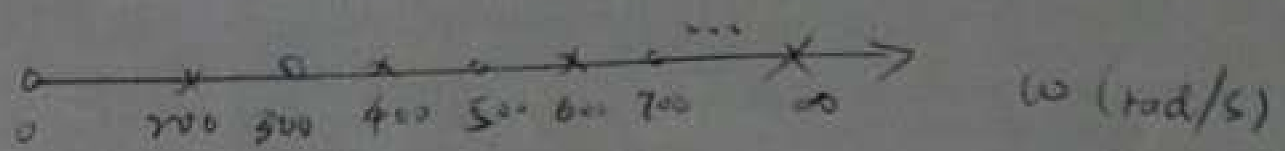
1. 图1表示一策动点阻抗函数Z(s)的零极点模型，且知当 $\omega=50rad/s$ 时，$Z(j\omega)=j1000$
试实现Z(s)的福斯特I、II型，考尔I、II型网络结构。




答：依图有 $Z(s)=Hs\frac{(s^2+300^2)(s^2+500^2)(s^2+700^2)}{(s^2+200^2)(s^2+400^2)(s^2+600^2)}=Hs\frac{A}{B}$

由 $Z(s)|_{s=j50}=Hs\frac{A}{B}=H\cdot j50\cdot 5=j\cdot 1000$ 得 $H=4$.

$\therefore Z(s)=4s\cdot\frac{A}{B}$

(I) 福斯特I型：Z(s)在 $s=\pm j200$，$s=\pm j400$，$\pm j600$ 及 $\infty$ 各有一极

故用其I型实现形式为：

$$Z(s)=\frac{2k_2 s}{s^2+200^2}+\frac{2k_4 s}{s^2+400^2}+\frac{2k_6 s}{s^2+600^2}+k_\infty s$$

其中：$k_2=(s-j200)Z(s)|_{s=j200}=4s\frac{A}{B}\Big|_{s=j200}=2.46\times10^5$

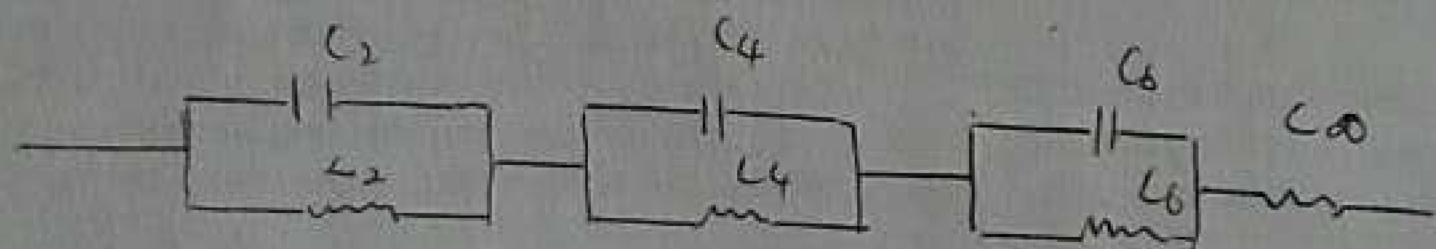
代入类似公式 $k_4=1.73\times10^5$ $k_6=1.21\times10^5$

$k_\infty=\frac{Z(s)}{s}\Big|_{s\to\infty}=4$

$\therefore C_2=\frac{1}{2k_2}\doteq 2.03\mu F$ $C_4=\frac{1}{2k_4}=2.90\mu F$ $C_6=\frac{1}{2k_6}\doteq 4.13\mu F$

$L_2=\frac{2k_2}{\omega_2^2}=12.3H$ $L_4=\frac{2k_4}{\omega_4^2}=2.16H$ $L_6=\frac{2k_6}{\omega_6^2}=0.67H$

$L_\infty=k_\infty=4H$ 对应网络图①.




(II). 对于II型 Y(s)在 $s=0$，$s=\pm j300$、$\pm j500$ 及 $\pm j700$ 各有一根.

