1 Test lisse sur le bloc des deux premiers chiffres significatifs

L'objectif de cette partie est de reprendre la méthodologie de l'article (A CITER) sur la construction des tests lisses d'adéquation, pour l'appliquer à la loi de Benford sur le bloc des deux premiers chiffres significatifs.

Nous allons ainsi étendre les tests T_K utilisés précédemment sur le premier chiffre significatif, pour les appliqués sur le bloc des deux premiers chiffres, et ainsi voir si les conclusions de rejet parmi les pays restent les mêmes.

Dans un premier temps nous construirons donc ces nouveaux tests. Puis dans un second nous observerons leurs courbes de puissance par rapport à deux autres tests : χ^2 et Freedman-Watson (U^2), sur deux alternatives : Rodriguez et Pietronero. Cela s'inspire complètement de (A CITER).

1.1 Préambule/Cadre Théorique

1) Loi de Benford sur le bloc des deux premiers chiffres significatifs :

Soit $X \in [1; 10[$ la mantisse de notre nombre aléatoire.
On suppose que $\mathbb{P}(X \leq d) = \log_{10}(d)$ pour tout $d \in [1; 10[$. C'est à dire X suit la loi de Benford continue.

Considérons $Y \in [\![10; 99]\!]$ les deux premiers chiffres significatifs de X. Alors par un raisonnement analogue à la construction de la loi de Benford sur le premier chiffre :

$$\begin{aligned}
\forall y \in [\![10; 99]\!], \quad \mathbb{P}(Y = y) &= \mathbb{P}\left(\frac{y}{10} \leq X < \frac{y}{10} + \frac{1}{10}\right) \\
&= \log_{10}\left(\frac{y}{10} + \frac{1}{10}\right) - \log_{10}\left(\frac{y}{10}\right) \\
&= \log_{10}\left(\frac{y+1}{y}\right) \\
&= \log_{10}\left(1 + \frac{1}{y}\right)
\end{aligned}$$

2) Théorèmes (issus de A CITER) :

Tout repose sur le théorème suivant. Il explique comment construire une famille de tests lisses d'adéquation, indéxée par l'entier K.

Théorème 1) : Soit G une loi cible, ayant pour densité f par rapport à une mesure dominante ν. Soit $(X_1, X_2, ..., X_n)$ un n-échantillon issu de $X \sim G_A$. On veut tester H_0 : $G_A = G$, contre H_1 : $G_A \neq G$.

Soit $\{h_0 \equiv 1, h_k, k \geq 1\}$ une famille de fonctions orthonormales par rapport à f, c'est à dire $\int h_k(x) h_{k'}(x) f(x) \, \mathrm{d}\nu(x) = \delta_{kk'}$, la fonction delta de Kronecker.

Soit $U_k = n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} h_k(X_i)$, et soit pour un entier $K \geq 1$, $T_K = \sum_{k=1}^{K} U_k^2$.
Alors sous H_0, $T_K \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \chi^2_K$, et un test de niveau asymptotique α rejette H_0 au profit de H_1 si la valeur observée de T_K dépasse $x_{1-\alpha}$ le quantile d'ordre $1-\alpha$ d'une loi χ^2_K.

Nous allons maintenant spécialisé ce théorème au cas où G est la loi de Benford précédente sur le bloc des deux premiers chiffres significatifs. Nous obtiendrons ainsi plusieurs tests d'adéquation T_K pour G.
Pour ce faire il nous faut calculer des fonctions orthonormales h_k associées à G comme dans le théorème ci-dessus. Nous utilisons le résultat suivant (qui est général) :

Théorème 2) : Soit $X \sim G$, et $\mu_k = \mathbb{E}(X^k)$, pour $k \geq 0$. Soit aussi la matrice $M_k = [\mu_{i+j}]_{i,j=0,...,k-1}$, le vecteur $\lambda_k = (\mu_k, \mu_{k+1}, ..., \mu_{2k-1})^T$, et la constante $c_k = \mu_{2k} - \lambda_k^T M_k^{-1} \lambda_k$.
Alors les polynômes :

$$h_k(x) = c_k^{-1/2}(x^k - (1, x, x^2, ..., x^{k-1}) M_k^{-1} \lambda_k)$$

satisfonts le théorème précédent.

Heureusement pour nous, la loi de Benford à deux chiffres est bornée p.s., et donc admet un moment pour tous les ordres. Nous avons donc tout les éléments de "la recette de cuisine".

