一、填空（每题 4 分，共 20 分）

1．已知函数 $f(x)=1-x^2$ 在 $[-1,3]$ 上满足拉格朗日中值定理，则 $\xi=$ __1__.

2．极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos x}^{1}e^{-t^2}dt}{x^2}=\dfrac{1}{2e}$.

3．已知函数 $f(x)$ 处处连续且满足 $\int_0^x f(t)dt=\sqrt{1-\cos x}$，则 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$.

4．设 $f(x)$ 连续，则 $\dfrac{d}{dx}\int_0^x tf(x^2-t^2)dt=\underline{xf(x^2)}$.

5．不定积分 $\int\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}dx=\underline{\cos\dfrac{1}{x}+c}$. 无则 X.

二、单项选择题(每题只有一个正确答案．每题 4 分，共 20 分)

1．设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{x-x_0}=-1$，则（ A ）.

（A） x_0 是 $f(x)$ 的极大值点；（B）x_0 是 $f(x)$ 的极小值点；

（C）$(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点 ；（D） 以上都不是 .

2. 若 $\dfrac{\ln x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int xf'(x)dx =$（ B ）.

（A） $\dfrac{1}{x}+C$ ；（B） $\dfrac{1}{x}-\dfrac{2\ln x}{x}+C$；（C） $\dfrac{\ln x}{x}+C$ ；（D） $\dfrac{1+\ln x}{x}+C$.

3. 曲线 $y=x(x-1)(x-2)$ 与 x 轴所围部分的面积为（ D ）.

（A） $\int_0^2 x(x-1)(x-2)dx$；（B） $-\int_0^1 x(x-1)(x-2)dx+\int_1^2 x(x-1)(x-2)dx$；

（C） $-\int_0^2 x(x-1)(x-2)dx$；（D） $\int_0^1 x(x-1)(x-2)dx-\int_1^2 x(x-1)(x-2)dx$.

4. 设 $f(x)$ 可导,下列式正确的是（ B ）.

（A） $\int f'(x)dx = f(x)$；（B） $\dfrac{d}{dx}(\int f(x)dx) = f(x)$；

（C） $\dfrac{d}{dx}\int_a^b f(x)dx = f(x)$；（D） $\int_a^b f'(x) = f(x)$.

5. 已知 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_0^a (f(x)+f(-x))dx$ (其中 $a>0$，$f(x)$ 为 $[-a,a]$ 上的连续函数)，则积分 $\int_{-1}^{1} x^2 \arctan e^x dx =$（ C ）.

（A）0；（B）1；（C）$\dfrac{\pi}{6}$；（D）$\dfrac{\pi}{2}$.

三、计算题（每题 9 分，共 45 分）

1.求曲线 $y=\mathrm{e}^{\arctan x}$ 的凹凸区间及拐点.

$1'$ $3'$

解 ：$y'=\dfrac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{1+x^2}$，$y''=\dfrac{\dfrac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{1+x^2}(1+x^2)-\mathrm{e}^{\arctan x}(2x)}{(1+x^2)^2}$.

