Лекция по матану от 12 сентября

1 Предел числовой последовательности

Пример
$x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$
Пусть $\epsilon > 0$ Тогда $|x_n - 0| = \frac{1}{n} < \epsilon$ если $n > \frac{1}{\epsilon}$
$N = \left\lfloor \frac{1}{\epsilon} \right\rfloor + 1$(округление вниз)
Начиная с номера N x_n приближается к нулю с точностью ϵ

Определение
Если задана последовательность x_n, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \forall\epsilon > 0\ \exists N = N(\epsilon) :$
$\forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon$
Или $\epsilon > 0; O_\epsilon = \{x|\ |x - a| < \epsilon\}$ - ϵ окрестность точки a
$\forall\epsilon > 0\ \exists N\ : \forall n > N \Rightarrow x_n \in O_\epsilon(a)$
Удтверждение 1
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \iff \forall\epsilon > 0$ вне окрестности точки a имеется лишь конечное множество членов последовательности
Доказательство $\forall\epsilon > 0\ \exists N\ : \forall n > N \Rightarrow x_n \in O_\epsilon(a)$
то есть только $x_1, x_2, ..., x_n$ могут не принадлежать $O_\epsilon(a)$
И в обратную сторону: $\epsilon > 0; x_{n1}, x_{n2}, ..., x_{nk} \notin O_\epsilon(a)$
Пусть $N = max(n_1, n_2, ..., n_k)$, следовательно $\forall n > N \Rightarrow x_n \in O_\epsilon(a)$, что и является определнием предела, что и требовалось доказать.
Обычно данное удтверждение используется для доказательства несходимости ряда
Пример $x_n = (-1)^{n+1}$
Удтверждение 2
Если предел последовательности существует, то он определен однозначно.
Доказательство
Рассуждаем от противного. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a_1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a_2$ и $a_1 \neq a_2$
Возьмем $\epsilon = \frac{|a_1 - a_2|}{3}$, значит окрестности a_1 и a_2 не пересекаются.
Но тк $\lim x_n = a_1$, то вне окрестности a_1 находится только конечное число членов последовательности.
Значит в окрестности a_2 лежит конечное число членов последовательности, что противоречит определению предела.
Определение
$\{x_n\}$
Последовательность ограничена сверху, если $\exists M\ \forall n \Rightarrow x_n \leq M$
Последовательность ограничена снизу, если $\exists M\ \forall n \Rightarrow x_n \geq M$
Последовательность ограничена, если она ограничена сверху и снизу или $\exists M\ \forall n \Rightarrow |x_n| < M$.
Удтверждение 3
Сходящаяся последовательность ограничена.
Доказательство

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$; Возьмем $\epsilon = 1$
$|x_n| = |(x_n - a) + a| \le |x_n - a| + |a|$
Тогда $\exists N : \forall n > N \Rightarrow |x_n| \le |x_n - a| + |a| \le 1 + |a|$
Пусть $M = max(|x_1|, |x_2|, ..., |x_N|, 1 + |a|)$, тогда $\forall n \to x_n \le M$
Удтверждение 4 Теорема о двух полицейских или теорема о зажатой последовательности
$x_n \le y_n \le z_n$, при этом $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$
Доказательство
Возьмем $\epsilon > 0$, значит $\exists N_1 : \forall n > N_1 \Rightarrow x_n \in O_\epsilon(a)$
Для того же ϵ $\exists N_2 : \forall n > N_2 \Rightarrow z_n \in O_\epsilon(a)$
Пусть $N = max(N_1, N_2) \Rightarrow \forall n > N : x_n \in O_\epsilon(a)$ и $z_n \in O_\epsilon(a) \Rightarrow y_n \in O_\epsilon(a) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$

Пример
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = 0$, $(a > 1)$
$a = 1 + \alpha, \alpha > 0$ и $0 < \frac{n}{a^n} = \frac{n}{(1+\alpha)^n} = \frac{n}{1+n\cdot\alpha+\frac{n(n-1)}{2}\alpha^2+...} < \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}\alpha^2} = \frac{2}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{n-1} \to 0 (n \to \infty)$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \iff \lim\limits_{n\to\infty} (x_n - a) = 0$, ну очев сорре.

2 Бесконечно малые последовательности

$x_n =$ б.м.п, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$
Удтверждение 5

1. Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - б.м.п, то $\{x_n \pm y_n\}$ - б.м.п

2. Если $\{x_n\}$ - б.м.п, $\{y_n\}$ - ограниченная посл., то $\{x_n \cdot y_n\}$ - б.м.п

Доказателсьтво
Пусть $\epsilon > 0; |y_n| \le M, n = 1, 2, ...$ $\frac{\epsilon}{M} > 0$, тогда $\exists N$ $\forall n > N \Rightarrow |x_n - 0| < \frac{\epsilon}{M}$
Тогда $|x_n \cdot y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < \frac{\epsilon}{M} \cdot M = \epsilon \Rightarrow \lim x_n \cdot y_n = 0$
Пример
Пусть $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$ $(a > 1)$
$\frac{n^k}{a^n} = (\frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n})^k$, поскольку $a > 1 \Rightarrow \sqrt[k]{a} = b > 1$
Тогда $(\frac{n}{b^n})^k$ и так как $\frac{n}{b^n}$ - б.м.п и произведение б.м.п является б.м.п, то данная последовательность также является б.м.п