Степенная функция

<u>Основные понятия и определения</u>

Напомним свойства и графики степенных функций с целым отрицательным показателем.

$y = x^r, r = -n, y = \frac{1}{x^n}$ $(n \in N, x \neq 0)$

При четных n, $n = 2k$:

Пример функции: $y = x^{-4} = \frac{1}{x^4}$

Все графики таких функций проходят через две фиксированные точки: (1;1), (-1;1). Особенность функций данного вида – их четность, графики симметричны относительно оси ОУ.

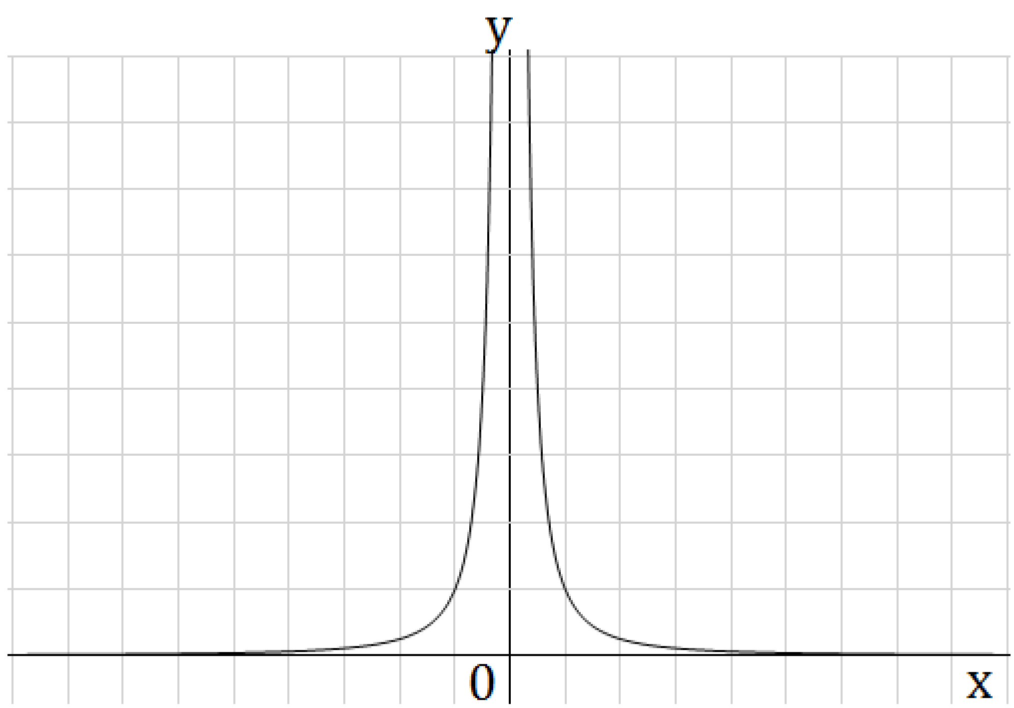

Рис. 1. График функции $y = \frac{1}{x^{2k}}$

При нечетных n, $n = 2k + 1$:

Пример функции: $y = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$

Все графики таких функций проходят через две фиксированные точки: (1;1), (-1;-1). Особенность функций данного вида – их нечетность, графики симметричны относительно начала координат.

