第一章　　函数与极限

函数和极限都是高等数学中最重要、最基本的概念，极值方法是最基本的方法，一切内容都将从这二者开始。

§1、　　函　　数

一、集合、常量与变量

1、集合：集合是具有某种特定性质的事物所组成的全体。通常用大写字母 A、B、C……等来表示，组成集合的各个事物称为该集合的元素。若事物 a 是集合 M 的一个元素，就记 a$\in$M（读 a 属于 M）；若事物 a 不是集合 M 的一个元素，就记 a$\notin$M 或 a$\bar{\in}$M（读 a 不属于 M）；集合有时也简称为集。

注 1：若一集合只有有限个元素，就称为有限集；否则称为无限集。

2：集合的表示方法：

枚举法：

(i)、若集合为有限集，就可用列举出其全体元素的方法来表示，如：$A=\{1,2,3,\cdots\cdots,10\}$，$B=\{$一只猫，一只狗，一只鸡$\}$；

(ii)、对无限集，若知道其元素的规律，也可类似写出，如：$A=\{1,2,3,\cdots\cdots\}$为全体自然数集，$B=\{2,4,6,\cdots\cdots\}$为全体偶数集；

(iii)、列不出全体元素或找不到元素规律的集合，若知其元素有某种性质，那么该集合可表示为：$A=\{x|x\text{所具有的某种性质}\}$，即：有此性质的必在A中，且A中的元素必须有此性质。如：$A=\{x|x^3+5x^2+7x+3=0\}$；$B=\{x|x\text{为我校的学生}\}$；$C=\{(x,y)|\text{点}(x,y)\text{在}D\text{中}\}$等。

3：全体自然数集记为 N,全体整数的集合记为 Z,全体有理数的集合记为 Q,全体实数的集合记为 R。以后不特别说明的情况下考虑的集合均为数集。

4：集合间的基本关系：若集合 A 的元素都是集合 B 的元素，即若有 $x\in A$，必有 $x\in B$，就称 A 为 B 的子集，记为 $A\subset B$,或 $B\supset A$(读 B 包含 A)。

显然：$N\subset Z\subset Q\subset R$.

若 $A\subset B$,同时 $B\subset A$,就称 A、B 相等,记为 A=B。

5：当集合中的元素重复时,重复的元素只算一次.如：{1,2,2,3}={1,2,3}。

6：不含任何元素的集称为空集,记为 Φ ,如：$\{x|x^2+1=0, x\in R\}=\Phi$,$\{x:2^x=-1\}=\Phi$,空集是任何集合的子集,即 $\Phi\subset A$。

7：区间：所有大于 a、小于 b $(a<b)$ 的实数组成一个集合,称之为开区间,记为(a,b),即

(a,b)=$\{x|a\prec x\prec b\}$ 。

同理：[a,b]=$\{x|a\le x\le b\}$ 为闭区间，$[a,b)=\{x|a\le x\prec b\}$ 和 $(a,b]=\{x|a\prec x\le b\}$ 分别称为左闭右开、左开右闭的区间，统称为半开区间。

以上均成为有限区间，a、b 分别称为左、右端点。

对无穷区间有：$(-\infty,b]=\{x|x\le b\},(a,+\infty)=\{x|a\prec x\},(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty\prec x\prec+\infty\}=R$，

在不特别要求下，有限区间、无限区间统称为区间，用 I 表示。

8：邻域：设 a 和δ为两个实数，且$\delta \succ 0$.集合$\{x\|x-a|\prec \delta\}$称为点 a 的δ邻域，记为$U(a,\delta)$,a 为该邻域的中心，δ为该邻域的半径，事实上，

$U(a,\delta)=\{x|a-\delta \prec x \prec a+\delta\}=(a-\delta,a+\delta)$。

同理：我们称$U(\hat{a},\delta)=\{x|0\prec|x-a|\prec\delta\}$为 a 的去心$\delta$邻域，或 a 的空心$\delta$邻域。

9：集合的内容很多，其它内容(如集合的运算)在此不作一一介绍了。

2、常量与变量：在自然科学中，我们会遇到各种不同的量，然而在观察这些量时，发现有着非常不同的状态，有的量在过程中不起变化，保持一定的数值，此量称为常量；又有些量有变化，可取各种不同的数值，这种量称为变量。

【例】掷同一铅球数次，发现铅球的质量、体积为常量，而投掷距离、上抛角度、用力大小均为变量。

注 1：常量与变量是相对而言的，同一量在不同场合下，可能是常量，也可能是变量，如在一天或在一年中观察某小孩的身高；从小范围和大范围而言，重力加速度可是常量和变量，然而，一旦环境确定了，同一量不能既为常量又为变量，二者必居其一。

2：常量一般用 a,b,c……等字母表示，变量用 x,y,u,t……等字母表示，常量 a 为一定值，在数轴上可用定点表示，变量 x 代表该量可能取的任一值，在数轴上可用动点表示，如：$x\in(a,b)$表示x可代表(a,b)中的任一个数。

二、函数的概念

【例】正方形的边长x与面积S之间的关系为：$S=x^2$，显然当x确定了，S也就确定了。这就是说，同一过程中变量之间往往存在着某种内在的联系。它们在遵循某一规律时相互联系、相互约束着。

定义：设x和y为两个变量，D为一个给定的数集，如果对每一个$x\in D$，按照一定的法则f变量y总有确定的数值与之对应，就称y为x的函数，记为$y=f(x)$.数集D称为该函数的定义域，x叫做自变量，y叫做因变量。

当x取数值$x_0\in D$时，依法则f的对应值称为函数$y=f(x)$在$x=x_0$时的函数值。所有函数值组成的集合$W=\{y|y=f(x),x\in D\}$称为函数$y=f(x)$的值域。

注 1：函数通常还可用$y=g(x),y=F(x),s=u(t)$等表示。

2：约定：函数的定义域就是自变量所能取的，使算式有意义的一切实数值的全体。

【例 1】 $y=\sin x$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[-1,1]$。

【例 2】 $y=\sqrt{1+x}$的定义域为$[-1,+\infty)$，值域为$[0,+\infty)$。

【例 3】 $y=\begin{cases} x^2 & 0 \prec x \le 1 \\ \frac{1}{2} & x=0 \\ 1-x & -1 \le x \prec 0 \end{cases}$ 的定义域为$[-1,1]$，值域为$[0,2]$。

【例 4】 $f(x)\equiv 1$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，$h(x)=\frac{x}{x}$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，从而显然$f(x)\ne h(x)$。

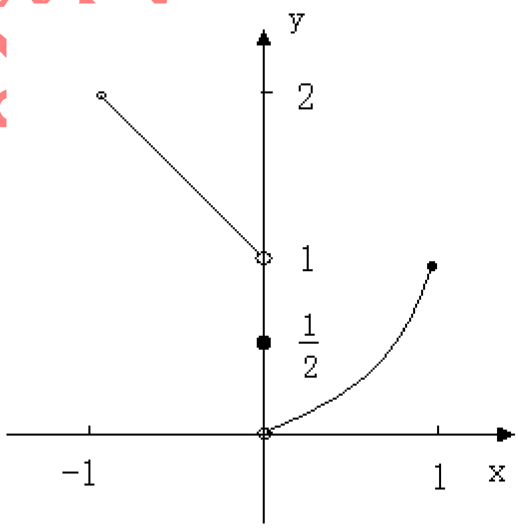
3、若对每一个$x\in D$，只有唯一的一个y与之对应，就称函数$y=f(x)$为单值函数；若有不止一个y与之对应，就称为多值函数。如：$x^2+y^2=1,x^2-y^2=1$等。以后若不特别声明，只讨论单值函数。

4、函数的表示法有三种：解析法、图象法、列表法。其中解析法较普遍，它是借助于数学式子来表示对应法则，上例均为解析法，注意例 3 的法则是：当自变量x在$(0,1]$上取值，其函数值为x^2；当x取 0 时，$f(x)=\frac{1}{2}$；当x在$[-1,0)$上取值时，其函数值为$1-x$。（这种函数称为分段函数，在以后经常遇见，希望注意！）尽管有几个不同的算式，但它们合起来只表示一个函数！

5、对D中任一固定的x，依照法则有一个数y与之对应，以x为横坐标，y为纵坐标在坐标平面上就确定了一个点。当x取遍D中的每一数时，便得到一个点集$C=\{(x,y)|y=f(x),x\in D\}$，我们称之为函数$y=f(x)$的图形。换言之，当$x$在$D$中变动时，点$(x,y)$的轨迹就是$y=f(x)$的图形。

【例 5】 书上的几个例子。（同学们自己看）

【例 6】 例 3 的图形如下图



三、函数的几种特性

1、 函数的有界性：设 $y=f(x)$ 在 D 上有定义，若对 $\forall x\in D,\exists M\succ 0$，使得：$|f(x)|\le M$，就称 $f(x)$ 在 D 上有界，否则称为无界。

注：1、若对 $\forall x\in D$，$\exists M$，使得 $f(x)\le M(f(x)\ge M)$，就称 $f(x)$ 在 D 上有上(下)界。$f(x)$ 在 D 上有界 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 D 上同时有上界和下界。

2、 $f(x)$ 在 D 上无界也可这样说：对 $\forall M\succ 0$，总 $\exists x_0\in D$，使得 $|f(x_0)|\succ M$。

