Kalman Filter Note

FanmingL

2018 年 11 月 27 日

1 卡尔曼滤波器

1.1 问题的提出

假设我们有两个传感器，一个传感器能够测量得到物体的运动速度，另一个传感器能够测量得到物体的位置，但是两者数据都有噪声，我们已知物体上一时刻估计出来的位置，如何用两个传感器当前时刻的数据，估计出物体当前最可能的位置?

假设当前时刻为 k，上一时刻估计的位置为 $\hat{x}_{k-1}$，上一时刻得到的物体运动速度大小为 u_{k-1}，当前测量到的位置为 z_k，所以当前位置，我们可以有两种计算方法。即用速度估计，或者用测量到的位置估计。

$$\hat{x}_k = z_k \tag{1}$$

或者

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k-1} + u_{k-1}\Delta t \tag{2}$$

当然 Δt 可以认为是准确的，误差可以忽略。

现在看来，$\hat{x}_k$ 有两种计算方法，不如我们把它们的结果取平均。

$$\hat{x}_k = \frac{1}{2}z_k + \frac{1}{2}(\hat{x}_{k-1} + u_{k-1}\Delta t) \tag{3}$$

但是平均未必是最好的，我们可以假设存在一个比值 K 使得

$$\hat{x}_k = Kz_k + (1-K)(\hat{x}_{k-1} + u_{k-1}\Delta t) \quad K \in [0,1] \tag{4}$$

式3正是式4中 $K = \frac{1}{2}$ 的特殊情况。

那我们应该以什么原则去确定 K 呢? 这正是卡尔曼滤波器解决的问题。

1.2 卡尔曼滤波器的假设

现在我们讨论线性滤波器，在一个线性系统中，我们总可以写出如下两个方程，

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} \tag{5}$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \tag{6}$$

其中

$$\begin{aligned} p(\mathbf{w}) &\sim \mathcal{N}(0, \mathbf{Q}) \\ p(\mathbf{v}) &\sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R}) \end{aligned} \tag{7}$$

我们称式5为预测方程，其中 $\mathbf{w}_{k-1}$ 为高斯噪声，顾名思义，该式用 $k-1$ 时刻的 $\mathbf{x}_{k-1}$ 和 $\mathbf{u}_{k-1}$，预测得到 k 时刻的 $\mathbf{x}_k$。

式6为测量方程，衡量了测量量 $\mathbf{z}_k$ 与实际位置 $\mathbf{x}_k$ 之间的关系。

式5和式6是受限于传感器质量和物理定律的客观条件，在此条件下，我们的基于 $\mathbf{u}_{k-1}$ 对 $\mathbf{x}_k$ 的先验估计可写为

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{k-1} \tag{8}$$

所以参照式4，我们可以写出对 $\mathbf{x}_k$ 的最优估计为

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_k^-) \tag{9}$$

其中 $\mathbf{K}$ 为卡尔曼增益。

1.3 卡尔曼滤波器的推导

卡尔曼滤波器的优化目标是，最小化后验估计 $\hat{\mathbf{x}}_k$ 的方差，为方便表示，定义

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_k &= \hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k \\
\mathbf{e}_k^- &= \hat{\mathbf{x}}_k^- - \mathbf{x}_k \\
\mathbf{P}_k &= \mathbb{E}[\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T] \\
\mathbf{P}_k^- &= \mathbb{E}[\mathbf{e}_k^- \mathbf{e}_k^{-T}]
\end{aligned} \tag{10}$$

其中 $\mathbf{e}_k$ 可由式9化简得

$$\mathbf{e}_k = \hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- - \mathbf{x}_k + \mathbf{K}(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_k^-) \tag{11}$$

再由式6得

$$\mathbf{e}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- - \mathbf{x}_k + \mathbf{K}(\mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_k^-) \tag{12}$$