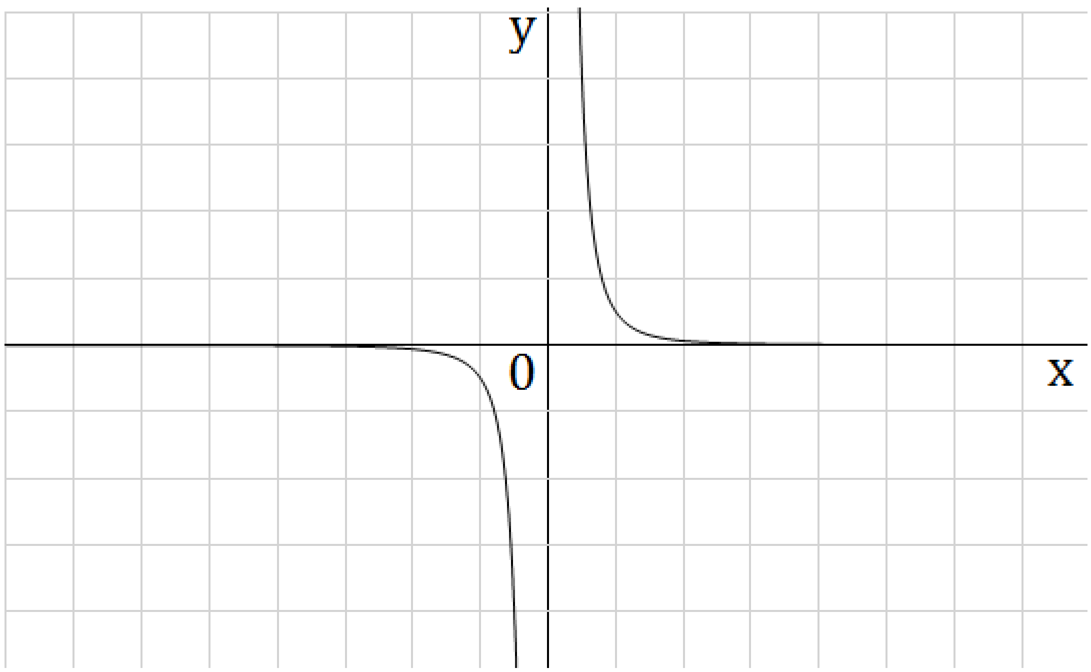

Рис. 2. График функции $y = \frac{1}{x^{2k+1}}$

2. Функция с отрицательным рациональным показателем степени, графики, свойства

Напомним основное определение.

Степенью неотрицательного числа a с рациональным положительным показателем $r = \frac{m}{n} (m \in N, n \in N, n > 1)$ называется число $\sqrt[n]{a^m}$.

Степенью положительного числа a с рациональным отрицательным показателем $r = -\frac{m}{n} (m \in N, n \in N, n > 1)$ называется число $\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$.

Для $m \in N, n \in N, n > 1$ выполняется равенство:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, a \geq 0$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}, a > 0$$

Например: $8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{8^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{4}$; $(-4)^{-\frac{2}{3}}$ – выражение не существует по определению степени с отрицательным рациональным показателем; $(-4)^{-3}$ существует, т. к. показатель степени целый, $(-4)^{-3} = \frac{1}{(-4)^3} = -\frac{1}{64}$

Перейдем к рассмотрению степенных функций с рациональным отрицательным показателем.

$$y = x^{-\frac{m}{n}}, x > 0, -\frac{m}{n} \in Z$$

Например:

$$y = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

Для построения графика данной функции можно составить таблицу. Мы поступим иначе: сначала построим и изучим график знаменателя – он нам известен (рисунок 3).

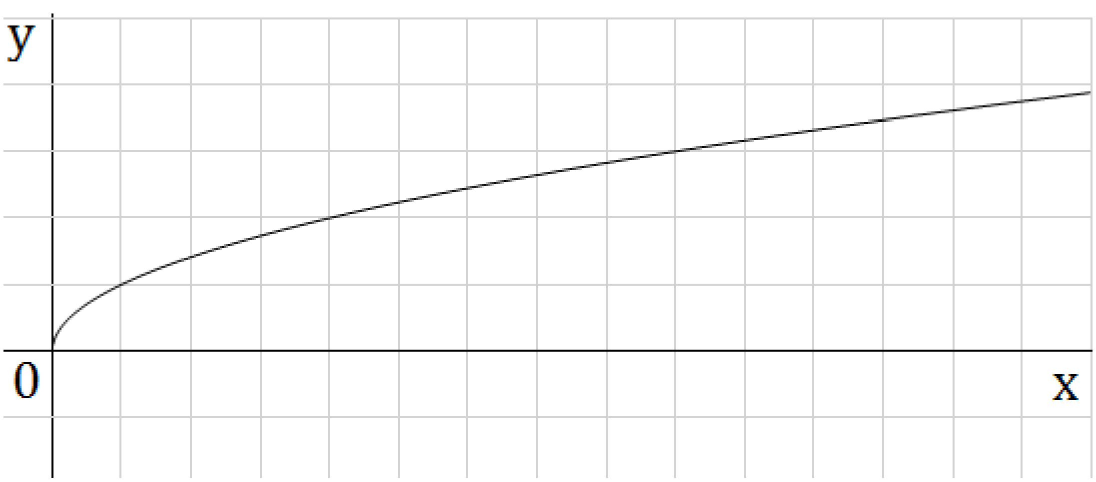

Рис. 3. График функции $y = \sqrt[3]{x}$

График функции знаменателя проходит через фиксированную точку $x \to 0$ (1;1). При построении графика исходной функции данная точка остается, при корень также стремится к нулю, функция стремится к бесконечности. И, наоборот, при стремлении x к бесконечности функция стремится к нулю (рисунок 4).

