高等学校教材

离散数学导论

（第3版）

——学习指导与习题解析

朱怀宏　徐洁磐

高等教育出版社

ISBN 7-04-020231-X
9 787040 202311 >
定价 13.40 元

高等学校教材

离散数学导论(第3版)——学习指导与习题解析

朱怀宏　徐洁磐

高等教育出版社

内容提要

本书是《离散数学导论(第3版)》(高等教育出版社2004年出版,徐洁磐编著)一书配套的教辅用书.全书针对教材各章的教学重点内容对读者进行辅导,除对各章习题进行分析与解答之外,同时又增加了大量教材中没有的习题,并给出解答.全书包括集合论初步、关系、函数、有限集与无限集、代数系统、图论、数理逻辑等七章内容,每章均由主要内容、复习重点、基本概念及注意事项、典型例题详细分析、相关教材中习题及解答、另增配套习题及解答六大部分组成.

本书除与《离散数学导论(第3版)》教材配套使用之外,也可独立用作离散数学课程的教学参考书,可供高等学校计算机及相关专业的学生使用.

图书在版编目(CIP)数据

离散数学导论(第3版):学习指导与习题解析/朱怀宏,徐洁磐.—北京:高等教育出版社,2006.12
ISBN 7-04-020231-X

Ⅰ.离… Ⅱ.①朱…②徐… Ⅲ.离散数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O158

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第143981号

策划编辑 倪文慧　**责任编辑** 李华英　**封面设计** 李卫青　**责任绘图** 尹文军
版式设计 陆瑞红　**责任校对** 金　辉　**责任印制** 尤　静

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京铭成印刷有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092　1/16	版　　次	2006年12月第1版
印　　张	10.25	印　　次	2006年12月第1次印刷
字　　数	230 000	定　　价	13.40元

物料号　20231-00

前　言

离散数学是计算机科学及相关信息学科的基础课程之一，它培养学生的抽象思维和逻辑推理能力.

由徐洁磐先生编著，高等教育出版社出版的《离散数学导论》一书自1982年出版以来，每年均有较大的发行量，受到国内高校的普遍欢迎，并已输出至港、澳、台等地区，至今已多次修订再版. 在2004年出版的第3版教材中，除了对原有内容进行增删外，还在各章和各篇之后增加了适量习题. 多年来，广大读者普遍要求出版一本配套复习、巩固用的习题集（特别是第3版增加习题后要求更加强烈），这也是编写本书的初衷.

离散数学课程的学习有其特殊性，其内容繁多、题目解法种类较多，所学的知识点等均必须通过大量解题去巩固. 鉴于上述情况，经过较长时间的慎重酝酿，现根据第3版《离散数学导论》教材，配套出版本学习指导与习题解析，按教材各章节主要内容进行辅导及解题，同时又另增大量教材中没有的习题，并全部给出解答. 全书包含教材中258道大题及新增的223道大题（由于大题中包含若干小题，故实际应为1 000题左右）. 全书每章均由以下六部分组成：

(1) 主要内容；

(2) 复习重点；

(3) 基本概念及注意事项；

(4) 典型例题详细分析（每题均有分析和解答）；

(5) 相关教材中习题及解答；

(6) 另增配套习题及解答.

教材中的绝大部分习题均包含在第(4)(5)部分中，另外还在第(4)(6)部分中补充了教材中未列入的大量习题及解答. 书中习题按各部分分别编号，而将教材中的习题编号放入随后的括号中. 如：1(4.1)表示习题集中某部分编号为第1题的习题对应教材中第四章的第1题，即第4.1题；而48(3P－22)表示习题集中某部分编号为48题的习题对应教材中第三篇后的22题.

本书是一本紧密配合教材进行教学的参考书，它可以作为《离散数学导论》教材的配套用书，也可以作为一般学习、复习离散数学课程的习题解答用书，可供高等学校计算机及相关专业

使用.

本书凝聚了作者及南京大学离散数学教研小组多年来的教学经验与辛勤劳动,希望本书的出版对学习离散数学的广大读者有较大的帮助.对于书中的不足之处,恳请广大读者批评指正.

作　者

2006年9月

目　　录

第一章

集合论初步

1.1 主要内容

1. 集合的基本概念.
2. 集合运算.

1.2 复习重点

1. 了解集合论的基本思想与基本运算规则.
2. 了解各种不同的集合,如:空集$\varnothing$、全集 E、幂集 $\rho(A)$等.

1.3 基本概念及注意事项

1. 集合:一些研究对象的全体.
2. 元素:组成集合的对象.
3. 集合与元素间的关系:$a\in A$,$a\notin A$.
4. 集合间的比较关系:$A=B$,$A\neq B$,$A\subset B$,$A\supset B$,$A\subseteq B$,$A\supseteq B$.
5. 集合的子集:集合 A 中的元素都是集合 B 中的元素,则称 A 是 B 的子集,记以 $A\subseteq B$.
6. 三种不同的子集:(1) 子集:$A\subseteq B$;(2) 真子集:$A\subset B$;(3) 集合相等:$A=B$.

7. 三种特殊的集合:(1) 空集:没有元素的集合$\varnothing$;(2) 全集:包含所有被考虑范围中元素的集合 E;(3) 幂集:集合 A 的所有子集作为元素构成的集合 $\rho(A)$.

8. 集合的四种表示法:(1) 枚举法,即将集合中的元素一一列出;(2) 特性刻画法,即用元素的性质刻画集合;(3) 图示法,即用文氏图表示集合及集合间的关系;(4) 运算法,即用已知集合的运算构造新的集合.

9. 集合的六种运算:

(1) 交运算:$A\cap B$;

(2) 并运算:$A\cup B$;

(3) 差运算:$A-B$;

(4) 补运算：$\sim A$;

(5) 对称差运算：$A+B$;

(6) 笛卡儿乘积：$A\times B$.

10. 集合的21个公式：

交换律：

$A\cup B=B\cup A$,

$A\cap B=B\cap A$;

结合律：

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$;

分配律：

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$,

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

同一律：

$A\cup\varnothing=A$,

$A\cap E=A$;

零一律：

$A\cup E=E$,

$A\cap\varnothing=\varnothing$;

互补律：

$A\cup\sim A=E$,

$A\cap\sim A=\varnothing$,

$\sim E=\varnothing$,

$\sim\varnothing=E$;

双补律：

$\sim(\sim A)=A$;

等幂律：

$A\cup A=A$,

$A\cap A=A$;

吸收律：

$A\cup(A\cap B)=A$,

$A\cap(A\cup B)=A$;

德·摩根定律：

$\sim(A\cup B)=\sim A\cap\sim B$,

$\sim(A\cap B)=\sim A\cup\sim B$.

11. 笛卡儿乘积：

$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}$，

$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1\in A_1,x_2\in A_2,\cdots,x_n\in A_n\}$.

1.4　典型例题详细分析

1. (1.4)求下列集合的幂集：

(1) $\{a,\{a\}\}$；

(2) $\{\varnothing,a,\{a\}\}$；

(3) $\{1,2,3,4\}$.

分析：要求集合 A 的幂集 $\rho(A)$ 就是要找出集合 A 的所有子集，然后将各子集作为元素而形成的新的集合即是幂集 $\rho(A)$，如果 A 有 n 个元素，则 $\rho(A)$ 有 2^n 个元素. 对于(1)有两个元素 a 和 $\{a\}$，故其幂集应该有 4 个元素；对于(2)有 3 个元素 $\varnothing,a,\{a\}$，故其幂集应该有 8 个元素；对于(3)有 4 个元素，故其幂集应该有 16 个元素，A 的幂集中必含元素 $\varnothing$ 和 A.

解：(1) 其幂集为 $\{\varnothing,\{a\},\{\{a\}\},\{a,\{a\}\}\}$；

(2) 其幂集为 $\{\varnothing,\{\varnothing\},\{a\},\{\{a\}\},\{\varnothing,a\},\{\varnothing,\{a\}\},\{a,\{a\}\},\{\varnothing,a,\{a\}\}\}$；

(3) 其幂集为 $\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4\}\}$.

2. (1.8)设 $A=\{0,1\}$，$B=\{1,2\}$，试求：

(1) $A\times B$；

(2) $A^2\times B$；

(3) $B\times A$；

(4) $(A\times B)^2$.

分析：求笛卡儿乘积 $A\times B$ 就是构造出所有的有序偶，要注意的是有序偶的第一个元素总是来自左分量集合 A，第二个元素总是来自右边分量集合 B，且 A 中的所有元素均要分别与 B 中的所有元素构造有序偶放入 $A\times B$ 这个新的集合，即 $A\times B$ 集合中的元素形式是若干有序偶，$A\times B$ 中元素的个数应该是 A 中元素的个数乘以 B 中元素的个数.

解：(1) $A\times B=\{(0,1),(0,2),(1,1),(1,2)\}$；

(2) $A^2\times B=A\times A\times B=\{(0,0,1),(0,0,2),(0,1,1),(0,1,2),(1,0,1),(1,0,2),(1,1,1),(1,1,2)\}$；

(3) $B\times A=\{(1,0),(1,1),(2,0),(2,1)\}$；

(4) $(A\times B)^2=(A\times B)\times(A\times B)=\{((0,1),(0,1)),((0,1),(0,2)),((0,1),(1,1)),((0,1),(1,2)),((0,2),(0,1)),((0,2),(0,2)),((0,2),(1,1)),((0,2),(1,2)),((1,1),(0,1)),((1,1),(0,2)),((1,1),(1,1)),((1,1),(1,2)),((1,2),(0,1)),((1,2),(0,2)),((1,2),(1,1)),((1,2),(1,2))\}$.

3. (1.9)设 A,B,C 为任意集合，试证：

(1) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$;

(2) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$.

分析:上述等式左边是表示先做括号内的并、交运算,再做笛卡儿乘积;而等式右边则表示先做括号内的笛卡儿乘积,再做并、交运算.它们的结果应该是一样的,可以用笛卡儿乘积和并、交运算的定义及括号的优先级别来证明,这是集合等式证明中的一种基本方法.

证明:(1) $A\times(B\cup C)=\{(x,y)\mid x\in A$ 且 $y\in B\cup C\}$

$=\{(x,y)\mid x\in A$ 且 $y\in B$ 或 $x\in A$ 且 $y\in C\}$

$=\{(x,y)\mid (x,y)\in A\times B$ 或 $(x,y)\in A\times C\}$

$=\{(x,y)\mid (x,y)\in (A\times B)\cup(A\times C)\}$

$=(A\times B)\cup(A\times C)$;

(2) $A\times(B\cap C)=\{(x,y)\mid x\in A$ 且 $y\in B\cap C\}$

$=\{(x,y)\mid x\in A$ 且 $y\in B$,且 $x\in A$ 且 $y\in C\}$

$=\{(x,y)\mid (x,y)\in A\times B$ 且 $(x,y)\in A\times C\}$

$=\{(x,y)\mid (x,y)\in (A\times B)\cap(A\times C)\}$

$=(A\times B)\cap(A\times C)$.

4. 对于任意集合 A,B,C,指出下列正确的是哪一个.

(1) 若 $A\in B,B\subseteq C$,则 $A\in C$;

(2) 若 $A\in B,B\subseteq C$,则 $A\subseteq C$;

(3) 若 $A\subseteq B,B\in C$,则 $A\in C$;

(4) 若 $A\subseteq B,B\in C$,则 $A\subseteq C$.

分析:(1)是正确的,因为 $B\subseteq C$,所以集合 B 的每个元素均是集合 C 中的元素,由 $A\in B$ 可得 A 是 B 中的一个元素(集合中的元素也可以是一个集合),因此 A 也是 C 中的一个元素,故 $A\in C$.

(2)是错误的,可举反例来说明有结论不成立的情况,设 $A=\{a\}$,$B=\{\{a\},b_1,b_2\}$,$C=\{\{a\},b_1,b_2,c_1\}$,此时 $A\in B,B\subseteq C$,但 $A\not\subseteq C$,因为 $a\in A$,但 $a\notin C$(C 中只有 $\{a\}$ 元素,没有 a 元素).

(3)是错误的,可举反例说明,设 $A=\{a\}$,$B=\{a,b\}$,$C=\{\{a,b\},c_1,c_2\}$,此时有 $A\subseteq B$,$B\in C$,但 $A\notin C$,因 C 中没有元素 $\{a\}$.

(4)是错误的,可举反例说明,设 $A=\{a_1,a_2\}$,$B=\{a_1,a_2,b_1\}$,$C=\{\{a_1,a_2,b_1\},c_1,c_2\}$,此时有 $A\subseteq B,B\in C$,但 $A\not\subseteq C$,因为集合 A 中的元素 a_1,a_2 在 C 中找不到.(2)(3)(4)中的结论实际上有时成立,有时不成立,因此只要找到一种不成立的例子,就能推翻总是成立的结论.

解:本题正确的是(1).

5. 下列各式中不正确的是哪一个?

(1) $\varnothing\in\varnothing$;(2) $\varnothing\subseteq\varnothing$;(3) $\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$;(4) $\varnothing\in\{\varnothing\}$.

分析:因为任何集合都包含空集,故(2)(3)是正确的;而(4)中右边集合中有元素 $\varnothing$,故也是正确的;因为空集中没有元素,故(1)中表示有 $\varnothing$ 元素属于空集是错误的.

解:(1)是不正确的.

6. 设 $A=\{\varnothing\}$，$B=\rho(\rho(A))$，问是否有：

(1) $\varnothing\in B$ 且 $\varnothing\subseteq B$；

(2) $\{\varnothing\}\in B$ 且 $\{\varnothing\}\subseteq B$；

(3) $\{\{\varnothing\}\}\in B$ 且 $\{\{\varnothing\}\}\subseteq B$.

分析：此题先要会求幂集 $\rho(A)=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$，然后再对此集合求其幂集得出 $\rho(\rho(A))$，分别再用(1)(2)(3)与 B 相对照.

解：$\rho(A)=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$，

$$\begin{aligned}B&=\rho(\rho(A))=\rho(\{\varnothing,\{\varnothing\}\})\\&=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}.\end{aligned}$$

经对照(1)(2)(3)均成立.

7. 设 A,B,C 为三个任意集合，则：

$$A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C).$$

证明：等式左边：$A\cap(B-C)=A\cap(B\cap\sim C)=A\cap B\cap\sim C.$ (1)

等式右边：
$$\begin{aligned}(A\cap B)-(A\cap C)&=(A\cap B)\cap\sim(A\cap C)\\&=(A\cap B)\cap(\sim A\cup\sim C)=(A\cap B\cap\sim A)\cup(A\cap B\cap\sim C)\\&=(\varnothing\cap B)\cup(A\cap B\cap\sim C)=\varnothing\cup(A\cap B\cap\sim C)\\&=A\cap B\cap\sim C.\end{aligned}\quad(2)$$

由(1)式、(2)式得证：$A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$.

说明：在证明过程中常用到将 $-$、$+$ 等集合运算等同变形为并、交运算形式，如本例中 $B-C$ 用 $B\cap\sim C$ 代人. 另外，证明等式可以从左边出发往右边证；也可以从右边出发证明到左边；也可以分别从左边和右边出发证明到等于同一个式子（如本例）.

8. 证明：对任意集合 A,B,C，有：

$$(A-B)-C=A-(B\cup C).$$

分析：本题可利用公式 $A-B=A\cap\sim B$ 展开，再利用研究等式的一边集合中的元素来逐步根据性质、公式推导出另一边的集合，这是一种典型的证明方法.

证明：对任意 $x\in(A-B)-C\Longleftrightarrow x\in(A-B)$ 且 $x\notin C\Longleftrightarrow x\in A$ 且 $x\notin B$ 且 $x\notin C$

$\Longleftrightarrow x\in A$ 且 $x\notin(B\cup C)\Longleftrightarrow x\in A-(B\cup C)$.

故 $(A-B)-C=A-(B\cup C)$.

1.5　相关教材中习题及解答

1. (1.1)请列出下列集合的所有元素：

(1) 大于 5 并小于 30 的素数的集合；

(2) 大于 39 且小于 78 的偶数的集合.

解：(1) $\{7,11,13,17,19,23,29\}$；

(2) $\{40,42,44,46,48,50,52,54,56,58,60,62,64,66,68,70,72,74,76\}$.

2. (1.2)判别下列各题是否正确:

(1) $\{1,2\} \subseteq \{1,2,3,\{1,2,3\}\}$;

(2) $\{p,q,r\} \subseteq \{p,q,r,\{p,q,r\}\}$.

解:(1) 正确;(2) 正确.

3. (1.3)设 $E=\{1,2,3,4,5\}$, $A=\{1,4\}$, $B=\{1,2,5\}$, $C=\{2,4\}$,其中 E 为全集,试求下列集合:

(1) $A \cap \sim B$;

(2) $\sim A \cup \sim B$;

(3) $(A \cap B) \cup \sim C$;

(4) $\sim(A \cap B)$;

(5) $A \cup \sim B \cup C$.

解:(1) $A \cap \sim B = \{1,4\} \cap \{3,4\} = \{4\}$;

(2) $\sim A \cup \sim B = \{2,3,5\} \cup \{3,4\} = \{2,3,4,5\}$;

(3) $(A \cap B) \cup \sim C = (\{1,4\} \cap \{1,2,5\}) \cup \{1,3,5\}$
$= \{1\} \cup \{1,3,5\} = \{1,3,5\}$;

(4) $\sim(A \cap B) = \sim(\{1,4\} \cap \{1,2,5\})$
$= \sim\{1\} = \{2,3,4,5\}$;

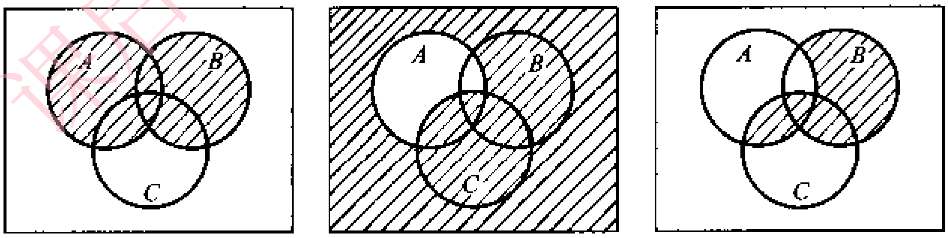
(5) $A \cup \sim B \cup C = \{1,4\} \cup \{3,4\} \cup \{2,4\} = \{1,2,3,4\}$.

4. (1.5)证明下列等式:

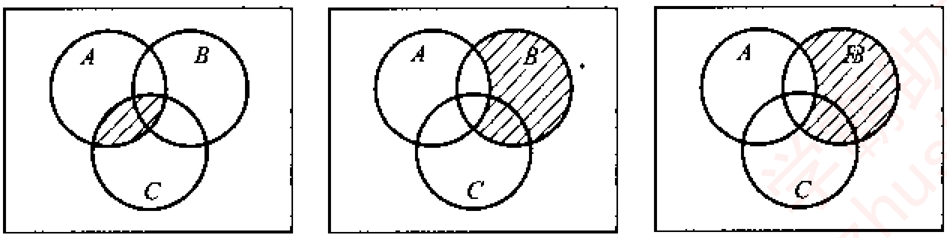
(1) $(A \cup B) \cap (\sim A \cup C) = (A \cap C) \cup (\sim A \cap B)$;

(2) $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$.

证明:(1) 利用文氏图法:



(a) $A \cup B$　　(b) $\sim A \cup C$　　(c) $(A \cup B) \cap (\sim A \cup C)$

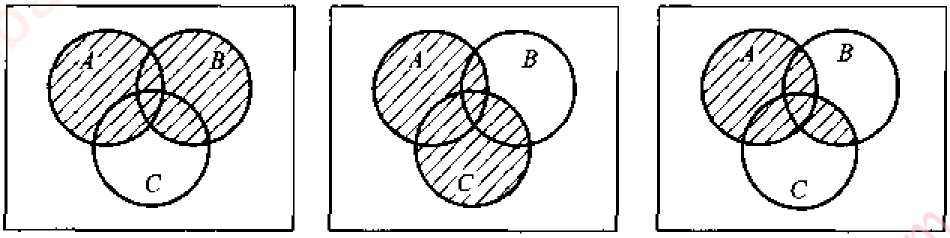


(d) $A \cap C$　　(e) $\sim A \cap B$　　(f) $(A \cap C) \cup (\sim A \cap B)$

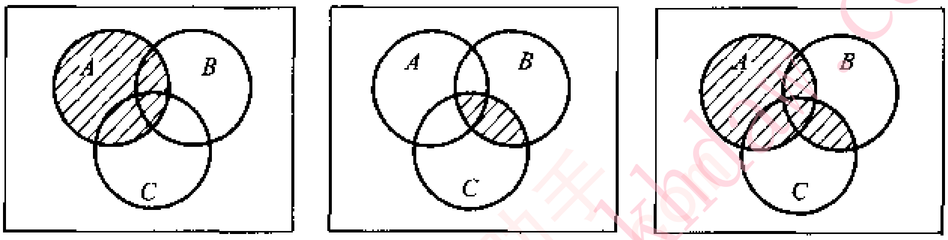
比较上面图中(c)和(f),可发现其阴影部分完全相同,所以有

$$(A\cup B)\cap(\sim A\cup C)=(A\cap C)\cup(\sim A\cap B).$$

(2) 利用文氏图法:



(a) $A\cup B$　(b) $A\cup C$　(c) $(A\cup B)\cap(A\cup C)$



(d) A　(e) $B\cap C$　(f) $A\cup(B\cap C)$

比较上图中(c)和(f),可发现其阴影部分完全相同,所以有

$$(A\cup B)\cap(A\cup C)=A\cup(B\cap C).$$

5. (1.6)设有集合 A,B:

(1) 若 $A-B=B$,则 A 与 B 有什么关系?

(2) 若 $A-B=B-A$,则 A 与 B 有什么关系?

解:(1) $A=B=\varnothing$;　(2) $A=B$.

6. (1.7)设 $A=\{1,2,3\}$,$B=\{a,b,c\}$,试求 $A\times B$ 及 A^2.

解:$A\times B=\{(1,a),(1,b)(1,c),(2,a),(2,b),(2,c),(3,a),(3,b),(3,c)\}$,

$A^2=A\times A=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$.

7. (2P-1)设有集合 $A=\{a,b,c\}$,$\varnothing$为空集,则下列哪一个表示是正确的?

(1) $\{a\}\in A$;　(2) $\{a\}\subset A$;

(3) $a\subset A$;　(4) $\varnothing\in A$.

解:(2)是正确的.它表示$\{a\}$被$\{a,b,c\}$真包含.

8. (2P-3)设 $S_1=\varnothing$,$S_2=\{\varnothing\}$,$S_3=\rho(\{\varnothing\})$,$S_4=\rho(\varnothing)$,以下命题为假的是哪一个?

(1) $S_2\in S_4$;　(2) $S_1\subseteq S_3$;　(3) $S_4\subseteq S_2$;　(4) $S_4\in S_3$.

解:(1)是假的,因为 S_4 中不存在某个为$\{\varnothing\}$的元素.

9. (2P-4)设 $A=\{1,2,3\}$,$B=\{1,2,3,4,5\}$,$C=\{2,3\}$,则$(A\cup B)+C=$______.

(1) $\{1,2\}$　(2) $\{2,3\}$　(3) $\{1,4,5\}$　(4) $\{1,2,3\}$

解:$(A\cup B)+C=\{1,2,3,4,5\}+\{2,3\}$

$=(\{1,2,3,4,5\}-\{2,3\})\cup(\{2,3\}-\{1,2,3,4,5\})$

$=\{1,4,5\}\cup\varnothing=\{1,4,5\}$.

故答案为(3).

10. (2P-7)设集合 $A=\{a,b,c\}$, $B=\{a,b\}$,那么 $\rho(A)-\rho(B)=$ ________, $\rho(B)-\rho(A)=$ ________.

解:$\rho(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\},\{a,b,c\}\}$,

$\rho(B)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$,

$\rho(A)-\rho(B)=\{\{c\},\{b,c\},\{a,c\},\{a,b,c\}\}$,

$\rho(B)-\rho(A)=\varnothing$.

11. (2P-8)设 $A=\{a,b,c\}$, $B=\{b,d,e\}$,则 $A-B=$ ________, $A+B=$ ________.

解:$A-B=\{a,b,c\}-\{b,d,e\}=\{a,c\}$,

$A+B=(A-B)\cup(B-A)=\{a,c\}\cup\{d,e\}=\{a,c,d,e\}$.

12. (2P-9)设 S,T,M 为任意集合,判定下列命题的真假:

(1) $\varnothing$是$\varnothing$的子集; (2) 如果 $S\cup T=S\cup M$,则 $T=M$; (3) 如果 $S-T=\varnothing$,则 $S=T$;

(4) 如果 $\sim S\cup T=E$,则 $S\subseteq T$; (5) $S+S=S$.

解:(1) 空集是任意集合的子集,故为真命题;

(2) 假命题,例如:$S=\{a,b,c\}$, $T=\{a\}$, $M=\{b\}$,有 $S\cup T=S\cup M=\{a,b,c\}$,而 $T\neq M$;

(3) 假命题,例如:$S=\{a,b\}$, $T=\{a,b,c,d\}$, $S-T=\varnothing$,而 $S\neq T$;

(4) 真命题;

(5) $S+S=(S-S)\cup(S-S)=\varnothing$,而 S 未必是$\varnothing$,故为假命题.

13. (2P-10)用枚举法表示以下集合:

(1) $A=\{x\mid x\in\mathbf{N}\wedge x^2\leqslant 7\}$;(2) $A=\{x\mid x\in\mathbf{N}\wedge|3-x|<3\}$;(3) $A=\{x\mid x\in\mathbf{R}\wedge(x+1)^2\leqslant 0\}$.

解:(1) $A=\{0,1,2\}$; (2) $A=\{1,2,3,4,5\}$; (3) $A=\{-1\}$.

14. (2P-13)写出下列集合的子集:

(1) $A=\{a,\{b\},c\}$; (2) $B=\{\varnothing\}$; (3) $C=\varnothing$.

解:(1) A 的子集:$\varnothing,\{a\},\{\{b\}\},\{c\},\{a,\{b\}\},\{a,c\},\{\{b\},c\},\{a,\{b\},c\}$;

(2) B 的子集:$\varnothing,\{\varnothing\}$;

(3) C 的子集:$\varnothing$.

15. (2P-14)化简 $((A\cup(B-C))\cap A)\cup(B-(B-A))$.

解:$((A\cup(B-C))\cap A)\cup(B-(B-A))$

$=((A\cup(B\cap\sim C))\cap A)\cup(B\cap\sim(B\cap\sim A))$

$=((A\cup B)\cap(A\cup\sim C)\cap A)\cup(B\cap(\sim B\cup A))$

$=(A\cup(A\cap B\cap\sim C))\cup(B\cap A)$

$=(A\cup(A\cap(B\cap\sim C)))\cup(A\cap B)$

$=A\cup(A\cap B)$

$=A$.

16. (2P-15)设集合 $A=\{a,b\}$, $B=\{1,2,3\}$, $C=\{d\}$, 求 $A\times B\times C$.

解: $A\times B=\{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$,

$A\times B\times C=\{(a,1,d),(a,2,d),(a,3,d),(b,1,d),(b,2,d),(b,3,d)\}$.

17. (2P-16)设集合 $A=\{1,2\}$, 求 $A\times\rho(A)$.

解: $\rho(A)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$,

$A\times\rho(A)=\{(1,\varnothing),(1,\{1\}),(1,\{2\}),(1,\{1,2\}),(2,\varnothing),(2,\{1\}),(2,\{2\}),(2,\{1,2\})\}$.

18. (2P-17)(1) 设集合 $A=\{\{2,1\},\{1,2,1\}\}$, 求幂集 $\rho(A)$;

(2) 求幂集 $\rho(\rho(A))$, 其中 A 同(1).

解: (1) $\rho(A)=\{\varnothing,\{\{2,1\}\},\{\{1,2,1\}\},\{\{2,1\},\{1,2,1\}\}\}$;

(2) $\rho(\rho(A))=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\{2,1\}\}\},\{\{\{1,2,1\}\}\},\{\{\{2,1\},\{1,2,1\}\}\},\{\varnothing,\{\{2,1\}\}\},\{\varnothing,\{\{1,2,1\}\}\},\{\varnothing,\{\{2,1\},\{1,2,1\}\}\},\{\{\{2,1\}\},\{\{1,2,1\}\}\},\{\{\{2,1\}\},\{\{2,1\},\{1,2,1\}\}\},\{\{\{1,2,1\}\},\{\{2,1\},\{1,2,1\}\}\},\{\varnothing,\{\{2,1\}\},\{\{1,2,1\}\}\},\{\varnothing,\{\{1,2,1\}\},\{\{2,1\},\{1,2,1\}\}\},\{\varnothing,\{\{2,1\}\},\{\{2,1\},\{1,2,1\}\}\},\{\{\{2,1\}\},\{\{1,2,1\}\},\{\{2,1\},\{1,2,1\}\}\},\{\varnothing,\{\{2,1\}\},\{\{1,2,1\}\},\{\{2,1\},\{1,2,1\}\}\}\}$.

19. (2P-19)试证: $A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cap C)$.

证明: $A-(B-C)=A\cap\sim(B-C)=A\cap\sim(B\cap\sim C)$

$=A\cap(\sim B\cup\sim(\sim C))=A\cap(\sim B\cup C)$

$=(A\cap\sim B)\cup(A\cap C)=(A-B)\cup(A\cap C)$.

20. (2P-20)设 A,B 为任意集合, 试证: $A-B=B-A$ 之充分必要条件为 $A=B$.

证明: "$\Rightarrow$"因为 $A-B$ 表示结果为属于 A 但不属于 B 的元素组成的集合, 而 $B-A$ 表示结果为属于 B 但不属于 A 的元素组成的集合, 又因为如果 $A-B=B-A$, 只能是结果为空集时才相等, 所以 $A=B$.

"$\Leftarrow$"因为 $A=B$, 所以 $A-B=A-A=\varnothing$, $B-A=B-B=\varnothing$.

所以 $A-B=B-A$. 所以 $A-B=B-A$ 之充分必要条件为 $A=B$.

21. (2P-21)设集合 $A=\{1,2\}$, $B=\{a,b,c\}$, $C=\{c,d\}$, 试求 $A\times(B\cap C)$.

解: $B\cap C=\{c\}$,

$A\times(B\cap C)=\{1,2\}\times\{c\}=\{(1,c),(2,c)\}$.

1.6　另增配套习题及解答

1. 下列可称为集合的是(　　).

A. 某本书中第 a 页上汉字的全体　　B. 很大数的全体

C. 高个子全体　　D. 接近于 0 的数的全体

2. 下列四式中, 错误的是(　　).

A. $\varnothing\subseteq\varnothing$　　B. $\varnothing\neq 0$　　C. $\varnothing\subseteq\{0\}$　　D. $\varnothing\in\varnothing$

3. 列举集合的元素 $A=\{x\mid x^2<50, x$ 为正奇数$\}=$ ________;
$B=\{x\mid x=p/q, p+q=5, p,q\in$ 自然数$\}=$ ________.
4. 集合 A 和 B 的对称差记为 $A+B$, $A+B=$ ________; $A+\varnothing=$ ________.
5. 对集合 A,B,若 $A\subseteq B$,则有 $(A\cap B)=A$, $(A\cup B)=B$. 试证明之.
6. 指出下列错误的等式(　　).
A. $A\cup A=A$　　B. $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$
C. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup C$　　D. $A\cup\varnothing=A$
7. N_1 为偶数集合,N_2 为奇数集合,N_3 为质数集合,则有 $N_1\cap N_2=$ ________; $N_1\cap N_3=$ ________.
8. 化简 $(A-B-C)\cup((A-B)\cap C)\cup(A\cap B-C)\cup(A\cap B\cap C)$.
9. 指出下列错误的式子(　　).
A. $A+(B+C)=(A+B)+C$　　B. $A+B=B+A$
C. $A+A=\varnothing$　　D. $A\cap(B+C)\neq(A\cap B)+(A\cap C)$
10. 设 E 为全集,A,B 为非空集且 $B\subset A$,则空集为(　　).
A. $A\cap B$　　B. $\sim A\cap\sim B$　　C. $\sim A\cap B$　　D. $A\cap\sim B$
11. 求证 $A-(A-B)=A\cap B$.
12. $A=\{1,2,3,\{1,2\},\{3\}\}$, $B=\{2,\{2,3\},\{1\}\}$,则 $A-B=$ ________; $B-A=$ ________.
13. $A=\{2,3\}$, $B=\{1,4,7\}$, $C=\{3,5\}$, $A\cup(B+C)=$ ________; $(A\cup B)+(A\cup C)=$ ________.
14. 已知 $A\subseteq B$ 且 $A\in B$,下列结论正确的是(　　).
A. 是不可能的　　B. 是可能的
C. A 必须是空集　　D. B 必须是全集
15. 集合 $\{0\}$ 的所有子集是(　　).
A. $\varnothing$　　B. $\varnothing,\{0\}$　　C. $\{\varnothing\}$　　D. $\{\varnothing,\{0\}\}$
16. 用枚举法表示以下集合的元素($\mathbf{Z}$ 为整数集):
$A=\{x\mid 3<x<4, x\in\mathbf{Z}\}=$ ________;
$B=\{x\mid x^2=1, x\in\mathbf{Z}\}=$ ________.
17. 请用 $\in$, $\subset$, $\subseteq$ 填下列空格:
$\{a\}$ ________ $\{\{a\},3,4,1\}$;
$\{a,4,\{3\}\}$ ________ $\{2,a,\{3\},4\}$;
$\{\{a\}\}$ ________ $\{\{a\},3,4,1\}$.
18. 化简 $((A\cup B\cup C)\cap(A\cup B))-((A\cup(B-C))\cap A)$.

1～18 题答案

1. **解**:A(元素的定义要具体).
2. **解**:D(空集中不应包含元素).

3. **解**:$A=\{1,3,5,7\}$;$B=\left\{\frac{1}{4},\frac{4}{1},\frac{2}{3},\frac{3}{2},0\right\}$.

4. **解**:$(A-B)\cup(B-A)$;A.

5. **证明**:(1) 因为$(A\cap B)\subseteq A$,又因为 $A\subseteq B$,任取 $x\in A\Rightarrow x\in B\Rightarrow x\in A\cap B$,所以 $A\subseteq(A\cap B)$,所以$(A\cap B)=A$.

(2) 因为$(A\cup B)\supseteq B$,又因为任取 $x\in(A\cup B)\Rightarrow x\in A$ 或 $x\in B$,因为 $A\subseteq B$,所以若 $x\in A\Rightarrow x\in B$,所以$(A\cup B)\subseteq B$,所以$(A\cup B)=B$.

6. **解**:C(应该是 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$).

7. **解**:$\varnothing$;$\{2\}$.

8. **解**:
$$\begin{aligned}\text{原式}&=(A\cap\sim B\cap\sim C)\cup(A\cap\sim B\cap C)\cup(A\cap B\cap\sim C)\cup(A\cap B\cap C)\\&=((A\cap\sim B)\cap(\sim C\cup C))\cup((A\cap B)\cap(\sim C\cup C))\\&=(A\cap\sim B)\cup(A\cap B)=A\cap(\sim B\cup B)=A.\end{aligned}$$

9. **解**:D.

10. **解**:C.

11. **证明**:
$$\begin{aligned}\text{左边}&=A-(A\cap\sim B)=A\cap(\sim(A\cap\sim B))=A\cap(\sim A\cup B)\\&=(A\cap\sim A)\cup(A\cap B)=A\cap B.\end{aligned}$$

12. **解**:$A-B=\{1,3,\{1,2\},\{3\}\}$,

$B-A=\{\{2,3\},\{1\}\}$.

13. **解**:
$$\begin{aligned}A\cup(B+C)&=\{2,3\}\cup\{1,3,4,5,7\}\\&=\{1,2,3,4,5,7\},\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}(A\cup B)+(A\cup C)&=\{1,2,3,4,7\}+\{2,3,5\}\\&=\{1,4,7\}\cup\{5\}=\{1,4,5,7\}.\end{aligned}$$

14. **解**:B.

15. **解**:B.

16. **解**:$A=\varnothing$;$B=\{-1,1\}$.

17. **解**:$\in$;$\subset$;$\subset$.

18. **解**:
$$\begin{aligned}\text{原式}&=(A\cup B)-A=(A\cup B)\cap\sim A\\&=(A\cap\sim A)\cup(B\cap\sim A)\\&=B\cap\sim A=B-A.\end{aligned}$$

第二章

关　　系

2.1　主要内容

1. 关系基本概念.
2. 关系运算.
3. 关系性质.
4. 闭包.
5. 关系等价性与相容性.
6. 次序关系.

2.2　复习重点

1. 了解关系基本思想、运算及性质.
2. 了解几种特殊的关系.

2.3　基本概念及注意事项

1. 一个主要概念——二元关系的基本概念

(1) 有序偶:两个具有固定次序的元素 x,y 所构成的序列称为有序偶,记为 (x,y).

(2) 笛卡儿乘积:$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}$.

(3) 二元关系:$A\times B$ 的子集.

(4) n 元有序组:$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

(5) 笛卡儿乘积:$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid a_i\in A_i,i=1,2,\cdots,n\}$.

(6) n 元关系:$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 的子集.

(7) 几种特殊关系:

① 空关系:$\varnothing$;

② 全关系:$A\times B$;

③ 恒等关系:$E_A=\{(x,x)\mid x\in A\}$.

2. 两种表示方法

(1) 集合表示法:有序偶的集合.

(2) 图表示法:有向图.

3. 关系的五个性质

(1) 关系自反性:$R\subseteq A\times A$,若 $x\in A$,有 $(x,x)\in R$,则称 R 满足自反性.

(2) 关系非自反性:$R\subseteq A\times A$,若 $x\in A$,有 $(x,x)\notin R$,则称 R 满足非自反性.

(3) 关系对称性:$R\subseteq A\times A$,若 $x,y\in A$,如果 $(x,y)\in R$,便有 $(y,x)\in R$,则称 R 满足对称性.

(4) 关系反对称性:$R\subseteq A\times A$,若 $x,y\in A$,如果 $(x,y)\in R$ 并且 $(y,x)\in R$,便有 $x=y$,则称 R 满足反对称性.

(5) 关系传递性:$R\subseteq A\times A$,若 $x,y,z\in A$,有 $(x,y)\in R$,$(y,z)\in R$,便有 $(x,z)\in R$,则称 R 满足传递性.

4. 四种运算

(1) 关系补运算 $\overline{R}$:设 $R\subseteq A\times B$,则有 $\overline{R}=(A\times B)-R$.

(2) 关系复合运算 $R_1\circ R_2$:设 $R_1\subseteq A\times B$,$R_2\subseteq B\times C$,则 $R=R_1\circ R_2=\{(a,c)\mid a\in A,c\in C$,存在 $b\in B$ 使得 $(a,b)\in R_1,(b,c)\in R_2\}$.

(3) 关系逆运算 $\widetilde{R}$:设有 $R\subseteq A\times B$,则 $\widetilde{R}=\{(y,x)\mid(x,y)\in R\}$.

(4) 关系的闭包运算:设 R 是集合 X 上的一个关系,则 R 的自反(对称、传递)闭包是一个满足下列条件的关系 R':

① R' 是自反的(对称的、传递的);

② $R'\supseteq R$;

③ 设 R'' 是自反的(对称的、传递的)且 $R''\supseteq R$,则必有 $R''\supseteq R'$.

通常用 $r(R)$ 表示关系 R 的自反闭包;用 $s(R)$ 表示关系 R 的对称闭包;用 $t(R)$ 表示关系 R 的传递闭包.

5. 有关运算的九个公式

(1) 复合运算公式:

$(R\circ S)\circ T=R\circ(S\circ T)$,

$R^m\circ R^n=R^{m+n}$,

$(R^m)^n=R^{m\times n}$.

(2) 逆运算公式:

$\widetilde{\widetilde{R}}=R$,

$\widetilde{R\circ S}=\widetilde{R}\circ\widetilde{S}$.

(3) 闭包的公式:

$r(R)=R\cup E$,

$s(R) = R \cup \widetilde{R}$,

$t(R) = \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i$,

$t(R) = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$(有限个元素时).

6. 六种常用关系

(1) 次序关系之一:偏序关系

(2) 次序关系之二:拟序关系

(3) 次序关系之三:线性次序关系

(4) 次序关系之四:字典次序关系

(5) 等价关系

① 划分:集合 S 及 P,P 是 S 的 n 个非空子集 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的集合,且如果 $A_i \neq A_j$ 就有 $A_i \cap A_j = \varnothing$ 及 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S$,则称 P 为 S 的一个划分.

② 等价关系:满足自反性、对称性与传递性的关系.

③ 等价类:等价关系 $R \subseteq A \times A$,$a \in A$,a 关于 R 的等价类为 $[a]_R = \{x \mid xRa\}$.

④ 商集:A 关于 R 等价类全体,记为 A/R,$A/R = \{[a]_R \mid a \in A\}$.

(6) 相容关系

① 相容关系:满足自反性、对称性的关系.

② 最大相容类:关系 $R \subseteq A \times A$ 是相容的,$B \subseteq A$ 满足:

(a) $x \in B$ 都与 B 中其他元素相容;

(b) $A - B$ 中无元素与 B 中所有元素相容.

③ 完全覆盖:$R \subseteq A \times A$ 是相容的,其最大相容类集合称为完全覆盖.

7. 常用关系中的五种概念与方法

(1) 偏序关系中的八个概念:最大元素(最小元素)、极大元素(极小元素)、上界(下界)、上确界(下确界)以及它们间的关系.

(2) 四个次序关系间的关系.

(3) 相容关系中的基本概念:极大相容分块、完全覆盖.

(4) 等价关系中的基本概念与方法:等价类、划分、商集以及它们间的关系.

(5) 次序关系、相容关系及等价关系间的关系.

2.4　典型例题详细分析

1. (2.2) 设有 X 上的关系 R_1, R_2, R_3,试证:

(1) 如 $R_1 \subseteq R_2$,则 $R_1 \circ R_3 \subseteq R_2 \circ R_3$;

(2) 如 $R_1 \subseteq R_2$,则 $R_3 \circ R_1 \subseteq R_3 \circ R_2$.

分析：本题涉及集合、有序偶、关系、复合运算等概念，证明时要用到上述有关概念的定义、性质．要表达出 R_1, R_2, R_3 中的有序偶在 $R_1 \circ R_3, R_2 \circ R_3, R_3 \circ R_1$ 和 $R_3 \circ R_2$ 中是如何变化的，从而来说明对于 $R_1 \subseteq R_2$，两边同时做一相同的 R_3 复合运算后，包含"$\subseteq$"仍成立．

证明：(1) 对任意 $(a,c) \in R_1 \circ R_3$，存在 $b \in X$，使得 $(a,b) \in R_1$ 且 $(b,c) \in R_3$，由于 $R_1 \subseteq R_2$，所以存在 $b \in X$，使得 $(a,b) \in R_2$ 且 $(b,c) \in R_3$，于是 $(a,c) \in R_2 \circ R_3$，因而得 $R_1 \circ R_3 \subseteq R_2 \circ R_3$．

(2) 对任意 $(a,c) \in R_3 \circ R_1$，存在 $b \in X$ 使得 $(a,b) \in R_3$ 且 $(b,c) \in R_1$，由于 $R_1 \subseteq R_2$，所以存在 $b \in X$ 使得 $(a,b) \in R_3$ 且 $(b,c) \in R_2$，于是 $(a,c) \in R_3 \circ R_2$，因而得 $R_3 \circ R_1 \subseteq R_3 \circ R_2$．

2. (2.8) 设有 X 上的关系 R_1, R_2，且 $R_1 \supseteq R_2$，试证：

(1) $r(R_1) \supseteq r(R_2)$；

(2) $s(R_1) \supseteq s(R_2)$；

(3) $t(R_1) \supseteq t(R_2)$．

分析：本题从关系的包含 $R_1 \supseteq R_2$ 联系到 R_1 和 R_2 各自的三种闭包（自反、对称、传递），从而说明各自对应的闭包之间也同样具有包含关系，这里要从理解关系的包含、恒等关系 E、逆关系、关系的三种闭包等概念来证明．

证明：(1) 因为 $R_1 \supseteq R_2$，所以 $R_1 \cup E \supseteq R_2 \cup E$，即 $r(R_1) \supseteq r(R_2)$．

(2) 因为 $R_1 \supseteq R_2$，所以$\widetilde{R}_1 \supseteq \widetilde{R}_2$，所以 $R_1 \cup \widetilde{R}_1 \supseteq R_2 \cup \widetilde{R}_2$，即 $s(R_1) \supseteq s(R_2)$．

(3) 对任意的 $n \in \mathbf{N}$，根据数学归纳法可知：$R_1 \supseteq R_2 \Rightarrow R_1^n \supseteq R_2^n$．

对任意的 $(x,y) \in t(R_2) = R_2 \cup R_2^2 \cup R_2^3 \cup \cdots$，存在 $m \in \mathbf{N}$，使 $(x,y) \in R_2^m$，有 $R_1^m \supseteq R_2^m$，故 $(x,y) \in R_1^m$，因此有 $(x,y) \in R_1 \cup R_1^2 \cup R_1^3 \cup \cdots = t(R_1)$，所以有 $t(R_1) \supseteq t(R_2)$．

3. (2.10) 设 X 上的关系 R 是等价关系，试证：R 的逆关系也是等价关系．

分析：等价关系是一种常用来出题的概念，要证明一个关系是等价关系，即要具体说明它同时满足自反、对称、传递三种性质，要针对特定的关系 R，分别证明其满足上述三种性质．

证明：因为 R 是集合 X 上的等价关系，则

(1) 因为 R 是自反的，即对任意 $x \in X$，有 $(x,x) \in R$，所以 $(x,x) \in \widetilde{R}$. 所以$\widetilde{R}$是自反的．

(2) 因为 R 是对称的，对任意 $(x,y) \in R$，有 $(y,x) \in R$，所以对任意 $(y,x) \in \widetilde{R}$，有 $(x,y) \in \widetilde{R}$. 所以$\widetilde{R}$是对称的．

(3) 因为 R 是传递的，即如果 $(x,y) \in R$，$(y,z) \in R$，则 $(x,z) \in R$，所以对应有如果 $(y,x) \in \widetilde{R}$，$(z,y) \in \widetilde{R}$，则 $(z,x) \in \widetilde{R}$，所以$\widetilde{R}$满足传递性．

由(1)(2)(3)知 R 的逆关系$\widetilde{R}$也是 X 上的等价关系．

4. (2.13) 对下列集合，画出其偏序关系的"整除"哈斯图：

(1) $\{2,6,24\}$；

(2) $\{3,5,15\}$；

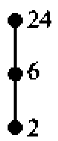
(3) $\{1,2,3,6,12\}$;

(4) $\{3,9,27,54\}$;

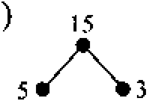
(5) $\{2,4,8,16\}$.

分析:表示一个集合上的偏序关系,常用哈斯图,各元素之间的关系可体现在哈斯图上,两个元素之间直接画一根连线,如 x 和 y 有 $x \leqslant y$,则不能存在 z,使得 $x \leqslant z, z \leqslant y$. 本题画图时要考虑的是元素之间的整除关系.

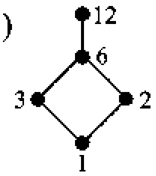
解: (1)



(2)



(3)



(4)

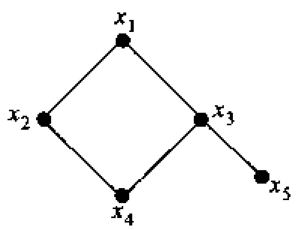
(5)

5. 有偏序集$(\mathbf{N}, \leqslant)$,即自然数集 $\mathbf{N}$ 上的小于等于关系,$\mathbf{N}$ 的子集 $A=\{2,3,6,8\}$ 的下确界和上确界分别是什么?

分析:本题指自然数集上的小于等于关系,子集 A 中的元素 2 均小于等于其他元素,又是所有下界 0,1,2(此时指 $\mathbf{N}$ 中的元素)中最大的一个,故为下确界;而 A 中的 8 均大于等于其他元素,又是所有上界 8,9,10,…(此时指 $\mathbf{N}$ 中的元素)中最小的一个,故为上确界.

解:下确界为 2,上确界为 8.

6. 设有集合 $A=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$ 上的偏序关系如下图所示,A 的最大元素为________,最小元素为________,极大元素为________,极小元素为________. A 的子集 $\{x_3,x_4,x_5\}$ 的上界为________,下界为________,上确界为________,下确界为________.



分析:最大元素要么不存在,要么唯一,最小元素也是如此;而极大元素、极小元素可以有多个. 找子集 $\{x_3,x_4,x_5\}$ 的上、下界要到原母集合 A 中去找,上、下界可以有多个,也可以不存在,而上、下确界若有则唯一.

解:顺次在空格中填写:x_1,无,x_1,x_4 x_5,x_1 x_3,无,x_3,无.

7. (2P-28)$A=\{1,2,3,4\}$,R 是 A 上的二元关系,其关系矩阵为

$$M_R=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

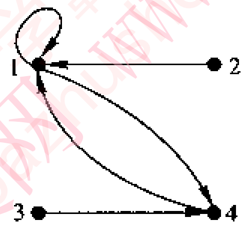
试求:(1) R 的关系表达式;

(2) $D(R)$和 $C(R)$.

分析:矩阵是表示关系的一种方式,这便于计算,相关集合 A 中的每一个元素,在矩阵中要代表某行及某列的位置,本题 A 中的元素 1,2,3,4 所表示的行、列位置为:

$$M_R=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}1&2&3&4\end{array}\\ \begin{bmatrix}1&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}\end{array}$$

而矩阵中某行某列交叉位置上如果出现 1,则表示相关位置上的两个元素之间有一有向线(可反映在关系图中),即表示这两个元素可构成一个关系中的有序偶,如上面矩阵中第 1 行、第 4 列交叉位置上有 1,则表示存在有序偶(1,4),类似地有(1,1),(2,1)等. 上述矩阵的关系图为:



解:(1) $R=\{(1,1),(1,4),(2,1),(3,4),(4,1)\}$;

(2) $D(R)=\{1,2,3,4\}$,$C(R)=\{1,4\}$.

8. (2P-32)设集合 $A=\{a,b,c,d\}$,判定下列关系哪些是自反的、对称的、反对称的、传递的:$R_1=\{(a,a),(b,a)\}$;$R_2=\{(c,d)\}$;$R_3=\{(a,a),(b,b),(c,c)\}$.

分析:本题考关系的几个特殊的性质.

(1) 对 R_1,满足:① 反对称的,因为其中有(b,a),没有出现(a,b),而(a,a)是符合反对称的;② 传递的,因为其中有(b,a)和(a,a),由前一有序偶的第二个元素 a 与后一有序偶的第一个元素 a,应该传递得到(b,a),而 R_1 中确有(b,a)存在. R_1 不满足自反性,因为必须原集合 A 中的所有元素自己作为第一元素和第二元素的有序偶都要出现才满足自反性,即必须有(a,a),(b,b),(c,c),(d,d).

(2) 对 R_2,满足:① 反对称的,因为有(c,d),没有出现(d,c);② 传递的,因为传递意为如果有(a,b),(b,c),就应出现(a,c),如果没有出现(a,c)就是非传递的,一个关系要么是传递的,要么是非传递的,两者只能居其一,而如果没有(a,b),(b,c)出现的情况也归为满足传递性. 类似 R_1,不满足自反性;而有(c,d),没有(d,c)则不满足对称性.

(3) 对 R_3,满足:① 对称的,可看成 (a,a) 的对称为 (a,a);② 反对称的,根据反对称的定义,一个有序偶的第一元素和第二元素如果可以交换且存在反对称关系的话,则第一和第二元素应该相同,如此处的 (a,a);③ 传递的,解释类似于 R_2. 注意:一个关系可以既不是自反的,又不是反自反的;既是对称的,又是反对称的;但传递与非传递不能同时存在.

解:(1) R_1 是反对称的、传递的;

(2) R_2 是反对称的、传递的;

(3) R_3 是对称的、反对称的、传递的.

2.5　相关教材中习题及解答

1. (2.1)设 $X=\{0,1,2,3\}$,X 上有两个关系:

$$R_1=\{(i,j)\mid j=i+1 \text{ 或 } j=i/2\},$$
$$R_2=\{(i,j)\mid i=j+2\}.$$

求复合关系:

(1) $R_1\circ R_2$;

(2) $R_2\circ R_1$;

(3) $R_1\circ R_2\circ R_1$.

解:先求 $R_1=\{(0,1),(1,2),(2,3),(0,0),(2,1)\}$,$R_2=\{(2,0),(3,1)\}$,则有:

(1) $R_1\circ R_2=\{(1,0),(2,1)\}$;

(2) $R_2\circ R_1=\{(2,1),(2,0),(3,2)\}$;

(3) $R_1\circ R_2\circ R_1=\{(1,1),(1,0),(2,2)\}$.

2. (2.3)设有 X 上关系 R 满足对称性和传递性,请问 R 是否一定满足自反性?并请说明理由.

解:此时不一定满足自反性. 因为虽然由对称性 (a,b),(b,a) 有序偶存在,又由传递性知 (a,a) 也存在,但此处的元素 a 不代表 X 中的任意元素,而是受到对称性限制的(对称性未必涉及 X 中的所有元素),仅适合对称性的那些有序偶 (a,b) 中的 a,而自反性则要求对 X 中的任意一个元素 a 均有 (a,a) 出现在 R 中.

3. (2.4)设 X 上的关系 R_1,R_2 满足对称性,试证:

如果 $R_1\circ R_2\subseteq R_2\circ R_1$,则 $R_1\circ R_2=R_2\circ R_1$.

证明:只需证明 $R_2\circ R_1\subseteq R_1\circ R_2$.

对任意的 $(a,c)\in R_2\circ R_1$,则存在 $b\in X$,使 $(a,b)\in R_2$ 且 $(b,c)\in R_1$,由于 R_1 和 R_2 都是对称的,所以有 $(c,b)\in R_1$ 且 $(b,a)\in R_2$,从而 $(c,a)\in R_1\circ R_2$,由条件知 $R_1\circ R_2\subseteq R_2\circ R_1$ 成立,所以 $(c,a)\in R_2\circ R_1$.

因此存在 $d\in X$,使 $(c,d)\in R_2$ 且 $(d,a)\in R_1$.

根据 R_1,R_2 的对称性,有 $(a,d)\in R_1$ 且 $(d,c)\in R_2$,故 $(a,c)\in R_1\circ R_2$,因此 $R_2\circ R_1\subseteq R_1\circ R_2$.

所以有 $R_1\circ R_2=R_2\circ R_1$.

4. (2.5)设 X 上的关系 R,S 是自反的,试证:$R\circ S$,$R\cap S$ 亦是自反的.

证明:对任意的 $a\in X$,因为 R 是自反的,所以 $(a,a)\in R$,又因为 S 是自反的,所以 $(a,a)\in S$.根据复合运算和交运算的定义分别有 $(a,a)\in R\circ S$ 和 $(a,a)\in R\cap S$,所以 $R\circ S$ 和 $R\cap S$ 都是自反的.

5. (2.6)设有 X 上的关系 R,E 是 X 上的恒等关系,试证:

(1) R 自反当且仅当 $E\subseteq R$;

(2) R 反自反当且仅当 $E\cap R=\varnothing$;

(3) R 是对称的当且仅当 $R=\widetilde{R}$;

(4) R 是反对称的当且仅当 $R\cap\widetilde{R}\subseteq E$;

(5) R 是传递的当且仅当 $R\circ R\subseteq R$.

证明:(1) “$\Rightarrow$”对任意的 $(x,x)\in E$,因为 E 是恒等关系,所以 x 是 X 的任意元素. 由于 R 是自反的,即 $(x,x)\in R$,故 $E\subseteq R$.

“$\Leftarrow$”对任意 $x\in X$,则 $(x,x)\in E$,因为 $E\subseteq R$,所以 $(x,x)\in R$,故 R 是自反的.

