

## 暑期数学建模培训讲座

### LINGO软件的使用

2020年7月

### 优化模型和优化软件的重要意义

最优化：在一定条件下，寻求使目标最大(小)的决策

最优化是工程技术、  
经济管理、科学研究、  
社会生活中经常遇到的  
问题, 如:

结构设计    资源分配  
生产计划    运输方案

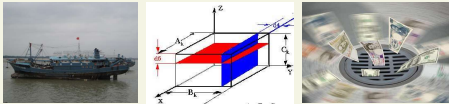


### 优化模型和优化软件的重要意义

解决优化问题的手段

- 经验积累, 主观判断
- 作试验, 比优劣
- 建立数学模型, 求解最优策略

数学建模赛题: 很多与优化有关, 需用软件求解



### 优化问题的一般形式

优化问题三要素: 决策变量; 目标函数; 约束条件

$\min f(x)$

目标函数

s.t.  $h_i(x) = 0, i = 1, \dots, m$

$g_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, l$

约束条件

决策变量

$x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$

### 优化模型的简单分类

连续优化

- 线性规划(LP) 目标和约束均为线性函数
- 非线性规划(NLP) 目标或约束中存在非线性函数
- ✓ 二次规划(QP) 目标为二次函数、约束为线性

离散优化

- 整数规划(IP) 决策变量(全部或部分)为整数
- ✓ 整数线性规划(ILP), 整数非线性规划(INLP)
- ✓ 纯整数规划(PIP), 混合整数规划(MIP)
- ✓ 一般整数规划, 0-1 (整数) 规划

### 常用优化软件

1. LINDO/LINGO软件
2. MATLAB优化工具箱
3. EXCEL软件的优化功能
4. SAS(统计分析)软件的优化功能
5. 其他

## LINDO 公司软件产品简要介绍

美国芝加哥(Chicago)大学的Linus Schrage教授于1980年前后开发, 后来成立 LINDO 系统公司 (LINDO Systems Inc.), 网址:  
<http://www.lindo.com>

LINDO: Linear Interactive and Discrete Optimizer (V6.1)

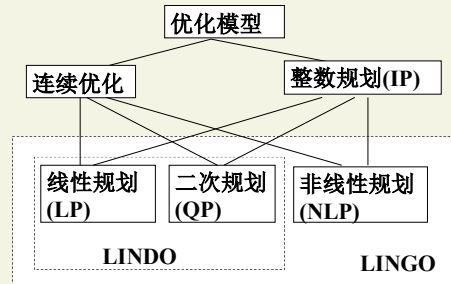
LINGO: Linear Interactive General Optimizer (V8.0)

LINDO API: LINDO Application Programming Interface (V2.0)

What's Best!: (SpreadSheet e.g. EXCEL) (V7.0)

演示(试用)版、学生版、高级版、超级版、工业版、扩展版...  
(求解问题规模和选项不同)

## LINDO和LINGO软件能求解的优化模型



## 需要掌握的几个重要方面

### 1、LINDO:

正确阅读求解报告 (尤其要掌握敏感性分析)

### 2、LINGO:

掌握集合(SETS)的应用;

正确阅读求解报告;

正确理解求解状态窗口;

学会设置基本的求解选项(OPTIONS);

掌握与外部文件的基本接口方法

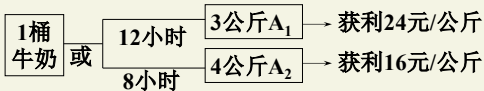
## 例子：奶制品加工的生产计划



每天: 50桶牛奶 时间480小时 至多加工100公斤A<sub>1</sub>

制订生产计划, 使每天获利最大

- 35元可买到1桶牛奶, 买吗? 若买, 每天最多买多少?
- 可聘用临时工人, 付出的工资最多是每小时几元?
- A<sub>1</sub>的获利增加到30元/公斤, 应否改变生产计划?



