

Лекция. Понятие о пределе последовательности.

Существование предела монотонной ограниченной последовательности.

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия и ее сумма

На прошлом занятии мы начали изучать числовые последовательности. Познакомились со способами задания и свойствами числовых последовательностей. В учебниках числовую последовательность, иногда, рассматривают как функцию числового аргумента. Иначе говоря, каждому натуральному числу n поставлено в соответствие действительное число x_n . Числовые последовательности могут обладать свойствами обычных функций.

Возрастающие и убывающие последовательности

Определение 1. Числовую последовательность $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ называют **возрастающей последовательностью**, если каждый член этой последовательности **больше** предшествующего члена.

Другими словами, для всех $n = 1, 2, 3, \dots$ выполнено неравенство $x_{n+1} > x_n$, например, последовательность натуральных чисел $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ является **возрастающей последовательностью**.

Определение 2. Числовую последовательность $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ называют **убывающей последовательностью**, если каждый член этой последовательности **меньше** предшествующего члена.

Другими словами, для всех $n = 1, 2, 3, \dots$ выполнено неравенство $x_{n+1} < x_n$, например, последовательность $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ заданная формулой $x_n = \frac{1}{2^n}$, является **убывающей последовательностью**.

Числовая последовательность $1, -1, 1, -1, \dots$ заданная формулой $x_n = (-1)^n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ не является ни **возрастающей**, ни **убывающей** последовательностью.

Определение 3. Возрастающие и убывающие числовые последовательности называют **монотонными последовательностями**.

Ограниченные и неограниченные последовательности

Определение 4. Числовую последовательность $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, называют **ограниченной сверху**, если существует такое число M , что каждый член этой последовательности **меньше** числа M .

Другими словами, для всех $n = 1, 2, 3, \dots$ выполнено неравенство $x_n < M$

Определение 5. Числовую последовательность $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ называют **ограниченной снизу**, если существует такое число m , что каждый член этой последовательности **больше** числа m .

Другими словами, для всех $n = 1, 2, 3, \dots$ выполнено неравенство $x_n > m$,
Например, числовая последовательность $1, 4, 9, \dots, n^2, \dots$ заданная формулой $x_n = n^2, n = 1, 2, 3, \dots$, **ограничена снизу**, например, числом 0. Однако эта последовательность **неограничена сверху**.

Определение 6. Числовую последовательность $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, называют **ограниченной**, если она **ограничена и сверху, и снизу**.

Другими словами, существуют такие числа M и m , что для всех $n = 1, 2, 3, \dots$ выполнено неравенство $m < x_n < M$

Например, последовательность $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ заданная формулой $x_n = \frac{1}{2^n}$, является **ограниченной последовательностью**, поскольку для

всех $n = 1, 2, 3, \dots$ выполнено неравенство $0 < \frac{1}{2^n} < 1$

Определение 7. Числовые последовательности, которые не являются ограниченными, называют **неограниченными последовательностями**.

Последовательности удобно изображать графически. Существует два способа отображения последовательностей: на числовой прямой и на координатной плоскости.

На рис. 1.5 и 1.6 приведены примеры изображения последовательности $a_n = \frac{1}{n}$ соответственно на числовой прямой и на координатной плоскости. На числовой прямой (см. рис. 1.5) значения соответствующих членов последовательности изображаются точками и помечаются символами a_n , чтобы можно было установить их номера. На плоскости в декартовой системе координат изображается график функции $f(n)$, где на горизонтальной оси откладывается значение аргумента, а на вертикальной — значение функции (члена последовательности). Заметим, что функция в этом случае задается только для натуральных значений аргумента (см. рис. 1.6).