(2) “$\Rightarrow$”假定 $E\cap R\neq\varnothing$,则存在 $a\in X$,使 $(a,a)\in E\cap R$. 即有 $(a,a)\in R$,其中 $a\in X$. 因而 R 不是反自反的,这与条件 R 是反自反的相矛盾,故 $E\cap R=\varnothing$.

“$\Leftarrow$”假定 R 不是反自反的,则存在 $(a,a)\in R$,其中 $a\in X$,由于 E 是 X 上的恒等关系,对任意的 $a\in X$,均有 $(a,a)\in E$,因此存在 $(a,a)\in E\cap R$,其中 $a\in X$,这与条件 $E\cap R=\varnothing$ 相矛盾,所以 R 是反自反的.

(3) “$\Rightarrow$”$R=\{(x,y)\mid(x,y)\in R\}\xlongequal{\text{对称}}\{(x,y)\mid(y,x)\in R\}=\{(x,y)\mid(x,y)\in\widetilde{R}\}=\widetilde{R}$.

“$\Leftarrow$”对任意 $x,y\in X$,若 $(x,y)\in R$,由于 $R=\widetilde{R}$,故 $(x,y)\in\widetilde{R}$,从而 $(y,x)\in R$,因此 R 是对称的.

(4) “$\Rightarrow$”对任意的 $(x,y)\in R\cap\widetilde{R}\neq\varnothing$,则 $(x,y)\in R$ 且 $(x,y)\in\widetilde{R}$,即 $(x,y)\in R$ 且 $(y,x)\in R$,因为 R 是反对称的,所以 $x=y$,即 $(x,y)=(x,x)\in E$,故 $R\cap\widetilde{R}\subseteq E$. 当 $R\cap\widetilde{R}=\varnothing$ 时,因为 $\varnothing$ 是任何集合的子集,故亦有 $R\cap\widetilde{R}=\varnothing\subseteq E$.

“$\Leftarrow$”对任意 $x,y\in X$,若 $(x,y)\in R$ 且 $(y,x)\in R$,则 $(x,y)\in R$ 且 $(x,y)\in\widetilde{R}$,于是 $(x,y)\in R\cap\widetilde{R}$,因为 $R\cap\widetilde{R}\subseteq E$,所以 $(x,y)\in E$,从而 $x=y$,故 R 是反对称的.

(5) “$\Rightarrow$”对任意的 $(x,z)\in R\circ R$,则存在 $y\in X$,使 $(x,y)\in R$ 且 $(y,z)\in R$,因为 R 是传递的,所以 $(x,z)\in R$,故有 $R\circ R\subseteq R$.

“$\Leftarrow$”对任意的 $x,y,z\in X$,如果 $(x,y)\in R$ 且 $(y,z)\in R$,则 $(x,z)\in R\circ R$,因为 $R\circ R\subseteq R$,所以 $(x,z)\in R$,故 R 是传递的.

6. (2.7)设有 $X=\{a,b,c\}$ 上关系 R_1,R_2,R_3,R_4 为:

(1) $R_1=\{(a,b),(a,c),(c,b)\}$;

(2) $R_2=\{(a,b),(b,c),(c,c)\}$;

(3) $R_3=\{(a,b),(b,a)(c,c)\}$;

(4) $R_4=\{(a,b),(b,c)(c,a)\}$.

求它们的传递闭包:$t(R_1),t(R_2),t(R_3),t(R_4)$.

解:(1) $t(R_1)=\{(a,b),(a,c),(c,b)\}$;

(2) $t(R_2)=\{(a,b),(b,c),(c,c),(a,c)\}$;

(3) $t(R_3)=\{(a,b),(b,a),(c,c),(a,a),(b,b)\}$;

(4) $t(R_4)=R_4\cup R_4^2\cup R_4^3$

$=\{(a,b),(b,c),(c,a)\}\cup\{(a,c),(b,a),(c,b)\}\cup\{(a,a),(b,b),(c,c)\}$

$=\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(a,c),(b,a),(b,c),(c,a),(c,b)\}$.

7. (2.9)设有 X 上的关系 R_1,R_2,试证:

(1) $r(R_1\cup R_2)=r(R_1)\cup r(R_2)$;

(2) $s(R_1\cup R_2)=s(R_1)\cup s(R_2)$;

(3) $t(R_1\cup R_2)\supseteq t(R_1)\cup t(R_2)$.

证明:(1) $r(R_1\cup R_2)=(R_1\cup R_2)\cup E=(R_1\cup E)\cup(R_2\cup E)=r(R_1)\cup r(R_2)$.

(2) $s(R_1\cup R_2)=(R_1\cup R_2)\cup(\widetilde{R_1\cup R_2})=(R_1\cup\widetilde{R}_1)\cup(R_2\cup\widetilde{R}_2)=s(R_1)\cup s(R_2)$.

(3) 对任意的 $n\in\mathbf{N}$,当 $n=2$ 时,$(R_1\cup R_2)^2=R_1^2\cup(R_1\circ R_2)\cup(R_2\circ R_1)\cup R_2^2\supseteq R_1^2\cup R_2^2$.

假定 $n=k$ 时,有$(R_1\cup R_2)^k\supseteq R_1^k\cup R_2^k$,则$(R_1\cup R_2)^{k+1}=(R_1\cup R_2)^k\circ(R_1\cup R_2)\supseteq(R_1^k\cup R_2^k)\circ(R_1\cup R_2)=R_1^{k+1}\cup(R_1^k\circ R_2)\cup(R_2^k\circ R_1)\cup R_2^{k+1}\supseteq R_1^{k+1}\cup R_2^{k+1}$.

于是$(R_1\cup R_2)^n\supseteq R_1^n\cup R_2^n$,对任意的 n 均成立.

$t(R_1\cup R_2)=(R_1\cup R_2)\cup(R_1\cup R_2)^2\cup(R_1\cup R_2)^3\cup\cdots$

$$=\bigcup_{n=1}^{\infty}(R_1\cup R_2)^n\supseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}(R_1^n\cup R_2^n)=(\bigcup_{n=1}^{\infty}R_1^n)\cup(\bigcup_{n=1}^{\infty}R_2^n)=t(R_1)\cup t(R_2).$$

8. (2.11)设 $N=\{1,2,\cdots\}$,并设 ~ 是 $N\times N$ 上的关系,其定义为:若 $ad=bc$,则有$(a,b)\sim(c,d)$,试证:~是一个等价关系.

证明:根据条件若 $ad=bc$,则$(a,b)\sim(c,d)$,有

(1) 因为 $ab=ba$,所以$(a,b)\sim(a,b)$是自反的.

(2) 因为若有$(a,b)\sim(c,d)$,则 $ad=bc$,所以 $cb=da$,所以$(c,d)\sim(a,b)$,满足对称性.

(3) 因为若有$(a,b)\sim(c,d),(c,d)\sim(e,f)$,则 $ad=bc,cf=de$,可得 $c=\dfrac{ad}{b},c=\dfrac{de}{f},\dfrac{ad}{b}=\dfrac{de}{f}$,所以 $af=be$,所以有$(a,b)\sim(e,f)$,满足传递性.

故由(1)(2)(3)可知 ~ 是一个等价关系.

9. (2.12)设 R 是集合 $X=\{1,2,3,4,5,6\}$ 上的等价关系,$R=\{(1,1),(1,5),(2,2),(2,3),(2,6),(3,2),(3,3),(3,6),(4,4),(5,1),(5,5),(6,2),(6,3),(6,6)\}$,求 R 的等价类.

解:等价类是:[1] = {1,5},[2] = {2,3,6},[3] = {3,2,6},[4] = {4},[5] = {5,1},[6] = {6,2,3}.

10. (2.14)给出一个集合上的关系,使它既是偏序关系又是等价关系.

解:设有集合 $A=\{1,2,3\}$,在 A 上构造一关系 $R=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$.

(1) 此 R 满足自反性、反对称性、传递性,故它是一个偏序关系;

(2) 此 R 满足自反性、对称性、传递性,故它是一个等价关系.

11. (2.15)请举一个相容关系的例子.

解:设有集合 $A=\{a,b,c\}$,在 A 上构造一个关系 $R=\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a)\}$, R 是自反的、对称的,故 R 是一个相容关系.

12. (2P-24)设 $A=\{a,b,c\}$,$R=\{(a,a),(b,b)\}$,则 R 具有下面 4 个中的哪种性质?

(1) 自反的;　　(2) 反自反的;

(3) 反对称性;　　(4) 等价的.

解:具有性质(3),满足反对称性.

13. (2P-25)设 R_1,R_2 是集合 $A=\{1,2,3,4\}$ 上的二元关系,其中 $R_1=\{(1,1),(1,2),(2,4)\}$,$R_2=\{(1,4),(2,3),(2,4),(3,2)\}$,试求 $R_1\circ R_2$.

解:$R_1\circ R_2=\{(1,4),(1,3)\}$.

14. (2P-26)设 $A=\{a,b,c,d\}$,R_1,R_2 是 A 上的二元关系:

$$R_1=\{(a,a),(b,b),(b,c),(d,d)\},$$
$$R_2=\{(a,a),(b,b),(b,c),(c,b),(d,d)\}.$$

试说明 R_2 是 R_1 的何种闭包.

解:
$$\begin{aligned}R_1\cup\widetilde{R}_1&=\{(a,a),(b,b),(b,c),(d,d)\}\cup\{(a,a),(b,b),(c,b),(d,d)\}\\&=\{(a,a),(b,b),(b,c),(c,b),(d,d)\},\end{aligned}$$

即有 $R_1\cup\widetilde{R}_1=R_2$,根据对称闭包的定义及求解方法知 R_2 是 R_1 的对称闭包.

15. (2P-27)设二元关系 $R=\{(\{1\},a),(l,b),(2,c),(3,\{d\})\}$,试求 $D(R)$ 与 $C(R)$.

解:$D(R)=\{\{1\},l,2,3\}$,

$C(R)=\{a,b,c,\{d\}\}$.

16. (2P-29)设集合 $A=\{a,b\}$,R 是 $\rho(A)$ 上的包含关系,写出 R 的表达式、关系矩阵和关系图.

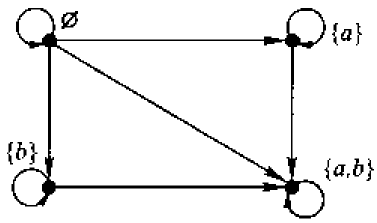
解:$\rho(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$,

$R=\{(\varnothing,\varnothing),(\varnothing,\{a\}),(\varnothing,\{b\}),(\varnothing,\{a,b\}),(\{a\},\{a\}),(\{a\},\{a,b\}),(\{b\},\{b\}),(\{b\},\{a,b\}),(\{a,b\},\{a,b\})\}$.

关系矩阵:

$$M_R=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

关系图:



17. (2P-30)设集合 $A=\{1,2,3,4\}$,A 上的二元关系:

$$R_1=\{(1,1),(1,3),(1,4),(2,4),(3,3),(4,4)\},$$
$$R_2=\{(1,2),(1,3),(2,3),(4,4)\},$$
$$R_3=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}.$$

求 $R_1\cap R_2$,$R_2\cup R_3$,$\sim R_1$,R_1-R_3,$R_1\circ R_2$.

解:$R_1\cap R_2=\{(1,3),(4,4)\}$,

$R_2\cup R_3=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3),(4,4)\}$,

$\sim R_1=\{(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3)\}$,

$R_1-R_3=\{(1,3),(1,4),(2,4)\}$,(去掉 R_1 中与 R_3 中相同的有序偶,保留不同的即可.)

$R_1\circ R_2=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,4),(4,4)\}$.

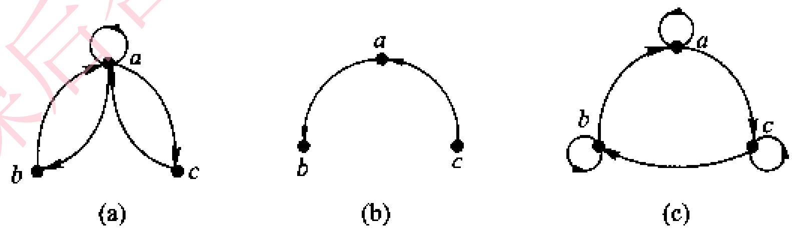
18. (2P-22)设集合 $A=\{a,b,c\}$,A 上的二元关系 $R=\{(a,a),(b,b)\}$ 不具备关系中下列 4 个中的哪个性质?

(1) 传递性;　　(2) 反对称性;

(3) 对称性;　　(4) 自反性.

解:不具备(4)自反性. 如果加入 (c,c),才有自反性.

19. (2P-31)试判断图中关系的性质.



(第 19 题)

解:对图(a),$R=\{(a,a),(a,b),(b,a),(a,c),(c,a)\}$,$R$ 是对称的,非传递的.

对图(b),$R=\{(a,b),(c,a)\}$,R 是反自反的,反对称的,非传递的.

对图(c),$R=\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,c),(b,a),(c,b)\}$,$R$ 是自反的,反对称的,非传递的.

20. (2P-33)设集合 $A=\{a,b,c,d\}$,定义 $R=\{(a,b),(b,a),(b,c),(c,d)\}$,求 $r(R)$,$s(R)$,$t(R)$.

解:$r(R)=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,a),(b,c),(c,d)\}$,

$s(R)=\{(a,b),(b,a),(b,c),(c,b),(c,d),(d,c)\}$,

$$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4$$
$$= \{(a,b),(b,a),(b,c),(c,d)\} \cup \{(a,a),(a,c),(b,b),(b,d)\} \cup$$
$$\{(a,b),(a,d),(b,a),(b,c)\} \cup \{(a,a),(a,c),(b,b),(b,d)\}$$
$$= \{(a,a),(b,b),(a,b),(a,c),(a,d),(b,a),(b,c),(b,d),(c,d)\}.$$

21. (2P－34)设 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$,定义 A 上的二元关系:

$$R_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\} \cup$$
$$\{(1,4),(2,3),(2,6),(3,2),(3,6),(4,1),(6,2),(6,3)\},$$
$$R_2 = \{(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4),(4,5)\}.$$

(1) 判断 R_1,R_2 是否为等价关系? (2) 若是等价关系,写出其等价类.

解:(1) R_1 是等价关系,R_2 不是.

(2) R_1 的等价类是:$\{1,4\},\{5\},\{2,3,6\}$.

2.6 另增配套习题及解答

1. 设 R 是集合 A 上的二元关系,假定存在 s 和 t,且 $s<t$,使 $R^s=R^t$,则:

(1) 对所有 $k \geqslant 0$,$R^{s+k}=R^{t+k}$;

(2) 对所有 $k,i \geqslant 0$,$R^{s+i+kp}=R^{s+i}$,其中 $p=t-s$;

(3) 令 $S=\{R^0,R^1,R^2,\cdots,R^{t-1}\}$,则对所有 $q \in \mathbf{N}$,有 $R^q \in S$.

证明:(1) 用归纳法.

当 $k=1$ 时,$R^{s+1}=R^s \circ R=R^t \circ R=R^{t+1}$.

假设当 $k=n$ 时成立,即 $R^{s+n}=R^{t+n}$.

对 $k=n+1$ 时,$R^{s+n+1}=R^{s+n} \circ R=R^{t+n} \circ R=R^{t+n+1}$.

故 $R^{s+k}=R^{t+k}$.

(2) 用归纳法.

当 $k=1$ 时,$R^{s+i+p}=R^{s+i+t-s}=R^{t+i}=R^{s+i}$(由(1)得).

假设当 $k=n$ 时成立,即 $R^{s+i+n(t-s)}=R^{s+i}$.

对 $k=n+1$ 时,$R^{s+i+(n+1)(t-s)}=R^{s+i+n(t-s)+(t-s)}=R^{s+i+(t-s)}=R^{t+i}=R^{s+i}$(由(1)得).

(3) 令 $q \in \mathbf{N}$,若 $q<t$,则由定义,$R^q \in S$;假定 $q \geqslant t$,则 q 可表示成 $s+kp+i$,其中 $i<p$,由(2)得到 $R^q=R^{s+i}$,由于 $s+i<t$,所以 $R^q \in S$.

2. $P=\{a,b,c,d\}$ 的最大划分是______;最小划分是______.

解:$\{\{a,b,c,d\}\}$;$\{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}\}$.

3. 集合 $A=\{1,2,\cdots,10\}$ 上的关系 $R=\{(x,y) \mid x+y=10$ 且 $x,y \in A\}$,则 R 的性质为( ).

A. 自反的　　　　B. 对称的

C. 传递的,对称的　　　　D. 非自反的,传递的

解:B. 对称的.

4. $A=\{1,2,3,4\}$ 上的关系 $R_1=\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ 可用矩阵 M_{R_1} 表示如下:

$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

若表示关系 R 的矩阵主对角线全为1,按主对角对称,那么该关系应具备________性和________性.

解:自反;对称.

5. $A=\{a,b,c\}$,$R=\{(a,a),(a,b)\}$,则 $s(R)=$________;$t(R)=$________.

解:$s(R)=\{(a,a),(a,b),(b,a)\}$,$t(R)=R\cup R^2\cup R^3=\{(a,a),(a,b)\}$.

6. 设 R 是 $A=\{a,b,c,d\}$ 上的二元关系,$R=\{(b,a),(a,b),(c,c),(d,d)\}$,求最小的正整数 $m,n,m<n$,使得 $R^m=R^n$.

解:$R^2=R\circ R=\{(b,b),(a,a),(c,c),(d,d)\}$,

$R^3=R^2\circ R=\{(b,a),(a,b),(c,c),(d,d)\}$.

即有 $R^1=R^3$,故 $m=1,n=3$.

7. $A=\{a,b,c\}$,$A_1=\{\{a\},\{b,c\},\{c\}\}$,$A_2=\{\{a,b,c\}\}$,$A_3=\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$,$A$ 的划分为________,A 的完全覆盖为________.

解:A_3,A_3.

8. R,Q 都是 A 上的等价关系,则 $s(R\cap Q)=$________;$t(R\cap Q)=$________.

解:$s(R\cap Q)=R\cap Q$;$t(R\cap Q)=R\cap Q$.

9. 试证明每个相容关系 R,唯一地定义一个完全覆盖.

证明:如果 R 是集合 A 上的相容关系,对于 A 中的任意元素 a,集合$\{a\}$是一个相容类,且可对此集合不断地添加新的元素,直到使它成为最大相容类,因而 A 中的每个元素都将是某一个最大相容类中的元素,所以相容关系 R 产生的所有最大相容类构成的集合是 A 的一个覆盖;又由最大相容类的定义可知,一个最大相容类不可能是另一个最大相容类的子集,故由此最大相容类构成的集合是 A 的唯一的完全覆盖.

10. 设 $A=\{a,b,c,d\}$,A 上的二元关系为:$R=\{(a,a),(a,b),(b,a),(a,d),(d,a),(b,b),(c,c),(d,d)\}$,写出 R 的关系矩阵,并断定 R 是否是 A 上的相容关系.

解:R 的关系矩阵为:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

根据 M_R 的主对角线元素全为1,知 R 是自反的;又根据其余的1与主对角线有对称性,知 R 是对称的,故 R 是 A 上的相容关系.

11. 在下列每一部分中,找出一个最少元素的集合 A,使给定集合为它的子集,并确定以这些

子集为元素的集合 B 是 A 的覆盖还是划分.

(1) $\{1,2,3\},\{1,4,5,6\},\{2,3,5,7\}$;

(2) $\{a,b\},\{a,c\}$;

(3) $\{a,1\},\{b,2\}$.

解:(1) $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$,

$B=\{\{1,2,3\},\{1,4,5,6\},\{2,3,5,7\}\}$ 是 A 的覆盖;

(2) $A=\{a,b,c\}$,

$B=\{\{a,b\},\{a,c\}\}$ 是 A 的覆盖;

(3) $A=\{1,2,a,b\}$,

$B=\{\{a,1\},\{b,2\}\}$ 是 A 的划分.

12. 设 $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$,在 $A\times A$ 上的关系 $R=\{((a,b),(c,d))\mid a+d=b+c\}$,试证明 R 是等价关系,并求 $[(3,6)]_R$、$[(1,3)]_R$、$[(8,9)]_R$.

分析:本题 R 的有序偶的第一个元素和第二个元素本身也是有序偶,即第一元素为 (a,b),第二元素为 (c,d),而不是通常的第一元素为 a 第二元素为 b. 满足本关系 R 的两个有序偶元素的关系解释为 $a+d=b+c$,即第一个有序偶中的第一个元素 a 与第二个有序偶中的第二个元素 d 相加等于第一个有序偶中的第二个元素 b 与第二个有序偶中的第一个元素 c 相加,按此原则,根据普通加法的性质来推出前后两个有序偶可满足自反、对称、传递性质,故而证明 R 是等价关系.

当求具体的等价类时,将待求的元素(此题为有序偶,如 $(1,3)$)去配满足同类性质的所有元素(也是有序偶). 例如,$[(1,3)]_R$ 中的 $(6,8)$,$(7,9)$ 等满足 $1+8=3+6$、$1+9=3+7$ 等.

证明:对任何 $(a,b)\in A\times A$,$((a,b),(a,b))$ 表示 $a+b=b+a$,根据普通加法满足交换律,可得 $((a,b),(a,b))\in R$,自反性满足;

$((a,b),(c,d))\in R \Rightarrow a+d=b+c \Rightarrow c+b=d+a$

$\Rightarrow ((c,d),(a,b))\in R$,对称性满足;

$((a,b),(c,d))\in R$ 且 $((c,d),(e,f))\in R \Rightarrow a+d=b+c$ 且 $c+f=d+e$

$\Rightarrow a+d+c+f=b+c+d+e$(两式相加)

$\Rightarrow a+f=b+e$

$\Rightarrow ((a,b),(e,f))\in R$,传递性满足.

故 R 是等价关系.

$$\begin{aligned}[(3,6)]_R &= \{(a,b)\mid 3+b=6+a\}\\ &= \{(1,4),(2,5),(3,6),(4,7),(5,8),(6,9)\},\\ [(1,3)]_R &= \{(a,b)\mid 1+b=3+a\}\\ &= \{(1,3),(2,4),(3,5),(4,6),(5,7),(6,8),(7,9)\},\\ [(8,9)]_R &= \{(a,b)\mid 8+b=9+a\}\\ &= \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6),(6,7),(7,8),(8,9)\}.\end{aligned}$$

13. 设 $A=\{a,b,c\}$ 的幂集为 $\rho(A)$，在 $\rho(A)$ 上的二元关系 R 为包含关系，即 $R=\{(x,y)\mid x,y\in\rho(A)$ 并且 $x\subseteq y\}$，试证明 $(\rho(A),\subseteq)$ 是偏序集.

分析：本题 R 的有序偶中的第一、第二元素均是一个子集，实际上要找出所有第一元素 $\subseteq$ 第二元素类型的有序偶，再判断它们之间有否自反、反对称和传递性质，进而确定是否是偏序关系.

证明：$\rho(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},A\}$，列出关系 R 中的有序偶：

$R=\{(x,y)\mid x,y\in\rho(A)$，并且 $x\subseteq y\}$

$=\{(\varnothing,\varnothing),(\{a\},\{a\}),(\{b\},\{b\}),(\{c\},\{c\}),(\{a,b\},\{a,b\}),(\{a,c\},\{a,c\}),$
$(\{b,c\},\{b,c\}),(A,A),(\varnothing,\{a\}),(\varnothing,\{b\}),(\varnothing,\{c\}),(\varnothing,\{a,b\}),(\varnothing,\{a,c\}),$
$(\varnothing,\{b,c\}),(\varnothing,A),(\{a\},\{a,b\}),(\{a\},\{a,c\}),(\{a\},A),(\{b\},\{a,b\}),(\{b\},\{b,c\}),$
$(\{b\},A),(\{c\},\{a,c\}),(\{c\},\{b,c\}),(\{c\},A),(\{a,b\},A),(\{a,c\},A),(\{b,c\},A)\}$，

根据上述有序偶中前后两个子集(第一、第二元素)的包含关系有：

$X\subseteq Y$，自反性；$X\subseteq Y$ 并且 $Y\subseteq X\Rightarrow X=Y$，反对称性；$X\subseteq Y$ 并且 $Y\subseteq Z\Rightarrow X\subseteq Z$，传递性.

因此 R 是 $\rho(A)$ 上的偏序关系，$(\rho(A),\subseteq)$ 是偏序集.

14. 设 R 是一个二元关系，$S=\{(a,b)\mid$ 对于某一 c，有 $(a,c)\in R\wedge(c,b)\in R\}$，证明若 R 是一个等价关系，则 S 也是一个等价关系.

证明：设 R 是 A 上的等价关系，则：

(1) 对任一 $x\in A$，因为 R 在 A 上自反，所以 $(x,x)\in R$，由 S 的定义，$(x,x)\in S$，所以 S 是自反的.

(2) 对任意 $x,y\in A$，若 $(x,y)\in S$，则存在某个 c，使得 $(x,c)\in R\wedge(c,y)\in R$，因为 R 对称，故有 $(y,c)\in R\wedge(c,x)\in R$，由 S 的定义可知 $(y,x)\in S$，所以 S 是对称的.

(3) 对任意 $x,y,z\in A$，若 $(x,y)\in S,(y,z)\in S$，则必存在某个 d，使 $(x,d)\in R,(d,y)\in R$.

由 R 的传递性，可知 $(x,y)\in R$，同理存在 e，使 $(y,e)\in R,(e,z)\in R$，由 R 的传递性，可知 $(y,z)\in R$. 再由 S 的定义得 $(x,z)\in S$，故 S 是传递的.

综上(1)(2)(3)可知，S 是 A 上的等价关系.

说明：本题不但要求对等价关系是自反的、对称的、传递的定义明确，还要知道如何表示这些性质及如何利用其来证明其他有关关系的方法.

如上面(2)中对称性的证明，由于 R 和 S 均是定义在某个集合 A 上的关系，要证明对 $(x,y)\in S$，必有 $(y,x)\in S$，应从 S 的定义，即 S 中有序偶的表示方法、与关系 R 有什么样的关联来证明，此时 S 中的 (x,y) 是由 R 来定义的，即 $(x,c)\in R\wedge(c,y)\in R$，再根据 R 是等价关系的对称性，可推出 $(y,c)\in R\wedge(c,x)\in R$. 此式对 S 来说，正好可表示为 $(y,x)\in S$，故推出 S 是对称的.

第三章

函　　数

3.1 主要内容

1. 函数的基本概念.
2. 函数的运算.
3. 函数的性质.

3.2 复习重点

1. 函数的基本概念.
2. 几种特殊的函数.

3.3 基本概念及注意事项

1. 一个主要概念——函数的基本概念

(1) 函数:函数 $f:A\to B$ 表示对 A 中每个元素 a 都能在 B 中找到唯一元素 b 与之对应,也可记为 $f(a)=b$.

(2) 关系与函数:函数 $f:A\to B$ 是一种特殊关系,它满足:

(a) A 中每个元素均出现在关系中(作为关系有序偶的第一个分量);

(b) 如果 $f(a)=b,f(a)=c$,则 $b=c$.

2. 两种运算:

(1) 函数的复合运算:$f:A\to B,g:B\to C$,则复合运算为 $f\circ g:A\to C$,其中 $f\circ g(a)=g(f(a))$;

(2) 函数的逆运算:$f:A\to B$,则逆运算为 $\tilde{f}:B\to A$.

相应又有两种性质:

(1) $f\circ g$ 是函数的复合,如 f,g 满射(一对一,一一对应),则 $f\circ g$ 也是满射(一对一,一一对应);

(2) $f:A\to B$ 有逆映射 $\Longleftrightarrow f$ 是一一对应的.

3. 三种不同函数(特殊函数):

(1) 一对一函数:$f(a_i)=f(a_j)$,则 $a_i=a_j$;

(2) 满射:$f(A)=B$(一般情况称内射:$f(A)\subseteq B$);

(3) 一一对应函数(双射):是一对一函数又是满射.

4. 四种常用函数:

(1) 常值函数;

(2) 恒等函数;

(3) 单调递增(减)函数与严格单调递增(减)函数;

(4) 特征函数.

3.4 典型例题详细分析

1. (3.1) 下面的关系哪些构成函数:

(1) $\{(n_1,n_2)\mid n_1,n_2\in\mathbf{N},n_1+n_2<10\}$;

(2) $\{(n_1,n_2)\mid n_1,n_2\in\mathbf{R},n_2=n_1^2\}$;

(3) $\{(n_1,n_2)\mid n_1,n_2\in\mathbf{R},n_2^2=n_1\}$.

分析:(1) 此时构成有序偶的 n_1 和 n_2 的取值条件是 $n_1+n_2<10$,比如:(1,1),(5,2)等等,而(6,4),(7,5)就不符合条件,如果是关系,那么只管条件 $n_1+n_2<10$ 即可,但函数是一种特殊的关系,要满足函数的要求,即要有:有序偶中的第一元素不能多次与其他元素作为第二元素来构造有序偶.此处(2,3),(2,6),(2,7)等均可出现在集合中,2对应多个元素构成了有序偶,所以不满足函数的定义.

(2) 此时条件为 $n_2=n_1^2$,即有序偶的形式为(4,16),(−4,16),(2,4),(−2,4)等.虽有4,−4均对应16,但此时为有序偶的多个第一元素对应一个第二元素(多对一),满足函数的定义,它是函数.

(3) 此时条件为 $n_2^2=n_1$,即有序偶的形式与(2)相反,如:(16,4),(16,−4)等,此时第一元素16对应了一个以上的第二元素(一对多)4和−4,故不构成函数.

解:(1) 不能构成函数; (2) 可以构成函数; (3) 不能构成函数.

2. (3.3) 设有函数 $f:A\to B,g:B\to C$,试证:

(1) $f\circ g$ 是一对一映射,则 f 是一对一映射;

(2) $f\circ g$ 是满射,则 g 是满射.

分析:本题先要对函数的基本定义清楚地理解,还要理解复合运算中元素的对应、变化关系以及一对一映射、满射这类特殊函数的元素的对应情况.复合运算实际可看成是 f,g 两个函数及 A,B,C 三个集合中元素的联系,其中 B 集合可看成是中介,由 B 搭桥后 $f\circ g$ 直接结果是建立了 A 和 C 两个集合中元素的对应关系.(因为未做复合运算前 f 是 A 和 B 中元素的对应关系,g 是 B 和 C 中元素的对应关系,A 和 C 是没有建立联系的.)本题要根据上述概念中各集合间元素的对应关系来证明.

证明:(1) 因为 $f\circ g$ 是一对一映射,所以如果 f 不是一对一映射,则必存在 $a_1\neq a_2$ 时,有

$f(a_1)=f(a_2)=b\in B$，由于

$$f\circ g(a_1)=g(f(a_1))=g(f(a_2))=f\circ g(a_2),$$

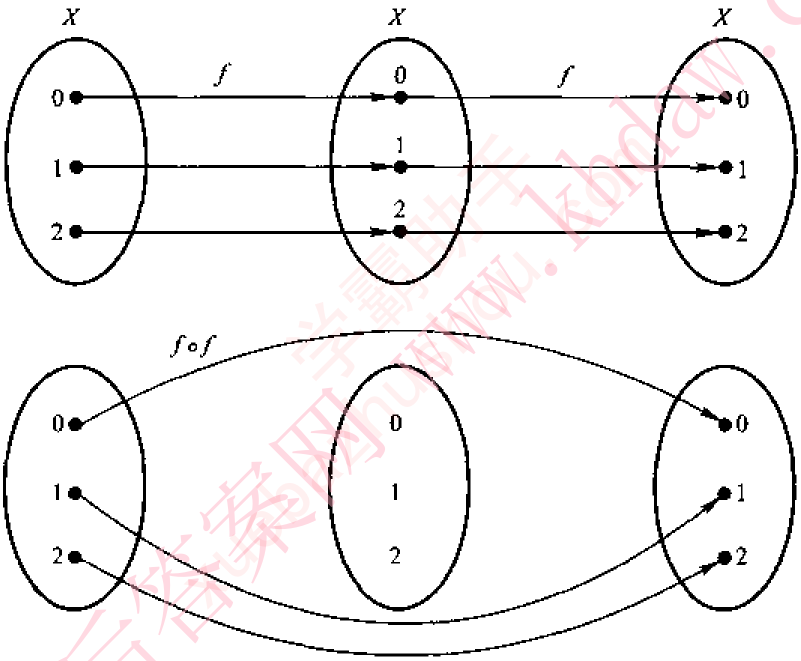
得出 $f\circ g$ 不是一对一的，与题设矛盾.

所以 f 是一对一映射.

(2) 设任意的 $c\in C$，因为 $f\circ g$ 是满射，故必有 $a\in A$，使得 $f\circ g(a)=c$，因为 $f\circ g(a)=g(f(a))$，此处 $f(a)=b\in B$，由于 g 是函数，故每个 $b\in B$，必有 $c\in C$，使 $c=g(b)$，但每个 c 在 g 作用下都是 B 中元素的一个像，由 c 的任意性，可知 g 是满射的.

3. 设 $X=\{0,1,2\}$ 上有函数 $f:X\to X$，试按条件 $f^2(x)=f(x)$，求 f 的表达式.

分析：本题是要找出 f 在 $X\to X$ 上的对应关系. 实际情况见下图：



由图可看出 f 与 $f\circ f=f^2$ 是相同的，对应关系均为：$0\to0,1\to1,2\to2$.

解：由 $f^2(x)=f(x)$，得到 $(f\circ f)(x)=f(x)$，$f(f(x))=f(x)$.

取 $f(x)=y$，得 $f(y)=y$，即 $f(x)=x$.

故 $f=\{(0,0),(1,1),(2,2)\}$.

4. 假设 f 和 g 是函数，证明 $f\cap g$ 也是函数.

分析：本题综合了集合的定义、运算，函数的构造等知识，$f\cap g$ 得到了 f 与 g 共同拥有的 (x,y)，即自变量与像的对应关系，$y=f(x)=g(x)$，有共同的定义域 $\mathrm{dom}\,f=\mathrm{dom}\,g$. 根据 f 和 g 均为函数，推得 $y_1\neq y_2$ 时，必有 $x_1\neq x_2$，那么所构造的 $h=f\cap g$ 的自变量 x 与像 y 之间的关系满足函数的定义.

证明：$f\cap g=\{(x,y)\mid x\in\mathrm{dom}\,f\wedge x\in\mathrm{dom}\,g\wedge y=f(x)\wedge y=g(x)\}$

$=\{(x,y)\mid x\in\mathrm{dom}\,f\wedge x\in\mathrm{dom}\,g\wedge y=f(x)=g(x)\}$.

令 $h=f\cap g$，则 $\text{dom } h=\{x\mid x\in \text{dom } f\cap \text{dom } g, f(x)=g(x)\}$.

若 $y_1\neq y_2$，因为 f 是函数，故必有 $y_1=f(x_1)$，$y_2=f(x_2)$，且 $x_1\neq x_2$，所以 $h=f\cap g$ 是一个函数. 因为 dom h 存在且 $y_1\neq y_2$ 时 $x_1\neq x_2$，即

$$h=\{(x,y)\mid x\in \text{dom } h, y=h(x)=f(x)=g(x)\}.$$

3.5 相关教材中习题及解答

1. (3.2)下面的函数哪些是一对一函数，哪些是一一对应函数：

(1) $f:\mathbf{N}\to\mathbf{R}$，其中 $f(n)=\log_{10}n+1$；

(2) $f:\mathbf{N}\to\mathbf{R}$，其中 $f(n)=\sqrt{n}$；

(3) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，其中 $f(r)=2r+15$.

解：(1)(2)是一对一函数，(3)是一一对应函数.

本题要注意定义域和值域各自的范围.

2. (3.4)设函数 $f(x)=2x+1$，$g(x)=x^2-2$，试给出 $f\circ g$ 的数学公式.

解：因为 $f(x)=2x+1$，$g(x)=x^2-2$，所以

$$\begin{aligned} f\circ g &= g(f(x))=g(2x+1)=(2x+1)^2-2\\ &=4x^2+4x+1-2=4x^2+4x-1. \end{aligned}$$

3. (3.5)设有函数 $f(a)=a-1$，$a\in\mathbf{R}$，请说明 f 是否为单调递增函数.

解：是一个单调递增函数.

4. (3.6)请给出女人的特征函数.

解：设人类集合 H，它有子集：女人集合 W，作一个女人的特征函数 $f:A\to B$，其中 $A=H$，$B=\{0,1\}$，而 f 则定义如下：

$$f(a)=\begin{cases}1, & a\in W\\ 0, & a\notin W\end{cases}$$

5. (3.7)试在自然数中定义一个素数的特征函数.

解：设自然数集合为 $\mathbf{N}$，它有子集：素数集合 S，作一个素数的特征函数 $f:A\to B$，其中 $A=\mathbf{N}$，$B=\{0,1\}$，而 f 则定义如下：

$$f(a)=\begin{cases}1, & a\in S\\ 0, & a\notin S\end{cases}$$

6. (2P-36)确定以下各题的 f 是否为从 A 到 B 的函数，并对其中的函数 $f:A\to B$ 指出它是单射、满射或双射，如果不是，请说明理由.

(1) $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{6,7,8,9,10\}$，$f=\{(1,8),(3,9),(4,10),(2,6),(5,9)\}$；

(2) A,B 同(1)，$f=\{(1,8),(3,10),(2,6),(4,9)\}$；

(3) A,B 为实数集，$f(x)=x^2-x$；

(4) A,B 同(3)，$f(x)=x^3$；

(5) A,B 同(3),$f(x)=\dfrac{1}{x}$;

(6) A,B 为正整数集,$f(x)=x+1$;

(7) A,B 同(6),$f(x)=\begin{cases}1, & x=1\\ x-1, & x>1\end{cases}$

解:(1) 是函数,但不是单射,因为有(3,9),(5,9),多对一,不是满射,因为 B 中 7 无对应元素,更不是双射.

(2) 不是函数,因为 A 中元素 5 没有与 B 中的元素对应.

(3) 是函数,但不是单射,因为有 $f(0)=f(1)=0$,也不是满射,因为对应值域中有无对应的数存在,如:-3,更不是双射.

(4) 是函数,是单射,是满射,即双射.

(5) 不是函数,因为当 $x=0$ 时,B 中无定义.

(6) 是函数,是单射,但不是满射,因为 B 中的元素 1 无对应,更不是双射.

(7) 是函数,是满射,但不是单射,因为 $f(1)=f(2)=1$,不是双射.

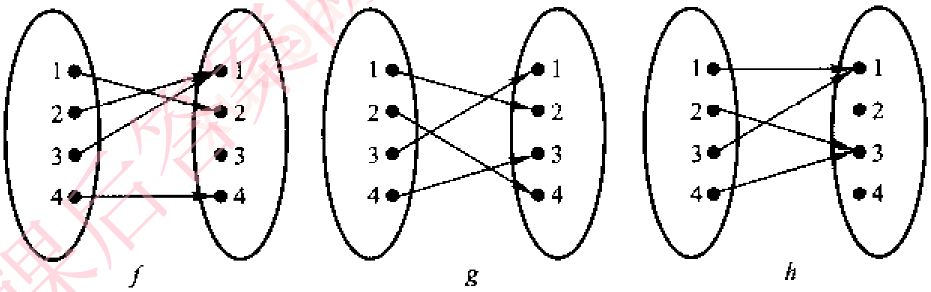
7. (2P-37)在题图中,定义了函数 f,g,h,试求:

(1) f,g,h 的像;

(2) $f\circ g,h\circ f,g\circ g$;

(3) 指出 f,g,h 中哪些是单射、满射和双射;

(4) f,g,h 中哪些函数存在反函数,给出其反函数的表达式.



(第 7 题)

解:(1) f 的像集为$\{1,2,4\}$;g 的像集为$\{1,2,3,4\}$;h 的像集为$\{1,3\}$.

(2) $f\circ g=\{(1,2),(2,1),(3,1),(4,4)\}\circ\{(1,2),(2,4),(3,1),(4,3)\}$
$=\{(1,4),(2,2),(3,2),(4,3)\}$;

$h\circ f=\{(1,1),(2,3),(3,1),(4,3)\}\circ\{(1,2),(2,1),(3,1),(4,4)\}$
$=\{(1,2),(2,1),(3,2),(4,1)\}$;

$g\circ g=\{(1,2),(2,4),(3,1),(4,3)\}\circ\{(1,2),(2,4),(3,1),(4,3)\}$
$=\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$.

(3) g 是单射、满射、双射;f,h 则不是,它们是普通的内射.

(4) g 存在反函数，$\tilde{g}=\{(2,1),(4,2),(1,3),(3,4)\}$.

3.6　另增配套习题及解答

1. 设有三个映射如下：

(1) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x$;

(2) $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{N}, f(x)=|x|$，其中 $|x|$ 表示 x 的绝对值；

(3) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}_+, f(x)=2^x$.

问：

(1) 上述映射的像集是什么？

(2) 哪个映射有逆映射？若有，其表达式是什么？

解：(1) 因为 f 是实数集 $\mathbf{R}$ 到实数集 $\mathbf{R}$ 的映射，$f(x)=x$ 是一一对应映射，它的像集为 $\mathbf{R}$，有逆映射 $\tilde{f}(x)=x$;

(2) 像集是 $\mathbf{N}$，无逆映射；

(3) 像集是 $\mathbf{R}_+$，有逆映射 $\tilde{f}(x)=\log_2 x$.

2. 举例说明，并不是每个集合到自身的单射(一对一的映射)都是一一对应的(双射).

解：$f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$, $f(n)=n+2$, $\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots\}$, f 是一对一映射，但 $0,1\notin f(\mathbf{N})$，因此 f 不是满射，所以不是一一对应的.

3. $f:A\to A$ 为双射，$f^{-1}:A\to A$ 是 $f:A\to A$ 的逆映射，$a\in A$, $f(a)=b$，下面不成立的式子为(　　).

A. $f^{-1}(f(a))=a$　　　　B. $f(f^{-1}(b))=b$

C. $f(f^{-1}(a))=f^{-1}(f(a))$　　　　D. $f(f^{-1}(a))\neq f^{-1}(f(a))$

解：D.

4. $f:A\to B$, $g:B\to C$ 是两个一对一映射，复合映射 $f\circ g:A\to C$ 满足(　　).

A. $f\circ g$ 是满射　　　　B. $f\circ g$ 是一一对应映射

C. $f\circ g$ 是一对一映射　　　　D. $f\circ g$ 不一定是 A 或 B 或 C

解：C.

5. 设有关系 $\{(n_1,n_2)\mid n_1,n_2\in\mathbf{N}, n_2$ 为小于 n_1 的素数的数目$\}$，问它能否构成函数？

解：可以构成函数，见下表说明：

n_1	1	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	4	$\boxed{5}$	6	$\boxed{7}$	8	9	10	$\boxed{11}$	12	$\boxed{13}$	…
n_2	0	0	1	2	2	3	3	4	4	4	4	5	5	…

对应于每个 n_1，有且只有一个“小于 n_1 的素数的数目”，表中加框者为素数.

6. A 和 B 是有限集合，问有多少个不同的一对一映射 $f:A\to B$? 有多少个一一对应的映射？

解：设 A 和 B 是有限集合，$|A|=m$，$|B|=n$，要使映射为一对一映射，必须有 $|A|\leqslant|B|$，即 $m\leqslant n$. 在 B 中任意选出 m 个元素的任一全排列，都能形成 $A\to B$ 的一个不同的一对一映射，故 $f:A\to B$ 的不同的一对一映射有 $C_n^m\cdot m!$ 个.

如果又要使 $f:A\to B$ 为双射，必须有 $|A|=|B|$，设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}$，则 a_1 的对应元素共有 m 种取法，a_2 的对应元素在 a_1 取定后共有 $m-1$ 种取法，a_3 的对应元素在 a_1 和 a_2 取定后共有 $m-2$ 种取法，以此类推，a_m 的对应元素有 $m-(m-1)$ 种取法. 故 $f:A\to B$ 的不同的一一对应映射共有 $m(m-1)(m-2)\cdots(m-m+1)=m!$ 个.

7. 如果函数 $f:A\to B$ 有逆函数 $\tilde{f}:B\to A$，试证：

(1) $f\circ\tilde{f}=E_A$；　(2) $\tilde{f}\circ f=E_B$；　(3) $\tilde{\tilde{f}}=f$.

证明：(1) 因为 $f:A\to B$ 有逆映射 $\tilde{f}:B\to A$，所以任取 $(a,b)\in f$，有 $(b,a)\in\tilde{f}\Rightarrow(a,a)\in f\circ\tilde{f}\Rightarrow$ $f\circ\tilde{f}=E_A$.

(2) 因为 $f:A\to B$ 有逆映射 $\tilde{f}:B\to A$，所以任取 $(b,a)\in\tilde{f}$，有 $(a,b)\in f\Rightarrow(b,b)\in\tilde{f}\circ f\Rightarrow$ $\tilde{f}\circ f=E_B$.

(3) 因为 $f:A\to B$ 有逆映射 $\tilde{f}:B\to A$，所以任取 $(a,b)\in f$，有 $(b,a)\in\tilde{f}\Rightarrow(a,b)\in\tilde{\tilde{f}}\Rightarrow$ $\tilde{\tilde{f}}=f$.

8. 如果 $f:A\to B$，$g:B\to C$ 都是双射，试证明：$\widetilde{f\circ g}=\tilde{g}\circ\tilde{f}$.

证明：因为 $f:A\to B$，$g:B\to C$ 均为双射，所以 $f\circ g$ 是从 A 到 C 的双射，故 $\widetilde{f\circ g}$ 是 C 到 A 的双射，又 $\tilde{g}\circ\tilde{f}$ 是 C 到 A 的双射，所以 $\widetilde{f\circ g}$ 和 $\tilde{g}\circ\tilde{f}$ 有相同的定义域 C，有相同的值域 A.

对任意的 $c\in C$，存在 $a\in A$ 使 $\widetilde{f\circ g}(c)=a$，于是 $f\circ g(a)=c$. 即 $g(f(a))=c$. 由于 $\tilde{g}$ 是 C 到 B 的双射，所以 $f(a)=\tilde{g}(c)$，又由于 $\tilde{f}$ 是 B 到 A 的双射，所以 $a=\tilde{f}(\tilde{g}(c))$，即 $a=\tilde{g}\circ\tilde{f}(c)$，从而对任意的 $c\in C$，$\widetilde{f\circ g}(c)=\tilde{g}\circ\tilde{f}(c)$，可见 $\widetilde{f\circ g}=\tilde{g}\circ\tilde{f}$.

9. 设 $A=\{a\mid a\in\mathbf{R},a\geqslant0\}$，$B=\{b\mid b\in\mathbf{R},0\leqslant b\leqslant1\}$，试找一个 A 到 B 的满射.

解：对任意的 $x\in A$，

$$f(x)=\begin{cases}x, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant1 \text{ 且 } x\in\mathbf{R}\\ \dfrac{1}{x}, & \text{当 } 1\leqslant x<+\infty \text{ 且 } x\in\mathbf{R}\end{cases}$$

注：本题的 f 不唯一.

10. 设 f 是 A 到 B 的双射，若 a 是 A 中的一个元素，问：

$$\tilde{f}(f(a))=?\qquad f(\tilde{f}(a))=?$$

若 f 是 A 上的双射,结论又是什么?

解:因为 f 是 A 到 B 的双射,所以 $a\in A$,则 $\tilde{f}(f(a))=\tilde{f}(b)=a$,而 $f(\tilde{f}(a))$ 不存在.

但如果 f 是 A 上的双射,即 $f:A\to A$,有 $a\in A$,则 $\tilde{f}(f(a))=a$,$f(\tilde{f}(a))=a$.

11. 设 $X=\{1,2,3,4\}$,确定出这样的函数 $f:X\to X$,使得 $f\neq E_X$,并且是单射的,求出 $f\circ f=f^2$,$f^3=f\circ f^2$,f^{-1} 和 $f\circ f^{-1}$;是否能够找到另外一个单射函数 $g:X\to X$,使得 $g\neq E_X$,但是 $g\circ g=E_X$.

解:构造单射函数,即将 $\{1,2,3,4\}$ 和 $\{1,2,3,4\}$ 进行元素间的一一对应,可有多种不同的排法.

如:$f=\{(1,2),(2,3),(3,1),(4,4)\}$,

$f^2=\{(1,3),(2,1),(3,2),(4,4)\}$,

$f^3=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$,

$f^{-1}=\{(2,1),(3,2),(1,3),(4,4)\}$,

$f\circ f^{-1}=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$.

另外构造 $g=\{(1,2),(2,1),(3,4),(4,3)\}$,

$g\circ g=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}=E_X$.

说明:本题在于熟练掌握函数的构造,逆函数、复合函数的求法,实际上还有另外的 g,如:$g=\{(1,3),(3,1),(2,4),(4,2)\}$.

12. 设有函数 $f:A\to A$,$g:A\to A$,$h:A\to A$,使得复合函数 $h\circ f=h\circ g$. 试证明若 h 是单射函数,则 $f=g$.

证明:用反证法,假设 $f\neq g$,则必存在元素 $a\in A$,使得 $f(a)\neq g(a)$,因为 h 是单射的,所以有 $h(f(a))\neq h(g(a))$,即 $h\circ f(a)\neq h\circ g(a)$,这与题设 $h\circ f=h\circ g$ 相矛盾,故有 $f=g$.

13. 证明:

(1) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$;

(2) $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$.

分析:本题将集合的表示、运算与函数的表示相结合来证明,要非常熟悉集合与函数的内在含义.

证明:(1) 设 $y\in f(A\cup B)$,则存在 $x\in A\cup B$,使 $f(x)=y$,即 $x\in A\lor x\in B$ 时有 $y=f(x)$. 故 $f(x)\in f(A)\lor f(x)\in f(B)$,即 $y\in f(A)\cup f(B)$,于是有 $f(A\cup B)\subseteq f(A)\cup f(B)$.

反之,设 $y\in f(A)\cup f(B)$,则有 $y\in f(A)$ 但 $y\notin f(B)$,或 $y\in f(B)$ 但 $y\notin f(A)$,或 $y\in f(A)$ 且 $y\in f(B)$. 因此有 $x\in A$ 使 $f(x)=y$,或者有 $x\in B$ 使 $f(x)=y$,或者有 $x\in A$ 且 $x\in B$ 使 $f(x)=y$.

综上所述,可得存在 $x\in A\cup B$,使 $f(x)=y$,故 $y\in f(A\cup B)$.

所以有 $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$.

(2) 设 $y\in f(A\cap B)$,则存在 $x\in A\cap B$,使 $f(x)=y$,即存在 $x\in A\land x\in B$,使 $f(x)=y$.

故 $y\in f(A)\land y\in f(B)\Rightarrow y\in(f(A)\cap f(B))$.

所以有 $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$.

14. 设 $f:A\to A$,证明:

（1）若 $f\subseteq I_A$，则 $f=I_A$；

（2）若 $I_A\subseteq f$，则 $f=I_A$.

证明：（1）设 $a\in A$，因为 f 是函数，故必有某个 $b\in A$，使得 $(a,b)\in f$，但条件 $f\subseteq I_A$，故 $(a,b)\in I_A$，即 $a=b$，于是对任意 $a\in A$，必有 $(a,a)\in f$，所以 $(a,a)\in I_A\Rightarrow(a,a)\in f$，即 $I_A\subseteq f$，因此得到 $f=I_A$.

（2）设 $I_A\subseteq f$，对任意 $(a,b)\in f$，则 $a\in A$，故 $(a,a)\in I_A$.

因为 $I_A\subseteq f$，得到 $(a,b)\in f\wedge(a,a)\in f$，但 f 是函数，故 $a=b$，所以 $(a,b)\in f\Rightarrow(a,b)\in I_A$，即 $f\subseteq I_A$，因此得到 $f=I_A$.

注：此处 I_A 是恒等函数，有时写为 E_A.

第四章

有限集与无限集

4.1 主要内容

1. 有限集的基本概念.
2. 无限集的基本概念.
3. 几个常用的无限集.

4.2 复习重点

1. 有限集的基数.
2. 无限集的基数.
3. 无限集的分类.

4.3 基本概念及注意事项

1. 有限集与无限集的基本概念——有限集的两个定义与无限集的三个定义及定义间的等价性研究.

2. 有限集计数的四种方法:

(1) $|A\cup B|=|A|+|B|$;

(2) $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$;

(3) $|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$;

(4) $|S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_n|=\sum\limits_{i=1}^{n}|S_i|-\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}|S_i\cap S_j|+\sum\limits_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}|S_i\cap S_j\cap S_k|-\cdots+(-1)^{n-1}|S_1\cap S_2\cap\cdots\cap S_n|$.

3. 四个常用无限集:

(1) 自然数集 **N**;

(2) 整数集 **Z**;

(3) 有理数集 **Q**;

(4) 实数集 **R**.

4. 无限集的势.

5. 无限集分类(按势分类):

$$
\text{无限集}\begin{cases}\text{可列集——基数为}\aleph_0\begin{cases}\text{自然数集}\\ \text{整数集}\\ \text{有理数集}\end{cases}\\ \text{实数集——基数为}\aleph\\ \text{更大基数的集——}\rho(A)\end{cases}
$$

4.4　典型例题详细分析

1. (4.1)在 60 个人的调查中,有 25 人读《人民日报》,26 人读《体育日报》,26 人读《光明日报》,9 人同时读《人民日报》和《光明日报》,11 人同时读《人民日报》和《体育日报》,8 人同时读《体育日报》和《光明日报》,8 人不读任何报纸,求:

(1) 恰好只读一种报纸的人数;

(2) 同时读三种报纸的人数.

分析:这是一种求解三个有限集合中元素相互关系的典型例题,可以利用定理 4.5 的等式及文氏图来解决类似的问题. 要注意三个集合各自元素的划定;问题中总个数与三个集合的并集元素之间的关系(即 $|A\cup B\cup C|$);文氏图中各集合间不同的相交与不相交块中数字的依次计算和填法.

本题中总人数为 60 人,但要注意有 8 人不读任何报纸,即不参与所设集合规定的元素,也就是说要去掉此 8 人来求解问题.

解:令 A,B,C 分别表示读《人民日报》、《体育日报》和《光明日报》的人的集合,于是有

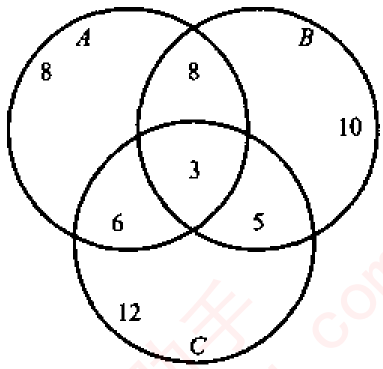
$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$,

$60-8=25+26+26-9-11-8+|A\cap B\cap C|$.

从而得到 $|A\cap B\cap C|=3$.

即有 3 人同时读三种报纸.

作出相关文氏图,并填入相关数字.



$|A\cap B|-3=11-3=8$,

$|A\cap C|-3=9-3=6$,

$|B\cap C|-3=8-3=5$.

只读《人民日报》的人数为 $25-8-3-6=8$(人).

只读《体育日报》的人数为 $26-8-3-5=10$(人).

只读《光明日报》的人数为 $26-6-3-5=12$(人).

2. 设 A 和 B 是无限集合,$B\subseteq A$,问 $A-B$ 是否一定无限? 是否一定有限?

分析:此类题目考查学生对无限集定义、性质的熟悉程度,并非一谈无限集就认为什么都是无限了. 可根据题目的条件找出一些例子来说明. 故所举例子并不一定是唯一的.

解:不一定,可举例说明之,设 $A=\{0,1,2,\cdots\}$,$B=\{1,2,\cdots\}$ 都是无限集且 $B\subseteq A$,而 $A-B=$

$\{0\}$是有限集,故当 A,B 都是无限集时,$A-B$ 不一定无限.又如 $A=\{\cdots,-1,0,1,\cdots\}$,$B=\{1,2,\cdots\}$ 都是无限集且 $B\subseteq A$,而 $A-B=\{\cdots,-1,0\}$ 是无限集,故当 A,B 都是无限集时,$A-B$ 不一定有限.