1.2 Construction des tests lisses T_K :

Soit X suivant la loi de Benford sur le bloc des deux premiers chiffres significatifs, $\forall x \in [\![10; 99]\!], \quad \mathbb{P}(X = x) = \log_{10}\left(1 + \frac{1}{x}\right)$. On note $X \sim LB(2)$.

Cette partie de construction a été effectuée sur R, et toute les commandes se trouvent en annexe.

Nous commençons par calculer les fonctions orthonormales h_k du théorème numéro 2) ci-dessus, associées à la $LB(2)$. On obtient :

$h_1(x) = -1.54751771 + 0.04010177x$

$h_2(x) = 2.795867953 - 0.167441591x + 0.001736457x^2$

$h_3(x) = -5.18781 + 4.869054e^{-01}x - 1.155519e^{-02}x^2 + 7.630402e^{-05}x^3$

$h_4(x) = 9.725235 - 1.237520x + 4.769440e^{-02}x^2 - 6.950207e^{-04}x^3 + 3.371880e^{-06}x^4$

Avec ces quatre fonctions nous pouvons donc construire T_K pour $1 \leq K \leq 4$. Le choix de K est important : si il est trop grand alors le test sera très peu puissant, et si il est trop petit alors il le sera également sur certaine alternative.
Dans le package associé à (A CITER), on peut calculer les tests pour K entre 1 et 7. Pour des raisons pratiques ici, nous n'avons pas pu calculer les h_k pour $k \geq 5$. En effet la

$LB(2)$ a un support entre 10 et 99, et ses moments deviennent très rapidement élevé. Or dans le théorème numéro 2), nous calculons l'inverse de M_k, ce qui en fait une matrice avec de très petit coefficients. Petit à tel point que le logiciel "plante" car il "ne peut pas effectuer de division par zéro" lors du calcul de l'inverse. Autrement dit, R considère M_k comme une matrice non-inversible, ce qui n'est pourtant pas le cas.
Cependant, cela n'est pas gênant, car comme nous pourrons le voir plus tard lors du calcul des courbes de puissances, le test préféré est celui du T_2, surpassant T_3 et T_4. Ce qui fait des T_K, $K \geq 5$, de mauvais candidats.

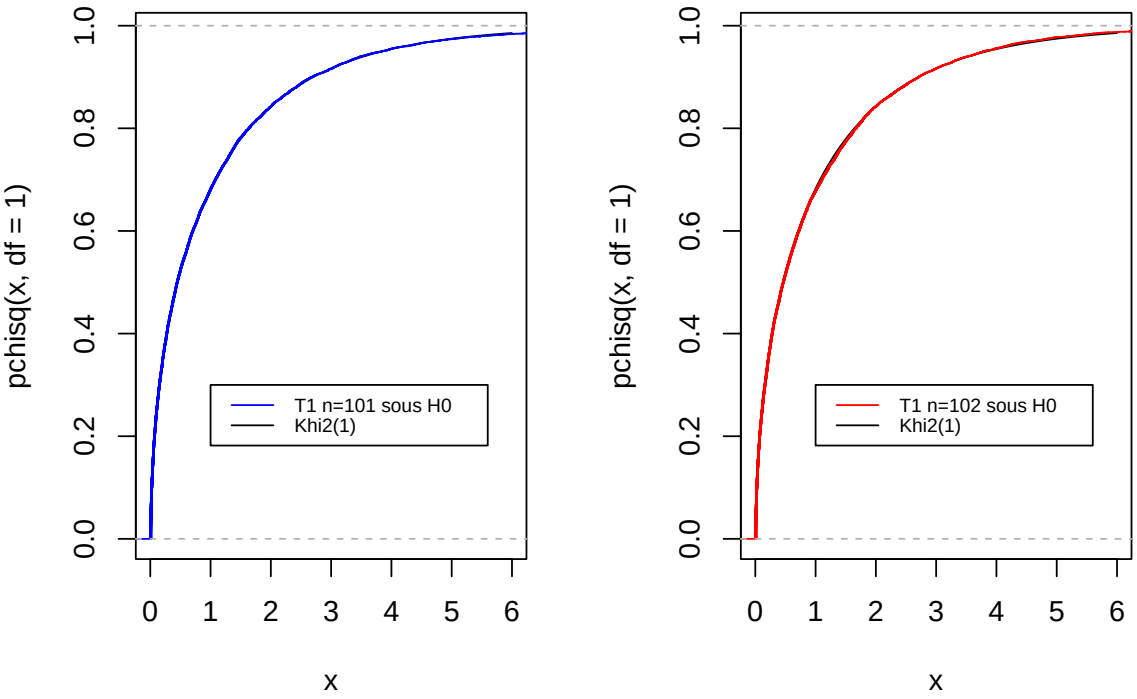
Nous pouvons donc maintenant calculer la statistique T_K pour $1 \leq K \leq 4$, et effectuer le test proposé dans le théorème numéro 1) : On rejette H_0 si T_K dépasse le quantile d'ordre $1-\alpha$ de sa loi sous H_0.
Pour une observation $T_K(\omega) = t$, nous calculons la p.value associé : $\mathbb{P}_{H_0}(t \leq T_K)$. Si n, le nombre de X_i, est grand, alors on peut approximer la p.value asymptotiquement par $\mathbb{P}(t \leq \chi^2_K)$. Dans la pratique, si $n \leq 100$, on fait l'approximation par Monte-Carlo, et sinon on la fait par approximation asymptotique du χ^2_K.

