A note for lie algebra and raising/lowering operators in quantum mecahnics

Lin Shijia,Fan Ningyue, Zhang yutai

2024 年 2 月 3 日

1 Introduction

在量子力学的学习中，“代数解法”不止一次出现，且相较于直接解析求解薛定谔方程，这种方法能大大简化得到所有本征值的过程。但是，在使用这种方法之前，还有一系列问题有待回答——这里指的“代数”是什么？为什么我们看到的谐振子势、角动量算符这些例子可以用“代数法”求解？在求解过程中所用到的升降算符是如何构造出来的？有没有一种 general approach？一般的量子力学教材和课堂上都不会回答这些问题，而是直接给出升降算符的形式，并且代入检验其对本征值的升降操作是如何进行的。

因此，这份 notes 试图回答上文中所出现的一系列问题，通过介绍一系列的概念、例子，介绍升降算符在李代数中所对应的一般结构，最后再基于此做一些拓展运算。

2 基本概念

2.1 基于对易子的李代数定义

比较量子力学和经典力学中的若干图像，其中差异最为显著的是不确定性。由于 $\sigma_A\sigma_b \geq |\frac{1}{2}\langle[a,b]\rangle|$，因而不确定的结构由算符的非对易性捕捉。因此对易子在量子力学中起到至关重要的作用。这使我们希望单独提取出对易子的代数结构进行研究。我们会发现，这几条代数性质暗示了一大类的李代数具有相当简单的结构，即由一族同时可观测量和一系列升降算符构成。

为此，让我们先看向对易子的性质。对于算符 A、B，A 与 B 的对易子满足

1. 反对称性：[A,B]=-[B,A]
2. 双线性性：[A+B,C]=[A,C]+[B,C]
3. Jacobi 恒等式: [A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]]=0

Jacobi 恒等式看似十分复杂，但是简单的记号改变即可看清楚 Jacobi 恒等式描述的是什么。定义伴随映射 ad 为

Definition 2.1 伴随映射

$$x \to ad_x(y) = [x,y] \tag{1}$$

这一映射显然是一个线性映射。在这一标记下，Jacobi 恒等式可以写作

$$ad_{[x,y]} = [ad_x, ad_y] \tag{2}$$

我们会看到，这一性质就可给出李代数自己对于自己的分解。将对易子的这三条性质抽象出来，我们就可以给出李代数的定义。

Definition 2.2 李代数的严格定义

一个李代数 $\mathfrak{g}$ 是一个实/复线性空间上携带的双线性运算 $[,] : g \times g \to g$，满足反对称性，线性性和 Jacobi 恒等式。

假设现在讨论的李代数结构不十分畸形，是有限维且即存在一个元素 x 使得 ad_x 是可对角化的，则空间 $\mathfrak{g}$ 即可关于 ad_x 做特征子空间分解。得到的空间可以按照 ad_x 的特征值标记，写作

$$\mathfrak{g} = \oplus_i g_0 \oplus_i \oplus_i g_{\lambda_i} \tag{3}$$

对于特征值非 0 的特值向量，满足 $[x, E_i] = ad_x(E_i) = \lambda_i E_i$。回顾在谐振子中，$[H, a_+] = a_+$，可以看到产生湮灭算符就是 ad_H 特征值不为 0 的特值向量。

进一步，我们一定知道特征值为 0 的子空间中元素非空，因为 $ad_x(x) = [x, x] = 0$。进一步，如果在特征值为 0 的特值子空间中还存在一个元素 y，使得 ad_y 是可对角化的，则有 $0 = ad_{[x,y]} = [ad_x, ad_y]$。代表 ad_x 和 ad_y 可以同时对角化。因此我们可以把原来的代数关于两者的共同特征值作分解，把空间分解为更细的组分。标记每一个特值子空间的特征值为数组 $(\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2})$，我们可以得到

$$\mathfrak{g} = \oplus g_0 \oplus \oplus_i g_{(\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2})} \tag{4}$$

我们可以反复进行这一过程，把原来的李代数分解得越来越细致。可以证明对于一类较好的李代数，我们可以将整个空间分解为相当简单的形式。这类李代数可以由一族相互对易的可对角化元素张成一个子空间，其余元素由这些元素的共同特征向量生成，并且每个共同特值子空间是 1 维的。这一结构被称作半单李代数的 Cartan Weyl 分解。

用物理的语言来理解，通过可对角化元素对于李代数 g 不停的做特值子空间分解，原有的线性空间最终被分解为一族对易元素（可同时观测量）和一系列共同特值向量（产生湮灭算符），而这一结果很大程度上仅仅由对易子的代数结构，也即非对易性的刻画来决定。我们还将看到这一类李代数和无限小对称变换具有紧密的联系。

2.2 基于李群的李代数定义

除了上面这种直接从抽象化李括号的性质定义李代数的方式，我们还可以基于李群去定义它。并且从这种定义中引出我们下面举的一些例子。

简单来说，群是由一些元素组成的集合与定义在其上的一系列运算构成的，而定义在特定集合上的特定运算会使得该群满足一些我们想要的性质。特别地，李群中的元素定义在一个光滑的、无穷阶可导的空间上。这种光滑的无奇异性的对象往往是物理学家的最爱。（往往，我们所研究的波函数所在的空间也具有这样的性质。）

有了这样一个空间，我们需要在其上定义具体的运算来研究更多的细节。记得我们在 introduction 部分所提出的具体例子，无论是谐振子的能量还是角动量事实上本质上都是一个微分算符——即我们这里想要研究的，是群上的一种微分运算操作。在几何上，求微分即意味

着求切向量，即起到将李群所对应的微分流形拉到其切空间上的作用，或者说，研究对象从流形本身转为沿流形运动时的变化。李代数可以通过这样一种从李群上诱导的方式去定义。

Definition 2.3 李代数的诱导定义

$g = T_e G = LieG$

2.3 表示

在以上这些抽象的定义之后，我们希望采取更具体的形式讨论以便进行运算（物理学家喜欢 calculable 的东西）。正如线性代数中利用矩阵来表示线性变换，李代数中的各种变换也有类似的矩阵表示。

Definition 2.4 表示

一个在 V 空间上的群 G 的表示 (π,V) 定义为：$\pi : g \in G \to \pi(g) \in GL(V)$，即一个群的表示给出的是其上的可逆线性映射 $GL(V)$ 中的元素。

一旦 V 空间的基已经选定，表示的具体矩阵形式就可以写出，这就像线性代数中写出给定的基下的线性变换矩阵，也类似于在量子力学中，在特定的表象下我们能给出算符的具体形式。

而在李代数的表示中有一类特别需要在我们研究量子力学问题中注意，即酉表示。在选定的基下酉表示对应的矩阵就是一个酉矩阵，满足 $U^\dagger = U$.

