2003年广东省普通高等本科插班生招生考试试题

高 等 数 学

一、　　填空题（每小题2分，共20分）

1.函数 $y=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是 ______ 。

2.下列函数中是偶函数的是______.

A. $f(x)=2\ln x^3$　　　B. $f(x)=x$

C. $f(x)=2\sin x\cos x$　D. $F(x)=f(x)+f(-x)$

3.若 $\sin dx=dF(x)$，则 $F(x)$______ 。

4. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{ax})^{x+1}=$______ ，其中 $a\neq 0$ 。

5. $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{\sin x^2}{x}+x\sin\frac{1}{x})$______ 。

6.微分方程 $y''-3y'=0$ 通解为______ 。

7. $\int_0^1(\frac{1}{1+x})^2dx=$______ 。

8.设 $f(x)$ 的一个原函数为 xe^{-x}，则 $f(x)$ ______ 。

9.已知 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 (a,b) 上连续，若 $\int_a^b f(x)dx=\int_b^a g(x)dx$，则 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的关系为______ 。

10.幂级数 $\sum\limits_{r_2=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ 的收敛半径为______ 。

二、计算题（每小题6分，共30分）

1.已知 $\ln(x+y)=x^3y+\sin x$，求 $\frac{dy}{dx}\big|_{x=0}$ 。

2. $\int_{-\pi}^{\pi}|\sin x|dx$ 。

3. $\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$ 。

4. $\int_0^1 x^2e^x dx$ 。

5.已知 $z=x\ln u, u=xy$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 。

三、计算及证明（每小题6分，共30分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\sin t dt}{\int_0^x t^3 dt}$ 。

2.已知微分方程 $y''+\frac{1}{y}(y')^2=0$，求其通解。

3.计算 $\iint\limits_D 8x d\sigma$，其中 D 为抛物线 $y=x^2-1$ 和 x 轴所围成的区域。

4.已知 $\begin{cases} x=e^t\sin t \\ y=e^t\cos t \end{cases}$，求此曲线在 $t=0$ 处法线的方程。

5.试证明：当 $x>1$ 时，$2\sqrt{x}>3-\frac{1}{x}$。

四、综合题（共计 20 分）

1.已知 $f(x)=\begin{cases} (1+x^2)^{\frac{1}{x}}, x\neq 0 \\ 1, x=0 \end{cases}$ 试判断函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性。

2.某单位要建一个平面为矩形、面积为 128 平方米的车库，一边可利用原有墙壁，其它三个边需要砌新的墙壁，问矩形长和宽各为多少时，才使砌墙所用的材料最省？

3.今有一搅拌均匀的反应釜中进行一等温反应，A+B→P+S, 已知反应物 A 的浓度下降的速率与当时反应物 A 和反应物 B 的浓度和乘积成正比，比例系数为 K。又知，初始时反应物 A 和反应物 B 的浓度相等，即 $C_{A0}=C_{B0}$，求反应物 A 的浓度降为原来的一半时所经历的时间。

2003 年数学参考答案：

一、　填空题

1. [-1,0]U(0,1]　　2. D　　3. $-\cos x+C$　　4. $e^{\frac{1}{a}}$

5. 1　　6. $y=C_1e^{3x}+C_2$　　7. $\frac{1}{2}$　　8. $e^{-x}-xe^{-x}$

9. $f(x)=-g(x)$　　10. 1

二、计算题

1. 【解析】由上式等式可得 $y(0)=1$

对等式两边关于 x 求导，得

$$\frac{1+y'}{x+y}3x^2y+x^3y'+\cos x$$

令上式中 $x=0$，得

$$1+y'(0)=1\Rightarrow y'(0)=0$$

2. 【解析】 原式 $=2\int_0^{\pi}\sin xdx=2(-\cos x)\Big|_0^{\pi}=4$

3. 【解析】 原式 $=-\int\frac{1}{\cos^2 x}d\cos x=\frac{1}{\cos x}+C$（C 为任意常数）

4. 【解析】 原式 $=\int_0^1 x^2de^x$

$$=x^2e^x\Big|_0^1-\int_0^1 2xe^x dx=e-\int_0^1 2xde^x$$

$$=e-\left[2xe^x\Big|_0^1-\int_0^1 2e^x dx\right]$$

$$=e-(2e-2e^x\Big|_0^1)$$

$$=-e+(2e-1)=e-1$$

5.【解析】 $\frac{\partial z}{\partial x}=\ln u+\frac{x}{u}\bullet\frac{\partial u}{\partial x}=\ln(xy)+\frac{1}{y}\bullet y=\ln(xy)+1$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{xy}\bullet y=\frac{1}{x}$$

