中国矿业大学 2017-2018 学年第 2 学期

《高等数学 A(3)》试卷（A）卷答案

考试时间：100 分钟　　　考试方式：闭卷

学院____________班级____________姓名____________学号____________

题号	一	二	三	四	总分
得分					
阅卷人					

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

1．设 $\vec{a}=(2,1,2),\vec{b}=(1,1,3),\vec{c}=(3,1,3)$，求 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=$ ___2___.

2．求过点 $(3,2,1)$ 且垂直于直线 $\begin{cases}x-2y+z=3\\x+y-z=-2\end{cases}$ 的平面方程: __$x+2y+3z=10$__.

3．若 $f(x,y)=xy^2+(y-1)\sin x^2$，求 $f_x'(x,1)=$ ___1___.

4．交换积分 $\int_a^{2a}dx\int_{2a-x}^{\sqrt{2ax-x^2}}f(x,y)dy$ 的积分次序 $I=\int_0^a dy\int_{2a-y}^{a+\sqrt{a^2-y^2}}f(x,y)dx$.

5．计算 $\iint\limits_D\dfrac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2}}=$ ___2π___(其中 D 是圆环域 $1\le x^2+y^2\le 4$).

二、 选择题（本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分．每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

1．平面 $\pi_1: x+2y+z+1=0$ 与 $\pi_2: 2x+y-z+2=0$ 的夹角为（ D ）。

(A) $\dfrac{\pi}{6}$　　(B) $\dfrac{\pi}{4}$　　(C) $\dfrac{\pi}{2}$　　(D) $\dfrac{\pi}{3}$

2．函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\ne 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在（0, 0）点处（ B ）。

(A) 连续，偏导数都存在　　(B) 不连续，偏导数都存在

(C) 不连续，偏导数都不存在　　(D) 连续，偏导数都不存在

3．设二元函数 $f(x,y)$ 满足 $f_x'(0,0)=1, f_y'(0,0)=2$，则（ D ）。

(A) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 连续　　　　(B) $df(x,y)|_{(0,0)}=dx+2dy$

(C) $\frac{\partial f}{\partial l}|_{(0,0)}=\cos\alpha+2\cos\beta$，其中 $\cos\alpha,\cos\beta$ 为 l 的方向余弦

(D) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 沿 x 轴负方向的方向导数为 -1

4. 设 f 为可微函数，$x-az=f(y-bz)$，则 $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=$（　A　）。

(A) 1　　(B) a　　(C) b　　(D) $a+b$。

5. 设 $f(x,y)$ 在 $D:0\le y\le 1-x, 0\le x\le 1$ 上连续，则二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 表示成极坐标系下的二次积分的形式为（　D　）。

(A) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$　　(B) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta+\sin\theta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{1-\cos\theta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$　　(D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

三、解下列各题（本题共 6 小题，满分 52 分）

1.（本题 8 分）求空间曲线 $\begin{cases} x=t, \\ y=t^2, \\ z=t^3 \end{cases}$ $(1\le t\le 2)$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切线方程与法平面方程.

解：切点对应的参变量 $t_0=1$，

又　$\frac{dx}{dt}=1, \frac{dy}{dt}=2t, \frac{dz}{dt}=3t^2$，

所以切向量 $\boldsymbol{T}=\{1,2,3\}$，于是切线方程为 $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$，

法平面方程为　$(x-1)+2(y-1)+3(z-1)=0$，

即　$x+2y+3z-6=0$

2.（本题 8 分）求 $z=y^{\ln x}$ 的二阶偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=y^{\ln x}\ln y\bullet\frac{1}{x}=\frac{y^{\ln x}\ln y}{x}$，

$\frac{\partial z}{\partial y}=y^{\ln x-1}\ln x$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{y^{\ln x}\ln y}{x})=\frac{[(\frac{y^{\ln x}\ln y}{x})\ln y]x-y^{\ln x}\ln y}{x^2}=y^{\ln x}\frac{\ln^2 y-\ln y}{x^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial y})=\frac{\partial}{\partial y}(y^{\ln x-1}\ln x)=(\ln x-1)y^{\ln x-2}\ln x=y^{\ln x}\frac{\ln^2 x-\ln x}{y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{y^{\ln x}\ln y}{x})=\frac{(y^{\ln x-1}\ln x)\ln y+\frac{y^{\ln x}}{y}}{x}=y^{\ln x}\frac{\ln x\ln y+1}{xy}$$

3.（本题 9 分）求函数 $f(x,y)=\mathrm{e}^{x-y}(x^2-2y^2)$ 的极值.

解：（1）求驻点

由 $\begin{cases} f_x(x,y)=\mathrm{e}^{x-y}(x^2-2y^2)+2x\mathrm{e}^{x-y}=0 \ , \\ f_y(x,y)=-\mathrm{e}^{x-y}(x^2-2y^2)-4y\mathrm{e}^{x-y}=0 \ , \end{cases}$

得两个驻点 $(0,0)$，$(-4,-2)$。

（2）求 $f(x,y)$ 的二阶偏导数

$f_{xx}(x,y)=\mathrm{e}^{x-y}(x^2-2y^2+4x+2)$，

$f_{xy}(x,y)=\mathrm{e}^{x-y}(2y^2-x^2-2x-4y)$，

$f_{yy}(x,y)=\mathrm{e}^{x-y}(x^2-2y^2+8y-4)$，

（3）讨论驻点是否为极值点

在 $(0,0)$ 处，有 $A=2$，$B=0$，$C=-4$，$B^2-AC=8>0$，由极值的充分条件知 $(0,0)$ 不是极值点，$f(0,0)=0$ 不是函数的极值；

在 $(-4,-2)$ 处，有 $A=-6\mathrm{e}^{-2}$，$B=8\mathrm{e}^{-2}$，$C=-12\mathrm{e}^{-2}$，$B^2-AC=-8\mathrm{e}^{-4}<0$，而 $A<0$，由极值的充分条件知 $(-4,-2)$ 为极大值点，$f(-4,-2)=8\mathrm{e}^{-2}$ 是函数的极大值.

