

《优化阵列信号处理：波束优化理论与方法》 学习笔记

原书作者：鄢社锋

笔记整理：张玉帅（小奥）

版本：第一版

完稿日期：2019.10.28

WWW.YUSHUAL.XYZ

目录

第一章：绪论.....	1
第二章：阵列信号处理数学模型.....	7
第三章：规则阵波束设计.....	23
3.1 线阵.....	23
3.2 矩形阵.....	29
第四章：波束稳健性分析.....	32
4.1 最佳波束形成器稳健性影响因素.....	32
4.2 导向向量失配对波束性能的影响.....	32
4.3 协方差矩阵失配对波束性能的影响.....	33
第五章：稳健波束设计.....	35
5.1 对角加载法.....	35
5.2 加权向量范数约束法.....	37
5.3 最差性能最佳化法.....	41
5.4 协方差矩阵拟合法.....	42
5.5 总结.....	44
第十章：圆环阵阵列处理.....	46
10.1 引言.....	46
10.2 连续圆环阵.....	46
10.3 均匀圆环阵.....	50
10.4 本章小结.....	51

第一章：绪论

1.波束形成是阵列信号处理的一个非常重要的任务，它采用空间分布的传感器阵列采集包含期望信号与噪声的物理场数据，然后对所采集的阵列数据进行线性加权组合处理得到一个标量波束输出。

2.波束形成的功能：①形成基阵接收系统的方向性；②进行空域滤波，抑制空间干扰与环境噪声，提高信噪比；③估计信号到达方向，进行多目标分辨；④为信号源定位创造条件；⑤为目标识别提供信息等。通过波束形成处理，可以实现对**目标的检测与定位**。

3.根据频带宽度划分可以划分为**窄带波束形成器**和**宽带波束形成器**。窄带波束形成器中，各阵元数据进行加权求和得到输出，通过设计合适的加权值，可以有选择性地增强来自某一指定方向的信号，抑制其它方向的到达信号，提高输出信噪比。这一点与 FIR 滤波器系数，有选择性地使某些频率成分通过、抑制其它频率成分的处理过程相似。

4.传感器阵列的空域滤波性能由其**结构形状、阵元数目及处理算法**等因素确定。

5.**加权值**决定了波束形成器的空间滤波特性。根据加权值的选择可以分为**数据独立波束形成器**和**统计最优的波束形成器**。数据独立波束形成器加权值是固定的，不随接收数据的变化而变化，对接受数据提供固定的响应，包括常规（时延求和）波束形成器和部分旁瓣控制波束形成器（如 Chebyshev）；统计最优波束形成器基于接受数据的统计特性对加权值进行优化。

6.波束形成器的性能参数：

- （1）主瓣宽度；
- （2）旁瓣级；
- （3）阵列增益；
- （4）主瓣响应；
- （5）频率响应。

低旁瓣可以有效抑制来自旁瓣区域的干扰，降低目标检测的虚警概率；窄的主瓣宽度可以提高目标方向的辨别能力；高的阵列增益可以提高系统对弱目标的检测能力；高稳健性使波束形成的性能受各种失配影响减小。波束优化设计的目的就是**使波束形成器的这些性能最优**。Capon 波束形成器（MVDR）使理想阵增益最高；Cox 波束形成器是一种提高基阵波束形成器对基阵误差稳健性的波束形成器。

7.MVDR 波束形成方法的阵列增益与稳健性

MVDR 波束形成器：MVDR 波束形成器在保证对感兴趣方位的信号无失真输出的条件下，使基阵的输出功率最小，最大限度地提高输出信噪比，或者说最大限度地提高阵列增益，**具有很好的干扰抑制能力**。它可以解释为**协方差矩阵拟合问题**，具有很好的方位分辨能力。但是 MVDR 波束形成方法是建立在阵列对期望信号的响应**精确已知**的基础之上，对基阵的误差非常敏感。要获得更好的性能，需要精确知道期望信号**导向矢量和噪声（包括干扰）协方差矩阵**。而这两者都存在误差，造成性能下降严重。

首先，阵列对期望信号的假想响应与真实响应适配。造成这种适配的原因主要有：观察方向误差、阵型标定误差、未知波前扭曲与信号衰减、近场模型失配、局部散射、环境非平稳造成信号和噪声幅度与相位起伏等。传统的自适应算法对这些类型的失配哪怕十分轻微也会特别敏感，因为这些失真条件并不是恰好针对实际期望信号的，会把实际期望信号当作干扰而形成零陷，导致信号自消，这样 MVDR 算法性能就会比标准波束形成器性能下降严重。

其次，噪声协方差矩阵一般是未知的，我们往往采用自适应方法估计的数据协方差矩阵来代替。一方面，采用有限样本估计的数据协方差矩阵与真实数据方差矩阵间存在误差，训练样本越少，误差越大；另一方面，传统的自适应波束形成方法假设在训练数据中不包括期望信号成分，但是在大多数情况下，观察数据中一般含有期望信号成分。**【麦克风阵列中虽**

然使用了 VAD，但无法保证 VAD 结果一定准确，所以可能会在噪声混杂在训练数据中，也就产生信号“自消”现象】

使用样本数据协方差矩阵代替噪声协方差矩阵对自适应波束形成造成的影响是旁瓣升高、阵列增益减小。在训练数据中不包括期望信号成分时，自适应波束形成算法对导向向量误差与较少训练样本还具有一定的稳健性，但是当训练数据中包含期望信号，传统的自适应波束形成方法就会产生信号“自消”，此时波束性能和收敛速率就会严重下降。即使导向向量精确已知，但训练样本有限时也是如此。

由于训练样本较少产生的协方差矩阵误差对 MVDR 波束形成性能影响可以看作是号线由于导向矢量误差引起的，输入信噪比越高，性能下降程度越剧烈。在高信噪比情况下，即使很小随机误差都会使基阵增益严重下降，甚至比常规波束形成器还差。

高增益和稳健性是一对矛盾。

为了解决这一问题，有很多方法被提出。例如，线性约束最小方差（LCMV），包括点约束和微分约束，但是他们只适用于观察方向失配情况，对其它类型导向矢量失配等并不能提供足够的稳健性，而且它会减小波束形成器的自由度，降低其干扰抑制能力。【这一段话非常重要，解释了 LCMV 在我使用的时候为什么效果还比 MVDR 差的原因。】

在能够部分解决任意导向矢量失配问题的方法中，最常用的是二次约束方法和基于特征空间的波束形成方法。

二次约束方法对权向量的 Euclidean 范数施加一个二次约束。早期由于加权向量范数约束方法难以直接实现，所以一般采用样本协方差矩阵对角加载波束形成方法【师兄使用的就是该方法】来实现，这些方法及其改进方法能够提供信号导向向量失配与样本协方差矩阵存在误差情况下的稳健波束形成。不过这种方法的缺点是：无法根据失配的程度获得优化的对角加载量。

基于子空间的方法要求知道噪声协方差矩阵的信息，不仅对导向向量误差敏感，而且对噪声协方差矩阵的不精确性也非常敏感，而且在低信噪比情况或当信号加干扰子空间维数较高的时候失效。

可以看一下 Gershman 等、Li 等、Boyd 等提出的能够根据导向向量不确定范围来选取参数的稳健波束形成方法。这些方法属于对角加载类型算法，但是他们明确利用了导向向量误差信息，能够根据导向向量误差椭圆不确定集来精确计算对角加载量。Kim 后续将这一类方法进一步发展，能够处理更灵活的导向向量和协方差矩阵模型不确定性问题。

【参考文献】

- [1] Vorobyov S A, Gershman A B, Luo Z Q. Robust adaptive beamforming using worst-case performance optimization: a solution to the signal mismatch problem[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2003, 51(2):313-324.
- [2] Stoica P, Wang Z, Li J. Robust Capon Beamforming[C]// Conference on Signals, Systems & Computers. IEEE, 2006.
- [3] Li J, Stoica P, Wang Z. On robust Capon beamforming and diagonal loading[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2003, 51(7):1702-1715.
- [4] Li J, Stoica P, Wang Z. Doubly constrained robust capon beamformer[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2005, 52(9):2407-2423.
- [5] Lorenz R G, Boyd S P. Robust minimum variance beamforming[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2005, 53(5):1684-1696.
- [6] Kim S J, Magnani A, Mutapcic A, et al. Robust Beamforming via Worst-Case SINR Maximization[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2008, 56(4):1539-1547.

8.波束图优化设计

波束图形状设计包括两个方面：**控制波束旁瓣；设计波束主瓣响应**。波束图综合主要指期望响应波束设计问题。

首先考虑旁瓣控制波束设计问题。单个传感器可能不是各向同性，各个传感器的灵敏度也可能不太相同，这些都可能使旁瓣进一步升高。另外，在之前统计最优波束形成器中，为了追求高增益而造成波束旁瓣升高，有时会达到难以忍受的程度。Dolph-Chebyshev 方法能产生恒定旁瓣级，对于半波长间隔均匀线阵列，该方法在给定主瓣宽度下能获得最低的旁瓣级，或在给定旁瓣级条件下能够得到最小主瓣宽度。Riblet-Chebyshev 方法对于半波长间隔均匀线阵列与上面相同，但当阵元间距小于半波长，且阵元数为不小于 7 的奇数时，Riblet-Chebyshev 能获得更窄的主瓣。但是上面两个只能是**各向同性阵元组成的均匀线阵列**。Taylor 提出了适用于圆面阵的旁瓣约束方法，该方法**约束最大旁瓣高度，并获得远离主瓣方向逐渐下降的旁瓣**。这个方法适用于圆形阵，要求各阵元各向同性，对于其它任意几何形状阵列、阵元本身具有指向性，或组成基阵各阵元灵敏度存在差异的时候，就不能获得理想的期望旁瓣。

【参考文献】

[7] Taylor T . Design of circular apertures for narrow beamwidth and low sidelobes[J]. IRE Transactions on Antennas and Propagation, 2003, 8(1):17-22.

基于自适应阵原理的旁瓣控制方法适用于任意结构阵列。在存在干扰的情况下，自适应波束形成器能够在干扰方向自动形成一个“凹槽”。Olen 等于 1990 年提出了一种静态波束图的数字综合方法，它对旁瓣区域内噪声源的自适应调整做了进一步讨论，通过反复迭代过程，可以获得给定主瓣宽度条件下的最低均匀旁瓣级。这一类方法缺点是：采用自适应或迭代方法实现，并不能保证完全收敛，不能保证旁瓣得到严格控制，误差比较大。而且迭代过程中对于主瓣宽度没有约束，容易造成主瓣较快增宽。或者说，**在给定旁瓣级条件下并不能保证获得最窄的主瓣**。

在给定波束主瓣宽度情况下，波束能获得的最低旁瓣是有限的。当干扰功率太大时，即使从波束旁瓣方位入射，仍旧会对主瓣入射的期望信号产生较大的干扰，我们可以在干扰方向形成凹槽或零点来抑制，但是当目标运动的时候，自适应方法可能很难快速跟踪，这个时候可以使用**零点展宽技术**。使得波束旁瓣区域形成一个交款的凹槽，保证干扰方向始终位于凹槽内。

【参考文献】

[8] Zhou P Y , Ingram M A , Anderson P D . Synthesis of minimax sidelobes for arbitrary arrays[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1998, 46(11):1759-1760.

除了旁瓣控制以外，期望响应设计也是一个研究方向。二次规划方法适用于任意结构基阵的期望响应波束设计方法，原理就是使**设计的波束与期望波束的均方误差(或 l_2 的范数)最小**。二次规划方法的一个主要缺点是：它只使用了误差的 l_2 范数逼近准则，相当于使设计波束在全方位(包括主瓣和旁瓣)同时逼近于期望波束，而我们感兴趣的是波束主瓣，这些方法相当于在旁瓣区域增加了多余的约束，必然造成设计波束与参考波束主瓣区域拟合误差增大。事实上，**对于旁瓣区域，我们往往更希望控制最高旁瓣峰，即控制旁瓣与零电平之间的最大误差(l_∞ 范数)，这是二次规划方法无法实现的**。

以上的方法都是只考虑主瓣或者旁瓣，没有考虑到稳健性和阵增益，而这些指标是相互关联的，单纯优化其中一两个指标，另外的性能往往就会变差。

二阶锥规划(Second-order Cone Programming, SOCP)方法是一种兼顾多个性能指标的波束形成器优化设计方法，包括**稳健低旁瓣高增益波束设计**和**稳健低旁瓣期望主瓣响应波束设计**。前者采用 Minimax 准则控制波束旁瓣，可以在任意阵型、且考虑阵元方向性，更重

要的是该方法能够通过对加权向量范数施加约束来提高波束形成器的稳健性。对于后者，采用混合范数准则，让主瓣响应与旁瓣按不同的准则逼近期望值（让误差 12 或 1 无穷范数最小），能满足多样化的设计需求，且能提高波束稳健性。

如果只考虑波束幅度响应而不考虑相位响应，则这种问题称为**期望幅度响应波束设计问题**。对于这种问题，期望响应（包括幅度和相位）波束只是一个次优解。如果不考虑相位响应，期望幅度响应波束形成器应该能获得更高的主瓣幅度逼近精度。

9. 恒定主瓣响应波束设计

在很多情况下，宽带波束形成器在频域实现，通过傅里叶变换将数据从时域转换到频域的多个子带，每个子带满足窄带条件，用前面的窄带波束设计方法可以直接使用。

对于常规波束形成器来说，其**主瓣宽度随频率降低而增宽**。此时只有当信号源从波束所指方向（主轴）入射时，才能保证信号通过波束形成器后，输出频谱保持不变；否则，若信号从主瓣非主轴方向入射，信号频谱就会发生畸变，类似于进行了低通滤波。所以在子带波束设计问题中，恒定主瓣响应波束形成器是研究较多的一种波束设计问题，它的重要特性就是**保证从主瓣区域入射信号的波束输出频谱不发生畸变**，即只要信号从主瓣扇面区域入射，就能保证工作频带内的频谱不发生畸变。

10. 波束形成器的实现

波束形成器的实现包括**频域实现**和**时域实现**两种。

对于窄带波束形成器，频域实现就是直接将窄带阵列快拍数据【**快拍数据就是全部阵元在时域的一次采样。如果阵元数为 M, 那么通常用 $X(t)$ 来表示一次采样，维数是 $M \times 1$** 】进行复数加权求和、得到波束输出，但要求阵列快拍数据也是复数形式，如果阵列数据是实数模型，则需要将数据在基带进行正交解调，然后对两个正交分量分别于加权向量的实部和虚部进行加权求和。时域实现就是直接对个阵列数据进行时延加权求和。由于**窄带数据时延等效为相移**，所以也可以采用相移加权求和来实现。

宽带信号可以获得更比窄带信号丰富的目标信息，有利于目标检测。

对于宽带波束形成，**频域处理方法**为：首先使用 FFT 变换将阵列数据分解为若干子带，每个子带满足窄带条件，然后针对每个子带进行窄带波束形成，最后对各子带输出进行 IFFT 得到宽带波束输出时间序列，这种称为 **DFT 波束形成器**。**时域处理方法**为：首先将各个阵元数据进行适当的延时，然后分别通过一个对应的 FIR 滤波器，再将每个滤波器输出相加，得到宽带波束输出序列，这种时域处理器称为 **FIR 波束形成器**。

DFT 波束形成器是分块处理，不具有实时性，而且 DFT 处理相当于在频域进行了加窗处理，使得变换到时域时数据块前后不符存在误差。将各块波束输出时域数据组合成连续信号后出现块间“缝合”不流畅，相当于引入了周期性的干扰。如果对数据采用重叠分段处理，这种误差可以减小。时域是实时连续处理，可以解决波束输出不连贯的问题。【**频域不能实时处理，且帧与帧之间可能会引入误差；时域处理是实时处理，解决输出不连贯问题**】

1972 年 Frost 提出的 LCMV 方法是早期比较著名的 FIR 波束形成法，它采用**约束最小均方方法**使 FIR 波束形成器对已知方向的期望信号产生响应，但该方法要求**期望信号到达各 FIR 滤波器第 1 节拍时是同相位的**。如果相位不相同，需要各通道先进行延迟实现同相位。Griffiths 和 Jim 提出的 GSC 算法同样假设期望信号到达各 FIR 滤波器第一节拍是同相位的，并指出当预延迟存在误差时造成波束形成器性能下降，高信噪比时尤其严重。

对于自适应阵来说，当**FIR 处理器中的节拍数与 DFT 处理器中样本长度相等时他们能获得相同的输出信噪比**。

期望响应 FIR 滤波器设计与期望响应波束设计问题类似，可以通过构造不同的设计准

则与选择合适的求解计算技术来实现。鄢社锋和马远良提出了一种通用的 FIR 滤波器优化设计方法,采用二阶锥规划方法求解,设计精度高,并将该 FIR 滤波器设计与波束优化设计相结合,提高了 FIR 波束形成器“分步设计法”的精度。

分步设计法设计简便,计算量小,虽然采用二阶锥规划法在两个步骤都能获得单独设计问题的最优解,但不能保证最终综合的结果是全局最优的。例如:FIR 滤波器阻带衰减量难以确定;在阻带与过渡带的波束旁瓣难以控制;FIR 滤波器不可避免的设计误差会导致 FIR 波束形成器的旁瓣升高,自适应方法中干扰方向的凹槽深度变浅等。鄢社锋提出了一种恒定主瓣响应 FIR 波束形成器,其设计思想是:将 FIR 波束形成器的宽带波束响应表达成滤波器系数的函数,构造优化问题,直接针对优化问题求解对应于所有通道的滤波器系数,可以获得满足约束条件的全局最优解。该方法能够严格控制 FIR 波束形成器的旁瓣,还能够控制过渡带与阻带区域的波束相应幅度(频域旁瓣)。相对于分部设计法来说,社京都更高,但是计算量更大。此外,通过增加滤波器系数范数约束,可以提高 FIR 波束形成器的稳健性。

该方法和前面所有恒定主瓣响应波束形成器设计都有一个共同点——首先选择一个期望波束响应,然后使各子带波束响应逼近于该期望响应,从而使宽带波束具有近似恒定的主瓣响应。如何选择一个最优期望响应是一个关键。鄢社锋针对这个问题提出了基于最小主瓣差异的波束设计方法,如参考文献 10,该方法不需要预先选择参考波束,仅仅让各频率波束主瓣响应间的误差最小化。

【参考文献】

[9] Yan S, Ma Y. A unified framework for designing FIR filters with arbitrary magnitude and phase response[J]. Digital Signal Processing, 2004, 14(6):510-522.

[10] Yan S, Ma Y, Hou C. Optimal array pattern synthesis for broadband arrays[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 2007, 122(5):2686.

11. 模态阵列信号处理(与球面、圆面麦克风阵列相关)

前面的方法都是直接对各阵元接受数据进行波束形成,称为阵元域波束形成。模态阵列信号处理方法基于傅里叶声学原理,将球面阵、圆环阵等阵列接收的声场分解成若干阶正交的模态,于是可提取各阶模态进行声场重构,这类方法将声场传播、散射规律与信号处理紧密结合起来。

【傅里叶声学参考文献】

[11] Williams E G, Mann J A. Fourier Acoustics: Sound Radiation and Nearfield Acoustical Holography[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 2000, 108(4):1373-1373.

圆环阵也可以采用模态阵列信号处理方法,即将圆环阵接收声场分解为若干阶圆谐波,然后进行圆谐波域处理。Mathews 和 Zoltowski 利用均匀圆环阵进行相位模式波束形成估计目标方位,见文献 12。

高阶圆谐波相位模式处理在低频时稳健性较差,降低使用的圆谐波阶数可以提高稳健性,但这将降低其阵增益。

鄢社锋提出了圆谐波域优化波束形成方法。他采用圆谐波变换将圆环阵阵元域数据变换到圆谐波域,然后在圆谐波域进行波束形成。他利用圆谐波域与阵元域波束形成的等效性关系,推导了波束形成器的各性能参数在圆谐波域的表示,将阵元域波束优化设计方法推广应用到圆谐波域。基于该框架发现:圆环阵阵相位模式阵列处理等效于平面各向同性噪声场中的圆谐波域 MVDR 波束形成器,如参考文献 13。

具体内容可以参加本书第 11 章和第 12 章。

【参考文献】

[12] Mathews C P, Zoltowski, M.D. Eigenstructure techniques for 2-D angle estimation with uniform circular arrays[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1994, 42(9):2395-2407.