每天 50桶牛奶 时间480小时 至多加工100公斤A<sub>1</sub>

**决策变量**  $x_1$ 桶牛奶生产A<sub>1</sub>  $x_2$ 桶牛奶生产A<sub>2</sub>

**目标函数** 获利  $24 \times 3x_1$  获利  $16 \times 4x_2$   
每天获利  $Max\ z = 72x_1 + 64x_2$

**约束条件**

原料供应	$x_1 + x_2 \leq 50$
劳动时间	$12x_1 + 8x_2 \leq 480$
加工能力	$3x_1 \leq 100$
非负约束	$x_1, x_2 \geq 0$

线性  
规划  
模型  
(LP)

## LINDO程序

$Max\ z = 72x_1 + 64x_2$

s.t.  $x_1 + x_2 \leq 50$

$12x_1 + 8x_2 \leq 480$

$3x_1 \leq 100$

$x_1, x_2 \geq 0$



$max\ 72x_1 + 64x_2$

st

2)  $x_1 + x_2 < 50$

3)  $12x_1 + 8x_2 < 480$

4)  $3x_1 < 100$

end

结果解释		
OBJECTIVE FUNCTION VALUE		
1)	3360.000	
VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	20.000000	0.000000
X2	30.000000	0.000000
ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	48.000000
3)	0.000000	2.000000
4)	40.000000	0.000000
NO. ITERATIONS= 2		

20桶牛奶生产A<sub>1</sub>, 30桶生产A<sub>2</sub>, 利润3360元。

结果解释		
OBJECTIVE FUNCTION VALUE		
1)	3360.000	
VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	20.000000	0.000000
X2	30.000000	0.000000
ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	48.000000
3)	0.000000	2.000000
4)	40.000000	0.000000
NO. ITERATIONS= 2		

reduced cost值表示当该非基变量增加一个单位时(其他非基变量保持不变)目标函数减少的量(对max型问题)

也可理解为: 为了使该非基变量变成基变量, 目标函数中对应系数应增加的量

结果解释		
OBJECTIVE FUNCTION VALUE		
1)	3360.000	
VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	20.000000	0.000000
X2	30.000000	0.000000
ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	48.000000
3)	0.000000	2.000000
4)	40.000000	0.000000
NO. ITERATIONS= 2		

max 72x<sub>1</sub>+64x<sub>2</sub>  
st  
2) x<sub>1</sub>+x<sub>2</sub><50  
3) 12x<sub>1</sub>+8x<sub>2</sub><480  
4) 3x<sub>1</sub><100  
end

三种资源: 原料无剩余, 时间无剩余, 加工能力剩余40

“资源” 剩余为零的约束为紧约束(有效约束)

结果解释		
OBJECTIVE FUNCTION VALUE		
1)	3360.000	
VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	20.000000	0.000000
X2	30.000000	0.000000
ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	48.000000
3)	0.000000	2.000000
4)	40.000000	0.000000
NO. ITERATIONS= 2		

最优解下“资源”增加1单位时“效益”的影子价格

原料增1单位, 利润增48

• 35元可买到1桶牛奶, 要买吗? 35 < 48, 应该买!

• 聘用临时工人付出的工资最多每小时几元? 2元!

结果解释		
DO RANGE(SENSITIVITY) ANALYSIS? Yes		
RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:		
OBJ COEFFICIENT RANGES		
VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE
X1	72.000000	24.000000
X2	64.000000	8.000000
RIGHTHAND SIDE RANGES		
ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE
2	50.000000	10.000000
3	480.000000	53.333332
4	100.000000	INFINITY

最优解不变时目标系数允许变化范围(约束条件不变)

x<sub>1</sub>系数范围(64,96)  
x<sub>2</sub>系数范围(48,72)

x<sub>1</sub>系数由24×3=72增加为30×3=90, 在允许范围内

• A<sub>1</sub>获利增加到30元/千克, 是否改变生产计划 不变!

结果解释		
RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:		
OBJ COEFFICIENT RANGES		
VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE
X1	72.000000	24.000000
X2	64.000000	8.000000
RIGHTHAND SIDE RANGES		
ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE
2	50.000000	10.000000
3	480.000000	53.333332
4	100.000000	INFINITY

影子价格有意义时约束右端的允许变化范围(目标函数不变)

注意: 充分但可能不必要

原料最多增加10  
时间最多增加53

• 35元可买到1桶牛奶, 每天最多买多少? 最多买10桶?