4.（本题 9 分）设 $f(x,y)$ 连续，且 $f(x,y)=x+\iint\limits_D yf(u,v)dudv$，其中 D 是由 $y=\frac{1}{x}$，$x=1$，$y=2$ 所围区域，求 $f(x,y)$。

解： 注意到 $\iint\limits_D f(u,v)dudv$ 是个数。

令 $A=\iint\limits_D f(u,v)dudv$，则 A 是常数，此时 $f(x,y)=x+Ay$，

等式两边同时取二重积分得

$$\iint_D f(u,v)dudv=\iint_D (x+Ay)dxdy=\int_1^2 dy\int_{\frac{1}{y}}^1 (x+Ay)dx$$

$$=\int_1^2\left(\frac{1}{2}+Ay-\frac{1}{2y^2}-A\right)dy=\frac{1}{2}A+\frac{1}{4}$$

即 $A=\frac{1}{2}A+\frac{1}{4}$，得 $A=\frac{1}{2}$，故 $f(x,y)=x+\frac{1}{2}y$

5.（本题 9 分）求半球体 $0\le z\le\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 在圆柱 $x^2+y^2=ax$（$a>0$）内那部分的体积。

解：把所求立体投影到 xoy 面，即圆柱 $x^2+y^2=ax$（$a>0$）内部,容易看出所求立体的体积以 D 为底，以上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 为顶的曲顶柱体的体积。

由于积分区域的边界曲线为圆周，所以采用极坐标系较好.

此时 $D\begin{cases}-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}, \\ 0\le r\le a\cos\theta,\end{cases}$

故 $V=\iint_D\sqrt{a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}\sqrt{a^2-r^2}\,r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^3(1-\cos^3\theta)\,\mathrm{d}\theta=\left(\frac{\pi}{3}-\frac{4}{9}\right)a^3$$

6.（本题 9 分）计算三重积分 $\iiint_\Omega z\sqrt{x^2+y^2+z^2}dv$，其中 Ω 是由曲面 $x^2+y^2+z^2=1$ 及 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 所围成的区域.

解： 在球面坐标下，球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的方程为 $r=1$，

锥面 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 的方程为 $\tan\phi=\frac{\sqrt{3}}{3}$，即 $\phi=\frac{\pi}{6}$，

又 z 轴的正向穿过 Ω 故 ϕ 的下界为零，因此 $0\le\phi\le\frac{\pi}{6}$.

将 Ω 投影到 xoy 面，由方程组 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1, \\ z=\sqrt{3(x^2+y^2)}\end{cases}$ 消去 z 得 $x^2+y^2=\frac{1}{4}$. 因此 $0\le\theta\le 2\pi$.

该锥体的顶点在原点，故 r 下界为零，由穿线法可知 $r\le 1$, 故 $0\le r\le 1$.

于是

$$\iiint\limits_{\Omega} Z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dv = \iiint\limits_{\Omega} r^4\cos\phi\sin\phi\, dr d\phi d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin\phi\cos\phi d\varphi \int_0^1 r^4 dr$$

$$=2\pi\cdot\frac{1}{2}[\sin^2\phi]^{\frac{\pi}{6}}[\frac{1}{s}r^s]_0^1=\frac{\pi}{20}.$$

四、证明题（本题 8 分）

设 $y=f(x,t), t=t(x,y)$ 满足方程 $F(x,y,t)=0$， f 和 F 都有一阶连续偏导数.

证明： $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{f_x' F_t' - f_t' F_x'}{F_t' + f_t' F_y'}$.

证明：由方程组 $\begin{cases} t=t(x,y) \\ y=f(x,t) \end{cases}$ 确定隐函数 $t=t(x),\ y=y(x)$。

故由 $\begin{cases} t=t(x,y) \\ y=f(x,t) \end{cases}$ 得 $\begin{cases} \dfrac{dt}{dx}=t_x'+t_y'\dfrac{dy}{dx} \\ \dfrac{dy}{dx}=f_x'+f_t'\dfrac{dt}{dx} \end{cases}$，

解得 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{f_x'+f_t' t_x'}{1-f_t' t_y'}$

又 $t=t(x,y)$ 方程 $F(x,y,t)=0$ 确定，故 $t_x'=-\dfrac{F_x'}{F_t'}$， $t_y'=-\dfrac{F_y'}{F_t'}$

则 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{f_x'+f_t' t_x'}{1-f_t' t_y'}=\dfrac{f_x'+f_t'(-\dfrac{F_x'}{F_t'})}{1-f_t'(-\dfrac{F_y'}{F_t'})}=\dfrac{f_x' F_t' - f_t' F_x'}{F_t' + f_t' F_y'}$