- [13] Yan, Shefeng. Optimal design of modal beamformers for circular arrays[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 2015, 138(4):2140-2151.

12. 目标方向估计

瑞利准则：对于位于基阵远场的两个点源，仅当它们的夹角大于基阵孔径倒数的时候，它们才能被分辨。

MUSIC、ESPRIT 算法和加权子空间拟合算法等，从理论上克服了方位分辨的瑞利准则，获得了超过常规方法的方位分辨能力。

早期的信号子空间处理方法是为窄带信号模型提出的。对于宽带数据，先将其分解为多个窄带分量，再针对各窄带数据进行子空间方位估计，最后对各窄带估计结果进行简单组合得到宽带方位估计，这便是非相干信号子空间（Incoherent Signal Subspace, ISS）方位估计方法。但是，ISS 方法不能够处理相干信号源问题。Wang 和 Kaveh 提出了相干信号子空间（coherent signal subspace, CSS）处理方法来处理相干源问题。该方法先将信号宽带数据分解为多个窄带分量，通过寻找聚焦矩阵，将各频率分量聚焦到参考频率，从而可以采用窄带子空间处理方法进行方位估计。CSS 方法相对于 ISS 方法具有脚底的检测与分辨信噪比门限和较小的方位估计均方根误差。但是 CSS 方法设计聚焦矩阵需要在真实目标附近预先估计目标方位，预估计方位偏差影响 CSS 方法的方位估计性能。

第二章：阵列信号处理数学模型

1.一般的阵列信号处理问题：将若干传感器布置在空间不同为止组成传感器阵列采集空间场数据，然后采用阵列信号处理算法对接收的阵列数据进行处理，获得有用信息。阵列信号处理的任务包括：从噪声和干扰中检测有用信号、估计信号波形、对接收的信号与噪声场进行空谱估计、估计信号到达放心、对信号源定位等。

2.波束形成的主要功能：形成基阵接收系统的方向性；进行空域滤波，抑制空间干扰与环境噪声，提高信噪比；估计信号到达方向；进行多目标分辨；为信号源定位创造条件；为目标识别提供信息等。

3.阵列的数学模型——基阵

基阵的组成结构影响基阵的空间特性，其包括两个部分：阵元排列几何形状和各阵元的方向性。基阵的几何形状可以分为三类：线阵、平面阵、体积阵。线阵和平面阵可以认为是体积阵的特例。

选定某一个空间参考点，以该空间参考点作为原点，第 m 个阵元位置可以用三维表示为

$$p_m = [p_{xm}, p_{ym}, p_{zm}]^T, m = 1, \dots, M \quad (2.1)$$

于是可构造基阵全部阵元位置矩阵为

$$P = [p_1, \dots, p_m, \dots, p_M] \quad (2.2)$$

为了不失一般性，长选取基阵的中心店为参考点。

4.阵列的数学模型——信号模型

首先考虑简单的 xoy 二维平面情况，假设有两个阵元，一个位于坐标原点（参考点），另一个位于 y 轴上，其坐标为(0,d)。以平民波点源信号从角度 θ 方向入射到基阵，如图 2.4.1 所示。在平面波假设情况下，各阵元接受信号都是入射信号的延迟信号。某阵元接收信号相对于参考点信号的延迟时间取决于该阵元与参考点距离在信号入射方向上的投影（径向距离，即式中的 $d \sin \theta$ ）和信号传播速度，假设信号传播速度为 c ，可以计算得到位于(0,d)的阵元接收到的信号相比于参考点信号的时间延迟为

$$\tau(\theta) = -d \sin \theta / c \quad (2.3)$$

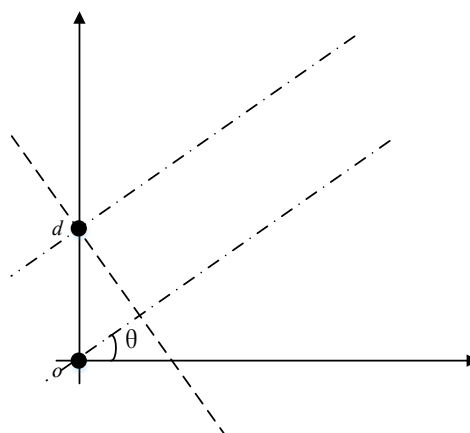


图 2.4.1 二维信号模型

在三维上来说，定义空间球面空间如图 2.4.2，其中 θ 和 ϕ 分别是水平方位角和垂直俯

仰角。假设以平面波点源信号从球面角 $\Omega = (\theta, \phi)$ 入射到基阵，对于 M 元体积阵，为了计算信号到达各阵元接受信号相对于参考点的传播时间延迟，需要先计算各阵元相对于参考点的径向距离。为此，定义信号传播方向的单位向量为

$$\mathbf{v}(\Omega) = -[\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi]^T \quad (2.4)$$

式中，负号由于信号传播方向与信号源相对于基阵所在的方向相反造成的。某阵元相对于坐标原点的径向距离可以通过其坐标向量与信号方向单位向量的内积计算得到，于是信号到达第 m 个阵元相对于参考点的时间延迟可以表示为

$$\tau_m(\Omega) = \mathbf{v}^T(\Omega) \mathbf{p}_m / c \quad (2.5)$$

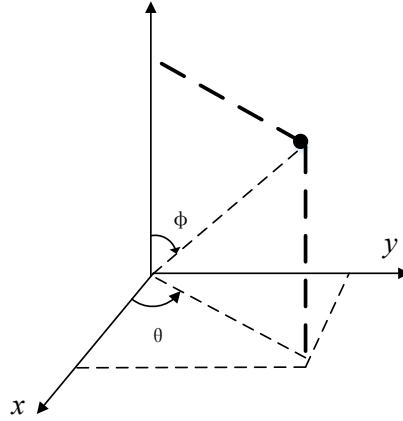


图 2.4.2 三维坐标系

假设在参考点观察的信号波形为 $s(t)$ ，则经过传播延迟，在第 m 个阵元位置观察的信号波形为

$$s_m(t) = s[t - \tau_m(\Omega)], m = 1, \dots, M \quad (2.6)$$

进行傅里叶变换得到

$$S_m(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s[t - \tau_m(\Omega)] e^{-i\omega t} dt = S(\omega) e^{-i\omega \tau_m(\Omega)} \quad (2.7)$$

定义波数向量 \mathbf{k} 为

$$\mathbf{k}(\Omega) \triangleq (\omega / c) \mathbf{v}(\Omega) = k \mathbf{v}(\Omega) \quad (2.8)$$

式中最右侧 k 表示波数值， λ 表示信号波长，波数向量 \mathbf{k} 是信号频率 ω 与方向 Ω 的函数，其方向与信号方向向量 \mathbf{v} 同向，且 $|\mathbf{k}(\Omega)| = k$ 。

由于

$$\begin{aligned} \tau_m(\Omega) &= \mathbf{v}^T(\Omega) \mathbf{p}_m / c \xrightarrow{\text{同乘}\omega} \omega \tau_m(\Omega) = \frac{\omega}{c} \mathbf{v}^T(\Omega) \mathbf{p}_m \\ &= k \mathbf{v}^T(\Omega) \mathbf{p}_m = \mathbf{k}^T(\Omega) \mathbf{p}_m \end{aligned} \quad (2.9)$$

所以

$$S_m(\omega) = S(\omega) \exp(-i \mathbf{k}^T \mathbf{p}_m) \quad (2.10)$$

将基阵各阵元接收信号写成一个 $M \times 1$ 列向量的形式为

$$\mathbf{x}_s(t) = [s_1(t), \dots, s_m(t), \dots, s_M(t)]^T \quad (2.11)$$

则可知基阵接收信号向量 $\mathbf{x}_s(t)$ 的频谱可以表示为一个 $M \times 1$ 的列向量

$$\mathbf{X}_s(\omega) = \begin{bmatrix} S_1(\omega) \\ \vdots \\ S_m(\omega) \\ \vdots \\ S_M(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{p}_1) \\ \vdots \\ \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{p}_m) \\ \vdots \\ \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{p}_M) \end{bmatrix} S(\omega) \quad (2.12)$$

我们可以将

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(\mathbf{k}, p) &\triangleq [p_1(\mathbf{k}, p_1), \dots, p_m(\mathbf{k}, p_m), \dots, p_M(\mathbf{k}, p_M)]^T \\ &\triangleq [\exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{p}_1), \dots, \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{p}_m), \dots, \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{p}_M)]^T \end{aligned} \quad (2.13)$$

定义为**基阵响应向量** (Array Response Vector)。由于基阵响应向量是方向的函数，很多场合也称为**方向响应向量**。基阵各方位的方向响应向量的集合称为**阵列流形向量** (Array Manifold Vector)。

显然基阵的方向响应向量应满足

$$\|\mathbf{p}(\mathbf{k})\|^2 = \mathbf{p}(\mathbf{k})^H \mathbf{p}(\mathbf{k}) = M \quad (2.14)$$

将基阵响应向量的定义式带入基阵接收信号向量的定义式，可以得到基阵接收信号向量频谱表示为

$$\mathbf{X}_s(\omega) = \mathbf{p}(\mathbf{k}) S(\omega) \quad (2.15)$$

其互谱矩阵是一个 $M \times M$ 的矩阵，表示为

$$\mathbf{S}_{xs}(\omega) = E[\mathbf{X}_s(\omega) \mathbf{X}_s^H(\omega)] = \mathbf{p}(\mathbf{k}) E[|S(\omega)|^2] \mathbf{p}^H(\mathbf{k}) \quad (2.16)$$

假设信号功率谱可以表示为

$$S_s(\omega) = E[|S(\omega)|^2] \quad (2.17)$$

则信号互谱矩阵式可以表示为

$$\mathbf{S}_{xs}(\omega) = \mathbf{p}(\mathbf{k}) S_s(\omega) \mathbf{p}^H(\mathbf{k}) \quad (2.18)$$

5.阵列的数学模型——噪声场模型

我们可以将基阵各阵元接收的噪声写成 $M \times 1$ 的噪声向量 $\mathbf{n}(t)$ ，即

$$\mathbf{n}(t) = [n_1(t), \dots, n_m(t), \dots, n_M(t)]^T \quad (2.19)$$

若 $\mathbf{n}(t)$ 的频谱用 $\mathbf{N}(\omega)$ 表示，则基阵接收噪声的 $M \times M$ 的互谱矩阵为

$$\mathbf{S}_n(\omega) = E[\mathbf{N}(\omega) \mathbf{N}^H(\omega)] \quad (2.20)$$

定义**归一化噪声互谱矩阵**为 $\rho \mathbf{n}(\omega)$ ，假设噪声信号功率为 $S_n(\omega)$ ，则噪声互谱矩阵可以写为

$$\mathbf{S}_n(\omega) = S_n(\omega) \rho_n(\omega) \quad (2.21)$$

高斯白噪声是我们经常假设的一种特殊噪声，在该噪声场中，空间各点接收的噪声互不

相关，即噪声的归一化互谱矩阵为单位矩阵

$$\rho_{nw}(\omega) = I \quad (2.22)$$

接下来考虑另一种特殊的噪声场——空间均匀各向同性噪声场。均匀各向同性噪声场可以认为基阵各阵元接收到的噪声是由空间各方向到达的大量平面波叠加而成的，这些噪声不仅是均匀分布，还是非相关的。由于噪声具有各向同性，我们可以通过计算出空间均匀噪声场中任意两点间的**噪声相关性**和**两点间的距离**关系来描述该噪声场。

首先考虑只有单个平面波到达基阵的情况。假设空间任意两点坐标分别为 \mathbf{p}_m 和 $\mathbf{p}_{m'}$ ，坐标原点接收平面波的频谱是 $S(\omega)$ ，则可知 \mathbf{p}_m 和 $\mathbf{p}_{m'}$ 接收到的该平面波的频谱分别是

$$\begin{aligned} S_m(\omega) &= S(\omega) \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{p}_m) \\ S_{m'}(\omega) &= S(\omega) \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{p}_{m'}) \end{aligned} \quad (2.23)$$

于是可以得到两点间平面波的互相关为

$$E[S_m S_{m'}^*] = E[|S(\omega)|^2] \exp[-i\mathbf{k}^T (\mathbf{p}_m - \mathbf{p}_{m'})] \quad (2.24)$$

由于空间均匀各向同性噪声场是由原场均匀分布的大量非相关平面波从空间个方向入射叠加产生的，所以可以将上式在球面上求积分来计算从空间个方向到达两阵元的平面波叠加噪声的互相关，于是两阵元接收噪声的相关性可以表示为

$$\zeta = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} E[|S(\omega)|^2] \exp[-i\mathbf{k}^T (\mathbf{p}_m - \mathbf{p}_{m'})] d\theta \sin\phi d\phi \quad (2.25)$$

显然因为对称性，空间均匀各向同性噪声场中任意两点接收噪声的相关性只与两点间距离有关，与亮点的方位关系及坐标系统都无关。也就是说，**只要我们保持两阵元间距不变，通过重新选择坐标原点和旋转坐标方向，那么计算得到的两点间的噪声相关性就不会发生改变**。我们将原来第一个点 \mathbf{p}_m 设置为坐标原点，而原来的 $\mathbf{p}_{m'}$ 点位于 z 轴上，其坐标定义为 $[0,0,d]^T$ ，这里 d 就是它们之间的距离，也就是

$$d = |\mathbf{p}_m - \mathbf{p}_{m'}| \quad (2.26)$$

于是，前面的互相关和相关性就可以分别表示为

$$E[S_m S_{m'}^*] = E[|S(\omega)|^2] \exp[-ikd \cos\phi] \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \zeta &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} E[|S(\omega)|^2] \exp[-ikd \cos\phi] d\theta \sin\phi d\phi \\ &= 2\pi E[|S(\omega)|^2] \int_0^\pi \exp(-ikd \cos\phi) \sin\phi d\phi \end{aligned} \quad (2.28)$$

令 $\alpha = \cos\phi$ ，则上面中积分部分可以表示为

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \exp(-ikd \cos\phi) \sin\phi d\phi &= \int_{-1}^1 \exp(-ikd \alpha) d\alpha \\ &= \frac{2 \sin(kd)}{kd} = 2 \operatorname{sinc}(kd) \end{aligned} \quad (2.29)$$

式中， $\operatorname{sinc}(a) = \sin(a)/a$ 。将上式带入上式，可以得到

$$\zeta = 4\pi E[|S(\omega)|^2] \operatorname{sinc}(kd) \quad (2.30)$$

我们易知入射到基阵的大量非相关平面波噪声的功率（非通过上面推导出来的）为

$$S_n(\omega) = 4\pi E[|S(\omega)|^2] \quad (2.31)$$

那么就可以得到空间均匀各向同性噪声场中任意间距为 d 的两点间的噪声相关系数为

$$\rho(\omega, d) = \sin c(kd) = \sin c(2\pi d / \lambda) \quad (2.32)$$

由此我们就可以构建空间均匀各向同性噪声场归一化噪声互谱矩阵 $\rho_{niso}(\omega)$ ，其第 (m, m') 项为

$$[\rho_{niso}(\omega)]_{m, m'} = \rho(\omega, d_{m, m'}) = \sin c(kd_{m, m'})$$

我们观察一下 $\text{sinc}(t)$ 随 t 变化的函数值（如图 2.5.1），可以发现 $\text{sinc}(t)$ 在 t 为 π 的非零整数倍时值为 0。由式(2.32)我们可以知道，当 d/λ 为 $1/2$ 的非零整数倍时， $\rho=0$ 。故**阵元的间距为半波长的整数倍时，可以认为各阵元接收的空间均匀噪声是不相关的。**

噪声可以分解为白噪声成分和非白噪声成分，于是噪声互谱矩阵可以分解为

$$\mathbf{S}_n(\omega) = \mathbf{S}_w(\omega) + \mathbf{S}_c(\omega) \quad (2.33)$$

式中，等号右侧分别是白噪声与非白噪声互谱矩阵。对应的噪声功率可以表示为

$$S_n(\omega) = S_w(\omega) + \text{tr}[\mathbf{S}_c(\omega)] / M \quad (2.34)$$

式中， $\text{tr}(-)$ 表示求矩阵的迹，即矩阵对角元素之和。

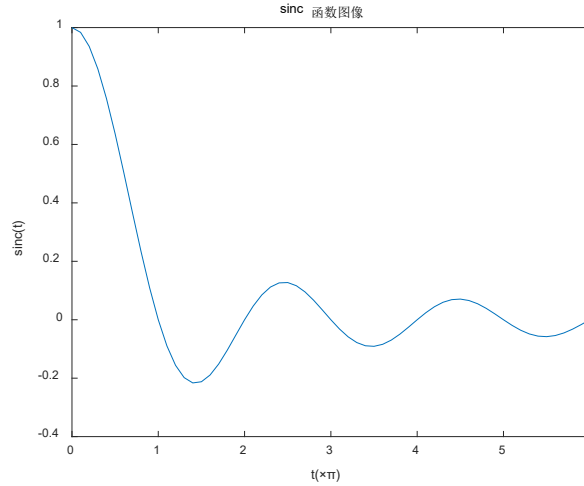


图 2.5.1 sinc 函数图像

6.阵列的数学模型——基阵接收数据模型

基阵接收的数据包括期望信号、干扰与噪声三部分。假设干扰为平面波干扰。假设期望信号到达方向为 Ω_0 ， D 个干扰到达方向分别为 $\Omega_1, \dots, \Omega_d, \dots, \Omega_D$ 。令下式是信号与干扰到达的方位集，则

$$\Omega_d \in \Theta_D, d = 0, 1, \dots, D \quad (2.35)$$

于是第 m 个阵元接收到的数据可以写为

$$x_m(t) = \beta s_0[t - \tau_m(\Omega_0)] + \sum_{d=1}^D s_d[t - \tau_m(\Omega_d)] + n_m(t), m = 1, \dots, M \quad (2.36)$$

式中， $s_d(t)$ 是在空间参考点测量的 $D+1$ 个信号波形，其中 $d=0$ 对应于期望信号， $d=1, \dots, D$ 对应于 D 个干扰； $\beta=0$ 或 1 ，用于表示期望信号是否包含在接收信号中。

通过傅里叶变换，上式变为

$$X_m(\omega) = \beta S_0(\omega) e^{-i\omega\tau_m(\Omega_0)} + \sum_{d=1}^D S_d(\omega) e^{-i\omega\tau_m(\Omega_d)} + N_m(\omega), m=1, \dots, M \quad (2.37)$$

上面都是一个阵元的数据，对于 M 个阵元来说，其形式就是

$$\mathbf{x}(t) = \beta \mathbf{x}_s(t) + \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{n}(t) \quad (2.38)$$

式中等号右边三项分别是统计独立的期望信号、干扰、噪声的向量；另外

$\mathbf{x}(t) = [x_1(t), \dots, x_m(t), \dots, x_M(t)]^T$ 。然后把上式也弄到频域之后就是

$$\mathbf{X}(\omega) = \beta \mathbf{p}(\mathbf{k}_0) S_0(\omega) + \sum_{d=1}^D \mathbf{p}(\mathbf{k}_d) S_d(\omega) + \mathbf{N}(\omega) \quad (2.39)$$

式中， $\mathbf{X}(\omega) = [X_1(\omega), \dots, X_m(\omega), \dots, X_M(\omega)]^T$ ； $\mathbf{p}(\mathbf{k}_d)$ 表示期望信号与干扰方向的方向