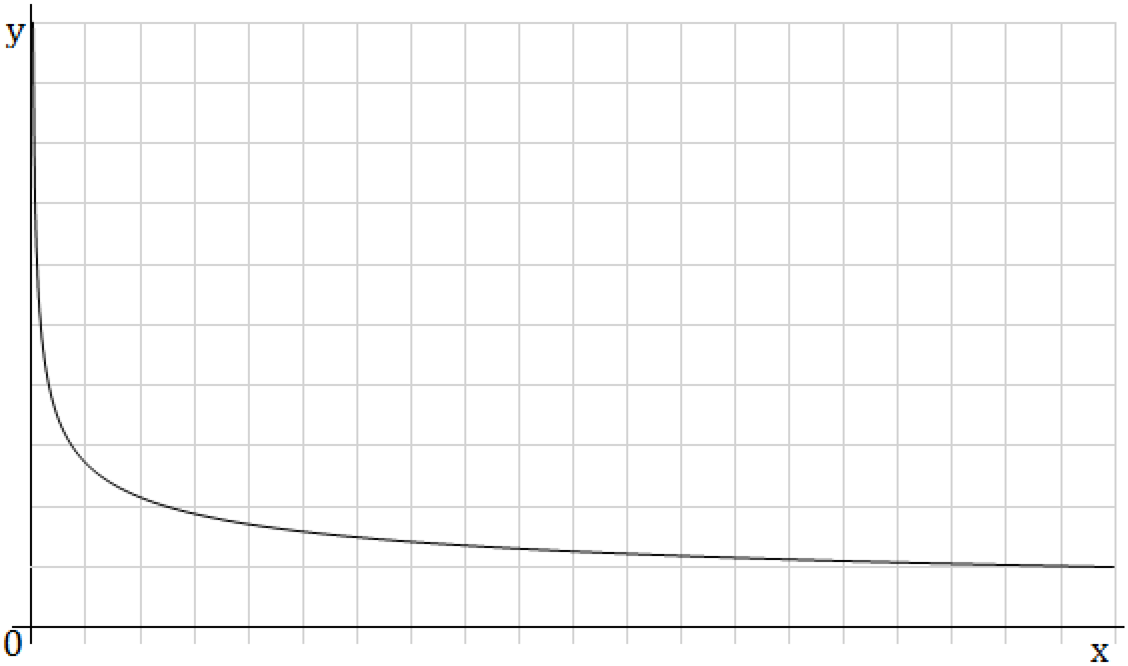

Рис. 4. График функции $y = \frac{1}{\sqrt[8]{x}}$

Рассмотрим еще одну функцию из семейства изучаемых функций.

$y = x^{-\frac{3}{2}}, y = \frac{1}{\sqrt{x^3}}, y = \frac{1}{x\sqrt{x}}$

Важно, что $x > 0$ по определению

Рассмотрим график функции, стоящей в знаменателе: $y = x\sqrt{x}$, график данной функции нам известен, она возрастает на своей области определения и проходит через точку (1;1) (рисунок 5).