Justification du choix $n > 100$:

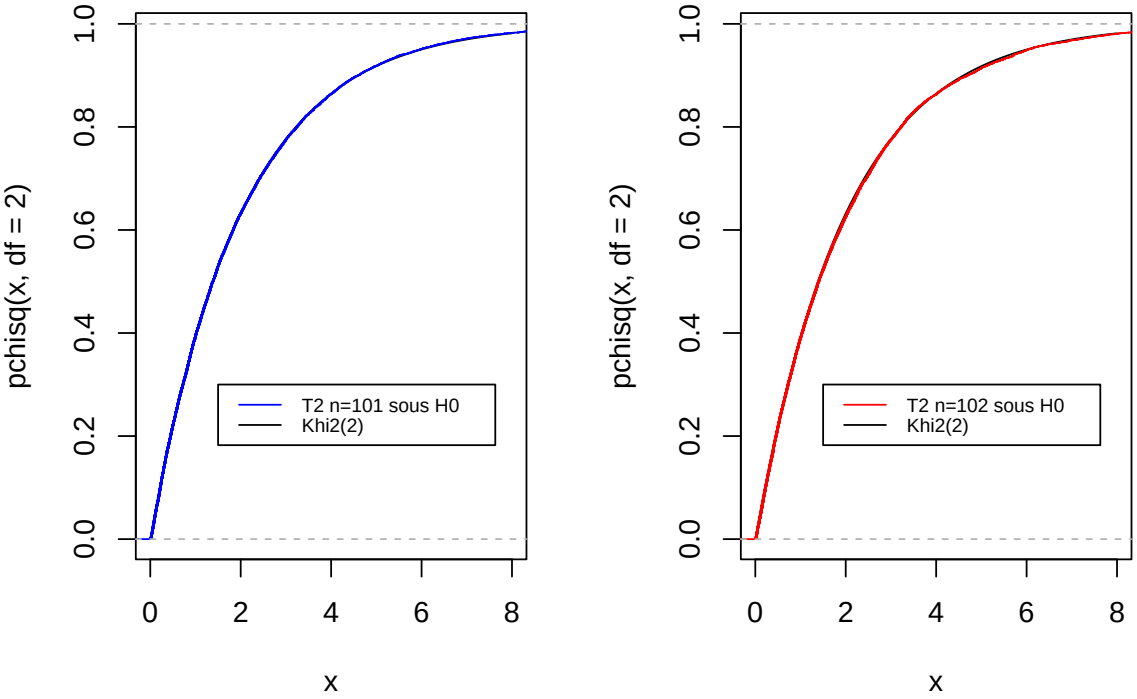
Ci-dessous, voici en couleur les fonctions de répartition empirique issues d'échantillons de taille 10 000 de T_K (pour $n = 101$, et $n = 102$ données), et générés sous H_0. En noir la fonction de répartition théorique d'un χ^2_K. Un graphique pour chaque $1 \leq K \leq 4$.