3 不同群的表示

在我们在具体的群做更为具体的讨论之前，我们先讨论群的表示可以写成怎样的一般形式。

在物理中，我们所感兴趣的许多群都起着“做某种变换”的功能，比如二维/三维旋转群等等。我们在一开始就已经指出，李群是一个具有很好的连续性的群，因此可以粗浅地理解为其上的变换也具有类似的连续性。提到连续性，我们很自然地会想到能描述其变化的最小单位——变换的无穷小生成元，再以此为基础连续地生成所有的变化。

Definition 3.1 生成元

矩阵群代表的一个无穷小变换是 $g(\epsilon)=I+\epsilon X$，其中，$\epsilon \to 0$，I 为单位元。即这个变换和单位变换间的相差是无穷小，而生成元 X 则给出了具体的形式。这里的 X 是一个矩阵，将 e^X 写成矩阵的形式即可得到该变换对应的表示。

基于生成元的定义，若我们想要的是一个总作用为改变 θ 的变换，分 N 次完成，则 g(θ)=$(I + \frac{\theta}{N})^N = e^{\theta X}$，即形式上我们可以将这个群所表示的所有变换形式上写成关于生成元与变换量的指数形式。这个形式的好处是，我们可以方便地找到某个群（某个变换）对应的生成元的形式。

有了群元素的一般形式，给出具体群的具体要求，既可以得到该群的生成元的基。即从这组基出发，我们可以得到该群的所有生成元，进而生成所有的变换。

3.1 三维旋转群 SO(3) 的表示

根据定义，SO(3) 的表示要满足 $O^T O = I, det(O) = 1$. 代入 $O = e^{\theta X}$ 可得 $e^{\theta(X^T+X)} = 1, tr(X) = 0$, 即 $X^T + X = 0, tr(X) = 0$. 我们一般取满足这组条件的生成元的基如下：

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

回顾李代数的抽象定义，得到这组基后我们首先可以计算他们的李括号。有 $[J_i, J_j] = \epsilon_{ijk} J_k$.

3.2 SU(2) 的表示

关于 SO(3) 与 SU(2) 的关系，粗浅地可以认为这两者在进行三维旋转变换操作上是等价的，但是我们希望改用复的四元数去描述。类似于可以用 i, j 两个复矢量去描述 x-y 平面上的二维旋转，相应地我们可以用四元数 1,i,j,k 去描述三维旋转。SU(2) 群的表示需满足的条件是 $U^\dagger U = I, det(U) = 1$. 同样代入 U 的指数形式，则可以得到 $X^\dagger - X = 0, tr(X) = 0$. 我们一般取满足这组条件的生成元的基如下（即泡利矩阵）：

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

求解这组基的李括号，得到 $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$. 对比我们在 SO(3) 群中得到的李括号关系，可以看到这里多了一个系数 2。为了使它们看起来更一致，取 $S_i = \frac{1}{2}\sigma_i$, 则有 $[S_i, S_j] = i\epsilon_{ijk} S_k$. 这个李括号（或者说对易关系）和我们已知的量子力学中角动量算符的对易关系完全一致，之后我们会对此做进一步的讨论。

再次回顾李代数的抽象定义，SU(2) 与 SO(3) 相同的李括号意味着他们有相同的李代数。

3.3 二维欧式群 E(2)

二维欧式群 E(2) 群元包括空间平移、转动、反射，是 2 维平面上的保距映射，也就是等度规映射。实际 2 维欧式空间 $(\mathbb{R}^2, \delta_{ab})$ 是一个带正定度规的 2 维矢量空间，E(2) 群就是 2 维欧氏空间的等度规群。数学上来讲，E(2) 是 T(2) 和 O(2) 的半直积群 $E(2) = T(2) \otimes_s O(2)$

T(2) 是二维平移群，将原点 $\vec{o}$ 映为 $\vec{a}$，即 $E\vec{o} = \vec{a}$，O(2) 是保原点的等度规映射，包括二维转动和反射

李子群 $E^+(2)$ 群元可表为

$$g(\vec{x}, \theta) = T(\vec{x})R(\theta) = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta & x_1 \\ sin\theta & cos\theta & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

关注对称群作用下的无穷小变换，因为李代数实际上是无穷小变换的生成元。从微分几何角度看，李代数是李群作为流形恒等元的切空间。我们希望找到切空间的基矢，就是 n 个生成元（n 为李群或李代数维数）。

定义指数映射分别为 $exp(-i\theta J)$ 和 $exp(-ix_iP_i)$，$i=1,2$，J 为转动生成元，P 为平移生成元，则有

$$J=i\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\ P_1=i\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\ P_2=i\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}. \tag{8}$$

欧式群李代数 $\mathfrak{e}(2)$ 对易关系为 $[P_1,P_2]=0,[J,P_1]=iP_2,[J,P_2]=-iP_1$

4 权重分解与升降算符

我们以 SU(2) 群的表示为例，我们可以得到对李代数的根进行权重分解 (weight decomposition) 与构造升降算符的一般过程。

在 S_1,S_2 与 S_3 中，不难发现 S_3 的特殊性在于它是一个对角矩阵，这意味着它的表示的一般形式可以被写成

$$\pi(2i\theta S_3)=\begin{pmatrix}e^{i\theta q_1}&0&0&...\\0&e^{i\theta q_2}&0&...\\...&...&...&...\\&&&e^{i\theta q_m}\end{pmatrix}. \tag{9}$$

这是其在李群中表示的一般形式，为了把它拉到切空间成为李代数的表示的一般形式，对等式两边求在 $\theta=0$ 处的导数得到：

$$\pi^{'}(2iS_3)=\begin{pmatrix}iq_1&0&0&...\\0&iq_2&0&...\\...&...&...&...\\&&&iq_m\end{pmatrix}. \tag{10}$$

最后，我们得到在李代数中 S_3 的表示可以一般地写为为

$$\pi^{'}(S_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}q_1&0&0&...\\0&\frac{1}{2}q_2&0&...\\...&...&...&...\\&&&\frac{1}{2}q_m\end{pmatrix}. \tag{11}$$