故Y(s)用II型实现形式：

$$Y(s)=\frac{(s^2+200^2)(s^2+400^2)(s^2+600^2)}{4s(s^2+300^2)(s^2+500^2)(s^2+700^2)}=\frac{k_0}{s}+\frac{2k_1 s}{s^2+300^2}+\frac{2k_3 s}{s^2+500^2}+\frac{2k_5 s}{s^2+700^2}$$

$$=\frac{1}{4s}\frac{C}{D}$$

其中 $k_0=sY(s)|_{s=0}=0.0522$.

$k_1 = (s - j300)Y(s)|_{s=j300} = \frac{1}{4s}\frac{C}{D}|_{s=j300} \doteq 0.0210$

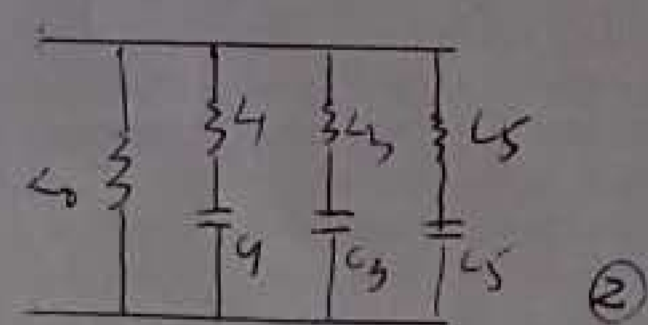
$k_3 = (s - j500)Y(s)|_{s=j500} = \frac{1}{4s}\frac{C}{D}|_{s=j500} \doteq 0.027$

$k_5 = (s - j700)Y(s)|_{s=j700} = \frac{1}{4s}\frac{C}{D}|_{s=j700} = 0.0512$

$\therefore L_0 = \frac{1}{k_0} = 1.92H \quad L_1 = \frac{1}{2k_1} = 23.8H \quad L_2 = \frac{1}{2k_3} = 18.5H \quad L_5 = \frac{1}{2k_5} = 9.71H$

$C_1 = \frac{2k_1}{w_1^2} = 0.467\mu F \quad C_3 = \frac{2k_3}{w_3^2} = 0.216\mu F \quad C_5 = \frac{2k_5}{w_5^2} = 0.209\mu F$

对应网络结构图2：



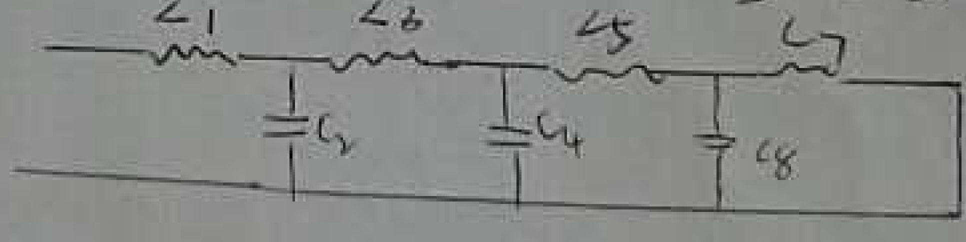

(III) 考尔I型. 将Z(s)降幂排列. 并辗转相除为：

$$Z(s) = \frac{4s^7 + (8.32\times10^6)s^5 + (7.564\times10^{11})s^3 + (4.41\times10^{16})s}{s^6 + (5.6\times10^5)s^4 + (7.84\times10^{10})s^2 + (2.304\times10^{15})}$$

$$\doteq 4s + \cfrac{1}{0.93\times10^{-6}s + \cfrac{1}{7s + \cfrac{1}{1.29\times10^{-6}s + \cfrac{1}{5.3s + \cfrac{1}{3.38s\times10^{-6} + \cfrac{1}{4.82s}}}}}}$$

$\therefore L_1 = 4H \quad C_2 = 0.93\mu F \quad L_3 = 7H \quad C_4 = 1.29\mu F \quad L_5 = 5.3H \quad C_6 = 3.38\mu F$

$L_7 = 4.82H$ 结构图3：




(IV) 考尔II型. 升幂排列. 并辗转相除为：

$$Y(s) = \frac{2.304\times10^{15} + (7.84\times10^{10})s^2 + (5.6\times10^5)s^4 + s^6}{(4.41\times10^{16})s + (7.956\times10^{11})s^3 + (3.4\times10^6)s^5 + 4s^7}$$