3. 设 $\mathbf{N}$ 为自然数集,证明 $|\rho(\mathbf{N})|=2^{\aleph_0}$.

分析:利用基数来表示、研究集合中元素的个数,并来区分有限集和无限集,要注意的是不同无限集的基数并非完全一致的,最常见的、也是最小的无限集的基数是自然数集 $\mathbf{N}$ 的基数 $\aleph_0$,与 $\mathbf{N}$ 能够建立一一对应关系的那些无限集的基数也是 $\aleph_0$,注意还有比 $\aleph_0$ 大的无限集基数,常见的证明方法是将待证集合中的元素与自然数集 $\mathbf{N}$、实数集 $\mathbf{R}$ 等集合的元素建立对应关系,有时还要用数学归纳法来找出对应的规律.

证明:根据集合及其幂集中元素之间个数的关系,利用数学归纳法.在 $n=1$ 时,$|\rho(\{0\})|=2^1$.

假设当 $n=k$ 时成立,即 $|\rho(\{0,1,\cdots,k-1\})|=2^k$.

当 $n=k+1$ 时,相邻项的个数关系为 2 倍的关系,即

$$|\rho(\{0,1,\cdots,k\})|=|\rho(\{0,1,\cdots,k-1\})|\times 2=2^k\times 2=2^{k+1}.$$

根据一一对应关系有 $|\rho(\mathbf{N})|=2^{|\mathbf{N}|}$,而 $\mathbf{N}$ 的基数为 $\aleph_0$,故有 $|\rho(\mathbf{N})|=2^{\aleph_0}$.

4.5 相关教材中习题及解答

1. (4.2)在一个班级的 50 名学生中,有 21 名在高等数学考试中取得了优秀成绩,有 26 名学生在线性代数考试中取得了优秀成绩,假如有 17 名学生在此两科考试中都没有取得优秀成绩,问有多少名学生在两科考试中都取得了优秀成绩?并试用文氏图画出结果.

解:设在高等数学考试中取得优秀成绩的学生为集合 A,在线性代数考试中取得优秀成绩的学生为集合 B,根据题意,有

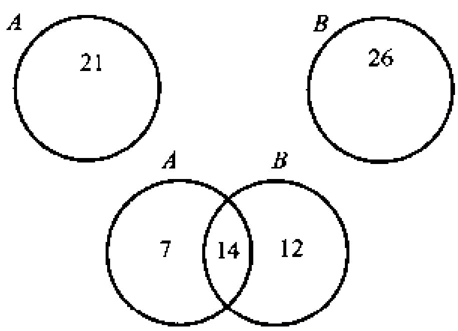
$|A\cup B|=50-17=33$,

根据容斥原理(定理 4.4)

$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$,

$|A\cap B|=|A|+|B|-|A\cup B|=21+26-33=14$.

故在两科考试中都取得优秀成绩的学生人数为 14 人.文氏图如下:



$21-14=7$,$26-14=12$.

2. (4.3)证明两可列集的并集仍为可列集.

证明:设两可列集 A,B 中的元素可按次序排列为:

$$A: a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$$
$$B: b_0, b_1, \cdots, b_n, \cdots$$

将 A, B 中元素相间顺序排列：

$$\begin{array}{cccccccc} a_0, & b_0, & a_1, & b_1, & \cdots, & a_n, & b_n, & \cdots \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & 2n & 2n+1 & \cdots \end{array}$$

构造 A, B 的并集 $C = A \cup B$.

根据上述 A, B 元素的相间排列来排列 C 中的元素：$c_0, c_1, c_2, \cdots$

即 $c_0 = a_0, c_1 = b_0, \cdots$

如果碰到 $a_i = b_j$ 时，则在 C 的排序中只出现一个 a_i 即可. 因此

$$\begin{array}{cccc} c_0, & c_1, & c_2, & \cdots \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ 0 & 1 & 2 & \cdots \end{array}$$

是可列的. 故 C，即两可列集的并集是可列集.

3. (4.4)证明有限个可列集的并集是可列集.

证明：设有 n 个可列集 $A_1, A_2, \cdots, A_n$（n 为有限），其中各自的元素可按次序排列为：

$$\begin{array}{ll} A_1: & a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1m}, \cdots \\ A_2: & a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2m}, \cdots \\ \vdots & \vdots \\ A_n: & a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nm}, \cdots \end{array}$$

将 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中元素相间顺序排列：

$$\begin{array}{cccccccccccccc} a_{11}, & a_{21}, & \cdots, & a_{n1}, & a_{12}, & a_{22}, & \cdots, & a_{n2}, & \cdots, & a_{1m}, & a_{2m}, & \cdots, & a_{nm}, & \cdots \\ \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & & & & & & \\ 0 & 1 & \cdots & n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n & \cdots & & & & & \end{array}$$

构造 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的并集 $B = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$，根据上述 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 元素的相间排列来排列 B 中的元素：$b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots$

即 $b_1 = a_{11}, b_2 = a_{21}, \cdots, b_n = a_{n1}, \cdots$

整理此序列，将重复的元素去掉，只保留其中的一个，并不打乱原序列中各元素间的次序，因此

$$\begin{array}{ccccc} b_1, & b_2, & \cdots, & b_n, & \cdots \\ \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \\ 0 & 1 & \cdots & n-1 & \cdots \end{array}$$

是可列的.

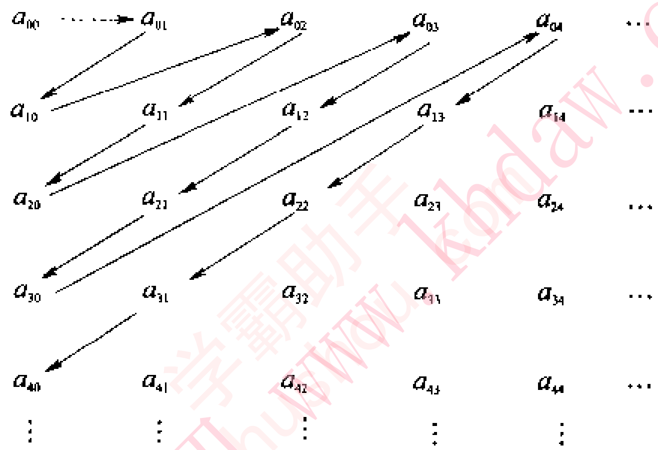
故所构造的 B，即有限个可列集的并集是可列集.

4. (4.5)证明可列个可列集的并集是可列集.

证明:设有可列个可列集 $A_0, A_1, \cdots, A_n, \cdots$,其中各自的元素可按次序排列为:

$$\begin{array}{lllll} A_0: & a_{00}, & a_{01}, & a_{02}, & \cdots \\ A_1: & a_{10}, & a_{11}, & a_{12}, & \cdots \\ \vdots & \vdots & & & \\ A_n: & a_{n0}, & a_{n1}, & a_{n2}, & \cdots \\ \vdots & \vdots & & & \end{array}$$

可以将上述各集合按一定的规则排列如下:



按上述箭头所指方向排列次序,就可与自然数集建立对应关系,在此基础上去掉重复的元素(即有重复者仅保留一个),各元素间的先后次序不变,这样重整的排列方式仍可与自然数集建立一一对应关系.故可列个可列集的并集是可列集.

5. (4.9)计算机中存储单元的基数是什么?

解:因为计算机中的存储单元是有限的,所以其基数是一个有限的自然数 n.

6. (4.10)A, B 为无限集,试说明下面的集合是否为无限集.

(1) $A \cup B$; (2) $A \cap B$; (3) $A - B$; (4) $A \times B$.

解:(1) $A \cup B$ 是无限集.

(2) $A \cap B$ 有可能是无限集,也可能是有限集.

如:实数集 **R** 与自然数集 **N** 相交,结果是无限集;而若 $A = \{0,1,2,\cdots\}$, $B = \{\cdots, -2, -1, 0\}$,则 $A \cap B = \{0\}$ 是有限集.

(3) $A - B$ 有可能是无限集,也有可能是有限集.

如:A 是整数集,B 是正整数集,则 $A - B$ 是无限集;而若 $A = \{0,1,2,\cdots\}$, $B = \{1,2,3,\cdots\}$,则 $A - B = \{0\}$ 为有限集.

(4) $A \times B$ 是无限集.

7. (2P-38)设某校有篮球、排球、足球3支球队,3队总人数为58人,其中篮球队有队员20

人,排球队有队员 15 人,足球队有队员 38 人,已知有 3 人同时参加三支球队,求:

(1) 同时参加且只参加两支球队的人数;

(2) 至少同时参加两支球队的人数.

解:根据题意,设集合 A 为参加篮球队的人构成的集合,B 为参加排球队的人构成的集合,C 为参加足球队的人构成的集合,根据容斥原理(定理 4.5)

$$|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|,$$

$$|A\cap B| + |A\cap C| + |B\cap C| = |A| + |B| + |C| + |A\cap B\cap C| - |A\cup B\cup C|$$
$$=20+15+38+3-58=18,$$

$18-3=15.$

所以得(1) 同时参加且只参加两支球队的人数为 15 人;

(2) 至少同时参加两支球队的人数为 18 人.

8. (2P-39)确定下列集合的基数:

(1) 有序偶:(a,b)的基数,其中 a,b 为实数;

(2) n 元实函数集合;

(3) 各分量为实数的 $m\times n$ 矩阵集合.

解:本题中涉及的元素均为实数,它们的基数为$\aleph$.

9. (2P-40)试证自然数的有限子集全体所构成的集合的基数为$\aleph_0$.

证明:设自然数集为 $\mathbf{N}$,其有限子集全体所构成的集合为 $P(\mathbf{N})$. 先构造函数 $f:P(\mathbf{N})\to[0,1]$如下:

对每个 $A\in P(\mathbf{N})$,即 $A\subseteq\mathbf{N}$,定义 $f(A)=0.x_0x_1x_2\cdots$,此处 $f(A)$用二进制数表示,且规定:

$$\begin{cases} x_{2j}=0, & j=0,1,2,\cdots \\ x_{2j+1}=1, & j\in A \\ x_{2j+1}=0, & j\notin A \end{cases}$$

即是 $f(\varnothing)=0$, $f(\mathbf{N})=0.01010101\cdots$

例如: $f(\{1,2,6\})=0.00010100000001\cdots$

f 建立了表示 $P(\mathbf{N})$次序的一种对应关系,这可与 $\mathbf{N}$ 建立一一对应关系,故 $P(\mathbf{N})$的基数为$\aleph_0$.

4.6 另增配套习题及解答

1. 证明两个无限集合之交不一定是无限集合.

解:可举例说明之,设 $A=\{a\mid a\in\mathbf{R},0\leqslant a\leqslant1\}$,$B=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$都是无限集,但是 $A\cap B=\{0,1\}$是有限集,故两个无限集之交不一定是无限集.

2. 求下列集合的基数:

(1) $A=\{0,2,4,6,\cdots,50\}$;　　(2) $B=\{x\mid x\in\mathbf{R}$ 并且 $x^2+1=0\}$;

(3) $S=\{0,3,6,9,\cdots\}$;　　(4) $T=\{10,11,12,13,\cdots\}$.

解:(1) A 的基数$|A|=26$;

(2) $B=\{x \mid x\in \mathbf{R}$ 并且 $x^2+1=0\}=\varnothing$,故 $|B|=0$;

(3) $S=\{0,3,6,9,\cdots\}=\{3x \mid x\in \mathbf{N}\}$,构作 $f:\mathbf{N}\to S$ 为对任意的 $x\in \mathbf{N}$,$f(x)=3x$,f 是 $\mathbf{N}\to S$ 的双射,所以 S 与 $\mathbf{N}$ 等势,即 $|S|=\aleph_0$;

(4) 构作 $f:\mathbf{N}\to T$ 为对任意的 $x\in \mathbf{N}$,$f(x)=x+10$,f 是 $\mathbf{N}$ 到 T 的双射,所以 T 与 $\mathbf{N}$ 等势,即有 $|T|=\aleph_0$.

3. 如果两个集合 A 和 B 均为可列集,试证明 $A\times B$ 也是可列的.

证明:因集合 A 和 B 是可列的,则可表示为

$$A=\{a_0,a_1,\cdots\},$$
$$B=\{b_0,b_1,\cdots\}.$$

构作函数 $f:A\times B\to \mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 为

$$f(a_m,b_n)=(m,n),$$

则 f 是一个双射函数. 因为 $g:\mathbf{N}\times\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ 为双射函数,

$$g((m,n))=\frac{1}{2}(m+n)(m+n+1)+m,$$

所以 $A\times B$ 是可列的.

4. 试证明有限集 A 和可列集 B 的笛卡儿乘积 $A\times B$ 是可列集.

证明:根据题意 A 是有限集,则 $A\cup\mathbf{N}$($\mathbf{N}$ 是自然数集)是可列集,根据上面第3题可知$(A\cup\mathbf{N})\times B$ 是可列集. 而 $A\times B\subseteq(A\cup\mathbf{N})\times B$,而 $A\times B$ 是无限集,由于可列集的任何无限子集是可列的,故 $A\times B$ 为可列集.

5. 三年级有220人,有180人爱好打篮球或打乒乓球或同时爱好这两项运动,若95人爱好打篮球,75人同时爱好打篮球和乒乓球. 问有多少人爱好打乒乓球.

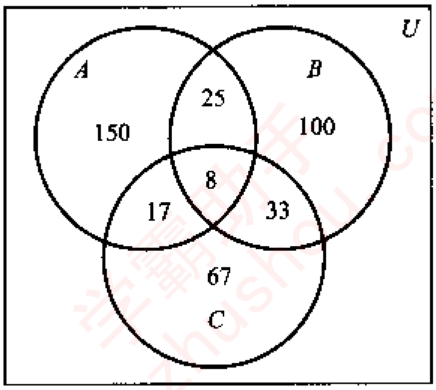
解:设集合 A 表示爱好打篮球的人构成的集合,集合 B 表示爱好打乒乓球的人构成的集合,则 $|A\cup B|=180$,$|A|=95$,$|A\cap B|=75$,由有限集的特性(称为容斥原理),有

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|,$$

即此时有 $|B|=|A\cup B|-|A|+|A\cap B|=180-95+75=160$(人).

6. 求在1和1000之间(包含1和1000在内)不能被5或6整除,也不能被8整除的数的个数.(注:如能被5整除的数集和能被6整除的数集之交是能被30整除的数集.)

解:设1到1000的整数构成全集 U,用 A,B,C 分别表示能被5,6,8整除的数构成的集合. 如右面文氏图所示:



则有 $|A|=[1000/5]=200$,

$|B|=[1000/6]=166$,

$|C|=[1000/8]=125$,

$|A\cap B|=[1000/30]=33$,

$|A\cap C|=[1000/40]=25$,

$|B\cap C| = [1000/24] = 41$,

$|A\cap B\cap C| = [1000/120] = 8$.

根据容斥原理,有

$$|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}| = |U| - |A| - |B| - |C| + |A\cap B| + |B\cap C| + |A\cap C| - |A\cap B\cap C|$$
$$= 1000 - 200 - 166 - 125 + 33 + 25 + 41 - 8 = 600.$$

即所求之数为 600.

第五章

代 数 系 统

（含教材中第五章代数系统基础；第六章群论；第七章其他代数系统.）

5.1 主要内容

1. 代数系统中的基本概念.
2. 代数系统中的基础理论.
3. 代数系统的整体结构.
4. 群论.
5. 其他代数系统.

5.2 复习重点

1. 代数系统的 ·般知识及全貌.
2. 群论.

5.3 基本概念及注意事项

1. 代数系统中的基本概念

(1) 代数系统：集合上具有封闭性的运算组成代数系统$(S,\circ)$.

(2) 子代数：代数系统$(S,\circ)$，$(S',*)$满足：① $S'\subseteq S$，② 若$a,b\in S'$，就有$a*b=a\circ b$，则称$(S',*)$为$(S,\circ)$的子代数.

(3) 同构：$(X,\circ)$与$(Y,*)$存在一一对应函数$g:X\to Y$，使得如$x_1,x_2\in X$，就有$g(x_1\circ x_2)=g(x_1)*g(x_2)$，则称$(X,\circ)$与$(Y,*)$同构.

(4) 同态：$(X,\circ)$与$(Y,*)$存在函数$g:X\to Y$，使得如$x_1,x_2\in X$，就有$g(x_1\circ x_2)=g(x_1)*g(x_2)$，则称$(X,\circ)$与$(Y,*)$同态.

(5) 半群：代数系统的运算满足结合律.

(6) 群：半群存在单位元与逆元.

(7) 可换群：群满足交换律.

(8) 变换群：集合 A 上所有的变换构成的集合 $E(A)$，对于复合变换 $\circ$ 所构成的代数系统 $(E(A),\circ)$ 是一个群，称变换群.

(9) 循环群：群有生成元.

(10) 有限群：群 $(S,\circ)$ 中 S 为有限集.

(11) 子群：群 $(G,*)$ 上 G 的子集所构成的群.

(12) 正规子群：$(H,*)$ 是群 $(G,*)$ 的子群，如对 $a\in G$ 都有 $aH=Ha$，则称 $(H,*)$ 是 $(G,*)$ 的正规子群.

(13) 陪集：H 是 G 的子群，$Ha=\{ha|h\in H\}$，$aH=\{ah|h\in H\}$，分别称 H 在 G 中的一个右陪集或左陪集.

(14) 商群：H 是 G 的正规子群，对 $Ha,Hb\in G/H$，二元运算 $(Ha)*(Hb)=Hab$ 构成群，则称 H 是 G 的商群.

(15) 环：$(R,+,\circ)$，对 $+$ 的可换群，对 $\circ$ 的半群，$\circ$ 对 $+$ 的分配律.

(16) 理想：$(D,+,\circ)$ 是环 $(R,+,\circ)$ 的子环，满足：$a\in R,b\in D$，必有 $a\circ b\in D,b\circ a\in D$.

(17) 整环：环 $(R,+,\circ)$ 中，运算 $\circ$ 有单位元，无零因子.

(18) 域：环 $(P,+,\circ)$ 中，运算 $\circ$ 满足交换律，有单位元、逆元.

(19) 格：$(P,+,\circ)$ 中，两个运算的结合律、吸收律、交换律.

(20) 布尔代数：格 $(B,+,\circ)$ 中，两个运算的分配律、单位元、逆元.

2. 代数系统常用性质

(1) 结合律：$(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$；

(2) 交换律：$a\circ b=b\circ a$；

(3) 分配律：$a\circ(b+c)=(a\circ b)+(a\circ c)$；

(4) 单位元：$a\circ 1=a$；

(5) 逆元：$a\circ a^{-1}=1$；

(6) 零元：$a\circ 0=0$；

(7) 生成元.

3. 代数系统的整体构成(见下页图)

4. 代数系统的基本理论

(1) 关于群的基本理论

① 群方程可解性：$a\circ x=b$(或 $x\circ a=b$)对 x 存在唯一解；

② 群的消去律：$a\circ b=a\circ c$(或 $b\circ a=c\circ a$)必有 $b=c$；

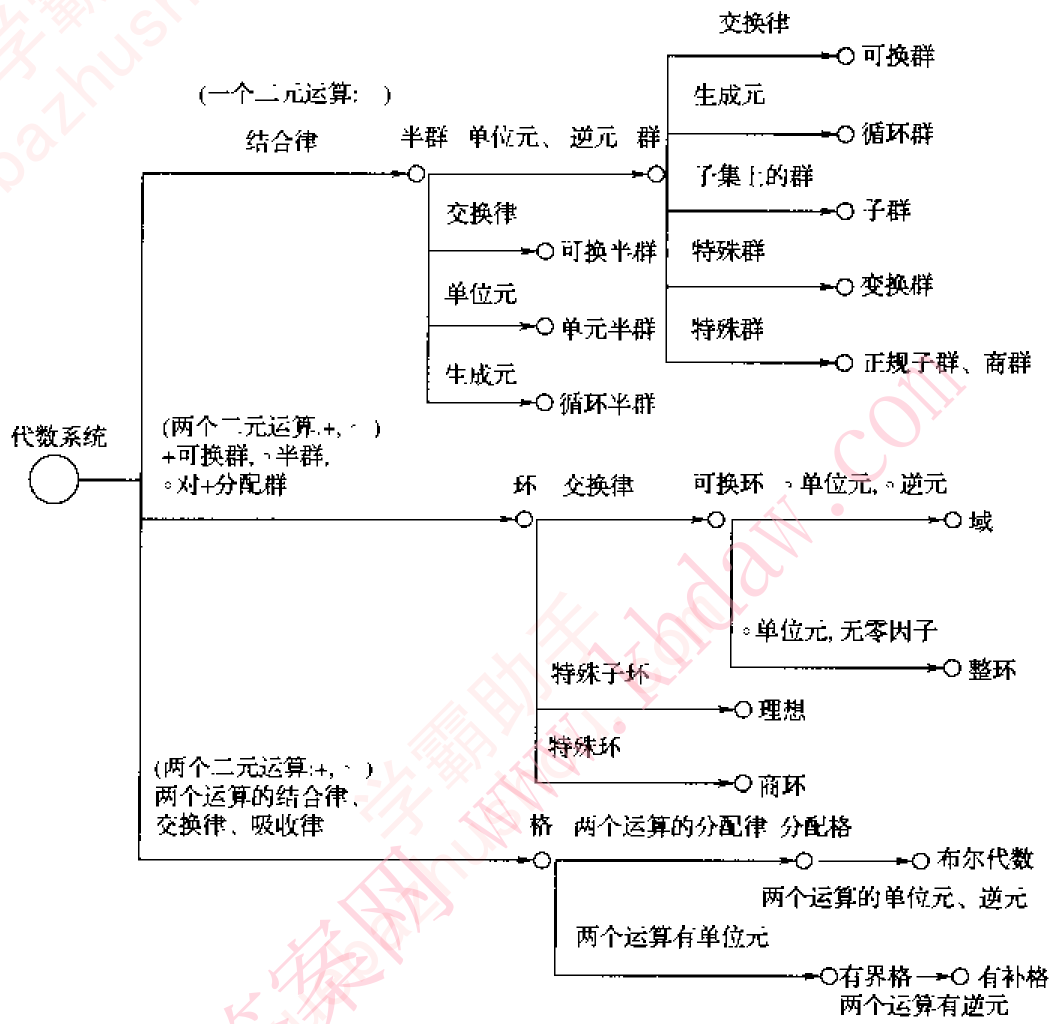
③ 任一群必与变换群同构；

④ 与一个群同构或满同态的代数系统必为群；

⑤ 一个有限群的阶一定被它的子群的阶所等分(拉格朗日定理)；

⑥ f 是群 $(G,\circ)$ 与 $(G',\otimes)$ 的满同态，K 是 f 的核，则必有 $(G/k,*)$ 与 $(G',\otimes)$ 同构.

(2) 关于环的基本理论



环的基本运算性质:

① $a\circ 0=0\circ a=0$;

② $a\circ(-b)=(-a)\circ b=-(a\circ b)$;

③ $(-a)\circ(-b)=a\circ b$;

④ 环中无零因子$\Longleftrightarrow$环满足消去律;

⑤ 环中子系统 S 是子环$\Longleftrightarrow a\in S$ 则必有 $a^{-1}\in S$.

(3) 域的基本理论

① 域是整环;

② 有限整环必是域.

(4) 格的基本理论

① 一个偏序格当且仅当它是一个代数格.

② 格的运算性质:

- $a\leqslant a\vee b,\quad b\leqslant a\vee b \qquad (a\vee b\geqslant a, a\vee b\geqslant b)$;

- $a \leqslant c$ 且 $b \leqslant c \Rightarrow a \vee b \leqslant c$ $(a \leqslant c$ 且 $b \leqslant c \Rightarrow c \geqslant a \vee b)$;
- $a \wedge b \leqslant a$, $a \wedge b \leqslant b$ $(a \geqslant a \wedge b, b \geqslant a \wedge b)$;
- $c \leqslant a$ 且 $c \leqslant b \Rightarrow c \leqslant a \wedge b$ $(c \leqslant a$ 且 $c \leqslant b \Rightarrow a \wedge b \geqslant c)$.

(5) 布尔代数的基本理论

布尔代数$(B, +, \circ)$对加与乘满足:

① 交换律;
② 结合律;
③ 等幂律;
④ 吸收律;
⑤ 分配律;
⑥ 零一律;
⑦ 同一律;
⑧ 互补律;
⑨ 双补律;
⑩ 德·摩根律.

5.4 典型例题详细分析

1. (6.1)设在实数集 $\mathbf{R}$ 上有运算 $*$ 定义如下:

$$a * b = a + b + 2ab.$$

(1) $(\mathbf{R}, *)$是代数系统吗?

(2) $(\mathbf{R}, *)$是半群吗?

(3) $(\mathbf{R}, *)$有单位元吗? 如有,单位元是什么?

(4) $(\mathbf{R}, *)$中每个元素有逆元素吗? 任一元素 a 的逆元素是什么?

分析:本题根据定义在实数集 $\mathbf{R}$ 上的运算 $*$ 的具体含义,逐步证明:(1) 满足封闭性(是代数系统);(2) 满足结合律(进一步是半群);(3) 有单位元存在(要进一步证是单元半群);(4) 每个元素均存在逆元素. 找单位元通常用试探分析法,对集合中的一些特殊元素进行试探,而找逆元则根据其定义及已找到的单位元来计算,即 $a * a^{-1} = a^{-1} * a =$ 单位元 e,此处的 $*$ 不是普通乘法,而要用等式右边的具体运算含义来计算.

有时题目会在条件中给出$(\mathbf{R}, *)$是代数系统或是半群,那么所要证的步骤将会减少.

注意:$\mathbf{R}$ 可能被其他集合取代,而 $*$ 运算的含义更是千变万化.

解:(1) 因为对任意的 $a, b \in \mathbf{R}$,经所定义的运算 $*$ 作用后,其结果 $a + b + 2ab$ 还是属于 $\mathbf{R}$,满足封闭性,故$(\mathbf{R}, *)$是代数系统.

(2) 因为 $a * (b * c) = a * (b + c + 2bc) = a + b + c + 2bc + 2a(b + c + 2bc)$
$= a + b + c + 2ab + 2ac + 2bc + 4abc$,

$(a * b) * c = (a + b + 2ab) * c = a + b + 2ab + c + 2c(a + b + 2ab)$

$=a+b+c+2ab+2ac+2bc+4abc$,

所以 $a*(b*c)=(a*b)*c$ 满足结合律,故是半群.

(3) 对任意的 $a\in\mathbf{R}$,有 $a*0=a+0+2a\cdot 0=a$,$0*a=0+a+2\cdot 0\cdot a=a$,故0是单位元.

(4) 根据单位元是0,设 b 为 a 的逆元素,有

$$a+b+2ab=0,\qquad b=-\frac{a}{1+2a},$$

除去分母为零的情况,即 $a=-\dfrac{1}{2}$. 故有 $a\in\mathbf{R}-\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$,即实数集 $\mathbf{R}$ 中除去 $-\dfrac{1}{2}$ 后的元素都有逆元素存在,逆元素为 $a^{-1}=-\dfrac{a}{1+2a}$.

2. (6.8)试证阶是素数的群必是循环群.

分析:本题综合了群、子群、循环群、阶、有限群等群及特殊群的一些特性,特别用到如下几点:

(1) 如果 g 是群 $(G,*)$ 中的一个元素,g 的阶是 m,令 $H=\{g^r\mid r\in\mathbf{Z}\}$,则 $(H,*)$ 是 $(G,*)$ 的一个 m 阶子群,且称其为由 g 生成的循环子群.

(2) 如果有限群 $(G,*)$ 具有阶 n,若有一个元素 $g\in G$ 的阶也是 n,则 $(G,*)$ 是由 g 生成的循环群.

(3) 设 $(G,*)$ 是一个有限群,$(H,*)$ 是它的一个子群,则 $|G|/|H|=K$,即指群的子群的阶必定是群的阶的一个因子.

证明:设有群 $(G,*)$ 的阶 $|G|=p$ 是素数,a 不是 G 的单位元,若 a 的阶是 m,则 $m\neq 1$,由上述分析中群的特性(1)可知,$H=\{a^r\mid r\in\mathbf{Z}\}$ 关于 $*$ 是一个 m 阶循环子群,又由(3)可知,m 是 p 的因数,但素数 p 只有因数 p 和1,m 又不等于1,故 $m=p$,由(2)可知,$(G,*)$ 是一个循环群.

3. (3P-29)设群中每个元素的逆元素就是其自身,则 G 是一个交换群.

分析:本题是证群的一种特有的性质,首先群的一般性质均体现于 G 中,而此处涉及的逆元素是群都具有的,但一般情况下,一个元素 a 的逆元素 a^{-1} 是另外一个元素 b,未必相同,但此处加上了条件:每个元素的逆元素均是它自己,即 $a=a^{-1}$,这样可以得出群 $(G,*)$ 是交换群(一般群未必是交换群). 证时要用到群的一个基本性质 $(a*b)^{-1}=b^{-1}*a^{-1}$.

证明:对任意的 $a,b\in G$,有 $a*b\in G$,因为一个元素的逆元素是它自己,于是有 $a*b=(a*b)^{-1}=b^{-1}*a^{-1}=b*a$,所以 $(G,*)$ 是交换群.

4. 在自然数集 $\mathbf{N}$ 上,下列运算中可结合的是(　　).

A. $a*b=a-b$　　　　B. $a*b=\max(a,b)$

C. $a*b=a+2b$　　　　D. $a*b=|a-b|$

分析:是否有结合律,要验证是否有 $(a*b)*c=a*(b*c)$. 上述各式中等号右边是左边 $*$ 运算的具体意义.

对选项 A:$(a*b)*c=(a-b)-c$, $a*(b*c)=a-(b-c)$,

减法不满足结合律,如:$(5-2)-6=-3$, $5-(2-6)=9$.

对选项 B: $(a*b)*c=\max(a,b)*c=\max(\max(a,b),c)$,

$a*(b*c)=a*\max(b,c)=\max(a,\max(b,c))$,

满足结合律.

对选项 C: $(a*b)*c=(a+2b)+2c=a+2b+2c$,

$a*(b*c)=a+2(b+2c)=a+2b+4c$,

不满足结合律.

对选项 D: $(a*b)*c=||a-b|-c|$, $a*(b*c)=|a-|b-c||$,

例如:取 $a=1,b=2,c=3$,则 $(a*b)*c=2$, $a*(b*c)=0$,不满足结合律.

解:本题只有 B 满足结合律.

5. 设 A 为非空有限子集,代数系统 $(\rho(A),\cup,\cap)$ 中,$\rho(A)$ 对 $\cup$ 的单位元素和零元素是什么? $\rho(A)$ 对 $\cap$ 的单位元素和零元素是什么?

分析:$\rho(A)$ 是集合 A 的幂集,其元素是所有 A 的子集(注意是集合作为元素构成的集合),那么 $\rho(A)$ 的单位元素、零元素也应该是集合,可根据单位元素、零元素的含义,再配合不同的运算,找到它们并代入验证.

解:任取 $A_1\in\rho(A)$: $A_1\cup\varnothing=\varnothing\cup A_1=A_1$, $A_1\cup A=A\cup A_1=A$,故 $\rho(A)$ 对 $\cup$ 运算的单位元素是 $\varnothing$,零元素是 A.

任取 $A_1\in\rho(A)$: $A_1\cap\varnothing=\varnothing\cap A_1=\varnothing$, $A_1\cap A=A\cap A_1=A_1$,故 $\rho(A)$ 对 $\cap$ 运算的单位元素是 A,零元素是 $\varnothing$.

6. $F=\{f|f:A\to A\}$, $\circ$ 为函数复合(即映射的复合运算),则代数系统 $(F,\circ)$ 的单位元素是什么? 可逆元素是什么?

分析:本题集合 F 中的元素为函数(映射),经复合运算 $\circ$ 后,所得结果还是 F 中的某一函数 f. 当 $f:A\to A$ 为一一对应(双射)时有逆元素.

例:$A=\{a,b\}$ 时,函数共 $f_1\sim f_4$ 四种,有

	f_1	f_2	f_3	f_4
a	a	b	b	a
b	a	a	b	b

即 $f_1(a)=a,f_1(b)=a;f_2(a)=b,f_2(b)=a;f_3(a)=b,f_3(b)=b;f_4(a)=a,f_4(b)=b$. 此时 $F=\{f_1,f_2,f_3,f_4\}$ 为 $f:A\to A$ 构成的处理对象集合,共 4 个函数,其中 f_4 为单位元,$f_i\circ f_4=f_4\circ f_i=f_i$. f_2,f_4 为双射函数,$f_2^{-1}=f_2$, $f_4^{-1}=f_4$. 即 $f_2(a)=b$, $f_2^{-1}(b)=a$, $f_2(b)=a$, $f_2^{-1}(a)=b$; $f_4(a)=a$, $f_4^{-1}(a)=a$, $f_4(b)=b$, $f_4^{-1}(b)=b$.

解:$f(a)=a$,即恒等函数是单位元;所有的双射函数是可逆元.

7. $\mathbf{N}$ 为自然数集,$A=\{n|n\in\mathbf{N},n$ 的某次幂能被 16 整除$\}$,即 $n^k=16\cdot l$, $k,l\in\mathbf{N}$,试说明普

通"+"运算对 A 是封闭的.

分析:本题的关键是对运算集合 A 的含义的认识,A 中元素 n 要求其某次幂 n^k 能被16整除,而不是指 n 本身一定要被16整除.

解:因为任何自然数 n,当它是奇数时,n^k(k 为任何自然数时)都不可能是偶数,即不能被16整除;当 n 为偶数时,不妨设为 $2m$,$(2m)^4=16m^4$,一定是16的倍数.

所以 A 的元素一定为偶数,即 $A=\{x \mid x=2n, n\in \mathbf{N}\}$.

任取 $x,y\in A$,$x=2i$,$y=2j$,$i,j\in \mathbf{N}$,$x+y=2i+2j=2(i+j)\in A$,因为 $i+j\in \mathbf{N}$,所以"+"运算对 A 是封闭的.

8. 设 $A=(\mathbf{R}, *)$,其中 $\mathbf{R}$ 是实数集,运算 $*$ 定义为:$x*y=\lceil x,y\rceil$,其中符号$\lceil x,y\rceil$表示不小于 x 和 y 的最小整数. 又设

$$H_1=\{x \mid 0\leqslant x\leqslant 100, x\in \mathbf{R}\},$$
$$H_2=\{x \mid 0\leqslant x<100, x\in \mathbf{R}\}.$$

问 H_1 与 H_2 能否构成 A 的子代数?

分析:本题关键在于正确理解$\lceil x,y\rceil$的含义,明确子代数的定义,特别要注意封闭性.

例如:$\lceil 28.5,\sqrt{7}\rceil=29$,$\lceil -4,-3.2\rceil=-3$,而对于$\lceil 99.7,77\rceil=100$,此时对 H_1 封闭,对 H_2 则不封闭.

解:根据$\lceil x,y\rceil$的含义,比较 A,H_1,H_2 中的元素,看是否满足封闭性.

因为运算 $*$ 在 H_1 上是封闭的,所以$(H_1, *)$是$(\mathbf{R}, *)$的子代数. 但 H_2 与运算 $*$ 不能构成 A 的子代数,因为 $*$ 在 H_2 上不封闭.

9. 设$(A, *, \circ)$是一个代数系统,$*$ 满足结合律,$\circ$ 满足对 $*$ 的分配律,对任何 $a_1,b_1,a_2,b_2\in A$,试证明:

$$(a_1\circ b_1)*(a_1\circ b_2)*(a_2\circ b_1)*(a_2\circ b_2)$$
$$=(a_1\circ b_1)*(a_2\circ b_1)*(a_1\circ b_2)*(a_2\circ b_2).$$

分析:本题左、右两边的不同在于中间两项的位置颠倒,若 $*$ 满足交换律,则可直接交换而得到等式两边相等,但此处的条件只有结合律、分配律,就是考对结合律、分配律在同一等式中应用的熟练程度.

证明:左边 $=(a_1\circ(b_1*b_2))*(a_2\circ(b_1*b_2))$

$=(a_1*a_2)\circ(b_1*b_2)$

$=((a_1*a_2)\circ b_1)*((a_1*a_2)\circ b_2)$

$=(a_1\circ b_1)*(a_2\circ b_1)*(a_1\circ b_2)*(a_2\circ b_2)=$右边.

10. $(A, *)$是代数系统,对任何 $a,b,c,d\in A$,有:

(1) $a*a=a$,

(2) $(a*b)*(c*d)=(a*c)*(b*d)$.

试证明:$a*(b*c)=(a*b)*(a*c)$.

证明:$a*(b*c)=(a*a)*(b*c)$ 根据(1)

$=(a*b)*(a*c)$.　　根据(2)

说明:此类证明主要考核一种演算能力,必须在演算过程中牢记"根据什么得出下一步".运算符的含义可能千变万化,千万不能将习惯用的数学知识盲目套上去,能用的只有题目中给出的条件.

本题证明等号后的第一个式子是根据条件(1),将原来的 a 用 $a*a$ 来代替;第二个等号后的式子是根据条件(2),将中间两个元素交换位置,即将 $(a*a)*(b*c)$ 中第二个 a 和 b 交换位置,从而得到结果 $(a*b)*(a*c)$.

11. 设 $(S,*)$ 是单元半群,对 $a,b\in S$,a,b 均有逆元素 $a^{-1},b^{-1}\in S$,求

$$(a^{-1})^{-1}=?\qquad (a*b)^{-1}=?$$

分析:本题主要考核定理,可以有如下证明:

因为 $a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$,逆元素是相互的,即 a 的逆元素为 a^{-1},a^{-1} 的逆元素为 a.

$$\begin{aligned}(b^{-1}*a^{-1})*(a*b)&=b^{-1}*(a^{-1}*a)*b\\&=b^{-1}*e*b\\&=b^{-1}*b=e,\end{aligned}$$

所以 $b^{-1}*a^{-1}$ 是 $a*b$ 的逆元素.

又因为逆元素是唯一的.所以 $(a*b)^{-1}=b^{-1}*a^{-1}$.

解:$(a^{-1})^{-1}=a$; $(a*b)^{-1}=b^{-1}*a^{-1}$.

12. 设 $(S,*)$ 是代数系统,其中 $S=\{a,b,c\}$,$*$ 定义为:

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	a
c	c	a	a

问 $(S,*)$ 是否为半群?为什么?

分析:检查运算表是否满足结合律时,要考虑到所有组合运算情况,此处大部分情况是符合结合律的,但也有不符合的.例如:$(b*b)*c=a*c=c$, $b*(b*c)=b*a=b$.

解:$(S,*)$ 不是半群,因为它的 $*$ 运算不满足结合律.

13. $A=\{a,b\}$,$S=\{f|f$ 是从 A 到 A 的函数$\}$,$\circ$ 为函数的复合运算.

(1) 构造 $(S,\circ)$ 的运算表;

(2) 说明 $(S,\circ)$ 是否是单元半群.

分析:运算表是一种将运算的所有情况均列出来的直观形式,只有正确理解特定运算的方法才能列出正确的运算表,函数有多种表达方法,如:$f_1:a\to b,b\to a$;$f_1(a)=b,f_1(b)=a$;$f_1=\{(a,b),(b,a)\}$,指出像源与像的具体对应关系即可.

解:(1) A 上的映射共有如下四个:

$$f_1: a\to b, b\to a,\quad f_2: a\to a, b\to b,\quad f_3: a\to a, b\to a,\quad f_4: a\to b, b\to b,$$

$(S,\circ)$的运算表为:

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_2	f_1	f_3	f_4
f_2	f_1	f_2	f_3	f_4
f_3	f_4	f_3	f_3	f_4
f_4	f_3	f_4	f_3	f_4

(2) $(S,\circ)$是单元半群.

因为① 由运算表可见$(S,\circ)$封闭,② 由函数的运算性质知,$\circ$运算满足结合律,③ f_2 为单位元素,所以$(S,\circ)$是单元半群.

14. 设$(A,*)$是一个半群,而且对于 A 中的元素 a 和 b,如果 $a\neq b$ 必有 $a*b\neq b*a$,试证明:

(1) 对于 A 中每个元素 a,有 $a*a=a$;

(2) 对于 A 中任何元素 a 和 b,有 $a*b*a=a$;

(3) 对于 A 中任何元素 a,b 和 c,有 $a*b*c=a*c$.

分析:本题条件中给出半群,则意味着满足封闭性和结合律.根据条件若 $a\neq b$,必有 $a*b\neq b*a$,推出只要证出 $a*b=b*a$,就可断言 $a=b$.(1)中可将 $a*a$ 看作 b,所以有 $a*a=a$.而(2)中根据(1)的结论用 $a*a$ 替代 a,而用 a 替代 $a*a$,令 $a*b*a=x$,则有 $a*x=x*a$,$a=x$,从而推得 $a*b*a=a$.(3)中也用到(2)中的结论,$c*a*c=c$.[即 $c*(c*a*c)=(c*c)*a*c=c*a*(c*c)=(c*a*c)*c$.]

证明:由题意可知,若 $a*b=b*a$,则必有 $a=b$.

(1) 因为$(a*a)*a=a*(a*a)$,所以 $a*a=a$.

(2) 因为 $a*(a*b*a)=(a*a)*b*a=a*b*(a*a)=(a*b*a)*a$,所以 $a*b*a=a$.

(3) 因为

$$\begin{aligned}(a*c)*(a*b*c)&=(a*c*a)*(b*c)\\&=a*(b*c)=(a*b)*(c*a*c)\\&=(a*b*c)*(a*c),\end{aligned}$$

所以 $a*b*c=a*c$.

15. 已知$(G,*)$是群,其中 $G=\{1,2,3,4,5,6\}$,$*$运算是对模7的乘法.

(1) 请构造此群的运算表;

(2) 找出元素2的生成子群,并指出其阶数是多少.

分析:要理解模7乘法的意义,当两数相乘小于7时就是结果,当大于等于7时,则不断减7,

一直减到结果小于 7 时为止.

因为对元素 2 有：$2^1=2$，$2^2=4$，$2^3=1$，从运算表中可直接看出 1 是单位元素. 所以元素 2 的生成子群为($\{1,2,4\}$，$*$)，其中 $*$ 仍为模 7 乘法，这时 1 还为单位元素，2，4 互为逆元素，$2*4=1$，$4*2=1$. 由于 $2^3=1$，故于群的阶为 3.

解：(1) 根据题意，构造运算表如下：

*	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

(2) 对元素 2 有：$2^1=2$，$2^2=4$，$2^3=1$.

可得到元素 2 的生成子群为($\{1,2,4\}$，$*$)，其中 1 是单位元素，此时子群的阶为 3.

16. 当 $|G|=8$ 时，群(G，$*$)只可能有几阶的非平凡子群？不可能有几阶的子群？其平凡子群是什么？

分析：根据拉格朗日定理，子群的阶是群的阶的因子，当群的阶为 8 时，其因子为 1，2，4，8，而阶为 1 的子群是单位元素 e 构成的，阶为 8 的子群即是群本身，这两者都称为平凡子群，故只可能有 2，4 阶两种真子群.

解：(1) 只可能有 2 阶和 4 阶的非平凡子群；

(2) 不可能有 3，5，6，7 阶的子群；

(3) 其平凡子群为($\{e\}$，$*$)和(G，$*$).

17. 设 $G=\{2^m\times5^n \mid m,n\in\mathbf{Z}\}$，$\times$ 是普通乘法，(G，$\times$)是否构成群？为什么？

解：(G，$\times$)构成群. 因为

(1) 对任意 $2^{m_1}\times5^{n_1}$，$2^{m_2}\times5^{n_2}\in G$，$m_1,m_2,n_1,n_2\in\mathbf{Z}$，有：

$$2^{m_1}\times5^{n_1}\times2^{m_2}\times5^{n_2}=2^{m_1+m_2}\times5^{n_1+n_2}\in G,$$

故 $\times$ 在 G 上封闭.

(2) 数的乘法可结合，故 $\times$ 在 G 上满足结合律.

(3) 存在 $2^0\times5^0=1\in G$，1 是单位元素.

(4) 对任意 $x\in G$，设 $x=2^m\times5^n$，则存在 $2^{-m}\times5^{-n}\in G$，使

$$(2^m\times5^n)\times(2^{-m}\times5^{-n})=(2^{-m}\times5^{-n})\times(2^m\times5^n)=2^0\times5^0=1,$$

故 $x^{-1}=2^{-m}\times 5^{-n}$,即对任意 x 有 $x^{-1}\in G$.

上述(1)~(4)说明了$(G,\times)$满足群的定义,所以$(G,\times)$是群.

说明:本题首先要搞清 G 中元素的表示方法,即 G 中所含元素的模样为 $2^m\times 5^n$,在其后的证明过程中,从 G 中取元素出来研究,均不能脱离上述模样.另一点是要证明是群必须从上述(1)~(4)条是否满足来做最终判断.这是判断群的基本方法.

18. 设$(\mathbf{Z}_6,+_6)$是一个群,这里 $+_6$ 是模6加法,$\mathbf{Z}_6=\{[0],[1],[2],[3],[4],[5]\}$,试写出$(\mathbf{Z}_6,+_6)$中的所有子群.

解:根据拉格朗日定理,有可能成为子群时的阶数分别为1,2,3,6.

$(\mathbf{Z}_6,+_6)$的单位元素为[0].

(1) 一阶子群为$(\{[0]\},+_6)$;

(2) 二阶子群为$(\{[0],[3]\},+_6)$;

(3) 三阶子群为$(\{[0],[2],[4]\},+_6)$;

(4) 六阶子群为$(\mathbf{Z}_6,+_6)$.

说明:根据拉格朗日定理,子群的阶是群的阶的因子,这里6的因子有1,2,3,6,但未必这四种子群一定存在,故对所找到的子群要一一验证,看是否符合子群的定义.

对(1):[0]为单位元素;满足结合律;满足封闭性;[0]的逆元[0].

对(2):[0]为单位元素;满足结合律;$[0]+_6[3]=[3]$,$[0]+_6[0]=[0]$,$[3]+_6[3]=[0]$,满足封闭性;[0]的逆元为[0],[3]的逆元为[3].

对(3):[0]为单位元素;满足结合律;$[0]+_6[2]=[2]$,$[0]+_6[4]=[4]$,$[2]+_6[4]=[0]$,$[2]+_6[2]=[4]$,$[4]+_6[4]=[2]$,$[0]+_6[0]=[0]$,满足封闭性;[0]的逆元为[0],[2]和[4]互为逆元.

对(4):$(\mathbf{Z}_6,+_6)$本身是群.

19. 设 u 是群$(G,\circ)$中取定的一个元素,其逆元素为 u^{-1},对 G 定义运算 $*$ 为:对任意 $a,b\in G$,$a*b=a\circ u^{-1}\circ b$,试证明$(G,*)$也是一个群.

分析:本题是在原有群$(G,\circ)$基础上构造一个新群,运算 $*$ 是通过 $\circ$ 来定义的,两者虽然有联系,却是不同的两个运算符.要证明$(G,*)$是群,就要证明其中的元素在 $*$ 运算下满足群的定义,而在证明过程中,$*$ 均要用 $\circ$ 的意义来表达.

证明:(1) 对任何 $a,b\in G$,$a*b=a\circ u^{-1}\circ b\in G$,满足封闭性;

(2)
$$\begin{aligned}(a*b)*c&=(a\circ u^{-1}\circ b)*c=(a\circ u^{-1}\circ b)\circ u^{-1}\circ c\\&=a\circ u^{-1}\circ(b\circ u^{-1}\circ c)=a*(b\circ u^{-1}\circ c)\\&=a*(b*c),\end{aligned}$$
满足结合律;

(3) 对任何 $a\in G$,
$$u*a=u\circ u^{-1}\circ a=e\circ a=a,$$
$$a*u=a\circ u^{-1}\circ u=a\circ e=a,$$

故 u 是单位元素;

(4) 对任何 $a\in G$,设逆元为 x,则 $a*x=u$,即

$$a\circ u^{-1}\circ x=u \Rightarrow x=(a\circ u^{-1})^{-1}\circ u=u\circ a^{-1}\circ u,$$

$$x*a=u,\quad x\circ u^{-1}\circ a=u \Rightarrow x=u\circ(u^{-1}\circ a)^{-1}=u\circ a^{-1}\circ u,$$

可见 a 的逆元为 $u\circ a^{-1}\circ u$.

所以$(G,*)$是群.

20. 设$(H,*)$是群$(G,*)$的子群,如果 $A=\{x\mid x\in G,x*H*x^{-1}=H\}$,证明$(A,*)$是$(G,*)$的一个子群.

证明:由定义可知 $A\subseteq G$,对于任意的 $a,b\in A$,有 $a*H*a^{-1}=H,b*H*b^{-1}=H$.取 $a*b^{-1}\in G$,有$(a*b^{-1})*H*(a*b^{-1})^{-1}=a*(b^{-1}*H*(b^{-1})^{-1})*a^{-1}=a*H*a^{-1}=H$.

所以 $a*b^{-1}\in A$,因此$(A,*)$是$(G,*)$的一个子群.

说明:本题条件中已规定$(H,*)$是$(G,*)$的子群(都满足群的定义,即具有群的性质),而集合 A 中只有一些有特殊意义的元素,即 A 中的元素 x 均有 $x*H*x^{-1}=H$,也就是说元素 x 和其逆元 x^{-1}分别对 H 中所有元素从左、右两边运算后得到的所有元素(结果)就是 H 中的所有元素,即等于 H.现在要证明 A 中的元素加上运算 $*$ 后,可构成群,且是$(G,*)$的子群.

上述证明中用到了子群的判定定理,即有 $A\subseteq G$(因为 A 中元素均来自 G,而 G 中未必所有元素均可放到 A 中去),$a,b\in A$,又推出 $a*b^{-1}\in A$,最终推出$(A,*)$是$(G,*)$的子群.

21. 设$(A,*)$是群,且$|A|=2n,n\in\mathbf{N}$.试证明在 A 中至少存在元素 $a\neq e$,使得 $a*a=e$,其中 e 是单位元素.

分析:本题首先要认定条件中已给出$(A,*)$是群,那么群的性质在以下证明中都能用,群的阶为 $2n$,表示 A 中元素个数为偶数,x 和 x^{-1}是成对出现的(指 x 和 x^{-1}不相同时).e 又是唯一的,如果没有以其自身为逆元素的元素,则 A 中元素个数为奇数,这与条件$|A|=2n$ 矛盾,故 A 中至少有一个元素以其自身为逆元素,即 $a*a=e$.

证明:因为群$(A,*)$的元素个数为偶数 $2n$,对于任意的 $x\in A$,均有它的逆元素 $x^{-1}\in A$,使得 $x*x^{-1}=x^{-1}*x=e$,由于互为逆元素的两个不相同元素是成对出现的,而且群中有唯一的单位元素 e,因此,至少有一个元素是以其自身为逆元素的,即必存在 $a\in A,a\neq e$,使得 $a*a=e$.

22. 设$(G,*)$是一个群,$H\subseteq G,H\neq\varnothing$且 H 中的元素都是有限阶的,运算在 H 中封闭,则$(H,*)$是$(G,*)$的子群.

分析:因为$(G,*)$是群,所以$(H,*)$中的 $*$ 运算也满足结合律.根据条件,H 中的元素都是有限阶的,意味着 $h^n=e$(即 h 的阶为 n),关键要搞清楚 H 从 G 中选了哪些元素.

证明:(1) 封闭性已知,结合律在此也成立.

(2) 对于任意的 $h\in H$,必存在正整数 n,使得 $h^n=e$,因为 $h^n\in H$,所以 $e\in H$,这说明 G 中的单位元素属于 H.

(3) 对于任意的 $h\in H,h\neq e$,必存在正整数 $n>1$,使得 $h^n=e$,故有

$$h*h^{n-1}=h^{n-1}*h=h^n=e,$$

故有 $h^{-1}=h^{n-1}\in H$.

因此 $(H,*)$ 是 $(G,*)$ 的子群.

23. 已知 $(\{(a,b)\mid a,b$ 为整数$\},+,*)$,讨论该代数系统是否为环?是否为整环?其中

$$(a,b)=(c,d)\Longleftrightarrow a=c\wedge b=d,$$
$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d),$$
$$(a,b)*(c,d)=(ac,bd).$$

分析:首先要搞清楚 S 中的元素是什么,即 (a,b),其中 a,b 均为整数.其次要弄清 + 和 * 的定义,对 $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$,其中等式左边的 + 是本代数系统 $(S,+,*)$ 中的符号,右边的 + 是解释左边运算符的,是普通的加法;同样 $(a,b)*(c,d)=(ac,bd)$,右边是普通乘法,是解释左边 * 运算的.在验证是否是环的过程中,具体的运算均按本题中 +、* 的具体含义进行,单位元素凭经验规律来找,并用运算验证.

解:设 $S=\{(a,b)\mid a,b$ 为整数$\}$:

(1) $(S,+)$ 为阿贝尔群,其单位元素为 $(0,0)$.

(2) 对任何 $(a,b)\in S$,有 $(a,b)^{-1}=(-a,-b)$.

(3) $(S,*)$ 对任何 $(a,b),(c,d),(e,f)\in S$,有

$$((a,b)*(c,d))*(e,f)=(ac,bd)*(e,f)=(ace,bdf),$$
$$(a,b)*((c,d)*(e,f))=(a,b)*(ce,df)=(ace,bdf),$$

故满足结合律.

(4) $(a,b)*((c,d)+(e,f))=(a,b)*(c+e,d+f)=(ac+ae,bd+bf),$

$(a,b)*(c,d)+(a,b)*(e,f)=(ac,bd)+(ae,bf)=(ac+ae,bd+bf),$

同理可验证:

$$((a,b)+(c,d))*(e,f)=(a,b)*(e,f)+(c,d)*(e,f),$$

* 对 + 满足分配律.

(5) + 运算的单位元素为 $(0,0)$,因此 $(S,+,*)$ 为环.

(6) * 运算的单位元素为 $(1,1)$,但 $(0,1)*(1,0)=(0,0)$,存在零因子,所以 $(S,+,*)$ 是环而不是整环.

24. 已知环 $(R,+,\cdot)$ 的 $(R,+)$ 是一个循环群,则 R 是可交换环.

分析:其中 $a=g^m=\underbrace{g+g+\cdots+g}_{m次}=mg$,$b=g^n=\underbrace{g+g+\cdots+g}_{n次}=ng$,$g^{m+n}$ 中的 + 是普通加法,可交换.

证明:设 $(R,+)$ 的生成元为 g,设 $a,b\in R$,$a=g^m$(即 $a=mg$),$b=g^n$(即 $b=ng$),

$$a\cdot b=g^m\cdot g^n=g^{m+n}=g^{n+m}=g^n\cdot g^m=b\cdot a,$$

故 $(R,\cdot)$ 满足交换律,所以 $(R,+,\cdot)$ 是可交换环.

25. 设 $(A,+,\cdot)$ 是一个环,并且对于任意的 $a\in A$,都有 $a\cdot a=a$,这个环称布尔环.证明:

(1) 对于任意的 $a\in A$,都有 $a+a=\theta$,其中 θ 是加法单位元素;

(2) $(A,+,\cdot)$是可交换环.

分析:这里 $a\cdot a=a$ 的条件适用于所有 A 中的元素,如 $a+a$ 是 A 的元素(指 $a+a$ 所得结果,假设为 x),因此有$(a+a)\cdot(a+a)=a+a$(即相当于 $x\cdot x=x$).

证明:(1) 对于任意的 $a\in A$,都有 $a+a\in A$,故有

$$(a+a)\cdot(a+a)=a+a\Rightarrow a\cdot a+a\cdot a+a\cdot a+a\cdot a=a+a$$
$$\Rightarrow a+a+a+a=a+a,$$

由此可知 $a+a=\theta$.