三、计算及证明

1.【解析】 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\sin x^2}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x^2}{x^2}=2$

2.【解析】 令 $P=y'$，则 $Pdx=dy$

于是原方程可化为 $P'+\frac{P^2}{y}=0\Leftrightarrow dP+\frac{P^2}{y}dx=0\Leftrightarrow dP+\frac{P}{y}dy=0$

解得 $P=C_1y^{-1}$

故 $\frac{dy}{dx}=C_1y^{-1}\Rightarrow y=\sqrt{C_1x+C_2}$ 即为原方程通解

3.【解析】 $\iint\limits_D 8xd\sigma=\int_{-1}^1 dx\int_{x^2-1}^0 8xdy$

$$=\int_{-1}^1 8xy\Big|_{y=x^2-1}^{y=0}dx$$

$$=\int_{-1}^1 8x(1-x^2)dx$$

$$=4x^2\Big|_{-1}^1-2x^4\Big|_{-1}^1=0$$

4.【解析】 $t=0$时，$x=0, y=1$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{e^t\cos t-e^t\sin t}{e^t\sin t+e^t\cos t}=\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}=\frac{\cos 2t}{1+\sin 2t}$$

故曲线在 $t=0$ 时的切线斜率为

$$k=\frac{1}{1+0}=1$$

$\therefore$ 此曲线在 $t=0$ 处的法线方程为

$$y-1=-(x-0)$$

即 $$y=1-x$$

5.【证明】 记 $f(x)=2\sqrt{x}+\frac{1}{x}-3 \qquad x\in[1,+\infty)$

Θ $$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}>0, x\in(1,+\infty)$$

$$f(1)=0$$

$\therefore$ $$f(x)>0, \forall x\in(1,+\infty)$$

$\therefore$ $2\sqrt{x}>3-\frac{1}{x}$, 当 $x>1$ 时

四、综合题

1.【解析】

$$\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}x}=\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}\lim_{x\to 0}x}=e^0=1=f(0)$$

$\therefore$ $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

2.【解析】 设长为 x，宽为 y，则有

$$xy=128\Rightarrow y=\frac{128}{x}$$

记 $f(x)=\frac{128}{x}\times 2+x(x>0)$，则题目要求我们求出 x 为何值时，$f(x)$ 取最小值

$$f'(x)=1-\frac{256}{x^2}$$

令 $$f'(x)=0$$

得 $$x=16, y=\frac{128}{16}=8$$

3.【解析】 记经过时间 t 后，反应物 A 的浓度为 $f(t)$，则由反应方程式知 Bt 时刻的浓度

也为 $f(t)$，且 $\frac{df}{dt}=-Kf^2(t), f(0)=C_{A0}$，解此微分方程得 $f(t)=\cfrac{1}{Kt+\cfrac{1}{C_{A0}}}$

再由 $$\cfrac{1}{Kt+\cfrac{1}{C_{A0}}}=\frac{C_{A0}}{2}$$

解得 $$t=\frac{1}{KC_{A0}}$$

2004年广东省普通高等本科插班生招生考试试题

高 等 数 学

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 函数 $y=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是____________。

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{x^3+5x}=$____________。

3. 若 $y=e^x(\sin x-\cos x)$，则 $\frac{dy}{dx}=$____________。

4．若函数 $f(x)=\int_0^x\frac{2t-1}{t^2-t+1}dt$，则 $f(\frac{1}{2})=$____________。

5．设 $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}+k,\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ 和 $\vec{c}=\vec{i}-2\vec{j}$，则 $(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})=$____________

二、单项选择题（每小题 4 分，共 20 分）

6．若 $I=\int\frac{1}{3+2x}dx$，则 $I=$（　　）

（A）$\frac{1}{2}\ln|3+2x|+C$　　（B）$\frac{1}{2}\ln(3+2x)+C$

（C）$\ln|3+2x|+C$　　（D）$\ln(3+2x)+C$

7．设 $f(x,y)=\ln(x+\frac{y}{2x})$，则 $f'_y(1,0)=$（　　）

（A）0,　　（B）1,　　(C)2,　　(D) $\frac{1}{2}$

8．曲线 $y=\frac{1}{x},y=x,x=2$ 所围成的图形面积为 S，则 S=（　　）

（A）$\int_1^2(\frac{1}{x}-x)dx$　　（B）$\int_1^2(x-\frac{1}{x})dx$

（C）$\int_1^2(2-\frac{1}{y})dx+\int_1^2(2-y)dx$　　（D）$\int_1^2(2-\frac{1}{x})dx+\int_1^2(2-x)dx$