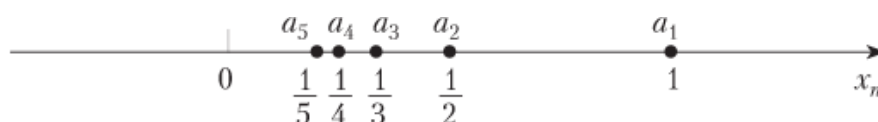


Рис. 1.5. Изображение последовательности на числовой прямой

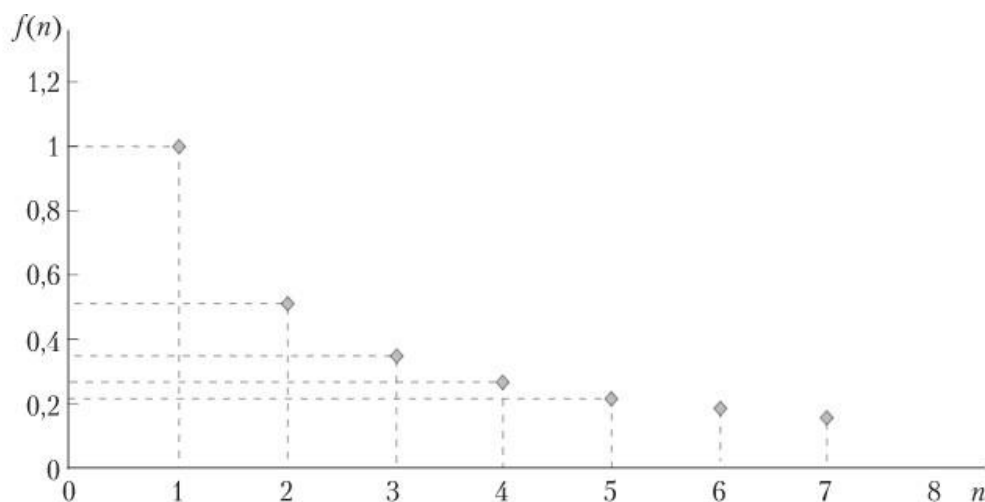


Рис. 1.6. Изображение последовательности на координатной плоскости

Понятно, что все члены последовательности мы изобразить не можем, поскольку их бесконечное множество. Однако тенденцию их расположения при неограниченном увеличении n обычно проследить удастся.

Графическое изображение последовательности может облегчить процедуру подбора формулы для последовательности чисел по нескольким первым членам. Для этого следует изобразить на плоскости соответствующие точки и «увидеть» класс функций, которыми может описываться искомая последовательность. Затем задать функцию с неопределенными коэффициентами и по заданным первым членам установить эти коэффициенты.

Рассмотрим последовательность с общим членом $a_n = -\frac{1}{n}$. Изобразим ее члены на числовой оси и на координатной плоскости (рис. 1.9).

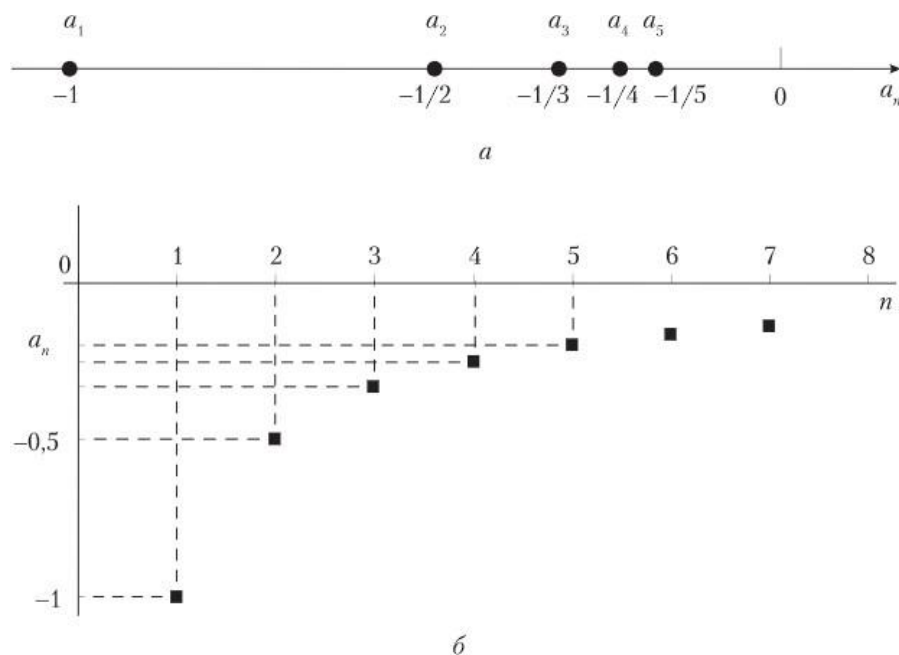


Рис. 1.9. Последовательность с общим членом $a_n = -\frac{1}{n}$:
 a — на числовой оси; b — на координатной плоскости