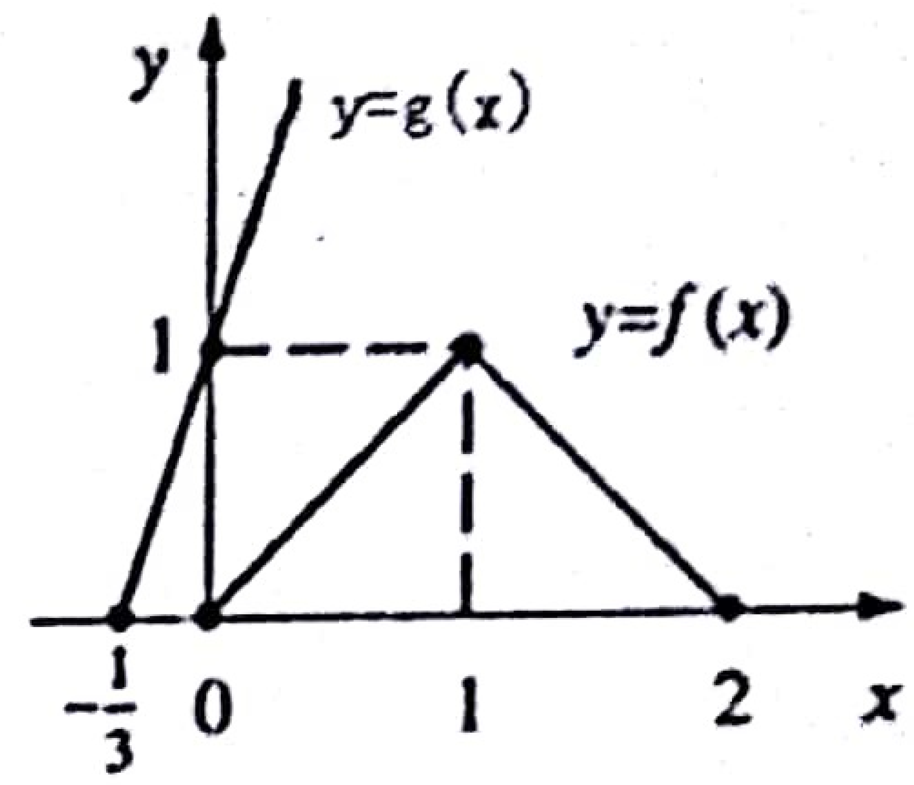
令 $y''=0$，可解得 $x=\dfrac{1}{2}$，列表分析可得：

x	$\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)$	$\dfrac{1}{2}$	$\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$
y''	+	0	—
y	凹	拐点 $2'$	凸

$1'$

所以拐点为$\left(\frac{1}{2},e^{\arctan\frac{1}{2}}\right)$，在$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$内是**凹函数**，在$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$内是**凸函数**.

2. 设函数$f(x)$是以2为周期的连续函数，它在$[0,2]$上的图形为分段直线，$g(x)$是线性函数，求$\int_0^2 f(g(x))dx$.



解：$g(x)=3x+1, g'(x)=3$. 令$g(x)=t$，

则$\int_0^2 f(g(x))dx=\frac{1}{3}\int_1^7 f(t)dt=\frac{1}{3}\times3\times\int_0^2 f(t)dt=\int_0^2 f(t)dt=1$.

3. 求不定积分$\int\sin\sqrt{x}dx$.

解：设$\sqrt{x}=t$，则$x=t^2$，$dx=2tdt$；

$$\int\sin\sqrt{x}dx=\int 2t\sin tdt=\int 2td(-\cos t)=-2t\cos t+2\int\cos tdt$$

$$=-2t\cos t+2\sin t+C=-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+2\sin\sqrt{x}+C.$$

4. .计算广义积分 $\int_0^1\frac{xdx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

解：令$x=\sin t$，则$\int\frac{xdx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{\sin t\cos t}{(2-\sin^2 t)\cos t}dt$