### 使用LINDO的一些注意事项

1. “>”（或“<”）号与“>=”（或“<=”）功能相同
2. 变量与系数间可有空格(甚至回车),但无运算符
3. 变量名以字母开头,不能超过8个字符
4. 变量名不区分大小写(包括LINDO中的关键字)
5. 目标函数所在行是第一行,第二行起为约束条件
6. 行号(行名)自动产生或人为定义。行名以“( )”结束
7. 行中注有“!”符号的后面部分为注释。如:  
! It's Comment.
8. 在模型的任何地方都可以用“TITLE”对模型命名(最多72个字符),如:

### 使用LINDO的一些注意事项

9. 变量不能出现在一个约束条件的右端
10. 表达式中不接受括号“()”和逗号“,”等任何符号,例:  $400(X1+X2)$ 需写为  $400X1+400X2$
11. 表达式应化简,如  $2X1+3X2-4X1$ 应写成  $-2X1+3X2$
12. 缺省假定所有变量非负;可在模型的“END”语句后用“FREE name”将变量name的非负假定取消
13. 可在“END”后用“SUB”或“SLB”设定变量上下界  
例如: “sub x1 10”的作用等价于 “ $x1 \leq 10$ ”  
但用“SUB”和“SLB”表示的上下界约束不计入模型的约束,也不能给出其松紧判断和敏感性分析。
14. “END”后对0-1变量说明: INT n 或 INT name
15. “END”后对整数变量说明: 或

### LINGO软件简介

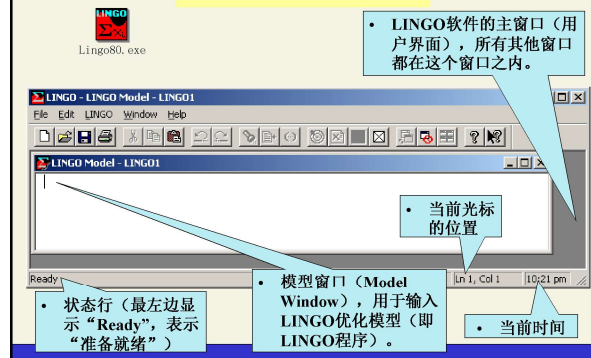
#### LINGO模型的优点

- 包含了LINDO的全部功能
- 提供了灵活的编程语言(矩阵生成器)

#### LINGO模型的构成: 5个段

- 目标与约束段
- 集合段 (SETS ENDSETS)
- 数据段 (DATA ENDDATA)
- 初始段 (INIT ENDINIT)
- 计算段 (CALC ENDCALC) —LINGO9.0

### LINGO的界面



### 一个简单的LINGO程序

例 直接用LINGO来解如下二次规划问题:

$$\begin{aligned}
 \text{Max} \quad & 98x_1 + 277x_2 - x_1^2 - 0.3x_1x_2 - 2x_2^2 & (1) \\
 \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \leq 100 & (2) \\
 & x_1 \leq 2x_2 & (3) \\
 & x_1, x_2 \geq 0 \quad \text{为整数} & (4)
 \end{aligned}$$

输入窗口如下:

```

LINGO Model - LINGO1
x1+x2<100;
max=98*x1+277*x2-x1^2-0.3*x1*x2-2*x2^2;
x1<=2*x2;
@gin(x1);@gin(x2);

```

### 输出结果

运行菜单命令“LINGO|Solve”

最大值=11077.5

Local optimal solution found at iteration: 457  
Objective value: 11077.50

Variable	Value	Reduced Cost
X1	35.00000	-8.500020
X2	65.00000	-6.500069

最优整数解  
X=(35, 65)

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	0.000000	0.000000
2	11077.50	1.000000
3	95.00000	0.000000

## LINGO与LINDO的区别

- 将目标函数的表示方式从“MAX”变成了“MAX=”;
- “ST”(SubjectTo)在LINGO模型中不需要,被删除;
- 在系数与变量之间增加运算符“\*” (即乘号不能省略);
- 每行(目标、约束和说明语句)后面增加一个分号“;”;
- 约束的名字被放到“[]”中,不放在右半括号“)”前;
- LINGO中模型以“MODEL:”开始,以“END”结束。对简单的模型,这两个语句也可以省略。

## 建模实例: 钢管下料

客户需求

原料钢管:每根19米

4米50根

6米20根

8米15根

问题1. 如何下料最节省? 节省的标准是什么?

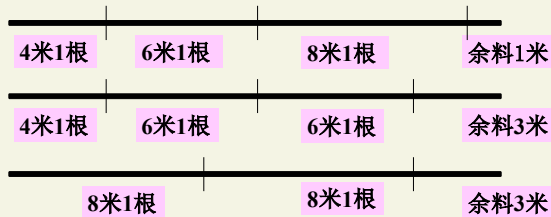
问题2. 客户增加需求: 5米10根

由于采用不同切割模式太多,会增加生产和管理成本,规定切割模式不能超过3种。如何下料最节省?