Как мы видим, точки, изображающие члены последовательности, с ростом номера n накапливаются около точки 0 (значения a_n стремятся к нулю при неограниченном возрастании n). Этот факт обозначается так: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (читается: «предел последовательности $\{a_n\}$ при n , стремящемся к бесконечности, равен нулю»). Символ \lim введен в употребление Исааком Ньютоном и происходит от латинского слова *limes*, что означает предел. Внизу под словом «предел» пишется переменная, которая (когда мы имеем дело с последовательностями) устремляется к бесконечности. Справа от слова «предел» указывается переменная величина, зависящая от номера члена последовательности, предел которой собственно и вычисляется.

Определение 8. Число a называют **пределом числовой последовательности** $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ если для любого положительного числа ε найдется такое натуральное число N , что при всех $n > N$ выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$.

Условие того, что число a является пределом
числовой последовательности $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, **записывают** с помощью

обозначения
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

(читается как: «Предел a_n при n , стремящемся к бесконечности, равен a ».) То же самое соотношение можно **записать** следующим образом: $a_n \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$.

(читается как: « a_n стремится к a при n , стремящемся к бесконечности»).

Замечание. Если для последовательности $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ найдется такое число a , что $a_n \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$, то эта последовательность ограничена.

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия и ее сумма

Знаменитая задача древности состоит в том, догонит ли когда-нибудь Ахиллес идущую впереди черепаху. Несмотря на то, что Ахиллес идет в 10 раз быстрее черепахи: как только Ахиллес пройдет пространство, отделяющее его от черепахи, черепаха пройдет вперед его ровно на одну десятую этого пространства; Ахиллес пройдет эту одну десятую, черепаха пройдет одну сотую, и так дол бесконечности.

Давайте разберем эту задачу:

Ахиллес пробегает отрезки, равные $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \dots$ от начального расстояния. Сложив бесконечно убывающую прогрессию

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9}$$

мы видим какой путь пробегает Ахиллес

до встречи с черепахой.

Однако в этом решении не все так просто. Это решение основано на некотором бесконечном процессе. Для того, чтобы обосновать рассуждения, связанные с бесконечными процессами, была создана теория пределов. Такие математические понятия, как сумма бесконечного ряда, производная,

интеграл, непрерывность могут быть определены с помощью понятия предела, что позволяет строго доказать и применять свойства этих понятий.

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ с определенным первым элементом a_1 и рекуррентным соотношением

$$a_{n+1} = a_n \cdot q,$$

где q – постоянное число ($q \neq 1$), называется геометрической прогрессией.

Число q называется знаменателем геометрической прогрессии. Рекуррентное соотношение, определяющее геометрическую прогрессию, словами формулируется так: *Всякий член геометрической прогрессии, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на постоянное число q .*

Рассмотрим бесконечную геометрическую прогрессию $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$
Вычислим суммы двух, трёх, четырёх и т. д. членов прогрессии:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

...

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

Получилась последовательность $S_1, S_2, S_3 \dots S_n$

Как всякая числовая последовательность, она может сходиться или расходиться.

Если последовательность S_n сходится к пределу S , то число S называют суммой геометрической прогрессии (обратите внимание: не суммой n членов геометрической прогрессии, а суммой геометрической прогрессии).

Если же эта последовательность расходится, то о сумме геометрической прогрессии не говорят, хотя о сумме первых n членов геометрической прогрессии можно, разумеется, говорить и в этом случае.

Таким образом, одним из наиболее простых предельных переходов является вычисление суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Он основан на рассмотрении частичных сумм

$$S_n = a_1 (1 + q + \dots + q^{n+1}) = a_1 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Главным является утверждение о том, что «предел последовательности q^n при $|q| < 1$, равен нулю».

Определение. Геометрическую прогрессию называют бесконечно убывающей, если ее знаменатель q по модулю меньше 1: $|q| < 1$

Такое название возникло потому, что при $|q| < 1$ общий член прогрессии $a_n = a_1 q^{n-1}$ становится сколь угодно малым, «бесконечно убывает»

Если знаменатель q геометрической прогрессии a_n удовлетворяет неравенству $|q| < 1$, то сумма прогрессии S существует и вычисляется по формуле

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

Понятие о непрерывности функции.

