对非完整约束的进一步讨论

21307110335 范宁玥

Introduction

实际上拉氏力学的优势更在于处理约束体系。只有亲密接触其在带约束体系的处理方法，才算了解拉氏力学。
何为约束 (constraint)？如何描述约束？如何处理约束体系？

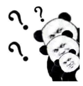
在课堂上我们详细地讨论如何处理**几何约束/完整约束（Holonomic Constraints)**
简单回顾一下整个逻辑过程：
Step1 如何描述约束：约束函数->约束方程 以及约束之间的独立性
Step2 如何描述约束力对体系的影响：引入虚位移与虚功 并证明了虚位移做功为零的充要条件"心有所信 方能行远"(why?)
Step3 "全保守零虚功"下的含约束的拉格朗日方程 以及约化的拉格朗日
并在最后提到了，只要含速度的非完整约束可以表示为如下形式，就可以用拉格朗日方程处理：

$$\sum_{\beta=1}^{D} g_{\alpha\beta}(q,t)\, dq_\beta + g_{\alpha 0}(q,t)\, dt = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, C$$

并且若上式可以写成全微分形式，即：

$$\begin{cases} \partial[u_\alpha(q,t)\, g_{\alpha\beta}(q,t)]/\partial q_\gamma = \partial\left[u_\alpha(q,t)\, g_{\alpha\gamma}(q,t)\right]/\partial q_\beta, & \beta,\ \gamma = 1, 2, \dots, D \\ \partial[u_\alpha(q,t)\, g_{\alpha 0}(q,t)]/\partial q_\gamma = \partial\left[u_\alpha(q,t)\, g_{\alpha\gamma}(q,t)\right]/\partial t & \gamma = 1, 2, \dots, D \end{cases}$$

非完整约束就可以退化为几何约束，称为**可溯约束。**

但是这个看起来就很不好判断诶，显然$u_\alpha(q,t)$并不好找，那有没有什么更简单的方法呢？ 

并且在这里直接给出的一些结论，似乎有点令人困惑。能不从更直观或者更根本地给出解释呢？

约束的分类

这里再重述一次约束的分类：
1. 完整约束/几何约束Holonomic：
f(q_1,... , q_n, t) = 0. 约束方程不显含速度.
这样的约束可以用来减少体系的自由度（求约化的拉格朗日量）
☆有时形式上显含速度的也可以是一个holonomic in disguise，即可以表示为完整约束的全微分形式的情况。

2.非完整约束 Non-holonomic:
f(q_1,..., q_n, $\dot{q}_1$,...,$\dot{q}_1$,...,$\dot{q}_n$,t) = 0. 约束方程显含速度，且约束函数不可退化为完整约束的全微分

3. Neither:
Not described by equations, for example f(q_1,..., q_n, t)<0. 一些不属于上述两种情况的其他奇怪约束

下文将重点讨论第二类约束的判断

从几何角度去理解不完整约束

我们这里引入一套新的语言，来将"代数地"求解运动方程的一个过程转化为"几何"的变换过程。虽然流形确实是非常高大上的东西，但我们这里引入它其实根本上是为了更直观地、清晰地理解约束，正如华罗庚说"数缺

形时少直观”。

所以，以下的讨论未必能做到严谨和数学，但林老师说物理学家一般都是这样简单粗暴的

总体的思路是，我们试图将原本在位形空间中对力学问题中的讨论对应到一个几何系统中去，在这种对应的过程中我们会不断遇到新的问题，这时就抛出在几何系统中需要新定义的物理量。或许比起单纯的接受新的概念，知道为什么要引入会有助于我们理解这些高度抽象的东西。

Question1.我们知道在拉格朗日力学中，对位形空间的描述可以由n个广义坐标给出，即$(q_1,\ldots,q_n)$，那么第一个问题就是，如何把这种描述对应到几何结构中?

→于是引入流形

Definition1.m维流形（Manifold)

微分几何中的严格定义：M是Hausdorff空间，对∀x∈M,都有x在M中领域U中同胚于m维欧式空间的R^m 的一个开集，则M是m为流形。（陈省身《微分几何讲义》）

简单来说，就是能够把这个抽象几何空间中的一个点映成m维欧式空间中的一个点，在欧式空间中这个点的坐标即称为流形的"局部坐标"。

i.e.对于一个n维流形，我们能把这个东东上的每个点映成位形空间中的坐标（$q_1,\ldots,q_n$），这样就建立起了两种描述间的对应关系。

Question2.有了广义坐标的对应物，接下来就要问：广义速度$\dot{q}$要怎么定义？并且我们这里要解决的是"含速度的约束"的问题，这种约束在流形上又要怎么表示呢?

