珍珠炮配置算法——LSP服务器主炮及返程炮配置

> 本文作者：Alan & 御河DE天街
> 写在前面：阅读本文需要一定的数学基础，如果只是想单纯配置珍珠炮请看后续配置指南

目录

1. 配置算法的相关数学推导

1.1. 前期准备

在正式开始推导之前，我们需要给出“珍珠动量”的准确定义。
珍珠在运动时，每 gt 会出现在一个特定的位置；因此 t_0+1 gt 到 t_0 gt 之间存在一个位置差，我们定义这个位置差为珍珠在 t_0 gt 时的动量。事实上，“动量”这个说法只是习惯上的说法，更准确的说法应该为“珍珠速度”。

接下来，我们给出一些常数(这些常数在不同的珍珠炮中可能不同，需要测量)，即1个TNT赋予珍珠的水平方向动量大小 m_0，y轴方向动量大小 m_y，珍珠发射时具有的初始y动量 m_{y_0}

$$\text{平射：}\begin{cases} m_0=0.6025678975452011, \\ m_y=-0.0011162018688096187, \\ m_{y_0}=0.2716278719434352 \end{cases} \qquad \text{抛射：}\begin{cases} m_0=0.6026063622295216, \\ m_y=0.000639233791587035, \\ m_{y_0}=0.6909788463066233 \end{cases}$$

1.1.1. 珍珠的运动规律——v-t函数

设 $V_{xz}(t)$ 表示t时刻珍珠在X，Z轴方向上的动量， $V_y(t)$ 表示t时刻珍珠在Y轴方向上的动量；并设 $V_{xz}(0)$，$V_y(0)$ 表示珍珠开始运动时具有的初始动量。根据wiki上的资料，珍珠在运动时，三轴动量满足如下运动规律：

$$V_{xz}(t+1)=0.99\cdot V_{xz}(t)$$

$$V_y(t+1)=0.99\cdot V_y(t)-0.03$$

显然，$\{V_{xz}(t),t\geqslant 0,t\in\mathbb{N}\}$ 是一个等比数列，故根据等比数列的相关性质可以得到 $V_{xz}(t)=0.99^t\cdot V_{xz}(0)$。

而对于 $V_y(t)$，做如下变换：

$$\frac{V_y(t+1)}{0.99^{t+1}}=\frac{V_y(t)}{0.99^t}-\frac{0.03}{0.99^{t+1}}\Rightarrow\frac{V_y(t+1)}{0.99^{t+1}}-\frac{V_y(t)}{0.99^t}=-\frac{0.03}{0.99^{t+1}}$$

将上式进行累加，可以得到：

$$\frac{V_y(t)}{0.99^t}-\frac{V_y(0)}{0.99^0}=-0.03\left(\frac{1}{0.99^1}+\frac{1}{0.99^2}+\cdots+\frac{1}{0.99^t}\right)\Rightarrow\frac{V_y(t)}{0.99^t}=V_y(0)-0.03\left(\frac{1}{0.99^1}+\frac{1}{0.99^2}+\cdots+\frac{1}{0.99^t}\right)$$

于是，进一步化简可以得到：

$$\frac{V_y(t)}{0.99^t}=V_y(0)-0.03\left[\frac{\frac{1}{0.99}\left(1-\frac{1}{0.99^t}\right)}{1-\frac{1}{0.99}}\right]=V_y(0)+3\left(1-\frac{1}{0.99^t}\right)$$

于是得到, $V_y(t)=0.99^t\left[V_y(0)+3\right]-3$

综上所述，珍珠在t时刻的动量满足如下结果(v-t函数)：

$$\begin{cases}V_{xz}(t)=0.99^t\cdot V_{xz}(0),\\ V_y(t)=0.99^t\left[V_y(0)+3\right]-3\end{cases}$$

1.1.2. 珍珠的运动规律——S-t函数

设 $S_{xz}(t)$ 表示 $(0,t]$ 时间段内X，Z轴方向上珍珠飞行的位移，$S_y(t)$ 表示 $(0,t]$ 时间段内Y轴方向上珍珠飞行的位移。可以发现，$(0,t]$ 时间段内，珍珠飞行的位移分别为:

$$S_{xz}(t)=\sum_{i=0}^{t}V_{xz}(i)$$

$$S_y(t)=\sum_{i=0}^{t}V_y(i)$$

于是由等比数列的性质可得：$S_{xz}(t)=\frac{V_{xz}(0)(1-0.99^t)}{1-0.99}=100V_{xz}(0)(1-0.99^t)$。