接下页：

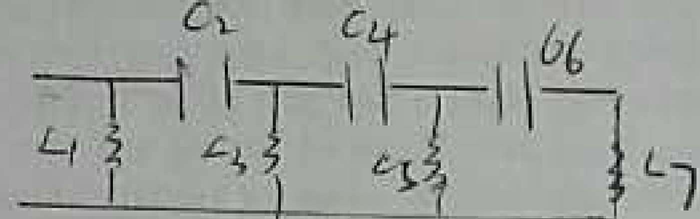
$$=0.0522s^{-1}+\cfrac{1}{1.195\times10^{-6}s^{-1}+\cfrac{1}{0.1131s^{-1}+\cfrac{1}{2.763\times10^{-6}s^{-1}+\cfrac{1}{0.076\times10^{6}s^{-1}+\frac{1}{A}}}}}$$

$$A=144.213\times10^{6}s^{-1}+\frac{1}{0.0036s^{-1}}$$

$\therefore L_1=\frac{1}{0.0522}=19.15\ H$ $C_2=\frac{1}{1.195}\doteq0.836\mu F$ $L_3=\frac{1}{0.1131}=8.84H$

$C_4=\frac{1}{2.763}=0.3619\mu F$ $L_5=\frac{1}{0.076}=13.16H$ $C_6=\frac{1}{144.213}=6.93nF$

$L_7=\frac{1}{0.0036}=277.7H$ 结构图(IV)




二. 试用极点、移除和常数移除技术综合正实函数 $Z(s)=\frac{4s^2+5s+2}{2s+1}$

答: 用部分分式展开法由$Z(s)$中分离出 $s=-\frac{1}{2}$ 极点相应项.

$Z(s)=\frac{k_1}{2s+1}+Z_s(s)$ $k=(2s+1)Z(s)|_{s=-\frac{1}{2}}=\frac{2(4s^2+5s+2)}{2s}\Big|_{s=-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

剩余函数

$Z_s(s)=Z(s)-\frac{k}{s+\frac{1}{2}}=\frac{4s^2+5s+2}{2s+1}-\frac{1}{2(s+1)}=\frac{8s^2+10s+4-1}{4s+2}$

$Z(s)=\frac{(2s+1)(4s+3)}{2(2s+1)}=\frac{4s+3}{2}=2s+\frac{3}{2}$ 极点已移除.

三. 用终接2Ω电阻的LC梯形网络来实现如下的电压转移函数$K_u$(对其常数乘数$A_0$不作要求) $K_u=A_0s/(s^4+3s^3+3s^2+3s+1)$.

答: 由$K_u$表达式知: $-y_{21}(s)=\frac{A_0s}{s^4+3s^2+1}$ $y_{22}(s)=\frac{3s^3+3s}{s^4+3s^2+1}=\frac{3s(s^2+1)}{s^4+3s^2+1}$

上式表明在$s=0$处有传输零点, 而$y_{22}(s)$在$s=0$处有零点, 无极点, 故采用零点位移技术

$\because H(s)$在$s=0$处有传输零点, 用考尔I型实现元件移去$s=0$处极点,

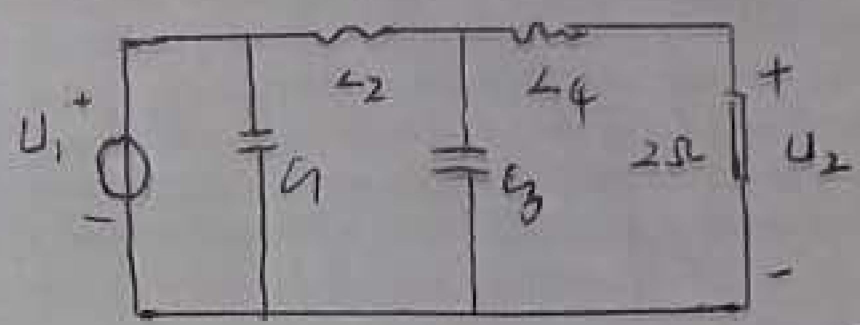
则:

$$y_{22} = \frac{3s^3+3s}{s^4+3s^2+1} = \cfrac{1}{\frac{1}{3}s + \cfrac{1}{\frac{3}{2}s + \cfrac{1}{\frac{4}{3}s+\frac{3}{2}s}}}$$