1. Приращение аргумента и функции. Для функции $y = f(x)$ разность двух значений аргумента x_1 и x_2 , лежащих в области определения функции, называется *приращением аргумента* и обозначается символом Δx , т. е. $x_2 - x_1 = \Delta x$.

Разность двух значений функции $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$ (из множества значений функции, которые она может принимать), соответствующих значениям аргумента x_1 и x_2 , называется *приращением функции* и обозначается символом Δy , т. е. $\Delta y = f(x_2) - f(x_1) = y_2 - y_1$.

Если $x_2 > x_1$, то $\Delta x > 0$; если же $x_2 < x_1$, то $\Delta x < 0$. Соответственно, и приращение функции $\Delta y > 0$, если $y_2 > y_1$, и $\Delta y < 0$, если $y_2 < y_1$.

Пусть аргумент x получил приращение Δx , тогда новое значение аргумента есть $x + \Delta x$, а соответствующее ему значение функции есть $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$. Чтобы найти приращение функции, нужно из нового значения функции вычесть первоначальное:

$$\begin{array}{r} y + \Delta y = f(x + \Delta x) \\ - \quad y = f(x) \\ \hline \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \end{array}$$

Пример 4.4

Найти приращение функции $y = x^2 + x + 1$, если аргумент x изменил свое значение от $x_1 = 2$ до $x_2 = 2,5$.

Решение

Приращение аргумента $\Delta x = x_2 - x_1 = 0,5$. Вычислим значения функции $y_1(x_1)$ и $y_2(x_2)$:

$$y_1 = f(x_1) = f(2) = 2^2 + 2 + 1 = 7;$$

$$y_2 = f(x_2) = f(2,5) = 2,5^2 + 2,5 + 1 = 9,75.$$

Тогда $\Delta y = y_2 - y_1 = 9,75 - 7 = 2,755$.

2. Непрерывность функции. Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** $x = a$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Можно дать другое определение непрерывности функции.

Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной в точке** $x = a$, если она в этой точке определена и бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, т. е.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0.$$

Если условие непрерывности функции в некоторой точке нарушено, то такую точку называют **точкой разрыва функции**.

Степенную, показательную, логарифмическую и тригонометрические функции, а также их различные комбинации называют **элементарными функциями**. Для элементарных функций справедливы следующие утверждения.

- I. Область непрерывности элементарной функции совпадает с ее областью определения, т. е. элементарная функция непрерывна во всей области определения.
- II. Элементарная функция может иметь разрыв только в отдельных точках какого-либо промежутка, но не во всех его точках.
- III. Элементарная функция может иметь разрыв только в той точке, в которой она не определена.

Функция называется **непрерывной в промежутке** (замкнутом или открытом), если она непрерывна во всех точках этого промежутка.

Пример 4.5

Исследовать на непрерывность функцию $y = 3x$.

Решение

Функция $y = 3x$ определена для всех действительных значений аргумента x , т. е. $x \in \mathbb{R}$. Область непрерывности функции совпадает с ее областью определения.

Найдем приращение функции Δy , если аргумент x получает приращение Δx :

$$\begin{array}{r} y + \Delta y = 3(x + \Delta x) = 3x + 3\Delta x \\ y = 3x \\ \hline \Delta y = 3\Delta x. \end{array}$$

Тогда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3\Delta x) = 3 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = 0.$$

Равенство $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ справедливо при любом конечном значении x , поэтому функция $y = 3x$ непрерывна при любом значении x .

Пример 4.6

Исследовать на непрерывность функцию $y = x^2 - 2$ при $x = 3$.

Решение

Предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 2) = (\lim_{x \rightarrow 3} x)^2 - 2 = 3^2 - 2 = 7.$$

Значение функции $f(3) = 3^2 - 2 = 7$, т. е. предел функции при $x \rightarrow 3$ равен значению функции при $x = 3$. Следовательно, функция $y = x^2 - 2$ в точке $x = 3$ непрерывна.

Однако не все функции и не при любых значениях аргумента непрерывны. Например, функция $y = \frac{1}{x}$ при $x = 0$ имеет разрыв; функция $y = \frac{2x}{x-5}$ имеет разрыв при $x = 5$; функция $y = \frac{3}{x^2-4}$ имеет разрывы при $x = -2$ и $x = 2$; функция $y = \operatorname{tg} x$ имеет разрывы при $x = \pi/2 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.