(2) 对于任意的 $a,b\in A$,都有 $a+b\in A$,故有

$$(a+b)\cdot(a+b)=a+b\Rightarrow a\cdot a+a\cdot b+b\cdot a+b\cdot b=a+b$$
$$\Rightarrow a+a\cdot b+b\cdot a+b=a+b\Rightarrow(a+b)+a\cdot b+b\cdot a=(a+b)$$
$$\Rightarrow a\cdot b+b\cdot a=\theta\Rightarrow a\cdot b=-b\cdot a,$$

又由(1)的结果$(b\cdot a)+(b\cdot a)=\theta\Rightarrow(b\cdot a)+(b\cdot a)-(b\cdot a)=\theta-(b\cdot a)\Rightarrow b\cdot a=-b\cdot a$,故有 $a\cdot b=b\cdot a$,因此$(A,+,\cdot)$是可交换环.

26. 证明在格中若 $a\leqslant b\leqslant c$,则

(1) $a\vee b=b\wedge c$;

(2) $(a\wedge b)\vee(b\wedge c)=b=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$.

分析:本题已知格存在,那么其中元素的性质均满足格相关的定理. 例如:$a\leqslant b$ 则 $a\vee b=b$,基本定理中的一些性质可以直接引用.

证明:(1) 因为 $a\leqslant b$,所以 $a\vee b=b$. 又因为 $b\leqslant c$,所以 $b\wedge c=b$. 故有 $a\vee b=b\wedge c$.

(2) 因为$(a\wedge b)\vee(b\wedge c)=(a\wedge b)\vee b=b$,由 $a\vee b=b$ 和 $a\vee c=c$,可得$(a\vee b)\wedge(a\vee c)=b\wedge c=b$,所以$(a\wedge b)\vee(b\wedge c)=b=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$.

27. 证明具有两个或更多个元素的格中不存在以自身为补元的元素.

证明:凡涉及补元,该格必为有界格,对于任何一个有界格来说,均存在全上界 1、全下界 0,并有:

$$1\vee1=1,1\wedge1=1,$$
$$0\vee0=0,0\wedge0=0,$$

故 0 和 1 都不可能以自身为补元,这表明,具有两个元素的格中不可能存在以自身为补元的元素.

对于具有多于两个元素的有界格来说,考察该格中的任一元素 a,$a\neq0$ 且 $a\neq1$.

若 $a\vee a=1$,则导致 $a=1$ 的矛盾;若 $a\wedge a=0$,则导致 $a=0$ 的矛盾.

因此,具有多于两个元素的格中也不存在以自身为补元的元素.

说明:因为有界格中必包含 0,1,故两个元素的(有界)格中元素只能是 0 和 1. 上述 a 是指格中元素多于两个的情况,故证明时假定 $a\neq0$ 且 $a\neq1$,但进一步推出矛盾. 本题要对补元的概念很清楚(有界格中才可能有补元). 全上界、全下界也可称为上界、下界.

5.5 相关教材中习题及解答

1. (5.1) 数的加、乘在下列集合上是否封闭?

(1) $S=\{0,1\}$;

(2) $S=\{-1,1\}$;

(3) $S=\{x\mid x$ 为素数$\}$.

解:(1) 加法在 $S=\{0,1\}$ 上不封闭,$1+1=2,2\notin S$. 乘法封闭,即 $0\times1=0,0\times0=0,1\times1=1$,结果均在 S 中.

(2) 加法在 $S=\{-1,1\}$ 上不封闭,因为 $-1+1=0,0$ 不在 S 中,乘法则是封闭的,即 $-1\times1=-1,1\times1=1,(-1)\times(-1)=1$.

(3) 加法和乘法在 $S=\{x\mid x$ 为素数$\}$ 上都不是封闭的,如:$3+5=8,5\times7=35$.

2. (5.2) $S=\{x\mid x$ 为素数且 $x<100\}$,在 S 上定义运算"$*$","$\circ$"如下:

$$x*y=\max(x,y),\ x\circ y>\operatorname{lcm}(x,y)\,(x,y\text{ 的最小公倍数}).$$

试问:

(1) $(S,*)$是代数系统吗?

(2) $(S,\circ)$是代数系统吗?

解:(1) 因为 $x*y=\max(x,y)$ 是在 S 中任取两个元素后选其大者为结果,满足封闭性,又是在集合上定义了运算,故$(S,*)$是代数系统.

(2) 不是代数系统,$x\circ y$ 的结果不唯一,且可能超过 100,即超出 S 的范围.

3. (5.3) 在实数集 $\mathbf{R}$ 上定义二元运算"$*$""$\circ$"如下:

$$x*y=x+y-xy,\ x\circ y=\frac{1}{2}(x+y).$$

试问:

(1) $x*y$ 是否满足结合律、交换律? 是否有单位元及逆元?

(2) $x\circ y$ 是否满足结合律、交换律? 是否有单位元及逆元?

解:(1) 因为

$$\begin{aligned}(x*y)*z&=(x+y-xy)*z\\&=x+y-xy+z-xz-yz+xyz,\\ x*(y*z)&=x*(y+z-yz)\\&=x+y+z-yz-xy-xz+xyz,\end{aligned}$$

所以 $(x*y)*z=x*(y*z)$. 满足结合律.

又因为 $x*y=x+y-xy,\ y*x=y+x-yx$,所以 $x*y=y*x$. 满足交换律.

又因为 $x*0=x+0-0\cdot x=0+x-x\cdot0=0*x=x$,所以有单位元素为 0.

又因为 $x*x^{-1}=x+x^{-1}-x\cdot x^{-1}=0,\ x^{-1}\cdot(1-x)=-x$,所以

$$x^{-1}=-\frac{x}{1-x}\ (x\neq1).$$

所以对于 $\mathbf{R}-\{1\}$ 的所有 x 均有逆元素 $-\frac{x}{1-x}$. 即除去 1 以外的所有实数均存在逆元素.

(2) 因为 $(x\circ y)\circ z=\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)\circ z=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(x+y)+z\right)$

$$=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}z,$$

$$x\circ(y\circ z)=x\circ\left(\frac{1}{2}(y+z)\right)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}(y+z)\right)$$

$$=\frac{1}{4}y+\frac{1}{4}z+\frac{1}{2}x,$$

所以 $(x\circ y)\circ z\neq x\circ(y\circ z)$. 不满足结合律.

又因为 $x\circ y=\frac{1}{2}(x+y)$, $y\circ x=\frac{1}{2}(y+x)$, 所以 $x\circ y=y\circ x$. 满足交换律.

不存在单位元素, 不存在逆元素.

4. (5.4) 证明代数系统 $(\{a,b,c,d\},*)$ 与 $(\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\},\circ)$ 是同构的, 其中运算"$*$","$\circ$"定义如下:

*	a	b	c	d
a	d	a	b	d
b	d	b	c	d
c	a	d	c	c
d	a	b	a	a

∘	α	β	γ	δ
α	β	β	β	δ
β	α	α	δ	β
γ	γ	β	γ	α
δ	α	α	γ	δ

证明: 根据 $*$ 和 $\circ$ 的运算表, 找出两个表中各自四个元素的对应关系:

$$a\leftrightarrow\beta,\ b\leftrightarrow\delta,\ c\leftrightarrow\gamma,\ d\leftrightarrow\alpha.$$

这两个代数系统间存在一个函数 f:

$$f(a)=\beta,\quad f(b)=\delta,\quad f(c)=\gamma,\quad f(d)=\alpha.$$

$$f(x_1*x_2)=f(x_1)\circ f(x_2),$$

故它们是同构的.

5. (5.5) 下表各运算均定义在实数集上, 问各种性质是否成立? 填上是或否.

性质 \ 运算	+	−	×	max	min
结合律					
交换律					
单位元					

解:

性质 \ 运算	+	-	×	max	min
结合律	是	否	是	是	是
交换律	是	否	是	是	是
单位元	是(0)	否	是(1)	否	否

6. (5.6) 设有集合 A 与二元运算 $*$,试证明下列 4 个中哪些为代数系统.

(1) $A=\mathbf{R}, a*b=ab$;

(2) $A=\{1,2,\cdots,8\}, a*b=\mathrm{lcm}(a,b)$;

(3) $A=\{1,-1,2,3,-3,4,5\}, a*b=|b|$;

(4) $A=\mathbf{Z}, a*b=|a-b|$.

解:(1) $a*b=ab$,定义在 $\mathbf{R}$ 上的运算满足封闭性,是代数系统.

(2) $a*b=\mathrm{lcm}(a,b)$,定义在 $\{1,2,\cdots,8\}$ 上的 $*$ 运算是取 a,b 的最小公倍数,故不满足封闭性,例如:$6*8=24$,24 不在集合内,不是代数系统.

(3) $a*b=|b|$ 是取 b 的绝对值,此运算在 A 上满足封闭性,是代数系统.

(4) $a*b=|a-b|$,定义在整数集 $\mathbf{Z}$ 上的运算满足封闭性,是代数系统.

7. (5.7) 设 $\mathbf{Q}^*=\mathbf{Q}-\{0\}$,试问$(\mathbf{Q}^*,\times)$与$(\mathbf{Q}^*,+)$同构吗?

解:可以找出同构函数 $f(x)=\ln x$,则

$$f(a\times b)=f(a)+f(b),$$

故是同构的.

8. (5.8) 证明 f 是从代数系统$(\mathbf{R},\times)$到$(A,\times)$的一个同构映射,其中

$$A=\left\{\begin{bmatrix}x&0&0\\0&x&0\\0&0&x\end{bmatrix}\middle| x\in\mathbf{R}\right\},$$

二元运算 × 是算术乘.

证明:构造函数$f(x)=\begin{bmatrix}x&0&0\\0&x&0\\0&0&x\end{bmatrix}$,则

$$f(a\times b)=\begin{bmatrix}ab&0&0\\0&ab&0\\0&0&ab\end{bmatrix},$$

$$f(a)\times f(b)=\begin{bmatrix}a&0&0\\0&a&0\\0&0&a\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}b&0&0\\0&b&0\\0&0&b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ab&0&0\\0&ab&0\\0&0&ab\end{bmatrix},$$

故有$f(a\times b)=f(a)\times f(b)$,是一个双射函数.故是同构的.

9. (5.9) 设有$(\mathbf{R}^*,\cdot)$,其中$\mathbf{R}^*=\mathbf{R}-\{0\}$,$\cdot$是算术乘,下述映射是否为$\mathbf{R}^*$到$\mathbf{R}^*$的同态,如是,说明其是否为满同态、单同态、同构,并计算$(\mathbf{R}^*,\cdot)$的同态像$f(\mathbf{R}^*)$.

(1) $f(x)=x^2$;

(2) $f(x)=-x$.

解:(1) $f(x)=x^2$是函数,$f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)$是其同态公式,对任意$x,y\in\mathbf{R}^*$,

$$f(x\cdot y)=(xy)^2=x^2\cdot y^2=f(x)\cdot f(y),$$

其同态像$f(\mathbf{R}^*)=x^2$.$f(\mathbf{R}^*)\subset\mathbf{R}^*$,且是普通的多对一同态.例如:$f(2)=f(-2)=4$.

(2) $f(x)=-x$是双射函数.不满足同态公式,对任意$x,y\in\mathbf{R}^*$,$f(x\cdot y)=-x\cdot y$,

$$f(x)\cdot f(y)=(-x)\cdot(-y)=xy,$$

即$f(x\cdot y)\neq f(x)\cdot f(y)$,不是同态的.

10. (6.2) 设有非空集A,A上的运算$*$定义为:$a,b\in A$有$a*b=a$,假定A的元素个数大于1,问:

(1) $(A,*)$是半群吗?

(2) $(A,*)$是可换半群吗?

(3) $(A,*)$有单位元吗?

解:(1) 因为对任意的$a,b,c\in A$,$(a*b)*c=a*c=a$,$a*(b*c)=a*b=a$,所以

$$(a*b)*c=a*(b*c).$$

所以是半群.

(2) 因为对任意的$a,b\in A$,$a*b=a$,而$b*a=b$,所以$a*b\neq b*a$,故不是交换半群.

(3) 无单位元素.

11. (6.3) 试证:若$(G,*)$是可换群,则对任意$a,b\in G$必有$(a*b)^n=a^n*b^n$.

证明:$(a*b)^n=(a*b)*(a*b)*\cdots*(a*b)$

$$\xlongequal{*\text{可结合}}a*(b*a)*(b*a)*\cdots*(b*a)*b$$

$$\xlongequal{*\text{可交换}}(a*a*\cdots*a)*(b*b*\cdots*b)=a^n*b^n.$$

12. (6.4) 下列的代数系统$(G,*)$哪些构成群?如是群给出其单位元以及每个元素的逆元素.

(1) $G=\{1,10\}$ $*$是按模11的乘法;

(2) $G=\{1,3,4,5,9\}$ $*$是按模11的乘法;

(3) $G=\mathbf{Q}$ $*$是通常的加法;

(4) $G=\mathbf{Q}$ $*$是通常的乘法;

(5) $G=\mathbf{Z}$ $*$是通常的减法.

解:(1) 是群. 单位元是1;1 的逆元素是 1,10 的逆元素是 10.

(2) 是群. 单位元是1;3 和 4 互为逆元素,5 和 9 互为逆元素,1 的逆元素是 1.

(3) 是群. 单位元是0;对任意元素 $a \in G$,其逆元素是 $-a$,即 a 与 $-a$ 互为逆元素,0 的逆元素是 0.

(4)和(5)不是群.

13. (6.5)试证若群的每个元素的逆元素都是它自己,则该群必是可换群.

证明:对任意的 $a,b \in G$,有 $a*b \in G$. 因为一个元素的逆元素是它自己,于是

$$a*b=(a*b)^{-1}=b^{-1}*a^{-1}=b*a,$$

所以 $(G,*)$ 是可换群.

14. (6.6) 试证阶为偶数的循环群中周期(阶)为 2 的元素个数一定是奇数.

证明:设 $(G,*)$ 是阶为 n 的循环群,即 $|G|=n$(n 是偶数). 任取 $a \in G$,$a^m=e(m>2)$,a 的阶为 m,a 的逆元素 $a^{-1} \in G$,故 $(a^{-1})^m=(a^m)^{-1}=e^{-1}=e$,由群的性质,知 a^{-1} 的阶也是 m,则必定有 $a \neq a^{-1}$.

反证法,若 $a=a^{-1}$,则 $a^2=e$,所以 a 的阶不大于 2,这与 $m>2$ 矛盾,所以有 $a \neq a^{-1}$,即当 a 的阶大于 2 时,a 与它的逆元素总是成对出现的.

又因为群中唯一的单位元素 e 的阶为 1,此时阶大于 2 的元素个数是偶数,加上单位元 e,个数为奇数了,剩下那些阶为 2 的元素的个数必须为奇数,才能满足所给条件 n 是偶数. 得证.

15. (6.7) 设 $(G,*)$ 是阶为 6 的群,试证它的子群的阶至多为 3.

证明:此时有 $|G|=6$,根据拉格朗日定理,子群的阶必定是群的阶的一个因子,而 6 的最大因子是 3,故即使有子群,其阶最多为 3.

16. (6.9) 找出 $(\mathbf{Z}_{12},+_{12})$ 的所有子群.

解:(1) 1 阶子群 $(\{[0]\},+_{12})$;

(2) 2 阶子群 $(\{[0],[6]\},+_{12})$;

(3) 3 阶子群 $(\{[0],[4],[8]\},+_{12})$;

(4) 4 阶子群 $(\{[0],[3],[6],[9]\},+_{12})$;

(5) 6 阶子群 $(\{[0],[2],[4],[6],[8],[10]\},+_{12})$;

(6) 12 阶子群 $(\mathbf{Z}_{12},+_{12})$.

17. (6.10) 求 $(\mathbf{Z}_6,+_6)$ 中子群 $H=\{[0],[3]\}$ 的左陪集和右陪集,并说明其左、右陪集是否相等.

解:$(\mathbf{Z}_6,+_6)$ 是交换群,左、右陪集相等,都是 $\{[0],[3]\}$、$\{[1],[4]\}$ 和 $\{[2],[5]\}$.

18. (6.11) 试证两个正规子群的交集仍构成正规子群.

证明:设 $(H_1,*)$ 和 $(H_2,*)$ 是群 $(G,*)$ 的两个正规子群,因为 $H_1 \subseteq G$,$H_2 \subseteq G$,故 $H_1 \cap H_2 \subseteq G$,现在任取 $a,b \in H_1 \cap H_2$,于是 $a,b \in H_1$ 并且 $a,b \in H_2$,于是 $a*b^{-1} \in H_1$ 并且 $a*b^{-1} \in H_2$,故 $a*b^{-1} \in H_1 \cap H_2$. 由子群的定义得 $(H_1 \cap H_2,*)$ 是群 $(G,*)$ 的子群. 对于任一 $a \in G$,因为 $(H_1,*)$ 是正规子群,所以有 $a*H_1=H_1*a$,所以

$$a*(H_1\cap H_2)*a^{-1}\subseteq a*H_1*a^{-1}=(a*H_1)*a^{-1}$$
$$=(H_1*a)*a^{-1}=H_1*(a*a^{-1})=H_1.$$

同理可证 $a*(H_1\cap H_2)*a^{-1}\subseteq H_2$.

故得到 $a*(H_1\cap H_2)*a^{-1}\subseteq H_1\cap H_2$，因此有 $(H_1\cap H_2,*)$ 是 $(G,*)$ 的正规子群.

19. (7.1) 试证两个理想的交集仍构成一个理想.

证明：设 $(D_1,+,\cdot)$ 和 $(D_2,+,\cdot)$ 是环 $(R,+,\cdot)$ 的两个理想，令 $a,b\in D_1\cap D_2$，$r\in R$，于是 $a,b\in D_1$，$a,b\in D_2$，从而有：

$$a-b,r\cdot a,a\cdot r\in D_1;$$
$$a-b,r\cdot a,a\cdot r\in D_2.$$

因此 $a-b,r\cdot a,a\cdot r\in D_1\cap D_2$，故 $(D_1\cap D_2,+,\cdot)$ 是一个理想.

20. (7.2) 设 $(R,+,\cdot)$ 是环，$a,b,c\in R$，试证：

(1) 如 $a\cdot b=b\cdot a$，则 $a\cdot(-b)=(-b)\cdot a$ 及 $a\cdot(b^{-1})=(b^{-1})\cdot a$；

(2) 如 $a\cdot b=b\cdot a$ 且 $a\cdot c=c\cdot a$，则 $a\cdot(b+c)=(b+c)\cdot a$ 及 $a\cdot(b\cdot c)=(b\cdot c)\cdot a$.

证明：(1) 因为 $a\cdot b=b\cdot a$，所以 $a\cdot(-b)=-(a\cdot b)=-(b\cdot a)=(-b)\cdot a$.

又因为根据所需证明的 $a\cdot b^{-1}=b^{-1}\cdot a$，可知元素 b 存在乘法逆元素，且乘法单位元素 1 也存在. 所以

$$a\cdot(b^{-1})=1\cdot(a\cdot b^{-1})=(b^{-1}\cdot b)\cdot(a\cdot b^{-1})$$
$$=b^{-1}\cdot(b\cdot a)\cdot b^{-1}=b^{-1}\cdot(a\cdot b)\cdot b^{-1}$$
$$=(b^{-1}\cdot a)\cdot(b\cdot b^{-1})=(b^{-1})\cdot a.$$

(2) 因为 $a\cdot b=b\cdot a$ 且 $a\cdot c=c\cdot a$，所以 $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c=b\cdot a+c\cdot a=(b+c)\cdot a$，

$$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c=(b\cdot a)\cdot c$$
$$=b\cdot(a\cdot c)=b\cdot(c\cdot a)=(b\cdot c)\cdot a.$$

21. (7.3) 设 $(R,+,\cdot)$ 是环，R 的子集 G 定义如下：

$$G=\{a\mid a^{-1}\in R\}.$$

证明 $(G,\cdot)$ 是群.

证明：(1) 因为 $1^{-1}=1\in R$，所以 $1\in G$，且 G 非空，对于任意的 $a,b\subset G$，必有 $a^{-1}\subset R$ 且 $b^{-1}\in R$，故 $b^{-1}\cdot a^{-1}\in R$，并且 $(b^{-1}\cdot a^{-1})\cdot(a\cdot b)=(a\cdot b)\cdot(b^{-1}\cdot a^{-1})=1$，因此 $(a\cdot b)^{-1}=b^{-1}\cdot a^{-1}\in R$，于是 $a\cdot b\in G$，故 $(G,\cdot)$ 是封闭的.

(2) 因为 G 是 R 的子集，所以 $\cdot$ 在 G 上是可结合的.

(3) 因为对于任意的 $a\in G$，必有 $a^{-1}\in R$，由于 a 与 a^{-1} 互为逆元素，所以 $(a^{-1})^{-1}=a\in R$，所以 $a^{-1}\in G$.

(4) $\cdot$ 运算的单位元素 $1\in G$.

所以由 (1) ~ (4) 可知 $(G,\cdot)$ 是一个群.

22. (7.4) 设 $(R,+,\cdot)$ 是环且对每个 $a\in R$，有 $a^2=a$（此种环称布尔环），试证：

(1) $(R,+,\cdot)$是可换环;

(2) 对所有 $a\in R$ 有 $a+a=0$.

证明:(1) 因为对于任意的 $a,b\in R$,都有 $a+b\in R,a^2=a$,所以

$$(a+b)\cdot(a+b)=a+b\Rightarrow a\cdot a+a\cdot b+b\cdot a+b\cdot b=a+b$$
$$\Rightarrow a+a\cdot b+b\cdot a+b=a+b,$$

所以 $a\cdot b+b\cdot a=0$,即 $a\cdot b=-b\cdot a$.

(2) 因为对任意的 $a\in R$,均有 $a+a\in R,a^2=a$,所以

$$(a+a)\cdot(a+a)=a+a\Rightarrow a\cdot a+a\cdot a+a\cdot a+a\cdot a=a+a$$
$$\Rightarrow a+a+a+a=a+a\Rightarrow a+a=0.$$

由(2)的结论可知 $b\cdot a=-b\cdot a$,再与(1)的结论 $a\cdot b=-b\cdot a$ 相比较,可知 $a\cdot b=b\cdot a$,所以 R 满足交换律,$(R,+,\cdot)$是可换环.

23. (7.5) 构造一个仅有3个元素的域.

解:$(\mathbf{Z}_3,+_3,\cdot_3)$是一个具有3个元素的域.其中 $+_3$ 为模3加法,$\cdot_3$ 为模3乘法,

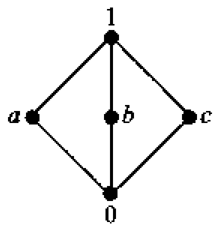
$$\mathbf{Z}_3=\{[0],[1],[2]\}.$$

24. (7.6)设$(F,+,\cdot)$是域,$(R,+,\cdot)$是它的子环,说明$(R,+,\cdot)$是否一定为一个整环.

解:此时$(R,+,\cdot)$不一定是整环,可举例来说明,例如:令$(F,+,\cdot)$为$(\mathbf{Q},+,\cdot)$,有理数上的普通加法和乘法,是一个域,令$(R,+,\cdot)$为$(\{2x|x\in\mathbf{Z}\},+,\cdot)$,偶整数集合上的普通加法和乘法,则此时$(R,+,\cdot)$为$(F,+,\cdot)$的子环,但它不含乘单位元素,不是整环.

25. (7.7)举例说明不是有补格都是分配格.

解:如图所示,是有补格,不是分配格.



26. (7.9)下列代数系统是否为环?若是环,是否为整环、域?

(1) $(A,+,\cap)$,其中 $A=\rho(\{a\})$,$+$,$\cap$分别为对称差及交运算;

(2) $(B,+,\times)$,其中 $B=\{a+bi|a,b\in\mathbf{Q}\}$,$+$,$\times$为算术加、乘;

(3) $(C,+,\cdot)$,其中 $C=\{(x,y)|x,y\in\mathbf{R}\}$,设 $\alpha_1=(a_1,b_1),\alpha_2=(a_2,b_2),\alpha_1,\alpha_2\in C,\alpha_1+\alpha_2=(a_1+a_2,b_1+b_2),\alpha_1\cdot\alpha_2=(a_1a_2,b_1b_2)$.

解:(1) 是环,是整环,是域;

(2) 是环,是整环,不是域;

(3) 是环,不是整环(有零因子),不是域.

27. (7.10)证明在布尔代数$(L,\wedge,\vee,\bar{\ })$中对任意元素 a,b,有 $a\leqslant b\Longleftrightarrow a\wedge\bar{b}=0$.

证明：因为$(L,\wedge,\vee,{}^{-})$是有补分配格，故

$$a\leqslant b\Longleftrightarrow a\wedge\bar b\leqslant b\wedge\bar b=0\Longleftrightarrow a\wedge\bar b=0.$$

28. (7.8)试证代数系统$(B,+,\circ,{}^{-},1,0)$如满足布尔代数10条性质中的交换律、分配律、同一律及互补律，则它必是布尔代数.

证明：此时只需利用所给的交换律、分配律、同一律和互补律去证明另外6条性质.

(1) 证等幂律：

$$a=a\circ(a+\bar a)=a\circ a+a\circ\bar a=a\circ a,$$
$$a=a+(a\circ\bar a)=(a+a)\circ(a+\bar a)=(a+a)\circ 1=a+a.$$

(2) 证吸收律：

$$a+(a\circ b)=(a\circ 1)+(a\circ b)=a\circ(1+b)=a,$$
$$a\circ(a+b)=(a+0)\circ(a+b)=a+(0\circ b)=a.$$

(3) 证结合律：

令$P=a+(b+c)$，$Q=(a+b)+c$，有

$$a\circ P=a\circ(a+(b+c))=a,$$
$$a\circ Q=a\circ((a+b)+c)=(a\circ(a+b))+(a\circ c)=a+(a\circ c)=a,$$

故$a\circ P=a\circ Q$. ①

$$\bar a\circ P=\bar a\circ(a+(b+c))=\bar a\circ(b+c)=(\bar a\circ b)+(\bar a\circ c),$$
$$\bar a\circ Q=\bar a\circ((a+b)+c)=(\bar a\circ(a+b))+(\bar a\circ c)=(\bar a\circ b)+(\bar a\circ c),$$

故$\bar a\circ P=\bar a\circ Q$. ②

由①②得$(a\circ P)+(\bar a\circ P)=(a\circ Q)+(\bar a\circ Q)$，即有

$$(a+\bar a)\circ P=(a+\bar a)\circ Q,P=Q,$$

从而证得$a+(b+c)=(a+b)+c$.

又由对偶性可知$a\circ(b\circ c)=(a\circ b)\circ c$.

(4) 证零一律：

$$a+1=a+(a+\bar a)=a+a=1,$$
$$a\circ 0=a\circ(a\circ\bar a)=a\circ\bar a=0.$$

(5) 证双补律：

$$a=a+(\bar a\circ\bar{\bar a})=(a+\bar a)\circ(a+\bar{\bar a})=1\circ(a+\bar{\bar a})=a+\bar{\bar a},$$

由等幂律可知$a=\bar{\bar a}$.

(6) 证德·摩根定律：ⓐ $\overline{a+b}=\bar a\circ\bar b$；　ⓑ $\overline{a\circ b}=\bar a+\bar b$.

ⓐ：因为布尔代数是有补分配格，任一元素a与其补元$\bar a$之间有：$a+\bar a=1$，$a\circ\bar a=0$. 利用分配律

$$(a+b)\circ(\bar a\circ\bar b)=(a\circ\bar a\circ\bar b)+(b\circ\bar b\circ\bar a)$$
$$=0+(b\circ\bar b\circ\bar a)=0+0=0,$$

$$(a+b)+(a\circ\bar{b})=(a+b+a)\circ(a+b+\bar{b})$$
$$=1\circ 1=1,$$

$(a+b)$和$(\bar{a}\circ b)$互为补元,$(a+b)$又是$\overline{a+b}$的补元,故ⓐ成立;根据对偶原理,ⓑ也成立.

29. (3P-1)设集合 $A=\{1,2,3,\cdots,10\}$,在集合 A 上定义的下列运算是否构成代数系统,请说明之.

(1) $a,b\in A, a*b=\mathrm{lcm}(a,b)$(最小公倍数);

(2) $a,b\in A, a*b=\gcd(a,b)$(最大公约数);

(3) $a,b\in A, a*b=\max(a,b)$;

(4) $a,b\in A, a*b=\min(a,b)$.

解:(1) 不能构成代数系统,不满足封闭性,如 $\mathrm{lcm}(5,6)=30$;

(2) 可以构成代数系统,满足封闭性;

(3) 可以构成代数系统,满足封闭性;

(4) 可以构成代数系统,满足封闭性.

30. (3P-2)在自然数集 **N** 上定义的二元运算,满足结合律的是哪几个?

(1) $a\cdot b=a-b$; (2) $a\cdot b=a+2b$;

(3) $a\cdot b=\max(a,b)$; (4) $a\cdot b=|a-b|$.

解:(2)和(3)满足结合律.

31. (3P-3)下列代数系统$(G,*)$中,其中 $*$ 是普通加法运算,试说明哪几个不是群.

(1) G 为整数集合; (2) G 为偶数集合;

(3) G 为有理数集合; (4) G 为自然数集合;

解:(4)不是群,它没有逆元素.

32. (3P-4)设集合 $A=\{a,b,c\}$,代数系统 $G=(\{\varnothing,A\},\cup)$ 和 $H=(\{\{a,b\},A\},\cup)$ 同构的映射是下面哪几个?

(1) $f:G\to H,\ f(\varnothing)=\{a,b\},\ f(A)=A$;

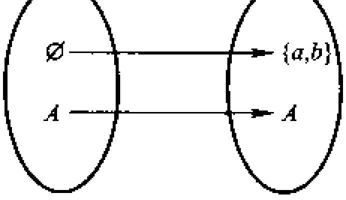
(2) $f:G\to H,\ f(\{a,b\})=\varnothing,\ f(A)=A$;

(3) $f:G\to H,\ f(\varnothing)=A,\ f(A)=\{a,b\}$;

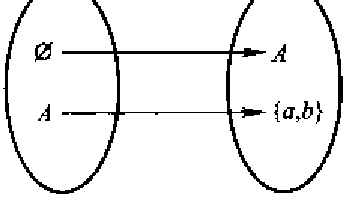
(4) $f:G\to H,\ f(A)=\varnothing,\ f(\{a,b\})=A$.

解:(1)和(3)是同构映射,可用图示指出它们的对应关系.

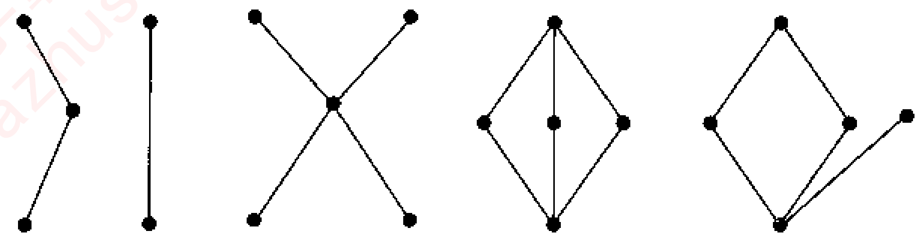
(1)



(3)



33. (3P-5)下图表示的偏序集中是格的为哪几个?



（第 33 题）

解：上图中(c)是格.

34. (3P－8)在代数系统(**N**，+)中，其单位元是________.

解：单位元是 0.

35. (3P－9)设 A 是非空集合，集合代数$(\rho(A),\cup,\cap)$中，$\rho(A)$对运算$\cup$的单位元是________，$\rho(A)$对运算$\cap$的单位元是________.

解：$\cup$运算的单位元是$\varnothing$，$\cap$运算的单位元是 A.

36. (3P－10)设 G 是由 6 个元素构成的循环群，a 是 G 的一个生成元素，则 G 有________个子群，G 的生成元是________.

解：4 个子群，a.

37. (3P－11)在非空集合 L 上定义二元运算$\circ$和$\cdot$，如果________是交换群，$(L,\cdot)$是________，而且________满足分配律，则 L 对二元运算$\circ$和$\cdot$构成环.

解：$(L,\circ)$，半群，$\cdot$对$\circ$.

38. (3P－12)设 L 是一个集合，$\circ$和$\cdot$是 L 上两个二元运算，如果这两个二元运算满足________律、________律和________律，则$(L,\cdot,\circ)$是格.

解：结合、交换、吸收.

39. (3P－13)在布尔代数中，有 $a\vee(\bar{a}\wedge b)=a\vee b$ 成立，则该式的对偶式________也一定成立.

解：$a\wedge(\bar{a}\vee b)=a\wedge b$.

40. (3P－14)通常数的加法运算可看做正整数 Z_+ 上的二元运算，下列集合是 Z_+ 的子集，加法运算在这些子集上封闭吗？为什么？

(1) $S_1=\{n\mid n$ 是 15 的因子$\}$；　(2) $S_2=\{n\mid n$ 是 15 的倍数$\}$.

解：(1) 不是封闭的，因为集合中 3 和 5 均是 15 的因子，而 $3+5=8$，8 不是 15 的因子，故 8 不在集合中.

(2) 是封闭的，因为 S_2 中的任意两个元素做加法所得结果还是 15 的倍数，即还是属于 S_2 的元素.

41. (3P－15)通常数的乘法运算是否可看做下列集合上的二元运算，说明理由.

(1) $A=\{1,2\}$; (2) $B=\{x|x$ 是素数$\}$;

(3) $C=\{x|x$ 是偶数$\}$; (4) $D=\{2^n|n\in\mathbf{N}\}$.

解:(1) A 中元素 $2\times2=4$,4 不属于 A,故此时不是封闭的二元运算.

(2) B 中元素均为素数,而素数做乘法运算后结果不是素数,故此时不是封闭的二元运算.

(3) C 中元素做乘法后仍为偶数,故此时是封闭的二元运算.

(4) D 中元素做乘法运算:$2^n\times2^m=2^{n+m}$,$n+m\in\mathbf{N}$,$2^{n+m}\in D$,故此时是封闭的二元运算.

42. (3P-16)设 $\mathbf{R}$ 是实数集,定义函数 f_1,f_2,f_3,f_4 如下:$x,y\in\mathbf{R}$,有

$$f_1((x,y))=x+y,\qquad f_2((x,y))=x-y,$$

$$f_3((x,y))=xy,\qquad f_4((x,y))=\max(x,y).$$

试问:

(1) 这4个函数是 $\mathbf{R}$ 上的二元运算的有多少个?

(2) 可交换的二元运算有多少个?

(3) 可结合的二元运算有多少个?

(4) 有单位元的二元运算有多少个?

解:(1) 4个;(2) 3个;(3) 3个;(4) 2个.

43. (3P-17)实数集 $\mathbf{R}$ 上定义二元运算:$r_1,r_2\in\mathbf{R}$,$r_1*r_2=r_1+r_2-r_1r_2$,是否有单位元和幂等元?若有单位元的话,哪些元素有逆元?

解:单位元为0;幂等元为0和1.

$$a*a^{-1}=a+a^{-1}-a\times a^{-1}=0,$$

$$a^{-1}*a=a^{-1}+a-a^{-1}\times a=0,$$

所以 $a^{-1}=\dfrac{a}{a-1}$,$a\neq1$ 时有逆元,即 $\mathbf{R}-\{1\}$ 的元素有逆元.

44. (3P-18)设代数系统$(A,\circ,*,\Delta)$,其中 $A=\{1,2,5,10\}$,对 $x,y\in A$,有 $x\circ y=x$ 与 y 的最大公约数,$x*y=x$ 与 y 的最小公倍数,$\Delta x=\dfrac{10}{x}$,试给出运算 $\circ$,$*$ 和 Δ 的运算表.

解:

$\circ$	1	2	5	10
1	1	1	1	1
2	1	2	1	2
5	1	1	5	5
10	1	2	5	10

$*$	1	2	5	10
1	1	2	5	10
2	2	2	10	10
5	5	10	5	10
10	10	10	10	10

Δ	
1	10
2	5
5	2
10	1

45. (3P-19)设集合 $A=\{1,2,3\}$,那么$(\rho(A),\oplus)$是群,其中 $\oplus$ 是对称差运算.求 $S,T\in\rho(A)$,使得 $\{1,2\}\oplus S=\{1,3\}$,$T\oplus\{1\}=\{2\}$.

解:$\rho(A)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},A\}$,

S 和 T 取自上述 $\rho(A)$ 中的某个元素.

$(\{1,2\}\cup\{2,3\})-(\{1,2\}\cap\{2,3\})=\{1,3\}$, $S=\{2,3\}$,

$(\{1,2\}\cup\{1\})-(\{1,2\}\cap\{1\})=\{2\}$, $T=\{1,2\}$.

46. (3P－20)设 $M=\{1,2,3\}$，σ 与 τ 是 M 的置换：$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$，$\tau=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$.

求 σ^{-1}，$\sigma\tau$，$\tau\sigma$，τ^{-1}.

解：$\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$,

$$\sigma\tau=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},$$

$$\tau\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},$$

$$\tau^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}.$$

47. (3P－21)对于下面给定的群 G_1 和 G_2，函数 $f:G_1\to G_2$，判断 f 是不是群 G_1 到 G_2 的同态，如果是，说明是单同态、满同态还是同构.

$G_1=(\mathbf{R}_+,\cdot)$，$G_2=(\mathbf{R},+)$，其中 $+$，$\cdot$ 是数的加法和乘法，$f:\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}$，$f(x)=\ln x$.

解：G_1 和 G_2 如果同态，要满足同态公式 $f(x\cdot y)=f(x)+f(y)$.

此处有 $\ln(x\cdot y)=\ln x+\ln y$，符合同态，且是同构的.

48. (3P－22)试判断 $(\mathbf{Z},\leqslant)$ 是否为格，其中 $\leqslant$ 是数的小于或等于关系.

解：此时 $(\mathbf{Z},\leqslant)$ 的结构是全链型的，是格.

49. (3P－23)$(B,\cdot,+,\bar{\ },0,1)$ 是布尔代数，$a,b,c\in B$，试化简下式

$$a\cdot b\cdot c+a\cdot b\cdot\bar{c}+b\cdot c+\bar{a}\cdot b\cdot c+\bar{a}\cdot b\cdot\bar{c}.$$

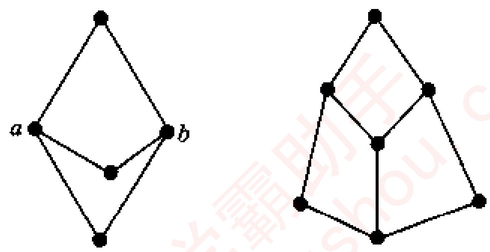
解：$a\cdot b\cdot c+a\cdot b\cdot\bar{c}+b\cdot c+\bar{a}\cdot b\cdot c+\bar{a}\cdot b\cdot\bar{c}$

$=a\cdot b\cdot(c+\bar{c})+b\cdot c+\bar{a}\cdot b\cdot(c+\bar{c})=a\cdot b+b\cdot c+\bar{a}\cdot b$

$=b\cdot(a+\bar{a}+c)=b\cdot(1+c)=b.$

50. (3P－24)右图给定的偏序集是格吗？为什么？

解：图(a)不是格，因为其中 a,b 两元素不存在最大下界；图(b)是格，因为其中任意两个元素均有最小上界和最大下界.



(a)　(b)

(第 50 题)

51. (3P－25)化简布尔代数式 $\overline{a\cdot b}+\overline{a+b}$.

解：$\overline{a\cdot b}+\overline{a+b}=(\bar{a}+\bar{b})+\bar{a}\cdot\bar{b}$

$=((\bar{a}+\bar{b})+\bar{a})\cdot((\bar{a}+\bar{b})+\bar{b})$

$=(\bar{a}+\bar{b})\cdot(\bar{a}+\bar{b})=\bar{a}+\bar{b}.$

52. (3P-27)设 $S=\{a,b\}$,定义二元运算 $*$ 为 $a*a=b*a=a,a*b=b*b=b$,证明 $(S,*)$ 是半群.

解:由条件可知满足封闭性,且满足结合律.

$(a*b)*a=b*a=a$, $\quad a*(b*a)=a*a=a$;

$(b*a)*a=a*a=a$, $\quad b*(a*a)=b*a=a$;

$(a*b)*b=b*b=b$, $\quad a*(b*b)=a*b=b$;

$(b*a)*b=a*b=b$, $\quad b*(a*b)=b*b=b$;

……

故是半群.

53. (3P-28)设 B 是非空集合,试验证 $(\rho(B),\oplus)$ 是群,$\rho(B)$ 是 B 的幂集,$\oplus$ 是对称差运算.

解:此时 $\oplus$ 运算满足封闭性,因为任取 $A\in\rho(B)$ 有 $A\oplus\varnothing=\varnothing\oplus A=A$,所以存在单位元素 $\varnothing$,$\oplus$ 又满足结合律,因为 $A\oplus A=\varnothing$,所以 A 的逆元素是 A,由上可知,满足群的条件,故 $(\rho(B),\oplus)$ 是群.

54. (3P-30)设 $G=\{1,-1,\mathrm{i},-\mathrm{i}\}$,其中 i 是虚数单位,证明 $(G,\cdot)$ 是循环群.

解:本代数系统满足封闭性,结合律,单位元素是 1,1 的逆元素是 1,-1 的逆元素是 -1,i 的逆元素是 $-\mathrm{i}$. 故 $(G,\cdot)$ 是群. 又有 $\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}=-1,\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}=-\mathrm{i},\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}=1,\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}=\mathrm{i}$,故 i 是生成元素,综上所述,$(G,\cdot)$ 是循环群.

55. (3P-31)证明 $(\mathbf{Z},\oplus,\circ)$ 是环,其中 $\mathbf{Z}$ 是整数集,运算 $\oplus,\circ$ 定义如下:

$$a\oplus b=a+b-1,a\circ b=a+b-ab.$$

证明:此时 $\oplus$ 和 $\circ$ 运算均是封闭的. 任取 $a,b,c\in\mathbf{Z}$,

(1) $(a\oplus b)\oplus c=(a+b-1)\oplus c=(a+b-1)+c-1=a+b+c-2$,

$a\oplus(b\oplus c)=a\oplus(b+c-1)=a+(b+c-1)-1=a+b+c-2$.

(关于 $\oplus$ 运算的结合律成立.)

(2) $a\oplus b=a+b-1=b+a-1=b\oplus a$.

(关于 $\oplus$ 运算的交换律成立.)

(3) $a\oplus 1=a+1-1=a$,

$1\oplus a=1+a-1=a$.

(1 为 $\oplus$ 运算的单位元素.)

(4) $a\oplus(2-a)=a+2-a-1=1$,

$(2-a)\oplus a=2-a+a-1=1$.

($2-a$ 是 a 关于 $\oplus$ 运算的逆元素.)

(5) $(a\circ b)\circ c=(a+b-ab)\circ c=(a+b-ab)+c-(a+b-ab)c$

$=a+b+c-ab-ac-bc+abc$,

$a\circ(b\circ c)=a\circ(b+c-bc)=a+(b+c-bc)-a(b+c-bc)$

$=a+b+c-ab-ac-bc+abc$.

(关于$\circ$运算的结合律成立.)

(6) $a\circ(b\oplus c)=a\circ(b+c-1)=a+(b+c-1)-a(b+c-1)$
$=a+b+c-ab-ac+a-1=2a+b+c-ab-ac-1$,

$(a\circ b)\oplus(a\circ c)=(a+b-ab)\oplus(a+c-ac)$
$=(a+b-ab)+(a+c-ac)-1$
$=2a+b+c-ab-ac-1$.

同理可以验证$(b\oplus c)\circ a=(b\circ a)\oplus(c\circ a)$.

($\circ$运算关于$\oplus$运算满足分配律.)

综上所述,得出$(\mathbf{Z},\oplus,\circ)$是环.

56. (3P-32)证明在布尔代数$(B,\vee,\wedge,{}^{-},0,1)$中,对$a,b,c\in B$,有

$$(a\vee b)\wedge(c\vee\bar{b})=(a\wedge\bar{b})\vee(c\wedge b).$$

证明:$(a\vee b)\wedge(c\vee\bar{b})=((a\vee b)\wedge c)\vee((a\vee b)\wedge\bar{b})$
$=(a\wedge c)\vee(b\wedge c)\vee(a\wedge\bar{b})\vee(b\wedge\bar{b})$
$=(a\wedge c)\wedge(b\vee\bar{b})\vee(b\wedge c)\vee(a\wedge\bar{b})$
$=(a\wedge b\wedge c)\vee(a\wedge\bar{b}\wedge c)\vee(b\wedge c)\vee(a\wedge\bar{b})$
$=((b\wedge c)\wedge(a\vee 1))\vee((a\wedge\bar{b})\wedge(c\vee 1))$
$=(b\wedge c)\vee(a\wedge\bar{b})$
$=(a\wedge\bar{b})\vee(c\wedge b)$.

注:本题关键在对$(a\wedge c)$配以$(b\vee\bar{b})$的$\wedge$运算.

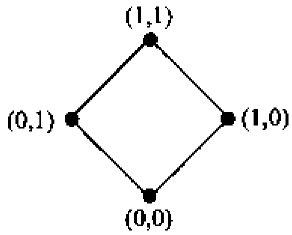
57. (3P-33)设$L_1=\{0,1\}$,$L_2=\{(a_1,a_2)\mid a_1,a_2\in L_1\}$,证明$(L_2,\vee,\wedge)$是格,其中二元运算$\vee$,$\wedge$定义为对$(a_1,a_2),(b_1,b_2)\in L_2$,有

$$(a_1,a_2)\wedge(b_1,b_2)=(\min(a_1,b_1),\min(a_2,b_2)),$$
$$(a_1,a_2)\vee(b_1,b_2)=(\max(a_1,b_1),\max(a_2,b_2)).$$

证明:根据题意,$L_2=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$,由运算$\vee$和$\wedge$的定义,作如下计算:

$(0,0)\wedge(0,1)=(0,0)$,$(0,0)\vee(0,1)=(0,1)$;
$(0,0)\wedge(1,0)=(0,0)$,$(0,0)\vee(1,0)=(1,0)$;
$(0,0)\wedge(1,1)=(0,0)$,$(0,0)\vee(1,1)=(1,1)$;
$(0,0)\wedge(0,0)=(0,0)$,$(0,0)\vee(0,0)=(0,0)$;
$(0,1)\wedge(1,0)=(0,0)$,$(0,1)\vee(1,0)=(1,1)$;
$(0,1)\wedge(1,1)=(0,1)$,$(0,1)\vee(1,1)=(1,1)$;
$(0,1)\wedge(0,1)=(0,1)$,$(0,1)\vee(0,1)=(0,1)$;
$(1,0)\wedge(1,1)=(1,0)$,$(1,0)\vee(1,1)=(1,1)$;
$(1,0)\wedge(1,0)=(1,0)$,$(1,0)\vee(1,0)=(1,0)$;
$(1,1)\wedge(1,1)=(1,1)$,$(1,1)\vee(1,1)=(1,1)$.

相应哈斯图为：



从上图可以看出$(L_2, \vee, \wedge)$是一个偏序，其中任意两个元素(a_1, a_2)和(b_1, b_2)有最小上界和最大下界，故$(L_2, \vee, \wedge)$是格.

58. (3P-34)证明在格中如果 $a \leqslant b \leqslant c$,则 $a \vee b = b \wedge c$,$(a \wedge b) \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

证明:由 $a \leqslant b$ 得 $a \vee b = b$,又由 $b \leqslant c$ 得 $b \wedge c = b$,所以有 $a \vee b = b \wedge c$.

因为$(a \wedge b) \vee (b \wedge c) = (a \wedge b) \vee b = b$,而由 $a \vee b = b$ 和 $a \vee c = c$,可得

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) = b \wedge c = b,$$

所以有$(a \wedge b) \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

59. (3P-35)证明一个格$(L, \wedge, \vee)$是分配格当且仅当 $a,b,c \in L$,有

$$(a \vee b) \wedge c \leqslant a \vee (b \wedge c).$$

证明:(1) 设$(L, \wedge, \vee)$是分配格,由 $a \wedge c \leqslant a$ 和$(b \wedge c) \leqslant (b \wedge c)$,可得

$$(a \wedge c) \vee (b \wedge c) \leqslant a \vee (b \wedge c),$$

所以有$(a \vee b) \wedge c \leqslant a \vee (b \wedge c)$.

(2) 反之,若对任意的 $a,b,c \in L$,有$(a \vee b) \wedge c \leqslant a \vee (b \wedge c)$,则可得

$$\begin{aligned}(a \vee b) \wedge c &= ((b \vee a) \wedge c) \wedge c \leqslant (b \vee (a \wedge c)) \wedge c \\ &= ((a \wedge c) \vee b) \wedge c \leqslant (a \wedge c) \vee (b \wedge c).\end{aligned}$$

又由 $a \wedge c \leqslant (a \vee b) \wedge c$ 和 $b \wedge c \leqslant (a \vee b) \wedge c$,可得

$$(a \wedge c) \vee (b \wedge c) \leqslant (a \vee b) \wedge c.$$

于是就有$(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$.

类似可证或由对偶性得$(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$也成立.

故$(L, \wedge, \vee)$是分配格.

60. (3P-36)证明布尔代数$(L, \wedge, \vee, \bar{\ }, 0, 1)$中对 $a,b,c \in L$,有

$$(a \wedge b) \vee \overline{a \vee b} = (\bar{a} \vee b) \wedge (a \vee \bar{b}).$$

证明:$$\begin{aligned}(a \wedge b) \vee \overline{(a \vee b)} &= (a \vee \overline{a \vee b}) \wedge (b \vee \overline{a \vee b}) \\ &= (a \vee \bar{a}) \wedge (a \vee \bar{b}) \wedge (b \vee \bar{a}) \wedge (b \vee \bar{b}) \\ &= (a \vee \bar{b}) \wedge (\bar{a} \vee b) = (\bar{a} \vee b) \wedge (a \vee \bar{b}).\end{aligned}$$

5.6 另增配套习题及解答

1. 设在整数集 **Z** 上的 $*$ 运算定义如下:对于任意 $a,b \in \mathbf{Z}$,$a * b = a + b - 10$,问$(\mathbf{Z}, *)$是否为群?

解:对任意的 $a,b,c\in \mathbf{Z}$,

(1) $a*b=a+b-10\in \mathbf{Z}$,满足封闭性.

(2) 因为 $(a*b)*c=(a+b-10)*c=a+b-10+c-10=a+b+c-20$,

$$a*(b*c)=a*(b+c-10)=a+b+c-10-10=a+b+c-20,$$

所以 $(a*b)*c=a*(b*c)$,满足结合律.

(3) 因为对于任意的 $a\in \mathbf{Z}$, $a*10=a+10-10=a$, $10*a=10+a-10=a$,所以有单位元素 10.

(4) 对任意 $a\in \mathbf{Z}$,若 $a*a^{-1}=a+a^{-1}-10=10$, $a^{-1}*a=a^{-1}+a-10=10$,有 $a^{-1}=20-a$,因此每一元素 a 均有逆元素 a^{-1}存在.

由(1)~(4)可得,$(\mathbf{Z},*)$是一个群.

2. 下面一张表,其中最左边的表示各个集合,顶上一行表示各种运算,问它们是否为封闭的? 填上“是”或“否”.

集合 \ 运算	$+$	$\times$	$-$	$\lvert x-y\rvert$	$\max(x,y)$	$\min(x,y)$
$\mathbf{Z}$						
$\mathbf{N}$						
$\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 10\}$						
$\{x\mid -10\leqslant x\leqslant 0\}$						
$\{2x\mid x\in \mathbf{Z}\}$						

解:

集合 \ 运算	$+$	$\times$	$-$	$\lvert x-y\rvert$	$\max(x,y)$	$\min(x,y)$
$\mathbf{Z}$	是	是	是	是	是	是
$\mathbf{N}$	是	是	否	是	是	是
$\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 10\}$	否	否	否	是	是	是
$\{x\mid -10\leqslant x\leqslant 0\}$	否	否	否	否	是	是
$\{2x\mid x\in \mathbf{Z}\}$	是	是	是	是	是	是

3. 设 $\mathbf{N}_k$ 是开始 k 个自然数(包括零)之集合,即 $\mathbf{N}_k=\{0,1,\cdots,k-1\}$, $\mathbf{N}_k$ 上的运算 f_k 定义如下:

$$xf_ky=\begin{cases}x+y, & x+y<k\\ x+y-k, & x+y\geqslant k\end{cases}$$

问:f_k 是否满足结合律? 单位元素是什么? 每个元素的逆元素是什么?

解:对任意的 $x,y,z\in \mathbf{N}_k$,因为

$$(xf_k y)f_k z = xf_k(yf_k z) = \begin{cases} x+y+z, & x+y+z<k \\ x+y+z-k, & k\leqslant x+y+z<2k \\ x+y+z-2k, & x+y+z\geqslant 2k \end{cases}$$

所以 f_k 满足结合律.

因为 $0\in \mathbf{N}_k$ 且对任意 $x\in\mathbf{N}_k$,有 $xf_k0=0f_kx=x+0=x$,所以 0 是单位元素.

又对任意 $x\in\mathbf{N}_k-\{0\}$,因为 $xf_k(k-x)=(k-x)f_kx=(x+(k-x))-k=0$,所以非零的 x 的逆元素是 $k-x$,0 的逆元素是 0.

4. 设 $\mathbf{R}$ 是实数集合,证明 $\mathbf{R}$ 的可以写成 $f(x)=ax+b$(a,b 是实数,$a\neq 0$)形式的所有变换构成一个群(称为变换群),它是否为阿贝尔群?

证明:令 $G=\{f\mid \forall x\in\mathbf{R},f(x)=ax+b,a\neq 0,a,b\in\mathbf{R}\}$.

(1) 对任意 $x\in\mathbf{R}$,$E_{\mathbf{R}}(x)=x=1\cdot x+0$,故 $E_{\mathbf{R}}\in G$,从而 $G\neq\varnothing$.

(2) 对任意的 $f,g\in G$,则存在 $a,b,c,d\in\mathbf{R}$,$a\neq 0$,$c\neq 0$,使 $f(x)=ax+b$,$g(x)=cx+d$,于是 $f\circ g(x)=g(f(x))=g(ax+b)=c(ax+b)+d=acx+(bc+d)$,由于 $ac,bc+d\in\mathbf{R}$ 且 $ac\neq 0$,故 $f\circ g\in G$,知复合运算 $\circ$ 是 G 上封闭的二元运算.

(3) $\circ$ 满足结合律.

(4) $(G,\circ)$ 的单位元素是 $E_{\mathbf{R}}$.

(5) 对任意的 $f\in G$,任意的 $x\in\mathbf{R}$,有 $f(x)=ax+b$,其中 $a,b\in\mathbf{R}$,$a\neq 0$,由于 $g(x)=\frac{1}{a}x+\frac{-b}{a}$所定义的 $g\in G$,具有

$$f\circ g(x)=g(f(x))=\frac{1}{a}(ax+b)+\frac{-b}{a}=x=E_{\mathbf{R}}(x),$$

$$g\circ f(x)=f(g(x))=a\cdot\left(\frac{1}{a}x+\frac{-b}{a}\right)+b=x=E_{\mathbf{R}}(x),$$

故 $f\circ g=g\circ f=E_{\mathbf{R}}$,所以 g 是 f 的逆元素.

由(1)~(5)知$(G,\circ)$是一个群.

设 $f_1,f_2\in G$,对任意的 $x\in\mathbf{R}$,$f_1(x)=2x+5$,$f_2(x)=3x+7$,则

$$f_1\circ f_2(x)=f_2(2x+5)=3\times(2x+5)+7=6x+22,$$

$$f_2\circ f_1(x)=f_1(3x+7)=2\times(3x+7)+5=6x+19,$$

可见 $f_1\circ f_2\neq f_2\circ f_1$,因此$(G,\circ)$不是阿贝尔群.

5. 证明一个变换群的单位元素一定是恒等映射.