这时回忆起一些朴素的思想，Newton那里速度就是s-t曲线的切向量。

而位形空间中，描述物体运动状态的变化也是经过一条曲线从一个点移到另一个点。而这条曲线的切向量很自然的就是它从一个位形/或者说状态移到另一个状态的速度矢量。记得我们说的位形空间中的点和流形上的点有一个很好的"同胚"映射的关系，所以我们可以自然地把切向量推广到流形上。

→引入流行上的切向量、切空间（这里不是非常地严谨，但陈书的定义比较fancy对我们的物理理解帮助有限)

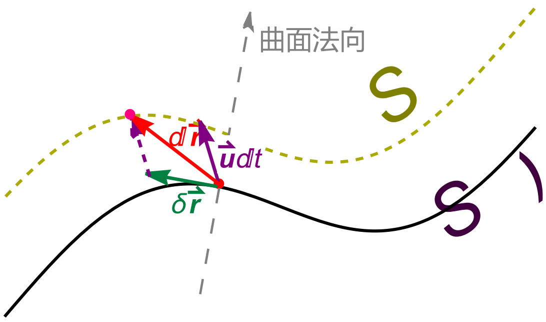
Definition2.切向量tangent vector

流形中某条曲线在某点的切向量即为该点的瞬时速度

Definition3 切空间tangent space （流形M在p点的切空间记为$T_p M$）

过该点的所有曲线的切向量的集合

*这里有一个个人的小思考，记得我们在研究几何约束时先引入了冻结时间的虚位移的概念，而虚位移的几何意义正是切向量。所以通过这里我们隐隐感觉到当时为什么要引入虚位移会方便我们的研究;并且如果细看流形上微分的形式与虚位移的定义，它们非常接近



林老师讲义上偷过来的图

很显然，当存在一系列约束$f(q_1,\ldots,q_n,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_n)=0$时，你不能沿着任意一个切向量去下一个状态。只有符合这个约束描述的切向量是被允许的。

其实，从这个角度可以反过来看在位形空间中求解运动的过程：要知道物体的状态在位形空间中是如何演化的，也就是给定初值，要知道它在任意时刻的位置。那么约束是否足够多/足够强就决定了，我们是否能够找到这个唯一的路径。

Question3.所以非常相似的，在流形上求解运动过程就是，通过所有被允许的切向量，我们能否知道这个运动状态是如何在流形上"流动"的。

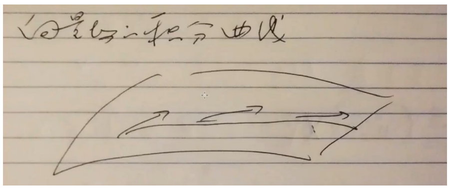
对于这个流动过程，我们也可以给它一个名字：（这里对流形和流的翻译个人感觉真的非常妙）

Definition4 流flow

$\varphi_t : M \to M$　　p→φ_t(p)

流是从流形M到M的一个映射，把流形上某一时刻的一点p映到t时间后的一点φ_t(p).

如果能够知道每个点的flow，自然就能够知道它的演化规律，就可以求解出对应的物体的运动方程。或者说，因为我们知道切向量是每个点的微分，flow就相当于给出了整个积分曲线的信息。



所谓"黄河之水天上来，奔流到海不复回"，求积分曲线就是要从每个点可能能怎么流找到它从天上到海里的整个路径。

既然知道了我们的目标——判断积分曲线能否找到，接下来就需要引入一些新的工具去向这个目标迈进。（不仅要"心有所信"，还要"实践出真知"）

Definition5.切丛tangent bundle(流形M的切丛记为TM)

各点切空间的并集：TM=$\cup_{p\in M} T_p M$

Definition6.向量场vector field

这里向量场的定义会和我们印象中的不太一样：它是一种映射，把M光滑地映射到TM

为什么我们在切向量和切空间的基础上还要引入这两个新概念呢？注意切向量和切空间都是定义在流形上的某一个点上的，但我们既然想要求解的是整个的流，自然就要研究各点切空间的总和——切丛的性质，而向量场映射则给出了流形M 是怎么对应到它的切丛TM上的。