【例 7】 上段例 1、3、4 中的函数是有界的；例 2 中的函数是无界的，但有下界。

2、函数的单调性：设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若对 $\forall x_1$、$x_2\in I$，当 $x_1\prec x_2$ 时总有：

（1） $f(x_1)\le f(x_2)$，就称 $f(x)$ 在 I 上单调递增，特别当严格不等式 $f(x_1)\prec f(x_2)$ 成立时，就称 $f(x)$ 在 I 上严格单调递增。

（2） $f(x_1)\ge f(x_2)$，就称 $f(x)$ 在 I 上单调递减，特别当严格不等式 $f(x_1)\succ f(x_2)$ 成立时，就称 $f(x)$ 在 I 上严格单调递减。

注：1、此处的定义与书上有区别，希望注意！
　　2、这样的函数分别称为单调函数和严格单调函数。
　　3、调递增有时简称单增、递增或不减，其它也一样。

【例 8】 符号函数和取整函数均为单增函数，但不严格单调。

【例 9】 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是严格单减函数。

【例 10】 [例 3]中的函数在定义域 $[-1,1]$ 上不是单调的，但在 $[-1,0)$ 上是严格单减的，在 $(0,1]$ 上是严格单增的。

3、函数的奇偶性：设函数 $f(x)$ 的定义域 D 为对称于原点的数集，即若 $x\in D$，有 $-x\in D$，

(1) 若对 $\forall x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$ 恒成立，就称 $f(x)$ 为偶函数。

(2) 若对 $\forall x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$ 恒成立，就称 $f(x)$ 为奇函数。

【例 11】 $y=x^2$，$y=\cos x$，$y=|x|$，是偶函数，$y=x^3$，$y=\sin x$，$y=\operatorname{sgn} x$，是奇函数。

$y=x^2+x^3$，$y=\cos x+\sin x$ 是非奇非偶函数。

【例 11】 * $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 是奇函数。

注：1、偶函数的图形是关于 y 轴对称的，奇函数的图形是关于原点对称的。

2、若 $f(x)$ 是奇函数，且 $0\in D$，则必有 $f(0)=0$。

3、两偶函数和为偶函数；两奇函数和为奇函数；两偶函数的积为偶函数；两奇函数的积也为偶函数；一奇一偶的积为奇函数。

4、周期性：设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果 $\exists l\neq 0$，使得对 $\forall x\in D$，有 $x\pm l\in D$，且 $f(x+l)=f(x)$ 恒成立，就称 $f(x)$ 为周期函数，l 称为 $f(x)$ 的周期。

【例 12】 $y=\sin x, y=\cos x, y=tgx$ 分别为周期为 $2\pi,2\pi,\pi$ 的周期函数，$y=x-[x]$ 为周期为 1 的函数。

注 1：若 l 为 $f(x)$ 的周期，由定义知 $2l,3l,4l\cdots\cdots$ 也都是 $f(x)$ 的周期，故周期函数有无穷多个周期，通常说的周期是指最小正周期（基本周期），然而最小正周期未必都存在（为什么？）

例如：$y=\sin^2 x+\cos^2 x\equiv 1$，设有最小正周期。

2：周期函数在一每个周期 $(a+kl,a+(k+1)l)$（a 为任意数，k 为任意常数）上，有相同的形状。

四、反函数

设 $f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W，因此，对 $\forall y\in W$，必 $\exists x\in D$，使得 $f(x)=y$，这样的 x 可能不止一个，若将 y 当作自变量，x 当作因变量，按函数的概念，就得到一新函数 $x=\varphi(y)$，称之为函数 $y=f(x)$ 的反函数，而 $f(x)$ 叫做直接函数。

注 1：反函数 $x=\varphi(y)$ 的定义域为 W，值域为 D；

2：由上讨论知，即使 $y=f(x)$ 为单值函数，其反函数却未必是单值函数，以后对此问题还作研究；

3：在习惯上往往用 x 表示自变量，y 表示因变量，因此将 $x=\varphi(y)$ 中的 x 与 y 对换一下，$y=f(x)$ 的反函数就变成 $y=\varphi(x)$，事实上函数 $y=\varphi(x)$ 与 $x=\varphi(y)$ 是表示同一函数的，因为，表示函数关系的字母"φ"没变，仅自变量与因变量的字母变了，这没什么关系。所以说：若 $y=f(x)$ 的反函数为 $x=\varphi(y)$，那么 $y=\varphi(x)$ 也是 $y=f(x)$ 的反函数，且后者

较常用；

4：反函数 $y=\varphi(x)$ 的图形与直接函数 $y=f(x)$ 的图形是对称于 $y=x$（证明很简单，大家自己看书）；

5：有些书上，对反函数的定义与此不同，希加与之区别。

【例 13】 函数 $y=ax+b, y=x^2, y=x^3$ 的反函数分别为：$x=\dfrac{y-b}{a}, x=\pm\sqrt{y}, x=y^{\frac{1}{3}}$ 或分别为 $y=\dfrac{x-b}{a}, y=\pm\sqrt{x}, y=x^{\frac{1}{3}}$。

§1、2 初等函数

一、幂函数

形如 $y=x^{\mu}$（μ 为常数）的函数叫做幂函数。

其定义域较为复杂，下作一些简单的讨论：

（1） 当 μ 为非负整数时，定义域为 $(-\infty,+\infty)$；

（2） 当 μ 为负整数时，定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$；

（3） 当 μ 为其它有理数时，要视情况而定。

【例 1】 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$；

$y=x^{\frac{1}{2}}, y=x^{\frac{3}{4}}$ 的定义域为 $[0,+\infty)$；

$y=x^{-\frac{1}{2}}$ 的定义域为 $(0,+\infty)$。

（4） 当 μ 为无理数时，规定其定义域为 $(0,+\infty)$，其图形也很复杂，但不论 μ 取何值，图形总过（1，1）点，当 μ>0 时，还过（0，0）点。

二、 指数函数与对数函数

1、 指数函数：形如 $y=a^x(a>0,a\neq1)$ 的函数称为指数函数，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，其图形总在 x 轴上方，且过（0，1）点，

（1） 当 $a>1$ 时，$y=a^x$ 是单调增加的；

（2） 当 $0<a<1$ 时，$y=a^x$ 是单调减少的；

以后我们经常遇到这样一个指数函数 $y=e^x$, e 的意义以后讲，其图形大致如下图所示，特

别地，$y=a^x$ 与 $y=a^{-x}$ 关于 y 轴对称。

2、对数函数：指数函数 $y=a^x$ 的反函数，记为 $y=\log_a x(a$ 为常数，$a>0,a\neq 1)$,称为对数函数，其定义域为 $(0,+\infty)$，由前面反函数的概念知：$y=a^x$ 的图形和 $y=\log_a x$ 的图形是关于 $y=x$ 对称的，从此，不难得 $y=\log_a x$ 的图形，

$y=\log_a x$ 的图形总在 y 轴右方，且过（1，0）点

（1） 当 $a>1$ 时，$y=\log_a x$ 单调递增，且在（0，1）为负，$(1,+\infty)$ 上为正；

（2） 当 $0<a<1$ 时，$y=\log_a x$ 单调递减，且在（0，1）为正，$(1,+\infty)$ 上为负；

特别当 a 取 e 时，函数记为 $y=\ln x$，称为自然对数函数。

三、 三角函数与反三角函数

1、 三角函数

三角函数主要是：

正弦函数：$y=\sin x$ $\quad x\in(-\infty,+\infty)$

余弦函数：$y=\cos x$ $\quad x\in(-\infty,+\infty)$

正切函数：$y=\tan x$ $\quad x\neq n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots$

余切函数：$y=\cot x$ $\quad x\neq n\pi$ $\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots$

正弦函数和余弦函数均为周期为 2π 的周期函数，正切函数和余切函数均为周期为 π 的周期函数。正弦函数、正切函数、余切函数都是奇函数，余弦函数为偶函数；另外还有两个：正割 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$ 和余割 $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$，其图形在此不做讨论了。

2、 反三角函数：

反三角函数是三角函数的反函数，它们分别为：

反正弦函数：$y=Arc\sin x$ $\quad x\in[-1,1]$

反余弦函数：$y=Arc\cos x$ $\quad x\in[-1,1]$

反正切函数：$y=Arc\tan x$ $\quad x\in(-\infty,+\infty)$

反余切函数： $y = Arc\cot x \qquad x \in (-\infty, +\infty)$

显然反三角函数都是多值函数，单我们可选取其一个单值分支，叫做主值，选法如下：

将 $y = Arc\sin x$ 限制在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上，得一单值函数，记为 $y = \arcsin x$，它就是所取主值函数，$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 叫做主值区间，显然 $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}$，

同理：将 $y = Arc\cos x$ 限制在 $[0, \pi]$ 上，得 $y = \arccos x$

将 $y = Arc\tan x$ 限制在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上，得 $y = \arctan x$