这个表示矩阵的形式是一个对角元全为实数 $\frac{q_i}{2}$ 的对角矩阵。这个矩阵有着非常好的性质，可以轻松地写出 m 个相互正交的向量作为它的本征向量，而第 i 个本征向量对应的本征值即为 $\frac{q_i}{2}$。在此基础上，我们定义了关于 S_3 的权重分解与权重空间 (weight and weight spaces)，来刻画它所具有的的这种特殊性质:

Definition 4.1 权重 *weight* 与权重空间 *weight space*

如果 S_3 在线性空间 V 上的李代数的表示 $\pi^{'}(S_3)$ 有本征值 $\frac{k}{2}$，则称 k 是表示 (π,V) 的一个权重。如果子空间 V_k 中的所有矢量 v 都满足 $\pi^{'}(S_3)v=\frac{k}{2}v$, 则称 V_k 为该表示的第 k 个权重空间。

我们可以将这个概念粗浅地理解为权重对应着表示矩阵的特征值，而权重空间即为该特征值所对应的特征子空间。我们不难联想到，这个能给出特征值与特征子空间的表示，其实正是对应着谐振子问题中的 $\hat{H}$ 算符与角动量问题中的 $\hat{L}^2$.

得到了本征算符，回顾代数解法中的思路，下一步需要的就是构造出升与降算符了。比如在这里，已有的 S_1,S_2 算符是与 S_3 不对易的，这意味着他们的表示矩阵不可能被同时对角化，因此在作用了与本征算符不对易的 S_1,S_2 后再作用本征算符 S_3, 我们不可能得到只是对本征值进行升/降的效果。因此，我们要对已有的 S_1,S_2 算符做某种变化，使得先作用变换后算符再作用本征算符时，不会改变本征态，而只会改变本征值。如何满足这个关系？因为这里存在两个算符的先后作用，我们不妨来看看其李括号能给出什么结论？

设变换后的算符为 $S^{'}$，则它与 S_3 的表示的李括号作用到第 k 个权重空间上的向量 v 会给出：

$$\pi^{'}([S_3,S^{'}])v = [\pi^{'}(S_3)\pi^{'}(S^{'}) - \pi^{'}(S^{'})\pi^{'}(S_3)]v \tag{12}$$

（这里其实利用了李代数的表示保李括号的性质，回顾李代数的抽象定义这一结论是比较自然的，因此不做过多讨论）。

接着，把 $\pi^{'}(S_3)\pi^{'}(S^{'})v$（代表了升降算符作用后的效果）移到等式左边，得到：

$$\pi^{'}(S_3)\pi^{'}(S^{'})v = \pi^{'}(S^{'})\pi^{'}(S_3)v + \pi^{'}([S_3,S^{'}])v = k\pi^{'}(S^{'})v + \pi^{'}([S_3,S^{'}])v. \tag{13}$$

观察上式，要使 $\pi^{'}(S^{'})v$ 仍然为 $\pi^{'}(S_3)$ 的本征态，则 $\pi^{'}([S_3,S^{'}])v$ 必须要给出 $\pi^{'}(S^{'})v$ 的常数倍。

计算 (S_1,S_2) 与 $([S_3,S_1]$,$[S_3,S_1])$ 的线性变换关系，可以得到

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [S_3,S_1] \\ [S_3,S_2] \end{pmatrix} \tag{14}$$

而我们希望有的是，通过某种 S_1 与 S_2 的线性组合成的 $S^{'},S^{''}$，能满足

$$\begin{pmatrix} S^{'} \\ S^{''} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1[S_3,S^{'}] \\ c_2[S_3,S^{''}] \end{pmatrix} \tag{15}$$

因此满足此条件的 S_1,S_2 的线性组合显示应当由变换矩阵的本征向量给出, 有：

$$\begin{pmatrix} S^{'} \\ S^{''} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} [S_3,S_1] \\ [S_3,S_2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1[S_3,S^{'}] \\ c_2[S_3,S^{''}] \end{pmatrix} \tag{16}$$

即

$$\begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \tag{17}$$

转置后求解矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ 的特征向量得到 $(1,i),(1,-i)$, 特征值分别为 1 与-1. 因此，这个这套表示下的升降算符分别为 S_1+iS_2 和 S_1-iS_2。之前我们提到过，角动量算符与 SU(2) 群的表示的基所具有的李括号形式完全相同，这里可以看到，他们的升降算符同样具有相同的形式。这意味着同样的李代数下有同样的升降算符形式。

进一步将 S_+ 的具体形式代入，可以看到

$$\pi^{'}(S_3)\pi^{'}(S_+)v = \pi^{'}(S_+)\pi^{'}(S_3)v + \pi^{'}([S_3, S_+])v = k\pi^{'}(S_+)v + \pi^{'}([S_3, S_+])v = (\frac{k}{2} + 1)\pi^{'}(S_+)v \tag{18}$$

即，升算符起到了使本征值增加 1，或者说使 weight 增加 2 的作用，把 V_k 子空间的向量 transform 到 V_{k+2} 子空间。类似地我们可以看到降算符使得 weight 减 1，把 V_k 子空间的向量 transform 到 V_{k-2} 子空间。

当我们了解了升降算符如何构造、如何影响 weight，最后要问的是在该表示下一共有多少 weight。类似于量子力学中的截断，我们定义最高 weight 为 n，即有属于第 n 个特征空间的非零向量 $v \in V_n$，使得 $\pi^{'}(S_+)V = 0$. 同时，不难通过升算符的形式与对易关系，用数学归纳法证明出作用在 weight 为 $(n-2j)$ 的特征子空间的特征向量上的升算符表示将给出 $\pi^{'}(S_+)v_{n-2j} = j(n-j+1)v_{n-2(j-1)}$. 这意味着，当 $j = n+1$,$\pi^{'}(S_+)v_{-n-2} = 0$. 所以，我们找到了最低的 weight=$-n$，$\pi^{'}(S_-)v_{-n} = 0$.

