# Harris Corner Note

FanmingL

2018 年 11 月 28 日

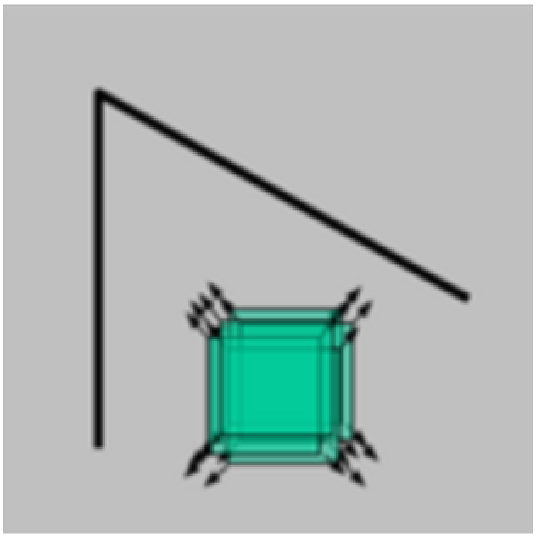

图 1: 包含角点、观测窗口的示例图

图 2: 在平坦位置平移窗口前后的图像

# 1 Harris 角点

## 1.1 问题提出

角点给人的主观映象就是，在 $x, y$ 方向像素变化特变明显，举个简单的例子，如图1，这是一张有着 L 形直线的图像，绿色的框表示一观测窗口，箭头表示观测窗口的移动方向，假设有一观测窗口，它在某一位置观测到的图像如图2左图，然后平移 $(\Delta x, \Delta y)$ 位移之后，观测到图2右图，此时，我们可以主观判断当前位置的图像是平坦的，同理图3是表示当前位置是直线，因为在一个方向（这里是 $x$ 方向）上像素变化很大。4表示当前位置是角点，以为在 $x, y$ 方向上，像素变化均很大。

所以我们可以利用这样一个窗口观测到的图像的变化情况去判断当前的位置是否是角点。

## 1.2 数学表示

假设当前窗口首先在 $(x, y)$ 点处，然后平移了 $(u, v)$ 位移，窗口函数为 $w(x, y)$，表示窗口在 $(x, y)$ 坐标处的权重（描述窗口的不同位置的重要程度，往往是越靠近中心的越重要），$I(x, y)$ 为图像矩阵，表示图像在图像的 $(x, y)$ 坐标处的灰度值。我们可以将窗口内的

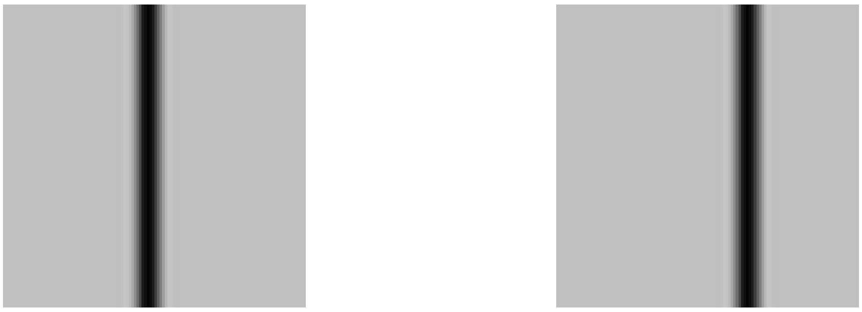

图 3: 在直线位置平移窗口前后的图像

图 4: 在角位置平移窗口前后的图像

灰度变化定义为如下，

$$E(u,v)=\sum_{x,y}w(x,y)[I(x+u,y+v)-I(x,y)]^2 \tag{1}$$

直观的理解就是图4的右图与左图对应像素相减，然后对每个像素取平方，再用窗口函数对其结果加权，最后求和。

为了简化计算，我们用泰勒一阶展式对式1进行近似。即

$$\begin{aligned} I(x+u,y+v) &= I(x,y)+I_xu+I_xv+O(u^2,v^2) \\ &\approx I(x,y)I_xu+I_xv \end{aligned} \tag{2}$$

其中 $I_x$ 表示在 $(x,y)$ 点 $I(x,y)$ 在 $x$ 方向的梯度，其中 $I_y$ 表示在 $(x,y)$ 点 $I(x,y)$ 在 $y$ 方向的梯度。所以式1可以简化为

$$E(u,v)\approx\sum_{x,y}w(x,y)[I_xu+I_yv]^2 \tag{3}$$

其中

$$[I_xu+I_yv]^2=\left[\begin{array}{cc} u & v \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} I_x^2 & I_xI_y \\ I_xI_y & I_y^2 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} u \\ v \end{array}\right] \tag{4}$$

令

$$\mathbf{M}=\sum_{x,y}w(x,y)\left[\begin{array}{cc} I_x^2 & I_xI_y \\ I_xI_y & I_y^2 \end{array}\right] \tag{5}$$

可以看出 $\mathbf{M}^T=\mathbf{M}$，所以 $\mathbf{M}$ 为实对称矩阵，故 $\mathbf{M}$ 的特征值分解可以写成如下形式，

$$\mathbf{M}=\mathbf{Q}\left[\begin{array}{cc} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{array}\right]\mathbf{Q}^T=\mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^T \tag{6}$$