$\therefore C_1 = \frac{1}{3}F \quad L_2 = \frac{3}{2}H$

$C_3 = \frac{4}{3}F \quad L_4 = \frac{3}{2}H.$

故LC梯形网络：



四 试求N=5的巴特沃夫思滤波器具体电路。

答：①已知N=5，求归一化频率时的特征函数及工作传输函数。

当ε=1时，$\varepsilon\varphi_p = \pm p^5 \quad W_p \cdot W_{-p} = 1-p^{10}$

查表知：ε=1时的5阶巴低通滤波器转移F为：

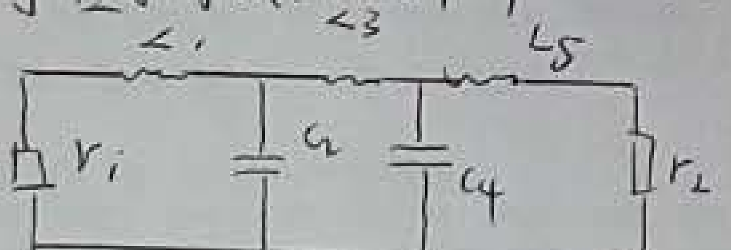
$W(p) = p^5+3.2361p^4+5.2361p^3+5.2361p^2+3.2361p+1$

②求归一化低通原型。

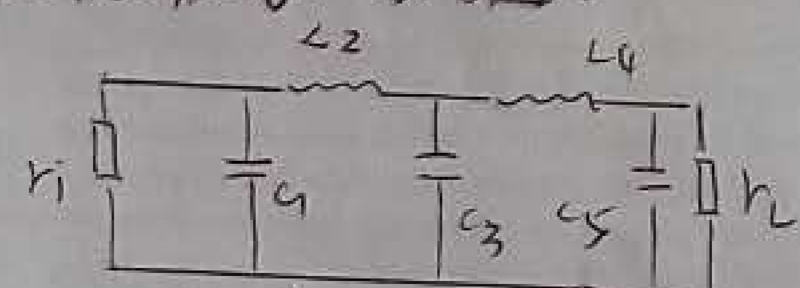
当ε=1时，$R_1=1$：

$$= \frac{W(p)-\Phi(p)}{W(p)+\Phi(p)} = \begin{cases} \dfrac{3.2361p^4+5.2361p^3+5.2361p^2+3.2361p+1}{2p^5+3.2361p^4+5.2361p^3+5.2361p^2+3.2361p+1} \\ \dfrac{2p^5+3.2361p^4+\cdots}{3.2361p^4+\cdots} \end{cases}$$

由于传输0点全在p=∞处，用考尔Ⅰ型实现，电路图：



a



b

③反归一化 求实际电路元件值

由于归一化电路ε=1时3dB的频率(Ω=1)为参考频率，故首先求出实际电路的3dB频率$\omega_c$：

$$\omega_c = \frac{\omega_c}{\varepsilon^{\frac{1}{5}}} = 2\pi\frac{1.8}{0.509^{1/4}} = 2\pi\times 2.006\times10^6\ \text{rad/s}$$

若设电阻 $R_1=R_L=50\Omega$。

则反归一化电阻单位 $R_L=50\Omega$ 反归一化电容单位 $C_0=\frac{1}{\omega_c R_L}=1545pF$

反归一化电感单位 $L_0=\frac{R_L}{\omega_c}=3.813uH$

故得实际电路值为：$R_1=50\Omega \quad R_L=50\Omega$。

对a图 $L_1=2.387uH \quad C_2=2500pF \quad L_3=7.7260uH \quad C_4=2500pF \quad L_5=2.3875uH$

b：$C_1=937.5pF \quad L_2=6.2504uH \quad C_3=3090pF \quad L_4=6.2504uH \quad L_5=9339.5pF$