综上，我们可以将这套李代数的特征算符、升降算符的表示与特征子空间的关系总结如下图：

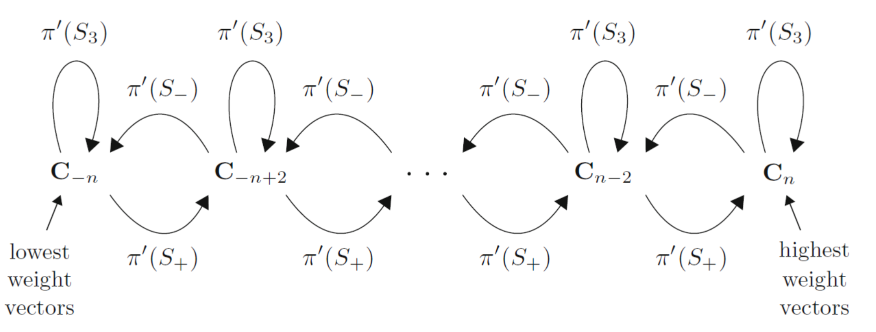

图 1: 升降算符的作用示意图

在课堂上学习用代数解法求解谐振子时，我们曾有疑问：在这套升降算符下得到的一系列本征值和本征函数是否完备、唯一呢？而在这里，通过归纳这套标准的李代数方法，我们看到，首先根据升降算符的要求，通过求解 $(S_1, S_2) \rightarrow ([S_3, S_1], [S_3, S_1])$ 的变换矩阵的特征值从而构造出升降算符的方法仅有唯一的、确定的解，不存在其他的可能性；而在此基础上，得到的 weight 与 weight 空间也是唯一确定且完备的。

5 以 SO(3) 为例的总结

下面以 SO(3) 为例再次 tell the whole story。希望回答几个问题：1. 量子力学求解能量本征波函数应该寻找 H 的本征矢，为什么最终以 L_z 作为目标算符（考虑 ad_{L_z} 和 L_z 的本征矢）2. 所考虑的李代数维数，及为什么只考虑 L_x, L_y, L_z 这三个算符 3.L^2 去哪了 4. 寻找升降算符的过程 5. 升降算符的作用 6. 强调：有两个线性空间；李代数和算符的表示空间，它们分别作 Cartan-Weyl 分解和权重分解。

量子力学的算符可以构成一个算符空间作为线性空间，以算符对易子作为李括号，构成一个封闭的李代数

求解能量本征矢时，由于体系球对称性，分离变量后问题转化为寻找 L^2 的本征矢，也是 L_z 的本征矢，所以将 L_z 作为目标算符（casimir 算符 L^2 和所有算符对易，对于求解本征矢没有帮助，但 L^2 的本征值 l 标记了 L_z 不同的不可约表示 $\mathbb{C}-Span\{|l,-l\rangle, ..., |l,m\rangle, ..., |l,l\rangle\}$，它也给出了 m 的上下界即表示空间维数）

我们可以找到 L_z 所在的李代数。由 L_x，L_y，L_z 三个角动量算符的对易关系，它们构成一个封闭的李代数。实际上 L_x，L_y，L_z 构成 SO（3）李代数的 3 个基矢。由李括号定义的伴随表示 $ad_x=[x,-]$ 是线性变换。我们可以把李代数这个线性空间根据 ad_x 这个线性变换进行直和分解。这里 x 就是算符 L_z，发现升降算符 $L\pm$ 就是 $[L_z,-]$ 的特征矢。所以 L_z，L_+,L_- 三个分别是 ad_{L_z} 的特征值为 0，1，-1 的不变子空间（维数都是 1）（注意 casimir 算符 L^2 不在里面）。发现巧的是这里特征矢正好是升降算符，它的作用是将我们的研究对象 L_z 的特征子空间进行升降。

ad_x 的本征矢就是升降算符这一点容易看出：

$$\pi(L_z)\pi(L')v=m'\pi(L')v=\pi([L_z,L'])v+\pi(L')\pi(L_z)v=\pi([L_z,L'])v+m\pi(L')v \tag{19}$$

所以 $\pi[L_z,L']=(m-m')L'$，即 L' 是 ad_x 的本征矢，非零本征矢就是升降算符。

总之，我们讨论的有两种线性空间——一个是李代数本身（其元素为算符），一个是一个算符（李代数元素）的表示空间 V

1. 李代数（如 SO(3) 李代数）作为线性空间，线性变换是伴随表示（ad_{L_z}），线性空间根据线性变换的特征子空间直和分解，李代数的特征值为 0 的子空间里堆着互相对易的算符（Lz），特征值非 0 的子空间里是升降算符（L±）；这个就叫做 Cartan-Weyl 分解

2. 表示空间 V 作为线性空间，线性变换是李代数里的元素（L_z）在 V 中的表示（$\pi(L_z)$），它可以写作一个矩阵，线性空间根据线性变换的特征子空间直和分解，升降算符的作用就是对不同特征值的特征矢进行升降（如 L_+ 将特征值升 1）；这就是李代数的根的权重分解

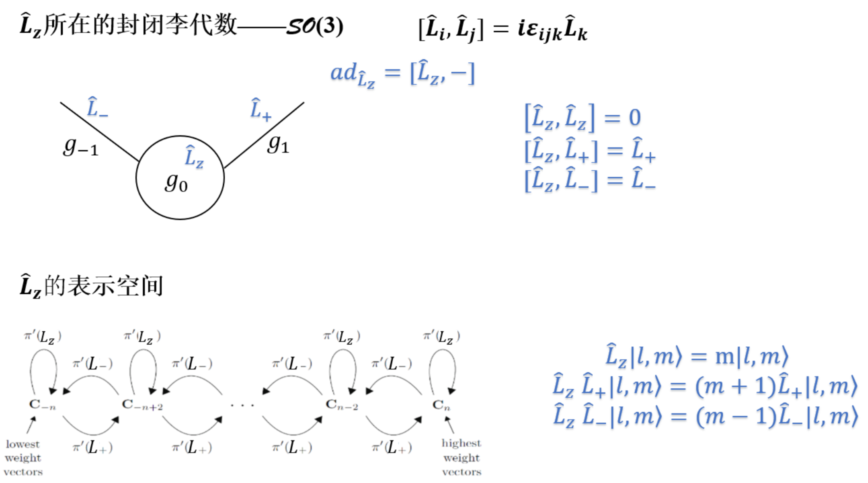

图 2: 示意图

6　求解量子力学体系

6.1　对称性，守恒量和表示空间

在经典力学中，一个相当重要的定理为诺特定理。这一定理构建了对称性和守恒量之间的一一对应关系。在哈密顿力学或量子力学中，这一定理被暗含在哈密顿正则方程/海森堡运动方程中：

$$i\partial_t A = [H, A] \tag{20}$$

从群的角度来看，这一运动方程事实上说明了哈密顿量是无限小时向平移变换生成元。

进一步，这一基本方程意味着物理量 A 为守恒量当且仅当 A 和哈密顿量对易，因而可同时观测。换一个视角来看，将 A 视作无限小变换生成元，则这一方程代表了哈密顿量在这一对称变换下保持不变。因此，哈密顿方程天然的蕴含了对称性和守恒量的联系。