## 钢管下料

### 切割模式

按照客户需要在—根原料钢管上安排切割的一种组合。



合理切割模式的余料应小于客户需要钢管的最小尺寸

## 钢管下料问题1

### 合理切割模式

模式	4米钢管根数	6米钢管根数	8米钢管根数	余料(米)
1	4	0	0	3
2	3	1	0	1
3	2	0	1	3
4	1	2	0	3
5	1	1	1	1
6	0	3	0	1
7	0	0	2	3

为满足客户需要,按照哪些种合理模式,每种模式切割多少根原料钢管,最为节省?

两种标准

1. 原料钢管剩余总余量最小
2. 所用原料钢管总根数最少

## 决策变量

$x_i$ ~按第*i*种模式切割的原料钢管根数( $i=1,2,\dots,7$ )

目标1(总余量)  $\text{Min } Z_1 = 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 + x_6 + 3x_7$

模式	4米根数	6米根数	8米根数	余料
1	4	0	0	3
2	3	1	0	1
3	2	0	1	3
4	1	2	0	3
5	1	1	1	1
6	0	3	0	1
7	0	0	2	3
需求	50	20	15	

约束 满足需求

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 &\geq 50 \\ x_2 + 2x_4 + x_5 + 3x_6 &\geq 20 \\ x_3 + x_5 + 2x_7 &\geq 15 \end{aligned}$$

整数约束:  $x_i$ 为整数

最优解:  $x_2=12, x_5=15$ , 其余为0;  
最优值: 27

按模式2切割12根, 按模式5切割15根, 余料27米

## 钢管下料问题1

目标2(总根数)  $\text{Min } Z_2 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$

约束条件不变

$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \geq 50$$

$$x_2 + 2x_4 + x_5 + 3x_6 \geq 20$$

$$x_3 + x_5 + 2x_7 \geq 15$$

$x_i$ 为整数

最优解:  $x_2=15$ ,

$x_5=5, x_7=5$ ,

其余为0;

最优值: 25。

按模式2切割15根,

按模式5切割5根,

按模式7切割5根,

共25根, 余料35米

与目标1的结果“共切割27根, 余料27米”相比

虽余料增加8米, 但减少了2根

当余料没有用处时, 通常以总根数最少为目标

## 钢管下料问题2

增加一种需求：5米10根；切割模式不超过3种。

现有4种需求：4米50根，5米10根，6米20根，8米15根，用枚举法确定合理切割模式，过于复杂。

对大规模问题，用模型的约束条件界定合理模式

### 决策变量

$x_i$  ~ 按第  $i$  种模式切割的原料钢管根数 ( $i=1,2,3$ )

$r_{1i}, r_{2i}, r_{3i}, r_{4i}$  ~ 第  $i$  种切割模式下，每根原料钢管生产4米、5米、6米和8米长的钢管的数量

## 钢管下料问题2

目标函数（总根数）  $\text{Min } x_1 + x_2 + x_3$

约束条件 满足需求 模式合理：每根余料不超过3米

$$r_{11}x_1 + r_{12}x_2 + r_{13}x_3 \geq 50$$

$$r_{21}x_1 + r_{22}x_2 + r_{23}x_3 \geq 10$$

$$r_{31}x_1 + r_{32}x_2 + r_{33}x_3 \geq 20$$

$$r_{41}x_1 + r_{42}x_2 + r_{43}x_3 \geq 15$$

$$16 \leq 4r_{11} + 5r_{21} + 6r_{31} + 8r_{41} \leq 19$$

$$16 \leq 4r_{12} + 5r_{22} + 6r_{32} + 8r_{42} \leq 19$$

$$16 \leq 4r_{13} + 5r_{23} + 6r_{33} + 8r_{43} \leq 19$$

整数约束： $x_i, r_{1i}, r_{2i}, r_{3i}, r_{4i}$  ( $i=1,2,3$ ) 为整数

### 整数非线性规划模型

## 钢管下料问题2

增加约束，缩小可行域，便于求解

需求：4米50根，5米10根，6米20根，8米15根

每根原料钢管长19米

原料钢管总根数下界：

$$\left\lceil \frac{4 \times 50 + 5 \times 10 + 6 \times 20 + 8 \times 15}{19} \right\rceil = 26$$