9．函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n}$ 的收敛区间是（　　）

（A）$x\succ 1$　　（B）$x\prec 1$　　（C）$x\prec 1$ 及 $x\succ 3$　　（D）$1\prec x\prec 3$

10．$I=\int_0^1 dx\int_{x^2}^x f(x,y)dy$ 变换积分次序后有 I=（　　）

（A） $\int_{x^2}^{x} dx \int_0^1 f(x, y) dy$ （B） $\int_0^1 dx \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$

（C） $\int_0^1 dx \int_{y^2}^{y} f(x, y) dx$ （D） $\int_y^{\sqrt{y}} dx \int_0^1 f(x, y) dx$

三、简单计算题（每题 9 分，共 36 分）

11．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x(x-2)+(x+2)}{\sin^3 x}$

12．求由方程 $x-y+\dfrac{1}{2}\sin y=0$ 所确定的隐函数 y 的二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 。

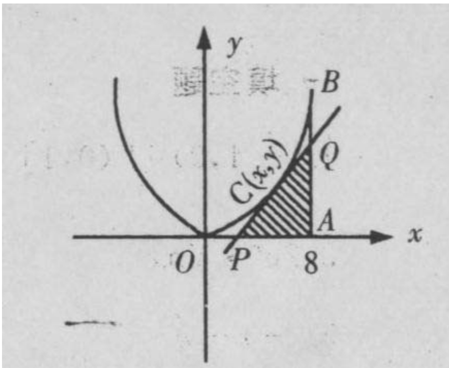
13．计算定积分 $\int_0^1 x^5 \ln^2 x dx$ 。

14．设 $z=x\ln(xy)$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 。

四．计算题（每题 12 分，共 24 分）

15．由 $y=0, x=8, y=x^2$ 所围成的曲边三角形 OAB（如图所示），在曲边 $\overline{OB}$ 上，求一点 C，

使得过此点所作 $y=x^2$ 之切线与 OA、AB 所围成的三角形面积最大。



16．计算二重积分 $\iint\limits_D ydxdy$，共中 D 是由直线 $x=-2$，$y=0, y=2$ 以及曲线 $x=-\sqrt{2y-y^2}$ 所围成的平面区域。

2004 年参考答案：

一、填空题

1．$[-1,0)\cup(0,1]$ 2. $\dfrac{2}{5}$ 3. $2e^x\cdot\sin x$ 4. $\ln\dfrac{3}{4}$ 5. $-\vec{j}-\vec{k}$

二、单项选择题

6.A 7.D 8.B 9.C 10.B

三、简单计算题

11.【解析】原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x(x-2)+e^x+1}{3x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^x}{6x}$

$$=\frac{1}{6}$$

12.【解析】把 y 看成 x 的函数并对和方程关于 x 求导，得

$$1-y'(x)+\frac{1}{2}\cos y\bullet y'(x)=0\Rightarrow y'(x)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}\cos y}$$

再一次求导，得

$$-y''(x)+\frac{1}{2}\cos y\bullet y''(x)-\frac{1}{2}\sin y\bullet(y'(x))^2=0\Rightarrow \quad y''(x)=-\frac{1}{2}\frac{\sin y\bullet(y'(x))^2}{1-\frac{1}{2}\cos y}$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{\sin y}{(1-\frac{1}{2}\cos y)^3}=\frac{x-y}{(1-\frac{1}{2}\cos y)^3}$$

13.【解析】$\int_0^1 x^5\ln^2 xdx \ \underline{\underline{令\ e^t=x}}\int_{-\infty}^0 e^{6t}\bullet t^2dt$

$$=\frac{1}{6}\int_{-\infty}^0 t^2d(e^{6t})=\frac{1}{6}t^2e^{6t}\Big|_{-\infty}^0-\frac{1}{6}\int_{-\infty}^0 e^{6t}d(t^2)=-\frac{1}{3}\int_{-\infty}^0 e^{6t}\bullet tdt$$

$$=-\frac{1}{18}\int_{-\infty}^0 td(e^{6t})=-\frac{1}{18}te^{6t}\Big|_{-\infty}^0+\frac{1}{18}\int_{-\infty}^0 e^{6t}dt=\frac{1}{18}\int_{-\infty}^0 e^{6t}dt=\frac{1}{108}e^{6t}\Big|_{-\infty}^0$$

$$=\frac{1}{108}$$

14.【解析】$\frac{\partial z}{\partial x}=\ln(xy)+x\bullet\frac{1}{xy}\bullet y=\ln(xy)+1$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x\bullet\frac{1}{xy}\bullet x=\frac{x}{y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial}{\partial x}(\ln(xy)+1)=\frac{y}{xy}=\frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial}{\partial y}(\ln(xy)+1)=\frac{x}{xy}=\frac{1}{y}$$