将 $y = Arc\cot x$ 限制在 $[0, \pi]$ 上，得 $y = arc\cot x$

从图中不难看出 $\arcsin x$ 和 $\arctan x$ 是单调递增的， $\arccos x$ 和 $arc\cot x$ 是单调递减的。

四、 复合函数和初等函数

设 $y = f(u)$，定义域为 D_1， $u = \varphi(x)$，定义域为 D_2，值域为 W_2，且 $W_2 \subset D_1$，这样对于 $\forall x \in D_2$，由 $u = \varphi(x)$ 可算出函数值 $u \in W_2 \subset D_1$，所以 $u \in D_1$，由 $y = f(u)$ 又可算出其函数值 y，因此对于 $\forall x \in D_2$，有确定的值 y 与之对应，从而得一个以 x 为自变量， y 为因变量的函数，我们称之为以 $y = f(u)$ 为外函数， $u = \varphi(x)$ 为内函数复合成的复合函数，记为 $y = f(\varphi(x))$，其中 u 为中间变量。

【例 1】 $y = \sin^2 x$ 就是 $y = u^2$ 和 $u = \sin x$ 复合而成；

$y = \cos x^2$ 就是 $y = \cos u$ 和 $u = x^2$ 复合而成。

注 1：并非任何两函数都可以复合的，

例如： $y = \arcsin u$ 和 $u = 2 + x^2$ 不能复合；

$y = \sqrt{u}$ 和 $u = -1 - x^2$ 也不能复合。

2：复合可推广到三个或更多的函数上去，如：

$y = \tan(\ln x)^2$ 就是 $y = \tan u, u = v^2, v = \ln x$ 复合成的。

3：在函数复合中，未必都有 $y = f(u)$、$u = \varphi(x)$ 的形式，一般为 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$，这时候就要注意哪个为外函数，哪个为内函数，从而复合后有 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 之分。

2、初等函数

我们把幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数。由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合后所得到的能用一个解析式子表示的函数，称为初等函数。

【例 2】 $y=\sqrt{1+x}, y=\sqrt{1-2^{x}}, y=\sin^{2}x, y=\tan(\ln x)^{2}, y=\arctan\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$ 等都是初等函数。

本教材讨论的主要都是初等函数。

五、　双曲函数和反双曲函数

双曲正弦：$y=shx=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$　　$x\in(-\infty,+\infty)$

双曲余弦：$y=chx=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$　　$x\in(-\infty,+\infty)$

双曲正切：$y=thx=\dfrac{shx}{chx}=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$　　$x\in(-\infty,+\infty)$

反双曲正弦：$y=arshx=\ln(x+\sqrt{x^{2}+1})$　　$x\in(-\infty,+\infty)$

反双曲余弦：$y=archx=\ln(x+\sqrt{x^{2}-1})$　　$x\in[1,+\infty)$

（多值函数 $y=\pm\ln(x+\sqrt{x^{2}-1})$ 取“+”号为主值）

反双曲正切：$y=arthx=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$　　$x\in(-1,1)$

由于这类以后用得较少，只要掌握上面的内容就行了，其它的此外不细讲了。

§1、3　数列的极限

所谓的数列，通俗地讲，就是将一系列的数排成一列（排）。在数学中，我们可用这样的话来定义：

定义：数列是定义在自然数集上的函数，记为 $x_n=f(n),\quad n=1,2,3\cdots\cdots$，由于全体自然数可以从小到大排成一列，因此数列的对应值也可以排成一列：$x_1,x_2,\cdots\cdots x_n\cdots\cdots$，这就是最常见的数列表现形式了，有时也简记为 $\{x_n\}$ 或数列 x_n。数列中的每一数称为数列的项，第 n 项 x_n 称为一般项或通项。

【例 1】 书上用圆内接正 $6\times2^{n-1}$ 边形的面积来近似代替该圆的面积时，得到数列

$A_1, A_2, \cdots\cdots A_n, \cdots\cdots$　　（多边形的面积数列）

【例 2】长一尺的棒子，每天截去一半，无限制地进行下去，那么剩下部分的长构成一数列：$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \cdots\cdots \frac{1}{2^n}, \cdots\cdots$，通项为 $\frac{1}{2^n}$。

【例 3】$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\cdots \frac{1}{n} \cdots\cdots$;　　$1, -1, \cdots\cdots, (-1)^{n-1}, \cdots\cdots$;

$2, 4, 6, \cdots\cdots, 2n, \cdots\cdots$;　　$2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \cdots\cdots, \frac{n+1}{n}, \cdots\cdots$;

都是数列，其通项分别为 $\frac{1}{n}, (-1)^{n-1}, 2n, \frac{n+1}{n}$。

注：在数轴上，数列的每项都相应有点对应它。如果将 x_n 依次在数轴上描出点的位置，我们能否发现点的位置的变化趋势呢？显然，$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}, \left\{\frac{1}{n}\right\}$ 是无限接近于 0 的；$\{2n\}$ 是无限增大的；$\{(-1)^{n-1}\}$ 的项是在 1 与 -1 两点跳动的，不接近于某一常数；$\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$ 无限接近常数 1。

对于数列来说，最重要的是研究其在变化过程中无限接近某一常数的那种渐趋稳定的状态，这就是常说的数列的极限问题。

我们来观察 $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$ 的情况。从图中不难发现 $\frac{n+1}{n}$ 随着 n 的增大，无限制地接近 1，亦即 n 充分大时，$\frac{n+1}{n}$ 与 1 可以任意地接近，即 $\left|\frac{n+1}{n} - 1\right|$ 可以任意地小，换言之，当 n 充分大时 $\left|\frac{n+1}{n} - 1\right|$ 可以小于预先给定的无论多么小的正数 ε。例如，取 $\varepsilon = \frac{1}{100}$，由 $\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{100} \Rightarrow n > 100$，即 $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$ 从第 101 项开始，以后的项 $x_{101} = \frac{102}{101}, x_{102} = \frac{103}{102}, \cdots\cdots$ 都满足不等式 $|x_n - 1| < \frac{1}{100}$，或者说，当 $n > 100$ 时，有 $\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \frac{1}{100}$。同理，若取 $\varepsilon = \frac{1}{10000}$，由 $\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{10000} \Rightarrow n > 10000$，即 $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$ 从第 10001 项开始，以后的项 $x_{10001} = \frac{10002}{10001}, x_{10002} = \frac{10003}{10002}, \cdots\cdots$ 都满足不等式 $|x_n - 1| < \frac{1}{10000}$，或说，当 $n > 10000$ 时，有 $\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \frac{1}{10000}$。一般地，不论给定的正数 ε

多么小，总存在一个正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $\left|\frac{n+1}{n}-1\right|<\varepsilon$。这就充分体现了当 n 越来越大时，$\frac{n+1}{n}$ 无限接近 1 这一事实。这个数“1”称为当 $n\to\infty$ 时，$\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$ 的极限。

定义：若对 $\forall\varepsilon>0$（不论 ε 多么小），总 $\exists$ 自然数 $N>0$，使得当 $n>N$ 时都有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立，这是就称常数 a 是数列 x_n 的极限，或称数列 x_n 收敛于 a，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，或 $x_n\to a$（$n\to\infty$）。如果数列没有极限，就说数列是发散的。

【例 4】证明数列 $2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\cdots\cdots,\frac{n+1}{n},\cdots\cdots$ 收敛于 1。

证明：对 $\forall\varepsilon>0$，要使得 $\left|\frac{n+1}{n}-1\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$，只须 $n>\frac{1}{\varepsilon}$，所以取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，

有 $\left|\frac{n+1}{n}-1\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$。

注 1：ε 是衡量 x_n 与 a 的接近程度的，除要求为正以外，无任何限制。然而，尽管 ε 具有任意性，但一经给出，就应视为不变。（另外，ε 具有任意性，那么 $\frac{\varepsilon}{2},2\varepsilon,\varepsilon^2$ 等也具有任意性，它们也可代替 ε）

2：N 是随 ε 的变小而变大的，是 ε 的函数，即 N 是依赖于 ε 的。在解题中，N 等于多少关系不大，重要的是它的存在性，只要存在一个 N，使得当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 就行了，而不必求最小的 N。

【例 5】证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$。

证明：对 $\forall\varepsilon>0$，因为 $\left|\frac{n+1}{n}-1\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$,因为 $\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|=\frac{a^2}{n(\sqrt{n^2+a^2}+n)}<\frac{a^2}{n}$

（此处不妨设 $a\neq0$，若 $a=0$，显然有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$）

所以要使得$\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$，只须$\frac{a^2}{n}<\varepsilon$就行了。

即有$n>\frac{a^2}{\varepsilon}$.　　所以取$N=[\frac{a^2}{\varepsilon}]$，当$n>N$时，因为有$\frac{a^2}{n}<\varepsilon$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon\text{，所以}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1\text{。}$$

注 3：有时找N比较困难，这时我们可把$|x_n-a|$适当地变形、放大（千万不可缩小！），若放大后小于ε，那么必有$|x_n-a|<\varepsilon$。

【例 3】 设$|q|<1$，证明$1,q,q^2,\cdots\cdots,q^{n-1},\cdots\cdots$的极限为 0，即$\lim\limits_{n\to\infty}q^{n-1}=0$。

证明：若$q=0$，结论是显然的，现设$0<|q|<1$，对$\forall\varepsilon>0$，（因为ε越小越好，不妨设$\varepsilon<1$），要使得$|q^{n-1}-0|<\varepsilon$，即$|q|^{n-1}<\varepsilon$，只须两边放对数后，$(n-1)\ln|q|<\ln\varepsilon$成立就行了。因为$0<|q|<1$，所以$\ln|q|<0$，所以$n-1>\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\Rightarrow n>1+\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$。