对于Y轴方向上珍珠飞行的位移，先改写Y轴动量公式： $V_y(t)+3=0.99^t\left[V_y(0)+3\right]$。令 $a_t=V_y(t)+3$。于是有 $a_t=0.99^ta_0$。

对 $\{a_t,t\geqslant0,t\in\mathbb{N}\}$ 求和，可以得到：

$$\sum_{i=0}^{t}a_i=\sum_{i=0}^{t}\left[V_y(i)+3\right]=\sum_{i=0}^{t}V_y(i)+3t=\frac{\left[V_y(0)+3\right](1-0.99^t)}{1-0.99}$$

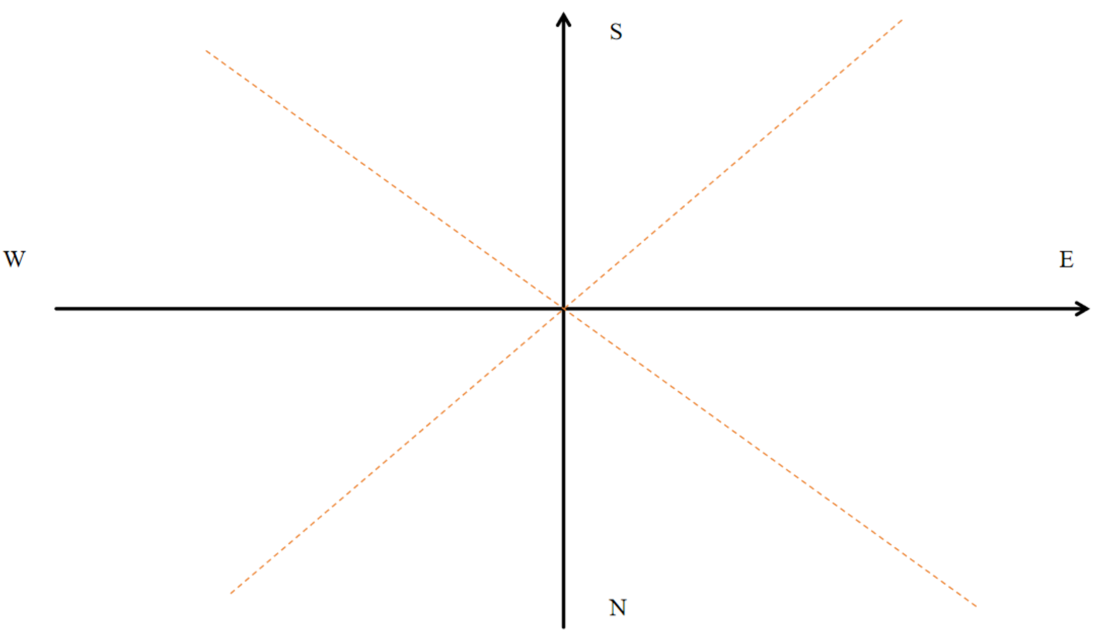
从而得到，$S_y(t)=\frac{\left[V_y(0)+3\right](1-0.99^t)}{1-0.99}-3t=100\left[V_y(0)+3\right](1-0.99^t)-3t$。

综上所述，珍珠 $(0,t]$ 时间段内飞行的位移满足如下结果(S-t函数)：

$$\begin{cases}S_{xz}(t)=100V_{xz}(0)(1-0.99^t),\\ S_y(t)=100\left[V_y(0)+3\right](1-0.99^t)-3t\end{cases}$$

1.2. 平射的配置

1.2.1. 方向判断



如图所示，一、三象限角平分线以及二、四象限角平分线将平面划分为4个区域，从X轴正方向开始逆时针来看，四个区域依次对应的是东，南，西，北四个方向。对于任意目的地坐标，需要判断其相对于炮口坐标的方向，只需要以炮口为原点，观察目的地坐标位于哪个区域即可。

为了方便计算，对目的地坐标做如下变换：

设 (x_0, z_0) 表示炮口坐标，(x_1, z_1) 表示目的地坐标。将坐标原点移动至炮口处，于是目的地坐标为 $(x_1 - x_0, z_1 - z_0)$。令 $X = \begin{bmatrix} x_1 - x_0 \\ z_1 - z_0 \end{bmatrix}$ 为目的地相对于炮口的位置。

定义旋转矩阵 $R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$，将目的地坐标顺时针旋转45°(即将坐标轴逆时针旋转45°)，得到 $X' = R^T \cdot X$。其中 $X' = \begin{bmatrix} x' \\ z' \end{bmatrix}$

