参考答案

一、求解下列各题（每小题 8 分，满分 48 分）

1、 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^2\sin x}$

解： $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^2\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\dfrac{1}{6}$

2、 $\int(2x-3)^{10}dx$

解： $\int(2x-3)^{10}dx=\dfrac{1}{2}\int(2x-3)^{10}d(2x-3)$ 4 分

$=\dfrac{1}{22}(2x-3)^{11}+C$ 4 分

3、$\int\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$；

解 原式$=\dfrac{1}{2}\int\dfrac{x^2dx^2}{\sqrt{1+x^2}}\overset{x^2=t}{=\!=\!=}\dfrac{1}{2}\int\dfrac{tdt}{\sqrt{1+t}}=\dfrac{2}{2}\int td\sqrt{1+t}=t\sqrt{1+t}-\int\sqrt{1+t}dt$

$=t\sqrt{1+t}-\dfrac{2(1+t)^{\frac{3}{2}}}{3}+C=x^2\sqrt{1+x^2}-\dfrac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+C.$

4、$\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{1-2x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

解 原式$=\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 4 分

$=\arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}}+2\sqrt{1-x^2}\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\dfrac{\pi}{6}+\sqrt{3}-2$ 4 分

5、设 $F(x)=\int_{\sin x}^{x^2}e^{t^2}dt$，求 $F'(x)$

解：由变限积分函数求导公式，得

$F'(x)=e^{x^4}\cdot(x^2)'-e^{\sin^2x}\cdot(\sin x)'$ 4 分

$=2xe^{x^4}-\cos xe^{\sin^2x}$ 4 分

6、求曲线 $y=x^5+5x^3-x-2$ 的拐点坐标；

解 $y'=5x^4+15x^2-1$； $y''=10x(2x^2+3)$； 4 分

令 $y''=0$ 得 $x=0$，而 $y'''(0)=30$，拐点 $(0,-2)$ 4 分

二、（10 分）已知曲线 $y=f(x)$ 经过原点，并且在原点的切线平行于直线 $2x+y-3=0$，若 $f'(x)=3ax^2+b$，且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值，试确定 a,b 的值。

解 1）“过原点的切线平行于 $2x+y-3=0$”，

$\Rightarrow f'(x)\big|_{x=0}=(3ax^2+b)\big|_{x=0}=-2,\quad\Rightarrow b=-2.$ 5 分

2）“$f(x)$在$x=1$处取得极值”（连续、可导），

$\Rightarrow f'(x)\big|_{x=1}=(3ax^2+b)\big|_{x=1}=0$，$\Rightarrow a=\dfrac{2}{3}$　　　　5分

三、（10分）求 $f(x)=e^{x^2}-x^2e$ 在[0，2]上的最大值和最小值。

解　在（0，2）内，$f'(x)=2xe^{x^2}-2xe=0$，得 $x=1$　　　　5分

比较：$f(0)=1$，$f(1)=0$，$f(2)=e^4-4e$，可知最大值 $f(2)=e(e^3-4)$，最小值 $f(1)=0$，　　5分

四（12分）求由 $y=0, y=x^2$ 及 $x+y=2$ 所围成的平面图形分别绕 x 轴和绕 y 轴旋转一周所得立体的体积。

解　解方程组$\begin{cases} y=x^2 \\ x+y=2 \end{cases}$得交点$(1,1)$，

(1) $V=\pi\int_0^1 x^4dx+\pi\int_0^1(2-x)^2dx=\dfrac{8}{15}\pi$　　　　6分

(2) $V=\pi\int_0^1(2-y)^2dy-\pi\int_0^1(\sqrt{y})^2dy=\dfrac{11}{6}\pi$　　　　6分

五（12分）　问曲线 $y=\dfrac{1}{x^2}(x>0)$ 上哪一点的切线被两坐标轴所截的线段最短？

解：设 $P(x,y)$ 为曲线 $y=\dfrac{1}{x^2}(x>0)$ 上任一点，则过 p 点的切线斜率为 $k=-\dfrac{2}{x^3}$，过 P 点的切线方程：

$Y-y=-\dfrac{2}{x^3}(X-x),$　　其中$y=\dfrac{1}{x^2},$　　　　4分

记该切线与 x 轴和 y 轴的交点分别为 A、B，则 $A(\dfrac{3}{2}x,0),$　　$B(0,\dfrac{3}{x^2})$.

记线段 AB 之长为 l，则 $l^2=\dfrac{9}{4}x^2+\dfrac{9}{x^4}=9(\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{1}{x^4})$;

记 $f(x)=l^2$,则$f(x)=9(\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{1}{x^4})$　　$(x>0),$　　　　4分

$f'(x)=9(\dfrac{x}{2}-\dfrac{4}{x^5}),$　令$f'(x)=0$得唯一驻点$x=\sqrt{2}>0;$

由此问题的实际情况可断言 $x=\sqrt{2}$ 即为 $f(x)=l^2$ 的最小值点。　　4分

所以曲线 $y=\dfrac{1}{x^2}(x>0)$上点$P(\sqrt{2},\dfrac{1}{2})$ 处的切线被两坐标轴所截的线段最短。

六（**8**分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $3\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}xf(x)=f(1)$.**求证：存在** $\xi\in(0,1)$ **使**

$$f(\xi)+\xi f'(\xi)=0.$$

证明　**对于** $3\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}xf(x)=f(1)$，**由积分中值定理有，** $\xi_1\in[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$ **使** $\xi_1 f(\xi_1)=f(1)$，

令 $F(x)=xf(x)$　**在** $[\xi_1,1]$ **上满足** *Rolle* **定理条件，存在** $\xi\in(\xi_1,1)\subset(0,1)$，**使**

$\xi\ f'(\xi)+f(\xi)=0$.