取$N=1+\left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right]$，所以当$n>N$时，有$|q^{n-1}-0|<\varepsilon$成立。

收敛数列的有关性质：

定理 1：（唯一性）数列x_n不能收敛于两个不同的极限。

证明：设a和b为x_n的任意两个极限，下证$a=b$。

由极限的定义，对$\forall\varepsilon>0$，必分别$\exists$自然数N_1,N_2，当$n>N_1$时，有$|x_n-a|<\varepsilon\ldots(1)$

当$n>N_2$时，有$|x_n-b|<\varepsilon\ldots(2)$令$N=Max\{N_1,N_2\}$，当$n>N$时，（1），（2）同时成立。现考虑：

$$|a-b|=|(x_n-b)-(x_n-a)|\le|x_n-b|+|x_n-a|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$$

由于a,b均为常数$\Rightarrow a=b$，所以x_n的极限只能有一个。

注：本定理的证明方法很多，书上的证明自己看。

【例 4】证明数列$x_n=(-1)^{n+1}$是发散的。

证明：（反证法）假设x_n收敛，由唯一性，设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，按定义，对$\varepsilon=\frac{1}{2}$,∃自然数$N$，当$n>N$ 时，$|x_n-a|<\varepsilon=\frac{1}{2}$，考虑$|x_{n+1}-x_n|\cdots\le|x_{n+1}-a|+|x_n-a|<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$，而$x_n$，$x_{n+1}$总是一个“1”，一个“$-1$”，所以$|x_{n+1}-x_n|=1$, 所以矛盾，

所以 $x_n=(-1)^{n+1}$ 发散。

定理 2. （有界性）若数列x_n收敛，那么它一定有界，即：对于数列 x_n，若∃正数M，对一切n，有$|x_n|\le M$ 。

证明：设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，由定义对$\varepsilon=1$,∃自然数$N$, 当$n>N$时，$|x_n-a|<\varepsilon=1$，所以当$n>N$时，$|x_n|\le|x_n-a|+|a|<1+|a|$，令$M=Max\{|x_1|,|x_2|\cdots\cdots|x_N|,1+|a|\}$，显然对一切$n$，$|x_n|\le M$ 。

注：本定理的逆定理不成立，即有界未必收敛。例如数列$x_n=(-1)^{n+1}$是有界的（$|x_n|\le1$），但函数收敛。此点希望注意！

§1、4 函数的极限

由上节知，数列是自变量取自然数时的函数，$x_n=f(n)$，因此，数列是函数的一种特性情况。此处讲的是函数的极限，就是数列极限意义的。它主要表现在两个方面：

一、 自变量x任意接近于有限值x_0，或讲趋向（于）x_0（记$x\to x_0$）时，相应的函数值$f(x)$的变化情况。

二、当自变量x的绝对值$|x|$无限增大，或讲趋向无穷大（记$x\to\infty$）时，相应的函数值$f(x)$的变化情况。

一、 自变量趋向有限值x_0时函数的极限

与数列极限的意义相仿，自变量趋于有限值x_0时的函数极限可理解为：当$x\to x_0$时，$f(x)\to A$（A为某常数），即当$x\to x_0$时，$f(x)$与A无限地接近，或说$|f(x)-A|$可任意

小，亦即对于预先任意给定的正整数ε（不论多么小），当x与x_0充分接近时，可使得$|f(x)-A|$小于ε。用数学的语言说，即

定义 1：如果对$\forall\varepsilon>0$（不论它多么小），总$\exists\delta>0$，使得对于适合不等式$0<|x-x_0|<\delta$的一切x所对应的函数值$f(x)$满足：$|f(x)-A|<\varepsilon$，就称常数A为函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限，记为

$$\lim_{n\to\infty} f(x)=A\text{，或 } f(x)\to A \quad \text{（当 } x\to x_0 \text{ 时）}$$

注 1：“x与x_0充分接近”在定义中表现为：$\exists\delta>0$，有$0<|x-x_0|<\delta$，即$x\in\hat{U}(x_0,\delta)$。显然δ越小，x与x_0接近就越好，此δ与数列极限中的N所起的作用是一样的，它也依赖于ε。一般地，ε越小，δ相应地也小一些。

2：定义中$0<|x-x_0|$表示$x\neq x_0$，这说明当$x\to x_0$时，$f(x)$有无限与$f(x_0)$在x_0点（是否有）的定义无关（可以无定义，即使有定义，与$f(x_0)$值也无关）。

3：几何解释：对$\forall\varepsilon>0$，作两条平行直线$y=A+\varepsilon,y=A-\varepsilon$。由定义，对此$\varepsilon,\exists\delta>0$。当$x_0-\delta<x<x_0+\delta$，且$x\neq x_0$时，有$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$。即函数$y=f(x)$的图形夹在直线$y=A+\varepsilon,y=A-\varepsilon$之间（$f(x_0)$可能除外）。换言之：当$x\in\hat{U}(x_0,\delta)$时，$f(x)\in U(A,\varepsilon)$。从图中也可见$\delta$不唯一！

【例1】　证明$\lim\limits_{x\to x_0}C=C$　（C为一常数）

证明：对$\forall\varepsilon>0$，可取任一正数δ，当$0<|x-x_0|<\delta$时，$|f(x)-A|=|C-C|=0<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{x\to x_0}C=C$。

【例2】　证明$\lim\limits_{x\to x_0}(ax+b)=ax_0+b \quad (a\neq 0)$

证明：对$\forall\varepsilon>0$，要使得$|(ax+b)-(ax_0+b)|=|a(x-x_0)|=|a||x-x_0|<\varepsilon$，只须$|x-x_0|<\dfrac{\varepsilon}{|a|}$，　所以取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{|a|}>0$显然当$|x-x_0|<\delta$时，有$|(ax+b)-(ax_0+b)|<\varepsilon$。

【例3】 证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\dfrac{2}{3}$ 。

证明：对 $\forall\varepsilon>0$，因为 $a\neq 1$, 所以 $x-1\neq 0.\Rightarrow\left|\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}-\dfrac{2}{3}\right|=\left|\dfrac{x+1}{2x+1}-\dfrac{2}{3}\right|=\left|\dfrac{1-x}{3(2x+1)}\right|$

[此处 $x\to 1$，即考虑 $x_0=1$ 附近的情况，故不妨限制 x 为 $0<|x-1|<1$，即 $0<x<2$，

$x\neq 1$]。因为 $2x+1>1,\Rightarrow\left|\dfrac{1-x}{3(2x+1)}\right|<\dfrac{|x-1|}{3}$，要使 $\left|\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}-\dfrac{2}{3}\right|<\varepsilon$, 只须

$\dfrac{|x-1|}{3}<\varepsilon$，即 $|x-1|<3\varepsilon$ 。取 $\delta=\min\{1,3\varepsilon\}$（从图形中解释），当 $0<|x-1|<\delta$ 时，

有 $\left|\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}-\dfrac{2}{3}\right|<\varepsilon$ 。

定理 1：（保号性）设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，

（i） 若 $A>0(A<0)$，则 $\exists\delta>0$，当 $x\in\hat{U}(x_0,\delta)$ 时， $f(x)>0\,(f(x)<0)$ 。

（ii） 若 $f(x)\geq 0(f(x)\leq 0)$，必有 $A\geq 0(A\leq 0)$ 。

证明：（i）先证 $A>0$ 的情形。取 $\varepsilon=\dfrac{A}{2}$，由定义，对此 $\varepsilon,\exists\delta>0$，当 $x\in\hat{U}(x_0,\delta)$ 时，

$|f(x)-A|<\varepsilon=\dfrac{A}{2}$，即 $0<\dfrac{A}{2}=A-\dfrac{A}{2}<f(x)<A+\dfrac{A}{2}=\dfrac{3A}{2}\Rightarrow f(x)>0$ 。

当 $A<0$ 时，取 $\varepsilon=-\dfrac{A}{2}$，同理得证。

（ii）(反证法)若 $A<0$，由(i) $\Rightarrow f(x)<0$ 矛盾，所以 $A\geq 0$ 。

当 $f(x)<0$ 时，类似可证。

注：(i)中的“$>$”，“$<$”不能改为“$\geq$”，“$\leq$”。

在(ii)中，若 $f(x)>0$，未必有 $A>0$ 。

在函数极限的定义中，x 是既从 x_0 的左边（即从小于 x_0 的方向）趋于 x_0，也从 x_0 的右边（即从大于 x_0 的方向）趋于 x_0。但有时只能或需要 x 从 x_0 的某一侧趋于 x_0 的极限。如分段函数及在区间的端点处等等。这样，就有必要引进单侧极限的定义：

定义 2：对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，[当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时]，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

这时就称 A 为 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左[右]极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=A$ 或 $f(x-0)=A$。

[$\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=A$ 或 $f(x_0+0)=A$]。

定理 2：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=A$。

【例 4】 $\lim\limits_{x\to 0-0}\operatorname{sgn}(x)=-1,\ \lim\limits_{x\to 0+0}\operatorname{sgn}(x)=1$，因为 $-1\neq 1$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sgn}(x)$ 不存在。

【例 5】设 $f(x)=\begin{cases}1 & x\geq 0\\ 2x+1 & x<0\end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$。

解：显然 $\lim\limits_{x\to 0+0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0}1=1$

$\lim\limits_{x\to 0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0-0}(2x+1)=1$

