Показательная функция.

Перечень вопросов, рассматриваемых в теме:

- какая функция называется показательной;

- какие свойства имеет показательная функция в зависимости от ее основания;

- какой вид имеет график показательной функции в зависимости от ее основания;

- примеры реальных процессов, описываемых показательной функцией.

Глоссарий по теме

Функция вида $y = a^x$, *a>0, a≠1* называется **показательной функцией с основанием *a***.

Функция называется **монотонно возрастающей** на промежутке <a; b>, если (чем больше аргумент, тем больше значение функции).

Функция называется **монотонно убывающей** на промежутке <a; b>, если $\forall x_1, x_2 : x_1 > x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ (чем больше аргумент, тем меньше значение функции).

Теоретический материал для самостоятельного изучения

1. Определение, свойства и график показательной функции

Определение:

Функция вида $y=a^x$, *a>0, a≠1* называется **показательной функцией с основанием *a***.

Такое название она получила потому, что независимая переменная стоит в показателе. Основание a – заданное число.

Для положительного основания значение степени a^x можно найти для любого значения показателя x – и целого, и рационального, и иррационального, то есть для любого действительного значения.

Сформулируем основные свойства показательной функции.

1. Область определения.

Как мы уже сказали, степень a^x для $a>0$ определена для любого действительного значения переменной x, поэтому область определения показательной функции $D_{(y)}=R$.

2. Множество значений.

Так как основание степени положительно, то очевидно, что функция может принимать только положительные значения.

Множество значений показательной функции $E_{(y)}=R^+$, или $E_{(y)}=(0; +\infty)$.

3. Корни (нули) функции.

Так как основание $a>0$, то ни при каких значениях переменной x функция не обращается в 0 и корней не имеет.

4. Монотонность.

При $a>1$ функция монотонно возрастает.

При $0<a<1$ функция монотонно убывает.

5. При любом значении a значение функции y (0) = a^0 =1.

6. График функции.