四、计算题

15.【解析】先过点$C(x_0,y_0)$的切线方程

$$y(x)=x^2$$

∴ $$y'(x)=2x$$

于是过点 c 的切线斜率为$2x_0$,其中$0\le x_0\le 8$

∴ 切线方程为：$S-x_0^2=2x_0(t-x_0)$，

即 $$S=2x_0t-x_0^2$$

此切线与 $y=0$和$x=8$ 分别交于点 $P(\frac{x_0}{2},0)$和$Q(8,16x_0-x_0^2)$

$\therefore$ 所围三角形面积 h 为

$$h(x_0)=\frac{1}{2}(8-\frac{x_0}{2})(16x_0-x_0^2)$$

即 $h(x_0)=\frac{1}{4}x_0(16-x_0^2),0\le x_0\le 8$

对 h 求导，得

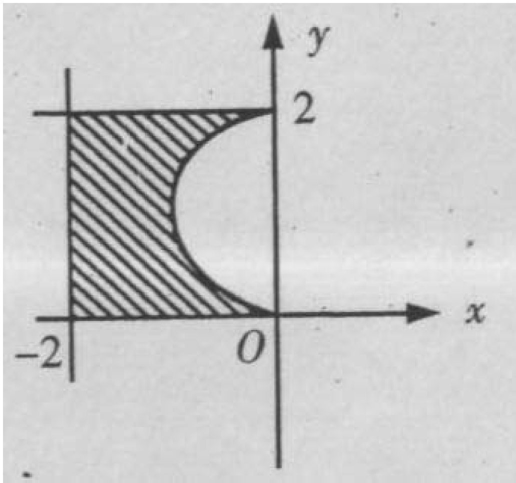
$$h'(x_0)=\frac{1}{4}(16-x_0)^2-\frac{1}{2}x_0(16-x_0)=\frac{1}{4}(16-x_0)(16-3x_0)$$

令 $h'(x_0)=0$，得

$$x_0=\frac{16}{3},x_0=16(舍去,因0\le x_0\le 8)$$

又 $h'(x_0)=0,h(8)=128,h(\frac{16}{3})=\frac{128\times 32}{27}\succ h(8)\succ h(0)$

$\therefore$ 当过点（$\frac{16}{3},\frac{256}{9}$）作切线，所围三角形面积最大。

16．【解析】

$$\iint_D ydxdy=\int_0^2 dy\int_{-2}^{-\sqrt{2y-y^2}} ydx$$

$$=\int_0^2 y(2-\sqrt{2y-y^2})dy$$

$$=\int_0^2 2ydy-\int_0^2 y\sqrt{2y-y^2}dy$$

$$=4-\int_0^2 y\sqrt{2y-y^2}dy$$

下面计算 $\int_0^2 y\sqrt{2y-y^2}dy$

令 $y=1+\sin\theta$，则当 $\left.\begin{array}{l} y=0\text{时},\theta=-\dfrac{\pi}{2}, \\ y=2\text{时},\theta=\dfrac{\pi}{2}, \end{array}\right\} \Rightarrow -\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$

于是

$$\int_0^2 y\sqrt{2y-y^2}dy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin\theta)\sqrt{1-\sin^2\theta}d(1+\sin\theta)$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin\theta)\cos^2\theta d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos^2\theta d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta+0=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta=\frac{\pi}{2}$$

$\therefore$

$$\iint_D ydxdy=4-\frac{\pi}{2}$$

2005 年广东省普通高等学校本科插班生招生考试

高 等 数 学

一、单项选择题（本大题共 5 小题, 每小题 3 分，共 15 分）

1．下列等式中，不成立的是 （　）

A. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}=1$　　B. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$

C. $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$　　D. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{x}=1$

2. 设 $f(x)$ 是在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数，且 $\int f(x)dx=e^{x^2}+c$，则 $\int\dfrac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$ （　）