因为 $\lim\limits_{x\to 0+0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0-0}f(x)=1$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$。

二、自变量趋向无穷大时函数的极限

定义 3：设 $f(x)$ 当 $|x|>a(a>0)$ 时是有定义的，若对 $\forall\varepsilon>0,\exists X(>a)$，当 $|x|>X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，就称 A 为 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A$（当 $x\to\infty$ 时）。

注 1：设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty),((-\infty,b])$ 上有定义，若对 $\forall\varepsilon>0,\exists X>0$，当 $|x|>X\,(x<-X)$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，就称 A 为 $f(x)$ 当 $x\to+\infty(x\to-\infty)$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，或 $f(x)\to A$（当 $x\to+\infty$）（ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$，或 $f(x)\to A$（当 $x\to-\infty$））。

2：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$。

3：若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，就称 $y=A$ 为 $y=f(x)$ 的图形的水平渐近线（若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$，有类似的渐近线）。

【例 6】 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$。

证明：对 $\forall\varepsilon>0$，因为 $\left|\dfrac{\sin x}{x}-0\right|=\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|\leq\dfrac{1}{|x|}$，所以要使得 $\left|\dfrac{\sin x}{x}-0\right|<\varepsilon$，只须

$\frac{1}{|x|} < \varepsilon \Rightarrow |x| > \frac{1}{\varepsilon}$，故取 $X = \frac{1}{\varepsilon}$，所以当 $|x| > X$ 时，有 $\left|\frac{\sin x}{x} - 0\right| < \varepsilon$，所以 $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 0$。

§1、5　　无穷小与无穷大

一、无穷小

若 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 或 $x \to +\infty$ 时的极限为零，就称 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$ 或 $x \to +\infty$ 时的无穷小，即有

定义 1：对 $\forall \varepsilon > 0$, 若 $\exists \delta > 0 (X > 0)$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta (|x| < X)$ 时，有 $|f(x)| < \varepsilon$ 成立，

就称 $f(x)$ 为当 $x \to x_0 (x \to +\infty)$ 时的无穷小，记为 $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 (\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0)$。

注 1：除上两种之外，还有 $x \to -\infty, x \to +\infty, x \to x_0 - 0, x \to x_0 + 0$ 的情形。

2：无穷小不是一个数，而是一个特殊的函数（极限为 0），不要将其与非常小的数混淆，因为任一常数不可能任意地小，除非是 0 函数，由此得：0 是唯一可作为无穷小的常数。

【例1】　因为 $\lim_{x\to 2}(2x-4) = 2\times 2 - 4 = 0$，所以 $2x-4$ 当 $x \to 2$ 时为无穷小；

同理：$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 0$，所以 $\frac{\sin x}{x}$ 当 $x \to \infty$ 时为无穷小，

而 $\lim_{x\to 0}(2x-4) = -4 \neq 0$，所以 $2x-4$ 当 $x \to 0$ 时不是无穷小。

定理 1：当自变量在同一变化过程 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）中时：

（i）具有极限的函数等于其极限与一个无穷小之和，即：A 为 $f(x)$ 的极限 $\Leftrightarrow f(x) - A$ 为无穷小。

（ii）若一函数可表示为一常数与无穷小之和，那么该常数就是其极限（证明在下一节）。

二、无穷大

若当 $x \to x_0$ 或 $x \to \infty$ 时 $f(x) \to \infty$，就称 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$ 或 $x \to \infty$ 时的无穷大。

定义 2：若对 $\forall M > 0, \exists \delta > 0 (X > 0)$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta (|x| > X)$ 时，有 $|f(x)| > M$，就

称 $f(x)$ 当 $x \to x_0 (x \to \infty)$ 时的无穷大，记作：$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty (\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty)$。

注 1：同理还有 $f(x) \to -\infty, f(x) \to +\infty$ 时的定义。

2：无穷大也不是一个数，不要将其与非常大的数混淆。

3：若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$，按通常意义将，$f(x)$ 的极限不存在。

【例2】 可证明 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=\infty$，所以当 $x\to 0$ 时 $\dfrac{1}{x^2}$ 为无穷大。

定理 2：当自变量在同一变化过程中时，

（i）若 $f(x)$ 为无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小。

（ii）若 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x)\neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大。

（证明自己看）

§1、6 极限运算法则

由极限定义来求极限是不可取的，也是不行的，因此需寻求一些方法来求极限。

定理 1：有限个无穷小的和仍为无穷小，即设 $\lim\alpha=0,\lim\beta=0\Rightarrow\lim(\alpha+\beta)=0$（证明在后面）。

注 1：u 与 α 都表示函数 $u(x)$ 与 $\alpha(x)$，而不是常数。

2：“lim”下放没标自变量的变化过程，这说明对 $x\to x_0$ 及 $x\to\infty$ 均成立，但须同一过程。

定理 2：有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小，即设 u 有界，$\lim\alpha=0\Rightarrow\lim u\alpha=0$。

证明：证明 $x\to x_0$ 时的情况，设函数 u 在 x_0 的某邻域 $U(x_0,\delta_1)$ 内有界，即 $\exists M>0$，当 $x\in U(x_0,\delta_1)$ 时，有 $|u|\le M$，又设 α 为当 $x\to x_0$ 时的无穷小，即 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=0$，故对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0(\delta<\delta_1)$，当 $x\in U(\hat{x}_0,\delta)$ 时，有 $|\alpha|<\dfrac{\varepsilon}{M}\Rightarrow|u\alpha|=|u||\alpha|<M\cdot\dfrac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$

所以 $\lim\limits_{x\to x_0}u\alpha=0$，即 $u\alpha$ 为无穷小；同理可证 $x\to\infty$ 时的情形。

推论 1：常数与无穷小的乘积仍为无穷小，即若 k 为常数，$\lim\alpha=0\Rightarrow\lim k\alpha=0$。

推论 2：有限个无穷小的乘积仍为无穷小，设

$$\lim\alpha_1=\lim\alpha_2=\cdots\cdots=\lim\alpha_n=0\Rightarrow\lim(\alpha_1\alpha_2\cdots\cdots\alpha_n)=0。$$

定理 3：若 $\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$，则 $\lim[f(x)\pm g(x)]$ 存在，且

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B=\lim f(x)\pm\lim g(x)。$$

证明：只证 $\lim[f(x)+g(x)]=A+B$，过程为 $x\to x_0$，对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时，有 $|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2}$，对此 ε，$\exists\delta_2>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时，有 $|g(x)-B|<\frac{\varepsilon}{2}$，取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|(f(x)+g(x))-(A+B)|=|(f(x)-A)+(g(x)-B)|\le|f(x)-A|+|g(x)-B|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

所以 $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=A+B$。

其它情况类似可证。

注 1：本定理可推广到有限个函数的情形。

2：在本定理中，设 $\lim f(x)=A,g(x)=-A(\lim g(x)=-A)\Rightarrow\lim(f(x)-A)=A-A=0$，反之，若 $f(x)A+\alpha$，其中 $\lim\alpha=0\Rightarrow\lim f(x)=\lim(A+\varepsilon)=A+\lim\varepsilon=A$，即证§1.5 定理 1。

3：若令 $A=A=0$，即证定理 1。

定理 4：若 $\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$，则 $\lim f(x)\cdot g(x)$ 存在，且

$$\lim f(x)g(x)=AB=\lim f(x)\cdot\lim g(x)。$$

证明：因为 $\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$，由§1.5 定理 1（i）$\Rightarrow f(x)=A+\alpha,g(x)=B+\beta,$（$\alpha,\beta$ 均为无穷小）$\Rightarrow f(x)g(x)=(A+\alpha)(B+\beta)=AB+(A\beta+B\alpha+\alpha\beta)$，记 $\gamma=A\beta+B\alpha+\alpha\beta$，由定理 2 的推论 1.2 及定理 1 $\Rightarrow\gamma$ 为无穷小，再由§1.5 定理 1（iii）$\Rightarrow\lim f(x)g(x)=AB$。

推论 1：$\lim[cf(x)]=c\lim f(x)$（c 为常数）。

推论 2：$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n$（$n$ 为正整数）。

定理 5：设 $\lim f(x)=A,\lim g(x)=B\neq0$，则 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$。

证明：设 $f(x)=A+\alpha,g(x)=B+\beta$（$\alpha,\beta$ 为无穷小），考虑差：

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}=\frac{A+\alpha}{B+\beta}-\frac{A}{B}=\frac{B\alpha-A\beta}{B(B+\beta)}$$

其分子 $B\alpha-A\beta$ 为无穷小，分母 $B(B+\beta)\to B^2\neq 0$，我们不难证明 $\frac{1}{B(B+\beta)}$ 有界（详细过程见书上）$\Rightarrow \frac{B\alpha-A\beta}{B(B+\beta)}$ 为无穷小，记为 γ，所以 $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}+\gamma$，由§1.5 定理 1（ii）$\Rightarrow \lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}$。

注：以上定理对数列亦成立。

定理 6：如果 $\varphi(x)\geq\psi(x)$，且 $\lim\varphi(x)=a,\lim\psi(x)=b$，则 $a\geq b$。

【例 1】$\lim\limits_{x\to x_0}(ax+b)=\lim\limits_{x\to x_0}ax+\lim\limits_{x\to x_0}b=a\lim\limits_{x\to x_0}x+b=ax_0+b$。