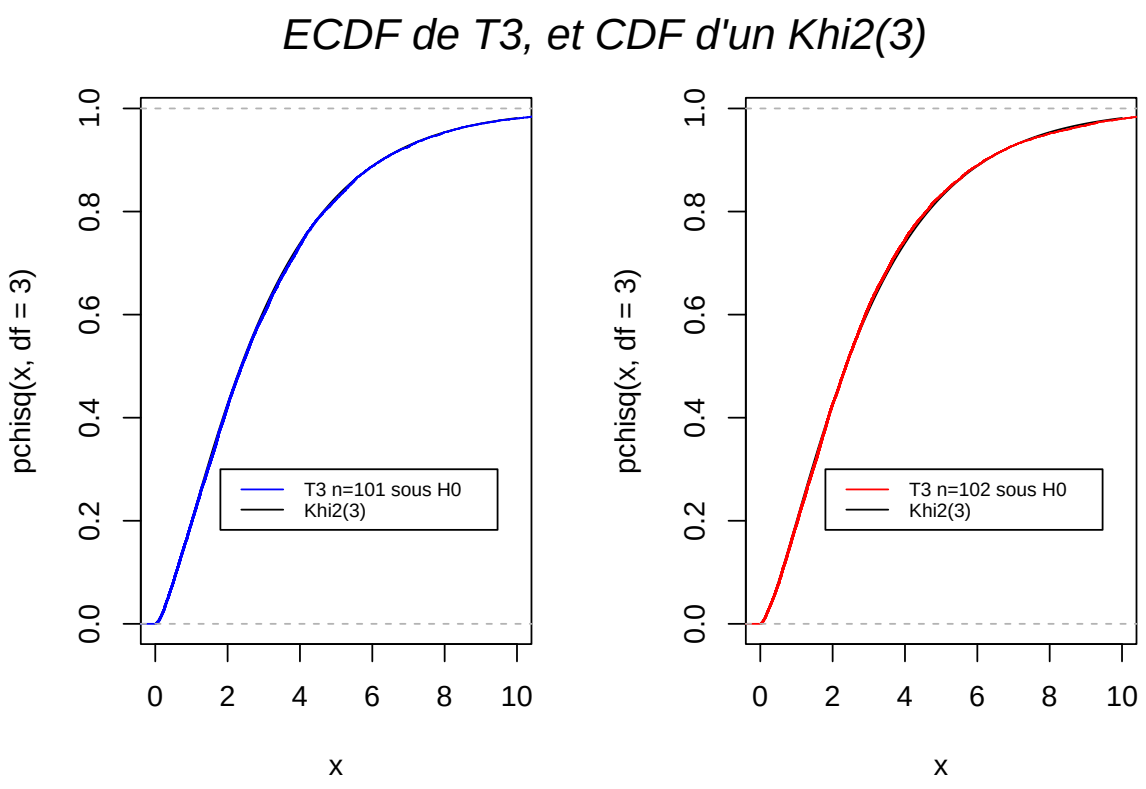
On constate que pour n > 100, l'ecdf de T_K est quasiment égale à la fonction de répartition théorique d'une χ^2_K. A tel point qu'il est extrêmement difficile de distinguer cette dernière, c'est à dire la courbe noire, et cela même en zoomant (elle existe bien sur chaque graphique !).

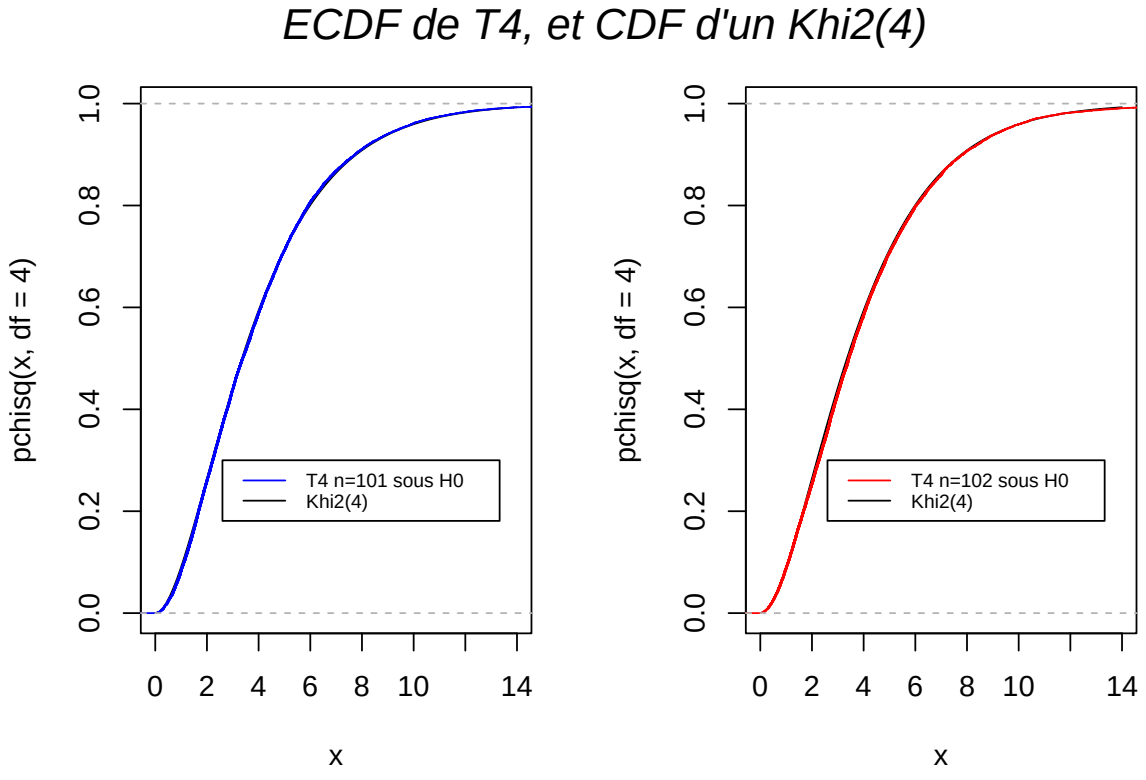
ECDF de T1, et CDF d'un Khi2(1)