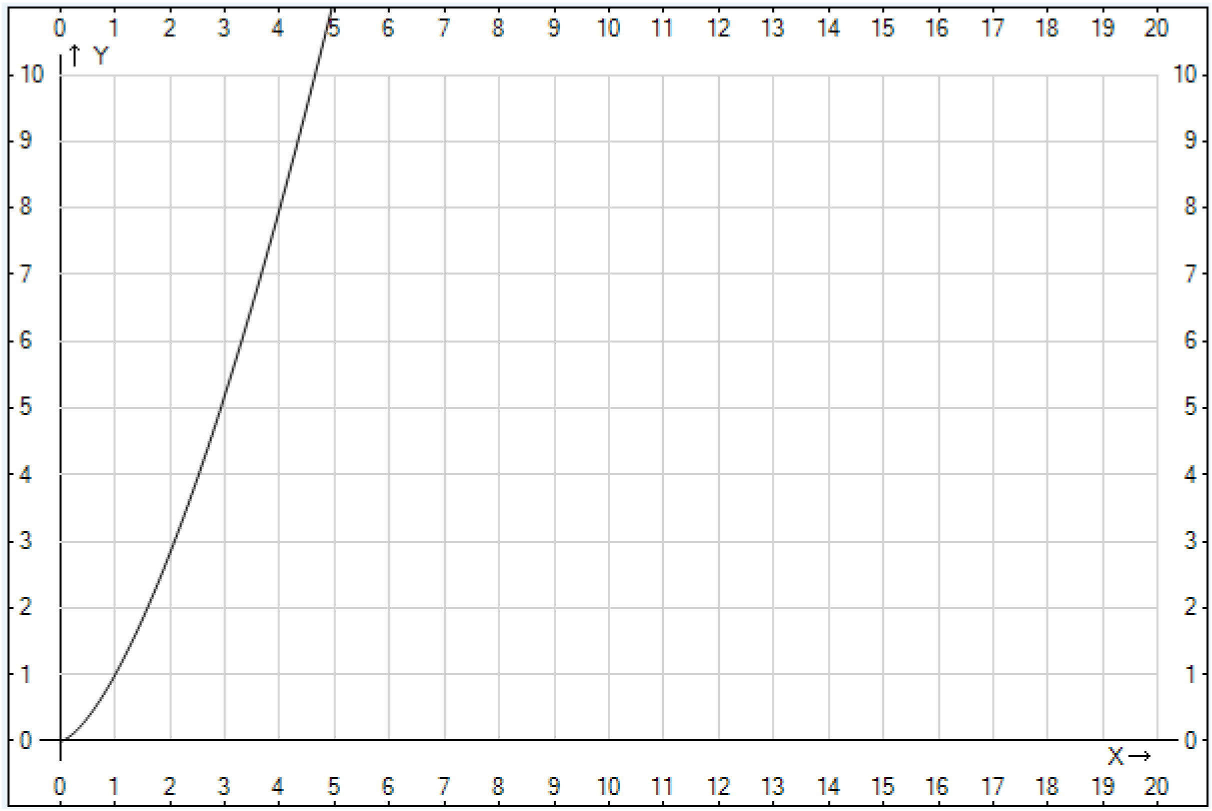

Рис. 5. График функции $y = x^{\frac{3}{2}}$

При построении графика исходной функции точка (1;1) остается, при $x \to 0$ корень также стремится к нулю, функция стремится к бесконечности. И, наоборот, при стремлении x к бесконечности функция стремится к нулю (рисунок 6).

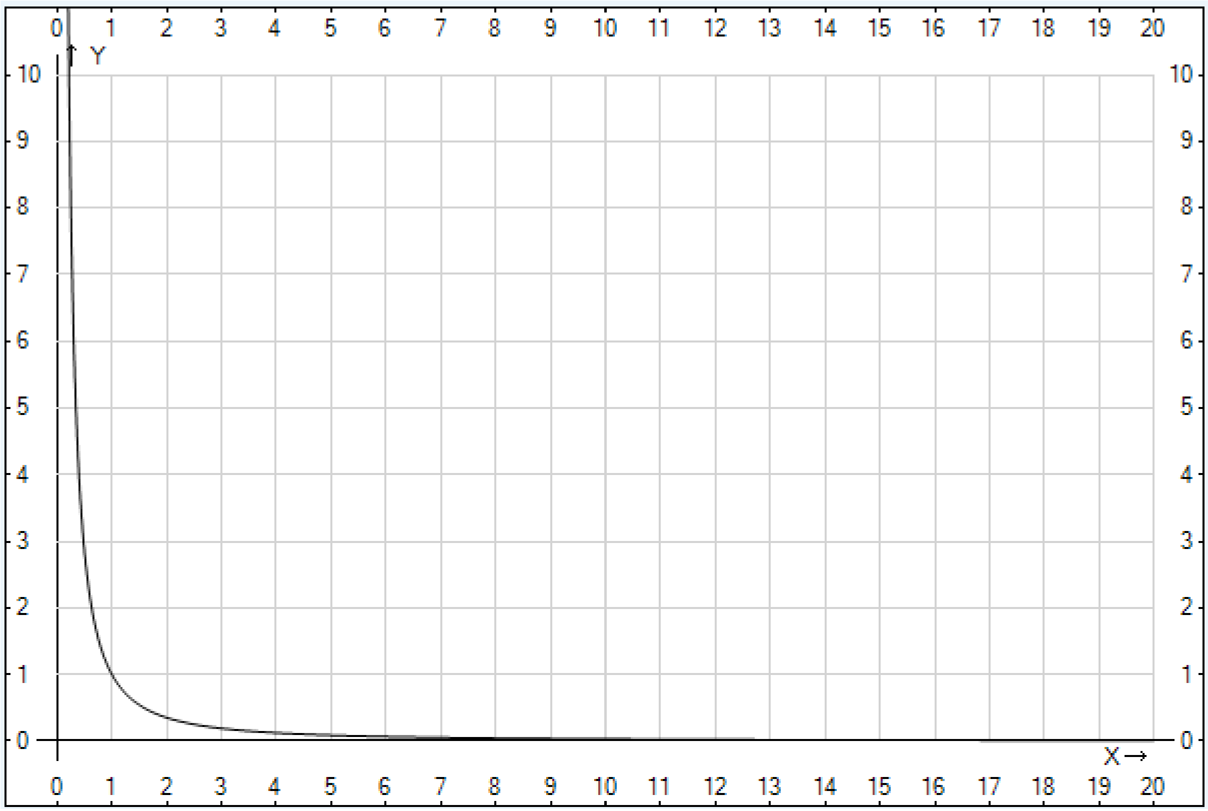

Рис. 6. График функции $y = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$

Рассмотренные примеры помогают понять, каким образом проходит график и каковы свойства изучаемой функции – функции с отрицательным рациональным показателем.