A. $-2e^{x^2}$　B. $2e^{x}+c$　C. $-\dfrac{1}{2}e^{x^2}+C$　D. $\dfrac{1}{2}e^{x}+C$

3. 设 $f(x)=\cos x$，则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=$ （　）

A. $-\sin x$　B. $\cos x$　C. $-\sin a$　D. $\sin x$

4. 下列函数中，在闭区间[-1，1]上满足罗尔中值定理条件的是

A. $f(x)=|x|$　B. $f(x)=x^{-2}$　C. $f(x)=\sqrt{1-x^2}$　D. $f(x)=x^3$

5. 已知 $u=(xy)^x$，则 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=$ （　）

A. $x^2(xy)^{x-1}$　B. $x^2\ln(xy)$　C. $x(xy)^{x-1}$　D. $y^2\ln(xy)$

二、填空题（本大题共 5 小题，每个空 3 分，共 15 分）

6. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty} x(e^{\frac{1}{x}}-1)=$______________。

7. 定积分 $\int_{-1}^{1} e^{-x^2}\sin x dx=$______________。

8. 设函数 $f(x)=\ln\dfrac{2-x}{2+x}$，则 $f''(1)=$______________。

9. 若函数 $f(x)=\begin{cases} a(x+1), x\le 0 \\ (1+2x)^{\frac{1}{x}}, x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$______________。

10. 微分方程 $\dfrac{dy}{dx}+2xy=2xe^{-x^2}$ 的通解是______________。

三、计算题（本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分）

11. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1})$。

12．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \ln^2(1+t)dt}{x^2}$。

13．已知 $y=\arctan\sqrt{x^2-1}-\dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$，求 y'。

14．设函数 $y=y(x)$ 是由方程 $\arctan\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 所确定的隐函数，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

15．计算不定积分 $\int(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}-\dfrac{1}{x}+3^x+\dfrac{1}{\sin^2 x})dx$。

16．计算定积分 $\int_{\ln 2}^{2\ln 2}\dfrac{1}{\sqrt{e^t-1}}dt$。

17. 求由两条曲线 $y=\cos x, y=\sin x$ 及两条直线 $x=0, x=\dfrac{\pi}{6}$ 所围成的平面图形绕 x 轴旋转而成的旋转体体积。

18. 计算二重积分 $\iint\limits_D \ln(x^2+y^2)dxdy$，其中积分区域 $D=\left\{(x,y)\middle|1\le x^2+y^2\le 4\right\}$。

19. 求微分方程 $y''+4y'+3y=0$ 满足初始条件 $y(0)=2, y'(0)=6$ 的特解。

20. 已知 $z=\sin(xy)+xe^{-xy}$，求全微分 dz。

四、综合题（本大题共 3 小题，第 21 小题 8 分，第 22、23 小题各 6 分，共 20 分）

21. 设 $f(x)=xe^{-\frac{1}{2}x^2}$，

（1）求 $f(x)$ 的单调区间及极值；

（2）求 $f(x)$ 的闭区间 $[0,2]$ 上的最大值和最小值。

22. 证明：当$t>0$时，$\frac{1}{1+t}<\ln(1+\frac{1}{t})<\frac{1}{t}$。

23. 已知$f(\pi)=2$，且$\int_0^{\pi}\left[f(x)+f''(x)\right]\sin xdx=5$，求$f(0)$。

2005 年参考答案：

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. D　　2. B　　3. C　　4. C　　5. A

二、填空题（本大题共 5 小题，每个空 3 分，共 15 分）

6. 1　　7. 0　　8. $-\frac{8}{9}$　　9. e^2　　10. $e^{-x^2}(x^2+c)$

三、计算题（本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分）

11. 【解析】$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1})$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\frac{1}{2}$$

12. 【解析】

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\ln^2(1+t)dt}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(\int_0^x\ln^2(1+t)dt)'}{(x^2)'}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln^2(1+x)}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\ln^2(1+x)\right)'}{(2x)'}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{2\ln(1+x)}{1+x}}{2}=0$$

13. 【解析】$y'=\left(\arctan\sqrt{x^2-1}\right)'-\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}\right)'$

$$=\frac{1}{1+x^2-1}\left(\sqrt{x^2-1}\right)'-\frac{\frac{1}{x}\sqrt{x^2-1}-\left(\sqrt{x^2-1}\right)'\ln x}{x^2-1}$$

$$=\frac{2x}{2x^2\sqrt{x^2-1}}-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}+\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\ln x}{x^2-1}$$

$$=\frac{x\ln x}{\left(x^2-1\right)^{3/2}}$$

14.【解析】解法一：设 $F(x,y)=\arctan\dfrac{y}{x}-\ln\sqrt{x^2+y^2}$，则

$$F'_x(x,y)=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)-\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+y^2}=-\frac{x+y}{x^2+y^2}$$

$$F'_y(x,y)=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{2}\frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{x-y}{x^2+y^2}$$