响应向量； $\mathbf{N}(\omega) = [N_1(\omega), \dots, N_m(\omega), \dots, N_M(\omega)]^T$ 。

于是基阵接收数据的 M×M 互谱矩阵可以表示为

$$\mathbf{S}_x(\omega) = E[\mathbf{X}(\omega) \mathbf{X}^H(\omega)] \quad (2.40)$$

当信号、干扰与噪声互不相关的时候，接收数据互谱矩阵可以表示为信号、干扰、噪声的互谱矩阵之和。

$$\mathbf{S}_x(\omega) = \beta \mathbf{S}_{xs}(\omega) + \mathbf{S}_{xi}(\omega) + \mathbf{S}_n(\omega) \quad (2.41)$$

7. 阵列的数学模型——快拍数据模型

(1) 频域快拍模型

宽带波束形成在频域实现的大体流程为：首先将传感器阵列输出向量通过傅里叶变换从时域转换到频域，然后对频域向量进行窄带波束形成得到标量频域函数，最后对标量频域函数进行傅里叶逆变换获得标量的时域波形。在第一步中产生的一组复向量被称为频域快拍。

为了产生上述频域向量，首先将阵列数据 $\mathbf{x}(t)$ 的全部观察时间 T 分成彼此互相连接的 N 个时间段，每段时间长度为 ΔT 。将各段编号为 $n=1, \dots, N$ ，第 n 段的持续时间就是 $(n-1)\Delta T \leq t \leq n\Delta T$ 。假设阵列数据是带通信号，中心频率是 f_c ，对应角频率 $\omega_c = 2\pi f_c$ ，假设信号具有有限频带，即信号频率 f 满足

$$|f - f_c| \leq B_s / 2 \quad (2.42)$$

式中， B_s 代表信号带宽。

下面对时间长度 ΔT 分析一下选择的要求。我们考虑信号通过基阵的实际，定义 $\Delta T_{mm'}(\Omega)$ 为信号从方向 Ω 入射到基阵时到达第 m 个和 m' 个阵元的相对传播时间延迟，则从任何方向到达的信号通过该基阵任意两阵元的最大传播时间定义为

$$\Delta T_{\max} \triangleq \max_{m, m'=1, \dots, M; \Omega} \{\Delta T_{mm'}(\Omega)\} \quad (2.43)$$

所以对于任意阵元和任意信号到达方向，传播的时延 $\tau_m(\Omega)$ 肯定满足

$$|\tau_m(\Omega)| \leq \Delta T_m \quad (2.44)$$

然后为了保证信号能够传播每个阵元，且各个阵元能够同步采集到的空间信号场，那么每段数据的时间长度肯定远远大于任意两阵元的传播时间。也就是说必须满足

$$\Delta T \gg \Delta T_{\max} \quad (2.45)$$

以上是第一个要求。

然后在考虑时间长度 ΔT 由输入信号带宽与其频谱决定。考虑时间段 $(0, \Delta T)$ 内的 $M \times 1$ 输入数据向量，将其进行傅里叶变换得到

$$X_{\Delta T}(\omega_k) = \frac{1}{\sqrt{\Delta T}} \int_0^{\Delta T} \mathbf{x}(t) \exp[-i(\omega_c + k\omega_{\Delta})t] dt, k = 0, 1, 2, \dots, K \quad (2.46)$$

式中， $\omega_{\Delta} = 2\pi / \Delta T$ 。当然实际中我们使用 FFT 变换的，将(2.46)的数据记作 $X(\omega_k, n)$ ，那么就可以将这个写作类似于(2.39)的形式为

$$X(\omega_k, n) = \beta p(k_0) S_0(\omega_k, n) + \sum_{d=1}^D p(k_d) S_d(\omega_k, n) + N(\omega_k, n) \quad (2.47)$$

这就是频域快拍数据模型。同样，我们依旧可以参照(2.40)定义 $S_{x\Delta T}(\omega_k)$ 。事实上，显然有

$$\lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \{S_{x\Delta T}(\omega_k)\} = S_x(\omega_k) \quad (2.48)$$

也就是(2.41)。

总的来说，当 ΔT 为有限值的时候， $S_{x\Delta T}(\omega_k)$ 可以用于近似估计互谱矩阵 $S_x(\omega_k)$ 【在 ΔT 为无穷大，也就是信号的时间长度无穷长的时候，是相等】。一般来说，若信号带宽时间积满足

$$B_s \cdot \Delta T \geq 16 \quad (2.49)$$

且信号频谱在频率 ω_k 上下 $2\omega_{\Delta} \sim 3\omega_{\Delta}$ 范围近似为恒值的情况下， $S_{x\Delta T}(\omega_k)$ 与 $S_x(\omega_k)$ 比较相似。

(2) 窄带时域快拍模型

当信号带宽和通过基阵的最大传播时间积满足

$$B_s \cdot \Delta_{\max} T \ll 1 \quad (2.50)$$

时，对应的信号为窄带信号。

【以上是对于这里面窄带信号的定义，也可以拓展到麦克风阵列里面，一定要记得】

这样我们可以得到两个结论：

- ①当信号不满足(2.50)所示的条件的时候，必须使用（1）中所述的频域快拍模型；
- ②当信号满足(2.50)，即为窄带信号的时候，它可以用上面的模型，但是它更适合用下面的窄带时域快拍模型。

首先考虑单平面波输入情况。对于带通窄带信号来说，在参考点接收的信号波形为

$$s(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re}\{\tilde{s}(t) \exp(i\omega_c t)\} \quad (2.51)$$

式中， $\tilde{s}(t)$ 表示信号包络，它是一个**零均值复高斯随机过程标量**； ω_c 表示载波角频率。响应的，第 m 个阵元接收信号波形就是

$$s_m(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re}\{\tilde{s}_m(t) \exp(i\omega_c t_m)\} = \sqrt{2} \operatorname{Re}\{\tilde{s}(t - \tau_m) \exp[i\omega_c(t - \tau_m)]\} \quad (2.52)$$

由于假设为窄带信号，所以复包络在短时间内近似不变，也就是说实际上

$$\tilde{s}(t - \tau_m) \approx \tilde{s}(t) \quad (2.53)$$

将(2.53)代入到(2.52)可以得到

$$\begin{aligned} s_m(t) &\approx \sqrt{2} \operatorname{Re}\{\tilde{s}(t) \exp[i\omega_c(t - \tau_m)]\} \\ &= \sqrt{2} \operatorname{Re}\{\tilde{s}(t) \exp(-i\omega_c \tau_m) \exp(i\omega_c t)\} \end{aligned} \quad (2.54)$$

对比(2.52)和(2.54)可以得到

$$\tilde{s}_m(t) = \tilde{s}(t) \exp(-i\omega_c \tau_m) \quad (2.55)$$

我们可以发现指数项正好是方向响应向量的第 m 个元素，所以我们可以得到

$$\tilde{\mathbf{x}}_s(t) = \mathbf{p}(\mathbf{k}) \tilde{s}(t) \quad (2.56)$$

式中， $\tilde{\mathbf{x}}_s(t) = [\tilde{s}_1(t), \dots, \tilde{s}_m(t), \dots, \tilde{s}_M(t)]$ 。

于是，我们通过式(2.56)得到 M 个信号的复包络组成的向量的协方差矩阵为

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_s} = \mathbf{p}(\mathbf{k}) E[\tilde{s}(t) \tilde{s}^*(t)] \mathbf{p}^H(\mathbf{k}) = \sigma_s^2 \mathbf{p}(\mathbf{k}) \mathbf{p}^H(\mathbf{k}) \quad (2.57)$$

式中 σ_s^2 是信号功率。我们可以参照(2.38)写出在当前情况下存在信号、干扰与噪声的情况

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \beta \mathbf{p}(\mathbf{k}_0) \tilde{s}_0(t) + \sum_{d=1}^D \mathbf{p}(\mathbf{k}_d) \tilde{s}_d(t) + \tilde{\mathbf{n}}(t) \quad (2.58)$$

对应的，协方差矩阵为

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}} = \beta \sigma_0^2 \mathbf{p}(\mathbf{k}_0) \mathbf{p}^H(\mathbf{k}_0) + \sum_{d=1}^D \sigma_d^2 \mathbf{p}(\mathbf{k}_d) \mathbf{p}^H(\mathbf{k}_d) + \sigma_n^2 \boldsymbol{\rho}_n \quad (2.59)$$

由此我们可以知道信号功率为 σ_0^2 ，干扰功率为

$$\sigma_i^2 = \sum_{d=1}^D \sigma_d^2 \quad (2.60)$$

如果我们假设信号的包络的频带限制为 $-B_s/2 \leq f \leq B_s/2$ ，则对阵列数据进行每 $1/B_s$ 秒采样可以获得时域快拍模型

$$\tilde{\mathbf{x}}(n) = \tilde{\mathbf{x}}(n) \big|_{t=n \cdot (1/B_s)}, n = 1, \dots, N \quad (2.61)$$

这个时候我们就可以重写推广到存在信号、干扰与噪声的情况的公式、协方差矩阵公式，然后我们可以得到

$$\mathbf{R}_x(n) = \mathbf{S}_{x\Delta T} \cdot \mathbf{B}_s \quad (2.62)$$

从上式就可以看出，时域协方差矩阵只比频域协方差矩阵多乘了一个常数量。所以说，对于窄带数据，其**频域快拍模型与时域快拍模型是等效的**。

所以，我们可以得到最后两个结果：

$$\mathbf{x}(n) = \beta \mathbf{p}(\mathbf{k}_0) s_0(n) + \sum_{d=1}^D \mathbf{p}(\mathbf{k}_d) s_d(n) + \mathbf{n}(n) \quad (2.63)$$

对应协方差矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_x(n) &= \beta \sigma_0^2 \mathbf{p}(\mathbf{k}_0) \mathbf{p}^H(\mathbf{k}_0) + \sum_{d=1}^D \sigma_d^2 \mathbf{p}(\mathbf{k}_d) \mathbf{p}^H(\mathbf{k}_d) + \sigma_n^2 \mathbf{I}_n \\ &= \beta \mathbf{R}_s + \mathbf{R}_i + \mathbf{R}_n \end{aligned} \quad (2.64)$$

上式中，分别是阵列信号、干扰、噪声的协方差矩阵。

假设信号是**各态历经**的，根据这个性质，协方差矩阵就可以采用一段快拍样本估计，也就是说

$$\tilde{\mathbf{R}}_x = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [\mathbf{x}(n) \mathbf{x}^H(n)] \quad (2.65)$$

式中，N 是使用的快拍数。随着使用的快拍数增加， $\tilde{\mathbf{R}}_x$ 就越越来越接近真正的协方差矩阵 \mathbf{R}_x 。所以说

$$\mathbf{R}_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{R}}_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [\mathbf{x}(n) \mathbf{x}^H(n)] \quad (2.66)$$

对于(2.63)，我们假设 $\beta=1$ ，则可以将它写成矩阵形式，如下

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n) &= [\mathbf{p}(\mathbf{k}_0), \mathbf{p}(\mathbf{k}_1), \dots, \mathbf{p}(\mathbf{k}_D)] \begin{bmatrix} s_0(n) \\ s_1(n) \\ \vdots \\ s_D(n) \end{bmatrix} + \mathbf{n}(n) \\ &= \mathbf{P}(\mathbf{K}) \mathbf{s}(n) + \mathbf{n}(n) \end{aligned} \quad (2.67)$$

式中， $\mathbf{P}(\mathbf{K})$ 是阵列流形矩阵【**基阵响应向量又称作方向响应向量，基阵各方位的方向响应向量的集合是阵列的流形向量，流形向量是对于一个点源来说的，这里是一系列点源集合，所以这里是阵列流形矩阵**】。

8.波束形成

(1) 波束形成表达形式

我们知道频域表述的各通道数据经过滤波后求和的波束输出为

$$Y(\omega) = \sum_{m=1}^M H_m(\omega) X_m(\omega) = \mathbf{H}^T(\omega) \mathbf{X}(\omega) \quad (2.68)$$

对于延迟求和波束形成器来说，第 m 个传输函数为

$$H_{cm}(\omega) = e^{i\omega\tau_m(\Omega_0)} / M = p_m^*(\mathbf{k}) / M \quad (2.69)$$

其中，下标 c 表示延迟求和波束形成器， Ω_0 是信号方向。将上式写成向量形式则为

$$\mathbf{H}_{cm}(\omega) = \mathbf{p}_m^*(\mathbf{k}) / M \quad (2.70)$$

我们这个时候假设阵列接收数据为一个从 Ω_0 方向入射的单位功率的单频（频率为 ω_0 ）平面波信号，也就是说此时的信号 $s(t) = e^{i\omega_0 t}$, $S(\omega_0) = 1$ ，那么由(2.39)可以得到此时

$$\mathbf{X}(\omega_0) = \mathbf{p}(\mathbf{k}_0) \quad (2.71)$$

代入(2.68)得到

$$\mathbf{Y}(\omega) = \mathbf{H}^T(\omega) \mathbf{p}(\mathbf{k}) \quad (2.72)$$

于是我们可以将上式定义为**基阵的频率-波数响应函数**（Frequency-wavenumber response function），它是信号角频率和波数 \mathbf{k} 的函数。**这个函数可以用来考察波束形成器的空间响应特性，用于表示基阵对频率为 ω 、波数为 \mathbf{k} 的输入信号的复增益。**

基阵的频率-波数响应函数随方位的变化称为波束响应（beam response, beam pattern 或 array pattern），即

$$B(\omega, \Omega) \triangleq \mathbf{Y}(\omega, \mathbf{k})|_{\mathbf{k}=(\omega/c)\mathbf{v}(\Omega)} = \mathbf{H}^T(\omega) \mathbf{p}(\omega, \Omega) \quad (2.73)$$

式中的 \mathbf{p} 是以频率与方位作为自变量的阵列流形向量，即

$$\mathbf{p}(\omega, \Omega) = \mathbf{p}(\mathbf{k})|_{\mathbf{k}=(\omega/c)\mathbf{v}(\Omega)}, \Omega \in \Theta \quad (2.74)$$

这里面 Θ 表示所有可能的信号到达方位的集合，称为观察视区（Field Of View, FOV）。对于三维空间来说，FOV 是所有空间角；对于屏幕来说，此时垂直角为 90° ，空间角位于为水平面 360° 范围内，即 FOV 为 $[-180^\circ, 180^\circ]$ ；对于线阵来说，FOV 为 $[-90^\circ, 90^\circ]$ 。后面介绍都以平面来说。

上面是理想情况，对于实际情况下的方向响应向量在这里不予给出，详见书中 P34 式 (2.79)所述。

（2）窄带波束形成

我们知道宽带数据可以通过傅里叶变换变成频域窄带数据，然后进行窄带波束形成，而窄带数据的频域快拍模型与时域快拍模型是等价的（只差一个常数），所以下面采用窄带时域快拍模型来说明问题。

假设窄带数据中心频率为 f_c ，对应的角频率自然是 $\omega_c = 2\pi f_c$ 。由于窄带信号的时延可以近似为相移，于是在窄带情况下的延迟求和方法就可以用相移求和来实现。更一般情况下，需要对各阵元数据同时进行幅度加权和相移。于是，在窄带情况下，可以采用一个复数加权代替线性时不变滤波，如下所示

$$\mathbf{w}^H = [w_1^*, w_2^*, \dots, w_M^*] \quad (2.75)$$

式中将权向量写成共轭形式是为了表述方便，我们将上式称为**加权向量**。

在窄带时域快拍模型下，对数据进行加权求和，得到波束形成的输出快拍为

$$y(n) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}(n) \quad (2.76)$$

窄带波束形成器的设计问题其实就是设计加权向量 w 。对应于式(2.70)，窄带延时求和波束形成器的加权向量为

$$w_c = p(\Omega_0) / M \quad (2.77)$$

(3) 窄带波束形成器的性能参数

①波束响应

波束响应是指**波束形成器对某方向单位功率平面波信号的响应**，它可以用来考察波束形成器的空间响应特性，表示基阵对于不同方位到达信号的复增益。

窄带情况下，我们可以省略频率宗量 ω ，直接用 $p(\Omega_0)$ 表示阵列流形向量。所以(2.73)所示系统可以写为

$$B(\omega, \Omega) = w^T p(\Omega) \quad (2.78)$$

可以看出，波束响应只与加权向量和方向响应向量有关系，而与该放下是否存在信号无关系。由于真实方向响应向量 \tilde{p} 往往是未知，实际的波束响应往往是观察不到的。因此，经常用假想的方向响应向量 \bar{p} 来代替 \tilde{p} ，所以上式就可以写为

$$\bar{B} = w^T \bar{p} \quad (2.79)$$

上式被称为假想波束响应，或者是名义上的波束响应。假设真实值与假想值之间的误差为 p_Δ ，那么可以得到**波束响应估计误差**为

$$w^H p_\Delta \quad (2.80)$$

很多时候，我们将波束响应取对数，其单位为 dB，也就是变成

$$B_{dB}(\Omega) = 20 \lg |B(\Omega)| \quad (2.81)$$

对于确定的波束形成加权矢量，我们可以画出波束响应能量相对于方位的函数图，也就是波束图。它可以用来评估其他方向干扰与噪声对感兴趣方向信号产生的影响大小。

如图 2.8.1 所示，波束形成器对某个方向信号响应最大，那么这个就是主峰值方向，这个方向被称为波束主轴方向（Main Response Axis, MRA 或 Observe direction），用

$$\Omega_o(\theta_o, \phi_o) \quad (2.82)$$

表示。波束观察方向一般选取为期望信号方向。波束主瓣(mainlobe)就是与主轴最近的两个零点之间的部分；非主瓣的波束部分是波束旁瓣(sidelobe)。一般来说，**基阵的孔径（基阵尺寸与波长之比）越大，主瓣宽度越小**。【这句话一定一定要记住】

- I. 波束两个零点间束宽 BW_{NN} ：波束主瓣峰值左右第一次出现零点的两方向夹角。
- II. 半功率束宽（-3dB 束宽） BW_{3dB} ：波束主瓣功率下降到-3dB 时的两方向间夹角。
- III. 旁瓣级束宽（ BW_{SL} ）：波束主瓣下降到与旁瓣级相等的时候所对应的的两个方向之间的夹角。

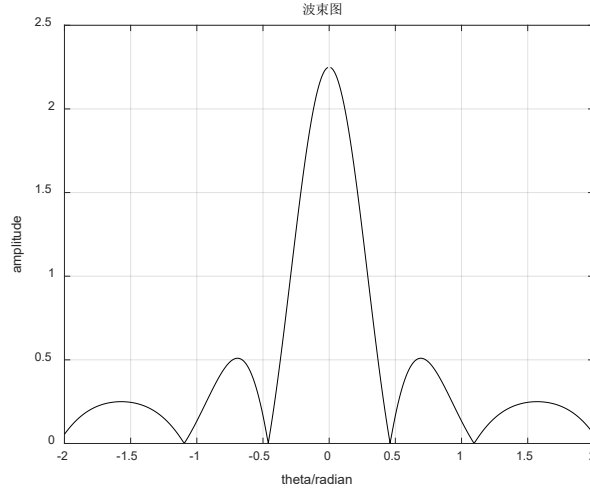


图 2.8.1 波束图实例

在我所学习的书里面，将波束主瓣区域和波束旁瓣区域分别定义为了

$$\begin{aligned}\Theta_{ML} &\triangleq \{\theta \mid \theta_{SL}^- < \theta < \theta_{SL}^+, \theta \in \Theta\} \\ \Theta_{SL} &\triangleq \{\theta \mid \theta \notin \Theta_{ML}\}\end{aligned}\quad (2.83)$$