Графики функций данного семейства проходят через точку (1;1), функция убывает на всей области определения.

Область определения функции: $D(y) = (0; +\infty)$

Функция не ограничена сверху, но ограничена снизу. Функция не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значения.

Функция непрерывна, принимает все положительные значения от нуля до плюс бесконечности.

Функция выпукла вниз (рисунок 15.7)

На кривой взяты точки А и В, через них проведен отрезок, вся кривая находится ниже отрезка, данное условие выполняется для произвольных двух точек на кривой, следовательно функция выпукла вниз. Рис. 7.

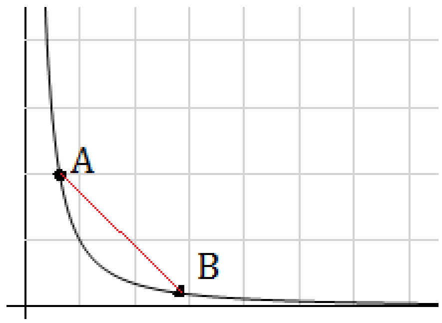

Рис. 7. Выпуклость функции

3. Решение типовых задач

Важно понять, что функции данного семейства ограничены снизу нулем, но наименьшего значения не имеют.

Пример 1 – найти максимум и минимум функции на интервале [1;8):

$$y = x^{-\frac{2}{3}}$$

вычислим значения функции в концах заданного промежутка:

$$y(1) = \frac{1}{\sqrt[3]{1^2}} = 1$$

$$y(8) = \frac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{4}$$

Теперь мы можем выписать ответ на основании того, что функция монотонно убывает.

$y_{max} = y(1) = 1$, минимального значения нет, так как правая граница не включена в интервал.

Пример 2 – построить и прочесть график функции:

$$y = x^{-\frac{1}{4}} + 1$$

Преобразуем заданную функцию по определению рациональной степени:

$$y = \frac{1}{\sqrt[4]{x}} + 1$$

Не забудем указать, что по определению $x > 0$

Строим график функции $y = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$, для нас это стандартная кривая, она проходит через точку (1;1), убывает. После этого сдвигаем полученный график на одну единицу вверх, точка (1;1) переходит в точку (1;2) (рисунок 8)

Читаем полученный график: если аргумент возрастает от нуля (не включая) до бесконечности, функция убывает от бесконечности до единицы (не включая).