【例 2】$\lim\limits_{x\to x_0}x^n=[\lim\limits_{x\to x_0}x]^n=x_0{}^n$。

推论 1：设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 为一多项式，当

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=a_0x_0{}^n+a_1x_0{}^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x_0+a_n=f(x_0)。$$

推论 2：设 $P(x),Q(x)$ 均为多项式，且 $Q(x_0)\neq 0$，由定理 5，$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$。

【例 3】$\lim\limits_{x\to 1}(x^2-5x+10)=1^2-5\times1+1=-3$。

【例 4】$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3+7x-9}{x^5-x+3}=\frac{0^3+7\times0-9}{0^5-0+3}=-3$（因为 $0^5-0+3\neq 0$）。

注：若 $Q(x_0)=0$，则不能用推论 2 来求极限，需采用其它手段。

【例 5】求 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{2x^2+x-3}$。

解：当 $x\to 1$ 时，分子、分母均趋于 0，因为 $x\neq 1$，约去公因子 $(x-1)$，

所以 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{2x^2+x-3}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+2}{2x+3}=\frac{3}{5}$。

【例 6】求 $\lim\limits_{x\to -1}(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{x^3+1})$。

解：当 $x\to -1, \dfrac{1}{x+1}, \dfrac{3}{x^3+1}$ 全没有极限，故不能直接用定理 3，但当 $x\neq -1$ 时，

$$\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1}=\frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{x-2}{x^2-x+1}，所以$$

$$\lim_{x\to -1}(\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1})=\lim_{x\to -1}\frac{x-2}{x^2-x+1}=\frac{-1-2}{(-1)^2-(-1)+1}=-1。$$

【例 7】求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2}{x-2}$。

解：当 $x\to 2$ 时，$x-2\to 0$，故不能直接用定理 5，又 $x^2\to 4$，考虑：$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2}=\dfrac{2-2}{4}=0$，

由§1.5 定理 2（ii）$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2}{x-2}=\infty$。

【例 8】设 $a_0\neq 0, b_0\neq 0, m, n$ 为自然数，则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots\cdots+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0} & 当n=m时\\ 0 & 当n<m时\\ \infty & 当n>m时\end{cases}。$$

证明：当 $x\to\infty$ 时，分子、分母极限均不存在，故不能用§1.6 定理 5，先变形：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots\cdots+b_m}=\lim_{x\to\infty}x^{n-m}\cdot\frac{a_0+\dfrac{a_1}{x}+\cdots\cdots+\dfrac{a_n}{x^n}}{b_0+\dfrac{b_1}{x}+\cdots\cdots+\dfrac{b_m}{x^m}}$$

$$=\begin{cases}1\cdot\dfrac{a_0+0+\cdots\cdots+0}{b_0+0+\cdots\cdots+0} & 当n=m时\\ 0\cdot\dfrac{a_0+0+\cdots\cdots+0}{b_0+0+\cdots\cdots+0} & 当n<m时\\ \infty\cdot\dfrac{a_0+0+\cdots\cdots+0}{b_0+0+\cdots\cdots+0} & 当n>m时\end{cases}$$

【例 9】求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots\cdots+\dfrac{n}{n^2})$。

解：当 $n\to\infty$ 时，这是无穷多项相加，故不能用§1.6 定理 3，先变形：

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(1+2+\cdots\cdots+n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}。$$

【例 10】证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{[x]}{x}=1,[x]$为 x 的整数部分。

证明：先考虑$1-\frac{[x]}{x}=\frac{x-[x]}{x}$，因为$x-[x]$是有界函数，且当$x\to\infty$时，$\frac{1}{x}\to 0$，所以由

$$§1.6\text{ 定理 }2\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{x-[x]}{x}=0\Rightarrow\lim_{x\to\infty}(1-\frac{[x]}{x})=0\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{[x]}{x}=1。$$

§1.7　极限存在准则、两个重要极限

准则 I：如果数列x_n,y_n,z_n满足下列条件：

（i）对$\forall n,y_n\le x_n\le z_n$；

（ii）$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$

那么，数列x_n的极限存在，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。

证明：因为$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，所以对$\forall\varepsilon>0,\exists N_1>0$，当$n>N_1$时，有$|y_n-a|<\varepsilon$，即

$a-\varepsilon<y_n<a+\varepsilon$，对$\exists N_2$，当$n>N_2$时，有$|z_n-a|<\varepsilon$，即$a-\varepsilon<z_n<a+\varepsilon$，又

因为$y_n\le x_n\le z_n$，所以当$n>N=Max\{N_1,N_2\}$时，有$a-\varepsilon<y_n\le x_n\le z_n<a+\varepsilon$，

即有：$a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$，即$|x_n-a|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。

准则 I′ 如果函数$f(x),g(x),h(x)$满足下列条件：

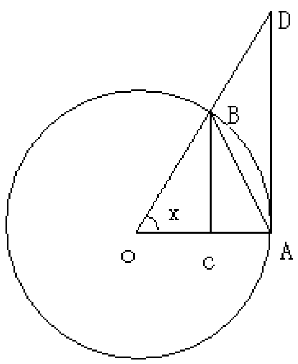
（i）当$x\in\hat{U}(x_0,r)(|x|>M)$时，有$g(x)\le f(x)\le h(x)$。

（ii）当$x\to x_0(x\to\infty)$时，有$g(x)\to A,h(x)\to A$。

那么当$x\to x_0(x\to\infty)$时，$f(x)$的极限存在，且等于A。

作为准则 I′ 的应用，下面将证明第一个重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$。

证明：作单位圆，如下图：



设 x 为圆心角 $\angle AOB$，并设 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 见图不难发现：$S_{\Delta AOB}<S_{扇形AOB}<S_{\Delta AOD}$，即：

$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x$，即　$\sin x<x<\tan x$，

$$\Rightarrow 1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x} \qquad \Rightarrow \cos x<\frac{\sin x}{x}<1$$

（因为 $0<x<\frac{\pi}{2}$，所以上不等式不改变方向）

当 x 改变符号时，$\cos x, \frac{x}{\sin x}$ 及 1 的值均不变，故对满足 $0<|x|<\frac{\pi}{2}$ 的一切 x，有 $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$。

又因为 $\cos x=1-(1-\cos x)=1-2\sin^2(\frac{x}{2})>1-2\cdot\frac{x^2}{4}=1-\frac{x^2}{2}$，

所以　$1-\frac{x^2}{2}<\cos x<1 \qquad \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$

而 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=\lim\limits_{x\to 0}1=1 \qquad \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$　，证毕。

【例 1】$\lim\limits_{x\to 0}\frac{c\sin x}{x} \overset{令t=\arcsin x}{=} \lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\sin t}{t}}=1$。

【例 2】$\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin x}{x-\pi}=\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin(\pi-x)}{x-\pi}\underset{t=\pi-x}{=}\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{-t}=-1$。

【例 3】$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}3\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{1}{\cos x}=3\cdot 1\cdot 1=3$。

【例 4】$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2(\frac{x}{2})}{x^2}=\frac{1}{2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}})^2=\frac{1}{2}$。

准则Ⅱ：单调有界数列必有极限

如果数列 x_n 满足：$x_1\le x_2\le\cdots\cdots\le x_n\le\cdots\cdots$，就称之为单调增加数列；若满足：$x_1\ge x_2\ge\cdots\cdots\ge x_n\ge\cdots\cdots$，就称之为单调减少数列；同理亦有严格单增或单减，以上通称为单减数列和严格单减数列。

如果 $\exists M$，使得：$x_n\le M(n=1,2,\cdots\cdots)$，就称数列 x_n 为有上界；若 $\exists M$，使得：$x_n\ge M(n=1,2,\cdots\cdots)$，就称 $\{x_n\}$ 有下界。

准则Ⅱ′：单调上升，且有上界的数列必有极限。
准则Ⅱ″：单调下降，且有下界的数列必有极限。

注 1：由前已知，有界数列未必有极限，若加单调性，就有极限。
　2：准则Ⅱ，Ⅱ′，Ⅱ″可推广到函数情形中去，在此不一一陈述了。

作为准则Ⅱ的一个应用，下面来证明极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x$ 是不存在的。

先考虑 x 取正整数时的情形：$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$

对于 $b>a>0$，有不等式：$\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}<(n+1)b^n$，即：$b^{n+1}-a^{n+1}<(n+1)b^n(b-a)$，

即：$a^{n+1}>b^n[(n+1)a-nb]$

（i）现令 $a=1+\frac{1}{n+1},b=1+\frac{1}{n}$，显然 $b>a>0$，因为 $(n+1)a-nb=n+1+1-(n+1)=1$ 将其代入，所以 $(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}>(1+\frac{1}{n})^n$，所以 $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 为单调数列。

（ii）又令 $a=1$，$b=1+\frac{1}{2n}$，　$\Rightarrow (n+1)a-nb=n+1-(n+\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$

所以 $1>(1+\frac{1}{2n})^n\cdot\frac{1}{2}$　$\Rightarrow 2>(1+\frac{1}{2n})^n$　$\Rightarrow 4>(1+\frac{1}{2n})^{2n}$，

即对 $\forall n,$　$x_{2n}<4$，　又对 $\forall$　$(1+\frac{1}{2n+1})^{2n+1}<(1+\frac{1}{2n+2})^{2n+2}<4$