【一定注意，这里面主瓣区域所覆盖的范围和我们平时所说的是不一样的，平时所说是观察方向两侧第一个零点之间的区域，而这里只的是旁瓣级束宽之间的区域。】

用对数表示的最高旁瓣值与期望方向主瓣值之差称为**旁瓣级 (sidelobe level)**，用 SLL 表示。【这个参数也很重要】，即

$$SLL = B_{dB}(\theta_{SL}^+) - B_{dB}(\theta_o)(dB) \quad (2.84)$$

②阵增益

考虑存在期望信号、干扰与噪声的情况下，期望方向的下标表示的还是跟前面的一样。我们假设信号、干扰与噪声互不相关，快拍数据的协方差矩阵为(2.59)，干扰功率为(2.60)。那么，

I 信噪比 (SNR)：信号与噪声功率之比：

$$SNR = \sigma_s^2 / \sigma_n^2 \quad (2.85)$$

阵元接受数据是波叔输入数据，因此波束输入信噪比等同于上式。

II 干扰比 (INR)：干扰与噪声功率比

$$INR = \sigma_i^2 / \sigma_n^2 \quad (2.86)$$

III 信干噪比 (SINR)：阵元接收数据信干噪比，实际上是输入功率与（干扰功率、噪声功率之和）的比值

$$SINR = \sigma_s^2 / \sigma_i^2 + \sigma_n^2 \quad (2.87)$$

将快拍数据模型带入前面的(2.76)可以得到

$$y = \mathbf{w}^H \mathbf{x} = \mathbf{w}^H \mathbf{p}_s s_0 + \sum_{d=1}^D \mathbf{w}^H \mathbf{p}_d s_d + \mathbf{w}^H \mathbf{n} \quad (2.88)$$

于是波束输出的功率为

$$\begin{aligned}\sigma_y^2 &= E\{yy^*\} = \sigma_s^2 \mathbf{w}^H \mathbf{p}_s \mathbf{p}_s^H \mathbf{w} + \sum_{d=1}^D \sigma_d^2 \mathbf{w}^H \mathbf{p}_d \mathbf{p}_d^H \mathbf{w} + \sigma_n^2 \mathbf{w}^H \boldsymbol{\rho}_n \mathbf{w} \\ &= \sigma_{ys}^2 + \sigma_{yi}^2 + \sigma_{yn}^2\end{aligned}\quad (2.89)$$

波束形成器的输出信干噪比定义为

$$SINR_{out} = \frac{\sigma_{ys}^2}{\sigma_{yi}^2 + \sigma_{yn}^2} = \frac{\sigma_s^2 \mathbf{w}^H \mathbf{p}_s \mathbf{p}_s^H \mathbf{w}}{\sigma_{i+n}^2 \mathbf{w}^H \boldsymbol{\rho}_{i+n} \mathbf{w}} \quad (2.90)$$

当不存在干扰的时候，输出信干噪比简化为信噪比

$$SINR_{out} = \frac{\sigma_s^2 |\mathbf{w}^H \mathbf{p}_s|^2}{\sigma_n^2 \mathbf{w}^H \boldsymbol{\rho}_n \mathbf{w}} \quad (2.91)$$

阵增益定义为博输输出信干噪比与输入信干噪比之比

$$G = \frac{SINR_{out}}{SINR_{in}} = \frac{|\mathbf{w}^H \mathbf{p}_s|^2}{\mathbf{w}^H \boldsymbol{\rho}_{n+i} \mathbf{w}} \quad (2.92)$$

一般使用的话，都要取对数

$$G_{dB} = 10 \lg G(dB) \quad (2.93)$$

如果波束形成器加权向量 \mathbf{w} 乘一个标量，阵增益仍保持不变。因此，在波束设计过程中，一般对加权向量进行归一化，让博输输出信号功率谱与输入信号功率谱保持不变，即让

$$\sigma_{ys}^2 = \sigma_s^2 \quad (2.94)$$

结合式(2.89)即

$$\sigma_s^2 \mathbf{w}^H \mathbf{p}_s \mathbf{p}_s^H \mathbf{w} = \sigma_s^2 \quad (2.95)$$

也就是说

$$|\mathbf{w}^H \mathbf{p}_s| = 1 \quad (2.96)$$

因为当 \mathbf{w} 旋转任意角度的时候，波束输出功率都保持不变，因此可以通过宣传 \mathbf{w} 使上式左侧是正实数，且波束输出功率保持不变。所以可以取

$$\mathbf{w}^H \mathbf{p}_s = 1 \quad (2.97)$$

该约束称为**无失真（Distortionless Response）**约束，该约束是波束图主轴响应为 1。这里的 \mathbf{p}_s 就是大名鼎鼎的**导向矢量（steering vector）**。【再回顾下导向矢量的定义在(2.13)】

我们可以得出白噪声阵增益（WNG，有是也直接说**白噪声增益**）为

$$G_w = \frac{|\mathbf{w}^H \mathbf{p}_s|^2}{\mathbf{w}^H \mathbf{I} \mathbf{w}} = \|\mathbf{w}\|^{-2} \quad (2.98)$$

我们可以得出**白噪声增益最大值等于阵元个数**【[原理见书 P41](#)】。若噪声为空间均匀各向同性噪声，即 $\boldsymbol{\rho}_n = \boldsymbol{\rho}_{niso}$ ，这个时候可以得到阵增益为

$$G_D = \frac{|\mathbf{w}^H \mathbf{p}_s|^2}{\mathbf{w}^H \boldsymbol{\rho}_{niso} \mathbf{w}} \quad (2.99)$$

在实际情况下我们并不知道期望信号方向，因此经常选用期望波束观察方向对应的方向响应向量作为假想方向响应向量，即

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^H \bar{\mathbf{p}}_s &= 1 \\ \bar{\mathbf{p}}_s &= \bar{\mathbf{p}}_s(\Omega_0) \end{aligned} \quad (2.100)$$

③指向性指数

波束指向性定义为**波束对其观察方向信号功率增益与对全方位均匀到达信号功率增益之比**。波束形成的指向性可以解释位基阵在空间均匀各向同性噪声场中的阵增益。

④波束形成器的稳健性

基阵校准误差（阵元位置标定误差和通道幅相误差）会噪声波束图发生畸变，进而噪声波束形成器空域滤波性能下降。

如果为了保证波束腥臭具有一定稳健性，则需要对波束形成器的加权向量范数进行约束，即令

$$T_{se} = \|\mathbf{w}\|^2 \leq \zeta_0 \quad (2.101)$$

其中， $\zeta_0 \geq 1/M$ 是用户设定的值。

白噪声增益也是表征波束形成器稳健性的参数。这是因为：对于扰动误差（如通道误差、阵元位置误差等），这些误差在各阵元间几乎是互不相关的，它们对波束形成器性能的影响与空间白噪声对波束形成器的影响相似。因此，**基阵在空间不相关噪声（即空间白噪声）背景中的阵增益大小可以用来检验波束形成器的稳健性**。

9.常见波束形成器——常规波束形成器

常规波束形成加权向量变为

$$\mathbf{w}_c = \bar{\mathbf{p}}_s / M \quad (2.102)$$

另外我们还可以得到

$$\mathbf{w}_c = \bar{\mathbf{p}}_s / \bar{\mathbf{p}}_s^H \bar{\mathbf{p}}_s \quad (2.103)$$

我们一般假设

$$\bar{\mathbf{p}}_s^H \bar{\mathbf{p}}_s = M \quad (2.104)$$

我们将在假想导向向量条件下得到的常规波束加权向量对真实方向响应向量的响应记作如下式

$$B_c(\bar{\mathbf{p}}_s : \tilde{\mathbf{p}}_s) = \mathbf{w}_c^H \tilde{\mathbf{p}}_s = \frac{\bar{\mathbf{p}}_s^H \tilde{\mathbf{p}}_s}{M} \quad (2.105)$$

经过一系列操作，我们可以得到失配阵增益与匹配阵增益之比为

$$\frac{G_c(\bar{\mathbf{p}}_s : \tilde{\mathbf{p}}_s)}{G_c(\bar{\mathbf{p}}_s : \bar{\mathbf{p}}_s)} = |B_c(\bar{\mathbf{p}}_s : \tilde{\mathbf{p}}_s)|^2 \quad (2.106)$$

可见匹配情况下具有最高增益。当我们假想的方向矢量和真实方向矢量相同，且噪声场是白噪声的时候，白噪声增益就是

$$G_{cw} = M \quad (2.107)$$

我们可以得到：常规波束形成器具有最高的白噪声阵增益及最小的加权向量范数。因此，在所有种类的波束形成器中，常规波束形成器具有最高的稳健性。【前面说了基阵在空间不相关噪声（即空间白噪声）背景中的阵增益大小可以用来检验波束形成器的稳健性】

常规波束形成器有较高的旁瓣，所以对于强信号可能存在能量泄露。

10.常见的波束形成器——MVDR 波束形成器

我在之前介绍过很多次 MVDR 波束形成器，因此推导过程就不再累述，直接写出其结果

$$\mathbf{w}_{MVDR} = \frac{\mathbf{R}_n^{-1} \bar{\mathbf{p}}_s}{\bar{\mathbf{p}}_s^H \mathbf{R}_n^{-1} \bar{\mathbf{p}}_s} = \frac{\boldsymbol{\rho}_n^{-1} \bar{\mathbf{p}}_s}{\bar{\mathbf{p}}_s^H \boldsymbol{\rho}_n^{-1} \bar{\mathbf{p}}_s} \quad (2.108)$$

我们可以发现，若噪声场是空间白噪声，则 MVDR 波束形成器的加权向量就会退化为常规波束形成器的加权向量。

我们在假想导向向量为 $\bar{\mathbf{p}}_s$ 条件下得到 MVDR 波束形成加权向量对真实方向响应向量 $\tilde{\mathbf{p}}_s$ 的响应为

$$B_{MVDR}(\bar{\mathbf{p}}_s : \tilde{\mathbf{p}}_s) = \mathbf{w}_{MVDR}^H \tilde{\mathbf{p}}_s = \frac{\boldsymbol{\rho}_n^{-1} \bar{\mathbf{p}}_s^H \tilde{\mathbf{p}}_s}{\bar{\mathbf{p}}_s^H \boldsymbol{\rho}_n^{-1} \bar{\mathbf{p}}_s} \quad (2.109)$$

由(2.89)可以得到，MVDR 波束形成器的输出功率为

$$\sigma_{y,MVDR}^2 = \mathbf{w}^H \mathbf{R}_x \mathbf{w} = \frac{\bar{\mathbf{p}}_s^H \boldsymbol{\rho}_n^{-1} \mathbf{R}_x \boldsymbol{\rho}_n^{-1} \bar{\mathbf{p}}_s}{\bar{\mathbf{p}}_s^H \boldsymbol{\rho}_n^{-1} \bar{\mathbf{p}}_s \bar{\mathbf{p}}_s^H \boldsymbol{\rho}_n^{-1} \bar{\mathbf{p}}_s} \quad (2.110)$$

我们可以计算 MVDR 波束形成器的阵增益【输出信干噪比比输入信干噪比】

$$G_{MVDR}(\bar{\mathbf{p}}_s : \tilde{\mathbf{p}}_s) = \frac{|\bar{\mathbf{p}}_s^H \boldsymbol{\rho}_n^{-1} \tilde{\mathbf{p}}_s|^2}{\bar{\mathbf{p}}_s^H \boldsymbol{\rho}_n^{-1} \bar{\mathbf{p}}_s} \quad (2.111)$$

当假想值和真实值相等的时候，获得最佳的阵增益，即

$$G_{opt} = G_{MVDR}(\bar{\mathbf{p}}_s : \bar{\mathbf{p}}_s) = \bar{\mathbf{p}}_s^H \boldsymbol{\rho}_n^{-1} \bar{\mathbf{p}}_s \quad (2.112)$$

对应的最佳阵输出信噪比为

$$SNR_{opt} = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2} \bar{\mathbf{p}}_s^H \boldsymbol{\rho}_n^{-1} \bar{\mathbf{p}}_s \quad (2.113)$$

若噪声中包含干扰，则上式实际上也是最佳输出信干噪比。

关于最小功率无失真响应（MPDR）在此不再讲述。

下表展示了常规波束形成器与 MVDR 波束形成器的空间滤波能力情况。针对两种波束形成方法，分别计算对准信号（10° 方向）的波束输出信号功率 σ_{ys}^2 、输出干扰功率 σ_{yi}^2 、输出噪声功率 σ_{yn}^2 与输出信干噪比 $SINR_{out}$ ，显示于表 2.1 中，表中 σ_s^2 、 σ_i^2 、 σ_n^2 分别是输入信号、干扰信号、噪声信号的功率。

【之所以把这个表展示出来是为了加深印象】

表 2.1 常规波束形成与 MVDR 波束形成输出信干噪比较

	常规波束形成		MVDR 波束形成	
	-10°	10°	-10°	10°
σ_s^2/dB	15	30	15	30
σ_i^2/dB	30	15	30	15
σ_n^2/dB	0	0	0	0
σ_{ys}^2/dB	15.00	30.00	15.00	30.00
σ_{yi}^2/dB	13.04	-1.96	-66.7820	-51.81
σ_{yn}^2/dB	-10.00	-10.00	-9.91	-9.91
$SINR_{out}/\text{dB}$	1.94	31.32	24.91	39.91

可以看出，当波束对准信号方位的时候，常规波束形成器与 MVDR 的波束输出信号功率 σ_{ys}^2 相等。常规波束输出干扰功率 σ_{yi}^2 比输入干扰功率 σ_i^2 减小了 16.96dB，即对应方位旁瓣衰减量；而 MVDR 波束输出干扰功率得到了极大抑制（减小了 66.81dB）。对于波束输出噪声功率 σ_{yn}^2 ，MVDR 输出比常规波束输出稍微高一点，约高 0.09dB，相比干扰抑制的改善来说，这点弱一般情况下可以不被考虑。由于 MVDR 波束形成器极大的抑制了干扰，所以其博输输出信干噪比高于常规方法，这是其优点所在。

第三章：规则阵波束设计

对于规则形状的基阵，它们的几何形状具有对称性，其阵列信号处理数学模型将表现出一些特有的性质。对于线阵来说，线阵空域信号处理与时间序列信号处理有很多相似之处，因此通过时空类比，很多时间序列分析的方法也可以应用于线阵空域信号处理。线阵具有轴对称性，其波束形成器同样具有轴对称性，所以线阵估计目标方向时具有左右舷模糊的缺点。

3.1 线阵

3.1.1 连续线阵

(1) 频率-波数响应

由 M 个离散阵元组成的基阵的阵列流形向量为

$$\mathbf{p}(\mathbf{k}) = [\exp(-ik^T \mathbf{p}_1), \dots, \exp(-ik^T \mathbf{p}_m), \dots, \exp(-ik^T \mathbf{p}_M)]^T \quad (3.1)$$

在式中， $\mathbf{k}(\Omega) = -k[\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi]^T$ 是对应于方向 $\Omega = (\theta, \phi)$ 的波束向量。

下面考虑连续线阵（也被称作孔径）。考虑一个长度为 L 的连续线阵，将线阵放置于坐标 z 轴上，线阵中心位于坐标原点。则线阵各接收点的坐标可以表示为

$$\mathbf{p}_z = [0, 0, z]^T \quad (3.2)$$

类似于离散阵元组成的基阵，连续线阵上位于 \mathbf{p}_z 点的阵列流形函数可以表示为

$$p_a(\mathbf{k}) = \exp(-ik^T \mathbf{p}_z) = \exp(-ik_z z) \quad (3.3)$$

式中，下标 a 表示孔径， $k_z = -k \cos \phi$ 表示波数向量 \mathbf{k} 的 z 分量。从上式可以看出，该线阵的阵列流形函数与水平方向角 θ 无关，即它相对于 z 轴旋转对称。假设该连续阵上各点的加权函数取 w_a^* ，则根据式(2.72)，连续线阵的频率-波数响应函数为

$$Y(\omega, k_z) = \int_{-L/2}^{L/2} w_a^*(z) \exp(-ik_z z) dz \quad (3.4)$$

(2) 空域傅里叶变换

在空域信号处理中，也存在类似的傅里叶变换对，称之为空域傅里叶变换。如下

$$\begin{aligned} F(k_z) &\triangleq \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-ik_z z} dz \\ f(z) &\triangleq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k_z) e^{ik_z z} dk_z \end{aligned} \quad (3.5)$$

空域傅里叶变换平移定理如下

$$\begin{aligned} F(k_z) e^{-ik_z z_0} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(z - z_0) e^{-ik_z z} dz \\ f(z) e^{ik_z z_0} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k_z - k_{z0}) e^{ik_z z} dk_z \end{aligned} \quad (3.6)$$

若取加权值为

$$w_a^*(z) = 0, |z| > L/2 \quad (3.7)$$

根据式(3.4)可以得出

$$Y(\omega, k_z) = \int_{-\infty}^{\infty} w_a^*(z) \exp(-ik_z z) dz = \mathcal{F}(w_a^*(z)) \quad (3.8)$$

可以看出，连续线阵的频率-波束响应函数与加权函数存在空域傅里叶变换对关系。

(3) 均匀加权连续线阵

接下来考虑均匀加权连续线阵，即取

$$w_a^*(z) = \begin{cases} 1/L & |z| \leq L/2 \\ 0 & |z| > L/2 \end{cases} \quad (3.9)$$

代入(3.4)可以得到它的频率-波束响应为

$$Y(\omega, k_z) = \sin c\left(\frac{\pi L}{\lambda} \cos \phi\right) \quad (3.10)$$

这又是一个 sinc 函数，可以看出来波束响应（上式是频率-波束响应函数，也是波束响应的形式）与水平方位角 θ 无关，即波束响应相对于 z 轴旋转对称。【此处与前面的性质是一样的】

同样可知，主瓣两边的第一个零点出现在

$$\frac{\pi L}{\lambda} \cos \phi_N = \pm \pi \quad (3.11)$$

上式中 ϕ_N 表示波束主瓣左右第一个过零点对应的方位。于是

$$\phi_N = \arccos(\pm \lambda / L) \quad (3.12)$$

主瓣宽度为

$$BW_{NN} = |\arccos(-\lambda / L) - \arccos(\lambda / L)| = 2 \arcsin(\lambda / L) \quad (3.13)$$

进一步可以得知-3dB 波束主瓣宽度为

$$BW_{-3dB} = 2 \arcsin(0.4429 \lambda / L) \quad (3.14)$$

我们就把 L/λ 定义为连续线阵的孔径。由此可知，线阵孔径越大，波束主瓣宽度越小。

(4) 连续线阵波束指向调整

由于连续线阵的频率-波数响应函数和加权函数存在空域傅里叶变换对关系，我们可以利用平移定理实现频率-波束响应在波数域平移的效果，也就是说我们可以通过相移因子来调节波束观察方向。

我们假设波束观察方向平移量为 ϕ_o ，可以得到 $k_{z0} = -k \cos \phi_o$ ，则对应的加权函数为

$$\tilde{w}_a^* = w_a^*(z) e^{ik_{z0} z} = w_a^*(z) e^{-ikz \cos \phi_o} \quad (3.15)$$

然后以均匀加权连续阵为例，我们可以得到对应的加权函数为

$$\tilde{w}_a^*(z) = \begin{cases} 1/L e^{-kz \cos \phi_o} & |z| \leq L/2 \\ 0 & |z| > L/2 \end{cases} \quad (3.16)$$

对应的波束响应就可以得到

$$\tilde{B}(\phi) = \sin c \left(\frac{\pi L}{\lambda} (\cos \phi - \cos \phi_o) \right) \quad (3.17)$$

另外要说明一点，我们以上推导是将阵列放置在 z 轴上，当然同样我们可以放置于其位置。

3.1.2 均匀线列阵

(1) 连续线阵空间采样

我们利用 M 个均匀分布阵元组成的线阵列来代替连续线阵，如图 3.1.1 所示，假设阵元间距为 d ，则阵列总长度为 $L=Md$ ，注意，这里计算线列阵长度时将两端阵元向外延伸了 $d/2$ 。该均匀线列阵相当于对原连续线阵进行了空间采样。