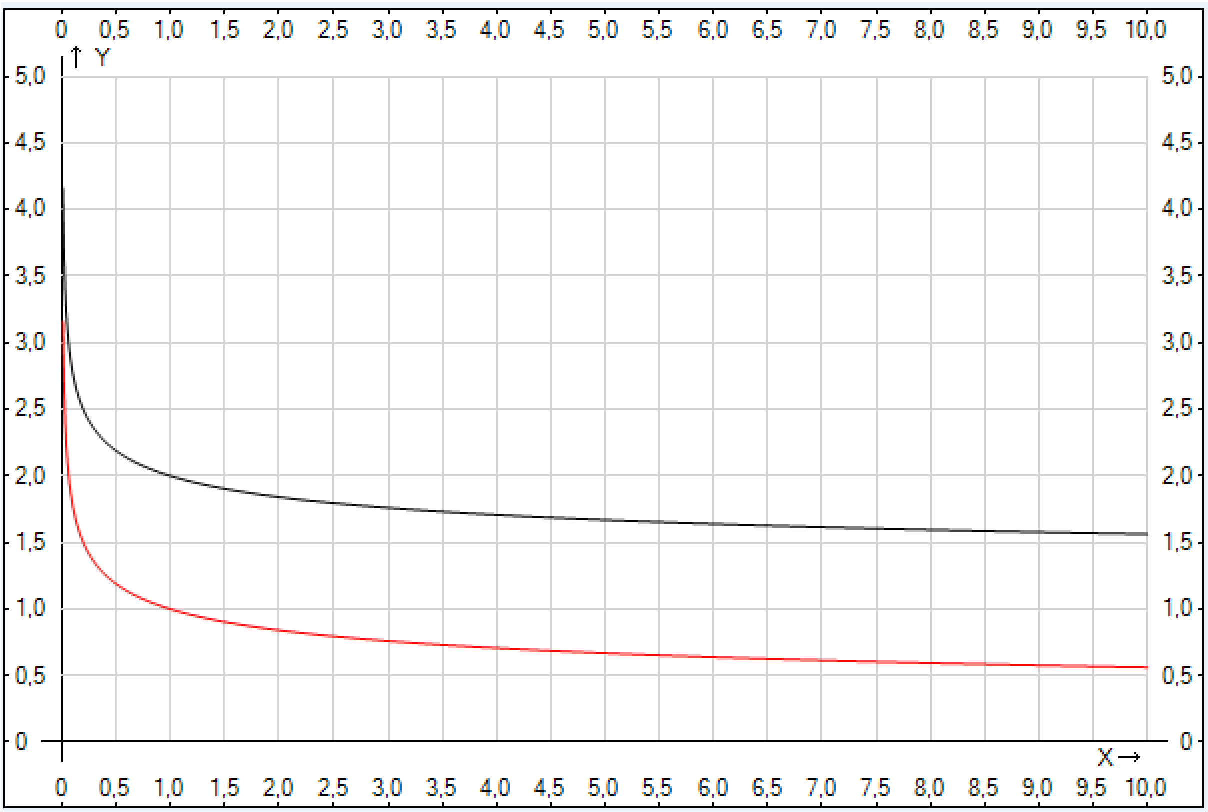

Рис. 8. Построение графика функции $y = x^{-\frac{1}{4}} + 1$

Пример 3 – построить и прочесть график функции:

$$y = (x-2)^{\frac{7}{4}} + 1$$

Преобразуем заданную функцию по определению степени с рациональным показателем:

$$y = \sqrt[4]{(x-2)^7} + 1$$

Нам известен график функции $y = x^{\frac{7}{4}}$, построим его. Полученная кривая возрастает и проходит через точку (1;1), поскольку показатель степени больше единицы – кривая выпукла вниз. Сдвинем построенную кривую на две единицы вправо (получаем график функции $y = (x-2)^{\frac{7}{4}}$) и на одну единицу вверх – получаем искомый график (рисунок 9)

Прочтем полученный график:

$$x \geq 2, y \geq 1$$

При возрастании аргумента от двух до бесконечности функция возрастает от единицы до бесконечности.

Пример 4 – построить и прочесть график функции:

$$y =:$$

$$\begin{cases} |x|, x \leq 1 \\ x^{-\frac{1}{3}}, x > 1 \end{cases}$$

В данном случае функция задана кусочно.

Напомним, что такое модуль, раскроем его по определению:

$$|x| =:$$

$$\begin{cases} -x, x < 0 \\ x, x \geq 0 \end{cases}$$

Итак, строим график функции $y = |x|, x \leq 1$. Имеем две ветки: $y = x$ и $y = -x$. После этого строим стандартную кривую $y = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ на интервале $x \in (1; +\infty)$ (Рисунок 10)

Прочтем график построенной функции:

Если аргумент возрастает от минус бесконечности до нуля, функция убывает от бесконечности до нуля. Когда аргумент возрастает от нуля до единицы, функция также возрастает от нуля до единицы. Наконец, когда аргумент возрастает от единицы не включительно до плюс бесконечности, функция убывает от единицы не включительно до нуля не включительно.