证明:设$(G,\circ)$是某个集合 A 的一些变换构成的变换群,设 ε 是$(G,\circ)$的单位元素,对任意的 $f\in G$,若 g 是 f 的逆元,那么 $f\circ g=g\circ f=\varepsilon$,于是对任意的 $x\in A$,$\varepsilon(x)=g\circ f(x)=f\circ g(x)=x$,然而当 E_A 为 A 的恒等映射时,$E_A(x)=x$,由此可见 $\varepsilon=E_A$,所以$(G,\circ)$的单位元素必是恒等映射.

6. 设 H 是 G 的子群,具有性质:H 的任意两个左陪集的乘积仍是一个左陪集,则 H 是 G 的一

个正规子群.

证明:设有子群 H 的任意两个左陪集 aH,bH,其乘积为 $aH*bH=(a*b)H$,对 $h_1,h_2,h_3\in H$,有 $a*h_1=n_1\in aH,b*h_2=n_2\in bH,n_1*n_2=(a*b)*h_3\in(a*b)H$,

$h_3=(a*b)^{-1}*n_1*n_2=b^{-1}*a^{-1}*a*h_1*b*h_2=b^{-1}*h_1*b*h_2\in H$,

得 $b^{-1}*h_1*b\in H$.(由群的性质:对每个 $a,b\in H$,存在一个唯一的元素 $x\in H$,使得 $a*x=b$.)

同理对 $bH*aH=(b*a)H$,有 $h_4\in H,n_2*n_1=(b*a)*h_4\in(b*a)H$,

$h_4=(b*a)^{-1}*n_2*n_1=a^{-1}*b^{-1}*b*h_2*a*h_1=a^{-1}*h_2*a*h_1\in H$,

得 $a^{-1}*h_2*a\in H$.

故 H 是正规子群.

7. 设 $(H,*)$ 是 $(G,*)$ 的子群,证明:$H=Ha$ 当且仅当 $a\in H$.

证明:"$\Rightarrow$"设 $a\in G$,因为 $\{h\mid h\in H\}=H=Ha=\{h*a\mid h\in H\}$,故有 $h_1\in H$ 使 $h_1=h*a$,于是 $a=h^{-1}*h_1$,因为 $(H,*)$ 是 $(G,*)$ 的子群,所以 $h^{-1}*h_1\in H$,即 $a\in H$.

"$\Leftarrow$"因为 $a\in H$,所以对任意的 $x\in H$,则 $a^{-1}\in H$,因而 $x*a^{-1}\in H$,于是存在 $h_1\in H$,使 $h_1=x*a^{-1}$,即 $x=h_1*a\in Ha$,所以 $H\subseteq Ha$;另外,对任意的 $y\in Ha$,则存在 $h_2\in H$,使 $y=h_2*a$,因为 $a\in H$,所以 $y\in H$,故 $Ha\subseteq H$,从而有 $H=Ha$.

8. 假定 H 和 N 是 G 的子群,且 N 是 G 的正规子群,证明 $H\cap N$ 是 H 的正规子群.

证明:$H\cap N$ 是 H 的非空子集,N 是 G 的正规子群.

对任意的 $x,y\in H\cap N$,有 $x,y\in H$ 且 $x,y\in N$,从而有 $x*y\in H$ 且 $x*y\in N$,于是 $x*y\in H\cap N$,又有对任意的 $x\in H\cap N$,有 $x\in H$ 且 $x\in N$,从而有 $x^{-1}\in H$ 且 $x^{-1}\in N$,于是 $x^{-1}\in H\cap N$,因此,$H\cap N$ 是 H 的子群.

另有对任意的 $x\in H\cap N,h\in H$,有 $h^{-1}*x*h\in H$ 且 $h^{-1}*x*h\in N$,于是 $h^{-1}*x*h\in H\cap N$,所以 $H\cap N$ 是 H 的正规子群.

9. 给定环 $(\{5x\mid x\in\mathbf{Z}\},+,\cdot)$,其中 $\mathbf{Z}$ 是整数集,$+$ 和 $\cdot$ 是普通的加法和乘法,它________整环,因为____________.

解:不是,没有乘单位元素.

10. 代数系统 $(F,+,\cdot)$ 定义如下:

+	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

·	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	d
c	a	c	d	b
d	a	d	b	c

(1) 证明 $(F,+,\cdot)$ 是一个域;

(2) 在 $(F,+,\cdot)$ 中解下面方程组

$$\begin{cases}x+c\cdot y=a\\ c\cdot x+y=b\end{cases}$$

证明:(1) 由运算表知$(F,+)$对运算+是可结合和可交换的,a 是+运算的单位元素,任一元素均有逆元素,$-a=a$, $-b=b$, $-c=c$, $-d=d$,故$(F,+)$是阿贝尔群.除了零元素 a 以外,$(F-\{a\},\cdot)$也是一个阿贝尔群,且·对+运算满足分配律,乘单位元素为 b,所以$(F,+,\cdot)$是域.

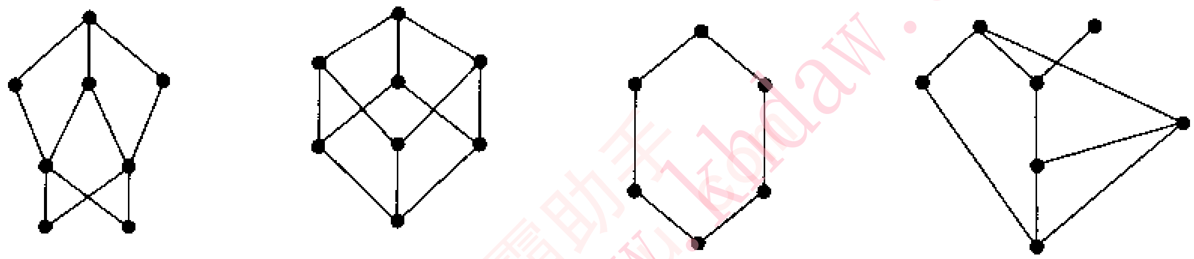
(2) 对方程组$\begin{cases}x+c\cdot y=a & ①\\ c\cdot x+y=b & ②\end{cases}$

②·$(-c)$+①得 $x-c^2\cdot x=a-b\cdot c$, $(b-d)\cdot x=a-c$, $c\cdot x=c$, $x=b$.

将 $x=b$ 代入②得 $y=b-c\cdot b=b-c=d$.

故方程组的解为$\begin{cases}x=b\\ y=d\end{cases}$

11. 下图是四个偏序集的图形,这些偏序集能构成格吗?



(a)　(b)　(c)　(d)

(第11题)

解:图(a)不是格;图(b)是格;图(c)是格;图(d)不是格.

12. 证明:如果$(L,\vee,\wedge)$是一个有限格,那么 L 一定既有最大元素,又有最小元素.

证明:令 $L=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,则 $a_1\vee a_2\vee\cdots\vee a_n$ 是 L 的上界,即最大元素.$a_1\wedge a_2\wedge\cdots\wedge a_n$ 是 L 的下界,即最小元素.

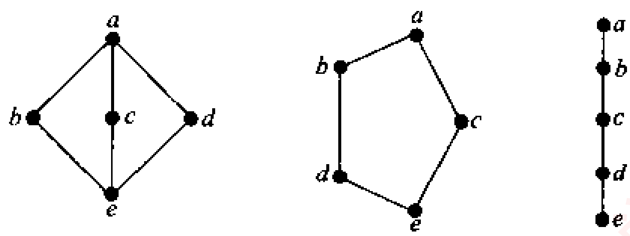
13. 在格$(\rho(A),\vee,\wedge)$中,$A=\{a,b,c,d,e,f,g,h,i\}$,计算 $\Pi_1\vee\Pi_2$, $\Pi_1\wedge\Pi_2$,其中

$$\Pi_1=\{\{a,d\},\{b,c\},\{e,g,i\},\{f\},\{h\}\},$$
$$\Pi_2=\{\{a,f\},\{b,c\},\{d\},\{e,h\},\{g,i\}\}.$$

解:$\Pi_1\vee\Pi_2=\Pi_1\cup\Pi_2=\{\{a,d\},\{b,c\},\{e,g,i\},\{f\},\{h\},\{a,f\},\{d\},\{e,h\},\{g,i\}\}$,

$\Pi_1\wedge\Pi_2=\Pi_1\cap\Pi_2=\{\{b,c\}\}$.

14. 下列次序图中哪些格是有补格?

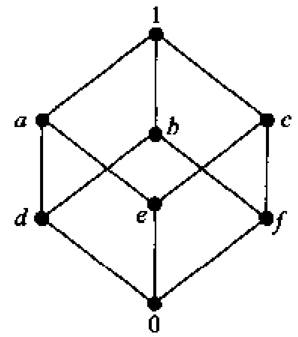


(a)　(b)　(c)

(第14题)

解:(a)是有补格,(b)是有补格,(c)不是有补格.

15. 右图表示一个有补格$(L,\vee,\wedge)$的次序图,决定L中每个元素的补元.



(第15题)

解:$\bar{1}=0,\bar{a}=f,\bar{b}=e,\bar{c}=d,$
$\bar{0}=1,\bar{f}=a,\bar{e}=b,\bar{d}=c.$

16. 下列运算中,哪些运算关于整数集不能构成半群(　　).

A. $a\circ b=\max(a,b)$

B. $a\circ b=b$

C. $a\circ b=2ab$

D. $a\circ b=|a-b|$

解:D.

17. 设$(H,\circ)$和$(K,\circ)$是$(G,\circ)$的子群,下面哪个代数系统仍是$(G,\circ)$的子群(　　).

A. $(HK,\circ)$　　B. $(H\cap K,\circ)$

C. $(H-K,\circ)$　　D. $(K-H,\circ)$

解:B.

18. 在代数系统中,整环和域的关系为(　　).

A. 整环一定是域　　B. 域不一定是整环

C. 域一定是整环　　D. 域一定不是整环

解:C.

19. 下面哪个偏序集构成有界格(　　).

A. $(\mathbf{N},\leqslant)$　$\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots\}$

B. $(\mathbf{Z},\geqslant)$　$\mathbf{Z}$为整数集合

C. $(\{2,3,4,6,12\},|)$　$|$表示整除关系

D. $(\rho(A),\subseteq)$　$A=\{a,b,c\}$

解:D.

20. 设$(\{a,b,c,d\},*)$是四阶群,e为单位元素,当四阶群含有________元素时,这个群称为循环群;阶相同的循环群是________.

解:四阶元素时;同构的.

21. 一个格,可以记为$(P,\wedge,\vee)$是一个偏序集,其中任意两个元素x,y,有________和________;即$x\vee y=$________,$x\wedge y=$________.

解:最小上界和最大下界;$x\vee y=\mathrm{lub}(x,y)$;$x\wedge y=\mathrm{glb}(x,y)$.

22. $f:G\to H$,$(G,\circ)$和$(H,*)$是群同态,e_G和e_H分别是单位元素,$x_1,x_2\in G,y_1,y_2\in H$,$f(x_1)=y_1,f(x_2)=y_2$,下面不成立的结论是(　　).

A. $f(y_1*y_2)=x_1\circ x_2$　　B. $f(e_G)=e_H$

C. $f(x_1^{-1})=y_1^{-1}$　　D. $f(x_1\circ x_2)=y_1*y_2$

解:A.

23. $\mathbf{Z}$ 是整数集合,$\mathbf{Z}_n=\{[0],[1],[2],\cdots,[n-1]\}$,$(G,*)$是一个循环群,下列结论成立的是(　　).

A. $(G,*)$与$(\mathbf{Z},+)$或$(\mathbf{Z}_n,+_n)$同构,二者必有一个成立($+_n$ 是模 n 的加法)

B. $(G,*)$为无限循环群时,不可能与$(\mathbf{Z},+)$同构

C. $(G,*)$为 n 阶循环群时,不可能与$(\mathbf{Z}_n,+_n)$同构

D. $(\mathbf{Z},+)$,$(\mathbf{Z}_n,+_n)$本身都不是循环群

解:A.

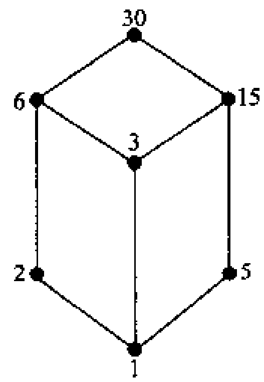
24. S 是所有$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$形式的 2×2 矩阵的集合,其中 a,b,c,d 是有理数,$*$ 是矩阵乘法,代数系统$(S,*)$中的单位元素是________;零元素是________.

解:$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

25. 设$(A,|)$为偏序关系,其中$|$为整除关系,即 $a|b$ 当且仅当 a 整除 b,

$$A=\{1,2,3,5,6,15,30\}.$$

试画出这个偏序关系的哈斯图,并判定是否为格.



解:如右图所示,因为其中任意两个元素都有最大下界和最小上界存在,所以是格.

26. $(G,*)$是群,下列性质不成立的是(　　).

A. 对任何 $a,b\in G$,存在唯一的 x 满足 $a*x=b$

B. 对任何 $a,b\in G$,存在唯一的 y 满足 $y*a=b$

C. A,B 中的 $x=y$

D. $c,a,b\in G$,若 $a*c=a*b$,则 $b=c$

解:C.

27. $(G,*)$是阿贝尔群,$a,b\in G$,a 的阶为 7,b 的阶为 5,则 $a*b$ 的阶为(　　).

A. 7　　B. 35　　C. 12　　D. 5

解:B.

28. $(F,+,\circ)$是域,下述条件可以不成立的是(　　).

A. $(F,+)$和$(F,\circ)$都有单位元素

B. $(F,+)$和$(F,\circ)$都有逆元素

C. $+$对$\circ$有分配律,$\circ$对$+$也有分配律

D. $(F,+)$和$(F,\circ)$都满足交换律

解:C.

29. 每个循环单元半群都是________交换的,可交换的半群________生成元素.

解:可,不一定有.

30. 若同构的群认为是相同的,那么3阶群有________个,4阶群有________个.

解:1,2.

31. 如果一个代数系统$(S,*)$有单位元素,那么在什么条件下,可以保证一个元素的左逆元素等于右逆元素,且一个元素的逆元素是唯一的.

解:在单位元素唯一的条件下,有

$$a*a_{\text{右}}^{-1}=a_{\text{左}}^{-1}*a=e\Rightarrow a*a_{\text{右}}^{-1}*a_{\text{右}}^{-1}=a_{\text{左}}^{-1}*a*a_{\text{右}}^{-1}$$
$$\Rightarrow e*a_{\text{右}}^{-1}=a_{\text{左}}^{-1}*e\Rightarrow a_{\text{右}}^{-1}=a_{\text{左}}^{-1}.$$

反证法:若有两个右逆元$a_{\text{右}}^{-1},a_{\text{右}'}^{-1}$,则

$$a*a_{\text{右}}^{-1}=a*a_{\text{右}'}^{-1}=e\Rightarrow a_{\text{左}}^{-1}*a*a_{\text{右}}^{-1}=a_{\text{左}}^{-1}*a*a_{\text{右}'}^{-1}$$
$$\Rightarrow e*a_{\text{右}}^{-1}=e*a_{\text{右}'}^{-1}\Rightarrow a_{\text{右}}^{-1}=a_{\text{右}'}^{-1}.$$

同理有$a_{\text{左}}^{-1}=a_{\text{左}'}^{-1}$,故结论成立.

32. $(G,*)$是群,$a\in G$,其阶为12,$b=(a^{-1})^8$,则b的阶为(　　).

A. 3　　B. 8　　C. 12　　D. 24

解:A.

33. $(G,*)$是有限群,下列结论错误的是(　　).

A. 每个元素的阶都是有限的

B. 阶大于2的元素数目是偶数

C. 阶大于2的元素数目是奇数

D. 若$|G|=2n$,则阶为2的元素数目是奇数

解:C.

34. 代数系统$(A,+,\circ)$是交换环,下述可以不满足的条件是(　　).

A. $(A,+)$和$(A,\circ)$都满足结合律

B. $(A,+)$和$(A,\circ)$都满足交换律

C. 乘$(\circ)$对加$(+)$满足分配律

D. 加$(+)$对乘$(\circ)$也满足分配律

解:D.

35. 若A是关于R的偏序集,下述结论可以不成立的是(　　).

A. R满足自反性

B. A中任意两个元素a,b都是可比较的,即有$(a,b)\in R$或$(b,a)\in R$

C. R满足传递性

D. R满足反对称性

解:B.

36. 代数系统$(\mathbf{Z},*)$,对$a,b\in\mathbf{Z}$,$a*b=a+b-ab$,因为对任何$a,b,c\in\mathbf{Z}$,有$(a*b)*c=$

$a+b-ab+c-(a+b-ab)c=a+b+c-ab-ac-bc+abc=a*(b*c)$,又因为存在________是________,所以$(\mathbf{Z},*)$是单元半群.

解:0,单位元素.

37. 代数系统$(\rho(A),\cup)$中单位元素为________;零元素为________.

解:$\varnothing$;A.

38. 已知$A=\{a,b,c\}$,代数系统$(A,*)$的运算表为

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	c	c

试讨论$(A,*)$的有关特征.

解:根据运算表有:

① 满足封闭性;② 满足结合律;③ 满足交换律;④ 不满足等幂律;⑤ 有单位元素a;⑥ a和b有逆元素,$a^{-1}=a,b^{-1}=b,c$无逆元素;⑦ 有零元素c.

39. 设$(H,*)$是$(G,*)$的子群,$a,b\in G$,下列结论成立的是( ).

A. $aH=bH$ B. $Ha=Hb$

C. $aH=bH$或者$(aH)\cap(bH)=\varnothing$ D. $(aH)\cap(bH)=\varnothing$

解:C.

40. 代数系统$(A,+,\circ)$是环,下述可以不满足的条件是( ).

A. $(A,+)$和$(A,\circ)$都有单位元素

B. $(A,+)$和$(A,\circ)$都满足结合律

C. $(A,+)$满足交换律

D. 乘$(\circ)$对加$(+)$满足分配律

解:A.

41. 群$(\mathbf{Z},+)$,$\mathbf{Z}$是整数集合,是一个循环群,其生成元是________和________.

解:1,-1.

42. $\mathbf{R}$和$\mathbf{R}_+$分别是实数集和正实数集,+,* 表示通常的加法和乘法,试证明$(\mathbf{R},+)$和$(\mathbf{R}_+,*)$同构.

证明:令$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}_+$,$f(x)=e^x$为双射.对任意$a,b\in\mathbf{R}$,$f(a)=e^a$,$f(b)=e^b$.

因为$f(a+b)=e^{a+b}=e^a*e^b=f(a)*f(b)$,所以$(\mathbf{R},+)\simeq(\mathbf{R}_+,*)$.

第六章

图　　论

（含教材中第八章图论原理；第九章常用图.）

6.1　主要内容

1. 图的基本内容 $\begin{cases}\text{图}\\\text{图的连通性}\\\text{图的矩阵表示}\end{cases}$

2. 几种特殊图 $\begin{cases}\text{权图}\\\text{两步图}\\\text{平面图}\\\text{树}\\\text{有向图}\end{cases}$

6.2　复习重点

图论用"结点"表示事物，而用"边"表示事物间的联系，并用"结点"与"边"所构成的图研究客观世界，为便于计算，建立了图的矩阵表示，这样可以将图论研究与计算相结合，从而使图论研究具有很大的实用性．由于图的形式很多，在实用中一般对若干种常用的图作研究，它们是树、平面图与两步图．

在图论学习中主要掌握如下几个方面：

1. 图论中的基本概念．
2. 图论中的基础理论．
3. 图的连通性．
4. 图的矩阵计算．
5. 几个常用的图．

6.3　基本概念及注意事项

1. 图论中的基本概念

(1) 图的概念

图由结点集 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 与边集 $E=\{l_1,l_2,\cdots,l_m\}$ 所组成，可记为 $G=\langle V,E\rangle$.

① 结点次数与孤立点：结点相邻边数称次数，记以 $\deg(v)$；次数为 0 的结点称孤立点.

② k 次正则图：图中每个结点次数均为 k.

③ 奇次结点与偶次结点：结点次数为奇数与偶数.

④ 次数性质：(n,m) 图有 $\sum_{i=1}^{n}\deg(v_i)=2m$.

⑤ (n,m) 图：具有 n 个结点 m 条边的图.

⑥ 子图：$G=\langle V,E\rangle$ 与 $G'=\langle V',E'\rangle$，若 $V'\subseteq V,E'\subseteq E$，则称 G' 是 G 的子图.

⑦ 真子图：$G=\langle V,E\rangle$ 与 $G'=\langle V',E'\rangle$，若 $V'\subseteq V,E'\subset E$，则称 G' 是 G 的真子图.

⑧ 生成子图：$G=\langle V,E\rangle$ 与 $G'=\langle V',E'\rangle$，若 $V'=V,E'\subseteq E$，则称 G' 是 G 的生成子图.

(2) 有向图与无向图

① 边为有向的图称为有向图；

② 边为无向的图称为无向图.

(3) 几种特殊的图

① 零图：无边的图.

② 平凡图：仅有一个结点的图.

③ 完全图：各结点间均有边相连的图.

④ 补图：$G=\langle V,E\rangle,G'=\langle V,E'\rangle$，如有 $\overline{G}=\langle V,E\cup E'\rangle$ 为完全图且 $E\cap E'=\varnothing$，则称 G 为 G' 的补图.

⑤ 简单图与多重图：包括多重边的图称为多重图，否则称为简单图.

⑥ 有权图：边带权的图.

⑦ 同构图：$G=\langle V,E\rangle,G'=\langle V',E'\rangle$，$V$ 与 V' 以及相应边的结点对有一一对应关系.

(4) 通路、回路

① 通路：图中 v_i 至 v_j 的通路是有边的序列：$(v_i,v_{i_1}),(v_{i_1},v_{i_2}),\cdots,(v_{i_{k-1}},v_{i_k})$，其中 $v_{i_k}=v_j$.

② 基本通路与简单通路：图各边全不同的通路叫简单通路，各点全不同的通路叫基本通路.

③ 环与回路：边的始点与终点相同称环，通路的起始点与终止点相同称回路.

④ 简单回路与基本回路：简单(基本)通路的起始点与终止点相同称简单(基本)回路.

(5) 图的连通性

① 图的可达性：图的结点 v_i 到 v_j 间存在通路则称从 v_i 到 v_j 是可达的.

② 连通图：图的任何两结点间均可达.

③ 连通子图：图中的子图是连通的.

④ 独立子图：图中任一连通子图，它与图中其他连通子图不相连.

⑤ 三种连通图：

- 强连通：有向图中任何两结点间相互可达则称强连通.

- 弱连通:有向图忽略其边的方向所构成的无向图为连通则称弱连通.
- 单向连通:有向图两结点间至少有一向是可达的则称单向连通.

⑥ 有关图中特殊的通路、回路

- 短程线:两结点间长度最短之通路.
- 距离:两结点间短程线长度,记以 $d(v_i,v_j)$.
- 短程线性质:$d(v_i,v_j)\leqslant n-1$.
- 欧拉回路:经过连通图每条边一次的回路并记以 E 回路.
- 欧拉通路:经过连通图每条边一次的通路并记以 E 通路.
- 欧拉图:具有 E 回路的图,记以 E 图.
- 欧拉图性质:G 是 E 图$\Longleftrightarrow$每个结点次数为偶数.
- 哈密顿回路:经过图每个结点一次的回路并记以 H 回路.
- 哈密顿通路:经过图每个结点一次的通路并记以 H 通路.
- 哈密顿图:具有 H 回路的图并记以 H 图.

(6) 图论中的基本定理

① 结点与边的基本关系:

$$\sum_{i=1}^{n}\deg(v_i)=2m.$$

② 基本通路(回路)长度的定理:

(n,m)图的基本通路(回路)长度$\leqslant n-1(n)$.

③ 欧拉图与欧拉通路:

欧拉图$\Longleftrightarrow$每个结点次数为偶数.

由 v_i 到 v_j 的欧拉通路$\Longleftrightarrow v_i,v_j$ 结点次数为奇数,其他结点次数为偶数.

④ 哈密顿图与哈密顿通路:

哈密顿图的必要条件:$G=\langle V,E\rangle$ 中 $V_1\subseteq V$ 且 $P(G-V_1)\leqslant|V_1|$,其中 $P(G-V_1)$为从 G 中删除 V_1(包括 V_1 中各结点及其关联边)后所得到的连通分支数.

哈密顿图的充分条件:$G=\langle V,E\rangle$ 为无向简单图,$|V|\geqslant 3$,G 中每对结点次数之和$\geqslant|V|$.

哈密顿通路:有向图 $D=\langle V,E\rangle$,$|V|\geqslant 2$,所有有向边均用无向边替代后得无向图中含生成子图 K_n.

2. 图的矩阵计算

(1) 图的邻接矩阵:$G=\langle V,E\rangle$为(n,m)图,其邻接矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$,其中

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & (v_i,v_j)\in E\\ 0, & (v_i,v_j)\notin E\end{cases}$$

(2) 邻接矩阵性质

G 的邻接矩阵 A 有:

① $A^l(l=1,2,\cdots,n)$的第(i,j)个元素是由 v_i 到 v_j 的长度等于 l 的通路数.

② $d(v_i,v_j)$ 是使得 A^l 的第(i,j)个元素为非零的最小整数 l.($d(v_i,v_j)$ 指 v_i 和 v_j 之间的最短距离,其中 $i\neq j$.)

③ $a_{ii}^{(l)}$ 表示开始并结束于 v_i 长度为 l 的回路数.

④ $a_{ij}^{(l)}=0$ 表示由 v_i 到 v_j 无长度为 l 的通路存在.

⑤ 对 $A+A^2+\cdots+A^{n-1}=\tilde{A}$,连通图$\Longleftrightarrow\tilde{A}$ 除对角线外全是非零元素.

(3) 可达性计算

$P=A(+)A^{(2)}(+)\cdots(+)A^{(n)}$,$P=(p_{ij})_{n\times n}$,$p_{ij}$表示从 v_i 到 v_j 是否可达(0 不可达,1 可达).

(4) 连通性计算

可达性矩阵除对角线元素外均为 1.

(5) 权图、最小权通路与最小权回路

① 权图基本概念

- 权图:图中边赋予有关非负数据 ω 的图.
- 通路的权:通路 P 中各边权之和 $\omega(P)=\sum_{e_i\in P}\omega(e_i)$.
- 回路的权:回路 C 中各边权之和 $\omega(C)=\sum_{e_i\in C}\omega(e_i)$.
- 最小权通路:从 v_i 到 v_j 中权为最小的通路.
- 最小权回路:v_i 的权为最小的回路.
- 权图矩阵表示:权图 G 的矩阵 $D=(d_{ij})$,其中

$$d_{ij}=\begin{cases}\omega(v_i,v_j), & (v_i,v_j)\in E\\ \infty, & (v_i,v_j)\notin E\\ 0, & v_i=v_j\end{cases}$$

② 求解通路最小权的算法:

(a) $D^{(0)}=D$;

(b) 从 $D^{(0)}$ 起构作 $D^{(1)},D^{(2)},\cdots,D^{(n)}$,可由 $D^{(k-1)}$ 构作 $D^{(k)}$ 如下:

$$d_{ij}^{(k)}=\min(d_{ij}^{(k-1)},d_{ik}^{(k-1)}+d_{kj}^{(k-1)}),\quad k\neq i,j,$$

计算从 $k=1$ 起,i,j 从 1 到 n,然后 $k+1$,反复进行,直到 $k=n$ 为止;

(c) $D^{(n)}$ 中 $d_{ij}^{(n)}$ 即为从 v_i 到 v_j 的通路最小权.

③ 最小权 H 回路与 E 回路.

- 货郎担问题:最小权 H 回路.
- 货郎担问题解:仅存在一种相似解.
- 邮路问题:最小权 E 回路.
- 邮路问题解:邮路 C 为最小权$\Longleftrightarrow$每边最多重复一次,且在图中每回路上重复边的权之和小于回路权的一半.

3. 几种常用图

(1) 树的基本概念与属性

① 树的基本概念

- 树:不含回路的连通图.
- 子树:树的子图.
- 根:树中某特定结点.
- 分支结点:除根外次数大于等于 2 的结点.
- 叶:次数为 1 的结点.
- 结点级:从根到结点的通路长度.
- 结点的双亲、兄弟、子女:结点与其上一级结点所构成的子树的根称双亲,而结点间称兄弟,结点称根的子女.
- 森林:树的集合.

② 树的基本性质

- (n,m)树有 $m=n-1$.
- 树$\Longleftrightarrow$连通图且 $m=n-1$.
- 树$\Longleftrightarrow(n,m)$图,$m=n-1$ 且无回路.
- 树$\Longleftrightarrow$图中两结点间存在唯一简单通路.

③ 外向树与内向树:有向树中,仅有一个结点引入次数为 0(根),其他结点引入次数为 1,有些结点引出次数为 0(叶),称为外向树.有向树中,仅有一个结点引出次数为 0(根),其他结点引出次数为 1,有些结点引入次数为 0(叶),称为内向树.

④ 二元树与多元树:一个 n 个结点的外向树,$\overleftarrow{\deg}(v_i)\leqslant m(i=1,2,\cdots,n)$,称为 m 元树.如 $\overleftarrow{\deg}(v_i)=m(i=1,2,\cdots,n)$(除叶外),称为 m 元完全树,当 $m=2$ 时,称为二元树或二元完全树.

⑤ 生成树:连通图 $G=\langle V,E\rangle$的生成树 $T_G=\langle V',E'\rangle$是 G 的子图,且是树并满足 $V'=V,E'\subseteq E$.

- 生成树的秩与弦:(n,m)连通图的生成树所去掉的边称弦,所去掉的边数为 $m-n+1$,称为秩.
- 最小生成树:连通权图中权之和最小的生成树.
- 生成树的生成算法:

(a) 令 G 是 G_1,置 $i=1$;

(b) 若 G_i 无回路,G_i 为生成树,生成树找到;

(c) 否则,G_i 消去回路 C_i 中的一条边得 G_{i+1},G_{i+1}是连通的;

(d) $i=i+1$,返回(b).

- 最小生成树生成算法之一:在上面算法中(c)处消去 C_i 中权最大的边.
- 最小生成树生成算法之二:

(a) $i=1$,G_i 的边取 G 中权最小者;

(b) 若 G_i 已是生成树,则算法结束;

(c) 否则,在 $E-E_i$ 中找一条最小权的边加入 G_i 且不形成回路,得到 G_{i+1};

(d) $i=i+1$,返回(b).

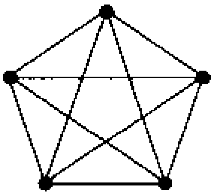
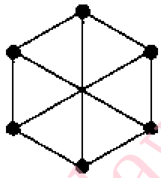
(2) 平面图

① 平面图的概念

- 图的边间可不出现交叉,称为平面图.
- 平面图的区域:平面图可沿边划分成独立的区域.

② 平面图的性质$\begin{cases}(n,m)\text{连通平面图,区域数为 } r\text{,必有 } n-m+r=2. \\ (n,m)\text{连通平面图,且无环,边大于 }1\text{,必有 } m\leqslant 3n-6.\end{cases}$

③ 平面图的判别法(库拉托夫斯基定理):图的任何子图都不可能减缩成下面两个图:

(3) 两步图

① 两步图的概念:无向图 $G=\langle V,E\rangle$,有 $V_1,V_2\subseteq V$,$V_1\cup V_2=V$,$V_1\cap V_2=\varnothing$,G 中每一边 e 都有 $e=(v_i,v_j)$,$v_i\in V_1$,$v_j\in V_2$,则称 G 为两步图.

② 两步图的判别法:图的所有回路长度为偶数.

6.4　典型例题详细分析

1. 任何图 G 中必有偶数个(　　).

A. 引入次数为奇数的结点　　B. 引出次数为奇数的结点

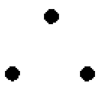
C. 次数为偶数的结点　　D. 次数为奇数的结点

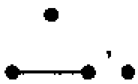
分析:引入次数和引出次数均指有向图,而此处为任何图,故不能选 A,B. 由于图中结点次数的总和为偶数(根据定理有 $\sum_{v\in V}\deg(v)=2|E|$),偶数结点的次数之和也为偶数,这就要求次数为奇数的结点次数之和也为偶数,要达到这一要求,必须使得次数为奇数的结点数目为偶数.

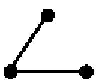
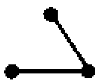
解:D.

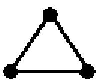
2. 三个点可构成多少个不同构的简单无向图?

分析:三个结点可构成如下几种情况:

(1)  有点无边;

(2)  有一条边,, 与其一样;

(3)  有两条边,同样情况有,

(4) 有三条边

解:可以有上述四种情况.

3. 某次开会的人员到会后互相握手,试说明与奇数个人握手的人数一定是偶数.

分析:可根据图论的定理来解决问题,关键要会将应用题中的量与图相联系.

解:若将开会人员对应成结点,相互握手的人对应成结点之间的边,那么开会人员握手情况便是一个无向简单图,与奇数个人握手者对应图中的奇次数结点,根据定理,奇次数结点的个数为偶数,因此开会成员中与奇数个人握手的人数一定是偶数.

4. 设图 G 有 9 个结点,每个结点的次数(度数)不是 5 就是 6,试证 G 中至少有 5 个 6 次结点或至少有 6 个 5 次结点.

分析:本题条件是图 G 共有 9 个结点,每个结点的次数是 5 或 6,而要证明的是满足两种情况之一即可,对于 5 次结点至少为 6 个,即可以是 6 个或 8 个,而如果只有 4 个 5 次结点时,那么剩下 $9-4=5$ 个结点,而这 5 个结点的次数为 6(即至少有 5 个 6 次结点),而如果只有 0 个、2 个 5 次结点时,则对应有 9 个、7 个 6 次结点,也满足至少 5 个的情况;同理,从至少 5 个 6 次结点出发,分析少于 5 个或多于 5 个时的情况也能得出相应结论.

证明:根据图论中定理,任何图中奇次结点数为偶数,因此 5 次结点的个数只能为 0,2,4,6,8,此时对应 6 次结点的个数则为 9,7,5,3,1. 对这五种情况都满足至少有 5 个 6 次或 6 个 5 次结点,故结论成立.

5. 设 G 为无向连通图,有 n 个结点,那么 G 中至少有几条边? 为什么? 若是有向图又如何?

解:至少有 $n-1$ 条边. 因为 G 为无向连通图,设有 n 个结点 $v_1,v_2,\cdots,v_n$,由连通性知,G 中每对结点之间都有通路,每个结点都有与其相邻的结点,因此,每个结点至少关联一条边,不妨以给定结点的顺序相邻(或重新按序编号),则 v_2 与 v_1 相邻有边 e_1,v_3 与 v_2 或 v_1 相邻有边 e_2,……,v_n 必与 $v_1,v_2,\cdots,v_{n-1}$ 中某结点相邻有边 e_{n-1}. 故 G 中至少有 $n-1$ 条边.

若 G 为有向图,将方向略去对相应的无向图讨论,结果相同.(因为只是讨论有多少条边,并未要求边的方向.)

6. 简单图 G 有 n 个结点,e 条边,设 $e>\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$,证明 G 是连通的.

证明:用反证法,假设 $G=\langle V,E\rangle$ 不连通,设 G 可分成两个不相连通的连通分支(子图)G_1 和 G_2,并设 G_1 和 G_2 分别有 n_1,n_2 个结点,显然 $n_1+n_2=n$. 因为 $n_i\geqslant 1$,所以 $n_i\leqslant n-1(i=1,2)$.

$$e\leqslant\frac{n_1(n_1-1)}{2}+\frac{n_2(n_2-1)}{2}\leqslant\frac{(n-1)(n_1-1)+(n-1)(n_2-1)}{2}$$
$$=\frac{(n-1)(n_1-1+n_2-1)}{2}=\frac{(n-1)(n_1+n_2-2)}{2}=\frac{(n-1)(n-2)}{2},$$

与已知相矛盾,因此 G 是连通的.

说明:完全图时有 $e=\frac{n_i(n_i-1)}{2}$,故有上述 $e\leqslant\frac{n_1(n_1-1)}{2}+\frac{n_2(n_2-1)}{2}$. 本题现有条件是 $e>\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$,而由假设不连通推出了 $e\leqslant\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$,故而说明根据现有条件,图 G

应该是连通的.

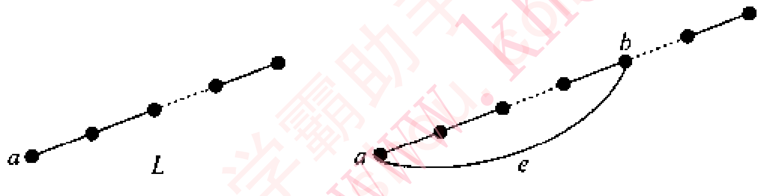
7. 证明每个结点的次数至少为2的图必包含一个回路.

分析:本题证明时所设 L 是考虑了能否构成环的最坏情况(见图(a)),除两头外,其他结点的次数为2(满足至少为2的最少次数情况),如果不按 L 来安排结点在图中位置的话,已经可出现回路.

由于条件给出每个结点的次数至少为2,那么结点 a 及 L 中的另一端点的次数就不会是1,故会有如图(b)所示的情况.由 a 引出的另一条边 e 的另一头必会去与另一结点相连(如结点 b,因为按最差情形所有点均放到了 L 上),此时已出现了回路.

证明:设 L 是图 G 中最长路中的一条,设其长度为 m,这条路的一个端点设为 a,考察 G 中与 a 关联的那些边,这些边中任何一条边的另一端必在 L 上,否则,将这个结点加进 L 中就可得到一条更长的路.

如果 G 中每个结点的次数至少为2,那么 a 也要关联于一条不在 L 上的边 e,若 e 是环,则 e 本身就是回路,否则,边 e 的另一个端点 b(与 a 不同的点)在 L 上,而连通 L 中 a 到 b 的子通路与边 e 就组成一个回路.



(a)　　　　(b)

8. 证明:如果 n 个电话局中的任何两个电话局总是可以通话的,那么至少存在 $n-1$ 条直通线路.

证明:设 n 个电话局为 n 个结点,两个结点之间有连线,当且仅当对应的这两个电话局可直通电话.因为任何两个电话局总可以通话(可能中途要通过其他电话局),因此就可构成一个简单的连通图.

现证明,对于具有 n 个结点的简单连通图 G,至少存在 $n-1$ 条边.用数学归纳法,有:

当 $n=2$ 时,有一条边.

当 $n=3$ 时,至少有两条边.

设 $n=k$ 时,G 至少有 $k-1$ 条边.当再增加一个结点 r 时,r 必与 G 中的某个结点邻接,因此,具有 $k+1$ 个结点的简单连通图至少有 k 条边.

说明:本题是一道应用题,要善于设法将其转换为图论中的问题来进行研究.本题中的所有结点均可有通路达到,用数学归纳法证出的是 n 个结点至少有 $n-1$ 条边将其连通,但一般情况可以超过 $n-1$ 条边.

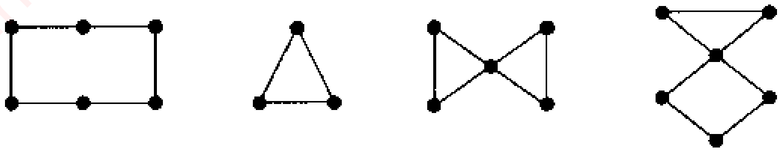
9. 构造一个欧拉图,其结点数 v 和边数 e 分别满足下述条件:

(1) v,e 的奇偶性一样;

(2) v,e 的奇偶性相反.

如果不可能,说明原因.

解:图(a)给出了 v 和 e 均为偶数 6 的欧拉图;图(b)给出了 v 和 e 均为奇数 3 的欧拉图;图(c)给出了 v 为奇数 5,e 为偶数 6 的欧拉图;图(d)给出了 v 为偶数 6,e 为奇数 7 的欧拉图.



(a) (b) (c) (d)

说明:本题主要说明构造欧拉图与 v,e 的奇偶性没有什么必然关系,所举例子也不是唯一的.

10. 设图 G 是一个具有 k 个奇次结点的图,问最少加几条边到 G 中,而使所得的图有一条欧拉回路?

分析:因为添加一条边能使两个结点的次数改变奇偶性,而欧拉回路要使图中所有的结点次数均为偶数,所以对 k 个奇次结点,起码要添加 $\frac{k}{2}$ 条边才能使它们都变为偶数.

解:对于 k 个奇次结点,要将它们变为偶次结点,至少添加 $\frac{k}{2}$ 条边才行,此时所得的图才能有欧拉回路.

11. 某次会议有 20 人参加,其中每人都至少有 10 个朋友,这 20 人围一圆桌入席,要想使每个人相邻的两位都是朋友是否可能?根据是什么?

分析:首先要会将实际的应用题转换为图论中的问题,以便用图来解决.

图中所用求哈密顿回路的充分条件定理是:若 G 是具有 n 个结点的简单图,如果 G 中每一对结点次数之和大于等于 n,则在 G 中存在一条哈密顿回路. 本题 $n=20$,由于每人至少有 10 个朋友,故每一个结点的次数大于等于 10,而一对结点的次数大于等于 20,即大于等于定理中的 n.

证明:可用结点代表人,根据题意,两人是朋友时,相应结点间连一条边,则得到一个无向图 $G=\langle V,E\rangle$,可转化为求哈密顿回路问题. 由于对任意结点 $u,v\in V$,有 $\deg(u)\geqslant 10$,$\deg(v)\geqslant 10$,因而 $\deg(u)+\deg(v)\geqslant 20$. 根据求哈密顿回路的充分条件定理,可知 G 为哈密顿图,G 中存在哈密顿回路,按此回路各点位置入席即为所求.

12. 设 G 是具有 k 个连通分支的平面图,若 G 有 n 个结点,m 条边,r 个区域,则必有(　　).

A. $n-m+r=k$　　　　B. $n-m+r=k-1$

C. $n-m+r=k+1$　　　　D. $n-m+r=2$

分析:因为对每一个连通分支都满足欧拉公式 $n_i-m_i+r_i=2(i=1,2,\cdots,k)$,即将每个连通分支看成一个平面图,共有 k 个平面图,其中 n_i 表示第 i 个连通分支的结点数目,m_i 表示第 i 个连通分支的边数,r_i 表示第 i 个连通分支划分的区域数目.

将各式累加则有

$$\sum_{i=1}^{k}(n_i-m_i+r_i)=2k,$$

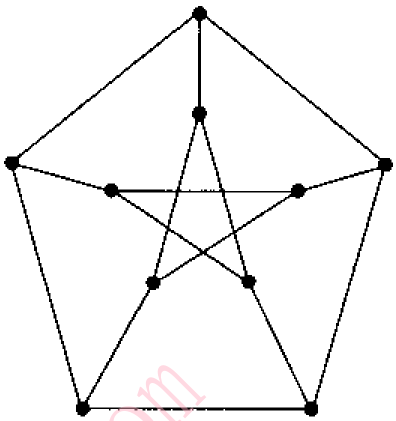
即有 $n-m+\sum_{i=1}^{k}r_i=2k$,因为每个连通分支分成的区域中都将无限区域(各个连通分支共有)计

算了一次,共多计算了 $k-1$ 次,所以结果应该为

$$n-m+r=2k-(k-1)=k+1.$$

解:C.

13. 试证明彼得松图(如右图所示)不是欧拉图,也不是平面图.



彼得松图

证明:(1) 欧拉图要存在欧拉回路,其每个结点的次数都是偶数,而此图不满足条件,故不是欧拉图.

(2) 彼得松图中每一个面由 5 条边围成,$k=5$,$e=15$,$v=10$,而不等式 $e\leqslant\dfrac{k(v-2)}{k-2}$ 不成立,故此图不是平面图.

说明:本题证明利用了判定欧拉图的定理,判定 k 条边围成的平面图应满足的不等式,应记住此类基本定理、公式.

14. 一个简单有向图是根树,它的邻接矩阵必须满足什么条件?

解:主对角线上元素全为 0,矩阵中有一列元素全为 0,其他各列中都恰有一个 1.

说明:主对角线上元素全为 0 是因为树中结点无环;有一列元素全为 0 是因为此列元素对应的列结点是树根,其入度为 0(即无结点引边到根结点);其他各列中都恰有一个 1 是因为根树中除根结点外,其余各结点的入度均为 1,它们分别对应的列结点中只能有一个其他结点引入一条边来作为其入度.

15. 设图 G 是一棵树,它有 n_2 个 2 次分支点,n_3 个 3 次分支点,……,n_k 个 k 次分支点,求 G 中叶结点数.

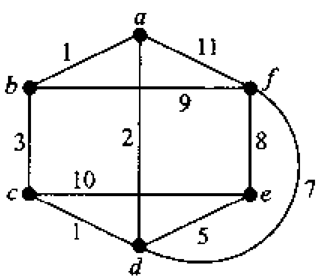
分析:本题综合了图、树(一种特殊的图)中有关结点、边、次数的概念及相互之间的关系. 例如:$m=n-1$ 是树满足的关系式,图就未必满足,而满足 $m=n-1$ 的图也未必是树.

解:设 G 中叶结点数为 x,则 G 中结点数 $n=x+n_2+n_3+\cdots+n_k$,边数 $m=n-1=(x+n_2+n_3+\cdots+n_k)-1$,而所有结点次数之和 $\sum\limits_{i=1}^{n}\deg(v_i)=2m$. 因此有

$$x\cdot 1+n_2\cdot 2+\cdots+n_k\cdot k=2\cdot(x+n_2+\cdots+n_k)-2,$$

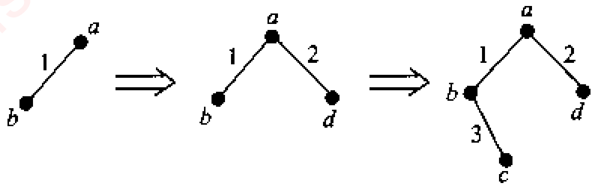
$$x=n_3+2n_4+\cdots+(k-2)n_k+2.$$

16. 对下图求最小生成树.

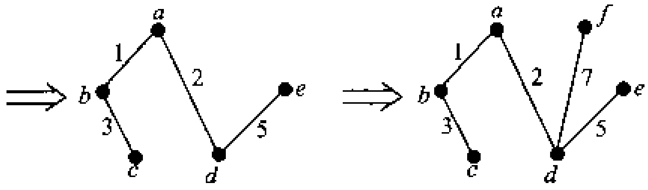


(第 16 题)

解：(1) 用边权排序

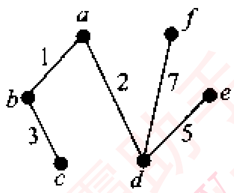


(a,b)　　(a,d)　　(b,c)



(d,e)　　(d,f)

(2) 从结点 a 出发，扩展结点



结点集：

$$\{a\}\to\{a,b\}\to\{a,b,d\}\to\{a,b,d,c\}\to\{a,b,d,c,e\}\to\{a,b,d,c,e,f\}.$$

说明：上述两种方法在算法上有所不同.(1)是根据边权的大小，每次选取一条合适的边保存在边的集合中，直到构成最小生成树为止；而(2)是以保存结点的方式，从某结点(此处为 a)出发，找下一个能与其构造最小权边的点(不能形成回路)，比如 b，然后每次将所选取的点逐个归入结点集合中，直到形成最小生成树为止.

不论是保存边还是保存点，其共同的原则是先找到合适的边(根据权值).

实际解题时，用方法(1)或(2)都可获得正确结果.另外必须注意，由于边权可能同值(不构成回路时)，最小生成树可能不唯一.该图共去掉 6 条边，也可称它的秩为 6，最小生成树的权为 $\omega(T)=1+2+3+5+7=18$.

17. 试证明一棵二元完全树必有奇数个结点.

分析：本题可根据二元完全树的特点，树和图中边、结点的关系，经综合考虑得出结论.

证明：方法一：设二元完全树 T 有 n 个结点，m 条边.依定义，T 中每个分支结点都关联两条边，所以 m 必为偶数.又因为 T 是树，有 $n=m+1$，故 n 为奇数，因此二元完全树必有奇数个结点.

方法二：设二元完全树 T 有 n 个结点，l 片叶子，b 个分支结点，则有 $n=l+b$ 及 $b=l-1$，所以 $n=l+b=l+l-1=2l-1$，即 n 为奇数.

6.5　相关教材中习题及解答

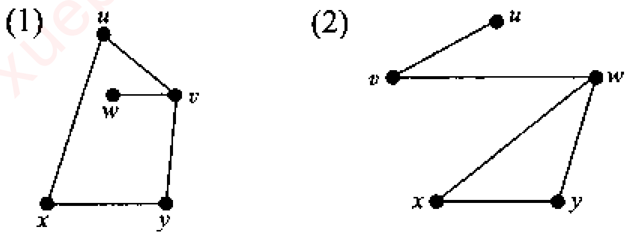
1. (8.1) 设 $V=\{u,v,w,x,y\}$，画出图 $G=\langle V,E\rangle$：

(1) $E=\{(u,v),(u,x),(v,w),(v,y),(x,y)\}$;

(2) $E=\{(u,v),(v,w),(w,x),(w,y),(x,y)\}$.

再求每个结点的次数.

解:



对(1)中结点:$\deg(u)=2,\deg(v)=3,\deg(w)=1,\deg(x)=2,\deg(y)=2$.

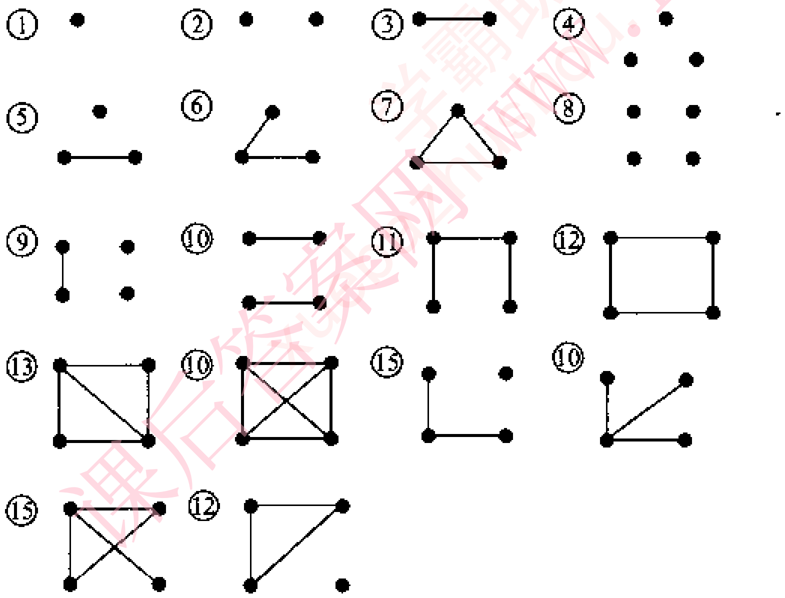
对(2)中结点:$\deg(u)=1,\deg(v)=2,\deg(w)=3,\deg(x)=2,\deg(y)=2$.

2. (8.2) 设 G 是具有4个结点的完全图:

(1) 写出 G 的所有子图;

(2) 写出 G 的所有生成子图.

解:

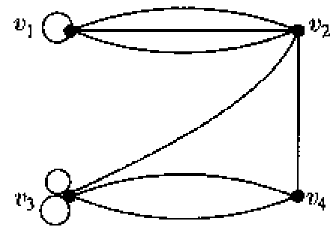


(1) 以上①~⑱为18个互不同构的子图;(2) 其中⑧~⑱是11个生成子图.

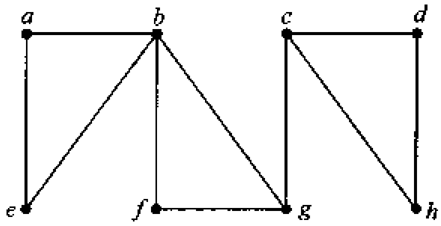
3. (8.3) 画出一个多重图,使它们的邻接矩阵为

$$\begin{bmatrix}1&3&0&0\\3&0&1&1\\0&1&2&2\\0&1&2&0\end{bmatrix}.$$

解:多重图 G 为:



4. (8.4) 有图如下所示,试求:



(第 4 题)

(1) 从 a 到 h 的所有基本通路;

(2) 从 a 到 h 的所有简单通路;

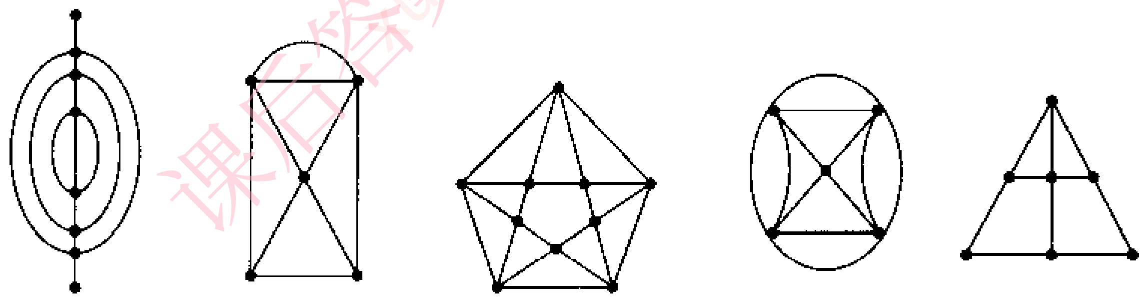
(3) 从 a 到 h 的距离.

解:(1) 基本通路为:(a,b,g,c,h),(a,b,g,c,d,h),(a,b,f,g,c,h),(a,b,f,g,c,d,h),(a,e,b,g,c,h),(a,e,b,g,c,d,h),(a,e,b,f,g,c,h),(a,e,b,f,g,c,d,h).

(2) 简单通路同(1).

(3) a 到 h 的距离为 4,即(a,b,g,c,h).

5. (8.5) 下图中哪个有欧拉通路,哪个有欧拉回路,哪个有哈密顿通路,哪个有哈密顿回路?



(a) (b) (c) (d) (e)

(第 5 题)

解:图(a)有欧拉通路、哈密顿通路.

图(b)有欧拉通路、哈密顿通路,哈密顿回路.

图(c)有欧拉回路、哈密顿通路、哈密顿回路.

图(d)有哈密顿通路、哈密顿回路.

图(e)有哈密顿通路、哈密顿回路.

6. (8.6) 图 G_1,G_2 的邻接矩阵分别为 A_1 和 A_2,试求:

(1) $A_1^2, A_1^3, A_1^4, A_2^2$;

(2) 在 G_1 内列出每两个结点间距离;

(3) 列出 G_1, G_2 中的所有基本回路.

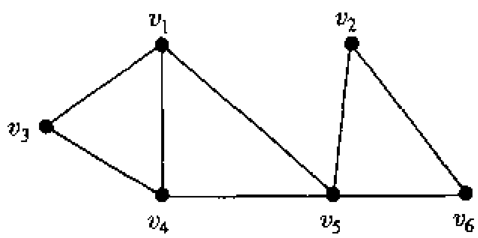
$$A_1=\begin{bmatrix}0&0&1&1&1&0\\0&0&0&0&1&1\\1&0&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\1&1&0&1&0&1\\0&1&0&0&1&0\end{bmatrix},\quad A_2=\begin{bmatrix}0&0&0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&1\\0&0&0&1&0&0&0\\1&0&1&0&1&0&0\\1&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

解:(1)

$$A_1^2=\begin{bmatrix}3&1&1&2&1&1\\1&2&0&1&1&1\\1&0&2&1&2&0\\2&1&1&3&1&1\\1&1&2&1&4&1\\1&1&0&1&1&2\end{bmatrix},\quad A_1^3=\begin{bmatrix}4&2&5&5&7&2\\2&2&2&2&5&3\\5&2&2&5&2&2\\5&2&5&4&7&2\\7&5&2&7&4&5\\2&3&2&2&5&2\end{bmatrix},$$

$$A_1^4=\begin{bmatrix}17&9&9&16&13&9\\9&8&4&9&9&7\\9&4&10&9&14&4\\16&9&9&17&13&9\\13&9&14&13&24&9\\9&7&4&9&9&8\end{bmatrix},\quad A_2^2=\begin{bmatrix}2&0&1&1&1&0&0\\0&2&0&0&0&0&0\\1&0&1&0&1&0&0\\1&0&0&3&1&0&0\\1&0&1&1&2&0&0\\0&0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&1&1\end{bmatrix}.$$

(2) 作出图 G_1 如下:



各结点间的距离为:

$d(v_1,v_2)=2$, $d(v_1,v_3)=1$, $d(v_1,v_4)=1$,

$d(v_1,v_5)=1$, $d(v_1,v_6)=2$, $d(v_2,v_3)=3$,

$d(v_2,v_4)=2$, $d(v_2,v_5)=1$, $d(v_2,v_6)=1$,

$d(v_3,v_4)=1$，　$d(v_3,v_5)=2$，　$d(v_3,v_6)=3$，

$d(v_4,v_5)=1$，　$d(v_4,v_6)=2$，　$d(v_5,v_6)=1$.