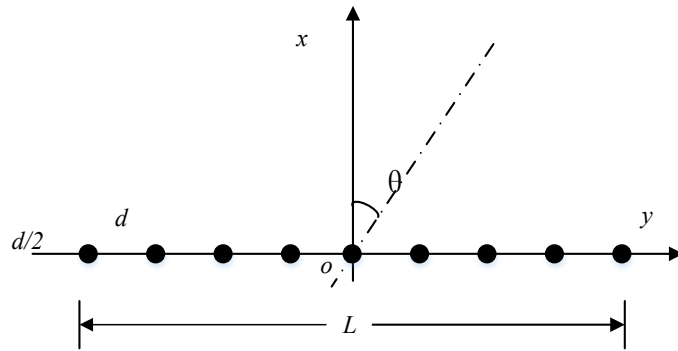


图 3.1.1 均匀线列阵

上图的均匀线列阵各阵元位置可以表示为

$$\mathcal{P}_m = \left[0, \left(m - \frac{M+1}{2} \right) d, 0 \right]^T, m = 1, \dots, M \quad (3.18)$$

线列阵可以看做连续线阵的特例，因此可以运用每个阵元的加权系数表示将其视作连续线阵的加权函数，即

$$w_a^*(y) = \sum_{m=1}^M w_m^* \delta \left(y - \left(m - \frac{M+1}{2} \right) d \right) \quad (3.19)$$

上式中， w_m^* 是第 m 个阵元的加权系数， $\delta(\cdot)$ 是 Kronecker 函数。我们假设线阵放置在 y 轴上，然后就用 $ky = -k \sin \theta$ 与 y 来代替(3.4)中的 kz 和 z ，得到

$$\begin{aligned} Y(\omega, k_y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^M w_m^* \delta \left(y - \left(m - \frac{M+1}{2} \right) d \right) \exp(-ik_y y) dy \\ &= \sum_{m=1}^M w_m^* e^{i \left(m - \frac{M+1}{2} \right) kd \sin \theta} \end{aligned} \quad (3.20)$$

所以波束响应为

$$B(\theta) = \sum_{m=1}^M w_m^* e^{i \left(m - \frac{M+1}{2} \right) kd \sin \theta} \quad (3.21)$$

(2) 常规波束响应（延迟求和波束形成器响应）

我们将式(3.18)带入式(3.1)可以得到阵列流形向量为

$$\mathbf{p}(\theta) = [e^{i\left(\frac{1-M}{2}\right)kd \sin \theta}, \dots, e^{i\left(m-\frac{M+1}{2}\right)kd \sin \theta}, \dots, e^{i\left(\frac{M-1}{2}\right)kd \sin \theta}]^T \quad (3.22)$$

若该均匀线列阵加权向量 $\mathbf{w}^H = [w_1^*, w_2^*, \dots, w_M^*]$ ，则计算波束响应为

$$B(\theta) = \mathbf{w}^H \mathbf{p}(\theta) = \sum_{m=1}^M w_m^* e^{i\left(m-\frac{M+1}{2}\right)kd \sin \theta} \quad (3.23)$$

上式可以验证均匀线列阵可以看作对连续线阵进行空间采样。对该均匀线列阵进行常规波束形成，假设波束指向角为 θ_o ，波束加权向量为

$$\mathbf{w}_c = \mathbf{p}(\theta_o) / M \quad (3.24)$$

所以可以计算出波束方向响应为

$$B(\theta) = \mathbf{w}_c^H \mathbf{p}(\theta) / M = \mathbf{p}^H(\theta_o) \mathbf{p}(\theta) / M \quad (3.25)$$

我们将(3.22)代入(3.25)可以得到均匀线列阵波束方向响应为

$$B(\theta) = \frac{\sin(Mkd(\sin \theta - \sin \theta_o) / 2)}{M \sin(kd(\sin \theta - \sin \theta_o) / 2)} \quad (3.26)$$

若 $\theta_o = 0$ ，即波束指向为线阵正横方向时，均匀线列阵波束方向响应为

$$B(\theta) = \frac{\sin\left(\frac{\pi Md}{\lambda} \sin \theta\right)}{M \sin\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta\right)} \quad (3.27)$$

当 d 远远小于 λ 的时候，由于 $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \sin \alpha = \alpha$ ，所以上式可以写为

$$B(\theta) = \sin c\left(\frac{\pi Md}{\lambda} \sin \theta\right) \quad (3.28)$$

我们对比式(3.28)和式(3.10)可以发现，当两阵元之间的距离 d 远远小于波长 λ 的时候，若 $Md=L$ ，即第 1 和第 M 个离散的连续线阵之间的距离为 L 的时候，均匀线列阵波束响应逼近于同等长度的连续线阵。

然后开始求第一次零点出现的方位和主瓣宽度。同理可得，

$$\theta_N = \arcsin\left(\pm \frac{\lambda}{Md}\right) \quad (3.29)$$

$$BW_{NN} = 2 \arcsin\left(\frac{\lambda}{Md}\right) \quad (3.30)$$

我们发现当 $d = \lambda$ 的时候，会出现栅瓣，即在不是期望方向上出现于波束主瓣同等高度的瓣，在设计的时候我们要避免产生栅瓣。

3.1.3 二元阵

对于二元阵来说,我们假设其中一个阵元放置在原点,另一个放置在 z 轴上,间距为 d , 坐标系如图 3.1.2 所示。

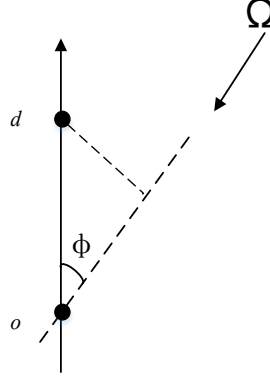


图 3.1.2 二元阵

我们假设两阵元坐标分别是

$$\mathcal{P}_m = [0, 0, (m-1)d]^T, m=1, 2 \quad (3.31)$$

由于有对称性,基阵方向性与水平方位角无关,只与垂直方位角有关。可以得出阵列流形向量为

$$\mathbf{p}(\phi) = [1, e^{ikd \cos \phi}]^T \quad (3.32)$$

(1) 常规波束形成

对于常规波束形成来说,假设期望方向为 ϕ_o , 加权向量为

$$\mathbf{w}^*(\phi_o) = \mathbf{p}^*(\phi_o) / 2 = \frac{1}{2} [1, e^{-kd \cos \phi_o}]^T \quad (3.33)$$

通过绘制阵元间距不通知时二元阵常规波束响应可以发现:当阵元间距逐渐减小时,二元阵的波束主瓣逐渐变宽,指向性逐渐变差。

当 $d=0.25 \lambda$ 的时候,波束图是一个倒心型,此时波束加权向量为

$$\mathbf{w}^* = [\frac{1}{2}, -\frac{i}{2}]^T \quad (3.34)$$

此时二元阵是一种偶极子阵。

(2) 指向性指数

基阵的指向性指数等于基阵在空间均匀各向同性噪声场中的阵增益。

二元阵空间均匀各向同性噪声互谱矩阵为

$$\boldsymbol{\rho}_{niso} = \begin{bmatrix} 1 & \sin c(kd) \\ \sin c(kd) & 1 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

对于常规波束形成器来说,其在空间均匀各向同性噪声场中的阵增益为

$$G_{D,c} = \frac{|\mathbf{p}^H \mathbf{p}|^2}{\mathbf{p}^H \boldsymbol{\rho}_{niso} \mathbf{p}} = \frac{2}{1 + \sin c(kd) \cos(kd \cos \phi)} \quad (3.36)$$

对于最佳波束形成来说,

$$\rho_{niso} = \begin{bmatrix} 1 & -\sin c(kd) \\ -\sin c(kd) & 1 \end{bmatrix} / (1 - \sin^2 c(kd)) \quad (3.37)$$

相应阵增益为

$$G_{D,opt} = \mathbf{p}^H \rho_{niso}^{-1} \mathbf{p} = \frac{2 - 2 \sin c(kd) \cos(kd \cos \phi)}{1 - \sin^2 c(kd)} \quad (3.38)$$

式(3.36)和式(3.38)是二元阵常规波束形成与最佳波束形成时的指向性指数。

3.1.4 均匀线列阵窗函数加权

我们知道在数字信号处理中通过加窗可以降低旁瓣，均匀线列阵波束形成与之类似，也可以通过幅度加权来降低波束旁瓣。由于这种窗函数具有前后对称的特性，得到的波束图主轴指向正横方向。

1. 均匀加权

常规时延求和波束形成器的加权向量为**均匀加权**。每个阵元幅度加权值相等，即

$$w_m = 1/M, m = 1, 2, 3, \dots, M \quad (3.39)$$

将波束主瓣右边第一次出现零点的方位记作 θ_N^+ ，则对于标准线阵列，由于 $d = \lambda/2$ ，所以可以得到

$$\begin{aligned} \sin \theta_N^+ &= 2/M \\ BW_{NN} &= 2 \arcsin(2/M) \end{aligned} \quad (3.40)$$

2. 余弦 q 次方加权

各阵元加权值为

$$w_m(q) = \alpha(q) \cos^q \left[\pi \frac{m - (M+1)/2}{M} \right], m = 1, \dots, M \quad (3.41)$$

式中，系数 $\alpha(q)$ 是为了将波束主瓣最大响应（因为未相移，此时还是 0° 方向）归一化为1。若 $q=1$ ，则上式为**余弦窗加权（cosine）**，若 $q=2$ ，则称为**Hanning 窗加权**。

余弦 q 次方加权中，对于标准线阵列，第一零点满足 $\sin \theta_N^+ = (q+2)/M$ 。所以对于余弦窗加权来说， $\sin \theta_N^+ = 3/M$ ，在 Hanning 窗加权中为 $\sin \theta_N^+ = 4/M$ 。

3. 升余弦 q 次方加权

各阵元加权值为

$$w_m(p, q) = \alpha(p, q) \left\{ p + (1-p) \cos^q \left[\pi \frac{m - (M+1)/2}{M} \right] \right\}, m = 1, \dots, M \quad (3.42)$$

式中，系数 $\alpha(p, q)$ 是为了将波束主瓣最大响应（因为未相移，此时还是 0° 方向）归一化为1。若 $q=1$ ，则上式为**升余弦窗加权（raised cosine）**。若 $q=2$ ，则上式变为

$$w_m(p) = \frac{\alpha(p)}{2} \left\{ (1+p) + (1-p) \cos \left[\pi \frac{m - (M+1)/2}{M} \right] \right\}, m = 1, \dots, M \quad (3.43)$$

若 $p=0.08$, 则称为 **Hamming 窗加权**。对于标准线阵列, 第一零点满足 $\sin \theta_N^+ = 4/M$ 。可见 **Hamming 窗加权波束图** 两点间束宽裕 **Hanning 窗** 相同。

4. Dolph-Chebyshev 加权

对于半波长均匀间隔线阵列, 在所有波束形成加权方法中, 该加权在给定主瓣宽度时可以获得最低的均匀旁瓣, 或者在给定旁瓣级时获得最窄的波束主瓣宽度。

5. 波束指向调整

上面四种方法默认都是得到的主瓣为 0° 方向, 若要使主瓣指向其他方向, 则需要在幅度加权基础上附加一定的相移。例如, 需要波束指向 θ_s 方向, 则对应的加权向量调整为

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_d \circ \mathbf{p}_s \quad (3.44)$$

式中, 操作符 \circ 表示两向量点相乘, 即对应元素相乘; $\mathbf{p}_s = \mathbf{p}(\theta_s)$ 表示基阵在 θ_s 方向的响应向量, 即导向向量。

3.2 矩形阵

3.2.1 波束图乘积定理

对于式(3.1)所示的基阵阵列流形向量基于如下理想假设: 组成基阵的各阵元均各向同性, 即阵元对个方向到达信号的响应相同。在此我们假设阵元不是各向同性的, 而是具有一定方向性的。

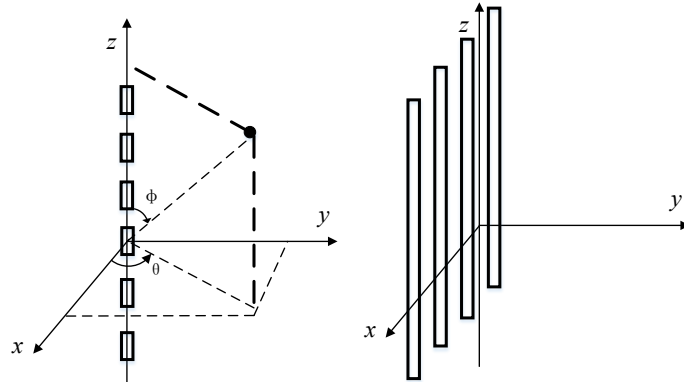


图 3.2.1 非各向同性阵元组成的阵列

我们假设 m 号阵元方向响应为 $\check{p}_m(\Omega)$, 这里省略了频率。阵元方向响应一般是复数, 包括**幅度增益**和**相位增益**。若用 $\check{\mathbf{p}}(\Omega) = [\check{p}_1(\Omega), \dots, \check{p}_m(\Omega), \dots, \check{p}_M(\Omega)]^T$ 表示由 M 个阵元方向响应组成的向量, 则基阵的真实阵列流形可以表示为

$$\tilde{\mathbf{p}}(\Omega) = \bar{\mathbf{p}}(\Omega) \circ \check{\mathbf{p}}(\Omega) \quad (3.45)$$

其中 \mathbf{p} 上面一条横线的是式(3.1)所示的阵列流形矢量。

如果所有的阵元具有相同的方向响应，即 $\check{p}_m(\Omega) = \check{p}(\Omega)$ 的时候，则基阵的波束响应可以表示为

$$\tilde{B}(\Omega) = \mathbf{w}^H \tilde{\mathbf{p}}(\Omega) = \mathbf{w}^H \bar{\mathbf{p}}(\Omega) \check{p}(\Omega) = \bar{B}(\Omega) \check{p}(\Omega) \quad (3.46)$$

上式表明，当组成的基阵的各阵元具有方向性，且所有阵元方向性相同时，基阵的波束响应等于**对应的各向同性阵元组成的基阵的波束响应与阵元方向响应的乘积**。以上就是波束图乘积定理。

【个人解释：

各向同性的阵列：阵列中所有阵元都是各向同性，即每个阵元对于各个方向的响应是一样的。

方向性相同的阵列：阵列中所有阵元的波束图是一样的，例如目标是 20° ，那么它们的主瓣都是在 20° ，但是其他方向抑制。】

3.2.2 均匀矩形阵

下面再考察各向同性阵元组成的矩形基阵，假设该矩阵基阵阵元有 M 行 N 列共 $M \times N$ 个阵元，将其布置在 xoy 平面，基阵中心位于坐标原点，如图 3.2.2 所示。假设在 x 轴方向阵元间距为 dx ，在 y 轴方向为 dy ，将第 m 行 n 列阵元编号记作 (m,n) ，其坐标可以表示为

$$\mathcal{P}_{mn} = \left[\left(m - \frac{M+1}{2} \right) dx, \left(n - \frac{N+1}{2} \right) dy, 0 \right], m=1, \dots, M, n=1, \dots, N \quad (3.47)$$

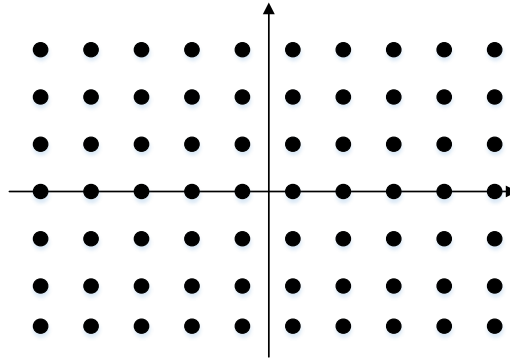


图 3.2.2 矩形阵列

由式(3.1)计算该基阵的阵列流形向量，其中对应于 (m,n) 阵元的接收响应为

$$p_{mn} = e^{-i\mathbf{k}^T \mathcal{P}_{mn}} = e^{-i(k_x x_m + k_y y_n)} \quad (3.48)$$

式中， $k_x = -k \sin \phi \cos \theta$, $k_y = -k \sin \phi \sin \theta$ 。

假设 (m,n) 阵元加权值为 w_{mn}^* ，并假设可以写为

$$w_{mn}^* = w_m^* w_n^* \quad (3.49)$$

则基阵波束响应为

$$\begin{aligned}
B(\Omega) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M w_{mn}^* p_{mn} = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M w_{mn}^* e^{-i(k_x x_m + k_y y_n)} \\
&= \sum_{n=1}^N w_n^* e^{-ik_y y_n} \sum_{m=1}^M w_m^* e^{-ik_x x_m} = B_y(\Omega) B_x(\Omega)
\end{aligned} \tag{3.50}$$

接下来分析均匀加权的情况，也就是说 $w_{mn}^* = \frac{1}{MN}$ ，令 $w_m^* = \frac{1}{M}$ ， $w_n^* = \frac{1}{N}$ ，则可以得到

$$\begin{aligned}
B_x(\Omega) &= \frac{\sin(Mk_x d_x / 2)}{M \sin(k_x d_x / 2)} \\
B_y(\Omega) &= \frac{\sin(Nk_y d_y / 2)}{N \sin(k_y d_y / 2)}
\end{aligned} \tag{3.51}$$

可以得到，均匀加权的矩阵基阵的波束响应满足乘积定理。这是因为，该基阵的每一列（行）是一个线阵，而矩形基阵可以看做由若干子线阵构成的行（列）线阵。

第四章：波束稳健性分析

在实际中，由于各种误差（如观察方向误差、阵型标定误差、通道幅度与相位误差等）的影响，造成导向向量存在误差；另外，由于接收数据协方差矩阵无法精确计算，只能通过接受数据进行估计，也不可避免的存在估计误差。导向向量与接受数据互谱矩阵误差都势必影响最佳波束形成器的输出信噪比性能。

4.1 最佳波束形成器稳健性影响因素

无论是 MVDR 还是 MMSE，亦或是 MSNR 波束形成器，其加权向量其实统一可以写为

$$\mathbf{w}_{opt} = \alpha \mathbf{R}_x^{-1} \bar{\mathbf{p}}_s \quad (4.1)$$

式中， α 是一个标量系数。因为我的项目是 MVDR 算法的，所以后续都以 MVDR 来介绍。由上式可以看出，计算最佳波束形成器加权向量时，我们需要知道导向向量 $\bar{\mathbf{p}}_s$ 和数据协方差矩阵 \mathbf{R}_x^{-1} 。在实际中，我们肯定无法知道它们的精确值，所以可能会存在误差，造成失配。

造成导向向量失配的原因有方向失配与阵元接收响应误差等。其中阵元接收响应误差包括通道幅相误差、阵元位置误差、阵元各向异性与不一致性引起的响应灵敏度误差等。

造成数据协方差矩阵误差的原因主要是：我们一般采用有限长度数据快拍估计得到数据协方差矩阵，估计值与实际值存在误差。

4.2 导向向量失配对波束性能的影响

我们知道 MVDR 的阵增益是

$$G_{MVDR}(\bar{\mathbf{p}}_s : \tilde{\mathbf{p}}_s) = \frac{|\bar{\mathbf{p}}_s^H \mathbf{R}_x^{-1} \tilde{\mathbf{p}}_s|^2}{\bar{\mathbf{p}}_s^H \mathbf{R}_x^{-1} \boldsymbol{\rho}_n \mathbf{R}_x^{-1} \bar{\mathbf{p}}_s} \quad (4.2)$$