При $a>1$

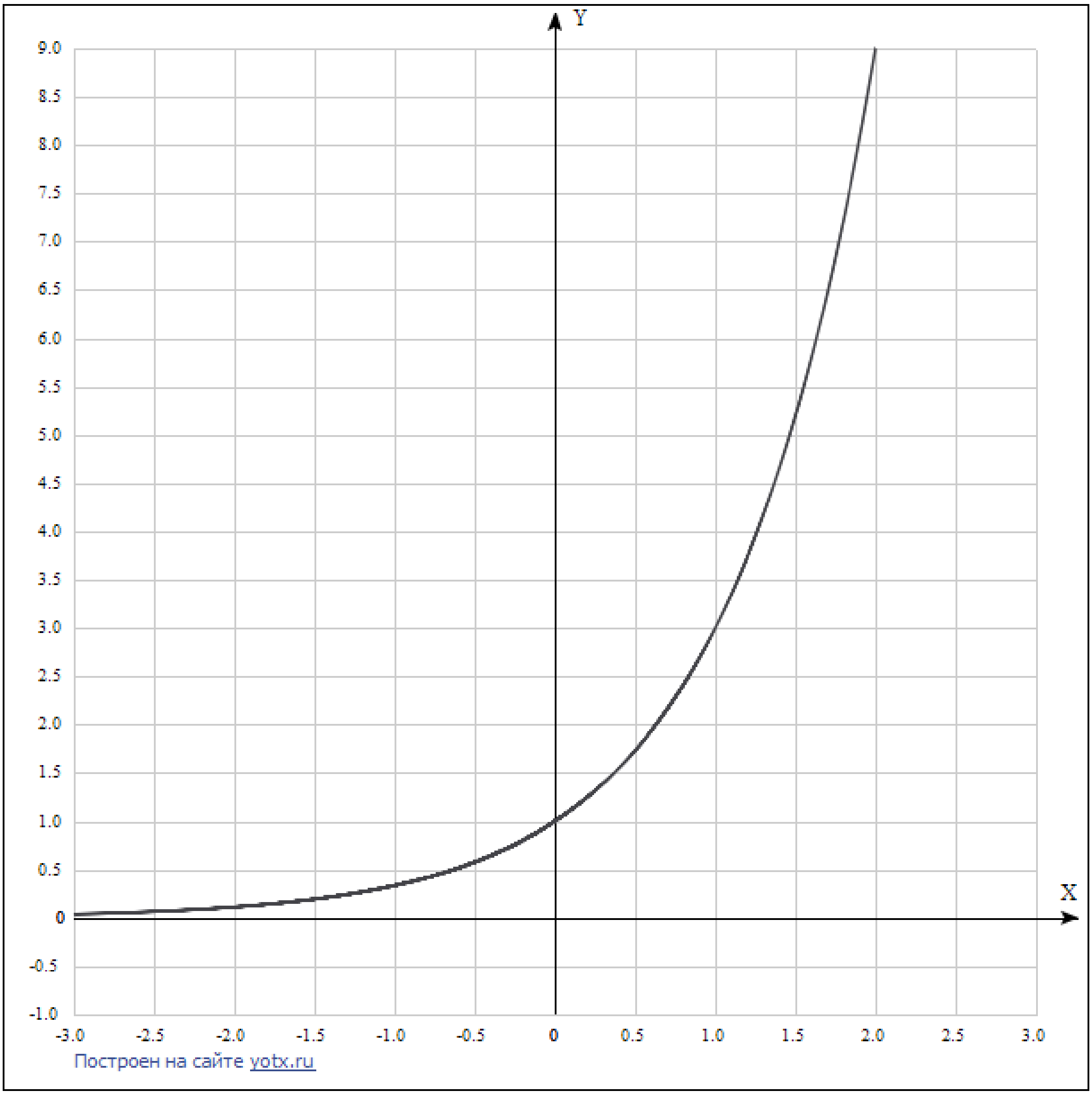

Рисунок 1 – График показательной функции при $a>1$

При $0<a<1$

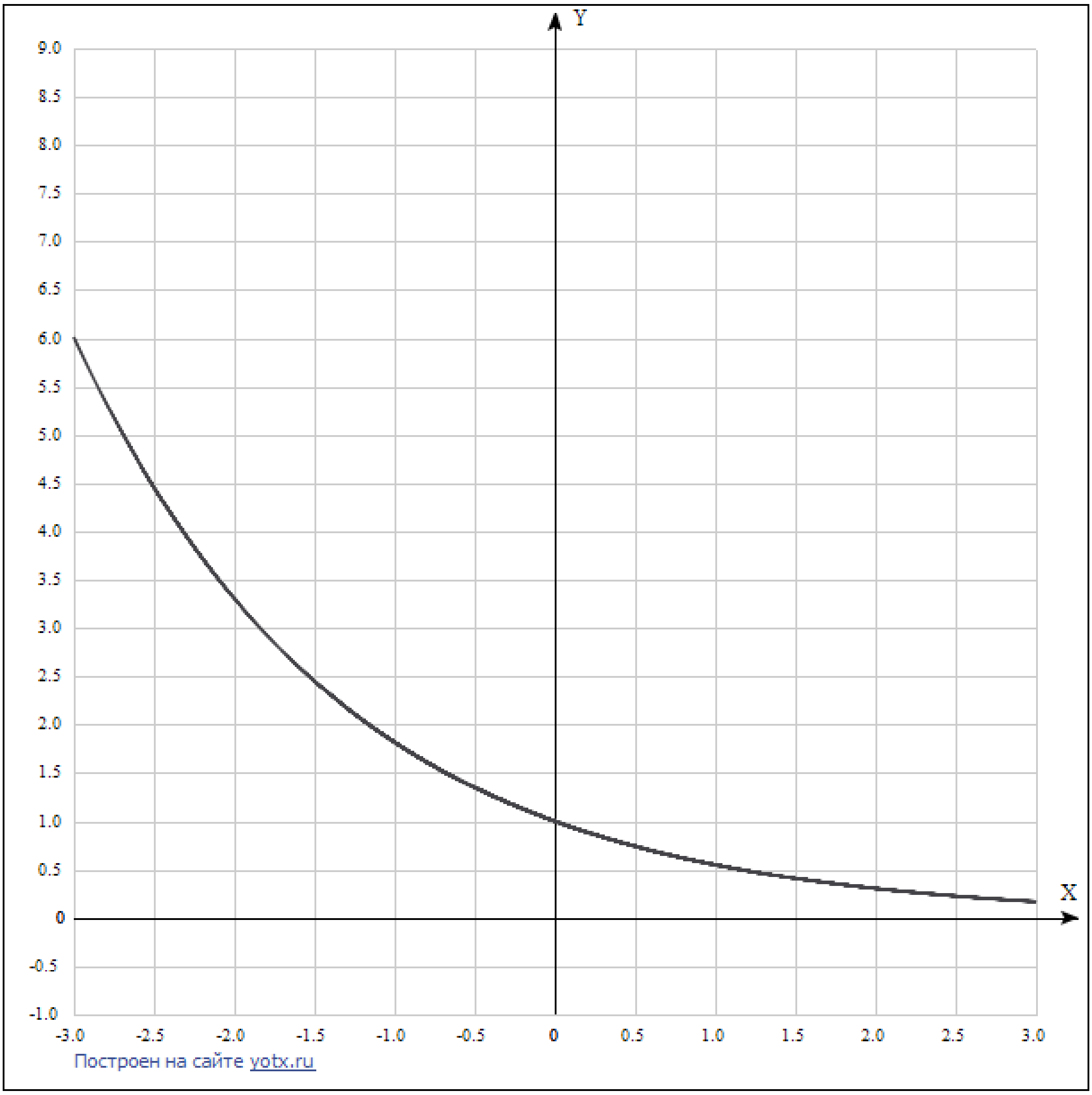

Рисунок 2 – График показательной функции при 0<*a*<*1*

Независимо от значения основания *a* график функции имеет горизонтальную асимптоту y=0. Для 0<*a*<*1* при x стремящемся к плюс бесконечности, для *a*>*1* при x стремящемся к минус бесконечности.

2. Рассмотрим пример исследования функции $y=-3^x+1$.

Решение:

1) Область определения функции – любое действительное число.

2) Найдем множество значений функции.

Так как $3^x>0$, то $-3^x<0$, значит, $-3^x+1<1$, то есть множество значений функции $y=-3^x+1$ представляет собой промежуток (-∞; 1).

3) Так как функция $y=3^x$ монотонно возрастает, то функция $y=-3^x$ монотонно убывает. Значит, и функция $y=-3^x+1$ также монотонно убывает.

4) Эта функция будет иметь корень: $-3^x+1=0$, $3^x=1$, $x=0$.

