Взаимно-обратные функции

Пусть задана функция $y = f(x)$, где каждое значение $x \in D(f)$.

Понятно, что каждому значению $x_0 \in D(f)$ соответствует единственное значение $y_0 = f(x_0)$ из области значений функции. Если мы по данному значению функции y_0 захотим найти соответствующее значение аргумента, нам придётся решить уравнение относительно x, то есть решить уравнение $f(x) = y_0$.

Понятно, что такое уравнение может иметь не одно, а несколько и даже бесконечно много решений. Решениями нашего уравнения являются абсциссы всех точек, в которых прямая $y = y_0$ пересекает график функции $y = f(x)$.

Однако существуют такие функции, для которых уравнение $f(x) = y_0$ имеет единственное решение для каждого фиксированного значения y_0. Такие функции называют ***обратимыми***.

Запомните! Если функция $y = f(x)$ принимает каждое своё значение только при одном значении x, то эту функцию называют ***обратимой***.

Вот, например, рассмотрим две функции: $y = 5x + 2$ и $y = x^2$.

Функция $y = 5x + 2$ обратима, так как каждое значение y принимается при единственном значении аргумента x. Чтобы найти это значение, нам нужно решить уравнение $y = 5x + 2$ относительно x. Этим мы займёмся чуть позже.

Что касается функции $y = x^2$, то она не является обратимой, так как значения y принимает не при единственном значении аргумента x. Например, значение $y = 4$ функция $y = x^2$ принимает при $x_1 = 2; x_2 = -2$.

Итак, пусть $y = f(x)$ — ***обратимая функция***. В этом случае уравнение $f(x) = y$ можно при любом $y \in E(f)$ однозначно разрешить относительно x, то есть каждому $y \in E(f)$ поставить в соответствие единственное $x \in D(f)$ такое, что $f(x) = y$. Это соответствие определяет функцию x от y. Обозначим эту функцию $x = g(y)$. Но мы привыкли обозначать аргумент функции буквой $\boldsymbol{x}$, а значения – буквой $\boldsymbol{y}$. Перейдём к привычным для нас обозначениям. Для этого поменяем в этой записи местами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$. Получим функцию $y = g(x)$.

Функцию $y = g(x)$ называют ***обратной*** к функции $y = f(x)$.

Давайте найдём функцию, обратную к функции $y = 5x + 2$.

Решение. Решим уравнение $y = 5x + 2$. Для этого 2 перенесём в левую часть уравнения.

$$y - 2 = 5x$$

Затем разделим обе части нашего уравнения на 5. Получим

$$\frac{1}{5}(y - 2) = x$$

или, что то же самое,

$$x = \frac{1}{5}(y - 2)$$

Теперь поменяем в нашем равенстве местами x и y. Получим

$$y = \frac{1}{5}(x - 2)$$

Итак, функция $y = \frac{1}{5}(x - 2)$ обратна к функции $y = 5x + 2$.

<u>Сделаем вывод</u>. Если ***обратимая*** функция $y = f(x)$ задана формулой, то для нахождения ***обратной*** функции нужно решить уравнение $f(x) = y$ относительно x, а затем поменять местами x и y.

Вернёмся к нашему примеру. Мы с вами показали, что функция $y = \frac{1}{5}(x - 2)$ является обратной к функции $y = 5x + 2$. Обратите внимание: в свою очередь и функция $y = 5x + 2$ также будет являться обратной к функции $y = \frac{1}{5}(x - 2)$. Такие функции называют ***взаимно обратными***.

<u>Сделаем вывод:</u> если $g(x)$ – функция, ***обратная*** к функции $f(x)$, то и $f(x)$ – функция, ***обратная*** к $g(x)$, при этом область определения ***обратной функции*** совпадает со множеством значений *исходной* функции, а множество значений ***обратной функции*** совпадает с областью определения *исходной* функции. Это свойство, которое показывает, как связаны функция и ***обратная*** к ней.

Вы уже знаете, что функция называется ***возрастающей*** на некотором промежутке, если в этом промежутке большему значению аргумента соответствует большее значение функции. И функция называется ***убывающей*** в некотором промежутке, если в этом промежутке большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции. Чаще всего ***возрастающие*** и ***убывающие функции*** называют одним словом — ***монотонные***.

