

暑期数学建模培训讲座

计算机模拟

2020年7月

数学建模的方法

分析方法

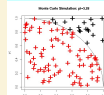


机理分析

测试分析

模拟方法

静态模拟



动态模拟



蒙特卡洛方法

连续系统模拟

离散系统模拟

古老的模拟例子

蒲丰试验

随机投针法

计算圆周率 π

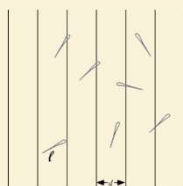
取一张白纸，在上面画上许多条间距为 d 的平行直线

取一根长度为 l ($l < d$) 的直针，随机向画有平行线的纸上掷去，一共投掷 n 次 (n 是一个事先选好的相当大的自然数)。

观测针和直线相交的次数，记为 m

$$\pi \approx \frac{2nl}{md}$$

证明



蒙特卡洛方法

Monte Carlo——摩纳哥城市名

试验数学的一个分支

利用随机数进行统计试验，以求得统计特征值（如均值、概率等）作为待解问题的数值解

蒙特卡洛方法的特点

概率模型

随机性

由试验得到

计算量大

由计算机实现



蒙特卡洛方法

蒙特卡洛方法的解题步骤

构造问题的概率模型

从已知概率分布抽样

建立所需的统计量

蒙特卡洛方法的应用

随机性问题

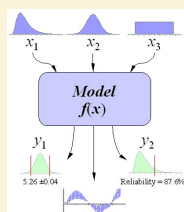
中子碰撞

粒子扩散

确定性问题

求 π 的值

计算定积分



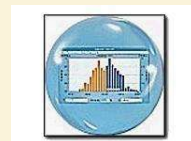
水晶球软件



开发商：美国决策工程公司
(Decisioneering Inc.)

加载在微软(Microsoft®)电子表格软件
(Excel®)上的一个易于使用的软件

演示——计算圆周率



蒙特卡洛方法的精度分析

估值精度 ε 试验次数 n $\varepsilon \propto \frac{1}{\sqrt{n}}$

精度提高10倍，试验次数增加100倍

降低随机量的方差是加速的主要途径

精度估计具有概率性质

计算精度以接近1的概率不超过 ε

随机数的产生

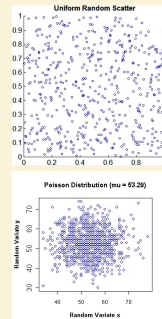
均匀分布随机数

递推公式 $x_i = \lambda x_{i-1} \pmod{M}$

示例

任意分布随机数

通过均匀分布随机数变换得到

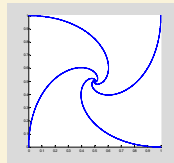


连续系统模拟

追逐问题

正方形ABCD的四个顶点各有一人。在某一时刻，四人同时出发，以匀速 v 走向顺时针方向下一个人。他们的方向始终保持对准目标，最终汇合于中心点 O 。求出每个人的轨迹。

MATLAB程序演示



离散系统模拟

赶火车概率问题

问题

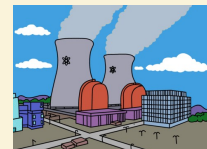
模拟



核反应堆屏蔽层设计问题

问题

模拟



核反应堆屏蔽问题的精度分析

实际问题要求 穿透屏蔽层概率极小
数量级: $10^{-6} \sim 10^{-10}$

模拟次数 10^{12} 次以上 不现实

解决办法 将屏蔽层平均分为 m 层

假设 W 是穿透一层的概率，则穿透 m 层的概率为 W^m

当 $D=3d$ 时，穿透概率为 $W_{3d} \leq 1/3$ ，问多厚才能使穿透概率小于0.01?

解答

模拟在模型检验上的应用

计算机模拟

如何检验：不同赛制的优劣？

方法：

1. 通过计算机随机产生一个向量 $T=[t_1, t_2, \dots, t_N]$ ， t_1, t_2, \dots, t_N 代表 N 个虚拟选手的实力强弱系数，决定它们相互比赛胜负的概率
2. 在计算机上让这些选手按照不同赛制进行模拟比赛，依据胜负概率产生出比赛成绩
3. 对不同赛制的比赛成绩进行比较分析，得出不同赛制在比赛激烈程度方面的优劣