

珍珠炮配置算法——LSP服务器主炮及返程炮配置

本文作者：Alan & 御河DE天街

写在前面：阅读本文需要一定的数学基础，如果只是想单纯配置珍珠炮请看后续配置指南

目录

- [珍珠炮配置算法——LSP服务器主炮及返程炮配置](#)
 - [1. 配置算法的相关数学推导](#)
 - [1.1. 前期准备](#)
 - [1.1.1. 珍珠的运动规律——v-t函数](#)
 - [1.1.2. 珍珠的运动规律——S-t函数](#)
 - [1.2. 平射的配置](#)
 - [1.2.1. 方向判断](#)
 - [1.2.2. 计算所需动量](#)
 - [1.2.3. 建立动量方程](#)
 - [1.2.4. 调整结果](#)
 - [1.3. 抛射的配置](#)
 - [1.3.1. 方向判断](#)
 - [1.3.2. 计算所需动量](#)
 - [1.3.3. 建立动量方程](#)
 - [1.3.4. 调整结果](#)
 - [2. 配置指南](#)

1. 配置算法的相关数学推导

1.1. 前期准备

在正式开始推导之前，我们需要给出“珍珠动量”的准确定义。

珍珠在运动时，每gt会出现在一个特定的位置；因此 $t_0 + 1$ gt到 t_0 gt之间存在一个位置差，我们定义这个位置差为珍珠在 t_0 gt时的动量。事实上，“动量”这个说法只是习惯上的说法，更准确的说法应该为“珍珠速度”。

接下来，我们给出一些常数(这些常数在不同的珍珠炮中可能不同，需要测量)，即1个TNT赋予珍珠的水平方向动量大小 m_0 ，y轴方向动量大小 m_y ，珍珠发射时具有的初始y动量 m_{y_0}

$$\text{平射: } \begin{cases} m_0 = 0.6025678975452011, \\ m_y = -0.0011162018688096187, \\ m_{y_0} = 0.2716278719434352 \end{cases}, \quad \text{抛射: } \begin{cases} m_0 = 0.6026063622295216, \\ m_y = 0.000639233791587035, \\ m_{y_0} = 0.6909788463066233 \end{cases}$$

1.1.1. 珍珠的运动规律——v-t函数

设 $V_{xz}(t)$ 表示t时刻珍珠在X，Z轴方向上的动量， $V_y(t)$ 表示t时刻珍珠在Y轴方向上的动量；并设 $V_{xz}(0)$ ， $V_y(0)$ 表示珍珠开始运动时具有的初始动量。根据wiki上的资料，珍珠在运动时，三轴动量满足如下运动规律：

$$V_{xz}(t+1) = 0.99 \cdot V_{xz}(t)$$

$$V_y(t+1) = 0.99 \cdot V_y(t) - 0.03$$

显然， $\{V_{xz}(t), t \geq 0, t \in \mathbb{N}\}$ 是一个等比数列，故根据等比数列的相关性质可以得到 $V_{xz}(t) = 0.99^t \cdot V_{xz}(0)$ 。

而对于 $V_y(t)$ ，做如下变换：

$$\frac{V_y(t+1)}{0.99^{t+1}} = \frac{V_y(t)}{0.99^t} - \frac{0.03}{0.99^{t+1}} \Rightarrow \frac{V_y(t+1)}{0.99^{t+1}} - \frac{V_y(t)}{0.99^t} = -\frac{0.03}{0.99^{t+1}}$$

将上式进行累加，可以得到：

$$\frac{V_y(t)}{0.99^t} - \frac{V_y(0)}{0.99^0} = -0.03 \left(\frac{1}{0.99^1} + \frac{1}{0.99^2} + \cdots + \frac{1}{0.99^t} \right) \Rightarrow \frac{V_y(t)}{0.99^t} = V_y(0) - 0.03 \left(\frac{1}{0.99^1} + \frac{1}{0.99^2} + \cdots + \frac{1}{0.99^t} \right)$$

于是，进一步化简可以得到：

$$\frac{V_y(t)}{0.99^t} = V_y(0) - 0.03 \left[\frac{\frac{1}{0.99} \left(1 - \frac{1}{0.99^t} \right)}{1 - \frac{1}{0.99}} \right] = V_y(0) + 3 \left(1 - \frac{1}{0.99^t} \right)$$

于是得到, $V_y(t) = 0.99^t [V_y(0) + 3] - 3$

综上所述, 珍珠在t时刻的动量满足如下结果(v-t函数):

$$\begin{cases} V_{xz}(t) = 0.99^t \cdot V_{xz}(0), \\ V_y(t) = 0.99^t [V_y(0) + 3] - 3 \end{cases}$$