(3) 根据(2)中图 G_1 得到如下基本回路：

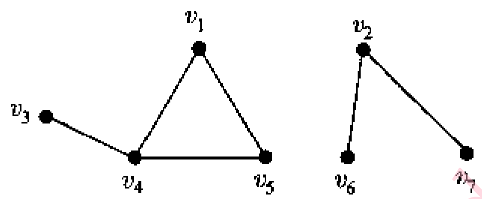
(v_1,v_3,v_4,v_1)，　(v_1,v_4,v_5,v_1)，　(v_1,v_3,v_4,v_5,v_1)，　(v_2,v_5,v_6,v_2)，

(v_3,v_1,v_4,v_3)，　(v_3,v_1,v_5,v_4,v_3)，　(v_4,v_1,v_3,v_4)，　(v_4,v_5,v_1,v_4)，

(v_4,v_3,v_1,v_5,v_4)，　(v_5,v_2,v_6,v_5)，　(v_5,v_1,v_4,v_5)，　(v_5,v_1,v_3,v_4,v_5)，

(v_6,v_2,v_5,v_6).

作出图 G_2 如下：



根据图找出如下基本回路：

(v_1,v_4,v_5,v_1)，　(v_4,v_1,v_5,v_4)，　(v_5,v_1,v_4,v_5).

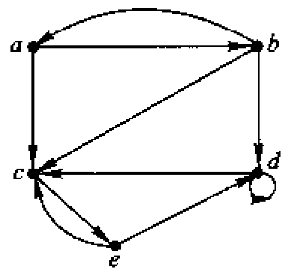
7. (8.7) 设有向图 D 如右图所示，试求：

(1) 每个结点的引入次数与引出次数；

(2) 它的邻接矩阵 M_D；

(3) D 是强连通、弱连通还是单向连通？

(4) 求从 a 到 c 长度小于或等于 3 的通路数.



(第 7 题)

解：(1)

	a	b	c	d	e
引入次数	1	1	4	3	1
引出次数	2	3	1	2	2

(2) 邻接矩阵如下：

$$M_D=\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

(3) D 是单向连通的.

(4) 作出相应的矩阵来判定通路数目：

$$M_D^2=\begin{bmatrix}1&0&\boxed{1}&1&1\\0&1&2&1&1\\0&0&1&1&0\\0&0&1&1&1\\0&0&1&1&1\end{bmatrix},\quad M_D^3=\begin{bmatrix}0&1&\boxed{3}&2&1\\1&0&3&3&2\\0&0&1&1&1\\0&0&2&2&1\\0&0&2&2&1\end{bmatrix}.$$

可根据上述矩阵中虚线所框的数字来判定，即从 a 到 c 长度为 1 的通路有 1 条，长度为 2 的通路为 1 条，长度为 3 的通路有 3 条，故小于或等于 3 的通路数有 $1+1+3=5$(条).

8. (8.8) D 是具有结点 v_1,v_2,v_3,v_4 的有向图，它的邻接矩阵表示如下：

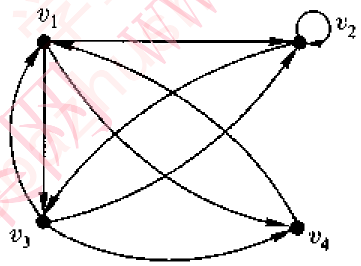
$$\begin{bmatrix}0&1&1&1\\0&1&1&0\\1&1&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}.$$

(1) 画出这个图；

(2) D 是单向连通还是强连通？

(3) 求从 v_1 到 v_1 长度是 3 的回路，从 v_1 到 v_2，从 v_1 到 v_3，从 v_1 到 v_4 长度是 3 的通路数.

解：(1) 其有向图如下：



(2) D 是强连通的.

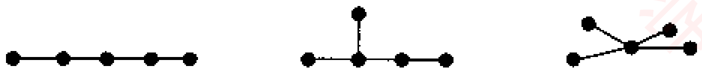
(3) 先求出相应矩阵：

$$M^2=\begin{bmatrix}2&2&1&1\\1&2&1&1\\1&2&2&1\\0&1&1&1\end{bmatrix},\quad M^3=\begin{bmatrix}2&5&4&3\\2&4&3&2\\3&5&3&3\\2&2&1&1\end{bmatrix}.$$

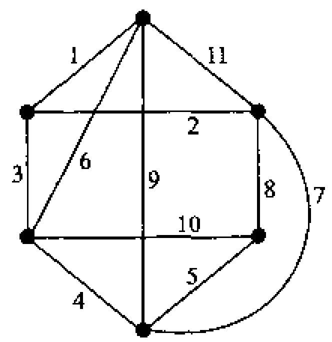
v_1 到 v_1 长度是 3 的回路有 2 条，v_1 到 v_2 长度是 3 的通路有 5 条，v_1 到 v_3 长度是 3 的通路有 4 条，v_1 到 v_4 长度是 3 的通路有 3 条.

9. (9.2) 尽可能多地画出有 5 个结点的树，它们均不同构.

解：

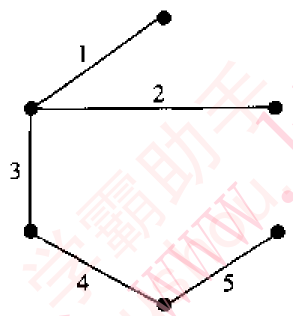


10. (9.3) 求下图的最小生成树.



(第10题)

解:

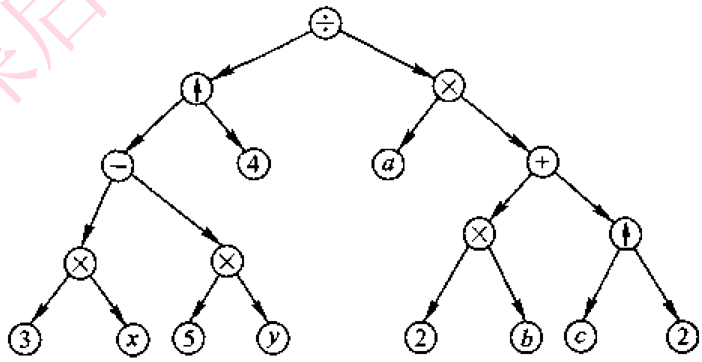


11. (9.4) 设有代数表示式如下

$$\frac{(3x-5y)^4}{a(2b+c^2)}.$$

试画出这个表示式的树.

解:相应根树如下:



12. (9.5) 已知关于人员 a,b,c,d,e,f 的下述事实:

a 说汉语、法语和日语;

b 说德语、日语和俄语;

c 说英语和法语;

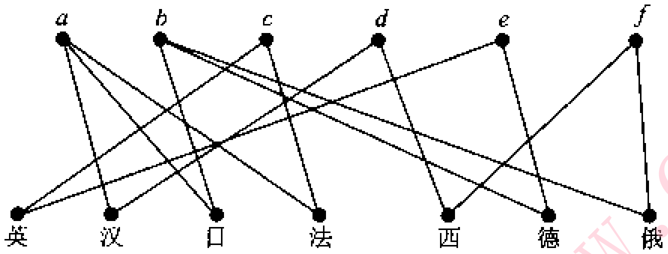
d 说汉语和西班牙语;

e 说英语和德语;

f 说俄语和西班牙语.

试问是否能将这六人分成两组,使同组中没有两人能互相交谈?

解:把 a,b,c,d,e,f 六个人和七种语言分别用图的结点表示,边代表人与语言的关系,于是可画出下图:

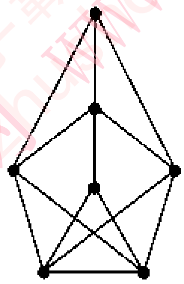


这是一个两步图,由图可看出,若如下分配:

$$组1=\{a,e,f\},\quad 组2=\{b,c,d\},$$

可使同组内没有两人能互相交谈.

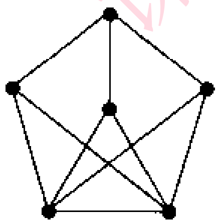
13. (9.7) 证明下图是非平面图.



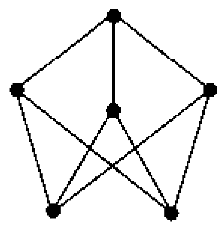
(第13题)

解:根据库拉托夫斯基定理,可对题图进行减缩:

(1)



(2)



这是一个与 $K_{3,3}$ 图同构的图,故它是一个非平面图.

14. (4P-1) 在图 $G=\langle V,E\rangle$ 中,结点次数与边数的关系是下面4个中的哪一个?

(1) $\deg(v_i)=2|E|$; (2) $\deg(v_i)=|E|$;

(3) $\sum_{v\in V}\deg(v) = 2|E|$；　　(4) $\sum_{v\in V}\deg(v) = |E|$.

解：(3)是正确的.

15. (4P－2) 设 G 是 n 个结点的无向完全图，则图 G 的边数是多少？设 D 是 n 个结点的有向完全图，则图 D 的边数又是多少？

解：无向完全图时：$m = n(n-1)/2$；有向完全图时：$m = n(n-1)$.

16. (4P－3) 仅有一个结点的图称为什么图？

解：称为平凡图.

17. (4P－4) 设 $G = \langle V,E\rangle$ 为无向简单图，$|V| = n$，$\Delta(G)$ 为图 G 中结点的最大次数，请指出下面 4 个中哪个不等式是正确的.

(1) $\Delta(G) < n$；　(2) $\Delta(G) \leq n$；

(3) $\Delta(G) > n$；　(4) $\Delta(G) \geq n$.

解：(1)是正确的.

18. (4P－5) 图 G 与 G' 的结点和边分别存在一一对应关系是 G 与 G' 同构的充分必要条件吗？请说明之.

(1) 充分条件；　(2) 必要条件；

(3) 充分必要条件；　(4) 既非充分也非必要条件.

解：(3) 充分必要条件. 对于图 $G = \langle V,E\rangle$ 和 $G' = \langle V',E'\rangle$，如果存在一一对应的映射(函数) $f: V \to V'$，使得 $(v_i,v_j) \in E$ 当且仅当 $(f(v_i),f(v_j)) \in E'$. G 和 G' 是同构的图.

19. (4P－6) 设 $V = \{a,b,c,d\}$，则与 V 能构成强连通图的边集合是下面 4 个中哪一个？

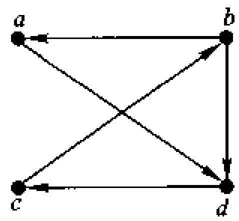
(1) $E = \{(a,d),(b,a),(b,d),(c,b),(d,c)\}$；

(2) $E = \{(a,d),(b,a),(b,c),(b,b),(d,c)\}$；

(3) $E = \{(a,c),(b,a),(b,c),(d,a),(d,c)\}$；

(4) $E = \{(a,d),(a,c),(a,d),(b,d),(c,d)\}$.

解：(1) 可以与 V 构成强连通图. 其有向图如下：



20. (4P－7) 设图 $G = \langle V,E\rangle$ 和 $G' = \langle V',E'\rangle$，若________，则 G' 是 G 的真子图；若________，则 G' 是 G 的生成子图.

解：$V' \subseteq V, E' \subset E$；$V' = V, E' \subseteq E$.

21. (4P－8) 在无向图中，结点间的连通关系具有________性，________性，________性，是________关系.

解:自反,对称,传递,等价.

22. (4P-9) 图的通路中边的数目称为________,结点不重复的通路是________通路,边不重复的通路是________通路.

解:长度,基本,简单.

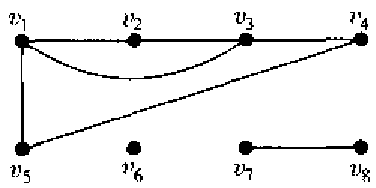
23. (4P-10) 设 $G=\langle V,E\rangle$ 是一个无向图,$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_8\}$,$E=\{(v_1,v_2),(v_2,v_3),(v_3,v_1),(v_1,v_5),(v_5,v_4),(v_3,v_4),(v_7,v_8)\}$.

(1) 画出 G 的图解;

(2) 该图是否有孤立结点?

(3) 求出各结点的次数.

解:(1)



(2) 该图具有孤立结点 v_6(见(1)中图解).

(3) $\deg(v_1)=3$,　$\deg(v_2)=2$,　$\deg(v_3)=3$,　$\deg(v_4)=2$,

$\deg(v_5)=2$,　$\deg(v_6)=0$,　$\deg(v_7)=1$,　$\deg(v_8)=1$.

24. (4P-11) 在有21条边的无向图中有多少个结点?其中3个结点次数为4,其余均为3.

解:根据定理 $\sum_{v\in V}\deg(v)=2m$,此时 $m=21$.设次数为3的结点个数为 x,则有:

$$3x+3\times 4=2\times 21,\qquad x=10.$$

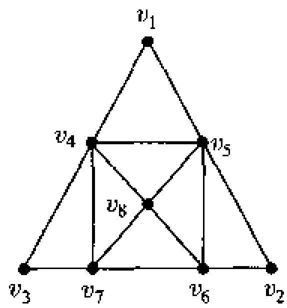
共有结点 $10+3=13$(个).

25. (4P-12) 给定图 $G=\langle V,E\rangle$,如右图所示.

(1) 在 G 中找出一条长度为7的通路;

(2) 在 G 中找出一条长度为4的简单通路;

(3) 在 G 中找出一条长度为4的简单回路.



(第25题)

解:(1) $(v_1,v_4,v_3,v_7,v_6,v_2,v_5,v_8)$;

(2) (v_1,v_4,v_3,v_7,v_6);

(3) (v_4,v_7,v_6,v_5,v_4).

26. (4P-13) 设简单图 $G_i=\langle V,E_i\rangle(i=1,2,\cdots,6)$,其中 $V=\{a,b,c,d,e\}$,

$E_1=\{(a,b),(b,c),(c,d),(a,e)\}$;

$E_2=\{(a,b),(b,e),(e,b),(a,e),(d,e)\}$;

$E_3=\{(a,b),(b,e),(e,d),(c,c)\}$;

$E_4=\{(a,b),(b,c),(c,a),(a,d),(d,a),(d,e)\}$;

$$E_5=\{(a,b),(b,a),(b,c),(c,d),(d,e),(e,a)\};$$

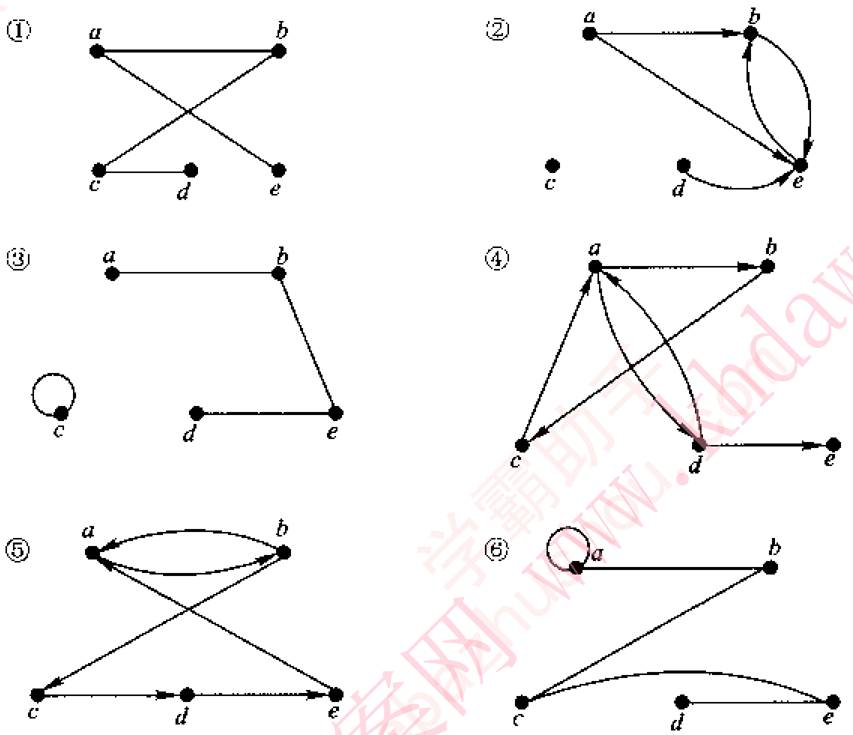
$$E_6=\{(a,a),(a,b),(b,c),(e,c),(e,d)\}.$$

做出各图，试问：

(1) 哪些图是有向图？哪些图是无向图？

(2) 哪些是强连通图？哪些是单向连通图？哪些是弱连通图？

解：



(1) 其中图②④⑤是有向图，①③⑥是无向图.

(2) 图⑤是强连通图，图④是单向连通图，无弱连通图.

27. (4P－14) 求上题图中：

(1) G_2 和 G_6 各结点的次数；

(2) 图 G_5 的邻接矩阵以及从 b 到 c,d 长度为 3 的通路条数，从 b 到 b 长度为 2 的回路条数以及长度为 3 的通路共有多少条，长度不超过 3 的通路条数和回路条数；

(3) 图 G_5 的可达矩阵.

解：(1) G_2 各结点的次数为：

$\deg(a)=2$，　$\deg(b)=3$，　$\deg(c)=0$，　$\deg(d)=1$，　$\deg(e)=4$.

G_6 各结点的次数为：

$\deg(a)=3$，　$\deg(b)=2$，　$\deg(c)=2$，　$\deg(d)=1$，　$\deg(e)=2$.

(2) 图 G_5 的邻接矩阵如下：

$$A_{G_5}=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\end{bmatrix},\quad A_{G_5}^2=\begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\end{bmatrix},\quad A_{G_5}^3=\begin{bmatrix}0&1&0&1&0\\1&0&1&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\1&0&1&0&0\end{bmatrix}.$$

b 到 c 长度为 3 的通路有 1 条；b 到 d 没有长度为 3 的通路；b 到 b 长度为 2 的回路有 1 条；长度为 3 的通路共有 9 条(见 $A_{G_5}^3$ 矩阵中 1 的个数)；长度不超过 3 的通路有 $6+7+9=22$，即 22 条；长度不超过 3 的回路有 2 条.

(3)

$$A_{G_5}^4=\begin{bmatrix}1&0&1&0&1\\1&1&0&1&0\\0&1&0&0&0\\1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\end{bmatrix},\quad A_{G_5}^5=\begin{bmatrix}1&1&0&1&0\\1&1&1&0&1\\1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\\1&0&1&0&1\end{bmatrix}.$$

结合(2)中的 A_{G_5}，$A_{G_5}^2$，$A_{G_5}^3$ 及上述 $A_{G_5}^4$，$A_{G_5}^5$，可得到可达矩阵为：

$$P=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}.$$

28. (4P－15) 当且仅当为下面 4 个中的哪一个时，无向图 G 是欧拉图？

(1) G 的所有结点的次数为偶数；

(2) G 的所有结点的次数为奇数；

(3) G 连通且所有结点的次数为偶数；

(4) G 连通且所有结点的次数为奇数.

解：(3)是正确的.

29. (4P－16) 设 $G=\langle V,E\rangle$，$|V|=n$，$|E|=m$，为连通平面图且有 r 个面，则 $r=$________.

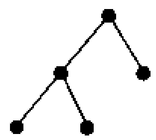
解：$r=m-n+2$.

30. (4P－17) 设 G 是 5 个结点的无向完全图，则从 G 中删去________条边可以得到树.

解：5 个结点的无向完全图共有边数为 $m=n(n-1)/2=5\times4/2=10$. 而 5 个结点的树具有边数为 $m'=n-1=5-1=4$. 故从 G 中删去 6 条边可以得到树.

31. (4P－18) 在 5 个结点的二元完全树中，若有 4 条边，则它有________片树叶.

解：此时的二元完全树形如：

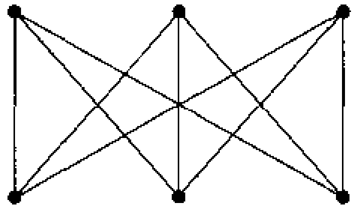


故它有 3 片树叶.

32.（4P－19）下图是下面四种图中的哪一种？

（1）完全图；（2）欧拉图；（3）平面图；（4）哈密顿图.

解：是(4).



（第 32 题）

33.（4P－20）设 G 是二元完全树，G 有 15 个结点，其中有 8 片树叶，则 G 有_______条边，G 的次数是_______，G 的分支点数是_______，G 中次数为 3 的结点数是_______.

解：G 有 14 条边，G 的次数是 28，G 的分支点数是 6，G 中次数为 3 的结点数是 6.

34.（4P－21）连通有向图 D 含有欧拉回路的充分必要条件是_______.

解：设 D 是有向弱连通图，当且仅当 D 的每个结点的引入次数等于引出次数时，D 是欧拉图.

35.（4P－22）设 G 是 n 个结点的简单图，若 G 中每对结点的次数之和_______，则 G 一定是哈密顿图.

解：大于等于 n.

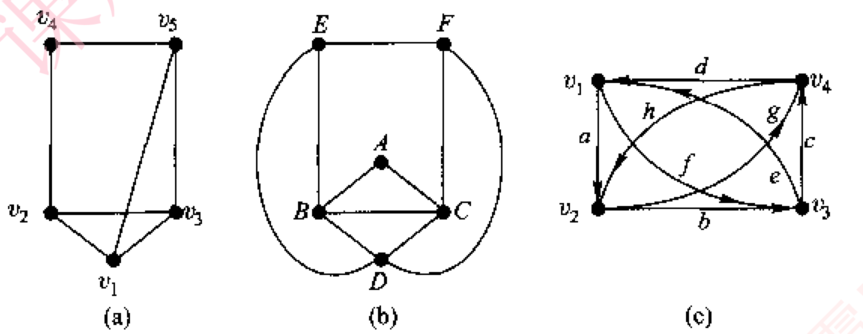
36.（4P－23）设 G 是有 n 个结点，m 条边的连通图，要确定 G 的一棵生成树，必须删去 G 的_______条边.

解：生成树应具有的边数为 $m'=n-1$，故此时应删去 G 的边数为 $m-m'=m-(n-1)$.

37.（4P－24）一个有向树 T 称为根树，若_______，其中_______称为树根，_______称为树叶.

解：若是外向树，引入次数为 0 的，引出次数为 0 的.

38.（4P－25）判别下面的 3 幅图是否可以一笔画出，是欧拉图吗？若是，试写出一个回路.



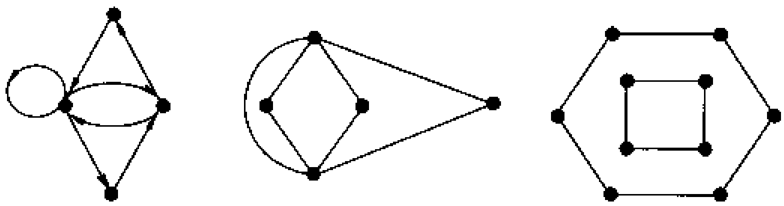
（第 38 题）

解：图(a)不能一笔画，也不是欧拉图.

图(b)可以一笔画，其路径可以是 $P:(E,D,C,A,B,D,F,E,B,C,F)$，但不是欧拉图.

图(c)可以一笔画,其路径可以是 $P:(v_1,v_2,v_3,v_4,v_2,v_4,v_1,v_3,v_1)$,是欧拉图.

39. (4P-26) 指出下列各图是否为哈密顿图,有无哈密顿通路或回路.



(a) (b) (c)

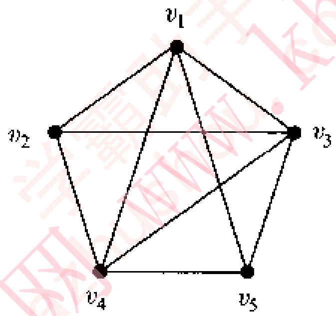
(第39题)

解:图(a)是哈密顿图,存在哈密顿通路和回路.

图(b)不是哈密顿图,存在哈密顿通路,但不存在哈密顿回路.

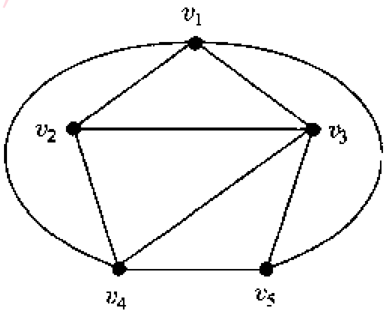
图(c)不是哈密顿图,也不存在相应的通路、回路.

40. (4P-27) 判断下图是否为平面图.



(第40题)

解:是平面图,可以变形为:



41. (4P-28) 在具有 n 个结点的完全图 K_n 中,需要删去多少条边才能得到树?

解:n 个结点的完全图的边数为 $m=n(n-1)/2$,而树的边数为 $m_1=n-1$. 故应删去边数为

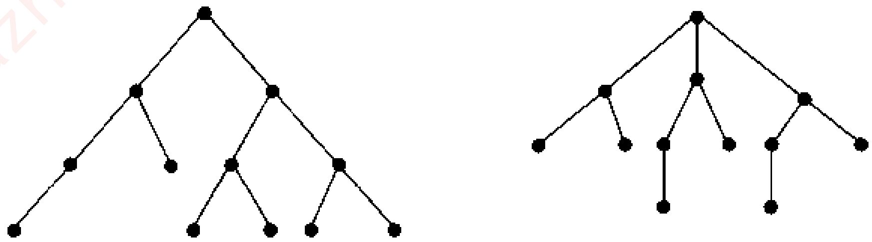
$$m-m_1=\frac{n(n-1)}{2}-(n-1)=(n-1)\cdot\left(\frac{n}{2}-1\right)=\frac{n^2-3n+2}{2}.$$

42. (4P-29) (1) 在一棵有两个2次结点、四个3次结点、其余为树叶的无向树中,应该有几片树叶?

(2) 画出两棵不同构的满足条件(1)的结点次数的无向树 T_1,T_2.

解:(1) 应该有 6 片树叶.

(2)

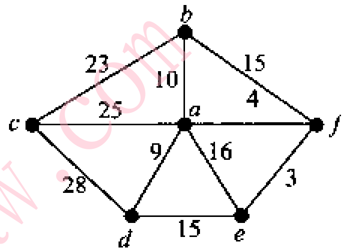


T_1　　　　T_2

43. (4P－30) 设 $G=\langle V,E\rangle$ 是有 p 个结点,s 条边的连通图,则从 G 中删去多少条边,才能确定图 G 的一棵生成树?

解:应删去边数为 $s-(p-1)$.

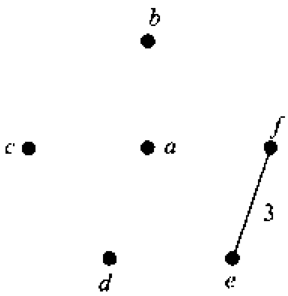
44. (4P－31) 右图是有六个结点 a,b,c,d,e,f 的带权无向图,各边的权如图所示,试求其最小生成树.



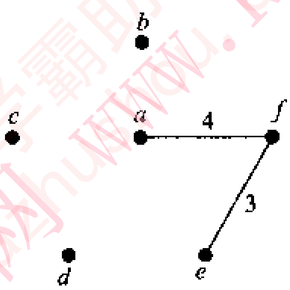
(第 44 题)

解:以下按步求最小生成树:

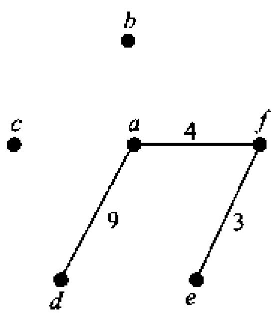
(1)



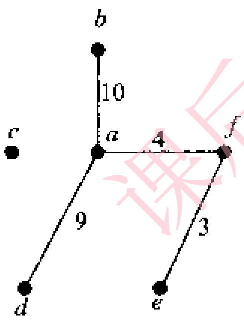
(2)



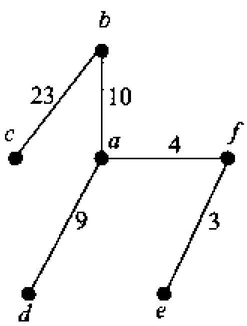
(3)



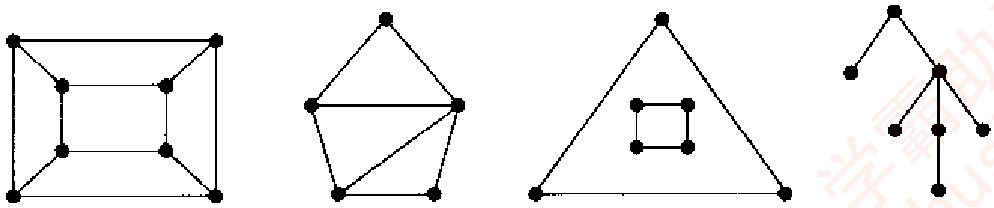
(4)



(5)



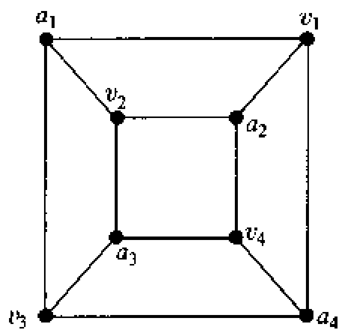
45. (4P－32) 如下图所示,图中哪些是两步图?哪些不是?为什么?



(a)　(b)　(c)　(d)

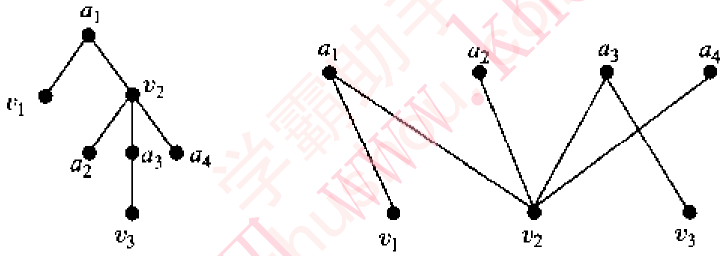
(第 45 题)

解:图(a)是两步图. 理由:图 G 是一个两步图的充分必要条件是 G 的所有回路的长度是偶数(定理). 可将图(a)分为两组结点,见下图:



其中 a_1,a_2,a_3,a_4 为一组,v_1,v_2,v_3,v_4 为另一组.

图(b)和图(c)不满足上述理由(定理),故不是两步图. 图(d)是两步图,将其标上结点名,并分组如下:a_1,a_2,a_3,a_4 为一组,v_1,v_2,v_3 为另一组. 见下图:



46. (4P-33) 设 G 是图,无回路,但若外加任意一条边于 G 后,就形成一回路,试证明 G 必为树.

证明:根据所给条件,知 G 的任意两点 v_1 和 v_2 间均存在通路,故图 G 是连通图,即 v_1 与 v_2 间有一条简单通路 P_1,但如果加入一条边后形成回路,即形成第 2 条简单通路 P_2,因此可知 G 中任意两个结点间存在唯一的通路,此结论符合树的定义,即图 G 必为树.

47. (4P-34) 设 G 是平面图,并且 G 的所有面的次数均为 3,证明:$e=3v-6$,其中 e 是 G 的边数,v 是 G 的结点数.

证明:因为 G 是平面图,且每个面由三条边围成,所以总共用于围面的边数为 $3r$. 另一方面,图中每条边为两个面的边界,因此总的利用边数为 $2e$. 所以 $3r=2e$,$r=\frac{2}{3}e$. 代入欧拉公式 $v-e+r=2$,有 $v-e+\frac{2}{3}e=2$,$e=3v-6$,故得证.

6.6 另增配套习题及解答

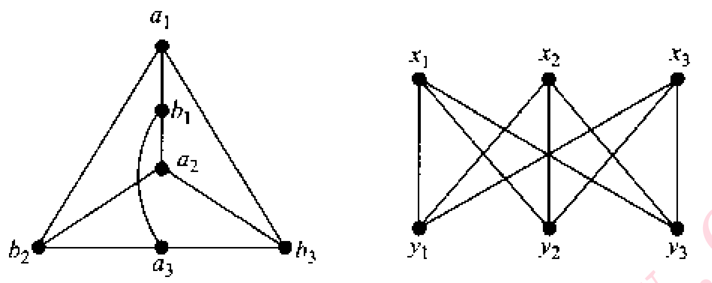
1. 证明图 G 中结点 u 到 v 存在一条通路当且仅当从 u 到 v 存在一条基本通路.

证明:"⇒"设从 u 到 v 存在一条通路,若其中有相同结点 w,例如:$u,\cdots,w,\cdots,w,v$,则删去从 w 到 w 的那些边,它仍是从 u 到 v 的通路,如此反复进行,直到没有重复结点为止,此时所得通路

就是从 u 到 v 的基本通路.

"$\Leftarrow$"设从 u 到 v 存在一条基本通路,根据基本通路的定义,知从 u 到 v 是连通的,故从 u 到 v 之间必有通路存在.

2. 判断下列两个图是否同构.

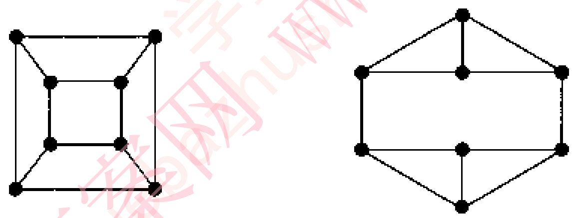


(第 2 题)

解:同构的,可找出各自图中两组各 3 个结点的对应关系.对图中各结点标上结点名后,有对应关系为:$a_1 \leftrightarrow x_1, a_2 \leftrightarrow x_2, a_3 \leftrightarrow x_3, b_1 \leftrightarrow y_1, b_2 \leftrightarrow y_2, b_3 \leftrightarrow y_3$.

3. 画出具有 8 个结点的两个 3 次正则图.

解:



4. 分别画出 $K_{2,6}$ 和 $K_{3,4}$ 图.

解:　$K_{2,6}$ 图为:　　$K_{3,4}$ 图为:

5. 假定一个图是两步图,试说明可以规定 G 的结点的一种次序,使它的邻接矩阵 A 具有下面的形式:

$$A = \begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix}.$$

解:根据两步图的性质,它有两个互补结点子集 V_1 和 V_2,假定各自集合中的结点为:

$$V_1 = \{v_{11}, v_{12}, \cdots, v_{1i}\}, V_2 = \{v_{21}, v_{22}, \cdots, v_{2j}\}$$

可按次序 $v_{11}, v_{12}, \cdots, v_{1i}, v_{21}, v_{22}, \cdots, v_{2j}$ 来排列,即 v_{11} 排第 1 位,v_{12} 排第 2 位,……,v_{1i} 排第 i 位,v_{21} 排第 $i+1$ 位,……,v_{2j} 排第 $i+j$ 位.(也就是将某结点子集排序在前,另一互补结点子集跟在

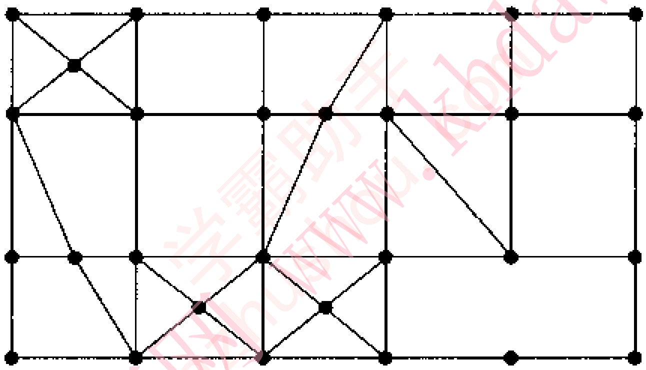
后面排.)

如此可得邻接矩阵 $A=\begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix}$ 的形式.

6. 设有一棵树,有两个结点的次数为2,一个结点的次数为3,三个结点的次数为4,问它有几个次数为1的结点?

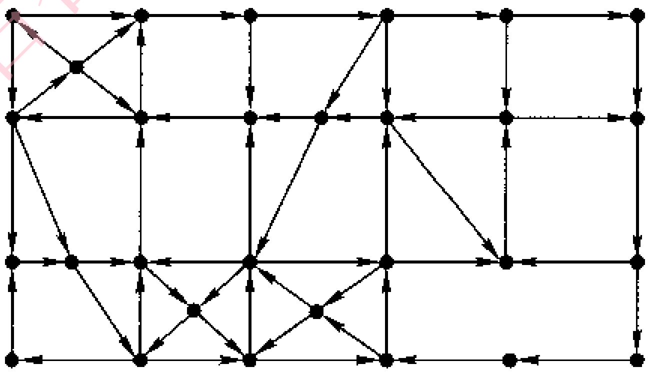
解:设有 x 个次数为1的结点,则该树的结点总数为 $n=2+1+3+x=6+x$,边数 $m=n-1=5+x$,因为 $\sum_{i=1}^{n}\deg(v_i)=2m$,故 $2\times(5+x)=2\times2+1\times3+3\times4+x\times1$,得 $x=9$,所以共有9个次数为1的结点.

7. 设有一个城市的街道图如下图所示,在每条街道上规定一个方向,使它成为一个有向连通图.



(第7题)

解:可根据无向图变为有向图的相关算法来标方向.



8. 图 $G=\langle V,E\rangle$ 是简单有向图,邻接矩阵刻画下列哪种关系(　　).

A. 点与点　　B. 点与边

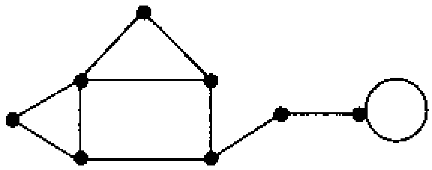
C. 边与点　　D. 边与边

解:A.

9. 给定平面图 G 如右图所示，平面图的面数是(　　).

A. 6　　　　B. 5

C. 8　　　　D. 9



(第 9 题)

解：B.

10. 一棵树有两个 4 次结点，三个 3 次结点，其余结点都是叶子，则叶子结点的数目为(　　).

A. 9　　B. 8　　C. 7　　D. 10

解：A.

11. G 为 (n,m) 图，其中有 n_k 个结点的次数为 k，其余结点的次数均为 $k+1$，试证明：$n_k=(k+1)\cdot n-2m$（其中 n 为图 G 的结点数目，m 为边数）.

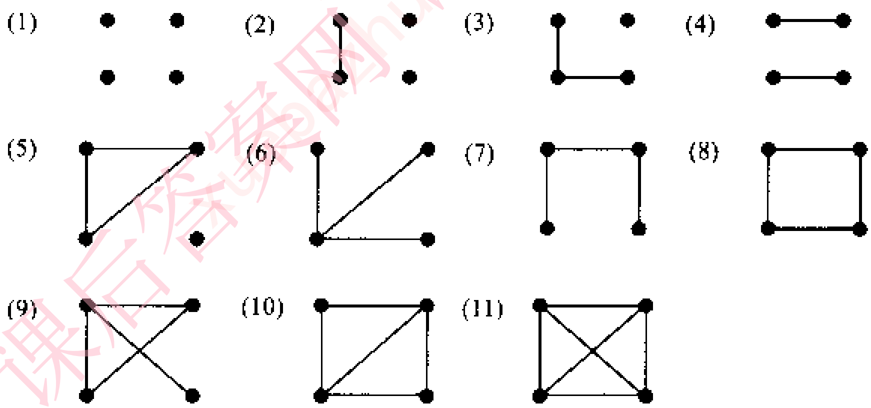
证明：因为 $\sum\limits_{i=1}^{n}\deg(v_i)=2m$，

$$\begin{aligned} n_k\cdot k+(n-n_k)\cdot(k+1) &= n_k\cdot k+n\cdot k-n_k\cdot k+n-n_k \\ &= n\cdot(k+1)-n_k=2m, \end{aligned}$$

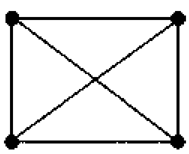
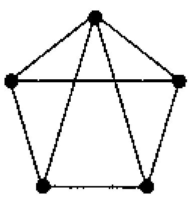
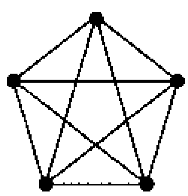
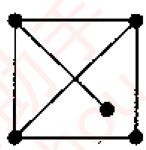
所以 $n_k=(k+1)\cdot n-2m$.

12. 试画出 K_4（4 阶无向简单完全图）的所有非同构的生成子图.

解：



13. 下列图中不是平面图的是(　　).

A. 　B. 　C. 　D. 

解：C.

14. 对树 T，下列正确的结论为(　　).

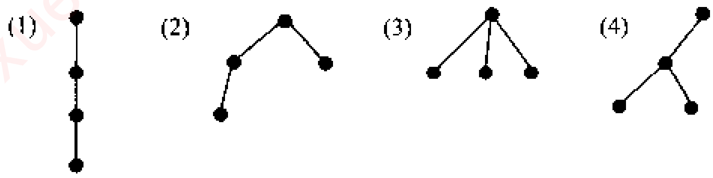
A. 树不是连通图　　　　B. 存在回路

C. 是没有回路的连通图　　　　　　　　D. 结点数和边数相等

解:C.

15. 画出具有4个结点非同构的有根树.

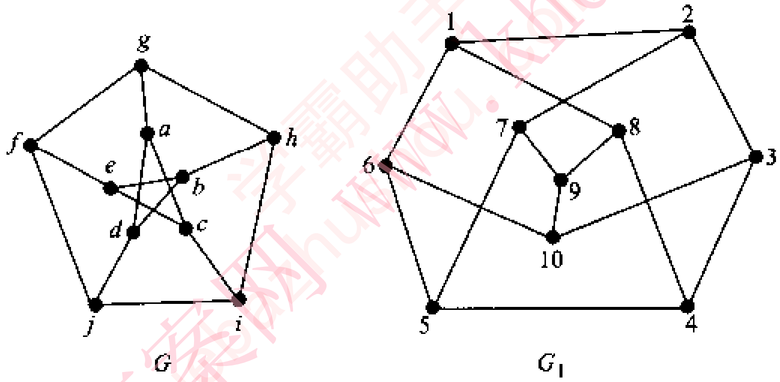
解:



16. G 是 n 个结点、m 条边的无向简单图,v 是次数为 k 的结点,则 $G-v$(G 中去掉 v 结点的图)中有________个结点,________条边.

解:$n-1$,$m-k$.

17. 证明下面图 G 和 G_1 同构.



(第17题)

证明:找出两图中结点的对应关系:

$h(a)=8$,　$h(b)=3$,　$h(c)=9$,　$h(d)=4$,

$h(e)=10$,　$h(f)=6$,　$h(g)=1$,　$h(h)=2$,

$h(i)=7$,　$h(j)=5$.

相应的边也将一一对应,所以图 G 和 G_1 同构.

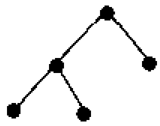
18. $(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 表示 n 个结点的图的各结点的次数,即 $\deg(v_i)=d_i$,若有简单图与之对应,则称其为可解的.试说明如下数据是否可解,并图示之.

(1) (1,1,1,2,3);

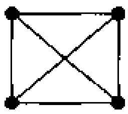
(2) (3,3,3,3);

(3) (2,3,3,4,5,6).

解:(1) 可解的,如图示



(2) 可解的,如图示



(3) 不可解的,因为奇次结点数目不可能为奇数个.

19. 对于一个连通的平面图 G,设 v 代表结点数目,e 代表边数,r 代表平面图的区域数目,下面成立的结论是( ).

A. $v+r=e+2$　　　　B. $v-e+r=3$

C. $e=v+r$　　　　D. $v-e+r=5$

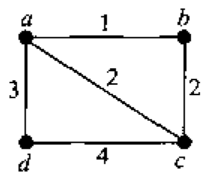
解:A.

20. G 为 n 个结点的连通图,G 的生成树 T 的边数为________;若 T 为________,则称 T 为最小生成树.

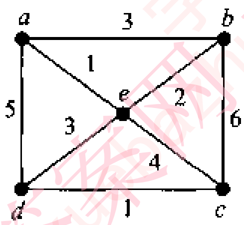
解:$n-1$,权是最小的树.

21. 求下面带权图的最小生成树.

(1)

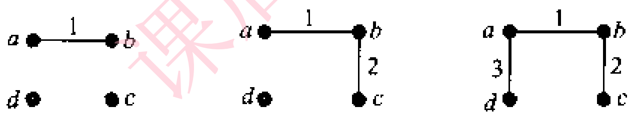


(2)

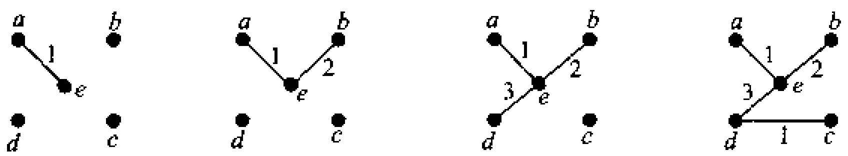


解:

(1)



(2)



22. 有 $n(n\geqslant 3)$ 个结点、m 条边的简单连通图是平面图的必要条件是( ).

A. $m\leqslant 3n+6$　　　　B. $m\geqslant 3n-6$

C. $n\leqslant 3m-6$　　　　D. $m\leqslant 3n-6$

解:D.

23. 具有4个结点的非同构的无向树的数目为(　　).

A. 2个　　B. 3个

C. 4个　　D. 5个

解:A.

24. 由一个孤立点构成的图称为__________;简单图中不包含__________.

解:平凡图;多重边.

25. 设 $G=\langle V,E\rangle$ 是 n 个结点、m 条边的连通图,要确定 G 的一棵生成树,必须删去 G 中的边数为(　　).

A. $n-m-1$　　B. $n-m+1$

C. $m-n+1$　　D. $m-n-1$

解:C.

26. 设图 G 是有 n 个结点、m 条边的欧拉图,n,m 有关系(　　).

A. $n=m$　　B. n,m 的奇偶性必相同

C. n,m 的奇偶性必相反　　D. n,m 的奇偶性可以相同也可以相反

解:D.

27. $G=\langle V,E\rangle$ 是无向连通图,若 $|V|=100$,$|E|=100$,则从 G 中能找到__________条回路.

解:一条回路.

28. 如果一个图的每个结点的次数都是 k,则称该图为 k 次正则图(k 次规则图).试证明3次正则图必有偶数个结点.

证明:设3次正则图共有 n 个结点 $v_1,v_2,\cdots,v_n$,则 $\sum_{i=1}^{n}\deg(v_i)=2m=3n$,此时 $3n$ 必为偶数.若 n 为奇数,$3n$ 也应为奇数,此处不可能成立,故 n 必为偶数,因此3次正则图必有偶数个结点.

29. 无向图 $G=\langle V,E\rangle$,$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_6\}$,

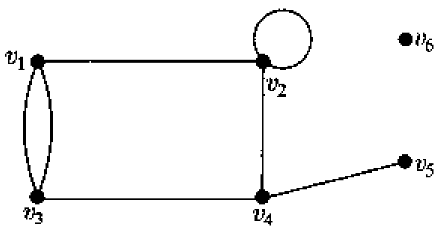
$$E=\{(v_1,v_2),(v_2,v_2),(v_2,v_4),(v_4,v_5),(v_3,v_4),(v_1,v_3),(v_3,v_1)\}.$$

(1) 图示 G;

(2) 判定 G 是否为简单图;

(3) 求出图中各结点的次数.

解:(1)



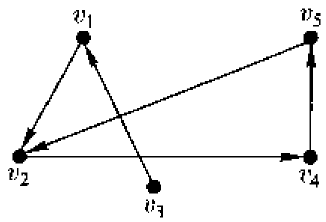
(2) 因为有多重边,故不是简单图.

(3) $\deg(v_1)=3$,$\deg(v_2)=4$,$\deg(v_3)=3$,$\deg(v_4)=3$,$\deg(v_5)=1$,$\deg(v_6)=0$.

30. 已知图 G 的邻接矩阵 M 如下,试画出图 G.

$$M=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\end{bmatrix}.$$

解:由邻接矩阵可知,图 G 为有 5 个结点、5 条边的有向图. 见下图:



31. 一个无向图 G 可一笔画出的两种情况是什么?

解:(1) 从图的一点出发经过每条边一次且只一次到达图的另一点.

(2) 从图的一点出发通过每条边一次且只一次又回到该点.

32. 若一个有向图 G 是欧拉图,它是否一定是强连通的? 若一个有向图 G 是强连通的,它是否一定是欧拉图? 说明理由.

解:(1) 因为 G 是欧拉图,存在欧拉回路 C,G 中的每个结点至少在 C 中出现一次,因而 G 中任意两点 u,v 均在 C 中,相互可达,故 G 是强连通的,所以一个有向欧拉图一定是强连通的.

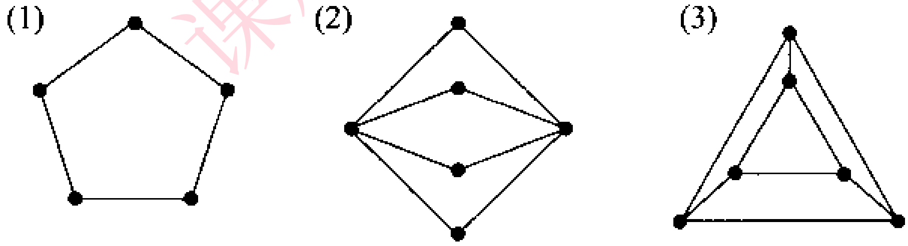
(2) 因为强连通图中每个结点的入度不一定等于其出度,所以一个强连通图不一定是有向欧拉图.

33. (1) 画一个有一条欧拉回路和一条哈密顿回路的图.

(2) 画一个有一条欧拉回路,但没有哈密顿回路的图.

(3) 画一个没有欧拉回路,但有一条哈密顿回路的图.

解:



34. 试证明:$n(n\geqslant 2)$ 个结点的有向完全图都是欧拉图.

证明:因为 $n(n\geqslant 2)$ 个结点的完全图每个结点的次数为 $n-1$,而对应的有向完全图是通过将无向图中的每条边改为一对方向相反的边而得到的,故每个结点的次数为偶数 $2(n-1)$,且每个结点的入度都等于出度,所以有向完全图是有向欧拉图.

35. 试证明:小于 30 条边的简单平面图有一个结点次数小于等于 4.

证明:用反证法,假设每个结点的次数大于4,即有 $\deg(v_i)\geqslant 5$,因为 $2e=\sum_{i=1}^{n}\deg(v_i)\geqslant 5n$,即 $n\leqslant\frac{2}{5}e$,由于 $e\leqslant 3n-6$,代入后得到 $e\leqslant\frac{6}{5}e-6$,即有 $e\geqslant 30$,与边数小于30相矛盾.

36. 证明:具有 n 个结点的树,必有 $\sum_{i=1}^{n}\deg(v_i)=2n-2$.

证明:对树而言,(n,m) 图必有关系式 $m=n-1$,故有 $\sum_{i=1}^{n}\deg(v_i)=2m=2(n-1)=2n-2$.

37. 设无向图 G 是由 $k(k\geqslant 2)$ 棵树组成的森林,已知 G 中有 n 个结点、m 条边. 试证明:

$$m=n-k.$$

证明:设 G 的 k 个连通分支为 $G_1,G_2,\cdots,G_k$,每个 G_i 有 n_i 个结点、m_i 条边,$i=1,2,\cdots,k$. 由于 G_i 都是树,有 $m_i=n_i-1,i=1,2,\cdots,k$. 故

$$m=\sum_{i=1}^{k}m_i=\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)=n-k.$$

38. 设 G 是简单无向图,试证明 G 有生成树当且仅当 G 连通.

证明:"$\Rightarrow$"若 G 有生成树 T,则 T 是 G 的生成子图且连通,故 G 必连通.

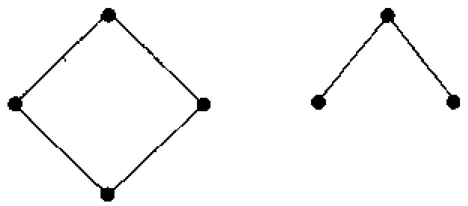
"$\Leftarrow$"设 G 连通,若 G 无回路即为生成树,若 G 有回路,则删去回路中的边,使 G 中无回路,即可得到 G 的生成树.

39. 给定二元完全树 $G=\langle V,E\rangle$,试证明:$|E|=2(n-1)$,其中 n 是树叶数.

证明:G 的结点数为 $|V|$,边数为 $|E|$,i 个分支结点,n 个树叶结点,根据定理有 $i=n-1$. 又 $|V|=i+n=2n-1$,由于 G 是树,所以又有 $|E|=|V|-1=2n-1-1=2(n-1)$.

40. 若图 G 有 n 个结点、$n-1$ 条边,G 一定是一棵树吗? 为什么?

解:不一定,因为树必须是连通的且 $m=n-1$ 的图,其中 n 为结点数、m 为边数. 例如下图所示,虽然满足 $m=n-1$(此时 $m=6,n=7$)条件,但不是树(不连通).



第七章

数 理 逻 辑

（含教材中第十章命题逻辑；第十一章谓词逻辑；第十二章数理逻辑的公理化理论；第十三章非经典逻辑介绍.）

7.1 主要内容

1. 命题逻辑基本概念.
2. 命题逻辑基本等式.
3. 命题逻辑推理规则.
4. 命题逻辑的范式.
5. 谓词逻辑基本概念.
6. 谓词逻辑基本公式.
7. 谓词逻辑的范式.
8. 公理系统的基本概念.
9. 公理系统的结构.
10. 永真推理、假设推理.
11. 命题逻辑公理系统.
12. 谓词逻辑公理系统.

7.2 复习重点

1. 命题逻辑基本等式.
2. 命题逻辑推理规则及应用.
3. 谓词逻辑基本公式.
4. 公理系统的结构.
5. 命题逻辑公理系统.

7.3 基本概念及注意事项

数理逻辑是用数学方法研究形式逻辑演绎推理规则的科学，它是一门数学，是一门研究演绎

推理规则的数学,在复习此部分时,主要应掌握如下几个要点:

① 思维的形式化;

② 指派法;

③ 公式推理;

④ 公理系统;

⑤ 范式;

⑥ 自动定理证明.

1. 思维形式化

学习数理逻辑首先要学会将一个形式逻辑问题转换成命题逻辑或谓词逻辑中的公式,亦即是思维的形式化.

(1) 命题逻辑

① 命题:$P_1,P_2,\cdots,P_n$;能判断真假的陈述句.

② 原子命题:最简单的不可再分的命题.

③ 真值:命题的值称真值,真值有 T,F 两种.

④ 命题联结词:

- 否定:$\neg P$;
- 并且:$P\wedge Q$;
- 或者:$P\vee Q$;
- 蕴含:$P\rightarrow Q$;
- 等价:$P\leftrightarrow Q$;
- 谢佛:$P\uparrow Q$;
- 魏泊:$P\downarrow Q$;
- 异或:$P\oplus Q$.

⑤ 个体常量:a,b,c,x,y,z.

⑥ 个体变量:$P,Q,R,\cdots$.

⑦ 函数:f,g,h.

⑧ 量词:$\exists$,$\forall$.

⑨ 括号:(,).

⑩ 项:

(a) 个体常量是项;

(b) 个体变量是项;

(c) f 是 n 元函数,$t_1,t_2,\cdots,t_n$ 是项,则 $f(t_1,t_2,\cdots,t_n)$ 是项;

(d) 项由且仅由有限次使用(a)(b)(c)而得.

