Матрицы и СЛАУ

Опр. Матрицей называют таблицу из m строк и n столбцов.

Обозначение: $a = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

$1 * n$ - матрица-строка

$A = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix}$

$m * 1$ - матрица-столбец

$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

Опр. Две матрицы называют равными, если они: 1) одинакового размера (типа) 2) эл-ты, стоящие на одинаковых местах совпадают

Опр.

Суммой матриц A и B типа $m * n$ называют м-цу C того же типа с эл-ми:
$C_{ij} = A_{ij} + B_{ij} i = 1 \dots m, j = 1 \dots n$

Пример

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Свойства

1) Коммутативность $A + B = B + A$

2) Ассоциативность $A + (B + C) = (A + B) + C$

3) $\exists \Theta \in M_{mn}(\mathrm{R}) : \forall A \in M_{mn}(\mathrm{R}) A + \Theta = A$ (Θ - нулевая матрица)

4) $\forall A \in M_{mn}(\mathrm{R}) \exists ! B \in M_{mn}(\mathrm{R}) : A + B = \Theta$ (B - противоположная. Обозначение: $-A$.)

Опр.

Разностью матриц A и B называется сумма A и $(-B)$

Опр. Транспонирование

Для матрицы A типа $m * n$ её транспонир. матрицей называют матрицу C типа $n * m$ с элементами $C_{ij} = A_{ji} \forall i = 1 \ldots n, \forall j = 1 \ldots m$

Обозначение: A^T

Опр.

Рассмотрим матрицу A типа $m * n$ с эл-ми $a_{ij} i = 1 \ldots m, j = 1 \ldots n$ и матрицу B типа $n * p$ с эл-ми $b_{kl}, k = 1 \ldots n, l = 1 \ldots p$

Произведением A и B называют матрицу C типа $m * p$

$C_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} * b_{rj} i = 1 \ldots m j = 1 \ldots p$

Обозначение: $C = A * B$

Пример.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 * 0 + 0 * 2 & 1 * 1 + 0 * 1 \\ -1 * 0 + 0 * 2 & -1 * 1 + 0 * 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Свойства

1) Ассоциативность: $A * (B * C) = (A * B) * C$

2) Дистрибутивность относительно сложения матриц: $(A + B) * C = A * C + B * C$

3) $\exists E \in M_n(\mathrm{R}) : \forall A \in M_n(\mathrm{R}) : \quad A * E = E * A = A$ (E - единичная матрица)

4) $\forall A \in M_n(\mathrm{R}) : \quad A * \Theta = \Theta$

5) $(A * B)^T = B^T * A^T$

Единичная матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

δ - символ Кронекера

Доказательства не пишу - не успею.

Доказали:

- Свойство умножения №3
- Свойство умножения №5