稍作整理

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_k &= \mathbf{e}_k^- + \mathbf{K}(\mathbf{H}(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-) + \mathbf{v}_k) \\
&= \mathbf{e}_k^- + \mathbf{K}(-\mathbf{H}\mathbf{e}_k^- + \mathbf{v}_k) \\
&= (I - \mathbf{K}\mathbf{H})\mathbf{e}_k^- + \mathbf{K}\mathbf{v}_k
\end{aligned} \tag{13}$$

所以可以将 $\mathbf{P}_k$ 表示为

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_k &= \mathbb{E}[\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T] \\
&= \mathbb{E}[\big((I - \mathbf{K}\mathbf{H})\mathbf{e}_k^- + \mathbf{K}\mathbf{v}_k\big)\big((I - \mathbf{K}\mathbf{H})\mathbf{e}_k^- + \mathbf{K}\mathbf{v}_k\big)^T] \\
&= (I - \mathbf{K}\mathbf{H})\mathbb{E}[\mathbf{e}_k^- \mathbf{e}_k^{-T}](I - \mathbf{K}\mathbf{H})^T + \mathbf{K}\mathbb{E}[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T]\mathbf{K}^T \\
&= (I - \mathbf{K}\mathbf{H})\mathbf{P}_k^-(I - \mathbf{K}\mathbf{H})^T + \mathbf{K}\mathbf{R}\mathbf{K}^T
\end{aligned} \tag{14}$$

$\mathbf{P}_k$ 为协方差矩阵，其对角线元素为 $\mathbf{x}$ 的自协方差均为大于等于零的实数，非对角线元素为互协方差，所以，我们实际上我们的优化问题可以转化为使 $\mathbf{P}_k$ 的对角线元素之和最小，即

$$\min \quad Tr(\mathbf{P}_k) \tag{15}$$

在这之前需要补充些数学知识

$$\begin{aligned}
Tr(\mathbf{A}) &= Tr(\mathbf{A}^T) \\
\frac{\partial Tr(\mathbf{A}\mathbf{X}^T)}{\partial \mathbf{X}} &= \mathbf{A} \\
\frac{\partial Tr(\mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{X}^T)}{\partial \mathbf{X}} &= \mathbf{X}\mathbf{A}^T + \mathbf{X}\mathbf{A}
\end{aligned} \tag{16}$$

首先我们展开式14的结果

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_k^- - \mathbf{P}_k^-\mathbf{H}^T\mathbf{K}^T - \mathbf{K}\mathbf{H}\mathbf{P}_k^- + \mathbf{K}\mathbf{H}\mathbf{P}_k^-\mathbf{H}^T\mathbf{K}^T + \mathbf{K}\mathbf{R}\mathbf{K}^T \tag{17}$$

对上式两边取迹

$$Tr(\mathbf{P}_k) = Tr(\mathbf{P}_k^-) - 2Tr(\mathbf{P}_k^-\mathbf{H}^T\mathbf{K}^T) + Tr(\mathbf{K}\mathbf{H}\mathbf{P}_k^-\mathbf{H}^T\mathbf{K}^T) + Tr(\mathbf{K}\mathbf{R}\mathbf{K}^T) \tag{18}$$

$Tr(\mathbf{P}_k)$ 对 $\mathbf{K}$ 求偏导，代入式16的结果整理可得

$$\frac{\partial Tr(\mathbf{P}_k)}{\partial \mathbf{K}} = -2\mathbf{P}\mathbf{H}^T + 2\mathbf{K}\mathbf{H}\mathbf{P}_k^-\mathbf{H}^T + 2\mathbf{K}\mathbf{R} \tag{19}$$

令该偏导为零，解得

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}_k^-\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\mathbf{P}_k^-\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} \tag{20}$$

