Esercizio 2:

$$\mathcal{J}\left[\frac{1}{t^2}\right]$$

$$\rightarrow \mathcal{J}[t^2] \exists \Rightarrow \mathcal{J}\left[\frac{1}{t^2}\right] \exists \quad (\text{è l'inverso})$$

$$\frac{1}{t^2} = -\frac{d}{dt} \frac{1}{t}$$

$$\text{Sappiamo che } \mathcal{J}\left[\frac{\text{sgn}(t)}{t}\right] = \frac{1}{j\pi f} \Rightarrow \mathcal{J}\left[\frac{1}{t} \text{sgn}(-f)\right] = \frac{1}{j\pi f}$$

$$\Rightarrow \mathcal{J}^{-1}\left[-j\pi \text{sgn}(f)\right] = \frac{1}{t}$$

$$\text{Trasformiamo: } X(f) = -j2\pi f \left[-j\pi \text{sgn}(f)\right] = -2\pi f \text{sgn}(f)$$

Esercizio 3:

$$\mathcal{J}[x(t)] = \frac{1}{\sqrt{f}} \mu(t)$$

$$\rightarrow \mathcal{J}\left[\frac{1}{t}\right] \exists \Rightarrow \text{a maggior ragione } \mathcal{J}\left[\frac{1}{\sqrt{f}}\right] \exists$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{1}{2} t^{-3/2} \mu(t) + t^{-1/2} \delta(t)$$

$$t \frac{dx(t)}{dt} = -\frac{1}{2} t^{-1/2} \mu(t) + (t^{1/2} \delta(t)) = 0$$

$$\text{Trasformiamo: } \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) \frac{1}{f} \left[j2\pi f X(f)\right] = -\frac{1}{2} X(f)$$

$$\Rightarrow \frac{dX(f)}{df} f + X(f) = \frac{1}{2} X(f)$$

$$\Rightarrow \frac{dX(f)}{df} f = -\frac{1}{2} X(f) \Rightarrow \frac{dX(f)}{X(f)} = -\frac{1}{2} \frac{df}{f}$$

$$\Rightarrow \log(X(f)) = -\frac{1}{2} \log(f) + C \Rightarrow X(f) = \frac{K}{f^{1/2}}$$

$$\text{CONDIZ. INIZIALE: } \mathcal{J}[f=1] \approx \frac{0.7}{j\pi}$$

$$\Rightarrow X(f) = \frac{0.7}{(jf)^{1/2}}$$

Esercizio 4:

$$x(t) = |t| \quad \forall t = t \text{sgn}(t)$$

$$\mathcal{J}[\text{sgn}(t)] = \frac{1}{j\pi f}$$

$$\mathcal{J}[t \cdot f(t)] = \frac{1}{(-j2\pi)} \mathcal{J}f \left[\frac{1}{j\pi f} \right]$$

trasform. di $f(t)$

$$\text{Trasformiamo: } -\frac{1}{j2\pi} \frac{1}{jf} \left[\frac{1}{j\pi f} \right] = -\frac{1}{2\pi} (-1 \cdot f^{-2}) \quad \text{----}$$

Esercizio 5:

$$x(t) = \frac{t}{t^2 - j}$$

→ Per $t \rightarrow +\infty$ asintoticamente va come $t^{1/2}$

⇒ La trasformata esiste ✓

$$\frac{t}{t^2 - j} = \frac{t}{(t+j)(t-j)}$$

$$\sqrt{j} = \frac{1}{\sqrt{2}} + j \frac{1}{\sqrt{2}} ; \quad -\sqrt{j} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - j \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Scomponiamo in frazioni semplici: } \frac{A}{[t + (\frac{1}{\sqrt{2}} + j \frac{1}{\sqrt{2}})]} + \frac{B}{[t - (\frac{1}{\sqrt{2}} + j \frac{1}{\sqrt{2}})]}$$

$$\Rightarrow At - A(\frac{1}{\sqrt{2}} + j \frac{1}{\sqrt{2}}) + Bt + B(\frac{1}{\sqrt{2}} + j \frac{1}{\sqrt{2}}) = t$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -A+B=0 \end{cases} \Rightarrow A=B=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2}}{[t + (\frac{1}{\sqrt{2}} + j \frac{1}{\sqrt{2}})]} + \frac{\frac{1}{2}}{[t - (\frac{1}{\sqrt{2}} + j \frac{1}{\sqrt{2}})]}$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{[t + (\frac{1}{\sqrt{2}} + j \frac{1}{\sqrt{2}})]} \xrightarrow{\text{SFRUTTIAMO CHE } \mathcal{J}[x(t-t_0)] = X(f) e^{j2\pi f t_0}}$$

Per la prima frazione

→ Considero $\frac{1}{t + j\frac{1}{\sqrt{2}}}$ e applico alla fine la traslazione temporale ($e^{j2\pi f t_0}$)