完成了这个转换，最fancy的地方就要来了。但为了尽量是它简单易懂只能做一些具有主观性的解释了T-T

💡**Question4.**怎么样的vector field,能给出我们想要的积分曲线，以得到运动方程的解？

Definition6.李括号Lie Bracket

定义向量场[v,w]=vw-wv=$\frac{\partial w_i}{\partial q_j} v_j$-$\frac{\partial v_i}{\partial q_j} w_j$ 为M上的向量场v,w的李括号

Frobenius Theorem（为方便起见我们这里只写仅有两个向量场的情形了，推广到任意有限个向量场是非常方便的）

若[v,w]可表示为v和w的线性组合，则对M上任意一点存在某种局域坐标系，且这个向量场的积分曲线是可求的。

这个定理物理的几何书上一般直接给出，Chern书上有很漂亮的证明但这不是我们的topic。 *Proof* The proof is trivial. 所以我们姑且对它做一些简单理解

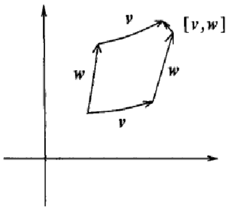
记得向量场的定义是把流形映到它的切丛上，而切丛则描绘了整个速度场，考虑约束条件之后就是能被允许的各点的速度矢量/切矢量。

那么这里[v,w]=vw-wv描绘的就是：以不同的顺序沿着被允许的切矢量走，合效果会不会有什么区别？（事实上观察李括号的具体运算表达式，也可以意会它的意义：先对某一个向量场做一个微变再作用另外一个，交换次序后差值是什么？）

如果[v,w]=0，它是commutator对易子，也就是只要沿着约束，你怎么走都会走出一样的结果，那很显然积分曲线是唯一可求的，这是很强的约束。

Frobenius定理则给出了，这个条件是可以适当被弱化的。

即当如右图所示，[v,w]≠0的情况



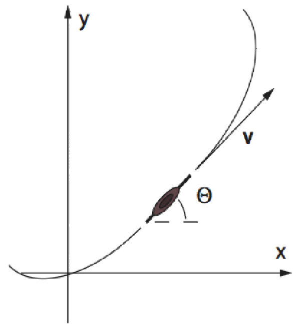
[v,w]仍然可以表示为v和w的线性组合，它的意义是什么呢？就是以不同的顺序走，相差矢量仍然在原本的约

束构成的切空间内，即想要消去两种变化的区别，你并不需要违背某个约束，广义上两种不同走法仍可以通过某种方式等效起来。（而如果[v,w]不能表示为v与w的线性组合，两种不同的走法将彻底产生区分，这就意味着积分曲线会出现歧路，没法确定唯一的解。）

一个栗子

经过上个部分的讨论，我们将位形空间中的求解含速度的约束的运动过程的问题转化为了对流形上向量场的性质的研究，并可以粗浅的认为我们找到了一个较为系统的方式去刻画一个运动过程是否可以有一个唯一的解。
在这个逐步建立起对应的过程中，感受到了一种强烈的数学的优雅性与系统性，尽管我们的讨论在很多地方还缺少数学的严谨性。（但其实很多时候沉迷于证明也会容易欠缺对大概念的把握叭）
下面我们举一个简单的栗子，对上面抽象的讨论做一个更具体的阐释。

考虑一个如右图所示的独轮车（二维化的）：



对这个体系的约束显然是，你不能朝任意方向走，而只能沿着轮子朝向的方向走。i.e.对速度的约束为：$\dot{y} = \dot{x}\tan\theta$
记得我们刚刚给出的，为了在流形上研究约束，我们要把它表示为向量场的形式：

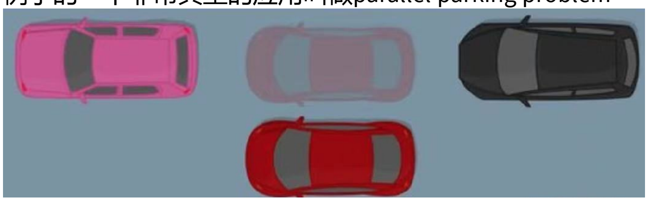
$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$.这就是一种从M 到TM的映射

即有：v=$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,w=$\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$,

[v,w]=$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 0 & \cos\theta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$.

