Равносильные уравнения и неравенства

Перечень вопросов, рассматриваемых в теме

1) понятие равносильного уравнения;

2) понятие равносильного неравенства;

3) понятие уравнения-следствия;

4) основные теоремы равносильности.

Глоссарий по теме

Два уравнения называют **равносильными,** если они имеют одинаковые корни или если оба уравнения не имеют корней.

Если при переходе от одного уравнения к другому потери корней не происходит, то второе уравнение называет **следствием** первого уравнения. Иначе, если все корни первого уравнения являются корнями второго уравнения, то второе уравнения называется следствием первого уравнения.

Неравенства, имеющие одно и то же множество решений, называют равносильными. Неравенства, не имеющие решений, также являются равносильными.

Теоретический материал для самостоятельного изучения

Определение. Два уравнения с одной переменной

$f(x) = g(x)$ и $p(x) = h(x)$ называют равносильными, если множества их корней совпадают.

Иными словами, два уравнения называют равносильными, если они имеют одинаковые корни или если оба уравнения не имеют корней.

Примеры

1) Уравнения $4x - 3 = 2x + 3$ и $2x = 6$ равносильны, т.к. каждое из них имеет только один корень x=3.

2) Уравнения $(x - 2)(x + 5) = 0$ и $x^2 + 3x - 10 = 0$ также равносильны, т.к. у них одни и те же корни $x_1 = 2, x_2 = -5$.

3) А вот уравнения $3x = 6$ и $4x^2 = 16$ не равносильны, потому что у первого уравнения корень x=2, а у второго уравнения два корня x=2 и x=-2.

Из определения равносильности следует, что два уравнения равносильны, если каждый корень первого уравнения является корнем второго уравнения, и наоборот.

Решение уравнения осуществляется в три этапа.

Первый этап — технический. На этом этапе осуществляют преобразования по схеме (1) → (2) → (3)→ (4) → ... и находят корни последнего (самого простого) уравнения указанной цепочки.

Второй этап — анализ решения. На этом этапе, анализируя проведенные преобразования, отвечают на вопрос, все ли они были равносильными.

Третий этап — проверка. Если анализ, проведенный на втором этапе, показывает, что некоторые преобразования могли привести к уравнению-следствию, то обязательна проверка всех найденных корней их подстановкой в исходное уравнение.

Реализация этого плана связана с поисками ответов на четыре вопроса.

- Как узнать, является ли переход от одного уравнения к другому равносильным преобразованием?
- Какие преобразования могут перевести данное уравнение в уравнение-следствие?
- Если мы в конечном итоге решили уравнение-следствие, то как сделать проверку в случае, когда она сопряжена со значительными вычислительными трудностями?
- В каких случаях при переходе от одного уравнения к другому может произойти потеря корней и как этого не допустить?

Из курса средней школы мы знаем, что можно сделать следующие преобразования уравнений: любой член уравнения можно перенести из одной части в другую, изменив его знак на противоположный.

Обе части уравнения можно умножить или разделить на одной и то же число, не равное нулю.

Если при переходе от одного уравнения к другому потери корней не происходит, то второе уравнение называет следствием первого уравнения. Иначе, если все корни первого уравнения являются корнями второго уравнения, то второе уравнения называется следствием первого уравнения.

Из этого определения и определения равносильности уравнений следует, что:

1. если два уравнения равносильны, то каждое из них является следствием другого;

2. если каждое из двух уравнений является следствием другого, то эти уравнения равносильны.

При решении уравнений главное- не потерять корни, а наличие посторонних корней можно установить проверкой. Поэтому важно следить за тем, чтобы при преобразовании уравнения каждое следующее уравнение было следствием предыдущего.

Стоит отметить, что посторонние корни могут получиться при умножении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестное; а вот потеря корней может произойти при делении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестное.

Итак, сформулируем основные теоремы, которые используются при решении равносильных уравнений:

Определение. Областью определения уравнения **f(x) = g(x)** или областью допустимых значений переменной (ОДЗ) называют множество тех значений переменной **x,** при которых одновременно имеют смысл выражения

f(x)и **g(x).**

Теорема 1. Если какой-либо член уравнения перенести из одной части уравнения в другую с противоположным знаком, то получится уравнение, равносильное данному.

Теорема 2. Если обе части уравнения возвести в одну и туже нечетную степень, то получится уравнение, равносильное данному.

Теорема 3. Показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (где a > 0, a≠1) равносильно уравнению f(x) = g(x).

Теорема 4. Если обе части уравнения f(x) = g(x) умножить на одно и то же выражение h(x), которое:

а) имеет смысл всюду в области определения (в области допустимых значений) уравнения f(x) = g(x)

б) нигде в этой области не обращается в 0, то получится уравнение f(x)h(x) = g(x)h(x), равносильное данному в его ОДЗ.

Следствием теоремы 4: если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному**.**

Теорема 5. Если обе части уравнения f(x)=g(x) неотрицательны в ОДЗ уравнения, то после возведения обеих его частей в одну и ту же четную степень n получится уравнение $(f(x))^n = (g(x))^n$ равносильное данному в его ОДЗ.

Краткая запись теорем 4, 5.

4. f(x) = g(x) ⇔h(x)f(x) = h(x)g(x), где h(x) ≠0

и h(x) имеет смысл в ОДЗ данного уравнения.

5. f(x) = g(x) ⇔ $(f(x))^n = (g(x))^n$, где f(x)≥0, g(x)≥0

и n=2k (чётное число).

Например, x – 1 = 3; x = 4

Умножим обе части на (x – 2):

(x – 2)(x – 1) = 3(x – 2); x = 4 и x = 2 – посторонний корень$\Rightarrow$ **проверка!**

Равносильность неравенств с неизвестным определяется аналогично.

Неравенства, имеющие одно и то же множество решений, называют равносильными. Неравенства, не имеющие решений, также являются равносильными.

Разбор решения заданий тренировочного модуля

Пример 1.

Решим уравнение: $\sqrt{x} = x - 2$

Возведем в квадрат обе части уравнения, получим:

$x = (x - 2)^2$, которое не будет равносильно исходному уравнению, потому что у этого уравнения два корня $x_1 = 1, x_2 = 4$, а у первоначального уравнения только один корень x=4.

Пример 2.

1. Неравенства $\frac{x-3}{x^2+1} < 0$ и x-3<0 равносильны, так как имеют одно и то же множество решений x<3.
2. Неравенства $\frac{2x}{x-1} > 1$ и 2x>x-1 не равносильны, так как решениями первого являются числа x<-1 и x>1, а решениями второго-числа x>-1. При решении неравенств обычно данное неравенство преобразуется в ему равносильное.