故 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F_x^{'}(x,y)}{F_y^{'}(x,y)}$

$$=\frac{x+y}{x-y}\quad (x\neq y)$$

方法二：方程 $\arctan\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 可写为 $\arctan\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$

视 $y=y(x)$，上式两边对 x 求导得

$$\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{xy'-y}{x^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2yy'}{x^2+y^2},$$

即 $\dfrac{xy'-y}{x^2+y^2}=\dfrac{x+yy'}{x^2+y^2}$，

所以 $y'(x-y)=x+y$，推出 $\dfrac{dy}{dx}=y'=\dfrac{x+y}{x-y}\quad (x\neq y)$

15.【解析】$\displaystyle\int\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{x}+3^x+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx=\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}-\ln|x|+\frac{3^x}{\ln 3}-\cot x+C$

16.【解析】令 $\sqrt{e^t-1}=u$，则 $e^t=1+u^2, dt=\dfrac{2udu}{1+u^2}$

$$\int_{\ln 2}^{2\ln 2}\frac{1}{\sqrt{e^t-1}}dt=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{2u}{u(1+u^2)}$$

$$=2\int_1^{\sqrt{3}}\frac{2u}{u(1+u^2)}du$$

$$=2\arctan u\Big|_1^{\sqrt{3}}$$

$$=2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{6}$$

17．【解析】由两条曲线 $y=\cos x, y=\sin x$ 及两条直线 $x=0, x=\frac{\pi}{6}$ 所围成的平面图形如图

所示（要画出草图，不画图不扣分），依题意，旋转体的体积为

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\pi\cos^2 x-\pi\sin^2 x\right)dx$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos 2xdx$$

$$=\frac{\pi}{2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{4}\pi$$

18．【解析】采用极坐标变换 $x=r\cos\theta, y=\sin\theta$，则

$$\iint\limits_D \ln\left(x^2+y^2\right)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2 2r\ln rdx$$

$$=2\pi\left(r^2\ln r\Big|_1^2-\frac{r^2}{2}\Big|_1^2\right)$$

$$=\pi(8\ln 2-3)$$

19．【解析】方程 $y''+4y'+3y=0$ 的特征方程为

$\lambda^2+4\lambda+3=0$

解出 $\lambda_1=-3, \lambda_2=-1$

可知方程的通解为 $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{-x}$

由上式可得 $y'=-3C_1e^{-3x}-C_2e^{-x}$

用初始条件 $y(0)=2, y'(0)=6$ 代入上面两式得 $\begin{cases}C_1+C_2=2,\\-3C_1-C_2=6\end{cases}$

解出 $C_1=-4, C_2=6$　　故所求的特解为 $y=-4e^{-3x}+6e^{-x}$

20．【解析】$\frac{\partial z}{\partial x}=y\cos(xy)+e^{-xy}-xye^{-xy}$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x\cos(xy)-x^2e^{-xy}$$

故　$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$

$$=\left[y\cos(xy)+e^{-xy}(1-xy)\right]dx+\left[x\cos(xy)-x^2e^{-xy}\right]dy$$

四、综合题（本大题共 3 小题，第 21 小题 8 分，第 22、23 小题各 6 分，共 20 分）

21．【解析】 $f(x)=xe^{-\frac{1}{2}x^2}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$， $f'(x)=(1-x^2)e^{-\frac{1}{2}x^2}$

令 $f'(x)=0$，解出驻点（即稳定点） $x_1=-1,x_2=1$

列表

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	－	0	＋	0	－
$f(x)$	下降	极小值	上升	极大值	下降

可知极小值 $f(-1)=-\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

极大值 $f(1)=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

（2）因 $f(x)$ 在[0，2]上连续，由（1）知 $f(x)$ 在（0，2）内可导，且在（0，2），内只有一个驻点 $x=1$（极大值点），因 $f(0)=0, f(1)=\dfrac{1}{\sqrt{6}}, f(2)=\dfrac{2}{e^2}$，且

$$f(0)=0<f(2)=\frac{2}{e^2}<f(1)=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

故 $f(x)=xe^{\frac{1}{2}x^2}$ 在闭区间[0，2]上的最大值为 $f(1)=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$，最小值为 $f(0)=0$

22．【证明】设 $f(x)=\ln x,$ 则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}, x\in[t,t+1]$