5) График функции

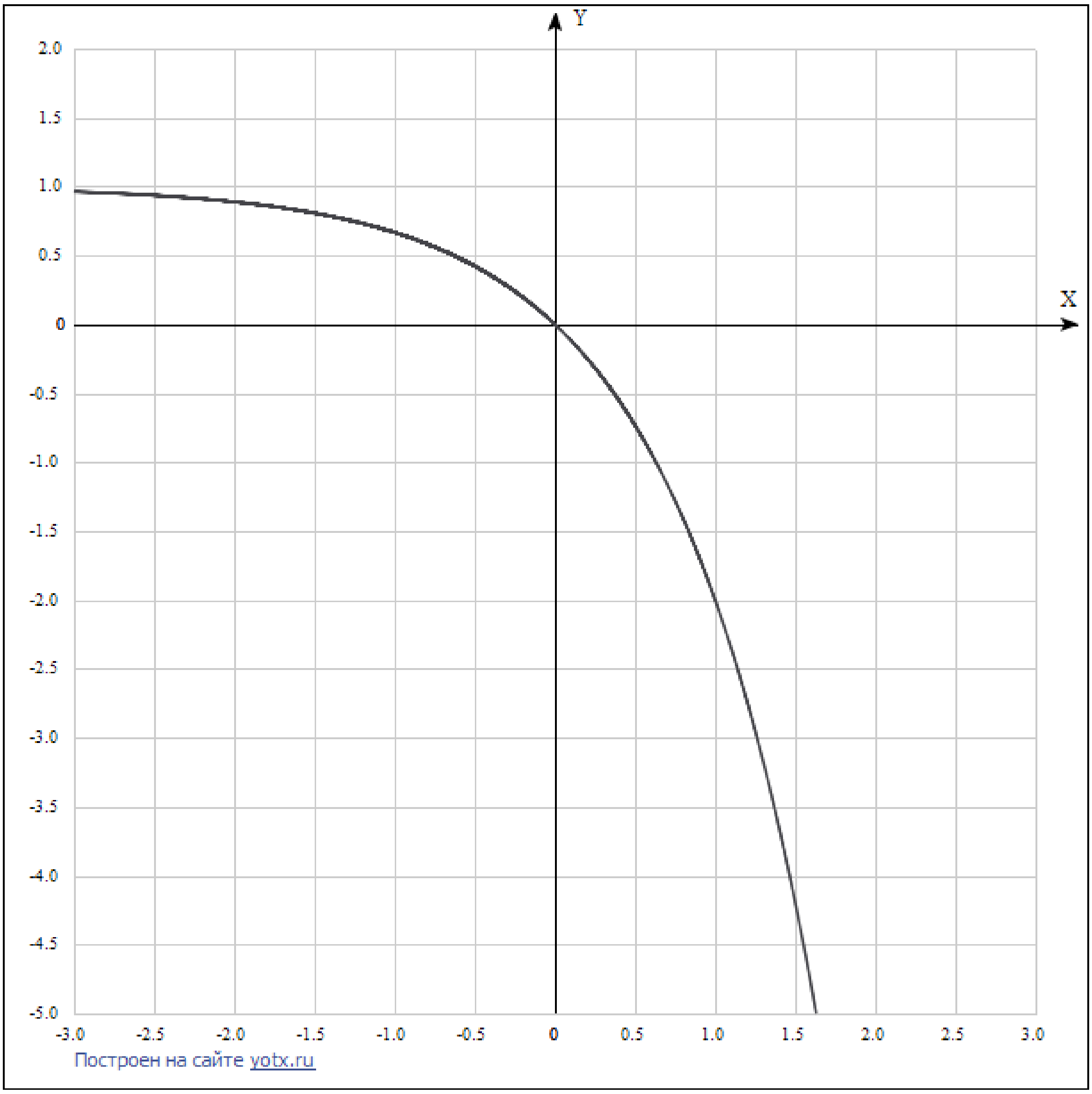

Рисунок 3 – График функции $y=-3^x+1$

6) Для этой функции горизонтальной асимптотой будет прямая $y=1$.

3. Примеры процессов, которые описываются показательной функцией.

1) Рост различных микроорганизмов, бактерий, дрожжей и ферментов описывает формула: $N= N_0 \cdot a^{kt}$, N– число организмов в момент времени t, t – время размножения, a и k – некоторые постоянные, которые зависят от температуры размножения, видов бактерий. Вообще это закон размножения при благоприятных условиях (отсутствие врагов, наличие необходимого количества питательных веществ и т.п.). Очевидно, что в реальности такого не происходит.

2) Давление воздуха изменяется по закону: $P=P_0 \cdot a^{-kh}$, P– давление на высоте h, P_0 – давление на уровне моря, h – высота над уровнем моря, a и k – некоторые постоянные.

3) Закон роста древесины: $D=D_0 \cdot a^{kt}$, D– изменение количества древесины во времени, D_0 – начальное количество древесины, t – время, a и k – некоторые постоянные.

4) Процесс изменения температуры чайника при кипении описывается формулой: $T=T_0+(100- T_0)e^{-kt}$.

5) Закон поглощения света средой: $I=I_0 \cdot e^{-ks}$, s– толщина слоя, k – коэффициент, который характеризует степень замутнения среды.

6) Известно утверждение, что количество информации удваивается каждые 10 лет. Изобразим это наглядно.

Примем количество информации в момент времени $t=0$ за единицу. Тогда через 10 лет количество информации удвоится и будет равно 2. Еще через 10 лет количество информации удвоится еще раз и станет равно 4 и т.д.

Если предположить, что поток информации изменялся по тому же закону до того года, который принят за начальный, то будем двигаться по оси абсцисс влево от начала координат и над значениями аргумента -10, -20 и т.д. будем наносить на график значения функции уже в порядке убывания — уменьшая каждый раз вдвое.