这一概念在经典力学中早已存在，即在哈密顿体系中，物理量可被认同为无限小正则变换生成元，而哈密顿量为无限小时间平移生成元。哈密顿正则方程阐述的亦可被压缩为“物理量是生成元”，而量子力学的经典对应可被哈密顿力学描述某种程度上暗含了这一优美的结构在量子层面应当被保留。事实上这给出了一种系统性的从经典理论到量子理论的对应方式，称作正则量子化方案，即形式上作泊松括号到对易子的替换 $\{f, g\} \to \frac{1}{i}[f, g]$

不止于此，假设哈密顿量具有某种群变换下的对称性，例如转动对称性，则它一定在对应无穷小变换下不变，即 $[H, L_i] = 0$, 这代表能量为 E_n 的特征子空间是 L_i 的不变子空间，因而构成这一对称群/李代数的表示空间。这揭示了对称性如何直接进入到对于能谱的讨论之中，并且通过表示空间的简单结构约化所有的求解过程。

让我们看向较为熟悉的例子来理解上面所说。考虑单粒子 Hilbert 空间，氢原子哈密顿量满足球对称性，从而满足 $[H, L_i] = 0$。因此能量为 E_n 的特征子空间构成了 SO（3）李代数的表示空间，从而可以分解为不可约表示的之和，且有好量子数（l，m）。

在这里的讨论完全是线性代数意义上的。事实上通过李代数的微分算符表示，和对称性相关部分波函数更仅仅被对称性直接决定。这事实上给了我们一种统一的看待特殊函数的观点，即酉表示矩阵的矩阵元。在下面我们将给出三个构造，分别是谐振子，SO（3）和 E（2）李代数。我们将从对称性直接 recover 厄密多项式，球谐函数和 Bessel 函数，而重要的工具即为升降算符。

6.2　一维谐振子

6.2.1　升降算符构造

在这个例子中，我们只是希望再通过熟悉的谐振子的例子，再一次说明用李代数方法得到升降算符与得到本征能量的普遍适用性。

谐振子问题中，有特征算符哈密顿算符 $\hat{H} = \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 + \frac{\hat{p}^2}{2m}$，基 $\hat{x}, \hat{p}$ 和对易关系（李括号）:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar; [\hat{H}, \hat{x}] = -i\frac{\hbar}{m}\hat{p}; [\hat{H}, \hat{p}] = i\hbar m\omega^2\hat{x}. \tag{21}$$

为了方便，在接下来的讨论中取 $m = \omega = \hbar = 1$。由于 $\hat{H}$ 与 $\hat{H}$ 和 1 对易，为了求解升降算

符，只需求解变换矩阵 $i\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量，即可得到

$$\begin{aligned}\lambda=1; \quad & a_+ = 1/\sqrt{2}(x-ip)\\ \lambda=-1; \quad & a_- = 1/\sqrt{2}(x+ip)\end{aligned} \tag{22}$$

由此我们可以看出，升降算符事实上就是可对角化元素 ad_H 的特征向量。

6.2.2 生成函数

除了在课堂中我们使用逐级递推的方式求解了谐振子的能谱和波函数。在这里我们采取另外一种方式求解谐振子的所有阶波函数，策略是直接构造生成函数，即计算

$$f_t(x) = \langle x| e^{ta_+} |0\rangle \tag{23}$$

这一形式表达式可关于 t 展开，各阶系数即为所求的特殊函数 $\frac{1}{n!}\langle x| a_+^n |0\rangle$, 因而就是所谓生成函数。

为了计算这一矩阵元，可以构造

$$0 = \langle x| e^{ta_+}a_- |0\rangle = \langle x| [e^{ta_+}, a_-] |0\rangle + \hat{a_-} \langle x| e^{ta_+} |0\rangle \tag{24}$$

直接展开计算可得 $\langle x| [e^{ta_+}, a_-] |0\rangle = -t \langle x| e^{ta_+} |0\rangle$ 从而我们得到微分方程

$$(x+\partial_x)f_t(x) = (\sqrt{2}t)f_t(x) \tag{25}$$

确定其通解为

$$f_t(x) = C(t)exp(\sqrt{2}tx - 1/2x^2) \tag{26}$$

为确定 $C(t)$, 我们仅需在对 $f_t(x)$ 关于 t 求导，得到

$$\frac{d}{dt}f_t(x) = 1/\sqrt{2}(x-\partial_x)f_t(x) \tag{27}$$

化简后得到

$$\frac{dC}{dt} = -tC(t) \tag{28}$$

从而确定生成函数的最终形式

$$f_t(x) = exp(-1/2x^2)exp(\sqrt{2}tx - 1/2t^2) \tag{29}$$

这一表达式中的第二项即为厄密多项式的生成函数。为了进一步提取厄密多项式，仅需通过柯西积分公式即可。

$$\langle x|n\rangle = \frac{1}{2\pi i}\oint_C t^{-n-1}f_t(x)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi i}exp(-1/2x^2)\oint_C t^{-n-1}exp(\sqrt{2}tx - 1/2t^2)\mathrm{d}t \tag{30}$$

第二项恰为厄密多项式的积分表达式。

6.2.3 特征标和配分函数

在李代数和李群的表示论中，特征标起到了至关重要的作用。特征标的定义为

$$\chi_R(exp(tH)) = tr_R(exp(tH)) \tag{31}$$

这一量对于学习物理的人再熟悉不过。形式上取 $t=-\beta$, 认定 H 为哈密顿量，并取哈密顿量的所有本征态为基底，这一量可以写作

$$tr_R(exp(-\beta H)) = \sum exp(-\beta E_n) = Z_{canonical} \tag{32}$$

即为这一体系作为正则系综的配分函数。这给我们一种新的观点来理解配分函数。

此处作为一个简单的例子，我们关于谐振子体系显式计算其配分函数。这一计算事实上在统计物理中已经进行过（爱因斯坦固体模型）。

$$Z_{canonical} = tr(exp(-\beta H)) = \frac{exp(1/2\hbar\omega)}{1-exp(-\beta\hbar\omega)} \tag{33}$$