由拉格朗日中值定理知，存在一点 $\varsigma\in(t,t+1)$，使

$f(1+t)-f(t)=f'(\varsigma)$，即 $\ln\left(1+\dfrac{1}{t}\right)=\dfrac{1}{\varsigma}$，

又因 $\dfrac{1}{1+t}<\dfrac{1}{\varsigma}<\dfrac{1}{t}$，故 $\dfrac{1}{1+t}<\ln\left(1+\dfrac{1}{t}\right)<\dfrac{1}{t}$

23．【解析】应用分部积分法

$$\int_0^\pi (f(x)+f''(x))\sin xdx=\int_0^\pi f(x)\sin xdx+f'(x)\sin x\Big|_0^\pi-\int_0^\pi f'(x)\cos xdx$$

$$=\int_0^\pi f(x)\sin xdx-f(x)\cos x\Big|_0^\pi-\int_0^\pi f(x)\sin xdx$$

$$=f(\pi)+f(0),$$

由题意有 $f(\pi)+f(0)=5, f(\pi)=2,$所以$f(0)=3$

2006 年广东省普通高校本科插班生招生考试

高 等 数 学

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分。每小题给出的四个选项，只有一项是符合题目要求的）

1．函数 $f(x)=\sqrt[3]{x}+1$ 在 $x=0$ 处　　　　（　　）

A. 无定义　　B. 不连续　　C. 可导　　D. 连续但不可导

2．设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{x-x_0}=4$，则 $f(x_0)=$　　　　（　　）

A. -4　　B. 0　　C. $\dfrac{1}{4}$　　D. 4

3．设函数 $f(x)=\begin{cases} a(1+x)^{\frac{1}{x}}, & x>0, \\ x\sin\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}, & x<0, \end{cases}$ 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则 $a=$　　　　（　　）

A. $\dfrac{3}{2}$　　B. $\dfrac{1}{2}e^{-1}$　　C. $\dfrac{3}{2}e^{-1}$　　D. $\dfrac{1}{2}$

4．设 $z=\ln(xy)$，则 dz =　　　　（　　）

A. $\dfrac{1}{x}dx+\dfrac{1}{y}dy$　　B. $\dfrac{1}{y}dx+\dfrac{1}{x}dy$　　C. $\dfrac{dx+dy}{xy}$　　D. $ydx+xdy$

5．积分 $\int_0^{+\infty}e^{-x}dx$　　　　（　　）

A. 收敛且等于-1　　B. 收敛且等于 0　　C. 收敛且等于 1　　D. 发散

二、填空题（本大题共 5 小题，每个空 3 分，共 15 分）

6．若直线 $y=4$ 是曲线 $y=\dfrac{ax+3}{2x-1}$ 的水平渐近线，则 $a=$____________。

7．由参数方程 $\begin{cases} x=2\sin t+1, \\ y=e^{-t} \end{cases}$ 所确定的曲线在 $t=0$ 相应点处的切线方程是____________。

8．积分 $\int_{-\pi}^{\pi}(x\cos x+|\sin x|)dx=$ ____________。

9．曲线 $y=e^x$ 及直线 $x=0$， $x=1$和 $y=0$ 所围成平面图形绕 x 轴旋转所成的旋转体体积 $V=$ ____________。

10．微分方程 $4y''-4y'+5y=0$ 的通解是____________。

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分。解答应写出演算步骤和必要的文字说明）

11．求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n[(\ln(2+\frac{1}{n})-\ln 2]$。

12．计算不定积分 $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$。

13．设函数 $y=\sin^2(\frac{1}{x})-2^x$，求 $\frac{dy}{dx}$。

14．函数 $y=y(x)$ 是由方程 $e^y=\sqrt{x^2+y^2}$ 所确定的隐函数，求 $\frac{dy}{dx}$ 在点 $(1,0)$ 处的值。

15．计算定积分 $\int_0^1 \ln(\sqrt{1+x^2}+x)dx$。

16．求二重积分 $\iint\limits_D xy^2 d\sigma$，其中积分区域 $D=\{(x,y)\big| x^2+y^2\le 1, x\ge o\}$。

17．设函数 $z=x\arctan\frac{x}{y}$，求 $\left.\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$。

18．求微分方程 $y'\tan x=y\ln y$ 满足初始条件 $y\big|_{x=\frac{\pi}{6}}=e$ 的特解。

四、综合题（本大题共 2 小题，第 19 小题 14 分，第 20 小题 8 分，共 22 分）

19．已知函数 $f(x)$ 是 $g(x)=5x^4-20x^3+15x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的一个原函数，且 $f(0)=0$.