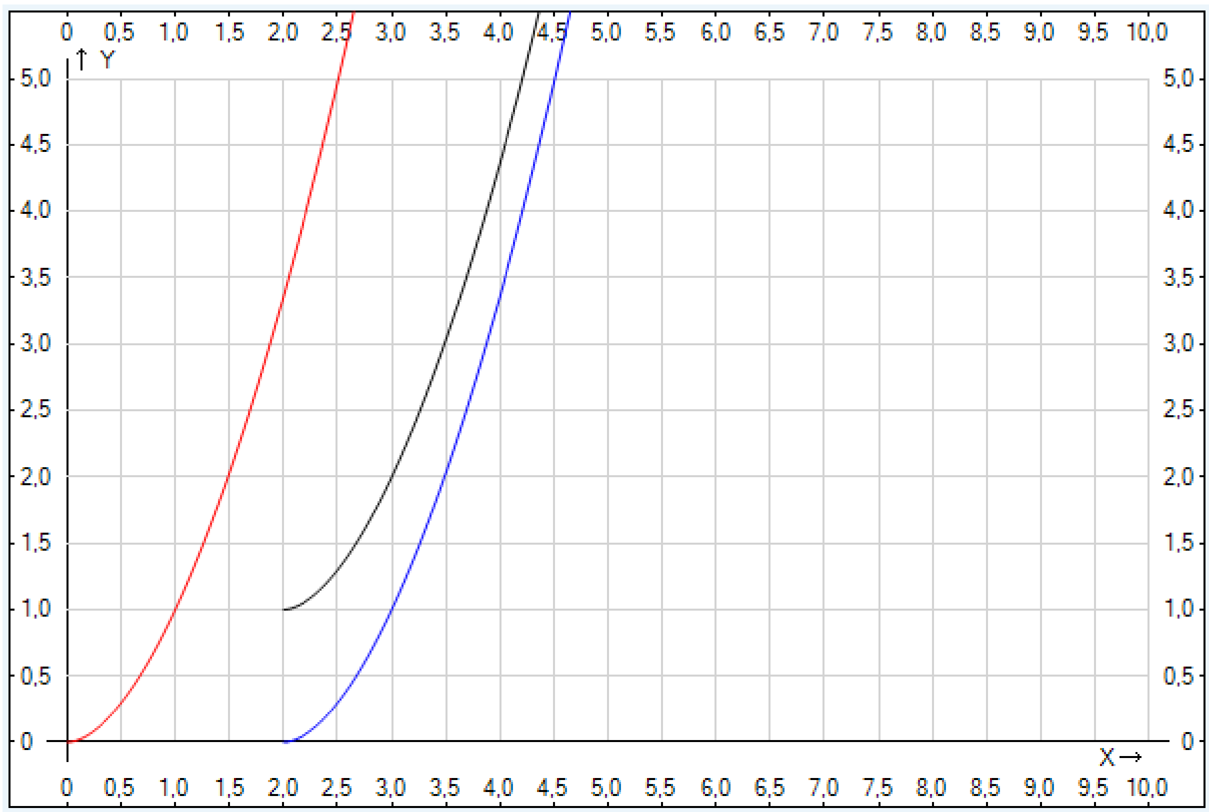

Рис. 9. Построение графика функции $y = \sqrt[4]{(x-2)^7} + 1$

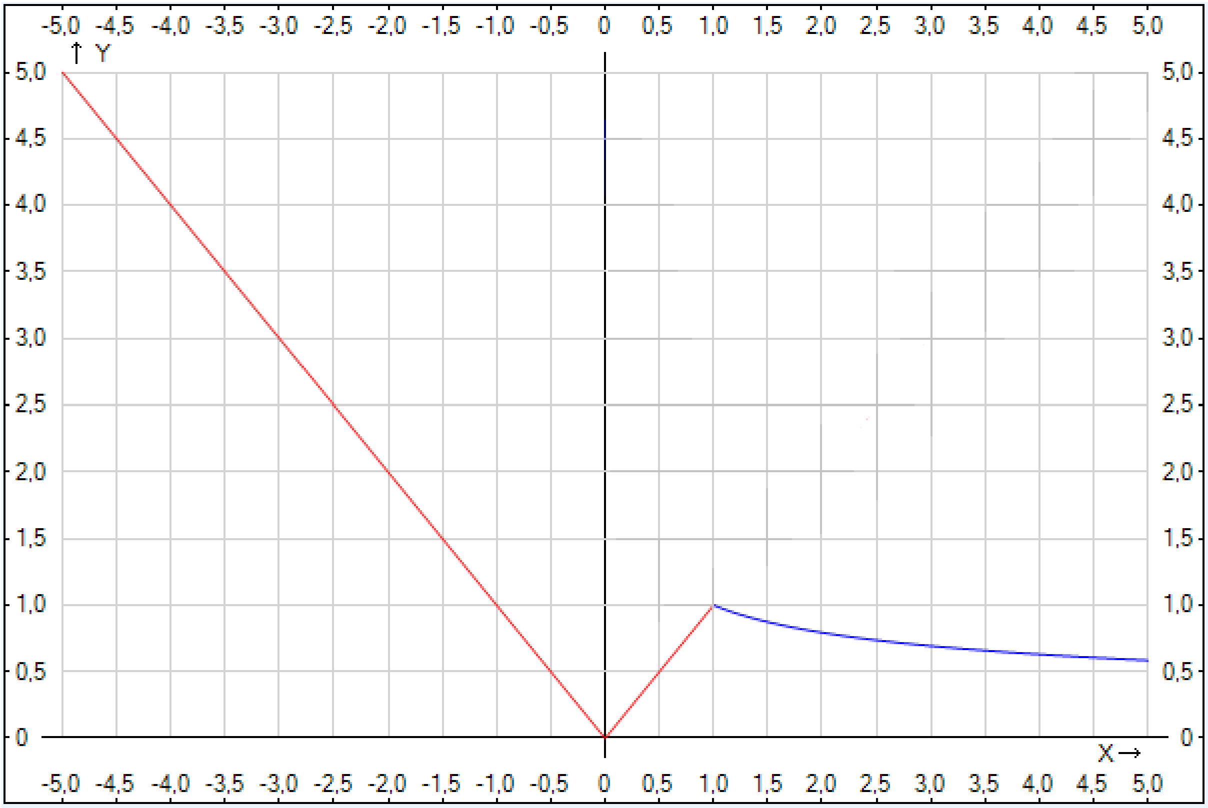

Рис. 10. График кусочно заданной функции

Пример 5 – найти значения параметра, при котором уравнение а) имеет хотя бы одно решение; б) имеет только одно решение:

$f(x) = a, f(x) =$:

$$\begin{cases} |x|, x \leq 1 \\ x^{-\frac{1}{3}}, x > 1 \end{cases}$$

График заданной функции мы уже построили в предыдущем примере. Теперь рассечем его семейством прямых $y = a$ и найдем количество точек пересечения для каждого случая.

Выполним рассечение (рисунок 11).

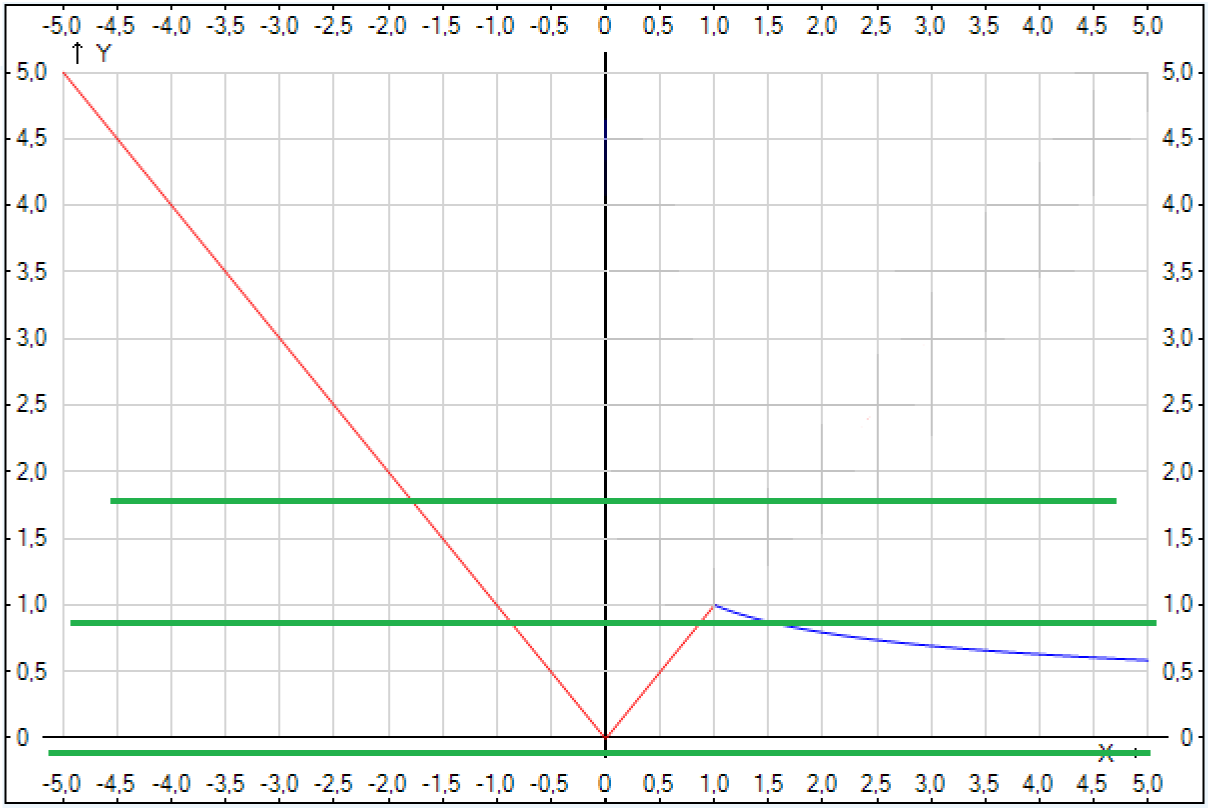

Рис. 11. Рассечение графика прямыми $y = a$

При $a \in [0;1]$ уравнение имеет три решения; при $a > 1$ уравнение имеет единственное решение

Ответ: при $a \geq 0$ уравнение имеет хотя бы одно решение,
при $a = 0$ и $a > 1$ уравнение имеет единственное решение.

Итак, мы рассмотрели степенные функции, их свойства и графики. На следующем уроке мы перейдем к дифференцированию и интегрированию степенных функций.