所以 $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 是有界的。

由准则Ⅱ或Ⅱ′知 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 存在，并使用 e 来表示，即 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e=2.718281828459045\cdots\cdots$

注 1：关于此极限存在性的证明，书上有不同的方法，希望同学自己看！

　2：我们可证明：$\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$，具体在此不证明了，书上也有，由证明过程知：$\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$。

　3：指数函数 $y=e^x$ 及自然对数 $y=\ln x$ 中的底就是这个常数 e。

【例 1】 $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x=\lim_{x\to\infty}[(1+\frac{1}{\frac{x}{2}})^{\frac{x}{2}}]^2=[\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{\frac{x}{2}})^{\frac{x}{2}}]^2=e^2$

【例 2】 $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\overset{z=\frac{1}{x}}{=}\lim_{z\to\infty}(1+z)^z=e$

【例 3】 $\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{x+1}=\lim_{x\to\infty}[(1+\frac{1}{-x})^{-x}]^{-1}(1-\frac{1}{x})=[\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{-x})^{-x}]^{-1}\cdot\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})=e^{-1}\cdot 1=\frac{1}{e}$

【例 4】 $\lim_{x\to\infty}(\frac{2n-1}{2n+1})^n=\lim_{x\to\infty}(1-\frac{2}{2n+1})^n=\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{n+\frac{1}{2}})^{n+\frac{1}{2}}\cdot(1-\frac{1}{n+\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{e}\cdot 1^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{e}$

＊ Cauchy 极限存在准则：数列 x_n 收敛 $\Leftrightarrow$ 对 $\forall\varepsilon>0,\exists N$，当 $n>N,m>N$ 时，有

$$|x_n-x_m|<\varepsilon。$$

注 1：此定理证明较繁，在此不证了。

2：本定理理论性较强，但不实用，故只须了解就行了。

§1、8　无穷小的比较

在§1、6 中我们讨论了无穷小的和、差、积的情况，对于其商会出现不同的情况，

例如：$\lim_{x\to 0}\frac{a_0x^n}{b_0x^m}=\lim_{x\to 0}x^{n-m}\cdot\frac{a_0}{b_0}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0} & m=n\\ 0 & m<n\\ \infty & m>n\end{cases}$　（a_0,b_0 为常数，m,n 为自然数）

可见对于 m,n 取不同数时，a_0x^n 与 b_0x^m 趋于 0 的速度不一样，为此有必要对无穷小进行比较或分类：

定义：设 α 与 β 为 x 在同一变化过程中的两个无穷小，

(i)　若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$，就说 β 是比 α 高阶的无穷小，记为 $\beta=o(\alpha)$；

(ii)　若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=\infty$，，就说 β 是比 α 低阶的无穷小；

(iii)　若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=C\neq 0$，，就说 β 是比 α 同阶的无穷小；

(iv) 若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=1$，就说 β 与 α 是等价无穷小，记为 $\alpha \sim \beta$。

【例1】 当 $x \to 0$ 时，x^2 是 x 的高阶无穷小，即 $x^2 = o(x)$；反之 x 是 x^2 的低阶无穷小；x^2 与 $1-\cos x$ 是同阶无穷小；x 与 $\sin x$ 是等价无穷小，即 $x \sim \sin x$。

注 1：高阶无穷小不具有等价代换性，即：$x^2 = o(x), x^2 = o(\sqrt{x})$，但 $o(x) \neq o(\sqrt{x})$，因为 $o(\cdot)$ 不是一个量，而是高阶无穷小的记号；

2：显然(iv)是(iii)的特殊情况；

3：等价无穷小具有传递性：即 $\alpha \sim \beta, \beta \sim \gamma \Rightarrow \alpha \sim \gamma$；

4：未必任意两个无穷小量都可进行比较，例如：当 $x \to 0$ 时，$x\sin\dfrac{1}{x}$ 与 x^2 既非同阶，又无高低阶可比较，因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin\frac{1}{x}}{x^2}$ 不存在；

5：对于无穷大量也可作类似的比较、分类；

6：用等价无穷小可以简化极限的运算，事实上，有：

定理：若 $\alpha,\beta,\alpha',\beta'$ 均为 x 的同一变化过程中的无穷小，且 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$，及 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}\exists$，那么 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}\exists = \lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$。

【例2】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}$。

解：因为当 $x \to 0$ 时，$\sin x \sim x$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$。

【例3】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{x^2+2x}$

解：因为当 $x \to 0$ 时，$\arcsin 2x \sim 2x$，

所以 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x^2+2x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{x+2} = \dfrac{2}{2} = 1$。

7：在目前，常用当 $x \to 0$ 时，等价无穷小有：

$\sin x \sim x, \tan x \sim x, \arcsin x \sim x, \arctan x \sim x, 1-\cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$；

8：用等价无穷小代换适用于乘、除，对于加、减须谨慎！

§1.9 函数的连续性与间断点

一、 函数的连续性

连续性是函数的重要性态之一，在实际问题中普遍存在连续性问题，从图形上看，

函数的图象连绵不断。在数学上，我们有：

定义 1：设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，就称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点处连续。

注 1：$f(x)$ 在 x_0 点连续，不仅要求 $f(x)$ 在 x_0 点有意义，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，而且要 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，即极限值等于函数值。

2：若 $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)=f(x_0-0)=f(x)$，就称 $f(x)$ 在 x_0 点左连续。若 $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=f(x_0+0)=f(x)$，就称 $f(x)$ 在 x_0 点右连续。

3：如果 $f(x)$ 在区间 I 上的每一点处都连续，就称 $f(x)$ 在 I 上连续；并称 $f(x)$ 为 I 上的连续函数；若 I 包含端点，那么 $f(x)$ 在左端点连续是指右连续，在右端点连续是指左连续。

定义 1´：设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，若对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，就称 $f(x)$ 在 x_0 点连续。

下面再给出连续性定义的另一种形式：

先介绍增量：变量 u 由初值 u_1 变到终值 u_2，终值 u_2 与初值 u_1 的差 u_2-u_1 称为 u 的增量，记为 Δu，即 $\Delta u=u_2-u_1$；Δu 可正、可负、也可为零，这些取决于 u_1 与 u_2 的大小。

我们称 $x-x_0$ 为自变量 x 在 x_0 点的增量，记为 Δx，即 $\Delta x=x-x_0$ 或 $x=x_0+\Delta x$；

$x\to x_0 \Leftrightarrow \Delta x\to 0$ 相应函数值差，$f(x)-f(x_0)$ 称为函数 $f(x)$ 在 x_0 点的增量，记为 Δy，

即 $\Delta y=f(x)-f(x_0)=y-y_0$，即 $f(x)=f(x_0)+\Delta y$ 或 $y=y_0+\Delta y$，

$f(x)\to f(x_0)\Leftrightarrow f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\to 0\Leftrightarrow \Delta y\to 0$。

定义 1″：设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，若当 $\Delta x\to 0$ 时，有 $\Delta y\to 0$，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，或 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$，就称 $f(x)$ 在 x_0 点连续。

定理：$f(x)$ 在 x_0 点连续 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 x_0 点既左连续，又右连续。

【例1】 多项式函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上是连续的；所以 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，有理函数在分母不

等于零的点处是连续的，即在定义域内是连续的。
以上由§1.6【例 2】的推论 1、推论 2 即得。

【例 2】不难证明 $y=\sin x, y=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是连续的。

【例 3】证明 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 点连续。

证明：$\lim\limits_{x\to 0-}|x|=\lim\limits_{x\to 0-0}(-x)=0, \lim\limits_{x\to 0+}|x|=\lim\limits_{x\to 0+0}x=0$，又 $f(0)=0$，所以由定理 $\Rightarrow$ $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 点连续；

或由前§1.4 习题 5 知 $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0=f(0)$，所以 $\Rightarrow$ $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 点连续。

【例 4】讨论函数 $y=\begin{cases} x+2 & x\geq 0 \\ x-2 & x<0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 的连续性。

解：$\lim\limits_{x\to 0-0}y=\lim\limits_{x\to 0-0}(x-2)=0-2=-2$，$\lim\limits_{x\to 0+0}y=\lim\limits_{x\to 0+0}(x+2)=0+2=2$，因为 $-2\neq 2$，

所以该函数在 $x=0$ 点不连续，又因为 $f(0)=2$，所以为右连续函数。

二、 间断点

简单地说，若 $f(x)$ 在 x_0 点不连续，就称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点，或不连续点，为方便起见，在此要求 x_0 的任一邻域均含有 $f(x)$ 的定义域中非 x_0 的点。间断点有下列三种情况：

（1） $f(x)$ 在 $x=x_0$ 没有定义；

（2） $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在；

（3）虽然 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在，也虽然在 x_0 点有定义，但 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)\neq f(x_0)$。

n 种常见的间断点类型：

【例 5】设 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$，当 $x\to 0, f(x)\to\infty$，即极限不存在，所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的间断点。

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=\infty$，所以 $x=0$ 为无穷间断点。

【例 6】$y=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 点无定义，且当 $x\to 0$ 时，函数值在 -1 与 $+1$ 之间无限次地振荡，而不超于某一定数，见书上图，这种间断点称为振荡间断点。

1. $f(x)=\begin{cases} 0 & x\in Q \\ 1 & x\notin Q \end{cases}$ $\forall x$ 均为振荡间断点。