→ Alla seconda frazione invece la traslazione temporale è $e^{-j2\pi f t_0}$

Per ora trattiamo le funzioni $\frac{1}{t + j\frac{1}{\sqrt{2}}}$ e $\frac{1}{t - j\frac{1}{\sqrt{2}}}$

Ricordiamoci che: $\mathcal{J}[e^{at} u(t)] = \frac{1}{a + j2\pi f} \Rightarrow \mathcal{J}^{-1}[e^{at} u(-f)] = \frac{1}{a + j2\pi f} =$

$$= \frac{1}{\frac{j2\pi}{\sqrt{2}} + t} = \frac{1}{-j\frac{1}{\sqrt{2}} + t}$$

$$\text{A questo punto imponiamo che } \frac{1}{t - j\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{-j\frac{1}{\sqrt{2}} + t}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{j2\pi}}{\frac{\alpha}{2\pi} + t} = \frac{\frac{1}{j2\pi}}{-\frac{\alpha}{\sqrt{2}} + t} \xleftarrow{\text{trasformiamo}} e^{\frac{2\pi}{\sqrt{2}} f} u(-f)$$

Ma noi avevamo $\frac{1/2}{-j\sqrt{2} + t} \xleftarrow{\text{trasformiamo}} j\pi e^{\frac{2\pi}{\sqrt{2}} f} u(-f)$

$$\Rightarrow \mathcal{J}\left[\frac{1/2}{t - (\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}})}\right] = j\pi e^{\frac{2\pi}{\sqrt{2}} f} u(f) e^{-j2\pi f \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Ora ricordiamoci ^{sempre} che $\mathcal{J}[e^{-at} u(t)] = \frac{1}{a + j2\pi f}$ e facciamo lo stesso ragionamento per calcolare $\mathcal{J}\left[\frac{1/2}{t + (\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}})}\right]$

Esercizio 6: Trovare la trasformata ^{del segnale} tale che

$$(j2\pi f)^2 X(f) - 4X(f) = \frac{1}{\alpha + j2\pi f}$$

$$\Rightarrow X(f) \left[-4\pi^2 f^2 - 4 \right] = \frac{1}{\alpha + j2\pi f} \Rightarrow X(f) = \frac{-1}{(\alpha + j2\pi f)(\alpha\pi^2 f^2 + 4)}$$

Esercizio 7:

$$\mathcal{J}\left[\frac{1}{t^3 + t^2 + t + 1}\right] = \mathcal{J}\left[\frac{1}{t^2(t+1) + (t+1)}\right]$$

La nostra funzione è: $\frac{1}{(t^2+1)(t+1)} =$

$$= \frac{A + Bt}{t^2 + 1} + \frac{C}{t+1} = \frac{At - A + Bt^2 - Bt + Ct^2 + C}{(t^2 + 1)(t + 1)}$$

$$\Rightarrow At - A + Bt^2 - Bt + Ct^2 + C = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B + C = 0 \\ A - B = 0 \\ -A + C = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1/2 \\ B = -1/2 \\ C = 1/2 \end{cases}$$

Risolviamo separatamente i tre pezzi:

$$\frac{A}{t+1} ; \quad \frac{8t}{t^2+1} ; \quad \frac{C}{t-1}$$

Supponiamo che $\mathcal{J}[e^{-\alpha t}] = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 t^2} \Rightarrow \mathcal{J}^{-1}[e^{-\alpha f}] = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2} =$

$$= \frac{\frac{2\alpha}{4\pi^2}}{\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 + t^2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2\pi} = 1 \Rightarrow \alpha = 2\pi \quad (\text{per avere } t^2)$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{2\alpha}{4\pi^2}}{\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 + t^2} = \frac{\frac{2 \cdot 2\pi}{4\pi^2}}{1+t^2} = \frac{1}{\pi(1+t^2)} \xrightarrow{\text{trasformiamo}} e^{-2\pi|f|}$$

$$\Rightarrow \mathcal{J}\left[\frac{-1/2}{1+t^2}\right] = -\frac{1}{2} \pi e^{-2\pi|f|}$$

Il secondo pezzo è come il primo ma moltiplicato per t

$$\Rightarrow \mathcal{J}\left[\frac{-1/2 t}{1+t^2}\right] = \frac{-1/2}{-\pi^2} \mathcal{J}\left[\pi e^{-2\pi|f|}\right] = \frac{1/2 \pi}{-\pi^2} e^{-2\pi|f|} (-2\pi \text{sgm}(f))$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-2\pi|f|} (\pi \text{sgm}(f))$$

Vediamo ora l'ultimo pezzo $\left(\frac{C}{t-1}\right)$.