五. 设计并实现满足下列技术指标的切比雪夫I型低通滤波器。

通带允许起伏：$-1dB$，$0 \le \Omega \le \pi \times 10^4 rad/s$

阻带衰减 $\le -15dB$　$\Omega = \pi \times 2 \times 10^4 rad/s$

信号内阻与负载电阻均为 $R_s = R_L = 300\Omega$

答：① 波纹起伏参数 ε：

$$|Ha(j\Omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} = 10^{-\frac{1}{20}} \Rightarrow \varepsilon = 0.50885.$$

② 因通带边缘角频率 $\Omega_c = \pi \times 10^4 rad/s$ 阻带边缘角 $\omega = \Omega_s = 2\pi \times 10^4 rad/s$

按衰减要求，有

$$|Ha(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 T_N^2\left(\frac{2\pi\times10^4}{\pi\times10^4}\right)}} = 10^{-\frac{15}{20}}$$

$$T_N(2) = \cosh(N\operatorname{arcosh}2) = \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{10^{\frac{15}{10}}-1} = 10.8751$$

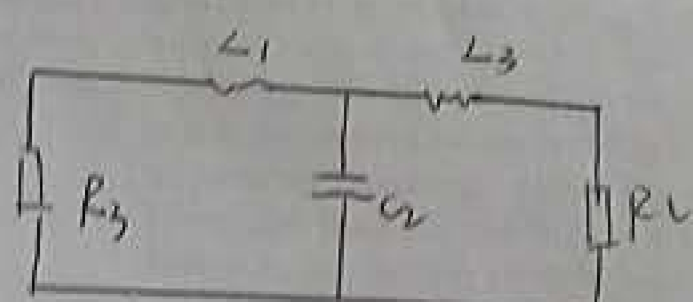
$$\therefore N = \frac{\operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{10^{1.5}-1}\right)}{\operatorname{arcosh}2} = 2.34 \quad 取 N = 3.$$

③ 按本题需求，即 1dB 波段 $N=3$ 查表知A值，得出归一化的切比雪夫逼近函数 $Ha(s')$

$$Ha(s') = \frac{0.4913}{(s')^3 + 0.9883(s')^2 + 1.2384(s') + 0.4913} \quad 令 \frac{s}{\Omega_c} = s' 代入$$

$$得：Ha(s) = \frac{1.5\times10^{14}}{s^3 + 3.1\times10^4 s^2 + 1.2\times10^9 s + 1.5\times10^{14}}$$

④ 由 $Ha(s)$ 实现电路：



六. 假设某模拟滤波器传输函数为：

$$\hat{H}(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)}$$ 用双线性变换法求对应数字滤波器传输函数 $H(z)$

解：$\because \hat{H}(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)}$　$s = \frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$　$\therefore z = \frac{1+sT/2}{1-sT/2}$

将上式 z 代入模拟滤波器中得：$H(z) = \frac{\frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)}{\left(\frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)+1\right)\left(\frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)+2\right)}$

取$T=1$ 将上式化简可得：

$$H(z)=\frac{2\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)}{\left(2\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)+1\right)\left(2\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)+2\right)}$$

$$=\frac{\frac{z-1}{z+1}}{\left(\frac{3z-1}{z+1}\right)\left(\frac{2z}{z+1}\right)}=\frac{z^2-1}{2z(3z-1)}$$

故 $H(z)=\dfrac{z^2-1}{3z-1}$

七、给定高通滤波器的技术指标

通带允许起伏：$-1dB$　　$2\pi\times1.5\times10^4 rad/s\le\Omega<\infty$

阻带衰减：$\le-15dB$　　$0\le\Omega\le\pi\times10^4 rad/s$

用巴特沃思滤波形式实现，求该滤波器$Ha(s)$及其电路实现

($R_S=R_L=?\Omega$)