接下来只需要判断 X' 落在哪个象限即可得出相对炮口的方向；每对应一个方向，红色阵列和蓝色阵列赋予珍珠的动量的方向向量随即确定，将这两个方向向量拼成一个方向矩阵 D，则可以获得如下的结果：

$$D = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} & x' \geq 0, z' < 0, \text{east} \\ \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} & x' \leq 0, z' > 0, \text{west} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & x' > 0, z' \geq 0, \text{south} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} & x' < 0, z' \leq 0, \text{north} \end{cases}$$

1.2.2. 计算所需动量

设 P_x，P_z 分别表示到达目的地所需的X，Z轴动量。结合之前获得的S-t函数，可以得到珍珠飞行 t gt 后到达目的地所需的动量为：

$$\begin{cases} P_x = x_1 - x_0 = \frac{V_x(0)(1-0.99^t)}{1-0.99} = 100V_x(0)(1-0.99^t) \\ P_z = z_1 - z_0 = \frac{V_z(0)(1-0.99^t)}{1-0.99} = 100V_z(0)(1-0.99^t) \end{cases}$$

1.2.3. 建立动量方程

设 N_B，N_R 分别表示蓝色阵列和红色阵列的TNT数量。构建TNT数量于动量之间方程：

$$m_0 \cdot D \cdot \begin{bmatrix} N_B \\ N_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_z \end{bmatrix}$$

方程的解即为初步的配置信息。

1.2.4. 调整结果

获得初步的解之后，需要根据距离目标点的偏差对 N_B，N_R 的数值进行调整，于是令 $N = \begin{bmatrix} N_B \pm 5 \\ N_R \pm 5 \end{bmatrix}$，带入动量方程计算出调整之后到达目的地所需的X，Z轴动量 P_x，P_z，然后计算出实际落点位置与目标位置之间的偏差，选取使得偏差最小的 $\begin{bmatrix} N_B \\ N_R \end{bmatrix}$ 作为最终的结果输出。

1.3. 抛射的配置

1.3.1. 方向判断

设 (x_0, y_0, z_0) 表示炮口坐标，(x_1, y_1, z_1) 表示目的地坐标。与平射配置方法相同，见1.2.1. 方向判断

1.3.2. 计算所需动量

设 P_x，P_y，P_z 分别表示到达目的地所需的X，Y，Z轴动量。结合之前获得的S-t函数，可以得到珍珠飞行 t gt 后到达目的地所需的动量为：

$$\begin{cases} P_x = x_1 - x_0 = \frac{V_x(0)(1-0.99^t)}{1-0.99} = 100V_x(0)(1-0.99^t) \\ \\ P_y = y_1 - y_0 = \frac{[V_y(0)+3](1-0.99^t)}{1-0.99} - 3t = 100\left[V_y(0)+3\right](1-0.99^t) - 3t \\ \\ P_z = z_1 - z_0 = \frac{V_z(0)(1-0.99^t)}{1-0.99} = 100V_z(0)(1-0.99^t) \end{cases}$$

1.3.3. 建立动量方程

设 N_B，N_R 分别表示蓝色阵列和红色阵列的TNT数量。由于抛射的射程一般较远，因此我们设法使得珍珠到达目的地时Y轴位置也恰好在y=128的位置，这样就可以不用修建拦截珍珠的珍珠台。

我们直到，珍珠出膛时，Y轴动量与红蓝阵列的TNT总数之间存在关系：

$$N_B + N_R = \frac{P_y - m_{y_0}}{m_y}$$

要到达目标点，显然需要满足我们在1.2.3得到的方程，但是由于我们已经获得了一个方程，因此，我们将1.2.3中的两个方程相除，然后与上述方程联立即可求解：

令 $\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = D \cdot \begin{bmatrix} P_x \\ P_z \end{bmatrix}$ (D 表示方向矩阵)，则可以得到动量方程：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ P_1 & P_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_B \\ N_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{P_y - m_{y_0}}{m_y} \\ 0 \end{bmatrix}$$

方程的解即为初步的配置信息。

1.2.4. 调整结果

获得初步的解之后，需要根据距离目标点的偏差对 N_B，N_R 的数值进行调整，于是令 $N = \begin{bmatrix} N_B \pm 10 \\ N_R \pm 10 \end{bmatrix}$，带入动量方程计算出调整之后到达目的地所需的X，Z轴动量 P_x，P_z，然后计算出实际落点位置与目标位置之间的偏差，选取使得偏差最小的 $\begin{bmatrix} N_B \\ N_R \end{bmatrix}$ 作为最终的结果输出。