将上式进行处理可以得到

$$G_{MVDR} = \frac{\bar{\mathbf{p}}_s^H \boldsymbol{\rho}_n^{-1} \tilde{\mathbf{p}}_s \cos^2(\bar{\mathbf{p}}_s, \tilde{\mathbf{p}}_s, \boldsymbol{\rho}_n^{-1})}{1 + \{2(\sigma_s^2 / \sigma_n^2) \tilde{\mathbf{p}}_s^H \boldsymbol{\rho}_n^{-1} \tilde{\mathbf{p}}_s + [(\sigma_s^2 / \sigma_n^2) \tilde{\mathbf{p}}_s^H \boldsymbol{\rho}_n^{-1} \tilde{\mathbf{p}}_s]^2\} \sin^2(\bar{\mathbf{p}}_s, \tilde{\mathbf{p}}_s, \boldsymbol{\rho}_n^{-1})} \quad (4.3)$$

根据上式分析导向向量误差、输入信噪比对 MVDR 波束形成器的阵增益的影响：

(1) 若取 $\bar{\mathbf{p}}_s = \tilde{\mathbf{p}}_s$ ，即估计的导向向量和真实值相等，那么可知 $\cos^2(\bar{\mathbf{p}}_s, \tilde{\mathbf{p}}_s, \boldsymbol{\rho}_n^{-1}) = 1$ ， $\sin^2(\bar{\mathbf{p}}_s, \tilde{\mathbf{p}}_s, \boldsymbol{\rho}_n^{-1}) = 0$ ，即 $G_{MVDR} = G_{opt}$ 。

(2) 若 $\bar{\mathbf{p}}_s$ 和 $\tilde{\mathbf{p}}_s$ 存在误差，误差越大， \cos 一项越小， \sin 一项越大，则 MVDR 波束形成器的阵增益损失越大（即 G 越小）。

(3) 在导向向量误差一定的情况下，输入信噪比越大，分母越大，MVDR 波束形成器的阵增益损失越大。当信噪比=0 的时候，就变为了 $\beta=0$ 的 MVDR 波束形成器。

4.3 协方差矩阵失配对波束性能的影响

4.3.1 样本协方差矩阵求逆波束形成

接下来，我们对协方差矩阵统一用 \mathbf{R} 来表示，于是 MVDR 波束形成器加权向量又可以表示为

$$\mathbf{w}_{MVDR} = \alpha \mathbf{R}^{-1} \bar{\mathbf{p}}_s \quad (4.4)$$

式中， $\alpha = (\bar{\mathbf{p}}_s^H \mathbf{R}^{-1} \bar{\mathbf{p}}_s)^{-1}$ ，它不影响波束形成器的阵增益性能，只是为了满足无失真约束。

一个自适应波束形成器处于白噪声环境下的波束称为静态波束 (quiescent pattern)，对应的加权向量称为静态波束加权向量。对于式(4.4)所示的 MVDR 对应的静态波束为常规时延求和波束。但是，其它自适应波束形成算法对应的静态波束不一定是常规波束。

在实际中，也包括自己编写的程序中，协方差矩阵都是通过一段数据快拍样本（长度为 N ）的空间相关矩阵来估计（当然实际中只是第一帧是如此估计），也就是

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [\mathbf{x}(n) \mathbf{x}^H(n)] \quad (4.5)$$

为了保证 $\hat{\mathbf{R}}$ 可逆，快拍数需要满足 $N \geq M$ 。当 N 无穷大的时候， $\hat{\mathbf{R}}$ 逼近于真实协方差矩阵 \mathbf{R} 。权向量也就变成了

$$\mathbf{w}_{MVDR} = \alpha \hat{\mathbf{R}}^{-1} \bar{\mathbf{p}}_s \quad (4.6)$$

这种方法就是自适应波束形成。上面所示的直接对数据样本协方差矩阵求逆来实现 MVDR 波束形成器的方法称为样本协方差矩阵求逆 (Sample Matrix Inversion, SMI) 方法。在计算式(4.6)的时候，主要计算量来源于对样本协方差矩阵进行特征分解，其计算复杂度为 $O(M^3)$ 。

4.3.2 样本协方差矩阵求逆法波束性能

在假设观察数据中不包含期望信号（ $\beta=0$ ）的条件下分析 SMI 方法，归一化输出信干噪比定义如下

$$\rho_0 = \frac{SINR(\hat{\mathbf{w}}_{SMI})}{SINR_{opt}} \bigg|_{\beta=0} \quad (4.7)$$

式中，分母表示在精确制导数据协方差矩阵与导向向量情况下的最优输出信干噪比。在采用 N 个快拍估计数据协方差矩阵时，归一化输出信干噪比的均值为

$$E(\rho_0) = \frac{N - M + 2}{N + 1} \quad (4.8)$$

上式表明，为了保证 SMI 波束形成的平均输出 SINR 比最有情况下损失在 3dB 以内，要求

$$N \geq 2M - 3 \approx 2M \quad (4.9)$$

在快拍数有限的时候，SMI 波束旁瓣升高，它除了高于静态波束【一个自适应波束形成

器处于白噪声环境下的波束】之外，平均旁瓣与样本数目的关系大约为

$$E(SLL) = \frac{1}{N+1} \quad (4.10)$$

在式中，SLL 表示旁瓣级。

当数据样本中包含期望信号的时候($\beta=1$)，SMI 波束形成的性能会收到更严重的影响。这就是信号“自消”现象。由于快拍数目有限，用样本协方差矩阵代替理想数值会产生误差，它不能和真实的信号响应向量匹配。因此，SMI 波束形成器会误将期望信号视作干扰信号进行零陷，而不是增强。

如果信噪比较高，为保证 SMI 波束形成器的平均输出 SINR 损失在 3dB 以内，快拍数需要满足

$$N \geq SINR_{opt} \cdot (M-1) \gg M \quad (4.11)$$

从上式可以看出，在训练数据包括期望信号的时候，SMI 方法收敛速度更慢，稳健性更差。

第五章：稳健波束设计

除了原始的对角加载之外，另一类具有代表性的对角加载类方法是**加权向量范数约束方法**。由于该方法等同于白噪声增益约束，所以也称为白噪声增益月书法。不过，对角加载方法的最大问题是**难以根据导向向量误差信息确定对角加载量大小**。

后续有一些新的方法，能够真正有效利用导向向量误差信息，它们是根据**导向向量误差椭圆精确计算对角加载量的大小**。

5.1 对角加载法

5.1.1 对角加载法介绍

SMI 波束形成器加权向量我们已知为(4.6)。为了提高 SMI 波束形成器的稳健性，提出了一种叫做对角加载（LSMI, Loading Sample Matrix Inversion）的方法。这种方法就是在样本协方差矩阵的对角元素上加一个量，这样之后的加权向量为

$$\mathbf{w}_{LSMI} = \alpha(\hat{\mathbf{R}} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \bar{\mathbf{p}}_s \quad (5.1)$$

式中， λ 是对角加载量，上式中的归一化系数 α 与前述(4.6)中的 α 数值上**并不相等**。定义加载噪声级（Load-to-white-noise ratio, LNR，单位为 dB）为

$$LNR = 10 \lg(\lambda / \sigma_w^2) \quad (5.2)$$

式中， σ_w^2 代表噪声中白噪声分量的功率。后续 LNR 也被称为**对角加载级**。

5.1.2 对角加载法提升性能原因

首先分析普通的 SMI 方法：

假设我们的观察数据中不包含期望信号（ $\beta=0$ ），即 $\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{R}}_n$ 。假设这里噪声包含了干扰分量和白噪声分量，即 $\hat{\mathbf{R}}_n = \hat{\mathbf{R}}_i + \hat{\mathbf{R}}_w$ 。将噪声协方差矩阵进行特征分解（以下写作 $\hat{\mathbf{R}}$ ）：

$$\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{U} \hat{\mathbf{\Gamma}} \mathbf{U}^H = \sum_{m=1}^M \hat{\gamma}_m \mathbf{u}_m \mathbf{u}_m^H \quad (5.3)$$

式中， $\hat{\gamma}_m$ 是特征值，按降序排列 $\hat{\gamma}_1 \geq \hat{\gamma}_2 \geq \dots \geq \hat{\gamma}_M$ 。 $\hat{\mathbf{\Gamma}}$ 是特征值组成的对角阵，列向量 \mathbf{u}_m 是对应的特征向量； \mathbf{U} 是特征向量组成的矩阵。

那么

$$\hat{\mathbf{R}}^{-1} = \frac{1}{\hat{\gamma}_m} \left(\mathbf{I} - \sum_{m=1}^M \frac{\hat{\gamma}_m - \hat{\gamma}_{\min}}{\hat{\gamma}_m} \mathbf{u}_m \mathbf{u}_m^H \right) \quad (5.4)$$

将上式带入式(4.6)，然后省略括号前面的标量系数，可以得到

$$\hat{\mathbf{w}}_{SIM} = \bar{\mathbf{p}}_s - \sum_{m=1}^M \frac{\hat{\gamma}_m - \hat{\gamma}_{\min}}{\hat{\gamma}_m} \mathbf{u}_m \mathbf{u}_m^H \bar{\mathbf{p}}_s \quad (5.5)$$

对于更一般情况，若静态波束不是常规波束，加权向量可以写为

$$\hat{\mathbf{w}}_{SMI} = \mathbf{w}_q - \sum_{m=1}^M \frac{\hat{\gamma}_m - \hat{\gamma}_{\min}}{\hat{\gamma}_m} \mathbf{u}_m \mathbf{u}_m^H \mathbf{w}_q \quad (5.6)$$

我们求波束响应

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{SMI}(\mathbf{k}) &= \hat{\mathbf{w}}_{SMI}^H \mathbf{p}(\mathbf{k}) = \mathbf{w}_q^H \mathbf{p}(\mathbf{k}) - \sum_{m=1}^M \frac{\hat{\gamma}_m - \hat{\gamma}_{\min}}{\hat{\gamma}_m} \mathbf{u}_m^H \mathbf{u}_m \mathbf{w}_q^H \mathbf{p}(\mathbf{k}) \\ &= B_q(\mathbf{k}) - \sum_{m=1}^M \frac{\hat{\gamma}_m - \hat{\gamma}_{\min}}{\hat{\gamma}_m} \rho_{qm} B_{eig,m}(\mathbf{k}) \\ &= B_q(\mathbf{k}) - \sum_{m=1}^D \frac{\hat{\gamma}_m - \hat{\gamma}_{\min}}{\hat{\gamma}_m} \rho_{qm} B_{eig,m}(\mathbf{k}) - \sum_{m=D+1}^M \frac{\hat{\gamma}_m - \hat{\gamma}_{\min}}{\hat{\gamma}_m} \rho_{qm} B_{eig,m}(\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (5.7)$$

式中，D 表示干扰的个数。 $\rho_{qm} = \mathbf{w}_q^H \mathbf{u}_m$ 表示的是静态波束加权向量与第 m 个特征向量间的相关性； $B_{eig,m}(\mathbf{k})$ 是第 m 个特征波束，即以第 m 个特征向量作为加权向量得到的波束响应。在干扰方向 $\mathbf{k} = \mathbf{k}_{im}$ ($m=1,2,\dots,D$) 上， ρ_{qm} 通过调节特征波束响应 $B_{eig,m}(\mathbf{k})$ 的大小，使 $\rho_{qm} B_{eig,m}(\mathbf{k}_{im}) = B_q(\mathbf{k}_{im})$ 。

当然，实际上 SMI 波束形成器并不区分哪些特征值对应于干扰，哪些对应于噪声。

如果噪声协方差矩阵估计不存在误差，那么白噪声分量对应的 **M-D 个特征值是相等的**。于是乎，对于式(5.7)来说，第三项就是 0。然后这个时候我们再看在干扰方向的响应

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{SMI}(\mathbf{k}) &= \mathbf{w}_q^H \mathbf{p}(\mathbf{k}) - \frac{\hat{\gamma}_m - \hat{\gamma}_{\min}}{\hat{\gamma}_m} \mathbf{u}_m^H \mathbf{u}_m \mathbf{w}_q^H \mathbf{p}(\mathbf{k}) \\ &= B_q(\mathbf{k}) - \frac{\hat{\gamma}_m - \hat{\gamma}_{\min}}{\hat{\gamma}_m} \mathbf{w}_q^H \mathbf{p}(\mathbf{k}) = \left(1 - \frac{\hat{\gamma}_m - \hat{\gamma}_{\min}}{\hat{\gamma}_m} \right) B_q(\mathbf{k}_{im}) = \frac{\hat{\gamma}_{\min}}{\hat{\gamma}_m} B_q(\mathbf{k}_{im}) \end{aligned} \quad (5.8)$$

【注意在对于单一方向的时候， $\mathbf{u}_m \mathbf{u}_m^H = \mathbf{I}$ 】

我们就可以发现，在干扰方向 SMI 波束响应比静态波束响应下降了 $20 \lg \left(\frac{\hat{\gamma}_{\min}}{\hat{\gamma}_m} \right)$ dB。

也就是说，当某干扰特征值远远大于最小特征值的时候，该干扰就完全被零陷。但是若干扰噪声比不上太高，那么干扰只被部分零陷。

我们现在将白噪声的最大特征值与最小特征值之比定义为**白噪声特征值的扩散程度**。当用来估计噪声协方差矩阵的数据样本数量 N 有限时，造成估计出的对应于白噪声的特征值扩散程度增大。由于噪声分量对应的特征向量不相等，使得式(5.7)的第三项不可能为 0，又由于噪声分量对应的特征波束是随机变量，他的变化会影响到 SMI 波束响应，因而造成旁瓣升高。

然后分析对角加载方法

分析过程类似。首先

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{R}} + \lambda \mathbf{I} &= \mathbf{U} \hat{\mathbf{\Gamma}} \mathbf{U}^H + \lambda \mathbf{U} \mathbf{U}^H = \mathbf{U} (\hat{\mathbf{\Gamma}} + \lambda \mathbf{I}) \mathbf{U}^H \\ (\hat{\mathbf{R}} + \lambda \mathbf{I})^{-1} &= \mathbf{U} (\hat{\mathbf{\Gamma}} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{U}^H \end{aligned} \quad (5.9)$$

我们发现采用对角加载方法后,对应的特征向量没有发生变化,但是特征值都加上了 λ 。所以与式(5.7)相对应得到的波束响应为

$$\mathbf{B}_{LSMI}(\mathbf{k}) = \mathbf{B}_q(\mathbf{k}) - \sum_{m=1}^D \frac{\hat{\gamma}_m - \hat{\gamma}_{\min}}{\hat{\gamma}_m + \lambda} \rho_{qm} \mathbf{B}_{\text{eig},m}(\mathbf{k}) - \sum_{m=D+1}^M \frac{\hat{\gamma}_m - \hat{\gamma}_{\min}}{\hat{\gamma}_m + \lambda} \rho_{qm} \mathbf{B}_{\text{eig},m}(\mathbf{k}) \quad (5.10)$$

通过对比式(5.7),对于上式来说我们可以发现这样一个规律:如果 λ 远远小于第1到第D个特征值(即干扰所对应的的特征值),那么对式中第2项(干扰零陷)影响不大;如果 λ 大于第D+1到第M个特征值(即噪声所对应的特征值),那么就可以减小第3项的大小。由于前面我们已经知道若干扰特征值远远大于最小特征值(一般是噪声中的最小值)的时候,干扰被完全零陷;然后 λ 的引入又进一步缩小了噪声的大小,所以说对角加载**能够使旁瓣降低,稳健性提高**。

综上所述,对角加载量的选取原则是:**小于干扰特征值且大于噪声特征值**。经验表明,取加载噪声级为LNR=10dB比较合适。

当对角加载量 $\lambda=0$ 的时候,LSMI方法退化为SMI方法;当 λ 趋向于无穷的时候,它退化为常规时延求和波束形成。也就是说,通过调整 λ 的大小,可以在SMI波束形成与常规波束形成进行折中,也就是在阵增益和稳健性进行折中。

将式(5.9)带入式(5.1)可以得到

$$\hat{\mathbf{w}}_{LSMI} = \alpha \mathbf{U}(\hat{\mathbf{\Gamma}} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{U}^H \bar{\mathbf{p}}_s \quad (5.11)$$

可见LSMI波束形成设计的主要计算量是对样本协方差矩阵进行特征分解,计算复杂度同样为 $O(M^3)$ 。

如果快拍数小于阵元数,即 $N < M$,则此时样本协方差矩阵是奇异矩阵,且秩为N,此时矩阵可以表示为

$$\hat{\mathbf{R}} = \sum_{m=1}^N \hat{\gamma}_m \mathbf{u}_m \mathbf{u}_m^H \quad (5.12)$$

对角加载协方差矩阵的逆同时可以表示为

$$(\hat{\mathbf{R}} + \lambda \mathbf{I})^{-1} = \frac{1}{\lambda} \left(\mathbf{I} - \sum_{m=1}^M \frac{\hat{\gamma}_m}{\hat{\gamma}_m + \lambda} \mathbf{u}_m \mathbf{u}_m^H \right) \quad (5.13)$$

对于数据样本包含期望信号的情形,同样可以通过对角加载来提高稳健性,但是所需要的加载量比不包含期望信号的情况下更大。

由于导向向量误差与协方差矩阵误差对SMI波束形成方法的性能影响具有相同的机理(就是将期望信号当作干扰信号进行零陷),造成期望信号自消,所以对角加载方法同样能够改善由于导向向量误差引起的波束形成器性能下降。

5.2 加权向量范数约束法

5.2.1 加权向量范数约束与对角加载波束形成器的关系

我们在第二章已经定义了波束形成器的灵敏度为 $T_{se} = \|\mathbf{w}\|^2$,因此,通过约束波束加权向量范数可以提高波束形成器的稳健性。

我们称这种波束形成器为**范数约束 Capon 波束形成器**(Norm Constrained Capon

Beamformer, NCCB)。其定义可以参照 MVDR 的定义确定为如下

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w}, \text{ subject to } \mathbf{w}^H \bar{\mathbf{p}}_s = 1, \|\mathbf{w}\|^2 \leq \zeta_0 \quad (5.14)$$

式中, ζ_0 是用户设定的约束值, 它越小, 系统稳健性越高。但是实际上它不可能无线小。它必须满足

$$\zeta_0 \geq 1/M \quad (5.15)$$

上式取等号的时候对应常规波束形成器, 此时白噪声增益为 10lgMdB。
定义白噪声增益损失为

$$G_{wd} = 10 \lg \left(\frac{\|\mathbf{w}\|^2}{1/M} \right) = 10 \lg M + 10 \lg(\|\mathbf{w}\|^2) \quad (5.16)$$

由式(5.14)可以得到

$$G_{wd} \leq 10 \lg M + 10 \lg(\zeta_0) \triangleq G_{wd0} \quad (5.17)$$

由于 $M > 0$, 且由于式(5.15)我们可知, $G_{wd} \geq 10 \lg M - 10 \lg M = 0$ 。其中 $G_{wd} = 0$ 对应于常规波束形成, 即白噪声增益损失为 0dB。由上式可知, 用户设定的约束值 ζ_0 和 G_{wd0} 是一一对应的。也就是说我们可以通过设定 G_{wd0} 来确定 ζ_0 , 即

$$\zeta_0 = (1/M) 10^{G_{wd0}/10} \quad (5.18)$$

如果一个 MVDR 波束形成器 (未进行范数约束) 的加权向量本身满足 $\|\mathbf{w}_{MVDR}\|^2 \leq \zeta_0$, 则称(5.14)中的范数约束是**非激活约束**; 反之, 该约束是一个**激活约束**。在范数约束是激活约束的情况下, 式(5.14)的解满足 $\|\mathbf{w}\|^2 = \zeta_0$ 。所以综上所述, 在该种情况下, 式(5.14)可以改写为

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w}, \text{ subject to } \mathbf{w}^H \bar{\mathbf{p}}_s = 1, \mathbf{w}^H \mathbf{w} = \zeta_0 \quad (5.19)$$

类似于未进行范数约束的 MVDR 波束形成器的求解方法, 使用拉格朗日乘子法可以得到结果为

$$\mathbf{w} = \frac{(\mathbf{R} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \bar{\mathbf{p}}_s}{\bar{\mathbf{p}}_s^H (\mathbf{R} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \bar{\mathbf{p}}_s} \quad (5.20)$$