解：① 求高通滤波器的归一化各频率

取参考频率$\Omega_r$为3dB处的截止频率$\Omega_c$，但技术指标中并未给出

因而作为未知参数待定，求得归一化各频率：

$$\begin{cases}\lambda_p=\dfrac{\Omega_p}{\Omega_c}=\dfrac{1}{\Omega_c}(2\pi\times1.5\times10^4)\\ \lambda_s=\dfrac{\Omega_p}{\Omega_c}=\dfrac{1}{\Omega_c}(\pi\times10^4)\\ \lambda_r=\lambda_c=\dfrac{\Omega_c}{\Omega_c}=1\end{cases}$$

② 求低通原型滤波器频率及其对应指标

$$\begin{cases}\Omega_p'=-\dfrac{1}{\lambda_p}=-\dfrac{\Omega_c}{2\pi\times1.5\times10^4}\\ \Omega_s'=-\dfrac{1}{\lambda_c}=-\dfrac{\Omega_c}{\pi\times10^4}\\ \Omega_c'=1\end{cases}$$

故 $$|Ha(j\Omega_p')|=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\Omega_c}{2\pi\times1.5\times10^4}\right)^{2N}}}=10^{-\frac{1}{20}}$$

$$|Ha(j\Omega_s')|=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\Omega_c}{\pi\times10^4}\right)^{2N}}}=10^{-\frac{15}{20}}$$

③ 求低通原型系统函数$Ha(s)$ 确定滤波器阶数N 由①得：

$$N=\frac{\lg\frac{10^{1.5}-1}{10^{0.1}-1}}{2\times\lg\frac{2\pi\times1.5\times10^4}{\pi\times10^4}}=\frac{2.07}{2\times0.47}=2.202 \text{ 取 } N=3.$$

查表可得 $H_a(s')$ 表达式如下: $H_a(s') = \frac{1}{(s')^3+2(s')^2+2s'+1}$

④ 通过低通原型来确定参考频率 $\Omega_r$，利用阻带频率 $\Omega_s'$ 有:

$$|H_a(j\Omega_s')| = \frac{1}{\sqrt{1+(\Omega_s')^{2\cdot 3}}} = 10^{-\frac{15}{20}} \qquad \Omega_s' = \sqrt[6]{10^{1.5}-1} = 1.769$$

求得 $\Omega_r = \Omega_c = \Omega_s \cdot \Omega_s' = \pi\times1.33\times10^{4}\ \text{rad/s}$.

由 $s' = \frac{\Omega_s}{s} = \frac{\pi\times1.76\times10^4\ \text{rad/s}}{s}$ 代入 $H_a(s')$ 式中得

$$H_a(s) = \frac{1}{(s')^3+2(s')^2+2s'+1} = \frac{s^3}{s^3+1.12\times10^5 s^2+6.18\times10^9 s+1.717\times10^{14}}$$

⑤ 高通滤波器电路实现

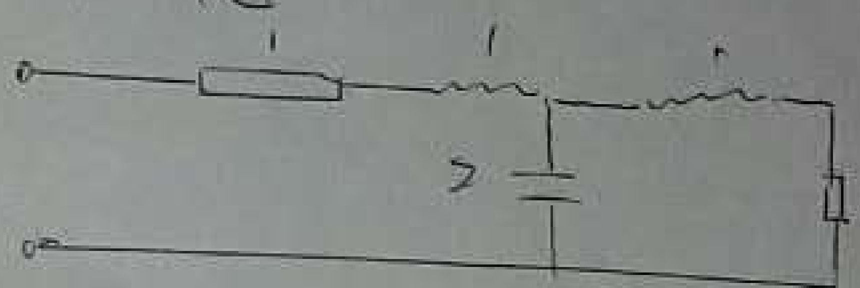
$$C_1 = \frac{1}{R_S L_1' \Omega_c} = \frac{1}{200\times1\times1.769\pi\times10^4} = 0.089\mu F$$

$$L_2 = \frac{R_S}{C_2'\Omega_c} = \frac{200}{2\times1.719\pi\times10^4} = 1.79mH$$

$$C_3 = \frac{1}{R_S L_3' \Omega_c} = \frac{1}{200\times1\times1.769\pi\times10^4} = 0.089\mu F$$

故最终电路如下图所示。

(a) 低通




(b) 高通