2、 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{q} & x=\dfrac{p}{q} \\ 0 & x=0,1\text{或无理数} \end{cases}$ $x\in Q$ 不连续， $x\notin Q$ 连续。

【例 7】 $y=\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $x=0$ 点无定义，所以 $x=0$ 为其间断点，又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，所以若补充定义 $f(0)=1$，那么函数在 $x=0$ 点就连续了。故这种间断点称为可去间断点。

【例 8】 [例 4]的函数在 $x=0$ 点不连续，但左、右极限均存在，且有不等于 $f(0)$ 的，这种间断点称为跳跃间断点。例如 $y=\operatorname{sgn} x$ 在 $x=0$ 处即为跳跃间断点。

归纳：(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$， x_0 为无穷间断点；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 震荡不存在， x_0 为震荡间断点；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\neq f(x_0)$， x_0 为可去间断点；

(4) $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)\neq \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$， x_0 为跳跃间断点。

如果 $f(x)$ 在间断点 x_0 处的左右极限都存在，就称 x_0 为 $f(x)$ 的第一类间断点，显然它包含(3)、(4)两种情况；否则就称为第二类间断点。

§1、10 连续函数的运算与初等函数的连续性

一、 续函数的运算

定理 1(连续函数的四则运算法则)：若 $f(x),g(x)$ 均在 x_0 连续，则 $f(x)\pm g(x), f(x)\cdot g(x)$ 及 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ （要求 $g(x_0)\neq 0$ ）都在 x_0 连续。

定理 2（反函数的连续性）：如果 $y=f(x)$ 在区间 I_x 上单值，单增（减），且连续，那么其反函数 $x=\varphi(y)$ 也在对应的区间 $I_y=\{y|y=f(x),x\in I_x\}$ 上单值，单增（减），且连续。

注 1： $y=\varphi(x)$ 亦为 $y=f(x)$ 的反函数，如上知： $y=\varphi(x)$ 在 I_y 上有上述性质。

定理 3：设 $u=\varphi(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限存在且等于 a，即 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，又设 $y=f(u)$ 在 $u=a$ 处连续，那么，当 $x\to x_0$ 时，复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 的极限存在，且等于 $f(a)$，

即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = f(a)$。

注 2：可类似讨论 $x\to\infty$ 时的情形。

定理 4：设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 $x=x_0$ 连续，且 $\varphi(x_0)=u_0$，函数 $y=f(u)$ 在 u_0 点连续，那么，

复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 在点 $x=x_0$ 处连续。

注 3：定理 3、4 说明 lim 与 f 的次序可交换。

注 4：在定理 3 中代入 $a=u_0=\varphi(x_0)$，即得定理 4。

【例 1】由于 $y=x^m$（m 为正整数）在 $[0,+\infty)$ 上严格单调且连续，由定理 2，其反函数 $y=x^{\frac{1}{m}}$

在 $[0,+\infty)$ 上也严格单调且连续，进而：对于有理幂函数 $y=x^{\alpha}$（$\alpha=\dfrac{q}{p}, p\neq 0, p,q$

为正整数）在定义上是连续的。

【例 2】求 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{2-\dfrac{\sin x}{x}}$

解：因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，及 $\sqrt{2-u}$ 在 $u=1$ 点连续，故由定理 3，原式

$=\sqrt{2-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}}=\sqrt{2-1}=1$。

二、 初等函数的连续性

我们已知道 $y=\sin x, y=\cos x$ 在其定义域内是连续的，由 § 1. 10 定理 2 知 $g=\arcsin x$ 和 $y=\arccos x$ 在其定义域也是连续的。

可证明指数函数 $y=a^x (a>0, a\neq 1)$，在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内是严格单调且连续的，进而有对数函数 $y=\log_a x \quad (a>0, a\neq 1)$ 在其定义域 $(0,+\infty)$ 是连续的。

又 $y=x^{\mu}=a^{\mu\log_a x}$（$\mu$ 为常数），由定理 4 知：$y=x^{\mu}$ 在 $(0,+\infty)$ 内是连续的，当 μ 取有理数时，见例 1，总之 $y=x^{\mu}$ 在定义域内是连续的。

综合以上结果，得：基本初等函数在其定义域内都是连续的，由基本初等函数的连续性，

及定理 1～4，即得：
结论：一切初等函数在其定义区间内都是连续的。

注 1：定义区间为包含在定义域内的区间；
　2：在 § 1.9，我们是用极限来证明连续，现在可利用函数的连续来求极限。

【例 3】$\lim\limits_{x\to 1} e^{\sin(2\arctan x)} = e^{\sin(2\arctan 1)} = e$ 。

【例 4】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$ 。

【例 5】$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x - \sin a}{x-a} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{x-a} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\cdot\cos\dfrac{x+a}{2}$

$$\underset{t=\frac{x-a}{2}}{=}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\cos(t+a) = \cos a \text{ 。}$$

§ 1. 11　闭区间上连续函数的性质

一、　最大值和最小值的定理

定义：设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若 $\exists x_0 \in I$，使得对 $\forall x \in I$，有 $f(x) \le f(x_0)(f(x) \ge f(x_0))$

就称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 在 I 上的最大值（最小值），称 x_0 为最大点（最小点）。

注 1：显然，最值是唯一的，而最点不一定唯一，如：$y = \sin x$；
　2：最点必在 I 内；
　3：若在 I 上，最大值与最小值相等，那么，在 I 上，$f(x)$ 为常数；
　4：一般而言，最值未必存在，如：$f(x) = x$ 在 $(-1,1)$ 上既无最大值，也无最小值；$g(x) = x^2$ 在 $(-1,1)$ 上有最小值，但无最大值；那么，究竟何时同时有最大值与最小值呢？

定理 1（最大值与最小值定理）：在闭区间上的连续函数一定有最大值和最小值。

注 1：“闭区间”与“连续”二条件缺一不可；
　2：$f(x)$ 若在 I 上取得最大、最小值，$f(x)$ 未必连续，I 也未必为闭区间。

反例 1：$y = x \qquad x \in (-1,1)$

反例 2：$y = \begin{cases} 1-x & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1-x & x<0 \end{cases} \qquad x \in [-1,1]$

定理 2（有界性定理）：闭区域上的连续函数在该区间一定有界。

二、 介值定理

零点：若 x_0 使得 $f(x_0)=0$，就称 x_0 为 $f(x)$ 的零点（或 $f(x)=0$ 的根）。

定理 3（零点定理）：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，那么，在开区间 (a,b) 上，至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$，即 $f(x)$ 在 (a,b) 内至少有一个零点。

注 1：本定理对判断零点的位置很有用处，但不能求出零点；

2：从几何上看 $(a,f(a))$ 与 $(b,f(b))$ 在 x 轴的上下两侧，由于 $f(x)$ 连续，显然，在 (a,b) 上，$f(x)$ 的图象与 x 轴至少相交一次；

3：若 $f(a)\cdot f(b)>0$，则不能判定没有零点，须进一步考查。

定理 4（介值定理）：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\neq f(b)$，那么，对于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任意常数 C，在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=C,(a<\xi<b)$。

注 1：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)<f(b)$，则有：$[f(a),f(b)]\subset f([a,b])$；

2：由 $f(\xi)=C$ 说明 ξ 是 $f(x)-C$ 的零点；

3：几何图象上看，曲线 $y=f(x)$ 与 $y=C$ 在 (a,b) 上至少有一个交点。

推论：设在闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 有最大值 M 和最小值 m，那么，对于 $\forall C\in(m,M)$ 必 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=C$。

注 4：注 1 中的 $f([a,b])$ 事实上就是 $[m,M]$。

5：以上定理，若书上有证明，请自己看。

【例 1】验证方程 $4x = 2^x$ 有一根在 0 与 $\frac{1}{2}$ 之间。

解：令 $f(x) = 4x - 2^x \quad \Rightarrow \quad f(0) = -1 < 0$

$$f(\frac{1}{2}) = 4 \times \frac{1}{2} - 2^{\frac{1}{2}} = 2 - \sqrt{2} > 0$$

又 $f(x)$ 在 $[0, \frac{1}{2}]$ 上是连续的，故由零点定理，知：

$\exists \xi \in (0, \frac{1}{2})$，使得 $f(\xi) = 0$，即 $4\xi = 2^{\xi}$，

所以　方程 $4x = 2^x$ 有一根在 0 与 $\frac{1}{2}$ 之间。

【例 2】证明方程 $x = a\sin x + b$，其中 $a > 0, b > 0$，至少存在一个正根，并且它不超过 $a + b$。

证明：令 $f(x) = x - a\sin x - b$，显然，$f(0) = -b < 0$，又

$$f(a+b) = a + b - a\sin(a+b) - b = a[1 - \sin(a+b)] \geq 0$$

（i）若 $f(a+b) = 0$，即 $a+b$ 是 $f(x)$ 的零点，亦即方程 $x = a\sin x + b$ 的根，此时得证；

（ii）若 $f(a+b) \neq 0$，必有 $f(a+b) > 0$，因为 $f(x)$ 在 $[0, a+b]$ 上是连续的，所以由零点定理，至少 $\exists \xi \in (0, a+b)$，使得 $f(\xi) = 0$，即 ξ 为 $x = a\sin x + b$ 的根，所以此时也得证。