可以看出, NCCB 属于对角加载技术。与之前 LSMI 波束形成器不同, NCCB 的对角加载量是通过**加权向量范数约束量**来确定的。

NCCB 的对角加载量 λ 可以通过求解如下方程得到

$$\mathbf{w}^H \mathbf{w} = \frac{\bar{\mathbf{p}}_s^H (\mathbf{R} + \lambda \mathbf{I})^{-2} \bar{\mathbf{p}}_s}{[\bar{\mathbf{p}}_s^H (\mathbf{R} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \bar{\mathbf{p}}_s]^2} = \zeta_0 \quad (5.21)$$

5.2.2 范数约束波束形成器的二阶锥规划求解方法

对西数据协方差矩阵进行 Cholesky 分解, 可以得到

$$\mathbf{R} = \mathbf{V}^H \mathbf{V} \quad (5.22)$$

因此

$$\mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w} = (\mathbf{V} \mathbf{w})^H (\mathbf{V} \mathbf{w}) = \|\mathbf{V} \mathbf{w}\|^2 \quad (5.23)$$

于是，式(5.14)可以写成

$$\min_{\mathbf{w}} \|\mathbf{V} \mathbf{w}\|, \text{ subject to } \mathbf{w}^H \bar{\mathbf{p}}_s = 1, \|\mathbf{w}\| \leq \sqrt{\zeta_0} \quad (5.24)$$

然后就可以用二阶锥规划来求解。

5.2.3 范数约束波束形成器对角加载量求解法

采用牛顿迭代法根据范数约束之来求解 NCCB 对角加载量，具体内容可以参加文献 14 或本书第 5.3.3 节（P117）。本处仅总结几个关键点。

可以证明，在下面条件情况下：

$$\zeta_0 < \frac{\bar{\mathbf{p}}_s^H \mathbf{R}^{-2} \bar{\mathbf{p}}_s}{[\bar{\mathbf{p}}_s^H \mathbf{R}^{-1} \bar{\mathbf{p}}_s]^2} \quad (5.25)$$

式(5.21)存在唯一的整数解 $\hat{\lambda} > 0$ ，且该式左边函数是单调将函数，因此可以利用如牛顿迭代法等方法求解。

我们根据式(5.19)和式(5.20)可以知道，式(5.20)中的 $\hat{\mathbf{w}}$ （原式用的 \mathbf{w} 来表示）在约束 \mathbf{S} 的边界上，它是在式(5.25)约束下优化问题(5.14)的解。该算法中的对角加载量 λ 可以通过求解式(5.20)得到。将 \mathbf{R} 进行特征分解可以得到

$$\mathbf{R} = \mathbf{U} \mathbf{\Gamma} \mathbf{U}^H \quad (5.26)$$

令

$$\mathbf{z} = \mathbf{U}^H \bar{\mathbf{p}}_s \quad (5.27)$$

假设 \mathbf{z} 的第 m 个元素用 z_m 表示，由于

$$(\mathbf{R} + \hat{\lambda} \mathbf{I})^{-1} = \mathbf{U} (\mathbf{\Gamma} + \hat{\lambda} \mathbf{I})^{-1} \mathbf{U}^H \quad (5.28)$$

所以式(5.21)可以写为

$$\frac{\sum_{m=1}^M \frac{|z_m|^2}{(\gamma_m + \hat{\lambda})^2}}{\left[\sum_{m=1}^M \frac{|z_m|^2}{\gamma_m + \hat{\lambda}} \right]^2} = \zeta_0 \quad (5.29)$$

因此，有

$$\zeta_0 \leq \frac{\|\bar{\mathbf{p}}_s\|^2}{(\gamma_M + \hat{\lambda})^2} \bigg/ \frac{\|\bar{\mathbf{p}}_s\|^4}{(\gamma_1 + \hat{\lambda})^2} = \frac{(\gamma_1 + \hat{\lambda})^2}{M(\gamma_M + \hat{\lambda})^2} \quad (5.30)$$

又由于 $\hat{\lambda} \geq 0$ ，所以可以得到 λ 的上下界范围为

$$0 \leq \hat{\lambda} \leq \frac{\gamma_1 - (M\zeta_0)^{\frac{1}{2}}\gamma_M}{(M\zeta_0)^{\frac{1}{2}} - 1} \quad (5.31)$$

由上式可以代入到(5.20)得到

$$\hat{\mathbf{w}}_{NCCB} = \frac{\mathbf{U}(\mathbf{\Gamma} + \hat{\lambda}\mathbf{I})^{-1}\mathbf{U}^H \bar{\mathbf{p}}_s}{\bar{\mathbf{p}}_s^H \mathbf{U}(\mathbf{\Gamma} + \hat{\lambda}\mathbf{I})^{-1}\mathbf{U}^H \bar{\mathbf{p}}_s} \quad (5.32)$$

综上所述，NCCB 加权向量设计步骤如下：

(1) 对数据协方差矩阵（实际中使用其估计值）进行特征值分解。（如式(5.26)）。

(2) 如果式(5.33)满足，取 $\hat{\lambda}=0$ ；否则，用牛顿法对式(5.29)求解 $\hat{\lambda}$ ，且其上下界由式(5.31)确定。

$$\frac{\bar{\mathbf{p}}_s^H \mathbf{R}^{-2} \bar{\mathbf{p}}_s}{[\bar{\mathbf{p}}_s^H \mathbf{R}^{-1} \bar{\mathbf{p}}_s]^2} \leq \zeta_0 \quad (5.33)$$

(3) 将邱姐出来的 $\hat{\lambda}$ 带入式(5.32)得到 NCCB 的加权向量。

由于以上的步骤不要求所有的 $\gamma_m > 0$ ，所以对于 \mathbf{R} 为奇异矩阵的情况下仍然有效，也就是说 NCCB 方法适用于 $N < M$ 的情况下。

NCCB 方法也是对角加载方法，但是与 LSMI 方法不同的是：LSMI 中对角加载量难以确定，而 NCCB 方法的对角加载量通过加权向量范数约束量来确定，比 LSMI 直接选取方便一些。

通过书中的几个例子，可以得出以下结论：

(1) 观察方向存在误差：在输入 SNR 较小的时候，NCCB 方法和 SMI 方法性能相同（因为此时加权向量范数约束尚未激活），LSMI 方法性能较好；当输入 SNR 较高的时候，NCCB 方法性能明显优于 LSMI 方法。

(2) 不同样本数目与输入 SNR：

①比较 NCCB 和 SMI 方法性能：NCCB 方法的 SINR 收敛速度比 SMI 快，在低 SNR 情况下，NCCB 仅需要几个快拍就可以收敛到与最优输出 SINR 相差 3dB 以内。当快拍数 N 与输入 SNR 相同时，NCCB 方法的输出 SINR 高于 SMI 方法。可见，加权向量范数约束处理提高了 SMI 波束形成的稳健性。

②比较 NCCB 和 LSMI 性能：NCCB 在 SNR 较高的时候稍优，LSMI 在 SNR 较小时稍优。

(3) NCCB 方法严格控制了波束形成器加权向量的范数，所以 NCCB 方法提升了波束形成器的稳健性。输入 SNR 较小时，SMI 方法加权向量范数本来就比较小，NCCB 方法中范数约束被激活次数比较少，所以 NCCB 方法的加权向量范数平均值小于约束值。而当输入 SNR 比较大时，范数约束每次都被激活，所以 NCCB 加权向量范数等于约束值。SNR 较小时，NCCB 加权向量范数比 LSMI 稍高，而 SNR 较大时，则小很多。

NCCB 方法的对角加载量随输入 SNR 增大而增大。随着输入 SNR 的增大，SMI 波束形成器稳健性变差，可见 NCCB 方法加载类变化趋势正好顺应了波束形成器的稳健性有需求。

通过调节约束值，可以在 SMI 波束形成与常规波束形成之间进行折中。

【参考文献】

[14] Li J, Stoica P, Wang Z. Doubly constrained robust Capon beamformer[J]. IEEE Transactions

5.3 最差性能最佳化法

前面的几种方法都是根据数据协方差矩阵来计选取参数，而不是根据导向向量的不确定范围来选取。

假设真实的导向向量与假想的导向向量存在误差，且误差范数有上界，即

$$\|\tilde{\mathbf{p}}_s - \bar{\mathbf{p}}_s\|^2 \leq \varepsilon \quad (5.34)$$

因此，可认为真实的导向向量 $\tilde{\mathbf{p}}_s$ 属于如下椭圆不确定集 S

$$S \triangleq \left\{ \mathbf{p}_s \mid \mathbf{p}_s = \bar{\mathbf{p}}_s + \mathbf{p}_\Delta, \|\mathbf{p}_\Delta\|^2 \leq \varepsilon \right\} \quad (5.35)$$

最差性能最佳化（Worst-case Performance Optimization, WCPO）方法的设计准则是使最差情况下的波束输出信噪比最高，即

$$\max_{\mathbf{w}} \min_{\mathbf{p}_\Delta} \frac{\sigma_s^2 |\mathbf{w}^H \mathbf{p}_s|}{\mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w}}, \text{ subject to } \|\mathbf{p}_s - \bar{\mathbf{p}}_s\| \leq \varepsilon, \forall \mathbf{p}_s \in S \quad (5.36)$$

该优化问题等效于如下问题

$$\max_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w}, \text{ subject to } |\mathbf{w}^H (\bar{\mathbf{p}}_s + \mathbf{p}_\Delta)| \geq 1, \forall \|\mathbf{p}_\Delta\|^2 \leq \varepsilon \quad (5.37)$$

该优化问题与 MVDR 波束形成问题的主要修正是不等式约束代替了观察方向的无失真约束，该不等式约束保证

$$|\mathbf{w}^H \mathbf{p}_s| \geq 1, \forall \mathbf{p}_s \in S \quad (5.38)$$

并且在 $|\mathbf{w}^H (\bar{\mathbf{p}}_s + \mathbf{p}_\Delta)|$ 取最小值时对应于最差情况。但是，这里假设导向向量误差范数上界已知，实际上是未知的，因此采用用户估计值 ε_0 代替。

于是，优化问题(5.37)可以转化为

$$\max_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w}, \text{ subject to } \min_{\|\mathbf{p}_\Delta\|^2 \leq \varepsilon_0} |\mathbf{w}^H (\bar{\mathbf{p}}_s + \mathbf{p}_\Delta)| \geq 1 \quad (5.39)$$

如果

$$|\mathbf{w}^H \bar{\mathbf{p}}_s| \geq \varepsilon_0 \|\mathbf{w}\| \quad (5.40)$$

则

$$\min_{\|\mathbf{p}_\Delta\|^2 \leq \varepsilon_0} |\mathbf{w}^H (\bar{\mathbf{p}}_s + \mathbf{p}_\Delta)| = |\mathbf{w}^H \bar{\mathbf{p}}_s| - \varepsilon_0 \|\mathbf{w}\| \quad (5.41)$$

因此，式(5.39)可以写成

$$\max_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w}, \text{ subject to } |\mathbf{w}^H \bar{\mathbf{p}}_s| - \varepsilon_0 \|\mathbf{w}\| \geq 1 \quad (5.42)$$

当 \mathbf{w} 选择任意角度的时候，上式中的求解最大项保持不变。因此如果 \mathbf{w}_0 是上式的最优解，可以选择 \mathbf{w}_0 使 $\mathbf{w}_0^H \mathbf{p}_s$ 是正实数，且代价函数保持不变。因此，上式可以表示为

$$\max_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w}, \text{ subject to } |\mathbf{w}^H \bar{\mathbf{p}}_s| \geq 1 + \varepsilon_0 \|\mathbf{w}\| \quad (5.43)$$

然后将 \mathbf{R} 进行 Cholesky 分解就为 $\mathbf{R}=\mathbf{V}\mathbf{H}\mathbf{V}$ ，就可以得到

$$\max_{\mathbf{w}} \|\mathbf{V}\mathbf{w}\|, \text{ subject to } |\mathbf{w}^H \bar{\mathbf{p}}_s| - 1 \geq \varepsilon_0 \|\mathbf{w}\| \quad (5.44)$$

这是一个二阶锥规划问题。假设得到的加权向量为 $\hat{\mathbf{w}}_{WCPO}$ 。这种方法的计算量为

$O(\rho M^3)$ ，这里 ρ 为迭代次数，一般为 10 次左右。

观察式(5.39)的约束，其所指的最差情况其实就是对应于 $|\mathbf{w}^H (\bar{\mathbf{p}}_s + \mathbf{p}_\Delta)| = 1$ 。所以(5.42)

中的约束可以取等号，也就变成了

$$\max_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w}, \text{ subject to } |\mathbf{w}^H \bar{\mathbf{p}}_s - 1|^2 = \varepsilon_0^2 \mathbf{w}^H \mathbf{w} \quad (5.45)$$

运用 Lagrange 乘子法得到结果如下

$$\mathbf{w} = \frac{\lambda}{\lambda \bar{\mathbf{p}}_s^H (\mathbf{R} + \lambda \varepsilon_0^2 \mathbf{I})^{-1} \bar{\mathbf{p}}_s - 1} (\mathbf{R} + \lambda \varepsilon_0^2 \mathbf{I})^{-1} \bar{\mathbf{p}}_s \quad (5.46)$$

5.4 协方差矩阵拟合法

我们已经知道 MVDR 波束形成器的加权向量，我们可以用波束输出功率作为信号功率的估计，也就是

$$\hat{\sigma}_s^2 = \mathbf{w}_{MVDR}^H \mathbf{R} \mathbf{w}_{MVDR} = \frac{1}{\bar{\mathbf{p}}_s^H \mathbf{R}^{-1} \bar{\mathbf{p}}_s} \quad (5.47)$$

经过等价变换可以将 MVDR 波束形成优化问题等效为

$$\max_{\sigma^2} \sigma^2, \text{ subject to } \mathbf{R} - \sigma^2 \bar{\mathbf{p}}_s \bar{\mathbf{p}}_s^H \succ 0 \quad (5.48)$$

在这里， $\succ 0$ 表示矩阵半正定。可见，式(5.48)可以解释位协方差拟合问题：对于给定协方差矩阵 \mathbf{R} 和导向向量 \mathbf{p}_s ，求解最大可能的期望信号项 $\sigma^2 \bar{\mathbf{p}}_s \bar{\mathbf{p}}_s^H$ ，使除去信号项后的剩余的协方差矩阵半正定。

当信号导向向量存在误差时，假设它属于式(5.35)所示的不确定集 \mathbf{S} 。稳健的 MVDR 波束形成问题可以表述为

$$\max_{\sigma^2} \sigma^2, \text{ subject to } \mathbf{R} - \sigma^2 \bar{\mathbf{p}}_s \bar{\mathbf{p}}_s^H \succ 0, \quad \forall \|\mathbf{p}_s - \bar{\mathbf{p}}_s\| \leq \varepsilon_0 \quad (5.49)$$

式中， ε_0 是用户设定的导向向量误差范数上界。

引入一个新变量 $\eta = 1/\sigma^2$ ，上式可以转化为半定规划问题

$$\max_{\eta, \mathbf{p}_s} \eta, \text{ subject to } \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{p}_s \\ \mathbf{p}_s^H & \eta \end{bmatrix} \succ 0, \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \mathbf{I} & \mathbf{p}_s - \bar{\mathbf{p}}_s \\ (\mathbf{p}_s - \bar{\mathbf{p}}_s)^H & 1 \end{bmatrix} \succ 0 \quad (5.50)$$

半定规划问题计算量为 $O(\rho M^6)$ ，复杂度太高。参考文献 15 中提出了一种求解(5.49)

的方法，计算量是 $O(M^3)$ ，被称为 RCB (Robust Capon Beamformer)。简单介绍如下。

对于任意给定的 \mathbf{p}_s ，式(5.49)的解具有式(5.47)的形式，我们用 \mathbf{p}_s 代替(5.47)的加横线的 \mathbf{p}_s ，问题(5.49)可以转化为

$$\min_{\mathbf{p}_s} \mathbf{p}_s^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{p}_s, \text{subject to } \|\mathbf{p}_s - \bar{\mathbf{p}}_s\| \leq \varepsilon_0 \quad (5.51)$$

为了避免无用解 $\mathbf{p}_s=0$ ，假设

$$\|\mathbf{p}_s\| > \sqrt{\varepsilon_0} \quad (5.52)$$

满足条件(5.52)时，式(5.51)的解显然发生在约束集的边界，因此不等式约束可以写成等式约束

$$\min_{\mathbf{p}_s} \mathbf{p}_s^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{p}_s, \text{subject to } \|\mathbf{p}_s - \bar{\mathbf{p}}_s\| = \varepsilon_0 \quad (5.53)$$

解之得

$$\hat{\mathbf{p}}_s = \left(\frac{\mathbf{R}^{-1}}{\lambda} + \mathbf{I} \right) \bar{\mathbf{p}}_s \quad (5.54)$$

上式重新整理，然后进行特征分解，可以得到

$$\hat{\mathbf{p}}_s = \bar{\mathbf{p}}_s - \mathbf{U}(\mathbf{I} + \lambda \mathbf{\Gamma})^{-1} \mathbf{U}^H \bar{\mathbf{p}}_s \quad (5.55)$$

用上式代替(5.47)中的相应位置，得到

$$\hat{\sigma}_s^2 = \frac{1}{\bar{\mathbf{p}}_s^H \mathbf{U} \mathbf{\Gamma} (\lambda^{-2} \mathbf{I} + 2\lambda^{-1} \mathbf{\Gamma} + \mathbf{\Gamma}^2)^{-1} \mathbf{U}^H \bar{\mathbf{p}}_s} \quad (5.56)$$

我们用计算值继续代替 MVDR 波束形成求解权值出来的 \mathbf{w} 的公式，可以得到 RCB 波束形成器加权向量为

$$\hat{\mathbf{w}}_{RCB} = \frac{\mathbf{R}^{-1} \hat{\mathbf{p}}_s}{\hat{\mathbf{p}}_s^H \mathbf{R}^{-1} \hat{\mathbf{p}}_s} \quad (5.57)$$

然后可以进一步写为

$$\hat{\mathbf{w}}_{RCB} = \frac{\left(\mathbf{R} + \frac{1}{\lambda} \mathbf{I} \right)^{-1} \bar{\mathbf{p}}_s}{\bar{\mathbf{p}}_s^H \left(\mathbf{R} + \frac{1}{\lambda} \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{R} \left(\mathbf{R} + \frac{1}{\lambda} \mathbf{I} \right)^{-1} \bar{\mathbf{p}}_s} \quad (5.58)$$

可见 RCB 方法是对角加载类算法，其对角加载量是 $\frac{1}{\lambda}$ 。

式(5.53)中的约束条件可以重新表示为

$$\|\mathbf{U}(\mathbf{I} + \lambda \mathbf{\Gamma})^{-1} \mathbf{U}^H \bar{\mathbf{p}}_s\|^2 = \varepsilon_0 \quad (5.59)$$

上式还可以重新表达为

$$g(\lambda) \triangleq \|U(I + \lambda\Gamma)^{-1}U^H \bar{\mathbf{p}}_s\|^2 = \sum_{m=1}^M \frac{|z_m|^2}{(1 + \lambda\gamma_m)^2} = \varepsilon_0 \quad (5.60)$$

很容易看出，上式是关于 λ 的单调递减函数。

λ 上下界范围为

$$\frac{\|\bar{\mathbf{p}}_s\| - \sqrt{\varepsilon_0}}{\gamma_1 \sqrt{\varepsilon_0}} \leq \lambda \leq \min \left\{ \frac{\|\bar{\mathbf{p}}_s\| - \sqrt{\varepsilon_0}}{\gamma_M \sqrt{\varepsilon_0}}, \left(\frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{m=1}^M \frac{|z_m|^2}{\gamma_m^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (5.61)$$