⑪ 原子公式:P 是 n 元谓词,$t_1,t_2,\cdots,t_n$ 是项,则 $P(t_1,t_2,\cdots,t_n)$ 是原子公式.

⑫ 命题公式

——复合命题：原子命题与命题联结词结合构成的命题.

——真值表：复合命题的值可用以真值为值的表表示，称真值表.

——命题公式（简称公式）：

(a) 命题变元是公式；

(b) P 是公式，则 $\neg P$ 也是公式；

(c) P,Q 是公式，则 $P\vee Q,P\wedge Q,P\rightarrow Q,P\leftrightarrow Q$ 也是公式；

(d) 公式由且仅由经(a)～(c)有限步内生成.

——有关否定、析取、合取的基本等式：

- 等幂律：$P\vee P=P,P\wedge P=P$；
- 交换律：$P\vee Q=Q\vee P,P\wedge Q=Q\wedge P$；
- 结合律：$(P\vee Q)\vee R=P\vee(Q\vee R),(P\wedge Q)\wedge R=P\wedge(Q\wedge R)$；
- 分配律：$P\wedge(Q\vee R)=(P\wedge Q)\vee(P\wedge R),P\vee(Q\wedge R)=(P\vee Q)\wedge(P\vee R)$；
- 否定律：$\neg\neg P=P,\neg(P\vee Q)=\neg P\wedge\neg Q,\neg(P\wedge Q)=\neg P\vee\neg Q$；
- 常元律：$P\vee\neg P=\mathrm{T},P\wedge\neg P=\mathrm{F},\mathrm{T}\vee P=\mathrm{T},\mathrm{F}\wedge P=\mathrm{F},\mathrm{F}\vee P=P,\mathrm{T}\wedge P=P$.

——有关蕴含与等价的基本等式：

- $P\rightarrow(Q\rightarrow R)=(P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow R)$；
- $P\rightarrow Q=\neg Q\rightarrow\neg P$；
- $\neg P\rightarrow P=P$；
- $P\leftrightarrow Q=Q\leftrightarrow P$；
- $(P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow R=P\leftrightarrow(Q\leftrightarrow R)$；
- $\neg P\leftrightarrow Q=P\leftrightarrow\neg Q$；
- $P\rightarrow P=\mathrm{T}$；
- $P\leftrightarrow P=\mathrm{T}$；
- $P\leftrightarrow\neg P=\neg P\leftrightarrow P=\mathrm{F}$；
- $\mathrm{T}\rightarrow P=P$；
- $\mathrm{F}\rightarrow P=\mathrm{T}$；
- $P\rightarrow\mathrm{T}=\mathrm{T}$；
- $P\rightarrow\mathrm{F}=\neg P$；
- $\mathrm{T}\leftrightarrow P=P$；
- $\mathrm{F}\leftrightarrow P=\neg P$.

——有关异或、谢佛及魏泊的基本等式：

- 关于异或的等式：$P\oplus Q=Q\oplus P,P\oplus(Q\oplus R)=(P\oplus Q)\oplus R,\neg(P\oplus Q)=\neg P\oplus Q=P\oplus\neg Q$；
- 关于谢佛及魏泊的等式：$P\uparrow Q=Q\uparrow P,P\uparrow P=P,P\downarrow Q=Q\downarrow P,P\downarrow P=\neg P$；
- 常元律：$P\oplus P=\mathrm{F},\mathrm{T}\oplus P=\neg P,\mathrm{F}\oplus P=P,\mathrm{T}\uparrow P=\neg P,\mathrm{F}\uparrow P=\mathrm{T},\mathrm{T}\downarrow P=\mathrm{F},\mathrm{F}\downarrow P=\neg P$；
- 化归律：$P\oplus Q=\neg(P\leftrightarrow Q),P\uparrow Q=\neg(P\wedge Q),P\downarrow Q=\neg(P\vee Q)$.

⑬ 重言式

——永真式:所有指派均为真的公式,又称重言式.

——永假式:所有指派均为假的公式,又称矛盾式.

——可满足式:至少存在一个指派使公式为真.

——蕴含重言式 $P\Rightarrow Q$:$P\rightarrow Q$ 永真.

——等价重言式 $P\Leftrightarrow Q$:$P\leftrightarrow Q$ 为真.

——15 个蕴含重言式:

- $I_1:P\wedge Q\Rightarrow P$;
- $I_2:P\wedge Q\Rightarrow Q$;
- $I_3:P\Rightarrow P\vee Q$;
- $I_4:Q\Rightarrow P\vee Q$;
- $I_5:\neg P\Rightarrow P\rightarrow Q$;
- $I_6:Q\Rightarrow P\rightarrow Q$;
- $I_7:\neg(P\rightarrow Q)\Rightarrow P$;
- $I_8:\neg(P\rightarrow Q)\Rightarrow\neg Q$;
- $I_9:\neg P\wedge(P\vee Q)\Rightarrow Q$;
- $I_{10}:\neg Q\wedge(P\vee Q)\Rightarrow P$;
- $I_{11}:P\wedge(P\rightarrow Q)\Rightarrow Q$;
- $I_{12}:\neg Q\wedge(P\rightarrow Q)\Rightarrow\neg P$;
- $I_{13}:(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow R)\Rightarrow P\rightarrow R$;
- $I_{14}:(P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow S)\Rightarrow(P\wedge R)\rightarrow(Q\wedge S)$;
- $I_{15}:(P\vee Q)\wedge(P\rightarrow R)\wedge(Q\rightarrow R)\Rightarrow R$.

(2) 谓词逻辑

① 个体:客体.

② 谓词:刻画个体性质与关系.

③ 个体域:个体变化范围.

④ 全总个体域:所有考虑的个体作为论述范围.

⑤ 量词:刻画个体数量,有存在量词及全称量词之分,表示"有一些"及"所有".

⑥ 约束变元与自由变元:受量词约束的个体变元称约束变元,不受量词约束的个体变元称自由变元.

⑦ 谓词逻辑公式的原子公式:$P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

⑧ 谓词逻辑公式:

(a) 原子公式是公式;

(b) $\neg A$ 是公式;

(c) $A\vee B, A\wedge B, A\rightarrow B, A\leftrightarrow B$ 是公式;

(d) $\forall x(A)$，$\exists x(A)$是公式；

(e) 公式仅由(a)～(d)经有限步构成.

⑨ 函数 $y=f(x)$：个体间的转换关系.

⑩ 谓词逻辑基本公式：

- $\exists x(\neg P(x)) = \neg(\forall xP(x))$；
- $\forall x(\neg P(x)) = \neg(\exists xP(x))$；
- $\forall x(P(x) \vee Q) = \forall xP(x) \vee Q$；
- $\forall x(P(x) \wedge Q) = \forall xP(x) \wedge Q$；
- $\exists x(P(x) \vee Q) = \exists xP(x) \vee Q$；
- $\exists x(P(x) \wedge Q) = \exists xP(x) \wedge Q$；
- $\forall xP(x) \to Q = \exists x(P(x) \to Q)$；
- $\exists xP(x) \to Q = \forall x(P(x) \to Q)$；
- $Q \to \forall xP(x) = \forall x(Q \to (P(x))$；
- $Q \to \exists xP(x) = \exists x(Q \to (P(x))$；
- $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) = \forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$；
- $\exists x(P(x) \vee Q(x)) = \exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$；
- $\forall xP(x) \vee \forall xQ(x) \Rightarrow \forall x(P(x) \vee Q(x))$；
- $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$；
- $\forall x(P(x) \to Q(x)) \Rightarrow \forall xP(x) \to \forall xQ(x)$；
- $\forall x(P(x) \to Q(x)) \Rightarrow \exists xP(x) \to \exists xQ(x)$；
- $\forall xP(x) \Rightarrow P(x)$；
- $P(x) \Rightarrow \exists xP(x)$；
- $\forall x\forall yP(x,y) = \forall y\forall xP(x,y)$；
- $\exists x\exists yP(x,y) = \exists y\exists xP(x,y)$.

⑪ 谓词逻辑范式：

- 前束范式：一个公式仅出现$\neg$，$\vee$与$\wedge$并且所有量词均出现在最前面，其辖域一直延伸至末尾.
- 斯科林范式：前束范式中首标部分仅出现全称量词，而且整个公式不出现自由变元.

2. 推理规则研究

可以利用数理逻辑中的五种形式化推理方法作推理，这五种方法分别是：

(1) 指派法

此种方法在命题逻辑中称真值表法，是一种简单推理方法，但也是一种繁琐的方法，一般并不采用，在谓词逻辑中此法基本不用.

(2) 公式推理

应用命题逻辑中的基本等式、基本蕴含式及相应推理规则(1)～(72)以及谓词逻辑中的基

本等式、蕴含式及相应推理规则(1)′～(22)′进行推理是数理逻辑中基本推理方法之一.

(3) 公理系统

在数理逻辑中最为有效与常用的推理方法是公理化方法,这是一种最为科学与严格的方法,其中效果最好的是假设推理法,其主要推理思想是:

一个带蕴含的公式证明可化简为仅证明其最后一个蕴含后件即可,而所有前件均可作为已知条件(定理)使用.

① 公理:学科领域中最基本的原理与规则.

② 公理系统:以公理为基础所建立的基于一定语法规范的形式系统.

③ 公理系统的三大性质:不矛盾、完备性与独立性.

④ 公理系统的结构:

- 公理系统
  - 组成部分
    - 基本符号:按学科要求建立.
    - 公　　式:由基本符号按一定语法规则组成.
  - 推理部分
    - 公　　理:按学科要求建立.
    - 推理规则:一种动态推理方式,分原始规则与导出规则.
    - 证　　明:是一种由公理及推理规则按一定语法规则所进行的动态过程,并产生一个公式串.
    - 定　　理:由公理及推理规则按证明过程所得的结果.

⑤ 假设推理:设有 $A_1,A_2,\cdots,A_n\vdash B$,则必有 $A_1\to(A_2\to(\cdots(A_n\to B)\cdots))$.

⑥ 命题逻辑公理系统

——基本符号:命题、联结词及括号.

——公式:略.

——公理:

- $P\to P$;
- $(P\to(Q\to R))\to(Q\to(P\to R))$;
- $(P\to Q)\to((Q\to R)\to(P\to R))$;
- $(P\to(P\to Q))\to(P\to Q)$;
- $(P\leftrightarrow Q)\to(P\to Q)$;
- $(P\leftrightarrow Q)\to(Q\to P)$;
- $(P\to Q)\to((Q\to P)\to(P\leftrightarrow Q))$;
- $(P\wedge Q)\to Q$;
- $(P\wedge Q)\to P$;
- $P\to(Q\to P\wedge Q)$;
- $P\to P\vee Q$;
- $Q\to P\vee Q$;
- $(Q\to P)\to((R\to P)\to(Q\vee R\to P))$;

- $(P\to\neg Q)\to(Q\to\neg P)$;
- $\neg\neg P\to P$.

——推理规则:

- 分离规则:$P\to Q, P\vdash Q$;
- 导出规则:公理系统中每条蕴含永真式.

⑦ 谓词逻辑公理系统

——基本符号:命题、个体、谓词、联结词、量词及括号.

——公式:略.

——公理:命题逻辑公式的15条公理外加$\forall xP(x)\to P(x)$及$P(x)\to\exists xP(x)$.

——推理规则:分离规则、全称推广规则UG、全称指定规则US、存在推广规则EG、存在指定规则ES及导出规则.

(4) 范式

范式即是数理逻辑中的标准化公式,它是进行推理的又一种方式,其方法是将多种形式表示的公式规范成统一的表示形式,它为提供统一的、一致的推理手段创造条件.

常用的范式是:

① 特异析取范式(命题逻辑):它是一个析取式,其析取项是一个合取式,每个合取式之合取项中出现所有变元或其否定.

② 斯科林范式(谓词逻辑):$\forall x_1\forall x_2\cdots\forall x_n M(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

(5) 自动定理证明

在数理逻辑中还可以将推理过程用一种统一算法实现,从而可以做到用计算机自动实现,这就是定理自动证明,其具体方法是:

① 将公式化为 Horn 子句集.

② 采用消解原理,即由S为公理证明E为定理的过程可改写为:

- 作$S'=S\cup\{\neg E\}$为公理系统;
- 从$\neg E$开始在S'中不断使用反驳法;
- 最后出现空子句□则结束.

③ 如空子句出现则表示公式为真.

3. 小结

学习数理逻辑主要需掌握思维的形式化表示方法及五种形式化推理方法,这是学习本章的最基本要领.

7.4 典型例题详细分析

1. 不构造真值表证明下列蕴含式.

(1) $(P\to Q)\Rightarrow P\to(P\land Q)$;

(2) $(P\to Q)\to Q\Rightarrow P\lor Q$;

(3) $(Q\to(P\wedge\neg P))\to(R\to(R\to(P\wedge\neg P)))\Rightarrow R\to Q$.

证明:(1) 解法一:设 $P\to Q$ 为 T,则

① 若 P 为 T,得 Q 为 T,所以 $P\wedge Q$ 为 T,故 $P\to(P\wedge Q)$ 为 T;

② 若 P 为 F,得 Q 为 F,所以 $P\wedge Q$ 为 F,故 $P\to(P\wedge Q)$ 为 T.

解法二:设 $P\to(P\wedge Q)$ 为 F,则 P 为 T,$P\wedge Q$ 为 F,故必有 P 为 T,Q 为 F,所以 $P\to Q$ 为 F.

解法三:$(P\to Q)\to(P\to(P\wedge Q))$

$$\Rightarrow \neg(\neg P\vee Q)\vee(\neg P\vee(P\wedge Q))$$

$$\Rightarrow \neg(\neg P\vee Q)\vee((\neg P\vee P)\wedge(\neg P\vee Q))$$

$$\Rightarrow \neg(\neg P\vee Q)\vee(\neg P\vee Q)\Rightarrow \mathrm{T},$$

所以有 $(P\to Q)\Rightarrow P\to(P\wedge Q)$.

说明:可以有多种方法来证明蕴含式,关键是根据所设某一命题的真假,来推导式中其他命题的相应真假.

(2) 设 $P\vee Q$ 为 F,则 P 为 F 且 Q 为 F,故 $P\to Q$ 为 T,$(P\to Q)\to Q$ 为 F,所以 $(P\to Q)\to Q\Rightarrow P\vee Q$.

(3) 设 $R\to Q$ 为 F,则 R 为 T,Q 为 F. 因 $P\wedge\neg P$ 为 F,所以 $Q\to(P\wedge\neg P)$ 为 T,$R\to(P\wedge\neg P)$ 为 F,于是 $R\to(R\to(P\wedge\neg P))$ 为 F. 则 $(Q\to(P\wedge\neg P))\to(R\to(R\to(P\wedge\neg P)))$ 为 F.

即有 $(Q\to(P\wedge\neg P))\to(R\to(R\to(P\wedge\neg P)))\Rightarrow R\to Q$.

说明:对于条件命题 $P\to Q$,只有 P 为 T,Q 为 F 时,才有 $P\to Q$ 为 F,其余组合均为 T. 本题利用假定后件的真值取 F,推出前件的真值也为 F,从而推证 $P\Rightarrow Q$ 蕴含式成立的方法.

2. 将下列命题符号化.

(1) 朱云身体好,学习也好;

(2) 若 a 和 b 是偶数,则 $a+b$ 是偶数;

(3) 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,当且仅当其对边平行;

(4) 如果鸟是会飞的,那么汽车是交通工具;

(5) 明天小张将去演出,或者明天小王将去演出;

(6) 选张三或李四中的一人当团总支书记.

分析:上述是各类联结词的用法举例.

(1) 当 P 与 Q 都为真值时,$P\wedge Q$ 才为真.

(2)(4) 是条件命题,当且仅当 P 为真,Q 为假时,$P\to Q$ 才为假(其他情况均为真),相当于"若 P 则 Q". 在日常生活中,"若 P 则 Q"的前件 P 与后件 Q 间必须有因果关系,但是在条件命题 $P\to Q$ 中则不一定要求如此. 例如(4)中的前件 P 和后件 Q 均为真,$P\to Q$ 也为真,但是 P 与 Q 之间并无因果关系.

(3) 是双条件命题,表示 P 等价 Q. 当 P,Q 同时为真或同时为假时,$P\leftrightarrow Q$ 为真,否则为假. 本例中 P,Q 均为真,$P\leftrightarrow Q$ 也为真. 在日常生活中 P 与 Q 等价中的 P,Q 间存在逻辑关系,但对 $P\leftrightarrow Q$ 则不一定要求如此. 例如:设 P 为"南京是个历史名城",Q 为"南京大学是一所有名的大学",则 $P\leftrightarrow Q$ 表示"南京是个历史名城当且仅当南京大学是一所有名的大学". 此等价式(双条

件)的前件 P、后件 Q 均为真,因此该命题是真的,但是 P 和 Q 间没有必然的逻辑联系.

(5) 是析取,$P\vee Q$ 表示当 P 或者 Q 只要有一个为真时,$P\vee Q$ 就为真,这里小张和小王中只要有一个明天去演出(当然也可以两个都去演出),则 $P\vee Q$ 即为真,这称为"可兼的或".

(6) 所表示意思是张三、李四只有一人去当团总支书记,本例中的"或"是"不可兼的或",同(5)不一样,不能用 $P\vee Q$ 来表示,而应符号化为 $(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)$.

解:(1) 设 P:朱云身体好;Q:朱云学习好. $P\wedge Q$.

(2) 设 P:a 和 b 是偶数;Q:$a+b$ 是偶数. $P\rightarrow Q$.

(3) 设 P:四边形 $ABCD$ 是平行四边形;Q:四边形 $ABCD$ 的对边平行. $P\leftrightarrow Q$.

(4) 设 P:鸟是会飞的;Q:汽车是交通工具. $P\rightarrow Q$.

(5) 设 P:明天小张将去演出;Q:明天小王将去演出. $P\vee Q$.

(6) 设 P:选张三当团总支书记;Q:选李四当团总支书记. $(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)$.

3. 检验下述论证的有效性.

如果我学习,那么我数学不会不及格.

如果我不热衷于玩扑克,那么我将学习.

但我数学不及格,因此我热衷于玩扑克.

分析:本题首先确定要用哪些原子命题,然后再根据题中的三句话的含义,用命题来表示(符号化),三句话之间有一定的逻辑关系,将其翻译成数理逻辑中的符号表示后,经过推理,所得结论的逻辑因果关系成立,故论证是有效的.

解:设 P:我学习;Q:我的数学考试不及格;R:我热衷于玩扑克. 可符号化为:

$$P\rightarrow\neg Q,\ \neg R\rightarrow P,\ Q\Rightarrow R.$$

设 $(P\rightarrow\neg Q)\wedge(\neg R\rightarrow P)\wedge Q$ 为 T,则因 Q 为 T,$P\rightarrow\neg Q$ 为 T,可得 P 为 F,由 $\neg R\rightarrow P$ 为 T,得到 $\neg R$ 为 F,即 R 为 T,故本题论证有效.

4. 用符号写出下列各式,并且论证其逻辑有效性.

如果 6 是偶数,则 7 被 2 除不尽.

或 5 不是素数,或 7 被 2 除尽.

但 5 是素数.

所以 6 是奇数.

分析:本题结论 6 是奇数(即 6 不是偶数,$\neg P$ 为 T)与实际意义虽然不符,但其前提中或 5 不是素数,或 7 被 2 除尽,也不符合实际意义. 本题仅是逻辑推证有效.

解:设 P:6 是偶数;Q:7 被 2 除尽;R:5 是素数. 本题可符号化为:

$$(P\rightarrow\neg Q)\wedge(\neg R\vee Q)\wedge R\Rightarrow\neg P.$$

设 $(P\rightarrow\neg Q)\wedge(\neg R\vee Q)\wedge R$ 为 T,则有 R 为 T,且 $\neg R\vee Q$ 为 T,故 Q 为 T,再因 $P\rightarrow\neg Q$ 为 T,得到 P 为 F,$\neg P$ 为 T. 得证.

5. 将下列推理符号化,并判断推理是否正确.

(1) 若一个数为整数,则它为有理数;若一个数为有理数,则它为实数;有一个数为整数,所

以它为实数.

(2) 若一个数是实数,则它是复数;若一个数是虚数,则它也是复数;一个数既不是实数,又不是虚数,所以它不是复数.

(3) 一个数是复数,仅当它是实数或是虚数;一个数既不是实数又不是虚数,所以它不是复数.

解:(1) 设 P:一个数为整数;Q:一个数为有理数;R:一个数为实数. 故本题的推证为:

$$((P\to Q)\wedge(Q\to R)\wedge P)\Rightarrow R.$$

令 $S=((P\to Q)\wedge(Q\to R)\wedge P)\to R$,则

$$\begin{aligned}S&=((\neg P\vee Q)\wedge(\neg Q\vee R)\wedge P)\to R\\&=(P\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge\neg R)\vee\neg P\vee R\\&=(\neg P\vee(P\wedge\neg Q))\vee(R\vee(Q\wedge\neg R))\\&=((\neg P\vee P)\wedge(\neg P\vee\neg Q))\vee((R\vee Q)\wedge(R\vee\neg R))\\&=(\neg P\vee\neg Q)\vee(R\vee Q)\\&=\neg Q\vee Q\vee\neg P\vee R\\&=T\vee\neg P\vee R=T.\end{aligned}$$

因为 S 为重言式,故本题的推理成立.

说明:本题在推导过程中关键是将 S 第二步中的 $\neg P$ 和 $(P\wedge\neg Q)$、R 和 $(Q\wedge\neg R)$ 分别运算得到第三、四步.

(2) 设 R:一个数是实数;H:一个数是虚数;G:一个数是复数. 故本题推证为:

$$(R\to G)\wedge(H\to G)\wedge(\neg R\wedge\neg H)\Rightarrow\neg G.$$

$$\begin{aligned}\text{令 } S&=((R\to G)\wedge(H\to G)\wedge(\neg R\wedge\neg H))\to\neg G\\&=((\neg R\vee G)\wedge(\neg H\vee G)\wedge(\neg R\wedge\neg H))\to\neg G\\&=(R\wedge\neg G)\vee(H\wedge\neg G)\vee(R\vee H)\vee\neg G\\&=((R\wedge\neg G)\vee\neg G)\vee((H\wedge\neg G)\vee H)\vee R\\&=\neg G\vee H\vee R,\end{aligned}$$

当 G 为 T,H 为 F,R 为 F 时,$S=F$,所以 S 不是重言式,即本题推论不能成立.

说明:本题在对 S 的推导中关键要注意第三、四步中将 $\neg G$,H 分别和 $(R\wedge\neg G)$,$(H\wedge\neg G)$ 运算,所得结果分别为 $\neg G$ 和 H. 对于最终的推导结果,只要存在使 S 为 F 的指派,则说明 S 不是重言式,即可得推论不能成立.

(3) 设 R:一个数是实数;H:一个数是虚数;G:一个数是复数. 故本题的推证为:

$$(G\leftrightarrow(R\vee H))\wedge(\neg R\wedge\neg H)\Rightarrow\neg G.$$

令 $S=((G\leftrightarrow(R\vee H))\wedge(\neg R\wedge\neg H))\to\neg G$,则

$$\begin{aligned}S&=((G\to(R\vee H))\wedge((R\wedge H)\to G)\wedge(\neg R\wedge\neg H))\to\neg G\\&=((\neg G\vee R\vee H)\wedge(\neg(R\vee H)\vee G)\wedge(\neg R\wedge\neg H))\to\neg G\\&=((\neg G\vee R\vee H)\wedge((\neg R\wedge\neg H)\vee G)\wedge(\neg R\wedge\neg H))\to\neg G\end{aligned}$$

$=((\neg G\lor R\lor H)\land(\neg R\land\neg H))\to\neg G$

$=(G\land\neg R\land\neg H)\lor(R\lor H)\lor\neg G$

$=(G\land\neg R\land\neg H)\lor\neg(G\land\neg R\land\neg H)=\text{T}.$

因为 S 为重言式,故本题推理成立.

说明:推导 S 时的第三、四步中有 $((\neg R\land\neg H)\lor G)\land(\neg R\land\neg H)$ 等于 $(\neg R\land\neg H)$,是利用公式 $(A\lor B)\land A=A$. 第六、七步利用公式 $A\lor\neg A=\text{T}$.

6. 用推理规则证明以下各式:

(1) $\neg(P\land\neg Q),\neg Q\lor R,\neg R\Rightarrow\neg P$;

(2) $B\land C,\neg(B\leftrightarrow C)\lor(H\lor C)\vdash H\lor C$.

证明:(1) ① $\neg R$　　P

② $\neg Q\lor R$　　P

③ $\neg Q$　　T①② I

④ $\neg(P\land\neg Q)$　　P

⑤ $\neg P\lor Q$　　T④ E

⑥ $\neg P$　　T③⑤ I

(2) ① $B\land C$　　P

② B　　T① I

③ C　　T① I

④ $B\lor\neg C$　　T② I

⑤ $C\lor\neg B$　　T③ I

⑥ $C\to B$　　T④ E

⑦ $B\to C$　　T⑤ E

⑧ $(B\leftrightarrow C)$　　T⑥⑦ E

⑨ $\neg(B\leftrightarrow C)\lor(H\lor C)$　　P

⑩ $H\lor C$　　T⑧⑨ I

说明:(1)(2)中所用"$\Rightarrow$","$\vdash$"意思相同,表示要从左边推证出右边的结论.

对(1)中③:因为①中有 $\neg R$ 为 T,意味着 R 为 F,而②中 $\neg Q\lor R$ 为 T,那么只能是 $\neg Q$ 为 T(析取式为 T,其中一项为 F,那么另一项一定为 T);同理,由于⑤中 $\neg P\lor Q$ 为 T,其中 Q 为 F,那么 $\neg P$ 只能为 T,从而得到⑥.

对(2)中①:$B\land C$ 为 T,则一定有 B 为 T,C 为 T,从而得出④~⑦为 T 的推论,由于⑥⑦B,C 互相蕴含,得到⑧$(B\leftrightarrow C)$ 为 T,则推出 $\neg(B\leftrightarrow C)$ 为 F,又因条件给出⑨$\neg(B\leftrightarrow C)\lor(H\lor C)$ 为 T,则可推出⑩$H\lor C$ 为 T.

注:其中证明理由部分中 P:假设前提,T:分离规则,I:蕴含公式,E:等价公式. 后续题目中相同解释.

7. 设论域为整数集,下列公式中值为真的是(　　).

A. $(\exists y)(\forall x)(x+y=0)$　　B. $(\forall x)(\forall y)(x+y=0)$

C. $\neg(\exists x)(\exists y)(x+y=0)$　　D. $(\forall x)(\exists y)(x+y=0)$

分析:因为论域为整数集,所以选项 A 的含意为:对某些整数 y,加上任意的整数均为 0,显然不对;选项 B 意为:对所有的整数 x,都可以加上任意的整数,使其和等于 0,也不正确;选项 C 意为:对某些整数 x,存在与其相加后为 0 的整数整句话的否定,这一否定将原来正确的句子变为错误的了;选项 D 意为:对任意整数 x 而言,总能找到与其相加后等于 0 的整数,如 $x=2$,存在 $y=-2$,有 $2+(-2)=0$,故 D 是正确的.

解:D.

8. 公式 $(\forall x)(F(x)\wedge G(x,y)\vee(\exists z)H(y,z))\to S(x)$ 中哪些是自由变元?哪些是约束变元?

分析:本题中 x 既是自由变元又是约束变元,在 $S(x)$ 中 x 不受约束是自由变元,而在 $(\forall x)$ 之后的括号中是约束变元;y 没有相应的量词来限制,也是自由变元;z 出现在 $(\exists z)$ 之后括号所限定的辖域中,故为约束变元.

解:x,y 是自由变元;x,z 是约束变元.

9. 设 $G(x)$:x 是金子,$F(x)$:x 是闪光的,则命题"金子是闪光的,但闪光的不一定是金子",试将其形式化.

解:$(\forall x)(G(x)\to F(x))\wedge(\exists y)(F(y)\wedge\neg G(y))$,指出有些闪光的 y 并不是金子.

说明:本题中 $(\forall x)(G(x)\to F(x))$ 指出所有金子均可推出其闪光,而 $(\exists y)(F(y)\wedge\neg G(y))$ 指出有些闪光的 y 并不是金子,两者合取即为本命题.

10. 利用谓词公式翻译下列命题:

(1) 如果有限个数的乘积为零,那么至少有一个因子等于零;

(2) 对于每一个实数 x,存在一个更大的实数 y;

(3) 存在实数 x,y 和 z,使得 x 与 y 之和大于 x 与 z 之积.

解:(1) 设 $A(x)$:x 是有限个数的乘积,$B(y)$:y 为零,$C(x)$:x 的乘积为零,$E(y)$:y 是乘积中的一个因子,则有

$$(\forall x)(A(x)\wedge C(x)\to(\exists y)(E(y)\wedge B(y))).$$

(2) 设 $R(x)$:x 是实数,$G(x,y)$:y 大于 x. 则有

$$(\forall x)(R(x)\to(\exists y)(G(x,y)\wedge R(y))).$$

(3) 设 $R(x)$:x 是实数,$G(x,y)$:x 大于 y. 则有

$$(\exists x)(\exists y)(\exists z)(R(x)\wedge R(y)\wedge R(z)\wedge G(x+y,x\cdot z)).$$

说明:利用谓词公式表示命题时,要注意量词的使用及刻画到命题中的每个细节特性,如上述(1)中 $(\exists y)(E(y)\wedge B(y))$ 刻画了存在因子 y(即 $\exists y$),$E(y)$ 指明 y 是乘积中的因子,$B(y)$ 更进一步刻画 y 为零.

11. 指出下列公式的约束变元和自由变元,并指出约束变元受什么量词约束.

(1) $(\forall x)P(x)\to P(y)$;

(2) $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \wedge (\exists x)S(x)$;

(3) $(\exists x)((\forall y)(A(x) \wedge B(y) \rightarrow (\forall x)C(x))$;

(4) $(\exists x)(\exists y)(E(x,y) \wedge F(z))$.

解:(1) x 是约束变元,受全称量词的约束,y 是自由变元.

(2) x 是约束变元,$(P(x) \wedge Q(x))$ 中的 x 受全称量词的约束;$S(x)$ 中的 x 受存在量词的约束.

(3) x,y 都是约束变元,$A(x)$ 中的 x 受存在量词的约束,$C(x)$ 中的 x 受全称量词的约束,$B(y)$ 中的 y 受全称量词的约束.

(4) x,y 都是约束变元,均受存在量词的约束,z 是自由变元.

说明:本题要明确各量词及所带指导变元的辖域.(3) 中的 x 既有属于 $\forall$ 的指导变元(管辖 $C(x)$),又有属于 $\exists$ 的指导变元(管辖 $A(x)$).

12. 谓词公式 $(\exists x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x) \vee (\exists y)R(y)$ 的前束范式是什么?

解:$(\forall x)(\forall z)(\exists y)(P(x) \rightarrow Q(z) \vee R(y))$.

说明:前束范式要将所有的量词都搬到整个公式的开头,并管辖整个公式,要明确各量词所管的指导变元不能越权管其他命题,并要注意同名指导变元的处理问题.例如本题中将 $(\forall x)Q(x)$ 改名为 $(\forall z)Q(z)$,然后再将 $(\forall z)$ 搬到开头去,而 $(\exists y)$ 无同名冲突,可直接搬到开头去.

13. 考虑以下赋值:论域 $D = \{2,3\}$,$f(2) = 3$,$f(3) = 2$,$E(2,2) = \mathrm{F}$,$E(2,3) = \mathrm{F}$,$E(3,2) = \mathrm{T}$,$E(3,3) = \mathrm{T}$. 试求以下各式的真值:

(1) $E(2,f(2)) \wedge E(3,f(3))$;

(2) $(\forall x)(\exists y)E(y,x)$;

(3) $(\forall x)(\forall y)(E(x,y) \rightarrow E(f(x),f(y)))$.

解:(1) $E(2,f(2)) \wedge E(3,f(3)) \Leftrightarrow E(2,3) \wedge E(3,2) \Leftrightarrow \mathrm{F} \wedge \mathrm{T} \Leftrightarrow \mathrm{F}$;

(2)
$$\begin{aligned}(\forall x)(\exists y)E(y,x) &\Leftrightarrow (\forall x)(E(2,x) \vee E(3,x))\\ &\Leftrightarrow (E(2,2) \vee E(3,2)) \wedge (E(2,3) \vee E(3,3))\\ &\Leftrightarrow (\mathrm{F} \vee \mathrm{T}) \wedge (\mathrm{F} \vee \mathrm{T}) \Leftrightarrow \mathrm{T} \wedge \mathrm{T} \Leftrightarrow \mathrm{T};\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}&(\forall x)(\forall y)(E(x,y) \rightarrow E(f(x),f(y)))\\ \Leftrightarrow\ &(\forall x)((E(x,2) \rightarrow E(f(x),f(2))) \wedge (E(x,3) \rightarrow E(f(x),f(3))))\\ \Leftrightarrow\ &(E(2,2) \rightarrow E(f(2),f(2))) \wedge (E(2,3) \rightarrow E(f(2),f(3))) \wedge\\ &(E(3,2) \rightarrow E(f(3),f(2))) \wedge (E(3,3) \rightarrow E(f(3),f(3)))\\ \Leftrightarrow\ &(E(2,2) \rightarrow E(3,3)) \wedge (E(2,3) \rightarrow E(3,2)) \wedge\\ &(E(3,2) \rightarrow E(2,3)) \wedge (E(3,3) \rightarrow E(2,2))\\ \Leftrightarrow\ &(\mathrm{F} \rightarrow \mathrm{T}) \wedge (\mathrm{F} \rightarrow \mathrm{T}) \wedge (\mathrm{T} \rightarrow \mathrm{F}) \wedge (\mathrm{T} \rightarrow \mathrm{F})\\ \Leftrightarrow\ &\mathrm{T} \wedge \mathrm{T} \wedge \mathrm{F} \wedge \mathrm{F} \Leftrightarrow \mathrm{F}.\end{aligned}$$

说明:此类题目在消除量词时,要一个一个地进行,并且要将所在论域中的具体值全部用到

($\exists$的指导变元被代换后的各项命题用$\vee$联结;$\forall$的各项用$\wedge$联结).

例如:本题(2)中先替换$\exists y$,得到$(\forall x)(E(2,x)\vee E(3,x))$,即将2,3分别代换$E(y,x)$中的$y$后,再用$\vee$联结.下一步再将上式中的$x$分别用论域中的2,3代换,再用$\wedge$联结,得到

$$(E(2,2)\vee E(3,2))\wedge(E(2,3)\vee E(3,3)),$$

不能误代为$(E(2,2)\vee E(3,3))$.

14. 设论域$D=\{a,b,c\}$,求证:$(\forall x)A(x)\vee(\forall x)B(x)\Rightarrow(\forall x)(A(x)\vee B(x))$.

证明:因为论域$D=\{a,b,c\}$,所以

$$\begin{aligned}
&(\forall x)A(x)\vee(\forall x)B(x)\\
\Longleftrightarrow\ &(A(a)\wedge A(b)\wedge A(c))\vee(B(a)\wedge B(b)\wedge B(c))\\
\Longleftrightarrow\ &(A(a)\vee B(a))\wedge(A(a)\vee B(b))\wedge(A(a)\vee B(c))\wedge\\
&(A(b)\vee B(a))\wedge(A(b)\vee B(b))\wedge(A(b)\vee B(c))\wedge\\
&(A(c)\vee B(a))\wedge(A(c)\vee B(b))\wedge(A(c)\vee B(c))\\
\Rightarrow\ &(A(a)\vee B(a))\wedge(A(b)\vee B(b))\wedge(A(c)\vee B(c))\\
\Longleftrightarrow\ &(\forall x)(A(x)\vee B(x)).
\end{aligned}$$

所以$(\forall x)A(x)\vee(\forall x)B(x)\Rightarrow(\forall x)(A(x)\vee B(x))$.

说明:本题给了一个特定的论域,将具体值代入公式.上面证明过程中的"$\Rightarrow$"符号从左边的九个合取项中取出三个,从而得到右边的结果.

15. 用推理规则证明:

前提:$(\exists x)P(x)\rightarrow(\forall x)((P(x)\vee Q(x))\rightarrow R(x))$,$(\exists x)P(x)$,$(\exists x)Q(x)$.

结论:$(\exists x)(\exists y)(R(x)\wedge R(y))$.

证明:(1) $(\exists x)P(x)\rightarrow(\forall x)((P(x)\vee Q(x))\rightarrow R(x))$	P
(2) $(\exists x)P(x)$	P
(3) $(\forall x)((P(x)\vee Q(x))\rightarrow R(x))$	$T(1)(2)I$
(4) $P(c)$	$ES(2)$
(5) $(P(c)\vee Q(c))\rightarrow R(c)$	$US(3)$
(6) $P(c)\vee Q(c)$	$T(4)I$
(7) $R(c)$	$T(5)(6)I$
(8) $(\exists x)Q(x)$	P
(9) $Q(d)$	$ES(8)$
(10) $(P(d)\vee Q(d))\rightarrow R(d)$	$US(3)$
(11) $Q(d)\vee P(d)$	$T(9)I$
(12) $R(d)$	$T(10)(11)I$
(13) $R(c)\wedge R(d)$	$T(7)(12)I$
(14) $(\exists y)(R(c)\wedge R(y))$	$EG(13)$
(15) $(\exists x)(\exists y)(R(x)\wedge R(y))$	$EG(14)$

说明:本题结论是$(\exists x)(\exists y)(R(x)\wedge R(y))$,要两次分别指定$(\exists x)$中的$x$和$(\exists y)$中的$y$,即要根据两种变元的情况,作两次存在推广.

一阶谓词逻辑中的逻辑推证也经常用到P,T,CP等推理规则,其意义与命题公式中的对应规则相同,只是在带量词的谓词表达式进行推理证明时,除公式表上已列出的带量词公式变换外,一般要先应用US或ES规则,将量词指定后再对谓词公式进行逻辑推证,然后再应用UG或EG规则,对命题进行量化,在应用指定规则时,特别要注意US和ES应用的先后次序.如上例中先指定$(\exists x)$中的x后,对$(\forall x)$中的x可随意指定,但如果先指定$(\forall x)$中的x后,对$(\exists x)$中的x就不能任意作特称指定.

16. 改正下题证明中的错误.

前提:$(\forall x)((\exists y)(S(x,y)\wedge M(y))\rightarrow(\exists z)(P(z)\wedge R(x,z)))$.

结论:$\neg(\exists z)P(z)\rightarrow(\forall x)(\forall y)(S(x,y)\rightarrow\neg M(y))$.

证明过程:

(1)	$(\forall x)((\exists y)(S(x,y)\wedge M(y))\rightarrow(\exists z)(P(z)\wedge R(x,z)))$	P
(2)	$(\exists y)(S(b,y)\wedge M(y))\rightarrow(\exists z)(P(z)\wedge R(b,z))$	$US(1)$
(3)	$\neg(\exists z)P(z)$	P(附加前提)
(4)	$(\forall z)\neg P(z)$	$T(3)E$
(5)	$\neg P(a)$	$US(4)$
(6)	$\neg P(a)\vee\neg R(b,a)$	$T(5)I$
(7)	$(\forall z)(\neg P(z)\vee\neg R(b,z))$	$UG(6)$
(8)	$\neg(\exists z)(P(z)\wedge R(b,z))$	$T(7)E$
(9)	$\neg(\exists y)(S(b,y)\wedge M(y))$	$T(2)(8)I$
(10)	$(\forall y)(\neg S(b,y)\vee\neg M(y))$	$T(9)E$
(11)	$(\forall y)(S(b,y)\rightarrow\neg M(y))$	$T(10)E$
(12)	$(\forall x)(\forall y)(S(x,y)\rightarrow\neg M(y))$	$UG(11)$
(13)	$\neg(\exists z)P(z)\rightarrow(\forall x)(\forall y)(S(x,y)\rightarrow\neg M(y))$	CP

证明:本题错误步骤为:(7)⇒(8)、(9)⇒(10)、(10)⇒(11),在带有量词的情况下不能作如此推证.正确证明如下:

(1)	$(\forall x)((\exists y)(S(x,y)\wedge M(y))\rightarrow(\exists z)(P(z)\wedge R(x,z)))$	P
(2)	$(\exists y)(S(b,y)\wedge M(y))\rightarrow(\exists z)(P(z)\wedge R(b,z))$	$US(1)$
(3)	$\neg(\exists z)P(z)$	P(附加前提)
(4)	$(\forall z)\neg P(z)$	$T(3)E$
(5)	$\neg P(a)$	$US(4)$
(6)	$\neg P(a)\vee\neg R(b,a)$	$T(5)I$
(7)	$\neg(P(a)\wedge R(b,a))$	$T(6)E$
(8)	$(\forall z)\neg(P(z)\wedge R(b,z))$	$UG(7)$

(9) $\neg(\exists z)(P(z)\wedge R(b,z))$ $T(8)E$

(10) $\neg(\exists y)(S(b,y)\wedge M(y))$ $T(2)(9)I$

(11) $(\forall y)\neg(S(b,y)\wedge M(y))$ $T(10)I$

(12) $\neg(S(b,c)\wedge M(c))$ $US(11)$

(13) $\neg S(b,c)\vee\neg M(c)$ $T(12)E$

(14) $S(b,c)\to\neg M(c)$ $T(13)E$

(15) $(\forall y)(S(b,y)\to\neg M(y))$ $UG(14)$

(16) $(\forall x)(\forall y)(S(x,y)\to\neg M(y))$ $UG(15)$

(17) $\neg(\exists z)P(z)\to(\forall x)(\forall y)(S(x,y)\to\neg M(y))$ CP

说明:带量词的谓词公式,在进行逻辑推证时,必须正确使用 US,ES,UG,EG 这几个消除量词和扩张量词的规则.在推理过程中,谓词公式只能应用前面所列的蕴含式与等价式,除所列出的带量词公式外,一般不能在量词后面的辖域内进行蕴含推证或等价变换,如:$(\forall z)(\neg P(z)\vee\neg R(b,z))\Leftrightarrow(\forall z)\neg(P(z)\wedge R(b,z))$,但此式在推理中不能作为公式引用,因为它未列入推理公式表中,因此必须根据 US 或 ES 规则,消除量词后,才能对谓词公式进行蕴含或等价推证,在作了适当的推演后,再应用 UG,EG 规则恢复约束关系,以完成带量词公式的逻辑推证.

7.5 相关教材中习题及解答

1. (10.1)将下列语句翻译成命题逻辑公式:

(1) 明天晴到多云,西北风四级,有时五级;

(2) 她长得既不漂亮又不文雅;

(3) 若要人不知,除非己莫为;

(4) 没有共产党就没有新中国;

(5) 黄色染料与红色染料合成为棕色或橙色染料;

(6) 天黑了,外面有狼,你还是在这里过一宿吧;

(7) 生命不息战斗不止;

(8) 不劳动者不得食.

解:(1) 设 P:明天晴到多云;Q:西北风四级;R:有时五级. $P\wedge Q\wedge R$.

(2) 设 P:她长得漂亮;Q:她文雅. $\neg P\wedge\neg Q$.

(3) 设 P:要人知;Q:己莫为. $\neg P\to Q$.

(4) 设 P:有共产党;Q:有新中国. $\neg P\to\neg Q$.

(5) 设 P:黄色染料;Q:红色染料;R:棕色染料;S:橙色染料. $(P\wedge Q)\to(R\oplus S)$.

(6) 设 P:天黑了;Q:外面有狼;R:你在这里过一宿. $(P\wedge Q)\to R$.

(7) 设 P:生命终止;Q:战斗停止. $\neg P\to\neg Q$.

(8) 设 P:劳动者;Q:得到食物. $\neg P\leftrightarrow\neg Q$.

2. (10.2) 用真值表方法证明下面各题:

(1) $P\to(Q\to R)=Q\to(P\to R)$;

(2) $(P\to Q)\wedge(R\to Q)=(P\vee R\to Q)$;

(3) $P\to Q=\neg P\vee Q$.

解:(1) 分别构造等式两边的真值表:

P	Q	R	$Q\to R$	$P\to(Q\to R)$
F	F	F	T	T
F	F	T	T	T
F	T	F	F	T
F	T	T	T	T
T	F	F	T	T
T	F	T	T	T
T	T	F	F	F
T	T	T	T	T

P	Q	R	$P\to R$	$Q\to(P\to R)$
F	F	F	T	T
F	F	T	T	T
F	T	F	T	T
F	T	T	T	T
T	F	F	F	T
T	F	T	T	T
T	T	F	F	F
T	T	T	T	T

比较两表的最右列,知其真假取值一致.故有 $P\to(Q\to R)=Q\to(P\to R)$.

(2) 分别构造等式两边的真值表:

P	Q	R	$P\to Q$	$R\to Q$	$(P\to Q)\wedge(R\to Q)$
F	F	F	T	T	T
F	F	T	T	F	F
F	T	F	T	T	T
F	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F
T	F	T	F	F	F
T	T	F	T	T	T
T	T	T	T	T	T

P	Q	R	$P\vee R$	$P\vee R\to Q$
F	F	F	F	T
F	F	T	T	F
F	T	F	F	T
F	T	T	T	T
T	F	F	T	F
T	F	T	T	F
T	T	F	T	T
T	T	T	T	T

比较两表最右列,知其真值表一致.故有 $(P\to Q)\wedge(R\to Q)=(P\vee R\to Q)$.

(3) 分别构造等式两边的真值表:

P	Q	$P\to Q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

P	Q	$\neg P$	$\neg P\vee Q$
F	F	T	T
F	T	T	T
T	F	F	F
T	T	F	T

比较两表最右列,知其真值表一致. 故有 $P\to Q=\neg P\vee Q$.

3. (10.3) 将下面的语句化简:

(1) 你去不去都没有关系;

(2) 我没有去火车站接你是不对的,而你没有在火车站等我也是不对的;

(3) 南京热,重庆热,南京与重庆都热,没有不热的南京,也没有不热的重庆.

解:(1) 设 P:你去;Q:有关系. 原句意为:

$$(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)=(P\vee\neg P)\wedge\neg Q=\neg Q,$$

故可化简为 $\neg Q$,即无关系.

(2) 设 P:我去火车站接你;Q:你在火车站等我;R:是对的. 原句意为:

$$(\neg P\wedge\neg R)\wedge(\neg Q\wedge\neg R)=\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R,$$

故化简后意为:我没去火车站接你,而你也没在火车站等我都是不对的.

(3) 设 P:南京热;Q:重庆热. 原句意为:

$$(P\wedge Q)\wedge(P\wedge Q)\wedge\neg(\neg P)\wedge\neg(\neg Q)=P\wedge Q,$$

故化简后 $P\wedge Q$,意为:南京和重庆都热.

4. (10.4) 求下列公式的析取范式、特异析取范式、合取范式和特异合取范式:

(1) $(\neg P\vee\neg Q)\to(P\leftrightarrow\neg Q)$;

(2) $P\to(P\wedge(Q\to P))$;

(3) $P\vee(\neg P\to(Q\vee(\neg P\to R)))$.

解:(1) 析取范式、特异析取范式:

$$\begin{aligned}(\neg P\vee\neg Q)\to(P\leftrightarrow\neg Q)&=\neg(\neg P\vee\neg Q)\vee((\neg P\vee\neg Q)\wedge(P\vee Q))\\&=(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q).\end{aligned}$$

合取范式、特异合取范式:$(\neg P\vee\neg Q)\to(P\leftrightarrow\neg Q)=P\vee Q$.

(2) 原式 $=\neg P\vee(P\wedge(\neg Q\vee P))$

$=\neg P\vee((P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge P))$

$=\neg P\vee(P\wedge\neg Q)\vee P=$ T(重言式).

真值表

P	Q	原式
F	F	T
F	T	T
T	F	T
T	T	T

析取范式:$\neg P\vee(P\wedge\neg Q)\vee P$.

特异析取范式:

$(\neg P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge Q)$.

合取范式:$\neg P\vee(P\wedge\neg Q)\vee P=(\neg P\vee P\vee P)\wedge(\neg P\vee P\vee\neg Q)=(\neg P\vee P)\wedge(\neg P\vee P\vee\neg Q)$.

(3) 原式 $=P\vee(P\vee(Q\vee(Q\vee R)))=P\vee Q\vee R$,

$$\begin{aligned}P\vee Q\vee R&=((P\wedge(Q\vee\neg Q))\wedge(R\vee\neg R))\vee((Q\wedge(P\vee\neg P))\wedge(R\vee\neg R))\vee\\&\quad((R\wedge(P\vee\neg P))\wedge(Q\vee\neg Q))\\&=(P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee\\&\quad(P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R)\vee\end{aligned}$$

$$(P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)$$
$$=(P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge R).$$

析取范式：$P\vee Q\vee R$.

特异析取范式：

$(P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)$.

合取范式、特异合取范式：$P\vee Q\vee R$.

5. (10.5) 利用基本等式证明下列各等式：

(1) $P\wedge(P\to Q)=P\wedge Q$;

(2) $\neg(P\vee Q\to\neg R)=(P\vee Q)\wedge R$.

证明：(1) $P\wedge(P\to Q)=P\wedge(\neg P\vee Q)=(P\wedge\neg P)\vee(P\wedge Q)=P\wedge Q$;

(2) $\neg(P\vee Q\to\neg R)=\neg(\neg(P\vee Q)\vee\neg R)=(P\vee Q)\wedge R$.

6. (10.6) 证明下面各题：

(1) 我夫人过生日，我送一束鲜花给她，除非我工作很忙. 今天我没有送鲜花给夫人，今天是夫人的生日，由此是否可推得"今天我工作很忙".

(2) 天冷了要加衣服，否则会生病，生病了就不能去上课，从而会影响学习. 今天天冷，但我没有加衣服，由此是否可以推得"我的学习会受到影响".

证明：(1) 设 P：我夫人过生日，Q：我送一束鲜花给她，R：我工作很忙.

则有 $\neg(P\to Q)\to R$，$\neg Q\wedge P$. 其中

$\neg(P\to Q)\to R=\neg(\neg P\vee Q)\to R=(P\wedge\neg Q)\to R$，$\neg Q\wedge P=P\wedge\neg Q$.

根据题意有 $P\wedge\neg Q,(P\wedge\neg Q)\to R\vdash R$（假言推论）.

故有 R 成立，即今天我工作很忙.

(2) 设 P：天冷，Q：要加衣服，R：会生病，S：能去上课，T：会影响学习.

则有 $\neg(P\to Q)\to R,(R\to\neg S)\to T,P\wedge\neg Q$，其中 $P\wedge\neg Q=\neg(P\to Q)$，

$\neg(P\to Q)\to R,R\to\neg S\to T\vdash\neg(P\to Q)\to\neg S\to T$（假言三段论），

$\neg(P\to Q),\neg(P\to Q)\to(\neg S\to T)\vdash\neg S\to T$（假言推论），

$\neg(P\to Q)\to R,\neg(P\to Q)\vdash R$，　$R,R\to\neg S\vdash\neg S$，　$\neg S$，$\neg S\to T\vdash T$.

故有结论 T，会影响学习.

7. (11.1) 将下面语句翻译成谓词逻辑公式：

(1) 己所不欲勿施于人；

(2) 鱼我所欲也，熊掌亦我所欲也；

(3) 人人为我，我为人人；

(4) 人不犯我，我不犯人；

(5) 白猫黑猫逮住老鼠就是好猫；

(6) 对一切实数都有 $x^2>0$ 或 $x^2=0$;

(7) 通过两个不同点有且仅有一条直线;

(8) 在$[a,b]$连续的函数必在$[a,b]$一致连续;

(9) 国际奥委会主席亲自将一枚金质奖章授予我国运动员邓亚萍;

(10) 三角形三内角之和是180°.

解:(1) 设 $P(x)$:x 所不欲,$Q(x)$:x 勿施于人,$R(x)$:x 为人.

$$\forall x(R(x)\to P(x)\wedge Q(x)).$$

(2) 设 $P(x)$:鱼某人所欲也,$Q(x)$:熊掌亦某人所欲也,a:我.

$$P(a)\wedge Q(a).$$

(3) 设 $P(x,y)$:x 为 y,$R(x)$:x 是人,a:我.

$$\forall x(R(x)\to P(x,a)\wedge P(a,x)).$$

(4) 设 $P(x,y)$:x 犯 y,$R(x)$:x 是人,a:我.

$$\forall x(R(x)\to(\neg P(x,a)\to\neg P(a,x))).$$

(5) 设 $C(x)$:x 是猫,$W(x)$:x 是白的,$B(x)$:x 是黑的,$P(x,y)$:x 逮住 y,$G(x)$:x 是好的,$M(y)$:y 是老鼠.

$$\forall x(C(x)\wedge(W(x)\vee B(x))\to\exists y(M(y)\wedge P(x,y))\to(G(x)\wedge C(x))).$$

(6) 设 $R(x)$:x 是实数,$>(x^2,y)$表示 $x^2>y$,$=(x^2,y)$表示 $x^2=y$.

$$\forall x(R(x)\to>(x^2,0)\vee=(x^2,0)).$$

(7) 设 $P(x)$:x 是一个点,$L(x)$:x 是一条直线,$R(x,y,z)$:z 通过 x 和 y,$E(x,y)$:$x=y$.

$$\forall x\forall y((P(x)\wedge P(y)\wedge\neg E(x,y))\to\exists z(L(z)\wedge R(x,y,z))\wedge\forall w(R(x,y,w)\to w=z)).$$

(8) 设 $F(x,a,b)$:x 是在$[a,b]$上连续的函数,$P(x,a,b)$:x 是在$[a,b]$上一致连续的函数.

$$\forall x(F(x,a,b)\to P(x,a,b)).$$

(9) 设 $P(x,y,z)$:x 亲自将 y 授予 z,$G(x)$:x 是金质的,$R(x)$:x 是一枚奖章,$C(x)$:x 是我国运动员,a 是国际奥委会主席,b 是邓亚萍,g 是那个物件.

$$P(a,g,b)\wedge R(g)\wedge G(g)\wedge C(b).$$

(10) 设 $P(x)$:x 是三角形,$Q(x)$:x 内角之和是180°.

$$\forall x(P(x)\to Q(x)).$$

8. (11.2) 证明下面公式:

(1) $\forall x(P(x)\vee Q(x))\Rightarrow\forall xP(x)\vee\exists xQ(x)$;

(2) $\forall x(P(x)\to Q(x)\wedge R(x))\wedge\exists x(P(x)\wedge Q(x))\Rightarrow\exists x(Q(x)\wedge R(x))$;

(3) $\forall xP(x)\to\exists xQ(x)\Leftrightarrow\exists x(P(x)\to Q(x))$.

证明:(1) 左式 $=\neg\exists x(\neg P(x)\wedge\neg Q(x))$

$\Rightarrow\neg(\exists x(\neg P(x))\wedge\exists x(\neg Q(x)))$

$=\forall xP(x)\vee\forall xQ(x)\Rightarrow\forall xP(x)\vee\exists xQ(x)$;

(2) 左式 $= \forall x(\neg P(x) \vee (Q(x) \wedge R(x)) \wedge \exists x(P(x) \wedge Q(x))$

$= \forall x(\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge \forall x(\neg P(x) \vee R(x)) \wedge \exists x(P(x) \wedge Q(x))$

$= \neg \exists x(P(x) \wedge \neg Q(x)) \wedge \neg \exists x(P(x) \wedge \neg R(x)) \wedge \exists x(P(x) \wedge Q(x))$

$\Rightarrow \neg(\exists xP(x) \wedge \exists x \neg Q(x)) \wedge \neg(\exists xP(x) \wedge \exists x \neg R(x)) \wedge \exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$

$= (\neg \exists xP(x) \vee \neg \exists x \neg Q(x)) \wedge (\neg \exists xP(x) \vee \neg \exists x \neg R(x)) \wedge \exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$

$= ((\neg \exists xP(x) \wedge \exists xP(x)) \vee (\neg \exists x \neg Q(x) \wedge \exists xP(x))) \wedge$

$(\neg \exists xP(x) \vee \neg \exists x \neg R(x)) \wedge \exists xQ(x)$

$= \forall xQ(x) \wedge \exists xQ(x) \wedge ((\exists xP(x) \wedge \neg \exists xP(x)) \vee (\exists xP(x) \wedge \forall xR(x)))$

$= \forall xQ(x) \wedge \exists xQ(x) \wedge \exists xP(x) \wedge \forall xR(x)$

$\Rightarrow \forall xQ(x) \wedge \forall xR(x) \wedge \exists xP(x)$

$= \forall x(Q(x) \wedge R(x)) \wedge \exists xP(x)$

$\Rightarrow \exists x(Q(x) \wedge R(x)) \wedge \exists xP(x)$

$\Rightarrow \exists x(Q(x) \wedge R(x))$;

(3) $\exists x(P(x) \to Q(x)) = \exists x(\neg P(x) \vee Q(x))$

$= \neg \forall xP(x) \vee \exists xQ(x)$

$= \forall xP(x) \to \exists xQ(x)$.