特殊生产计划：对每根原料钢管

模式1：切割成4根4米钢管，需13根；

模式2：切割成1根5米和2根6米钢管，需10根；

模式3：切割成2根8米钢管，需8根。

原料钢管总根数上界：31

$$26 \leq x_1 + x_2 + x_3 \leq 31$$

模式排列顺序可任意

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3$$

## LINGO程序1

model:

Title 钢管下料 - 最小化钢管根数的LINGO模型;

min=x1+x2+x3;

x1\*r11+x2\*r12+x3\*r13>=50;

x1\*r21+x2\*r22+x3\*r23>=10;

x1\*r31+x2\*r32+x3\*r33>=20;

x1\*r41+x2\*r42+x3\*r43>=15;

4\*r11+5\*r21+6\*r31+8\*r41<=19;

4\*r12+5\*r22+6\*r32+8\*r42<=19;

4\*r13+5\*r23+6\*r33+8\*r43<=19;

4\*r11+5\*r21+6\*r31+8\*r41>=16;

4\*r12+5\*r22+6\*r32+8\*r42>=16;

4\*r13+5\*r23+6\*r33+8\*r43>=16;

x1+x2+x3>=26;

x1+x2+x3<=31;

x1>=x2;

x2>=x3;

@gin(x1);@gin(x2);@gin(x3);

@gin(r11);@gin(r12);@gin(r13);

@gin(r21);@gin(r22);@gin(r23);

@gin(r31);@gin(r32);@gin(r33);

@gin(r41);@gin(r42);@gin(r43);

end

## LINGO程序2

model:

Title 钢管下料 - 最小化钢管根数的LINGO模型;

SETS:

NEEDS/1..4/:LENGTH,NUM;

! 定义基本集合NEEDS及其属性LENGTH,NUM;

CUTS/1..3/:X;

! 定义基本集合CUTS及其属性X;

PATTERNS(NEEDS,CUTS):R;

! 定义派生集合PATTERNS (这是一个稠密集合) 及其属性R;

ENDSETS

DATA:

LENGTH=4 5 6 8;

NUM=50 10 20 15;

CAPACITY=19;

ENDDATA

## LINGO程序2

min=@SUM(CUTS(I):X(I));

! 目标函数;

@FOR(NEEDS(I):@SUM(CUTS(J):X(J)\*R(I,J))>NUM(I));

! 满足需求约束;

@FOR(CUTS(J):@SUM(NEEDS(I):LENGTH(I)\*R(I,J))<CAPACITY);

! 合理切割模式约束;

@FOR(CUTS(J):@SUM(NEEDS(I):LENGTH(I)\*R(I,J))>CAPACITY

-@MIN(NEEDS(I):LENGTH(I)));

! 合理切割模式约束;

@SUM(CUTS(I):X(I))>26;@SUM(CUTS(I):X(I))<31;

! 人为增加约束;

@FOR(CUTS(I)|I#LT#@SIZE(CUTS):X(I)>X(I+1));

! 人为增加约束;

@FOR(CUTS(J):@GIN(X(J)));

@FOR(PATTERNS(I,J):@GIN(R(I,J)));

end

## LINGO求解整数非线性规划模型

Local optimal solution found at  
iteration: 12211  
Objective value: 28.00000  
Variable Value Reduced Cost  
X1 10.00000 0.00000  
X2 10.00000 2.00000  
X3 8.00000 1.00000  
R11 3.00000 0.00000  
R12 2.00000 0.00000  
R13 0.00000 0.00000  
R21 0.00000 0.00000  
R22 1.00000 0.00000  
R23 0.00000 0.00000  
R31 1.00000 0.00000  
R32 1.00000 0.00000  
R33 0.00000 0.00000  
R41 0.00000 0.00000  
R42 0.00000 0.00000  
R43 2.00000 0.00000

模式1：每根原料钢管切割成  
3根4米和1根6米钢管，共10  
根；

模式2：每根原料钢管切割成  
2根4米、1根5米和1根6米钢  
管，共10根；

模式3：每根原料钢管切割成  
2根8米钢管，共8根。

原料钢管总根数为28根。

## 参考文献

谢金星, 薛毅编著, 优化建模与LINDO/LINGO软件,  
清华大学出版社, 2005年7月第1版.

袁新生等主编, LINGO和Excel在数学建模中的应用,  
科学出版社, 2007年1月第1版.