专业：

年级：

姓名：

学号：

密 封 线

河南大学 2021～2022 学年第二学期期末考试

概率论与数理统计 A 试卷 B 卷

考试方式：闭卷　　考试时间：120 分钟　　卷面总分：100 分

一、选择题（每小题 3 分，共 30 分）

1、将一枚硬币抛掷三次，则事件“至多出现一次正面”的概率为（　　）

$(A)\ \frac{1}{2}$　　$(B)\ \frac{1}{3}$　　$(C)\ \frac{7}{8}$　　$(D)\ \frac{5}{8}$

2、设 A 和 B 为任意两个事件，且 $A \subset B, P(B) > 0,$ 则下列选项正确的是（　　）

$(A)\ P(A) < P(A|B)$　　$(B)\ P(A) \le P(A|B)$

$(C)\ P(A) > P(A|B)$　　$(D)\ P(A) \ge P(A|B)$

3、若连续型随机变量 X 的具有概率密度函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} (-\infty < x < +\infty)$，则下列说法错误的是（　　）

(A) $f(x)$ 的图形关于直线 $x = \mu$ 对称　　(B) $f(x)$ 在 $x = \mu$ 处取得最大值

(C) x 离 μ 越远，$f(x)$ 的值越大　　(D) $f(x)$ 以 x 轴 为其水平渐近线

4、设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = A + B\arctan x(-\infty < x < +\infty)$，则（　　）

$(A)\ A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{2\pi}$　　$(B)\ A = \frac{1}{3}, B = \frac{1}{2\pi}$

$(C)\ A = \frac{1}{3}, B = \frac{1}{\pi}$　　$(D)\ A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{\pi}$

5、设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{4} x^2 e^{-|x|} (-\infty < x < +\infty)$$

则期望 $E(2X - 3)$ 是（　　）

$(A)\ 2$　　$(B)\ -2$　　$(C)\ 3$　　$(D)\ -3$

6、设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，$S^2, \bar{X}$ 分别是样本方差和样本均值，则下列选项错误的是（　　）

$(A)\ \bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2 / n)$　　(B) $\bar{X}$ 与 S^2 相互独立

$(C)\ \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$　　$(D)\ \frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \sim t(n)$

7、设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立且具有相同的分布函数 $F(x)$，则 $Z = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 的分布函数是（　　）

$(A)\ [F(z)]^n$　　$(B)\ 1 - [1 - F(z)]^n$

$(C)\ [1 - F(z)]^n$　　$(D)\ [F(z)][1 - F(z)]^{n-1}$

8、设二维随机变量 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1{}^2, \sigma_2{}^2, \rho)$，则 X 和 Y 相互独立的充要条件是（　　）

$(A)\ \rho = 1$　　$(B)\ \rho = -1$　　$(C)\ \rho = 0$　　$(D)\ \rho = 2$

9、设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，总体方差 σ^2 和均值 μ 均未知，$S^2, \bar{X}$ 分别是样本方差和样本均值，则 σ^2 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信区间为（　　）

$(A)\ \left(\frac{\sqrt{n}S}{\sqrt{\chi^2_{\alpha/2}(n)}}, \frac{\sqrt{n}S}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}} \right)$　　$(B)\ \left(\frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}}, \frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{\alpha/2}(n)}} \right)$

$(C)\ \left(\frac{\sqrt{n}S}{\sqrt{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}}, \frac{\sqrt{n}S}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}} \right)$　　$(D)\ \left(\frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}}, \frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}} \right)$

10、设随机变量 $X \sim N(0,1)$，对给定的 $\alpha(0 < \alpha < 1)$，数 u_α 满足 $P\{X > u_\alpha\} = \alpha$ 若

若 $P\{|X| < x\} = \alpha$，则 x 等于（　　）

$(A)\ u_\alpha$　　$(B)\ u_{1-\frac{\alpha}{2}}$　　$(C)\ u_{\frac{1-\alpha}{2}}$　　$(D)\ u_{1-\alpha}$

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1、从 $0,1,2,\cdots,9$ 这十个数字中任意选出三个不同数字，则事件

A={三个数字中不含 0 和 5}的概率为_______.

2、设随机变量 X 的分布函数为

$$F_X(x)=\begin{cases}0, x<1\\ \ln x, 1\le x<e\\ 1, x\ge e\end{cases}$$

则概率 $P\{0.5<X\le 3.5\}=$_______.

3、设随机变量 $X\sim U(1,3)$，随机变量 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}5e^{-5y}, y>0\\ 0, y\le 0\end{cases}$$

若 X 和 Y 相互独立，则 $E(XY)=$_______.

4、设随机变量 X 和 Y 相互独立，并且都服从正态分布为 $N(0,3^2)$，而

$X_1,\cdots,X_9$ 和 $Y_1,\cdots,Y_9$ 分别是来自总体 X 和 Y 的样本，则统计量

$U=\dfrac{X_1+\cdots+X_9}{\sqrt{Y_1^2+\cdots+Y_9^2}}$ 的分布为_________.

5、设随机变量 X 服从参数为 2 的泊松分布，根据切比雪夫不等式，

$P\{|X-2|\ge 2\}\le$_______.

三、计算题（每小题 11 分，共 44 分）

1、已知男人中有 5%患色盲，女人中有 0.25%患色盲，从 100 个男人和 100 个女人中任选一人.

（1）求此人患色盲的概率；

（2）如果此人是色盲，求此人是男人的概率.

2、已知连续型随机变量 X 的概率密度为：

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{8}, 0<x<4.\\ 0, 其他\end{cases}$$

求随机变量 $Y=X+6$ 的概率密度.

3、设 (X,Y) 是二维随机变量， X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}3x^2, 0<x<1\\ 0, 其他\end{cases}$$

在给定 $X=x(0<x<1)$ 的条件下，Y 的条件概率密度为

$$f_{Y/X}(y/x)=\begin{cases}\dfrac{3y^2}{x^3}, 0<y<x\\ 0, 其他\end{cases}$$

(1) 求 (X,Y) 的联合概率密度 $f(x,y)$；

(2) 求 Y 的边缘概率密度 $f_Y(y)$.

4、设二维随机变量 (X,Y) 的分布律为：

X \ Y	-2	-1	1	2
1	0	1/4	1/4	0
4	1/4	0	0	1/4

试讨论 X 与 Y 的相关性与独立性.

四、证明题（每小题11分，共11分）

1、设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，μ 和 σ^2 未知， $X_1,\cdots,X_n$ 是来自总体的一个样本.

(1) 求 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2$；(2) 证明样本方差 S^2 是 σ^2 的无偏估计量.