这一事实上可以给出配分函数的另一理解。考虑体系某一态的时间演化 $exp(itH)\left|\psi\right\rangle$，在路径积分的视角下 $\left\langle\phi\right| exp(itH)\left|\psi\right\rangle$ 由所有演化路径给出。将时间方向紧致化到周期为 T 的圆环上，并不区分初始条件，由于 $\left|\psi\right\rangle$ 演化 T 时间后依旧会回到 ψ 态，因此此时的含时演化即可写作 $\sum\left\langle\psi\right| exp(iTH)\left|\psi\right\rangle = tr(exp(itH))$。因而温度为 的统计理论和时向周期为 T 的量子理论之间存在对偶关系，也即虚时和统计之间的对应关系。

6.3 SO(3) 群表示与球谐函数

在 3.1中我们求得了 $SO(3)$ 李代数的对易关系，并通过最高权表示得到了 SO(3) 李代数的有限维不等价不可约酉表示全体。在这一章中我们将着重讨论这一李代数的在单粒子 Hilbert Space $L^2(\mathbb{R}^3)$ 中的微分算符表示。我们将发现球谐函数的出现完全由 SO(3) 李代数的表示决定，换句话说，即由体系的球对称性决定。

考虑 $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ 的元素 $\psi(x)$,$SO(3)$ 李群对于这一元素有一个天然的作用。

$$\psi(x) \xrightarrow{R} \pi(R)\psi(x) = \psi(R^{-1}x) \tag{34}$$

容易验证这一作用是群同态，可以理解为转动 $\mathbb{R}^3$ 坐标系后其上函数的变化。以 z 方向转动为例，考虑有限大转动变换

$$R(\theta) = exp(i\theta J_3) = \begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta & 0 \\ -sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{35}$$

这一变换可以诱导任意函数 ψ 在无限小变换下的行为

$$\psi(R^{-1}(\theta)\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x} - i\theta J_3\mathbf{x}) = \psi((x-\theta y, y+\theta x, z)) = \psi(x) + \theta(x\partial_y - y\partial_x)\psi(x) \tag{36}$$

另一方面，有

$$\pi(R(\theta))\psi(x) = exp(i\theta\rho(J_3)) = (1+i\theta\rho(J_3))\psi(x) \tag{37}$$

比较两式，得到 $\rho(J_3) = -i(x\partial_y - y\partial x)$, 即为量子力学中我们熟悉的角动量算符的表达式。这一结果代表角动量算符的形式完全由转动这一操作决定，并且可以从群作用自然的构造出来。

同理，我们可以得到关于 x 方向和 y 方向转动变换的生成元，结果与量子力学中学习的形式完全一致。

接下来，我们将仅从微分算符表示出发，构造球谐函数极其递推关系。这将给我们一个从对称性出发的图景，即球谐函数是 SO(3) 表示矩阵的矩阵元，是完全由对称性决定的部分，不依赖于体系的其他任何细节。为此，我们考虑在球坐标系下进行计算，由于转动不改变 r，在目前的讨论中我们设置 r=1。此时微分算符表示可写作

$$\begin{aligned} J_1 = &\ -i(-sin\phi\partial_\theta - cot\theta cos\phi\partial_\phi) \\ J_2 = &\ -i(cos\phi\partial_\theta - cot\theta sin\phi\partial_\phi) \\ J_3 = &\ -i\partial_\phi \end{aligned} \tag{38}$$

此时对应的升降算符为

$$\begin{aligned} J_+ = &\ \tfrac{1}{2}(J_1 + iJ_2) = \tfrac{1}{2}e^{i\phi}(\partial_\theta + icot\theta\partial_\phi) \\ J_- = &\ \tfrac{1}{2}(J_1 + iJ_2) = -\tfrac{1}{2}e^{-i\phi}(\partial_\theta - icot\theta\partial_\phi) \end{aligned} \tag{39}$$

由于李群中的一个定理，此处考虑的微分算符表示可以分解为一系列不等价不可约酉表示的之和，即量子力学中我们早已构造过的表示。

$$\mathcal{H}_l = \mathbb{C} - Span\{|l, -l\rangle, ..., |l, m\rangle, ..., |l, l\rangle\} \tag{40}$$

因此，我们可以反过来从不可约表示出发，通过边界条件决定哪一些表示是我们需要考虑的。我们的策略为从 J_z 的最大特征值特征向量出发进行构造。

6.3.1 球谐函数

从 J_z 的最大特征值特征向量出发，有

$$\begin{aligned} \langle\theta, \phi| J_+ |l, l\rangle = &\ 0 \\ \langle\theta, \phi| J_z |l, l\rangle = &\ l\langle\theta, \phi|l, l\rangle \end{aligned} \tag{41}$$

化简后有

$$\begin{aligned} (\partial_\theta - lcot\theta)\langle\theta, \phi|l, l\rangle &= 0 \\ (\partial_\phi - il)\langle\theta, \phi|l, l\rangle &= 0 \end{aligned} \tag{42}$$

可以发现从最高权表示出发求解过程变得简单不少。在关于 ϕ 的周期性边界条件下可以得到 l 一定为整数。这一结果的物理意义在于说明粒子内禀的自旋自由度无法由 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 这一空间描述。对于整数 l，有解

$$\langle\theta, \phi|l, l\rangle = e^{il\phi}(1 - cos^2\theta)^{l/2} = Ae^{il\phi}P_l^l(cos\theta) = AY_{l,l}(\theta, \phi) \tag{43}$$

为求解其他阶球谐函数，我们需要借助降算符构造递推关系。在下列推导中，暂时忽略归一化常数。选取态

$$\langle\theta, \phi|l, m-1\rangle = \langle\theta, \phi| J_- |l, m\rangle = -1/2e^{-i\phi}(\partial_\theta + mcot\theta)\langle\theta, \phi|l, m\rangle \tag{44}$$

由

$$\langle \theta,\phi | J_3 | l,m\rangle = m\langle \theta,\phi | l,m\rangle = -i\partial_\phi \langle \theta,\phi | l,m\rangle \tag{45}$$

因而 $\langle \theta,\phi | l,m\rangle = e^{im\phi}\langle \theta | l,m\rangle$

换元 $x=cos\theta$, 从而有递推关系

$$\langle \theta | l,m-1\rangle = 1/2(\sqrt{1-x^2}\partial_x + m\frac{x}{\sqrt{1-x^2}})\langle \theta | l,m\rangle \tag{46}$$

同理，在作用升算符后，有

$$\langle \theta | l,m+1\rangle = 1/2(\sqrt{1-x^2}\partial_x - m\frac{x}{\sqrt{1-x^2}})\langle \theta | l,m\rangle \tag{47}$$