所以只要求得 $\mathbf{P}_k^-$，即可求得 $\mathbf{K}$，下面计算 $\mathbf{P}_k^-$

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_k^- &= \hat{\mathbf{x}}_k^- - \mathbf{x}_k \\
&= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{k-1} - \mathbf{x}_k \\
&= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{k-1} - \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{B}\mathbf{u}_{k-1} - \mathbf{w}_{k-1} \\
&= \mathbf{A}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1} - \mathbf{x}_{k-1}) - \mathbf{w}_{k-1} \\
&= \mathbf{A}\mathbf{e}_{k-1} - \mathbf{w}_{k-1}
\end{aligned} \tag{21}$$

所以

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_k^- &= \mathbb{E}[\mathbf{e}_k^-\mathbf{e}_k^{-T}] \\
&= \mathbb{E}[(\mathbf{A}\mathbf{e}_{k-1} - \mathbf{w}_{k-1})(\mathbf{A}\mathbf{e}_{k-1} - \mathbf{w}_{k-1})^T] \\
&= \mathbf{A}\mathbb{E}[\mathbf{e}_{k-1}\mathbf{e}_{k-1}^T]\mathbf{A}^T + \mathbb{E}[\mathbf{w}_{k-1}\mathbf{w}_{k-1}^T] \\
&= \mathbf{A}\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}
\end{aligned} \tag{22}$$

至此我们推导出了 $\mathbf{P}_k^-$ 的递归形式，实际上这时已经可以把整个卡尔曼滤波的算法写出来了，但是式17形式还是比较复杂，可以用式20稍作化简，如下

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_k &= \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}\mathbf{H}\mathbf{P}_k^- + [\mathbf{K}\mathbf{R}\mathbf{K}^T - \mathbf{P}_k^-\mathbf{H}^T\mathbf{K}^T + \mathbf{K}\mathbf{H}\mathbf{P}_k^-\mathbf{H}^T\mathbf{K}^T] \\
&= \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}\mathbf{H}\mathbf{P}_k^- + [\mathbf{K}\mathbf{R} - \mathbf{P}_k^-\mathbf{H}^T + \mathbf{K}\mathbf{H}\mathbf{P}_k^-\mathbf{H}^T]\mathbf{K}^T \\
&= \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}\mathbf{H}\mathbf{P}_k^- + [\mathbf{K}(\mathbf{R} + \mathbf{H}\mathbf{P}_k^-\mathbf{H}^T) - \mathbf{P}_k^-\mathbf{H}^T]\mathbf{K}^T
\end{aligned} \tag{23}$$

由式20可得

$$\mathbf{K}(\mathbf{H}\mathbf{P}_k^-\mathbf{H}^T + \mathbf{R}) = \mathbf{P}_k^-\mathbf{H}^T \tag{24}$$

所以式23中，中括号里的运算结果就是零。于是我们得到 $\mathbf{P}_k$ 更简洁的表示

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}\mathbf{H}\mathbf{P}_k^- \tag{25}$$

1.4 算法描述

- 用式8计算 $\mathbf{x}_k$ 的先验估计 $\hat{\mathbf{x}}_k^-$
- 用式22计算得到先验估计的协方差矩阵 $\mathbf{P}_k^-$

- 用式20计算得到卡尔曼增益
- 用式9计算得到 $\mathbf{x}_k$ 的后验估计 $\hat{\mathbf{x}}_k$
- 用式25计算得到后验估计的协方差矩阵 $\mathbf{P}_k$

将上述公式整理于下方

- $\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{k-1}$
- $\mathbf{P}_k^- = \mathbf{A}\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}$
- $\mathbf{K} = \mathbf{P}_k^-\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\mathbf{P}_k^-\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1}$
- $\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_k^-)$
- $\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}\mathbf{H}\mathbf{P}_k^-$

线性卡尔曼滤波即是循环执行这五步的过程。可以看出前两步是对先验估计和先验协方差矩阵进行计算，第三步对卡尔曼增益进行计算，找到使后验方差最小的一个卡尔曼增益，最后两步则是对后验估计和后验协方差矩阵计算，形式非常优美对称。