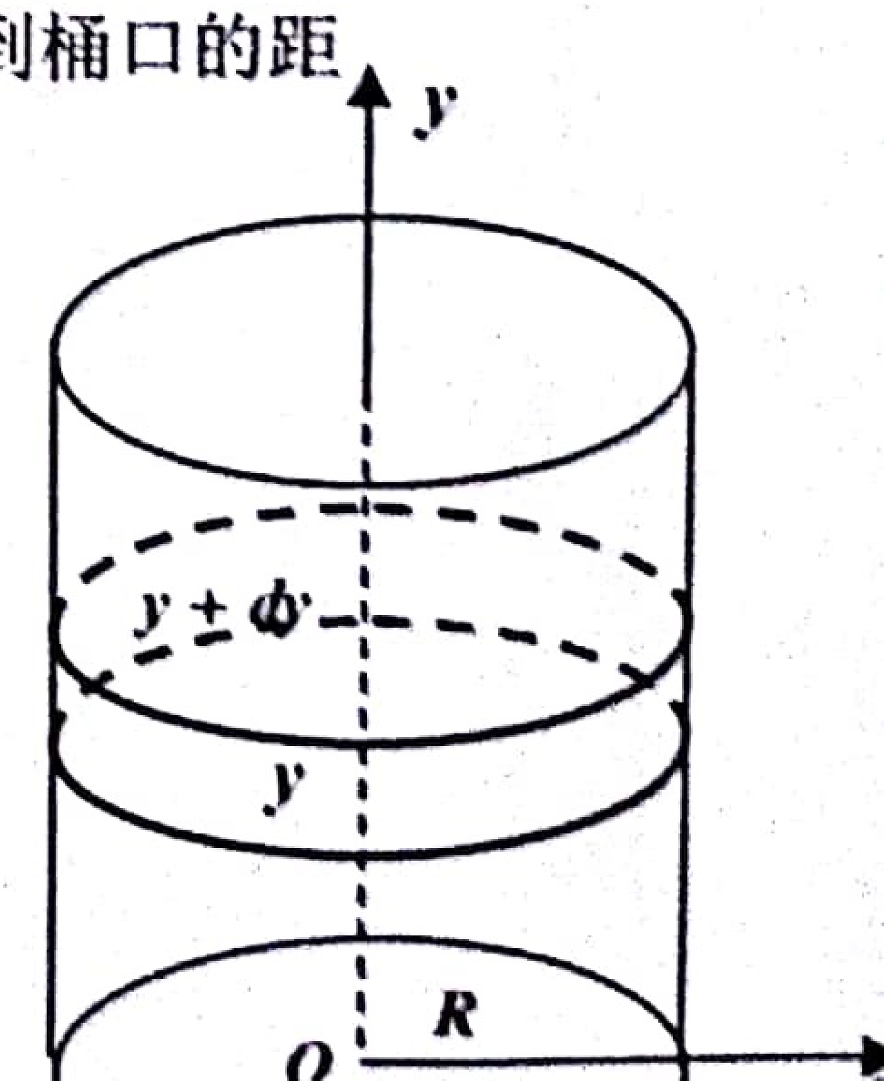
$$=-\int\frac{d\cos t}{1+\cos^2 t}=-\arctan(\cos t)+C=-\arctan\sqrt{1-x^2}+C$$

$$\int_0^1\frac{xdx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to0^+}[-\arctan\sqrt{1-x^2}]\Big|_0^{1-\varepsilon}=\frac{\pi}{4}$$

5. 半径为R，高为H的圆柱体水桶，盛满了水，问水泵将水桶内的水全部吸出来要做多少功（水密度为$1kg/dm^3$）.

解：在区间$[y,y+dy]$上取一小薄圆柱体，其水柱重πR^2dy，将这小水柱提高到桶口的距离为$(H-y)$，于是功元素dW为

$$dW=\pi R^2(H-y)dy.$$



$$W=\pi\int_0^H (H-y)R^2 dy \quad =\pi R^2(Hy-\frac{1}{2}y^2)\Big|_0^H=\frac{\pi}{2}R^2H^2$$

四、证明题

1.（本题 7 分）证明：当 $x>1$ 时，有 $2\sqrt{x}>3-\dfrac{1}{x}$.

证明 ：令 $f(x)=2\sqrt{x}-3+\dfrac{1}{x}$，$f(1)=0$，

则 $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x\sqrt{x}-1}{x^2}>0 \quad (x>1)$,

$\therefore f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 单调递增，从而，当 $x>1$ 时，$f(x)>f(1)=0$，

即 $2\sqrt{x}-3+\dfrac{1}{x}>0$，亦即 $2\sqrt{x}>3-\dfrac{1}{x}$.

2.（本题 8 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0$，

证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)+f'(\xi)=0$.

证明： 令 $F(x)=e^x f(x)$，

则 $F(x)=e^x f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $F(0)=F(1)=0$,

根据罗尔定理，至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$，

$F'(x)=[e^x f(x)]'=e^x f(x)+e^x f'(x)$，

即 $e^{\xi}[f(\xi)+f'(\xi)]=0$，

由 $e^{\xi}\neq 0$， 故 $f(\xi)+f'(\xi)=0$