ECDF de T2, et CDF d'un Khi2(2)



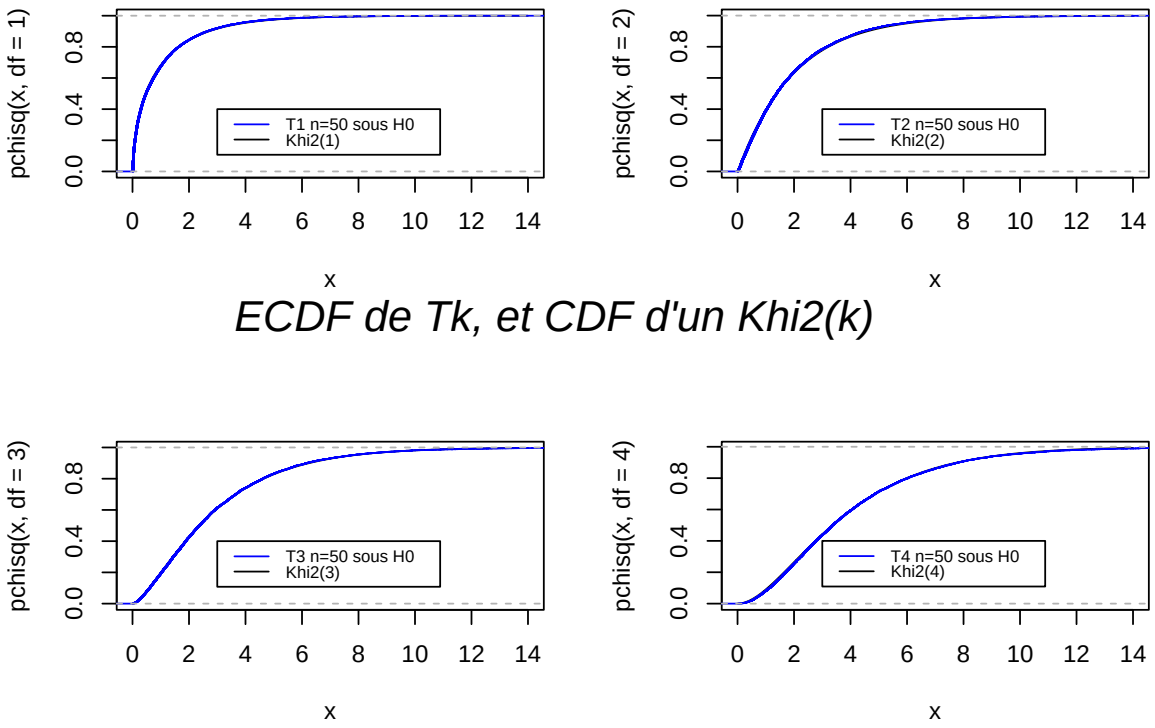




Nous avons même recommencé l'opération, toujours avec des échantillons de 10 000

T_k, mais cette fois-ci pour $n = 50$. En bleu la fonction de répartition empirique de T_k, et en noir la fonction de répartition théorique d'un χ^2_K.

On constate toujours une extrême proximité des courbes bleus et noires. C'est pourquoi le choix de $n > 100$ est même peut-être trop exigeant.



1.3 Comparaison des puissances avec d'autres tests :

Nous allons présenter les courbes de puissance des quatre tests T_k construits ci-dessus, du test du χ^2, et de celui de Freedman-Watson (U^2), sur deux alternatives à la $LB(2)$: La Rodriguez et la Pietronero bivarié.