$$\text{Supponiamo che } \mathcal{J}[\text{sgm}(t)] = \frac{1}{\pi f} \Rightarrow \mathcal{J}^{-1}[\text{sgm}(-f)] = \frac{1}{\pi f}$$

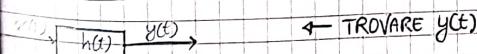
$$\Rightarrow \mathcal{J}^{-1}[-\pi f \text{sgm}(f)] = \frac{1}{t}$$

$$\Rightarrow \mathcal{J}\left[\frac{1/2}{t-1}\right] = -\frac{1}{2} \pi f \text{sgm}(f) e^{-\pi f}$$

frequenziale

09/06/2020

Esercizio 1:



Si può fare in 2 modi:

$$\bullet Y(f) = X(f)H(f)$$

$$\bullet y(t) = \int x(t-\tau) h(\tau) d\tau = \int x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

$$h(t) = \sqrt{t} \quad \text{per } |t| < 1$$

$$x(t) = t \quad \text{per } |t| < 2$$

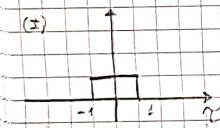
$$\int \sqrt{\tau} (t-\tau) d\tau$$

$$\sqrt{\tau} = v \Rightarrow \tau = v^2 \Rightarrow d\tau = 2v dv$$

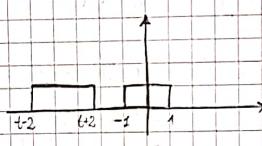
$$\int v(t-v^2) 2v dv = \int 2v^2 t dv - \int 2v^4 dv = \left[\frac{2}{3} v^3 t \right] - \left[\frac{2}{5} v^5 \right] = \left[\frac{2}{3} \tau^{3/2} t \right] - \left[\frac{2}{5} \tau^{5/2} \right]$$

(I) → PRIMO LIMITE: $|\tau| < 1$ perché $h(t) = \sqrt{t}$, $|t| < 1$

(II) → SECONDO LIMITE: $|t-\tau| < 2$ perché $x(t) = t$, $|t| < 2$



$$(II) -2 < t-\tau < 2 \Rightarrow \begin{cases} \tau > t-2 \\ \tau < t+2 \end{cases}$$



$$\bullet t+2 < -1 \Rightarrow y=0 \quad (\text{i due "domini" non si intersecano})$$

$$\Rightarrow t < -3$$

$$\bullet \begin{cases} t+2 > -1 \\ t+2 < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t > -3 \\ t < -1 \end{cases} \rightarrow \text{In questo caso l'integrale va tra } -1 \text{ e } t+2$$

$$\bullet \begin{cases} t+2 > 1 \\ t+2 < -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t > -1 \\ t < -3 \end{cases} \rightarrow \text{In questo caso l'integrale va tra } -1 \text{ e } 1$$

$$\bullet \begin{cases} t-2 > -1 \\ t-2 < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t > 1 \\ t < 3 \end{cases} \rightarrow \text{In questo caso l'integrale va tra } t-2 \text{ e } 1$$

$$\bullet t-2 > 1 \quad (\Rightarrow t > 3) \Rightarrow y=0$$

Esercizio 2:

$$h(t) = \sqrt{1-t^2} \quad \text{per } t > 0$$

$$x(t) = t \quad \text{per } |t| < 2$$

$$\int \sqrt{1-\tau^2} (t-\tau) d\tau$$

$$\tau = \sin \theta \Rightarrow d\tau = \cos \theta d\theta$$

$$\int \sqrt{1} = t \int$$

$$= \left[\frac{t^2}{2} \right]$$

$$\tau = \sin \theta$$

$$= \left[\frac{t}{2} \right]$$

(I) PRIM

(II) SECC

$$\bullet t+2 <$$

$$\begin{cases} t+2 \\ t-2 \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} t-2 \\ t+2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t-2 \\ t+2 \end{cases}$$

Ese

In N
256 C
grasso)

Sarà

OBETTI

$$P_b \approx$$

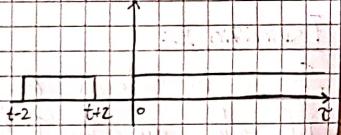
$$E_b =$$

$$P_R =$$

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{1-\sin^2\theta} (t-\sin\theta) \cos\theta d\theta &= \int \cos\theta (t-\sin\theta) \cos\theta d\theta = \\
 &= t \int \cos^2\theta d\theta - \int \cos^2\theta \sin\theta d\theta = t \int \left[\frac{1}{2} - \frac{\cos 2\theta}{2} \right] d\theta + \int \cos^2\theta d\cos\theta = \\
 &= \left[\frac{t\theta}{2} \right] - \left[\frac{t \sin 2\theta}{4} \right] + \left[\frac{\cos^2\theta}{3} \right] \\
 \tau = \sin\theta \implies & \left[\frac{t}{2} \arcsin\tau \right] - \left[\frac{2t}{\pi/2} \underbrace{\sin\theta \cos\theta}_{\frac{1}{2}\tau \sqrt{1-\tau^2}} \right] + \left[\frac{1}{3}(1-\sin^2\theta) \cos\theta \right] = \\
 &= \left[\frac{t}{2} \arcsin\tau \right] - \left[\frac{t}{2} \tau \sqrt{1-\tau^2} \right] + \left[\frac{1}{3}(1-\tau^2) \sqrt{1-\tau^2} \right]
 \end{aligned}$$