1.1.2. 珍珠的运动规律——S-t函数

设 $S_{xz}(t)$ 表示 $(0, t]$ 时间段内X, Z轴方向上珍珠飞行的位移, $S_y(t)$ 表示 $(0, t]$ 时间段内Y轴方向上珍珠飞行的位移。可以发现, $(0, t]$ 时间段内, 珍珠飞行的位移分别为:

$$S_{xz}(t) = \sum_{i=0}^t V_{xz}(i)$$

$$S_y(t) = \sum_{i=0}^t V_y(i)$$

于是由等比数列的性质可得: $S_{xz}(t) = \frac{V_{xz}(0)(1-0.99^t)}{1-0.99} = 100V_{xz}(0)(1-0.99^t)$ 。

对于Y轴方向上珍珠飞行的位移, 先改写Y轴动量公式: $V_y(t) + 3 = 0.99^t [V_y(0) + 3]$ 。令 $a_t = V_y(t) + 3$ 。于是有 $a_t = 0.99^t a_0$ 。

对 $\{a_t, t \geq 0, t \in \mathbb{N}\}$ 求和, 可以得到:

$$\sum_{i=0}^t a_i = \sum_{i=0}^t [V_y(i) + 3] = \sum_{i=0}^t V_y(i) + 3t = \frac{[V_y(0) + 3](1 - 0.99^t)}{1 - 0.99}$$

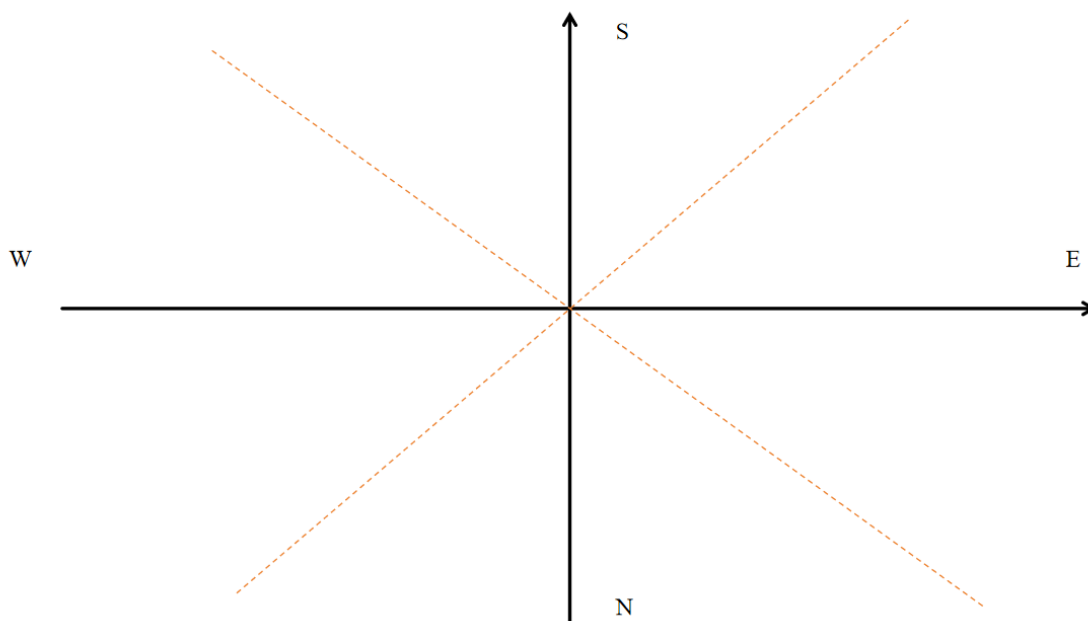
从而得到, $S_y(t) = \frac{[V_y(0)+3](1-0.99^t)}{1-0.99} - 3t = 100[V_y(0) + 3](1 - 0.99^t) - 3t$ 。

综上所述, 珍珠 $(0, t]$ 时间段内飞行的位移满足如下结果(S-t函数):

$$\begin{cases} S_{xz}(t) = 100V_{xz}(0)(1 - 0.99^t), \\ S_y(t) = 100[V_y(0) + 3](1 - 0.99^t) - 3t \end{cases}$$

1.2. 平射的配置

1.2.1. 方向判断



如图所示，一、三象限角平分线以及二、四象限角平分线将平面划分为4个区域，从X轴正方向开始逆时针来看，四个区域依次对应的是东，南，西，北四个方向。对于任意目的地坐标，需要判断其相对于炮口坐标的方向，只需要以炮口为原点，观察目的地坐标位于哪个区域即可。

为了方便计算，对目的地坐标做如下变换：

设 (x_0, z_0) 表示炮口坐标， (x_1, z_1) 表示目的地坐标。将坐标原点移动至炮口处，于是目的地坐标为 $(x_1 - x_0, z_1 - z_0)$ 。

令 $X = \begin{bmatrix} x_1 - x_0 \\ z_1 - z_0 \end{bmatrix}$ 为目的地相对于炮口的位置。

定义旋转矩阵 $R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ ，将目的地坐标顺时针旋转45°(即将坐标轴逆时针旋转45°)，得到 $X' = R^T \cdot X$ 。其中 $X' = \begin{bmatrix} x' \\ z' \end{bmatrix}$