ε_0 越大，得到的 λ 越小，对角加载量就越大，RCB 波束稳健性越强。从目标函数来看，协方差矩阵拟合法是直接估计信号功率，而其它方法主要是估计加权向量。

综上所述，RCB 方法设计步骤如下：

- (1) 对数据协方差矩阵 \mathbf{R} 进行特征值分解。
- (2) 运用牛顿迭代法，求解式(5.60)得到 $\hat{\lambda}$ ，其中上下界由式(5.61)确定。
- (3) 将求解出来的 $\hat{\lambda}$ 代入到

$$\hat{\mathbf{p}}_s = \bar{\mathbf{p}}_s - U(I + \lambda\Gamma)^{-1}U^H \bar{\mathbf{p}}_s \quad (5.62)$$

得到估计的导向向量 $\hat{\mathbf{p}}_s$ 。

- (4) 将 $\hat{\mathbf{p}}_s$ 代入到

$$\hat{\sigma}_s^2 = \frac{1}{\hat{\mathbf{p}}_s^H \mathbf{R}^{-1} \hat{\mathbf{p}}_s} \quad (5.63)$$

也可以省略第 3 步，从第 2 步计算出 $\hat{\lambda}$ 直接代入到式(5.56)计算 $\hat{\sigma}_s^2$ ，进而由下式得到去

“比例模糊”的信号功率估计值 $\hat{\sigma}_s^2$

$$\hat{\sigma}_s^2 = \frac{\hat{\sigma}_s^2 \|\hat{\mathbf{p}}_s\|^2}{M} \quad (5.64)$$

- (5) 将 $\hat{\mathbf{p}}_s$ 代入到(5.57)计算加权向量，也可以省略第 3 步，从第 2 步计算后直接带入

(5.58)计算 $\hat{\mathbf{w}}_{RCB}$ 。

5.5 总结

对角加载：可以减小协方差矩阵中噪声对应的特征值的扩餐成都，进而提高波束形成器的稳健性（包括对导向向量误差和有限快拍两方面的稳健性）。对角加载量越大，LSMI 波束形成器的稳健性越强，但同时其潜在的干扰抑制能力减弱，通过调节对角加载级 LNR，可以在 MVDR 和延迟求和方法之间折中。

NCCB 波束形成器：从约束加权向量范数的角度来提高稳健性。加权向量范数约束值

ζ_0 越小（最小 $1/M$ ），NCCB 稳健性越强。通过调节该约束值，可在 MVDR 和 DAS 之间折中。这种方法通过加权向量范数约束值来确定对角加载量的大小。范数约束值越小，对角加载量越大，对角加载量和输入 SNR 有关系。SNR 越大，对角加载量越大，顺应了波束形成器稳健性的要求。

WCPO 方法：认为假想的信号导向向量与真实导向向量之间的误差范数存在上限且已知。设计准则是，对于任意位于该不确定集内的导向向量，使最差情况下的输出 SINR 最大。这种方法克服了 LSMI 方法中对角加载量难以确定的困难，它不仅对导向向量误差具有稳健性，而且提高了对有限快拍引起的协方差矩阵误差的稳健性。

RCB 方法：也是假设真是导向向量位于一个已知的椭圆不确定集内，通过协方差矩阵拟合的方法估计出最佳的导向向量，进而进行信号源功率估计，求解加权向量。RCB 方法和 WCPO 方法是等效的。RCB 方法比 WCPO 方法计算量小，和 SMI 计算量是同一量级。为了解决“比例模糊”造成的信号功率估计误差问题，可以将估计的导向向量进行归一化，不过归一化后的导向向量不一定仍位于导向向量不确定集内。

第十章：圆环阵阵列处理

10.1 引言

由于直线阵是一维阵，其波束响应围绕该直线轴对称，因此它只能估计目标的一维角度，而另一维角度是模糊的，也就出现线阵的左右舷模糊缺点。而要解决这一问题就要采用二维阵或者三维阵。

圆环阵是一种二维阵，它也具有轴对称特性，不过它以垂直于该圆环的直线为轴，这样就可以在其所在平面 360° 方位具有相同的目标探测与方位估计性能。

圆环阵由于其对称性，其常规波束形成响应可以表示为一个贝塞尔函数。

10.2 连续圆环阵

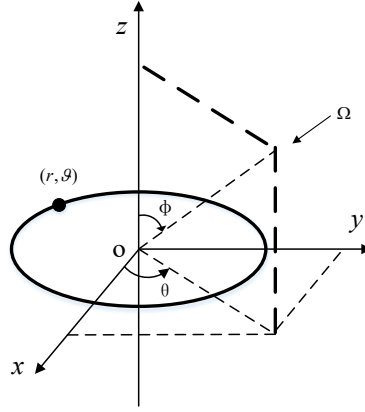


图 10.2.1 连续圆环阵

如图，连续圆环阵半径为 r ，将其置于 xoy 平面，圆环中心为坐标原点。连续圆环阵上各接收点可用极坐标表示为 (r, ϑ) 。这里的 ϑ 是圆环阵上接收点的水平方位角，将其表示为三维直角坐标为

$$\mathcal{P}_\vartheta = [r \cos \vartheta, r \sin \vartheta, 0]^T \quad (10.1)$$

根据第 2 章推导，连续圆环阵上位于 \mathcal{P}_ϑ 的阵列流形函数可以表示为

$$\mathcal{P}_\vartheta(\mathbf{k}) = \exp(-i\mathbf{k}^T \mathcal{P}_\vartheta) = \exp(ikr \sin \phi \cos(\vartheta - \theta)) \quad (10.2)$$

假设该连续阵上 \mathcal{P}_ϑ 点的加权函数取 $w_a^*(\vartheta)$ ，则连续圆环阵的频率-波束响应函数为

$$\begin{aligned} Y(\omega, \mathbf{k}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w_a^*(\vartheta) p_\vartheta(\mathbf{k}) d\vartheta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w_a^*(\vartheta) e^{ikr \sin \phi \cos(\vartheta - \theta)} d\vartheta \end{aligned} \quad (10.3)$$

将其写成波束响应的形式为

$$B(kr, \Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w_a^*(\vartheta) e^{ikr \sin \phi \cos(\vartheta - \theta)} d\vartheta \quad (10.4)$$

10.2.1 均匀加权连续圆环阵

一类 n 阶贝塞尔函数定义如下，其中 0~7 阶函数图如图 10.2.2 所示。

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i^n} \int_0^{2\pi} e^{i(z \cos \Psi + n\Psi)} d\Psi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (10.5)$$

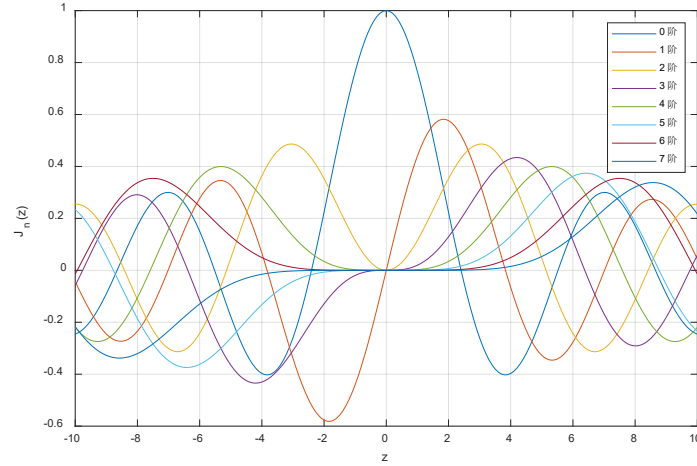


图 10.2.2 贝塞尔函数

通过上图可以发现，随着阶数的增大，贝塞尔函数最大幅度值逐渐减小；当 $|z| < n$ 的时候，贝塞尔函数的幅度值比较小。

我们可以定义

$$P_n \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikr \sin \phi \cos(\vartheta - \theta)} e^{-in\vartheta} d\vartheta \quad (10.6)$$

令 $\Psi = \vartheta - \theta$ ，则上式可以表示为

$$\begin{aligned} P_n &\triangleq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikr \sin \phi \cos \Psi} e^{-in(\Psi + \theta)} d\Psi \\ &= e^{-in\theta} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikr \sin \phi \cos \Psi} e^{-in\Psi} d\Psi \\ &= i^{-n} J_{-n}(kr \sin \phi) e^{-in\theta} = i^n J_n(kr \sin \phi) e^{-in\theta} \end{aligned} \quad (10.7)$$

上式利用了贝塞尔函数的特性进行推导。

我们考虑均匀加权的连续圆环阵的方向响应为 1，带入式(10.4)，然后令(10.7)中 $n=0$ ，可以将式(10.4)变为

$$B(kr, \Omega) = J_0(kr \sin \phi) \quad (10.8)$$

该波束响应与水平角 θ 无关，表明波束响应相对于 z 轴旋转对称。

由上式可以看出，均匀加权连续圆环阵的波束响应是 0 阶贝塞尔函数。我们已知放置在 x 周上的长度为 L 的连续线阵在 xoz 平面上的波束响应为

$$B(kr, \Omega) = \text{sinc}\left(k \frac{L}{2} \sin \phi\right) \quad (10.9)$$

这表明当线阵长度 L 与圆环直径 $2r$ 相等时，两连续阵的波束响应的宗量相等。 $z=0$ 时两函数都为 1，表明波束主瓣响应为 1，即 0dB。除了 $z=0$ 点之外，0 阶贝塞尔函数的峰值和谷值都大于 sinc 函数峰值和谷值幅度，这表明连续圆环阵波束旁瓣高于连续线阵。但是连续圆环阵主瓣宽度窄于连续线阵。

10.2.2 圆环阵常规波束形成

我们假设观察方向为 $\Omega_o = (\theta_o, \phi_o)$ ，则该圆环阵对从该放下来传来的信号的响应函数可以写为

$$p_g(\Omega_o) = \exp(ikr \sin \phi_o \cos(\vartheta - \theta_o)) \quad (10.10)$$

于是，将上式用作波束导向函数进行常规波束加权的函数可以表示为

$$w_a^*(\vartheta) = p_g^*(\Omega_o) = \exp(-ikr \sin \phi_o \cos(\vartheta - \theta_o)) \quad (10.11)$$

将波束加权函数带入式(10.4)可以得到连续圆环阵的时延求和波束响应为

$$B(kr, \Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikr(\sin \phi \cos(\vartheta - \theta) - \sin \phi_o \cos(\vartheta - \theta_o))} d\vartheta \quad (10.12)$$

在上式指数中我们可以令 z 为指数项中 ikr 后面的部分，进一步，令

$$\begin{aligned} \cos \beta &= (\sin \phi \cos \theta - \sin \phi_o \cos \theta_o) / \rho \\ \sin \beta &= (\sin \phi \sin \theta - \sin \phi_o \sin \theta_o) / \rho \end{aligned} \quad (10.13)$$

于是

$$\rho = \sqrt{(\sin \phi - \sin \phi_o)^2 + 4 \sin \phi \sin \phi_o \sin^2 \frac{\theta - \theta_o}{2}} \quad (10.14)$$

于是 z 可以表示为

$$z = \rho \cos(\vartheta - \beta) \quad (10.15)$$

进一步，式(10.12)可以表示为

$$B(kr, \Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikr \rho \cos(\vartheta - \beta)} d\vartheta = J_0(\rho kr) \quad (10.16)$$

连续圆环阵常规时延求和波束响应为 0 阶贝塞尔函数，且相对于圆环所在的平面镜面对称。

若波束观察方向指向圆环阵垂直方向，即 $\phi_o = 0^\circ$ ，则上式可以简化为

$$B(kr, \phi) = J_0(kr \sin \phi) \quad (10.17)$$

若波束观察方向与信号方向都位于过 z 轴的平面（与圆环阵所在平面垂直的平面）上，不妨设 $\theta = \theta_o$ ，则式(10.16)简化为

$$B(kr, \phi) = J_0(kr(\sin \phi - \sin \phi_o)) \quad (10.18)$$

这与连续线阵波束观察方向偏离法线方向的波束响应表达式类似，但直线阵波束响应是 sinc 函数。

若波束观察方向与信号方向都位于圆环所在的 xoy 平面，即 $\phi = \phi_o = 90^\circ$ ，式(10.16)可以简化为

$$B(kr, \phi) = J_0(2kr \sin[(\theta - \theta_o) / 2]) \quad (10.19)$$

10.2.3 相位模式激励

由极坐标表示的单位圆上的函数 $g(\vartheta)$ 可以写作傅里叶级数的形式

$$g(\vartheta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n e^{in\vartheta} \quad (10.20)$$

式中，傅里叶系数 G_n 由下式计算得到

$$G_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\vartheta) e^{-in\vartheta} d\vartheta \quad (10.21)$$

式(10.21)和式(10.20)分别称为圆谐波变换和逆圆谐波变换，或称圆傅里叶变换与其逆变换。

我们可以将函数 $w_a(\vartheta)$ 写成傅里叶级数的形式

$$w_a(\vartheta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} W_n e^{in\vartheta} \quad (10.22)$$

$$W_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w_a(\vartheta) e^{-in\vartheta} d\vartheta \quad (10.23)$$

式中，每一项称作圆环孔径的相位模式激励。

利用式(10.22)，可以将加权函数 w_a^* 写成傅里叶级数的形式为

$$w_a^*(\vartheta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} W_n^* e^{-in\vartheta} \quad (10.24)$$

将上式带入式(10.4)

$$\begin{aligned} B(kr, \Omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} W_n^* e^{-in\vartheta} \right) e^{ikr \sin \phi \cos(\vartheta - \theta)} d\vartheta \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} W_n^* \int_0^{2\pi} e^{ikr \sin \phi \cos(\vartheta - \theta)} e^{-in\vartheta} d\vartheta \end{aligned} \quad (10.25)$$

然后可以进一步写为

$$B(kr, \Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} W_n^* P_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} W_n^* i^n J_n(kr \sin \phi) e^{-in\theta} \quad (10.26)$$

波束响应可以表示成若干空域谐波之和，每个空域谐波由产生。我们将波束表示成若干阶谐波之和的形式的波束形成技术成为**模态波束形成（modal beamforming）**。

10.3 均匀圆环阵

考虑一个由 M 个阵元组成的均匀圆环阵，假设圆半径为 r ，将圆环阵置于 xoy 平面，圆环中心为坐标原点，假设第 m 个阵元位于圆环上的角度为 $\mathcal{G}_m = 2\pi(m-1)/M$ ， $m=1, \dots, M$ ，如图 10.3.1 所示。

各阵元的位置可以用三维坐标表示

$$\mathcal{P}_m = [r \cos(\mathcal{G}_m), r \sin(\mathcal{G}_m), 0]^T \quad (10.27)$$

我们可以得到圆环阵的阵列流形向量

$$\mathbf{p}(\Omega) = [e^{ikr \sin \phi \cos(\mathcal{G}_1 - \theta)}, e^{ikr \sin \phi \cos(\mathcal{G}_2 - \theta)}, \dots, e^{ikr \sin \phi \cos(\mathcal{G}_M - \theta)}]^T \quad (10.28)$$

如果进行常规时延求和波束形成，假设波束期望方向为 Ω_o ，则波束加权向量为

$$\mathbf{w}_c = \mathbf{p}(\Omega_o) / M \quad (10.29)$$

若我们只考虑水平面波束响应，即令观察方向俯仰角 $\phi_o = 90^\circ$ ，信号入射方向俯仰角 $\phi = 90^\circ$ ，于是阵列流形向量可以简化为

$$\mathbf{p}(\Omega) = [e^{ikr \cos(\mathcal{G}_1 - \theta)}, e^{ikr \cos(\mathcal{G}_2 - \theta)}, \dots, e^{ikr \cos(\mathcal{G}_M - \theta)}]^T \quad (10.30)$$

则水平方向波束形成响应为

$$B(\theta) = \mathbf{w}_c^H \mathbf{p}(\theta) = \mathbf{p}^H(\theta_o) \mathbf{p}(\theta) / M \quad (10.31)$$

由此，我们可以得到均匀圆环阵水平方向波束响应为

$$\begin{aligned} B(\theta) &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \exp(ikr(\cos \mathcal{G}_m - \theta) - \cos(\mathcal{G}_m - \theta_o)) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \exp(iz \sin(\beta - \mathcal{G}_m)) \end{aligned} \quad (10.32)$$

式中， $z = 2kr \sin \frac{\theta - \theta_o}{2}$ ， $\beta = \frac{\theta + \theta_o}{2}$ 。

经过一系列整理，可以得到

$$B(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) \exp(-in\beta) \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \exp[2\pi i(m-1)n / M] \quad (10.33)$$

对于上式的 $\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \exp[2\pi i(m-1)n / M]$ 我们考虑两种情形：分别假设 n/M 为整数和非

整数。

(1) 当为整数的时候，令 $n/M=c$ ，这里 c 为整数，可得

$$\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \exp[2\pi i(m-1)n/M] = 1 \quad (10.34)$$

(2) 当为非整数时，由等比数列求和公式可以得到

$$\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \exp[2\pi i(m-1)n/M] = \frac{1 - \exp(i2\pi n)}{1 - \exp(i2\pi n/M)} = 0 \quad (10.35)$$

综合上两式，式(10.33)可以写为

$$B(\theta) = \sum_{c=-\infty}^{\infty} J_{cM}(z) \exp(-icM\beta) \quad (10.36)$$

当 M 为偶数的时候，我们根据贝塞尔函数的性质可以得到 $J_{-cM}(z) = J_{cM}(z)$ ，故可以得到

$$\begin{aligned} B(\theta) &= J_0(z) + \sum_{c=1}^{\infty} J_{cM}(z) [\exp(-icM\beta) + \exp(ilM\beta)] \\ &= J_0(z) + 2 \sum_{c=1}^{\infty} J_{cM}(z) \cos(lM\beta) \end{aligned} \quad (10.37)$$

从上式看，式中第一项与式(10.19)相同，它与阵元数 M 无关，第二项和阵元数 M 有关。但是由贝塞尔函数可以看出，当阵元数 M 超过一定值后，第二项可以忽略不计。也就是说，**随着阵元数目的增大，均匀圆环阵波束响应逼近于连续圆环阵波束响应。**

另外，为了保证均匀圆环阵波束响应与连续圆环阵波束响应差别不太大，应保证

$$M \geq \max(|z|) = 2kr \quad (10.38)$$

也就是说

$$2\pi r / M \leq \lambda / 2 \quad (10.39)$$

也就是说**圆环上任意两阵元间弧长不大于半波长。**

10.4 本章小结

连续圆环阵时延求和波束响应是 0 阶贝塞尔函数。采用均匀加权时，圆环阵与线阵的波束指向与阵列垂直，当圆环阵直径与线阵长度相等时，两者波束响应函数总量相等。对于同等最大尺度的两种连续阵，随着波束观察方向偏离垂直方向，两者波束响应函数总量也相同。当偏离 90° 时，前者称为圆环面波束形成，后者称为端射阵波束形成。

连续圆环阵波束旁瓣高于连续线阵，同等最大尺度时，连续圆环阵时延求和波束的主瓣比连续线阵更窄。

连续圆环阵波束响应可以表示成相位模式激励级数求和的形式，所以其波束形成也可以理解为圆环谐波域波束形成。

均匀圆环阵相当于对连续圆环阵进行空间采样，均匀圆环阵在其所在平面的常规时延求和波束形成可以表示为若干阶贝塞尔函数之和的形式，或者说 0 阶贝塞尔函数加若干阶高阶量。为了保证均匀圆环阵波束响应逼近于连续圆环阵波束响应，应保证**圆环上任意两阵元间弧长不大于半波长**。阵元间距越小，逼近精度越高。

当在均匀圆环阵所在的平面进行波束形成器设计时，在空间均匀噪声场中的最佳波束形成器的阵增益在低频时远高于时延求和常规波束形成器，即具有**超增益特性**，这与端射线阵最佳波束形成类似。但这种低频超增益波束形成的白噪声增益很小，稳健性很差，在阵列流形向量和噪声协方差矩阵存在误差时阵增益严重下降，甚至低于常规波束形成器。