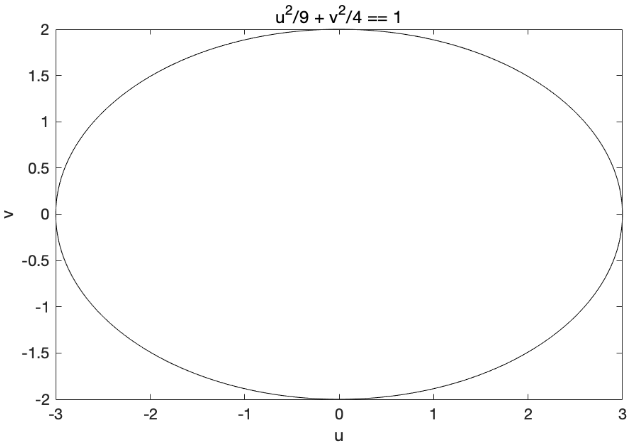


图 5: 椭圆示意图

其中 $\mathbf{Q}$ 为正交阵即 $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = I$ 所以式3可以写为

$$E(u,v) \approx \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix} \mathbf{M} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \left( \mathbf{Q}^T \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right)^T \Lambda \left( \mathbf{Q}^T \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right) \tag{7}$$

由于 $\mathbf{Q}$ 是一个正交矩阵，其表示了一个正交变换，不会改变向量 $[u,v]^T$ 的模长，故从几何角度看，就是原空间的基底绕原点旋转了一定角度，不妨我们设经正交变换之后的向量为 $[u',v']^T$。即

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \mathbf{Q}^T \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \tag{8}$$

所以式3可以继续化为

$$E(u,v) \approx \begin{bmatrix} u' & v' \end{bmatrix} \Lambda \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \lambda_1 u'^2 + \lambda_2 v'^2 \tag{9}$$

为了更直观的表示其中的关系，我们希望能够绘制出 $E(u,v)$ 的等高线，即在 $u',v'$ 空间中找出一条 $E(u,v)$ 为定值的线，不妨设该定值为 1，那么数学表示即

$$\lambda_1 u'^2 + \lambda_2 v'^2 = 1 \tag{10}$$

这很明显是一个椭圆曲线的表示式，其中 $u'$ 轴长为 $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$，$v'$ 轴长为 $\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$，如图5绘制了 $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = 4$ 的情况。为了转回到 $(u,v)$ 坐标系下，由于正交变换的等距变换性，我们只要对该椭圆进行旋转便可得到

$$\sum_{x,y} w(x,y)[I_x u + I_y v]^2 = 1 \tag{11}$$

的图像，类似图6。

至此我们绘制出了 $E(u,v)$ 的等高线，是一个椭圆，椭圆的短轴长为 $\frac{1}{\sqrt{\lambda_{max}}}$，长轴长为 $\frac{1}{\sqrt{\lambda_{min}}}$，原点处 $E(u,v) = 0$ 而等高线处 $E(u,v) = 1$，所以可以看出 $E(u,v)$ 的最快的变化方向即其短轴的方向，最慢的变化方向为其长轴的变化方向，其变化速度均正相关于 $\lambda_{min}$ 或 $\lambda_{max}$。在平坦的地方的特点是两个方向的变化均很慢，即 $\lambda_{min}$ 和 $\lambda_{max}$ 均很小，等高线

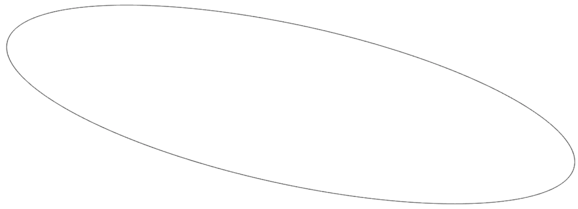

图 6: 倾斜的椭圆示意图

形状为一圆形，但半径很小；在直线处的特点是，$\lambda_{max}$ 很大而 $\lambda_{min}$ 很小，等高线形状为一比较扁的椭圆；只有在角点处 $\lambda_{min}$ 和 $\lambda_{max}$ 均很大，等高线形状为一半径比较大的圆形。所以我们要做的，就是找出那些满足 $\lambda_{min}$ 和 $\lambda_{max}$ 均很大的点。但是特征值的计算会比较耗费时间，于是 Harris 角点的作者想到用另一个表示式来代替特征值的寻找，即定义一角点响应函数 R

$$
\begin{aligned}
R &= det\mathbf{M} - k(Tr\mathbf{M})^2 \\
det\mathbf{M} &= \lambda_1\lambda_2 \\
Tr\mathbf{M} &= \lambda_1 + \lambda_2 \\
k &\in [0.04, 0.06]
\end{aligned}
\tag{12}
$$

这样一个表示式就避免了特征值的计算，同时他也发现

- |R| 比较小时，处于平坦区
- R 为比较大的负数时，处于边缘
- R 为比较大的正数时，为角点

### 1.3 算法流程

利用水平、竖直差分算子（可用 Sobel 算子）对图像进行卷积操作，水平、竖直差分算子分别为 $\mathbf{G}_x$，$\mathbf{G}_y$。

$$
\mathbf{G}_x = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \tag{13}
$$

$$
\mathbf{G}_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{14}
$$

之后会得到两张差分的图像 $I_X, I_y$，也就是式5中我们需要的，然后用 $I_x, I_y$ 和高斯窗口计算出每个像素点的 $\mathbf{M}$，并计算其行列式的值和迹的值，以此计算每个像素点的响应函数 $R$，最后我们能够得到一幅新的响应函数的图像，对大于阈值的像素点做非极大抑制，即若有多个点挤在一小块区域时，取这个区域的响应函数值最大的点做为特征点，其余点不计入特征点。