9. (11.3) 求下面各式的前束范式:

(1) $\exists x(\neg \exists yP(x,y)) \to (\exists zQ(z) \to R(x))$;

(2) $\forall x \forall y \exists z(P(x,y,z) \wedge (\exists uQ(x,u) \to \exists vQ(y,v)))$;

(3) $\forall xP(x) \to \forall zQ(x,z) \vee \forall zR(x,y,z)$;

(4) $\exists x(\neg \exists yP(x,y) \to (\exists zQ(z)) \to R(x))$.

解:(1) $\exists x(\neg \exists yP(x,y)) \to (\exists zQ(z) \to R(x))$

$= \exists x(\forall y \neg P(x,y)) \to (\neg \exists zQ(z) \vee R(x))$

$= \neg \exists x(\forall y \neg P(x,y)) \vee (\forall z \neg Q(z) \vee R(x))$

$= \forall x(\neg \forall y \neg P(x,y)) \vee (\forall z \neg Q(z) \vee R(w))$

$= \forall x \exists yP(x,y) \vee \forall z \neg Q(z) \vee R(w)$

$= \forall x \exists y \forall z(P(x,y) \vee \neg Q(z) \vee R(w))$;

(2) $\forall x \forall y \exists z(P(x,y,z) \wedge (\exists uQ(x,u) \to \exists vQ(y,v)))$

$= \forall x \forall y \exists z(P(x,y,z) \wedge \exists u \exists v(Q(x,u) \to Q(y,v)))$

$= \forall x \forall y \exists z(P(x,y,z) \wedge \exists u \exists v(\neg Q(x,u) \vee Q(y,v)))$

$= \forall x \forall y \exists z \exists u \exists v(P(x,y,z) \wedge (\neg Q(x,u) \vee Q(y,v)))$;

(3) $\forall xP(x) \to \forall zQ(x,z) \vee \forall zR(x,y,z)$

$= \neg \forall xP(x) \vee \forall zQ(x,z) \vee \forall zR(x,y,z)$

$= \exists x \neg P(x) \vee \forall zQ(x,z) \vee \forall uR(x,y,u)$

$= \exists x \neg P(x) \vee \forall zQ(w,z) \vee \forall uR(t,y,u)$

$= \exists x \forall z \forall u(\neg P(x) \vee Q(w,z) \vee R(t,y,u))$;

(4) $\exists x(\neg \exists y P(x,y) \rightarrow (\exists z Q(z)) \rightarrow R(x))$

$= \exists x(\exists y P(x,y) \vee (\exists z Q(z) \rightarrow R(x)))$

$= \exists x(\exists y P(x,y) \vee (\neg \exists z Q(z) \vee R(x)))$

$= \exists x(\exists y P(x,y) \vee (\forall z \neg Q(z) \vee R(x)))$

$= \exists x \exists y \forall z(P(x,y) \vee \neg Q(z) \vee R(x))$.

10. (11.4) 找出下面公式的斯科林范式:

(1) $\neg(\forall x P(x) \rightarrow \exists y P(y))$;

(2) $\neg(\forall x P(x) \rightarrow \exists y \forall z Q(y,z))$.

解:(1) $\neg(\forall x P(x) \rightarrow \exists y P(y))$

$= \neg(\neg \forall x P(x) \vee \exists y P(y))$

$= \forall x P(x) \wedge \neg \exists y P(y)$

$= \forall x P(x) \wedge \forall y \neg P(y)$

$= \forall x \forall y(P(x) \wedge \neg P(y))$;

(2) $\neg(\forall x P(x) \rightarrow \exists y \forall z Q(y,z))$

$= \neg(\neg \forall x P(x) \vee \exists y \forall z Q(y,z))$

$= \forall x P(x) \wedge \neg \exists y \forall z Q(y,z)$

$= \forall x P(x) \wedge \forall y \exists z \neg Q(y,z)$

$= \forall x \forall y \exists z(P(x) \wedge \neg Q(y,z))$

$= \forall x \forall y(P(x) \wedge \neg Q(y,f(x,y)))$.

11. (12.1) 试用假设推理方法证明下面的定理:

(1) $(R \rightarrow P) \rightarrow ((R \rightarrow Q) \rightarrow (R \rightarrow P \wedge Q))$;

(2) $(P \wedge Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow R))$.

证明:(1) 由推理定理可知,只要证:$R \rightarrow P, R \rightarrow Q, R \vdash P \wedge Q$.

① R	假设前提
② $R \rightarrow P$	假设前提
③ P	分②①
④ $R \rightarrow Q$	假设前提
⑤ Q	分④①
⑥ $P \wedge Q$	由③⑤

(2) 由推理定理可知,只要证:$P \wedge Q \rightarrow R, P, Q \vdash R$.

① P	假设前提
② Q	假设前提
③ $P \wedge Q$	由①②
④ $P \wedge Q \rightarrow R$	假设前提

⑤ R 分④③

12.（12.2）试用假设推理证明下面的定理：

(1) $\forall x(P(x)\to Q(x))\to(\exists xP(x)\to\exists xQ(x))$；

(2) $\forall x\forall yP(x,y)\to\forall y\forall xP(x,y)$；

(3) $\forall x(C(x)\to W(x)\land R(x))\land\exists x(C(x)\land Q(x))\to\exists x(Q(x)\land R(x))$；

(4) $\neg\exists x(F(x)\land H(x))\land\forall x(G(x)\to H(x))\to\forall x(G(x)\to\neg F(x))$.

证明：(1) 只要证：$\forall x(P(x)\to Q(x)),\exists xP(x)\vdash\exists xQ(x)$.

① $\forall x(P(x)\to Q(x))$ 假设前提

② $P(e)\to Q(e)$ US①

③ $\exists xP(x)$ 假设前提

④ $P(e)$ ES③

⑤ $Q(e)$ 分②④

⑥ $\exists xQ(x)$ EG⑤

(2) 只要证：$\forall x\forall yP(x,y)\vdash\forall y\forall xP(x,y)$.

① $\forall x\forall yP(x,y)$ 假设前提

② $\forall yP(x,y)$ US①

③ $P(x,y)$ US②

④ $\forall xP(x,y)$ UG③

⑤ $\forall y\forall xP(x,y)$ UG④

(3) 只要证：$\forall x(C(x)\to W(x)\land R(x))\land\exists x(C(x)\land Q(x))\vdash\exists x(Q(x)\land R(x))$.

① $\forall x(C(x)\to W(x)\land R(x))\land\exists x(C(x)\land Q(x))$ 假设前提

② $\exists x(C(x)\land Q(x))$ 由①

③ $C(e)\land Q(e)$ ES②

④ $\forall x(C(x)\to W(x)\land R(x))$ 由①

⑤ $C(e)\to W(e)\land R(e)$ US④

⑥ $C(e)$ 由③

⑦ $W(e)\land R(e)$ 分⑤⑥

⑧ $R(e)$ 由⑦

⑨ $Q(e)$ 由③

⑩ $R(e)\land Q(e)$ 由⑧⑨

⑪ $\exists x(R(x)\land Q(x))$ EG⑩

(4) 只要证：$\neg\exists x(F(x)\land H(x))\land\forall x(G(x)\to H(x))\vdash\forall x(G(x)\to\neg F(x))$.

① $\neg\exists x(F(x)\land H(x))\land\forall x(G(x)\to H(x))$ 假设前提

② $\forall x(\neg F(x)\lor\neg H(x))$ 由①

③ $\neg F(x)\lor\neg H(x)$ US②

④ $\forall x(G(x)\to H(x))$　　由①

⑤ $G(x)\to H(x)$　　US④

⑥ $H(x)\to\neg F(x)$　　由③

⑦ $G(x)\to\neg F(x)$　　由⑤⑥

⑧ $\forall x(G(x)\to\neg F(x))$　　UG⑦

13. (12.3)指出下面证明的错误之处:

证明:$\exists xP(x)\wedge\exists xQ(x)\to\exists x(P(x)\wedge Q(x))$是永真的.

(1) $\exists xP(x)\wedge\exists xQ(x)$

(2) $\exists xP(x)$

(3) $\exists xQ(x)$

(4) $P(e)$

(5) $Q(e)$

(6) $P(e)\wedge Q(e)$

(7) $\exists x(P(x)\wedge Q(x))$

解:错在由(4)(5)中的 e 对有些 $P(e)$ 成立、对有些 $Q(e)$ 成立,得到(6)的 $P(e)$,$Q(e)$一定同时成立,即不应得出 $P(e)\wedge Q(e)$.

14. (12.4)试证明命题逻辑永真公式公理系统不是独立的.

解:实际上令公理(2)中 P,Q 均取 R 时,有$(R\to(R\to R))\to(R\to(R\to R))$,令$(R\to(R\to R))$为 P,则有 $P\to P$ 形式.

15. (5P-1)设命题公式$\neg(P\wedge(Q\to\neg P))$记做 G,使 G 的真值指派为 F 的 P,Q 的真值是下列4个中的哪一个?

(1) (T,F);　　(2) (F,T);

(3) (T,T);　　(4) (F,F).

解:(1)正确. $\neg(T\wedge(F\to\neg T))=\neg(T\wedge T)=F$.

16. (5P-2)与命题公式 $P\to(Q\to R)$ 等值的公式是下列4个中的哪一个?

(1) $(P\vee Q)\to R$;　　(2) $(P\wedge Q)\to R$;

(3) $(P\to Q)\to R$;　　(4) $P\to(Q\vee R)$.

解:(2)正确.

17. (5P-3)命题公式$(P\wedge Q)\to P$是下列4个中的哪一个?

(1) 永真式;　　(2) 永假式;

(3) 可满足式;　　(4) 合取范式.

解:$(P\wedge Q)\to P=\neg(P\wedge Q)\vee P=\neg P\vee\neg Q\vee P=T$,故为(1)永真式.

18. (5P-4)称由前提 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 推出结论 B 的推理正确,则 $A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_k\to B$ 应为下列4个中的哪一个?

(1) 重言式或可满足式;　　(2) 可满足式;

(3) 矛盾式；　　　　(4) 重言式.

解：为(4).

19. (5P－5)设 P:2 是素数，Q:3 是素数，R:$\sqrt{2}$是有理数，下列复合命题中是假命题的为哪一个？

(1) $(P\vee Q)\rightarrow R$；　　　　(2) $R\rightarrow(P\vee Q)$；

(3) $(P\wedge Q)\rightarrow P$；　　　　(4) $(R\vee P)\leftrightarrow Q$.

解：(1)为假命题，因为在蕴含前件为真，后件为假时，结果为假.

20. (5P－6)设 P,Q 为命题，复合命题"如果 P 则 Q"称为 P 与 Q 的________，记做________.

解：蕴含；$P\rightarrow Q$.

21. (5P－7)设命题公式 $G=P\wedge(\neg Q\vee R)$，则使 G 的真值为 T 的指派是________，________，________.

解：TTT，TFT，TTF.

22. (5P－8)已知命题公式为 $G=(\neg P\vee Q)\rightarrow R$，则命题公式 G 的析取范式是________.

解：$G=(\neg P\vee Q)\rightarrow R=\neg(\neg P\vee Q)\vee R=(P\wedge\neg Q)\vee R$.

23. (5P－9)命题公式 $P\rightarrow(P\vee\neg P)$的真值是________.

解：$P\rightarrow(P\vee\neg P)=P\rightarrow T=T$，故真值是 T.

24. (5P－10)判别下列语句是否为命题. 如果是命题，指出其真值.

(1) 中国是一个人口众多的国家；　　　　(2) 存在最大的质数；

(3) 这座楼可真高啊；　　　　(4) 请你跟我走；

(5) 火星上也有人.

解：(1) 为 T；　(2) 为 F；　(3) 不是命题；　(4) 不是命题；　(5) 为 F.

注：命题的真值可以是 T(真)或 F(假)，真值并不仅仅是 T 的意思.

25. (5P－11)将下列命题符号化：

(1) 虽然交通堵塞，但是老王还是准时到达火车站；

(2) 张小宝是三好生，他是北京人或是河北人；

(3) 除非天下雨，否则我骑车上班.

解：(1) 设 P：交通堵塞；Q：老王准时到达火车站.

$$P\rightarrow Q.$$

(2) 设 $P(x)$：x 是好学生；$Q(x)$：x 是北京人；$R(x)$：x 是河北人；a 是张小宝.

$$P(a)\wedge(Q(a)\vee R(x)).$$

(3) 设 P：天下雨；Q：我骑车上班.

$$\neg P\leftrightarrow Q.$$

26. (5P－12)设命题 P,Q 的真值为 F，命题 R,S 的真值为 T，求公式$(P\leftrightarrow R)\wedge(\neg Q\vee S)$的真值.

解：将真、假取值代入公式：$(P\leftrightarrow R)\wedge(\neg Q\vee S)=(F\leftrightarrow T)\wedge(\neg F\vee T)=F\wedge T=F$.

27. (5P－13)用多种方法判定命题公式$(P\rightarrow(P\wedge Q))\vee R$ 是否为可满足式.

解:(1) 用等值演算法:

$$\begin{aligned}(P\to(P\land Q))\lor R &= (\neg P\lor(P\land Q))\lor R\\ &= ((\neg P\lor P)\land(\neg P\lor Q))\lor R\\ &= \neg P\lor Q\lor R,\end{aligned}$$

当 P,Q,R 的指派分别取不同真假值时,此公式的结果有时为真,有时为假,故是可满足式.

(2) 真值表法:真值表中结果有真有假,故是可满足式.

P	Q	R	$P\land Q$	$P\to(P\land Q)$	$(P\to(P\land Q))\lor R$
F	F	F	F	T	T
F	F	T	F	T	T
F	T	F	F	T	T
F	T	T	F	T	T
T	F	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T
T	T	F	T	T	T
T	T	T	T	T	T

28. (5P-14)判断 $P\to(Q\to R)\Leftrightarrow P\land Q\to R$ 成立(用真值表法、等值演算法和范式法).

解:(1) 用真值表法:

构造 $P\to(Q\to R)$ 的真值表如下:

P	Q	R	$Q\to R$	$P\to(Q\to R)$
F	F	F	T	T
F	F	T	T	T
F	T	F	F	T
F	T	T	T	T
T	F	F	T	T
T	F	T	T	T
T	T	F	F	F
T	T	T	T	T

构造 $(P\land Q)\to R$ 的真值表如下:

P	Q	R	$P\land Q$	$(P\land Q)\to R$
F	F	F	F	T
F	F	T	F	T
F	T	F	F	T
F	T	T	F	T
T	F	F	F	T
T	F	T	F	T
T	T	F	T	F
T	T	T	T	T

故有左、右两边真值表相同，得证.

(2) 用等值演算法：

$P\to(Q\to R)=P\to(\neg Q\vee R)=\neg P\vee(\neg Q\vee R)$

$=\neg P\vee\neg Q\vee R=\neg(P\wedge Q)\vee R=P\wedge Q\to R.$

(3) 化为范式：

左边：$P\to(Q\to R)=\neg P\vee(\neg Q\vee R)=\neg P\vee\neg Q\vee R.$

右边：$P\wedge Q\to R=\neg(P\wedge Q)\vee R=\neg P\vee\neg Q\vee R.$

左边 = 右边，范式相同.

29. (5P－15)用真值表法判定公式 $P\overline{\vee}(Q\wedge R)\to P\vee Q\vee R$ 是永真式、永假式还是可满足式.

解：构造相应的真值表为：

P	Q	R	$Q\wedge R$	$P\overline{\vee}(Q\wedge R)$	$P\vee Q\vee R$	$P\overline{\vee}(Q\wedge R)\to P\vee Q\vee R$
F	F	F	F	F	F	T
F	F	T	F	F	T	T
F	T	F	F	F	T	T
F	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T
T	T	T	T	F	T	T

结果对所有指派均为真，故为永真式.

30. (5P－16)化简$(A\wedge B\wedge C)\vee(\neg A\wedge B\wedge C)$.

解：$(A\wedge B\wedge C)\vee(\neg A\wedge B\wedge C)=(A\vee\neg A)\wedge(B\wedge C)=B\wedge C.$

31. (5P－17)求命题公式$(\neg P\to Q)\to(\neg Q\vee P)$的特异析取范式和特异合取范式.

解：$(\neg P\to Q)\to(\neg Q\vee P)=(P\vee Q)\to(\neg Q\vee P)=\neg(P\vee Q)\vee(\neg Q\vee P)$

$=(\neg P\wedge\neg Q)\vee(\neg Q\vee P)=(\neg P\vee\neg Q\vee P)\wedge(P\vee\neg Q)$

$=P\vee\neg Q$(特异合取范式)，

$(\neg P\to Q)\to(\neg Q\vee P)=(P\vee Q)\to(\neg Q\vee P)=\neg(P\vee Q)\vee(\neg Q\vee P)$

$=(\neg P\wedge\neg Q)\vee(\neg Q\vee P)$

$=(\neg P\wedge\neg Q)\vee(\neg Q\wedge(P\vee\neg P))\vee(P\wedge(Q\vee\neg Q))$

$=(\neg P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q)$

$=(\neg P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q).$

(特异析取范式)

32. (5P－18)已知 P,Q,R 的真值表如右表,试用 P,Q 和联结词 $\neg,\rightarrow,\wedge$ 构造命题公式 A,使得 A 与 R 等值.

P	Q	R
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	F

解:$A=\neg((P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P))$.

33. (5P－19)试用多种方法证明:

$$\neg(P\wedge\neg Q)\wedge(\neg Q\vee R)\wedge\neg R\Rightarrow\neg P.$$

解:(1) 用公式法推导出本题为永真蕴含式即可.

$$\begin{aligned}&(\neg(P\wedge\neg Q)\wedge(\neg Q\vee R)\wedge\neg R)\rightarrow\neg P\\=&(P\wedge\neg Q)\vee\neg(\neg Q\vee R)\vee R\vee\neg P\\=&(P\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge\neg R)\vee R\vee\neg P\\=&((P\vee\neg P)\wedge(\neg Q\vee\neg P))\vee((Q\vee R)\wedge(\neg R\vee R))\\=&(\neg Q\vee\neg P)\vee(Q\vee R)=\mathrm{T}.\end{aligned}$$

故得证.

(2) 用真值表法:

P	Q	R	$\neg(P\wedge\neg Q)$	$\neg Q\vee R$	$\neg R$	$\neg(P\wedge\neg Q)\wedge(\neg Q\vee R)\wedge\neg R$	$\neg(P\wedge\neg Q)\wedge(\neg Q\vee R)\wedge\neg R\rightarrow\neg P$
F	F	F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	F	F	T
F	T	F	T	F	T	F	T
F	T	T	T	T	F	F	T
T	F	F	F	T	T	F	T
T	F	T	F	T	F	F	T
T	T	F	T	F	T	F	T
T	T	T	T	T	F	F	T

结果全为真,故得证.

34. (5P－20)试证明:$(P\rightarrow(Q\rightarrow R))\wedge(\neg S\vee P)\wedge Q\Rightarrow S\rightarrow R$.

证明:

$$\begin{aligned}&(P\rightarrow(Q\rightarrow R))\wedge(\neg S\vee P)\wedge Q\rightarrow(S\rightarrow R)\\=&(P\rightarrow(\neg Q\vee R))\wedge(\neg S\vee P)\wedge Q\rightarrow\neg S\vee R\\=&(\neg P\vee(\neg Q\vee R))\wedge((\neg S\wedge Q)\vee(P\wedge Q))\rightarrow\neg S\vee R\\=&\neg((\neg P\vee\neg Q\vee R)\wedge((\neg S\wedge Q)\vee(P\wedge Q)))\vee\neg S\vee R\\=&\neg(\neg P\vee\neg Q\vee R)\vee\neg((\neg S\wedge Q)\vee(P\wedge Q))\vee\neg S\vee R\\=&(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee R\vee((S\vee\neg Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q))\vee\neg S\\=&((P\vee R)\wedge(Q\vee R)\wedge(\neg R\vee R))\vee((S\vee\neg Q\vee\neg S)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee\neg S))\end{aligned}$$

$=((P\lor R)\land(Q\lor R))\lor(\neg P\lor\neg Q\lor\neg S)$

$=((P\lor R\lor\neg P)\land(Q\lor R\lor\neg P))\lor\neg Q\lor\neg S$

$=(Q\lor R\lor\neg P)\lor\neg Q\lor\neg S$

$=Q\lor\neg Q\lor R\lor\neg P\lor\neg S=\mathrm{T}.$

此式为永真式,即得证本题为永真蕴含式.

35. (5P-21)谓词公式 $\forall x(P(x)\lor\exists yR(y))\to Q(x)$ 中量词 $\forall x$ 的辖域是下列4个中的哪一个?

(1) $\forall x(P(x)\lor\exists yR(y))$;　(2) $P(x)$;

(3) $P(x)\lor\exists yR(y)$;　(4) $Q(x)$.

解:是(3).

36. (5P-22)谓词公式 $\exists xA(x)\land\neg\exists xA(x)$ 的类型是下列4个中的哪一个?

(1) 永真式;　(2) 矛盾式;

(3) 非永真式的可满足式;　(4) 不属于(1)(2)(3)任何类型.

解:是(2).

37. (5P-23)设个体域为整数集,下列公式中其真值为T的是哪几个?

(1) $\forall x\exists y(x+y=0)$;　(2) $\exists y\forall x(x+y=0)$;

(3) $\forall x\forall y(x+y=0)$;　(4) $\exists x\exists y(x+y=0)$.

解:是(1)(4).

38. (5P-24)设 $L(x)$:x 是演员,$J(x)$:x 是教师,$A(x,y)$:x 佩服 y,那么命题"所有演员都佩服某些教师"可符号化为(　　).

(1) $\forall xL(x)\to A(x,y)$　(2) $\forall x(L(x)\to\exists y(J(y)\land A(x,y)))$

(3) $\forall x\exists y(L(x)\land J(y)\land A(x,y))$　(4) $\forall x\exists y(L(x)\land J(y)\to A(x,y))$

解:为(2).

39. (5P-25)在谓词演算中,$P(a)$ 是 $\forall xP(x)$ 的有效结论,根据是下面4个中的哪一个?

(1) US 规则;　(2) UG 规则;

(3) ES 规则;　(4) EG 规则.

解:是(1).

40. (5P-26)公式 $\forall x(P(x)\to Q(x,y))\lor\exists x(R(y,x)\to S(x))$ 的自由变元是________,约束变元是________.

解:自由变元是 y,约束变元是 x.

41. (5P-27)谓词公式 $\forall x(P(x)\to\exists xQ(x))$ 的前束范式是________.

解:$\forall x(P(x)\to\exists xQ(x))=\forall x(\neg P(x)\lor\exists xQ(x))$

$=\forall x(\neg P(x)\lor\exists yQ(y))$

$=\forall x\exists y(\neg P(x)\lor Q(y)).$

42. (5P-28)设个体域 $D=\{a,b\}$,消去公式中的量词,则 $\forall xP(x)\land\exists xQ(x)\Longleftrightarrow$________.

解:$\forall xP(x)\land\exists xQ(x)\Leftrightarrow\forall xP(x)\land(Q(a)\lor Q(b))$

$$\Leftrightarrow(P(a)\land P(b))\land(Q(a)\lor Q(b)).$$

43. (5P-29)设个体域是整数集合,命题$\exists y\forall x(x+y=0)$的真值为________.

解:真值为假,即 F.

44. (5P-30)设个体域是$\{1,2\}$,命题$\forall x\exists y(x+y=3)$的真值为________.

解:真值为真,即 T.

45. (5P-31)将下列命题符号化:

(1) 有某些实数是有理数;(2) 所有的人都呼吸;(3) 每个母亲都爱自己的孩子.

解:(1) 设$R(x)$:x是实数,$Q(x)$:x是有理数.

$$\exists x(R(x)\land Q(x)).$$

(2) 设$R(x)$:x是人,$P(x)$:x呼吸.

$$\forall x(R(x)\to P(x)).$$

(3) 设$P(x,y)$:x是y的母亲,$L(x,y)$:x爱y,$M(x)$:x是母亲,$C(x)$:x是孩子.

$$\forall x\forall y(P(x,y)\land M(x)\land C(y)\to L(x,y)).$$

46. (5P-32)设个体域$D=\{$岳飞,文天祥,秦桧$\}$,谓词$F(x)$:x是民族英雄,求$\forall xF(x)$的真值.

解:F(岳飞)$=$T,F(文天祥)$=$T,F(秦桧)$=$F.

47. (5P-33)指出公式$\forall x\forall y(R(x,y)\lor L(y,z))\land\exists xH(x,y)$中量词的每次出现辖域,并指出变元的每次出现是约束出现,还是自由出现,以及公式的约束变元和自由变元.

解:$\forall x$和$\forall y$的辖域为$(R(x,y)\lor L(y,z))$;$\exists x$的辖域为$H(x,y)$. $(R(x,y)\lor L(y,z))$中x和y是约束出现,z是自由出现;$H(x,y)$中x是约束出现,y是自由出现. 公式的约束变元为x,y;公式的自由变元为y,z.

48. (5P-34)给定解释I如下:

(1) $D=\{2,3\}$;

(2) D中特定元素$a=2$;

(3) 函数为$f(2)=3,f(3)=2$;

(4) 谓词为$F(2)=\mathrm{F},F(3)=\mathrm{T}$,

$G(x,y)$为$G(2,2)=G(2,3)=G(3,2)=\mathrm{F},G(3,3)=\mathrm{T}$,

$L(x,y)$为$L(2,2)=L(3,3)=\mathrm{T},L(2,3)=L(3,2)=\mathrm{F}$.

求在解释I下各公式的真值:

(1) $\forall x(F(x)\land G(x,a))$;

(2) $\forall x\exists yL(x,y)$;

(3) $\forall x(F(f(x))\land G(x,f(x)))$.

解:(1) $\forall x(F(x)\land G(x,a))=F(2)\land G(2,2)\land F(3)\land G(3,2)$

$$=\mathrm{F}\land\mathrm{F}\land\mathrm{T}\land\mathrm{F}=\mathrm{F};$$

(2) $\forall x \exists y L(x,y) = \forall x(L(x,2) \vee L(x,3))$
$= (L(2,2) \vee L(2,3)) \wedge (L(3,2) \vee L(3,3))$
$= (T \vee F) \wedge (F \vee T) = T \wedge T = T$;

(3) $\forall x(F(f(x)) \wedge G(x,f(x))) = F(f(2)) \wedge G(2,f(2)) \wedge F(f(3)) \wedge G(3,f(3))$
$= F(3) \wedge G(2,3) \wedge F(2) \wedge G(3,2)$
$= T \wedge F \wedge F \wedge F = F$.

49. (5P－35)设 P 是二元谓词,给定解释 I 如下:

$$D = \{a,b\}, P(a,a) = P(b,a) = T, P(a,b) = P(b,b) = F.$$

求下列公式的真值:

(1) $\forall x P(x,x)$;

(2) $\forall x \exists y P(x,y)$;

(3) $\exists x \exists y P(x,y)$.

解:(1) $\forall x P(x,x) = P(a,a) \wedge P(b,b) = T \wedge F = F$;

(2) $\forall x \exists y P(x,y) = \forall x(P(x,a) \vee P(x,b))$
$= (P(a,a) \vee P(a,b)) \wedge (P(b,a) \vee P(b,b))$
$= (T \vee F) \wedge (T \vee F) = T \wedge T = T$;

(3) $\exists x \exists y P(x,y) = \exists x(P(x,a) \vee P(x,b))$
$= (P(a,a) \vee P(a,b)) \vee (P(b,a) \vee P(b,b))$
$= (T \vee F) \vee (T \vee F) = T \vee T = T$.

50. (5P－37)试用假设推理证明下面定理:

(1) $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x(A(x) \wedge \exists x B(x))$;

(2) $\forall x(A(x) \vee \forall x B(x)) \Rightarrow \forall x(A(x) \vee B(x))$.

证明:(1) 只要证:$\exists x(A(x) \wedge B(x)) \vdash \exists x(A(x) \wedge \exists x B(x))$.

① $\exists x(A(x) \wedge B(x))$	假设前提
② $A(e) \wedge B(e)$	ES①
③ $B(e)$	由②
④ $\exists x B(x)$	EG③
⑤ $A(e)$	由②
⑥ $A(e) \wedge \exists x B(x)$	由④⑤
⑦ $\exists x(A(x) \wedge \exists x B(x))$	EG⑥

(2) 只要证:$\forall x(A(x) \vee \forall x B(x)) \vdash \forall x(A(x) \vee B(x))$.

① $\forall x(A(x) \vee \forall x B(x))$	假设前提
② $A(x) \vee \forall x B(x)$	US①
③ $A(x) \vee B(x)$	US②
④ $\forall x(A(x) \vee B(x))$	UG③

51. (5P-38)用假设推理证明下面的定理:

(1) $\forall x(P(x)\to Q(x))\Rightarrow(\exists xP(x)\to\exists xQ(x))$;

(2) $(\forall xP(x)\to Q)\Rightarrow\exists x(P(x)\to Q)$;

(3) $\exists x\forall yP(x,y)\Rightarrow\forall y\exists xP(x,y)$;

(4) $\exists x\exists yP(x,y)\Rightarrow\exists y\exists xP(x,y)$.

证明:(1) 只要证:$\forall x(P(x)\to Q(x)),\exists xP(x)\vdash\exists xQ(x)$.

① $\forall x(P(x)\to Q(x))$	假设前提
② $P(c)\to Q(c)$	US①
③ $\exists xP(x)$	假设前提
④ $P(c)$	ES③
⑤ $Q(c)$	由②④
⑥ $\exists xQ(x)$	EG⑤

(2) 只要证:$\forall xP(x)\to Q\vdash\exists x(P(x)\to Q)$.

① $\forall xP(x)\to Q$	假设前提
② $P(c)\to Q$	US①
③ $\exists xP(x)\to Q$	EG②
④ $\exists x(P(x)\to Q)$	由③

(3) 只要证:$\exists x\forall yP(x,y)\vdash\forall y\exists xP(x,y)$.

① $\exists x\forall yP(x,y)$	假设前提
② $\exists xP(x,c)$	US①
③ $\forall y\exists xP(x,y)$	UG②

(4) 只要证:$\exists x\exists yP(x,y)\vdash\exists y\exists xP(x,y)$.

① $\exists x\exists yP(x,y)$	假设前提
② $\exists xP(x,e)$	ES①
③ $\exists y\exists xP(x,y)$	EG②

52. (5P-39)证明下列推理是有效的:

前提:每个非文科一年级学生都有辅导员;

小王是一年级学生;

小王是理科生;

凡小王的辅导员都是理科生;

所有理科生都不是文科生.

结论:至少有一个不是文科生的辅导员.

证明:设 $Q(x,y)$:y 是 x 的辅导员;$Y(x)$:x 是一年级学生;$L(x)$:x 是理科生;$W(x)$:x 是文科生;c:小王.

将前提符号化:

$\forall x(\neg W(x) \wedge Y(x) \to \exists y Q(x,y))$;$Y(c)$;$L(c)$;

$\forall y(Q(c,y) \to L(y))$;$\forall x(L(x) \to \neg W(x))$.

将结论符号化:$\exists y \exists x(Q(x,y) \wedge \neg W(y))$.

① $\forall x(L(x) \to \neg W(x))$	假设前提
② $L(c) \to \neg W(c)$	US①
③ $L(c)$	假设前提
④ $\neg W(c)$	由②③
⑤ $\forall x(\neg W(x) \wedge Y(x) \to \exists y Q(x,y))$	假设前提
⑥ $\neg W(c) \wedge Y(c) \to \exists y Q(c,y)$	US⑤
⑦ $\exists y Q(c,y)$	由③④⑥
⑧ $Q(c,e)$	ES⑦
⑨ $\forall y(Q(c,y) \to L(y))$	假设前提
⑩ $Q(c,e) \to L(e)$	US⑨
⑪ $L(e)$	由⑧⑩
⑫ $L(e) \to \neg W(e)$	US①
⑬ $\neg W(e)$	由⑪⑫
⑭ $Q(c,e) \wedge \neg W(e)$	由⑧⑬
⑮ $\exists x(Q(x,e) \wedge \neg W(e))$	EG⑭
⑯ $\exists y \exists x(Q(x,y) \wedge \neg W(y))$	EG⑮

故得证.

7.6 另增配套习题及解答

1. 将下列复合命题分成若干原子命题,并将各复合命题符号化.

(1) 今天天气冷,且有雪;

(2) 天气热,但湿度低;

(3) 天正在下雪或湿度很高;

(4) 如果你不去演出,那么我也不去演出;

(5) 我既不看电影,也不去打球,我在做作业;

(6) 老王或小张是老实人.

解:(1) P:今天天气冷,Q:今天有雪. $P \wedge Q$.

(2) P:天气热,Q:湿度低. $P \wedge Q$.

(3) P:天正在下雪,Q:湿度很高. $P \vee Q$.

(4) P:你去演出,Q:我去演出. $\neg P \to \neg Q$.

(5) P:我不看电影,Q:我不去打球,R:我在做作业. $P \wedge Q \wedge R$.

(6) P:老王是老实人,Q:小张是老实人. $P \vee Q$.

2. 根据定义,说明下列命题公式是如何形成的.

(1) $(A\to(A\vee B))$;

(2) $((\neg A\wedge B)\wedge A)$;

(3) $(\neg A\to B)\vee(B\to A)$.

解:(1) A 是命题公式,$A\vee B$ 是命题公式,$(A\to(A\vee B))$是命题公式,此过程可简化为:

$$A;(A\vee B);(A\to(A\vee B)).$$

同理可有

(2) $A;\neg A;(\neg A\wedge B);((\neg A\wedge B)\wedge A)$.

(3) $A;\neg A;B;(\neg A\to B);(B\to A);(\neg A\to B)\vee(B\to A)$.

3. 设 P:她打乒乓球,Q:她打篮球,将下列各公式翻译成自然语言.

(1) $P\vee Q$;　(2) $P\wedge Q$;　(3) $P\wedge\neg Q$;

(4) $\neg P\vee\neg Q$;　(5) $\neg(\neg P)$;　(6) $\neg(\neg P\wedge Q)$;

(7) $P\leftrightarrow Q$;　(8) $\neg P\to Q$.

解:(1) 她打乒乓球或篮球;

(2) 她打乒乓球并且打篮球;

(3) 她打乒乓球而不打篮球;

(4) 她不打乒乓球或不打篮球;

(5) 她不是不打乒乓球;

(6) 她不是不打乒乓球打篮球;

(7) 她打乒乓球等同于她打篮球;

(8) 她如果不打乒乓球就打篮球.

4. 构造下列各题的真值表:

(1) $(P\wedge(\neg Q\to P))\wedge\neg((P\leftrightarrow\neg Q)\to(Q\vee\neg P))$;

(2) $(Q\leftrightarrow(R\to\neg P))\vee((\neg Q\to P)\leftrightarrow R)$;

(3) $(P\to(Q\to R))\to((P\to Q)\to(P\to R))$;

(4) $(\neg Q\to\neg P)\to(P\to Q)$.

解:(1)

P	Q	$(P\wedge(\neg Q\to P))\wedge\neg((P\leftrightarrow\neg Q)\to(Q\vee\neg P))$
F	F	F
F	T	F
T	F	T
T	T	F

(2)

P	Q	R	$(Q\leftrightarrow(R\rightarrow\neg P))\vee((\neg Q\rightarrow P)\leftrightarrow R)$
F	F	F	T
F	F	T	F
F	T	F	T
F	T	T	T
T	F	F	F
T	F	T	T
T	T	F	T
T	T	T	T

(3)

P	Q	R	$(P\rightarrow(Q\rightarrow R))\rightarrow((P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow R))$
F	F	F	T
F	F	T	T
F	T	F	T
F	T	T	T
T	F	F	T
T	F	T	T
T	T	F	T
T	T	T	T

(4)

P	Q	$(\neg Q\rightarrow\neg P)\rightarrow(P\rightarrow Q)$
F	F	T
F	T	T
T	F	T
T	T	T

5. 证明(不用真值表法):

(1) $(P\wedge Q)\vee\neg P=\neg P\vee Q$;

(2) $(P\wedge Q)\rightarrow R=(P\rightarrow R)\vee(Q\rightarrow R)$;

(3) $P\rightarrow(Q\rightarrow R)=(P\wedge\neg R)\rightarrow\neg Q$.

证明:(1) $(P\wedge Q)\vee\neg P=(P\vee\neg P)\wedge(Q\vee\neg P)$

$=T\wedge(Q\vee\neg P)=\neg P\vee Q$;

(2) $(P\wedge Q)\rightarrow R=\neg(P\wedge Q)\vee R=(\neg P\vee\neg Q)\vee R$

$=\neg P\vee R\vee\neg Q\vee R=(P\rightarrow R)\vee(Q\rightarrow R)$;

(3) $P\rightarrow(Q\rightarrow R)=\neg P\vee(\neg Q\vee R)=\neg P\vee R\vee\neg Q$

$=\neg(P\wedge\neg R)\vee\neg Q=(P\wedge\neg R)\rightarrow\neg Q$.

6. 先将下面各题翻译成符号公式,然后检验其论证是否正确.

(1) 如果6是偶数,则2不能整除7.
或者5不是素数,或者2整除7.
5是素数.
————————————
因此6是奇数.

(2) 在老师的生日那天,我送给她一束花.
或者这是老师的生日,或者我工作迟了.
今天我未送花给老师.
————————————
因此我今天工作迟了.

(3) 如果我工作,那我不能学习.
或者我工作,或者我考数学.
我通过了数学考试.
————————————
因此我学习过了.

(4) 如果我工作,那我不能学习.
或者我工作,或者我考数学.
我工作过了.
————————————
因此我参加了数学考试.

(5) 如果我学习,那我考试不会失败.
如果我不踢足球,那我将学习.
我考试失败了.
————————————

因此我踢了足球.

解:(1) 设 P:6 是偶数,Q:2 能整除 7,R:5 是素数.

则有 $P\to\neg Q,\neg R\vee Q,R$ 作为条件来推理:

① $\neg R\vee Q,R\vdash Q$, ② $P\to\neg Q,Q\vdash\neg P$($\neg P$ 为结论).

$\neg P$ 表示 6 不是偶数,是奇数,此论证不对,因为所给条件中 $\neg R\vee Q$ 是错误的.

(2) 设 P:这天老师生日,Q:我送老师一束花,R:我工作迟了.

则有 $P\to Q,P\vee R,\neg Q$ 作为条件来推理:

① $\neg Q,P\to Q\vdash\neg P$, ② $P\vee R,\neg P\vdash R$(R 为结论). 本题结论正确.

(3) 设 P:我工作,Q:我学习,R:我考了数学.

则有 $P\to\neg Q,P\vee R,R$ 作为条件来推理:

① 因为 $P\to\neg Q=Q\to\neg P,P\vee R=\neg P\to R$,所以 $Q\to\neg P,\neg P\to R\vdash Q\to R$.

② 由 $Q\to R$ 和 R 为真无法推出 Q 为真或假,故本题结论推理错误.

(4) 设 P:我工作,Q:我学习,R:我考数学.

则有 $P\to\neg Q,P\vee R,P$ 作为条件来推理:

① $P,P\to\neg Q\vdash\neg Q$, ② $\neg Q,P\vee R$,无法推出本题结论.

(5) 设 P:我学习,Q:我考试失败,R:我踢足球.

则有 $P\to\neg Q,\neg R\to P,Q$ 作为条件来推理:

① $Q,P\to\neg Q\vdash\neg P$, ② $\neg R\to P=R\vee P,\neg P,R\vee P\vdash R$($R$ 为结论).

本题推理过程正确.

7. 求下式的析取范式和特异析取范式、合取范式和特异合取范式:

$$P\to(Q\wedge R)\wedge(\neg P\to(\neg Q\wedge\neg R)).$$

解:原式 $=P\to(Q\wedge R)\wedge(P\vee(\neg Q\wedge\neg R))$

$=P\to((Q\wedge R)\wedge(P\vee\neg Q)\wedge(P\vee\neg R))$

$=\neg P\vee((Q\wedge R)\wedge(P\vee\neg Q)\wedge(P\vee\neg R))$

$=((\neg P\vee Q)\wedge(\neg P\vee R))\wedge(\neg P\vee P\vee\neg Q)\wedge(\neg P\vee P\vee\neg R)$

$=(\neg P\vee Q)\wedge(\neg P\vee R)$,

$(\neg P\vee Q)\wedge(\neg P\vee R)$

$=((\neg P\vee Q)\vee(R\wedge\neg R))\wedge((\neg P\vee R)\vee(Q\wedge\neg Q))$

$=(\neg P\vee Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee Q\vee R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)$

$=(\neg P\vee Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)$,

$(\neg P\vee Q)\wedge(\neg P\vee R)$

$=(\neg P\wedge\neg P)\vee(\neg P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge R)\vee(Q\wedge R)$.

析取范式:

$(\neg P\wedge\neg P)\vee(\neg P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge R)\vee(Q\wedge R)$.

特异析取范式(从真值表得出):

$(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge R)$.

合取范式:$(\neg P\vee Q)\wedge(\neg P\vee R)$.

特异合取范式:

$(\neg P\vee Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)$.

真值表

P	Q	R	原式
F	F	F	T
F	F	T	T
F	T	F	T
F	T	T	T
T	F	F	F
T	F	T	F
T	T	F	F
T	T	T	T

8. 证明下列公式是重言式:

(1) $((P\to Q)\to(\neg Q\to\neg P))\to((\neg Q\to\neg P)\to(P\to Q))$;

(2) $(P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow((P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q))$.

证明:(1) 原式 $=((\neg P\vee Q)\to(Q\vee\neg P))\to((Q\vee\neg P)\to(\neg P\vee Q))$

$=(\neg(\neg P\vee Q)\vee(Q\vee\neg P))\to(\neg(Q\vee\neg P)\vee(\neg P\vee Q))$

$=\neg((P\wedge\neg Q)\vee(Q\vee\neg P))\vee((\neg Q\wedge P)\vee(\neg P\vee Q))$

$=(\neg(P\wedge\neg Q)\wedge\neg(Q\vee\neg P))\vee((\neg Q\vee\neg P)\wedge(P\vee\neg P)\vee Q)$

$=((\neg P\vee Q)\wedge(\neg Q\wedge P))\vee(\neg Q\vee\neg P\vee Q)$

$=((\neg P\vee Q)\wedge(\neg Q\wedge P))\vee(\neg P\vee T)=T$;

(2) 原式 $=(P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow((P\wedge Q)\vee\neg P)\wedge((P\wedge Q)\vee\neg Q)$

$=(P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow((P\vee\neg P)\wedge(Q\vee\neg P))\wedge((P\vee\neg Q)\wedge(Q\vee\neg Q))$

$=(P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow((P\to Q)\wedge(Q\to P))$

$=(P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow(P\leftrightarrow Q)=T$.

注:对于"真"常用T或1表示,对于"假"常用F或0表示.

9. 化简下式,并判定它是否为重言式、矛盾式或偶然式:

$$((P\to Q)\to P)\leftrightarrow P.$$

解:原式 $=(\neg(\neg P\vee Q)\vee P)\leftrightarrow P$

$=(\neg(\neg(\neg P\vee Q)\vee P)\vee P)\wedge(P\to(\neg(\neg P\vee Q)\vee P))$

$=(((\neg P\vee Q)\wedge\neg P)\vee P)\wedge(\neg P\vee(\neg(\neg P\vee Q)\vee P))$

$=((\neg P\wedge\neg P)\vee(Q\wedge\neg P)\vee P)\wedge(\neg P\vee(P\wedge\neg Q)\vee P)$

$=(\neg P\vee(Q\wedge\neg P)\vee P)\wedge(\neg P\vee(P\wedge\neg Q)\vee P)$

$=(\neg P\vee P\vee(Q\wedge\neg P))\wedge(\neg P\vee P\vee(P\wedge\neg Q))$

$=T\wedge T=T$.

故本式为重言式.

10. 试在空格中写出等值演算的依据:

$P\to(Q\vee R)$

$=\neg P\vee(Q\vee R)$ __________

$=\neg P\vee\neg P\vee Q\vee R$ __________

$=(\neg P\vee Q)\vee(\neg P\vee R)$ __________

$=(P\rightarrow Q)\vee(P\rightarrow R)$ __________

解:(1) 利用联结词化归公式 $P\rightarrow Q=\neg P\vee Q$;

(2) 等幂律 $P\vee P=P$;

(3) 交换律 $P\vee Q=Q\vee P$;

(4) 化归公式 $\neg P\vee Q=P\rightarrow Q$.

11. 用谓词写出下列各断言:

(1) 炮比枪长,王林比李明高;

(2) 常州位于南京和苏州之间;

(3) 没有不犯错误的人;

(4) 所有四边形的内角之和都是 360°;

(5) 有且仅有一个素数是偶数;

(6) 不是所有的狗都比猫大.

解:(1) 令 $P(x,y)$:x 比 y 长,$Q(x,y)$:x 比 y 高,a 为炮,b 为枪,c 为王林,d 为李明.

$$P(a,b)\wedge Q(c,d).$$

(2) 令 $R(x,y,z)$:x 位于 y 和 z 之间,a 表示常州,b 表示南京,c 表示苏州.

$$R(a,b,c).$$

(3) 令 $P(x)$:x 是人,$Q(x)$:x 犯错误.

$$\neg\exists x(P(x)\wedge(\neg Q(x))).$$

(4) 令 $Q(x)$:x 是四边形,$R(x)$:x 内角之和是 360°.

$$\forall x(Q(x)\rightarrow R(x)).$$

(5) 令 $U(x)$:x 是素数,$V(x)$:x 是偶数.

$$\exists x(U(x)\wedge V(x)\wedge\forall y(U(y)\wedge V(y)\rightarrow x=y)).$$

(6) 令 $R(x,y)$:x 比 y 大,$D(x)$:x 是狗,$c(y)$:y 是猫.

$$\neg(\forall x\forall y(R(x,y)\wedge D(x)\wedge C(y))).$$

12. 指出下面各式的自由变元和约束变元,并决定量词的辖域.

(1) $\exists x((P(x)\vee Q(x))\wedge R(x))\rightarrow\forall x(S(x)\wedge T(x))$;

(2) $\forall x(P(x)\leftrightarrow Q(x))\wedge\exists xR(x)\vee S(x)$;

(3) $\forall x(R(x)\wedge\exists yS(x,y))$.

解:(1) $\exists x$ 中的 x 是约束变元,其中 $\exists$ 的辖域为$((P(x)\vee Q(x))\wedge R(x))$;$\forall x$ 中的 x 是约束变元,其中 $\forall$ 的辖域为$(S(x)\wedge T(x))$.

(2) $\forall x$ 中的 x 是约束变元,其中 $\forall$ 的辖域为$(P(x)\leftrightarrow Q(x))$;$\exists x$ 中的 x 是约束变元,其中 $\exists$ 的辖域为 $R(x)$;$S(x)$中的 x 为自由变元.

(3) $\forall x$ 中的 x 是约束变元,其中 $\forall$ 的辖域为 $(R(x) \land \exists y S(x,y))$,$\exists y$ 中的 y 是约束变元,其中 $\exists$ 的辖域为 $S(x,y)$.

13. 如果个体域是 $\{0,1,2,3\}$,消去以下各式的量词.

(1) $\exists x P(x) \land \forall x Q(x)$;

(2) $\forall x P(x) \land \forall x Q(x)$;

(3) $\forall x \neg R(x) \lor \forall x P(x)$.

解:(1) $(P(0) \lor P(1) \lor P(2) \lor P(3)) \land (Q(0) \land Q(1) \land Q(2) \land Q(3))$;

(2) $(P(0) \land P(1) \land P(2) \land P(3)) \land (Q(0) \land Q(1) \land Q(2) \land Q(3))$;

(3) $\neg(R(0) \lor R(1) \lor R(2) \lor R(3)) \lor (P(0) \land P(1) \land P(2) \land P(3))$.

14. 求下列各式的真值(其中(3)~(11)题的个体域均是整数集 $\mathbf{Z}$).

(1) $\forall x(x=1 \lor x=2)$,个体域是 $\{1,2\}$;

(2) $\forall x(3>2 \to x \leqslant 3) \lor (3>5)$,个体域是 $\{-2,3,5,6\}$;

(3) $\exists x(x>1 \to x=1)$;

(4) $\forall x(x^2-1 \geqslant 0)$;

(5) $\forall x(x^2-x-1 \neq 0)$;

(6) $\exists x(2x^2-3x+1=0)$;

(7) $\exists x(x^2-3=0)$;

(8) $\forall x \exists y(x^2=y)$;

(9) $\exists x \forall y(x^2=y)$;

(10) $\forall x \exists y(y^2=x)$;

(11) $\exists x \forall y(y^2=x)$.

解:(1) 真值为真.

(2) 将个体域中的个体分别代入,然后合取,当用 $x=5$ 代入时,$(3>2 \to 5 \leqslant 3) \lor (3>5) = (T \to F) \lor F = F$. 此合取式中有一项为 F,故真值为假.

(3) 当 x 取 1 时,有 $(1>1 \to 1=1) = F \to T = T$,故为真.

(4) 当 x 取 0 时,有 $(0-1 \geqslant 0)$ 为假,故真值为假.

(5) 不论 x 取何整数值时,均为真,故真值为真.

(6) 当 x 取 1 时,有 $2 \times 1^2 - 3 \times 1 + 1 = 0$,故真值为真.

(7) 不论 x 取何整数值时,x^2-3 不可能为 0,故真值为假.

(8) 真值为真.

(9) 真值为假.

(10) 真值为假.

(11) 真值为假.

15. 求下面各式的前束范式:

(1) $\neg(\forall x \exists y P(x,y) \leftrightarrow \exists x \forall y(\neg P(x,y)))$;

(2) $\neg(\exists x\forall yP(x,y)\leftrightarrow\forall x\exists y(\neg P(x,y)))$;

(3) $\exists x(\neg\exists yP(x,y))\to(\exists zQ(z)\to R(x))$.

解:(1) 原式 $=\neg((\forall x\exists yP(x,y)\to\exists x\forall y(\neg P(x,y)))\wedge$

$(\exists x\forall y(\neg P(x,y))\to\forall x\exists yP(x,y)))$

$=\neg((\neg\forall x\exists yP(x,y)\vee\exists x\forall y(\neg P(x,y)))\wedge$

$(\neg\exists x\forall y(\neg P(x,y))\vee\forall x\exists yP(x,y)))$

$=\neg((\exists x\forall y(\neg P(x,y))\vee\exists x\forall y(\neg P(x,y)))\wedge$

$(\forall x\exists yP(x,y)\vee\forall x\exists yP(x,y)))$

$=\neg(\exists x\forall y(\neg P(x,y))\vee\exists x\forall y(\neg P(x,y)))\vee$

$\neg(\forall x\exists yP(x,y)\vee\forall x\exists yP(x,y))$

$=\forall x\exists yP(x,y)\vee\exists x\forall y(\neg P(x,y))$

$=\forall x\exists yP(x,y)\vee\exists u\forall w(\neg P(u,w))$

$=\forall x\exists y\exists u\forall w(P(x,y)\vee\neg P(u,w))$;

(2) 原式 $=\neg((\exists x\forall yP(x,y)\to\forall x\exists y(\neg P(x,y)))\wedge$

$(\forall x\exists y(\neg P(x,y))\to\exists x\forall yP(x,y)))$

$=\neg((\neg\exists x\forall yP(x,y)\vee\forall x\exists y(\neg P(x,y)))\wedge$

$(\neg\forall x\exists y(\neg P(x,y))\vee\exists x\forall yP(x,y)))$

$=\neg(\forall x\exists y(\neg P(x,y))\wedge(\exists x\forall yP(x,y)))$

$=\neg\forall x\exists y(\neg P(x,y))\vee\neg\exists x\forall yP(x,y)$

$=\exists x\forall yP(x,y)\vee\forall x\exists y(\neg P(x,y))$

$=\exists x\forall y\forall u\exists w(P(x,y)\vee\neg P(u,w))$;

(3) 原式 $=\neg\exists x(\neg\exists yP(x,y))\vee(\neg\exists zQ(z)\vee R(x))$

$=\forall x\exists yP(x,y)\vee(\forall z\neg Q(z)\vee R(x))$

$=\forall x\exists yP(x,y)\vee(\forall z\neg Q(z)\vee R(u))$

$=\forall x\exists y\forall z(P(x,y)\vee\neg Q(z)\vee R(u))$.

16. 谓词公式$(\forall x)(R(x)\vee(\exists y)T(y))\to P(x)$中变元 x 是(　　).

A. 自由变元　　B. 约束变元

C. 既不是自由变元也不是约束变元　　D. 既是自由变元也是约束变元

解:D.

17. 试将下列各式译成汉语,其中 $R(x)$:x 是质数,$E(x)$:x 是偶数,$D(x,y)$:x 除尽 y.

$R(5)$______________________

$E(2)\wedge R(2)$______________________

$(\forall x)(D(2,x)\to E(x))$ ____________

$(\exists x)(E(x)\land D(x,6))$ ____________

解:5 是质数;2 是偶数并且 2 是质数;对于所有 x,若 x 能被 2 除尽,则 x 是偶数;某些偶数能除尽 6.

18. 设 $S(x)$:x 是学生;$T(x)$:x 是老师;$P(x,y)$:x 钦佩 y. 命题"所有学生都钦佩某些老师"可符号化为(　　).

A. $(\forall x)S(x)\to P(x,y)$

B. $(\forall x)(S(x)\to(\exists y)(T(y)\land P(x,y)))$

C. $(\forall x)(\exists y)(S(x)\land T(y)\land P(x,y))$

D. $(\forall x)(\exists y)(S(x)\land T(y)\to P(x,y))$

解:B.

19. 在谓词演算中,下列各式正确的是(　　).

A. $(\exists x)(\forall y)A(x,y)\Leftrightarrow(\forall y)(\exists x)A(x,y)$

B. $(\exists x)(\exists y)A(x,y)\Leftrightarrow(\exists y)(\exists x)A(x,y)$

C. $(\exists x)(\forall y)A(x,y)\Leftrightarrow(\forall x)(\exists y)A(x,y)$

D. $(\forall x)(\forall y)A(x,y)\Leftrightarrow(\forall y)(\forall x)B(x,y)$

解:B.

参考文献

1 徐洁磐,朱怀宏,宋方敏. 离散数学及其在计算机中的应用(第3版). 北京:人民邮电出版社,2005.

2 徐洁磐. 离散数学导论(第3版). 北京:高等教育出版社,2004.

3 左孝凌等. 离散数学理论·分析·题解. 上海:上海科技文献出版社,1988.

4 胡新启,胡元明. 离散数学——习题与解析. 北京:清华大学出版社,2002.

5 屈婉玲等. 离散数学题解. 北京:清华大学出版社,1999.

6 朱怀宏. 离散数学. 南京:南京大学出版社,2005.

7 孙俊秀等. 离散数学标准化题解. 天津:天津人民出版社,1993.

[General Information]
书名=离散数学导论　　学习指导与习题解析
作者=
页数=157
SS号=0
出版日期=
Vss号=54925648