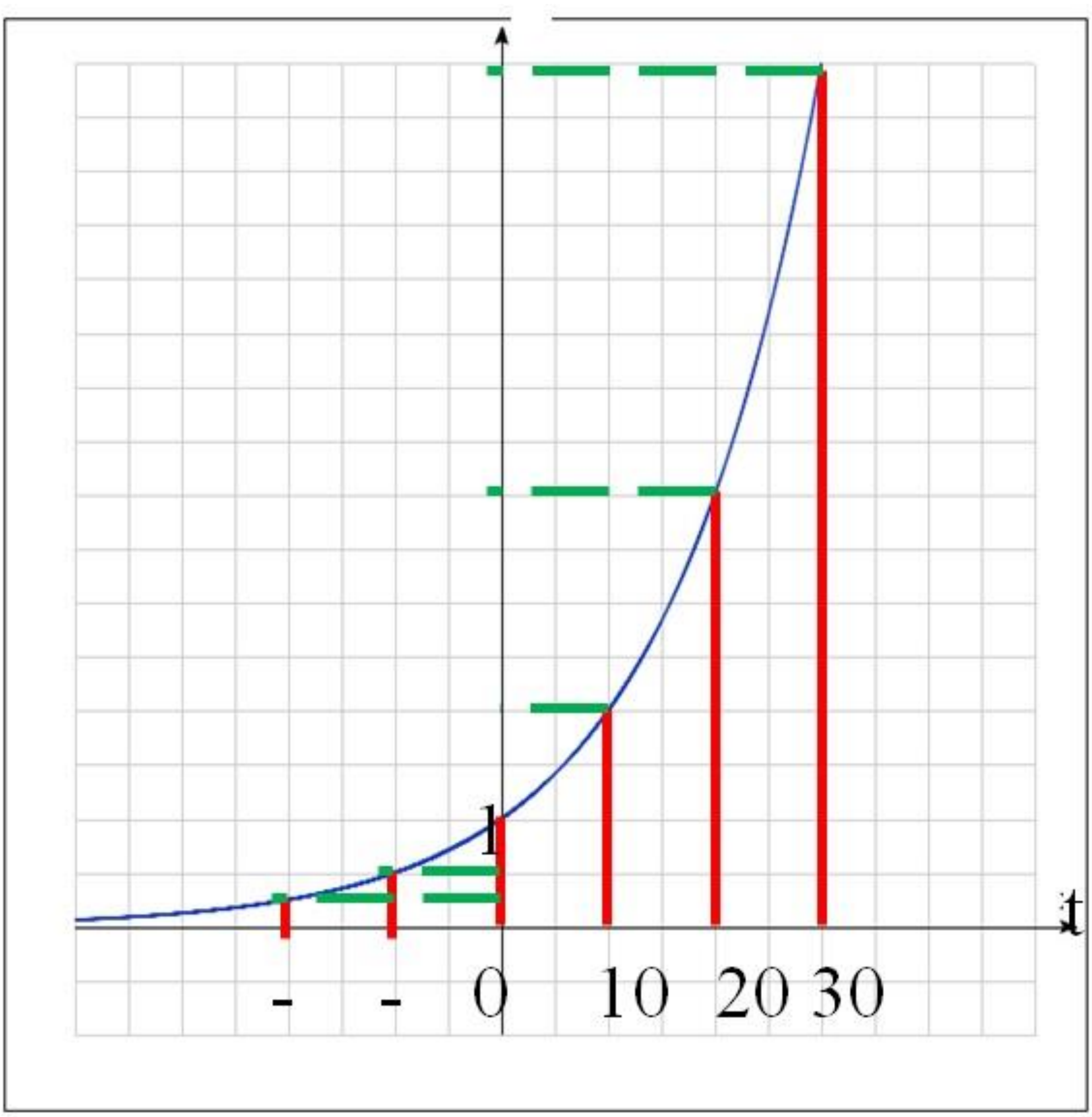

Рисунок 4 – График функции $y=2^x$ – изменение количества информации

Закон изменения количества информации описывается показательной функцией $y=2^x$.

Примеры и разбор решения заданий тренировочного модуля

Пример 1.

Выберите показательные функции, которые являются монотонно убывающими.

1. $y=3^{x-1}$
2. $y=(0,4)^{x+1}$
3. $y=(0,7)^{-x}$
4. $y=\left(\frac{3}{7}\right)^{0,5x}$
5. $y=3^{-2x}$
6. $y=10^{2x+1}$

Решение:

Монотонно убывающими являются показательные функции, основание которых положительно и меньше единицы. Такими функциями являются: 2) и 4) (независимо от того, что коэффициент в показателе функции 4) равен 0,5), заметим, что функцию 4) можно переписать в виде: $y = \sqrt{\left(\frac{3}{7}\right)}^{x}$, используя свойство степеней.

Также монотонно убывающей будет функция 5). Воспользуемся свойством степеней и представим ее в виде:

$$y = 3^{-2x} = (3^{-2})^{x} = \left(\frac{1}{9}\right)^{x}$$

Ответ: 2) 4) 5)

Пример 2.

Найдите множество значений функции $y=3^{x+1}-3$.

Решение:

Рассмотрим функцию.

Так как $3^{x+1}>0$, то $3^{x+1}-3>-3$, то есть множество значений:

$(-3; +\infty)$.

Пример 3.

Найдите множество значений функции $y=|2^x-2|$

Рассмотрим функцию.

$2^x-2>-2$, но, так как мы рассматриваем модуль этого выражения, то получаем: $|2^x-2|\geq 0$.