Докажем **теорему**. ***Монотонная*** функция является ***обратимой***.

Доказательство. Пусть функция $y = f(x)$, например, возрастает и пусть y_0 — её значение в некоторой точке x_0, то есть $y_0 = f(x_0)$.

Тогда если $\boldsymbol{x \in D(f)}$, то при $\boldsymbol{x > x_0}$ выполняется неравенство $f(x) > f(x_0) = y_0$, в свою очередь, при $\boldsymbol{x < x_0}$ выполняется неравенство $f(x) < f(x_0) = y_0$. Понятно, что значение y_0 функция $f(x)$ принимает только в одной точке x_0, а значит, является обратимой.

Что и требовалось доказать.

Для убывающей функции доказательство проводится аналогично.

К примеру, рассмотрим функцию $y = x^5$. Эта функция возрастающая, значит, является ***обратимой***. Не сложно догадаться, что обратной к ней будет функция $y = \sqrt[5]{x}$.

Из теоремы вытекает следующее **следствие**: если функция $y = f(x)$ возрастает (убывает), то для неё существует обратная функция, и она возрастает (убывает) на множестве значений данной функции.

Другими словами, если функция $y = f(x)$ возрастает, то понятно, что с увеличением x значения y также увеличиваются и, наоборот, с увеличением y увеличиваются x.

Это означает, что обратная функция также возрастает.

И аналогично с убывающей функцией: если функция $y = f(x)$ убывает, то ***обратная*** к ней функция также убывает.

Кстати, функция, не являющаяся ***монотонной***, может не иметь обратной. Примером такой функции служит функция $y = x^2$. Мы с вами уже говорили, что эта функция не имеет ***обратной***, если рассматривать её на всей числовой оси. Однако если мы с вами будем рассматривать функцию $y = x^2$ только при $x \geq 0$, то на промежутке $[0; +\infty)$ она возрастает и, следовательно, имеет ***обратную***. Функция $y = \sqrt{x}$ является ***обратной*** к функции $y = x^2$ при $x \geq 0$.

Данный пример показывает, что некоторые функции ***обратной*** функции не имеют, если их рассматривать на всей области определения, и имеют ***обратную*** функцию, если область определения сузить. Часто в качестве сужения области определения берут интервал ***монотонности*** функции $f(x)$.

А теперь давайте докажем ещё одну **теорему**. Если функция имеет ***обратную***, то график ***обратной функции*** симметричен графику данной функции относительно прямой $y = x$.

<u>Доказательство</u>. Пусть некоторая точка с координатами $(x_0; y_0)$, принадлежит графику функции $y = f(x)$, то есть $y_0 = f(x_0)$.

Из существования обратной функции следует, что $x_0 = g(y_0)$. Значит, точка с координатами $(y_0; x_0)$ принадлежит графику обратной функции $y = g(x)$. Следовательно, точки с координатами $(x_0; y_0)$ и $(y_0; x_0)$ симметричны относительно прямой $y = x$.

Что и требовалось доказать.

Хотелось бы обратить внимание, что и знакомая вам ***степенная функция*** $y = x^p$ с областью определения $x > 0$ и $p \neq 0$ ***обратима***, так как она ***монотонна***. ***Обратной*** к ***степенной*** функции $y = x^p$ при $x > 0$ и $p \neq 0$ является функция $y = x^{\frac{1}{p}}$.

А теперь давайте приступим к практической части нашего урока.

Задание. Найдите обратную функцию для функции $y = \frac{x-1}{3x+2}$.

Решение. Решим это уравнение относительно x.

Имеем $y(3x + 2) = x - 1$

Раскроем скобки в левой части нашего уравнения. Получим, $3xy + 2y = x - 1.$

Затем перенесём слагаемое $3xy$ в правую часть уравнения, а -1 – в левую. Вынесем общий множитель x за скобку. Заметим, что если выражение $1 - 3y = 0$, то есть $y = \frac{1}{3}$, то последнее соотношение превращается в неверное равенство. Значит, можем разделить обе части нашего уравнения на выражение $1 - 3y$.

Получим $x = \frac{2y+1}{1-3y}$. Не забудем поменять x и y местами. Тогда функция $y = \frac{2x+1}{1-3x}$ обратная к функции $y = \frac{x-1}{3x+2}$.