接下来只需要判断 X' 落在哪个象限即可得出相对炮口的方向；每对应一个方向，红色阵列和蓝色阵列赋予珍珠的动量的方向向量随即确定，将这两个方向向量拼成一个方向矩阵 D ，则可以获得如下的结果：

$$D = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} & x' \geq 0, z' < 0, \text{east} \\ \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} & x' \leq 0, z' > 0, \text{west} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & x' > 0, z' \geq 0, \text{south} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} & x' < 0, z' \leq 0, \text{north} \end{cases}$$

1.2.2. 计算所需动量

设 P_x, P_z 分别表示到达目的地所需的X, Z轴动量。结合[之前](#)获得的S-t函数，可以得到珍珠飞行 t gt 后到达目的地所需的动量为：

$$\begin{cases} P_x = x_1 - x_0 = \frac{V_x(0)(1-0.99^t)}{1-0.99} = 100V_x(0)(1 - 0.99^t) \\ P_z = z_1 - z_0 = \frac{V_z(0)(1-0.99^t)}{1-0.99} = 100V_z(0)(1 - 0.99^t) \end{cases}$$

1.2.3. 建立动量方程

设 N_B, N_R 分别表示蓝色阵列和红色阵列的TNT数量。构建TNT数量于动量之间方程：

$$m_0 \cdot D \cdot \begin{bmatrix} N_B \\ N_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_z \end{bmatrix}$$

方程的解即为初步的配置信息。

1.2.4. 调整结果

获得初步的解之后，需要根据距离目标点的偏差对 N_B, N_R 的数值进行调整，于是令 $N = \begin{bmatrix} N_B \pm 5 \\ N_R \pm 5 \end{bmatrix}$ ，带入动量方程计算出调整之后到达目的地所需的X, Z轴动量 P_x, P_z ，然后计算出实际落点位置与目标位置之间的偏差，选取使得偏差最小的 $\begin{bmatrix} N_B \\ N_R \end{bmatrix}$ 作为最终的结果输出。

1.3. 抛射的配置

1.3.1. 方向判断

设 (x_0, y_0, z_0) 表示炮口坐标， (x_1, y_1, z_1) 表示目的地坐标。与平射配置方法相同，见[1.2.1. 方向判断](#)

1.3.2. 计算所需动量

设 P_x, P_y, P_z 分别表示到达目的地所需的X, Y, Z轴动量。结合之前获得的S-t函数, 可以得到珍珠飞行 t 后到达目的地所需的动量为:

$$\begin{cases} P_x = x_1 - x_0 = \frac{V_x(0)(1-0.99^t)}{1-0.99} = 100V_x(0)(1-0.99^t) \\ P_y = y_1 - y_0 = \frac{[V_y(0)+3](1-0.99^t)}{1-0.99} - 3t = 100[V_y(0)+3](1-0.99^t) - 3t \\ P_z = z_1 - z_0 = \frac{V_z(0)(1-0.99^t)}{1-0.99} = 100V_z(0)(1-0.99^t) \end{cases}$$

1.3.3. 建立动量方程

设 N_B, N_R 分别表示蓝色阵列和红色阵列的TNT数量。由于抛射的射程一般较远, 因此我们设法使得珍珠到达目的地时Y轴位置也恰好在 $y=128$ 的位置, 这样就可以不用修建拦截珍珠的珍珠台。

我们直到, 珍珠出膛时, Y轴动量与红蓝阵列的TNT总数之间存在关系:

$$N_B + N_R = \frac{P_y - m_{y0}}{m_y}$$

要到达目标点, 显然需要满足我们在1.2.3得到的方程, 但是由于我们已经获得了一个方程, 因此, 我们将1.2.3中的两个方程相除, 然后与上述方程联立即可求解:

令 $\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = D \cdot \begin{bmatrix} P_x \\ P_z \end{bmatrix}$ (D 表示方向矩阵), 则可以得到动量方程:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ P_1 & P_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_B \\ N_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{P_y - m_{y0}}{m_y} \\ 0 \end{bmatrix}$$

方程的解即为初步的配置信息。

1.2.4. 调整结果

获得初步的解之后, 需要根据距离目标点的偏差对 N_B, N_R 的数值进行调整, 于是令 $N = \begin{bmatrix} N_B \pm 10 \\ N_R \pm 10 \end{bmatrix}$, 带入动量方程计算出调整之后到达目的地所需的X, Z轴动量 P_x, P_z , 然后计算出实际落点位置与目标位置之间的偏差, 选取使得偏差最小的 $\begin{bmatrix} N_B \\ N_R \end{bmatrix}$ 作为最终的结果输出。

2. 配置指南

https://github.com/FantasySilence/LSP_PearlCannonConfig