给出递推关系式, 即为 legendre 多项式的递推关系。

$$\langle \theta | l,m+1\rangle - \langle \theta | l,m-1\rangle = m\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\langle \theta | l,m\rangle \tag{48}$$

从 $\langle \theta | l,l\rangle = (1-cos\theta^2)^{l/2}$=$(1-x^2)^{l/2}$ 开始进行迭代，可通过一定递推技巧把递推结果化成紧致的形式

$$\langle \theta | l,m\rangle = (1-x^2)^{m/2}(\frac{d}{dx})^{m+l}(1-x^2)^l \tag{49}$$

即为连带 legendre 多项式。将关于 ϕ 角度依赖的部分添上，则有

$$\langle \theta,\phi | l,m\rangle = P_l^m(cos\theta)e^{im\phi} = Y_{l,m}(\theta,\phi) \tag{50}$$

在这些计算中，唯一的 input 即为 SO(3) 李代数在 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 的表示。这代表球谐函数的出现不依赖于哈密顿量的任何细节，粗略的说，仅依赖于哈密顿量是否具有球对称性。

当哈密顿量具有球对称性时，波函数分离变量得到角向方程

$$\frac{\hat{L}^2}{\hbar^2}Y = \lambda Y \tag{51}$$

其本征函数 $Y_l^m(\theta,\phi)$ 即球谐函数

6.4 E(2) 群表示与 Bessel 函数

通过对谐振子及 SO(3) 群的分析，已经可以看到对称性与特殊函数的对应关系，而利用升降算符的代数解法，可以方便得到一组完备的本征矢及各阶波函数的表达式。实际上，特殊函数是某种对称群表示矩阵的矩阵元。

经典力学中我们就知道，物理系统哈密顿量的形式可以不同，对称性可以相同。三维欧氏空间有均匀、各向同性的特点，具有旋转、平移、反射对称性，即 E(3) 对称性。旋转、平移对称性又分别对应角动量、动量守恒。我们希望得到具有这样对称性的哈密顿量的本征波函数。类比上面的 SO(3) 群，我们可以预料这样的本征波函数也应该是某种特殊函数，而它是 E(3) 的不可约表示的矩阵元。

在此讨论更简单的二维欧式群 E(2)，3.3 中我们求得了 E(2) 李代数的对易关系。下面给出欧式群 E(2) 的不可约酉表示。注意到与 SO(3) 不同，E(2) 的不可约酉表示是无穷维的。定义升降算符

$$P_\pm = P_1 \pm iP_2 \tag{52}$$

于是升降算符和 J 组成另一组生成元的基底

$$[P_\pm, P_\pm] = 0, [J, P_\pm] = \pm P_\pm \tag{53}$$

先给出 SO(2) 的不可约酉表示：记 $|m\rangle$ 为 J 的本征态，本征值 m。由定义 4.1，J,$P_\pm$ 对应 S_3 和 $S_\pm$。$P_\pm|m\rangle$ 是 J 的本征值为 $m\pm1$ 的本征态

$$J(P_\pm|m\rangle) = ([J, P_\pm] + P_\pm J)|m\rangle = (m\pm1)P_\pm|m\rangle \tag{54}$$

m 标志着“角动量本征值”，对应转动变换。那 $E(2)$ 中表示平移变换, 对应“动量本征值”的部分呢？为找到共同本征态，我们定义动量平方算符 P^2, 也就是 Casimir 算符。其与三个生成元均对易，可以写出共同本征矢和本征值为

$$P^2|p, m\rangle = p^2|p, m\rangle \;\; J|p, m\rangle = m|p, m\rangle \tag{55}$$

以此，P^2 和 J 能共同区分 $\mathfrak{e}(2)$ 的不等价不可约表示

$$P^2 = P_\pm P_\mp \tag{56}$$

由 $|P_\pm|p, m\rangle|^2 = \langle p, m|P^2|p, m\rangle = p^2$ ，定义升降算符作用于 $|p, m\rangle$ 得到

$$P_\pm|p, m\rangle = \mp ip|p, m\pm1\rangle \tag{57}$$

6.4.1 Bessel 函数

同样地，我们借助升降算符的微分表示得到 E(2) 的表示矩阵的矩阵元——特殊函数 Bessel 函数的递推关系。和谐振子与 SO（3）群的区别在于，此处本征值本征态并不存在上下界——E(2) 表示空间是无穷维的。(只有 $|P_\pm|0, m\rangle|^2 = \langle 0, m|P^2|0, m\rangle = 0$ 的要求)。E(2) 的所有忠实不可约酉表示由实数 p 标记，且有无穷多个。不同 p 标记的态矢属于不等价不可约表示。$|0, m\rangle$ 是 E(2) 非忠实一维不可约表示的唯一基态。我们直接计算 E(2) 表示矩阵的矩阵元：

$$\langle p, m|T(\rho, \varphi)|p, m'\rangle = \langle p, m|e^{-i\varphi J}T(\rho)e^{i\varphi J}|p, m'\rangle = e^{-i(m-m')\varphi}\langle p, m|T(\rho)|p, m'\rangle \tag{58}$$

$T(\rho) = e^{-i\rho P_1} = e^{-i\rho(P_+ + P_-)/2}$ 幂级数展开

对 $m' > m$ 可以得到（$m' < m$ 同理）

$$\langle p, m|T(\rho)|p, m'\rangle = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l!(l+m'-m)!}(\frac{p\rho}{2})^{2l+m'-m} = J_{m'-m}(p\rho) \tag{59}$$

即 $m'-m$ 阶 Bessel 函数的幂级数展开式。

平移算符用升降算符可以表为 $T(\vec{x}) = e^{-i(x_1P_1+x_2P_2)} = e^{-i(x_-P_+ + x_+P_-)}$，其中 $x_\pm = (x_1\pm ix_2)/2$

从而得到升降算符在极坐标下的微分表示为

$$\frac{\partial}{\partial x_\pm}T(\vec{x}) = e^{\pm i\varphi}(\frac{\partial}{\partial\rho} \pm \frac{i}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi})T(\rho, \varphi) = -iT(\rho, \varphi)P_\pm \tag{60}$$

$$e^{\pm i\varphi}(\frac{\partial}{\partial\rho}\pm\frac{i}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi})\langle p,m|\,T(\rho,\varphi)\,|p,m'\rangle=\mp p\,\langle p,m|\,T(\rho,\varphi)\,|p,m'\pm 1\rangle \tag{61}$$

$$e^{\pm i\varphi}(\frac{\partial}{\partial\rho}\pm\frac{i}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi})[e^{-i(m-m')\varphi}J_{m'-m}(p\rho)]=\mp pe^{-i(m-m'\mp 1)\varphi}J_{m'\pm 1-m}(p\rho)] \tag{62}$$