$\rightarrow$ Le test du U^2 étant moins connu que celui du χ^2, on rappelle sa statistique :

Pour $d \in [\![10; 99]\!]$, on pose $\hat{p_d} = n_d/n$ la proportion de d dans l'échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$, et π_d les probabilités théorique de la $LB(2)$. Soit aussi $S_d = \sum_{i=10}^{d} \hat{p_i}$ et $S_d^* = \sum_{i=10}^{d} \pi_i$. Posons $Z_d = S_d - S_d^*$ l'écart entre la fonctions de répartitions empirique et la fonction de répartition théorique de la $LB(2)$. Posons également $t_d = (\pi_d + \pi_{d+1})/2$ pour $d = 10, 11, ..., 98$, et $t_{99} = (\pi_{99} + \pi_{10})/2$. Alors :

$$U^2 = \frac{1}{n} \sum_{d=10}^{99} (Z_d - \bar{Z})^2 t_d$$

$\rightarrow$ On présente également les alternatives à la $LB(2)$:

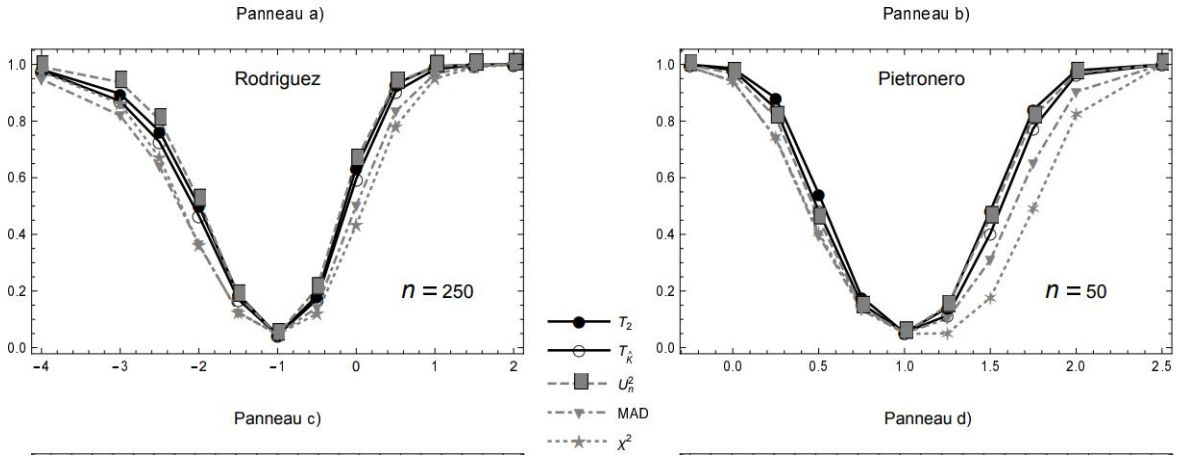
1) Rodriguez bivarié : ($\gamma = -1$: on retrouve la $LB(2)$)

$$\mathbb{P}(X=d) = \begin{cases} \log_{10}(1+\frac{1}{d}) & \text{si } \gamma = -1 \\ \frac{1}{810}\left(9 + 19\ln(10) + 9d\ln(d) - 9(d+1)\ln(d+1)\right) & \text{si } \gamma = 0 \\ \frac{\gamma+1}{90\gamma} - \frac{(d+1)^{\gamma+1} - d^{\gamma+1}}{\gamma(100^{\gamma+1} - 10^{\gamma+1})} & \text{sinon} \end{cases}$$

2) Pietronero bivarié : ($\gamma = 0$: on retrouve la $LB(2)$)

$$\mathbb{P}(X=d) = \begin{cases} \log_{10}(1+\frac{1}{y}) & \text{si } \gamma = 0 \\ \frac{d^{-\gamma} - (d+1)^{-\gamma}}{10^{-\gamma} - 100^{-\gamma}} & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans (A CITER), voici les courbes de puissances obtenues pour les tests ci-dessus (T^2, χ^2, U^2) portant sur l'adéquation du premier chiffre significatif avec la $LB(1)$ (loi de Benford simple), et pour les alternatives correspondantes univariées :



Les tests du T^2 et du U^2 sont très bon. Tandis que celui du χ^2 est très mauvais. Voyons voir si nous avons équivalence avec le cas bivarié à deux chiffres significatifs.