I) PRIMO LIMITE: $\tau > 0$

II) SECONDO LIMITE: $|t-\tau| < 2 \Rightarrow \begin{cases} \tau > t-2 \\ \tau < t+2 \end{cases}$



$$\cdot t+2 < 0 (\Rightarrow t < -2) \Rightarrow y = 0$$

$$\cdot \begin{cases} t+2 > 0 \\ t-2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t > -2 \\ t < 2 \end{cases} \rightarrow \text{L'integrale va tra } 0 \text{ e } t+2$$

$$\cdot \begin{cases} t-2 > 0 \\ t > 2 \end{cases} \rightarrow \text{L'integrale va tra } t-2 \text{ e } t+2$$

Esercizio 3:

In una banda nello (traslata) di 13 MHz si vuole trasmettere la 256 QAM con $P_b = 10^{-7}$ con densità spettrale del disturbo (riportata in ingresso) pari a 10^{-20} W/Hz . Determinare la minima potenza ricevuta necessaria.

$$\text{OBIETTIVO: calcolare } Y = \frac{E_b}{N_0} ;$$

$$P_R'' = \frac{P_R}{f_b} = E_b f_b$$

$$P_b \approx \frac{2}{4} \frac{e^{-\frac{f_b}{3\pi}}}{3\pi} = 10^{-7} \Rightarrow Y = 276.8$$

$$E_b = 276.8 \cdot 10^{-20} \text{ W/Hz}$$

$$P_R = 276.8 \cdot 10^{-20} f_b = 276.8 \cdot 10^{-20} \cdot 13 \cdot 10^6 \cdot \underset{B = \frac{f_b}{2}}{\circlearrowleft} \cdot 10^{-10} = 2.8 \cdot 10^{-10} \text{ W}$$

Esercizio 4:

Trasmissione BB (banda base) anticipabile con frame di 99 bit protetti da un codice BCH con $M = 127$ con massima capacità di correzione.

$P_b = 10^{-3}$; lavoriamo a parità di bit rate ($\Rightarrow \gamma$ NON cambia), di P_p e di M .

Calcolare la nuova probabilità di errore.

$$1 - P_p = \sum_{i=0}^{t=\frac{127-99}{2}} \binom{127}{i} P_b^i (1-P_b)^{127-i}$$

$$P_{bit} = \frac{1}{M} P_p = \frac{2t+1}{M} P_p$$

Esercizio 5:

Si ha un sistema 64 QAM con $P_s = 10^{-4}$. Si usa, a parità di symbol rate, un codice R.S. che corregge 3 errori. Determinare la nuova probabilità di errore di simbolo.

In QAM \rightarrow parole da 63 simboli:

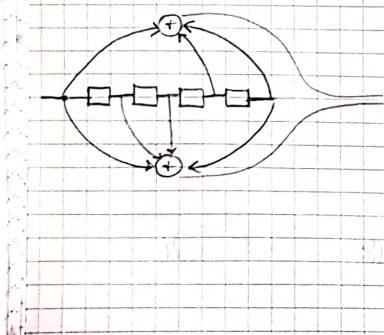
$$n = m - K = 2t = 6 \quad \Rightarrow \text{il codice è RS}(63, 57, 3)$$

$$1 - P_p = \sum_{h=1}^3 \binom{63}{h} (10^{-4})^h (1 - 10^{-4})^{63-h}$$

$$P_{SAC} = \frac{1}{m} P_p = \frac{2t+1}{m} P_p$$

Esercizio 6:

Prestazione asintotica del codice condizionale.



\rightarrow PER CALCOLARE d_{free} , BISOGNA CONFRONTARE LE USCITE DI

00000000

10000000

00000000 \longrightarrow 000000000000000000

10000000 \longrightarrow 11010100

10110000

$$\Rightarrow d_{free} = 7$$

$$P_p \approx \frac{e^{-8 \cdot 2^{-1/2}}}{3\pi} \implies P_b \approx \frac{1}{2} P_p \quad (\text{Quando si taglia un bit, si taglia tutto,}\\ \text{è come se i bit fossero "casuali"})$$

$$\implies P_b = \frac{e^{-8 \cdot 2^{-1/2}}}{6\pi}$$