令 $n=m'-m$,$\xi=p\rho$，就得到 Bessel 函数的递推关系式

$$\begin{aligned}2J_n^{'}(\xi)&=J_{n-1}(\xi)-J_{n+1}(\xi)\\ \frac{2n}{\xi}J_n(\xi)&=J_{n-1}(\xi)+J_{n+1}(\xi)\end{aligned} \tag{63}$$

也容易得到 Bessel 方程。利用 Casimir 算符即动量平方算符的微分表达式：

$$\frac{\partial}{\partial x_+}\frac{\partial}{\partial x_-}T(\vec{x})=-T(\vec{x})P_+P_-=-T(\vec{x})P^2 \tag{64}$$

$$(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2})T(\rho,\varphi)=-T(\rho,\varphi)P^2 \tag{65}$$

用 $\langle p,m|$ 和 $|p,m'\rangle$ sandwich

$$(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2})[e^{-i(m-m')\varphi}J_{m'-m}(p\rho)]=-p^2e^{-i(m-m')\varphi}J_{m'-m}(p\rho) \tag{66}$$

再令 $n=m'-m$，$\xi=p\rho$ 就得到 n 阶 Bessel 函数

$$(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}+1-\frac{n^2}{\xi^2})J_n(\xi)=0 \tag{67}$$

由此可见，Bessel 函数就是 E(2) 群元表示矩阵的矩阵元（在 p，m 标记的离散基底下）。同时注意到，以上表达式中只出现了 p^2，所以用 p 和 $-p$ 标记的不可约表示是相同的，$\pm p$ 对应相同的 Bessel 函数。

那么，特殊函数作为哈密顿量的本征波函数这一点如何体现？我们知道，波函数一般有 $\langle\rho,\varphi|n\rangle$ 的形式

所谓表示矩阵的矩阵元是以离散指标标记的 $|m\rangle$ 作为基矢的，它本身是一个位置作为变量的函数。这样的函数其实就可以作为波函数，可以证明矩阵元与波函数的联系。设

$$\langle n'|\,T(x)\,|n\rangle=\langle x|f\rangle \tag{68}$$

形式上群元在变换下满足

$$g^{-1}T(x)g=T(gx) \tag{69}$$

考虑群元 g 由可对角化元素 I 生成，则有

$$\langle exp(itI)x|f\rangle=\langle n'|\,exp(-itI)T(x)exp(itI)\,|n\rangle=exp(it(I_n-I_{n'}))\,\langle n'|\,T(x)\,|n\rangle \tag{70}$$

其无限小版本即象征着 $|f\rangle$ 一定为 I 的特征向量，因此可以由量子数 N 标记。$\langle x|f\rangle=\langle x|N\rangle$。这一分析说明了通过表示矩阵矩阵元定义的特殊函数和直接由特征向量定义的特殊函数是一致的。

实际上，对于 E(2) 我们会发现这样的本征波函数与对称群表示矩阵矩阵元的联系：

$$\langle n| T(\rho,\varphi) |n'\rangle = e^{i(n'-n)\varphi} J_{n'-n}(\rho) \tag{71}$$

$$\langle \rho,\varphi|n\rangle = e^{in\varphi} J_n(\rho) \tag{72}$$

下面我们就直接针对这样形式的波函数，再次通过构造生成函数的方式求解所有阶波函数。

首先，结合角动量算符的微分表示可以得到

$$-i\frac{\partial}{\partial\varphi} \langle \rho,\varphi|p,m\rangle = m \langle \rho,\varphi|p,m\rangle \tag{73}$$

$$\langle \rho,\varphi|p,m\rangle = e^{im\varphi} J_m(\rho) \tag{74}$$

用 p,m 标记的位置表象下本征波函数记为 $\langle \rho,\varphi|p,m\rangle$。考虑一种平移算符 $T(t) = exp(-itP_+) = exp(-itP_1)exp(tP_2)$，在其作用下波函数变为

$$\begin{aligned}
&\langle \rho,\varphi| e^{-itP_+} |p,m\rangle \\
&= \sum_n \langle \rho,\varphi|p,n\rangle \langle p,n| e^{-itP_+} |p,m\rangle \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \langle \rho,\varphi|p,m+k\rangle \frac{(-tp)^k}{k!} \\
&= e^{im\varphi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-tp)^k}{k!} e^{ik\varphi} J_{m+k}(\rho)
\end{aligned} \tag{75}$$

取 $p = -1$, 记 $|-1,m\rangle = |m\rangle$，考虑到平移算符 e^{-itP_1} 和 e^{tP_2} 的作用为 $x \to x+t$ 和 $y \to y+it$

$$\begin{aligned}
&\langle \rho,\varphi| e^{-itP_+} |m\rangle \\
&= \langle \rho,\varphi| e^{-itP_1} e^{-itP_1} |m\rangle \\
&= e^{-itP_1} e^{-itP_1} e^{im\varphi} J_m(\rho) = e^{-itP_1} e^{-itP_1} e^{im\varphi} J_m(\sqrt{x^2+y^2}) \\
&= e^{im\varphi} J_m(\sqrt{(x+t)^2+(y+it)^2}) \\
&= e^{im\varphi} J_m(\sqrt{\rho^2+2t(x+iy)})
\end{aligned} \tag{76}$$

实际这里我们已对 Bessel 函数进行了复平面上的解析延拓。得到

$$J_o(\sqrt{\rho^2+2t(x+iy)}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-tp)^k}{k!} e^{ik\varphi} J_k(\rho) \tag{77}$$

三维情况下，我们同样方法就可以得到 $E(3)$ 的表示和球贝塞尔函数，对此研究 $SO(3)$ 即可。

以上，我们利用升降算符构成的不同的算符，依次得到了：Bessel 函数的递推关系、满足的微分方程、及生成函数

Relations	$\mathcal{O}$	$E(2)$ **Example of** $\mathcal{O}$
2nd order ODE	quadratic Casimir	P^2
Differential Relations	$E_{+\alpha}+E_{-\alpha}$	$P_+ + P_-$
Recursive Formulae	$E_{+\alpha}-E_{-\alpha}$	$P_+ - P_-$
Generating Functions	$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tE_{\pm\alpha}}$	$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tP_+}$

图 3: 由算符 O 得到特殊函数的关系式