显然[v,w]并不能表示为v和w的线性组合，这不是一个完整约束，这个运动过程没有唯一解。
实际上这是很显然的事情，一个独轮车在平地上的滚动显然非常自由，仅给出前进方向必须沿着轮子的方向并不能够让我们确定他会怎么走。这里只是因为学了新方法，难免技痒

但这里对约束的研究事实上还是非常常用的，比如搞动力系统、路径规划和机器人学的等等。对上面独轮车的例子的一个非常典型的应用叫做parallel parking problem



怎么把你的车车停进去？具体做法相信各位会开车的同学都很熟练。但上面的讨论告诉我们，虽然你不可能使直接它平移进去，但因为这是一个不完整约束你可以通过转方向盘+前后移动选择很多不同的可以进去的路径。

参考文献

[1]Cornell理论力学课的讲义：Notes on non-holonomic constraints,by Flip Tanedo,For P3318, Spring 2013 是主要的参考
[2]陈省身，陈维桓：微分几何讲义
[3]Hand & Finch, Analytical Mechanics
[4]Frankel, The Geometry of Physics
[5] B.D. Johnson, “The Nonholonomy of the rolling sphere,” American Mathematical Monthly, July-July2007, Vol 114, 500.
[6] Arnold,Mathematical Methods of Classical Mechanics
[7]https://www.bilibili.com/video/BV16a411H7Dd/?spm_id_from=333.337.search-card.all.click 一门微分几何课
[8]林老师的讲义 主要是第二章 含约束的拉格朗日力学

补充讨论

pre的时候同学提问到是否认为在这个独轮车的例子中，给定初始条件，运动不是唯一可解?
反思之后我认为可能当时对这个问题做出了不太正确的回答，因此在这里对“约束可积”与“运动唯一可解”这两个概念做进一步的辨析。

首先是完整约束：完整约束实际上说满足约束条件的运动不能到达整个构型流形的所有点，能到达的区域是某个子流形(比如r=const, 定义了一个R^3的一个子流形，即球面)；如果只有完整约束，那么运动所有可能的速度就构成了构型流形的切丛(每一点的速度都可以随便走，即每一点上可能的速度就是这一点的切空间；而每一点所有可能的速度或切向量就构成了切丛)
而非完整约束：非完整约束说速度也不能随便走，因此它就是说在构型流形上每一点上，符合约束条件的速度不再是整个切空间了，而是切空间的一个子集(即定义了一个分布distribution)。所有可能的速度不再是整个切丛了，而是切丛的一个子集(或者说子丛)

而求解积分曲线的问题就是：以独轮车为例，因为没有额外的几何约束，我们的整个构型流形(x,y,theta)实际就是R^3。如果没有额外约束，在每一点的广义速度将是随便的三维矢量，即它们构成那一点上的切空间T_xR^3≌R^3。但现在有约束，那个约束的意思是说在每一点的速度只能从{(0,0,1),(cos, sin, 0)}张成的空间里面去取。所以现在我们每一点可能的速度不再是R^3了，而是R^3的一个子集。这个子集由两个向量场(0,0,1),(cos,sin,0)定义。也就是我们从所有的速度切丛中取出了一部分，即子丛。
Frobenius定理说，如果上面那两个向量场满足李括号条件，那么就可积，即可以积分出一系列子流形族。如果结合初始条件，就挑出了一个子流形，那么我们就把非完整约束(分布)变成了完整约束(子流形)。比如\dot{r}=0是分布（它规定每一点的速度不能有沿径向的），积分以后结合初始条件得到r=const，它是个子流形。而上面的独轮车就是说没法弄出来这个子流形。

因此，这里似乎没有考虑“运动”（即坐标随时间的关系）是否唯一可解[因为实际上还没有引入“时间”])
至于“运动”是不是唯一可解，和上面的约束没有多大关系（约束是否完整是几何问题）。因为决定运动的流不是约束，而是来自动力学。牛顿决定性原理还是对的，只要给定初态，运动唯一可解。（比如独轮车给定初速唯一的运动就是会沿着那个方向走下去)

所以上文中关于运动可解性的讨论、以及“流”的概念是否准确似乎都有待商榷。
以及Frobenius定理给出的也是积分曲线的“可解性”而不是“唯一性”。