（1）求 $f(x)$；

（2）求 $f(x)$ 的单调区间和极值；

（3）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin^4 t dt}{f(x)}$。

20．设 $f(x)$， $g(x)$ 都是 $(-\infty,+\infty)$ 上的可导函数，且

$f'(x)=g(x), g'(x)=f(x), f(0)=1$， $g(0)=0$。

试证： $f^2(x)-g^2(x)=1, x\in(-\infty,+\infty)$。

2006 年参考答案：

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1．D　　2.B　　3.B　　4.A　　5.C

二、填空题（本大题共 5 小题，每个空 3 分，共 15 分）

6.8　　7. $x+2y-3=0$　　8.4　　9. $\frac{\pi}{2}(e^2-1)$

10. $y=e^{\frac{x}{2}}(c_1\cos x+c_2\sin x)$

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11．【解析】

方法一：$\lim\limits_{n\to\infty} n[(\ln(2+\frac{1}{n})-\ln 2]=\lim\limits_{n\to\infty} n\ln(1+\frac{1}{2n})$

$$=\lim_{n\to\infty}\ln(1+\frac{1}{2n})^{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\ln[(1+\frac{1}{2n})^{2n}]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\ln e^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}$$

方法二：$\lim\limits_{n\to\infty} n\left\{(\ln(2+\frac{1}{n})-\ln 2\right\}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(2+\frac{1}{n})-\ln 2}{\frac{1}{n}}$

$$=(\ln\ x)'\big|_{x=2}$$

$$=\frac{1}{x}\Big|_{x=2}=\frac{1}{2}$$

方法三：$\lim\limits_{n\to\infty} n\left\{(\ln(2+\frac{1}{n})-\ln 2\right\}=\lim\limits_{n\to\infty} x\left\{\ln(2+\frac{1}{x})-\ln 2\right\}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(2+\frac{1}{x})-\ln 2}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(2+\frac{1}{x})}\cdot(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{x}}$$

$$=\frac{1}{2}$$

（说明:不转换成函数极限,直接用洛必达法则计算可以不扣分）

12. 【解析】方法一：$\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=2\int\frac{1}{\sqrt{1-x}}d\sqrt{x}$

$$=2\arcsin\sqrt{x}+c$$

方法二：$\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\int\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}}d(x-\frac{1}{2})$

$$=\arcsin(2x-1)+c$$

方法三：设 $\sqrt{x}=t$ ，则 $x=t^2$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\int\frac{1}{t\sqrt{1-t^2}}2tdt$$

$$=2\int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt=2\arcsin t+c$$

$$=2\arcsin\sqrt{x}+c$$

13. 【解析】 $\because\left[\sin^2(\frac{1}{x})\right]'=2\sin\frac{1}{x}\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot(-\frac{1}{x^2})=-\frac{1}{x^2}\sin\frac{2}{x}$

$\because(2^x)'=2^x\ln 2$，

$$\therefore\frac{dy}{dx}=\left[\sin^2(\frac{1}{x})-2^x\right]'=\left[\sin^2(\frac{1}{x})\right]'-(2^x)'$$

$$=-\frac{1}{x^2}\sin\frac{2}{x}-2^x\ln 2$$

14. 【解析】方法一：将方程 $e^y=\sqrt{x^2+y^2}$ 两边对 x 求导数得

$$e^y y'=\frac{2x+2yy'}{2\sqrt{x^2+y^2}}\quad ,$$

则 $y'(e^y\sqrt{x^2+y^2}-y)=x$

$$\therefore\frac{dy}{dx}=y'=\frac{x}{e^y\sqrt{x^2+y^2}-y}=\frac{x}{e^{2y}-y}$$

$$\therefore\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{y=0\\x=1}}=1$$

方法二：将方程 $e^y=\sqrt{x^2+y^2}$ 两边取自然对数得

$$y=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$$

$$\therefore y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2yy'}{x^2+y^2}$$

则 $y'(x^2+y^2-y)=x$

$$\therefore\frac{dy}{dx}=y'=\frac{x}{x^2+y^2-y}=\frac{x}{e^{2y}-y}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}\bigg|_{\substack{y=0\\x=1}}=1$$

方法三：设 $F(x,y)=e^{y}-\sqrt{x^{2}+y^{2}}$ ，

则， $F_x'=-\dfrac{2x}{2\sqrt{x^{2}+y^{2}}}=-\dfrac{x}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}}$ ，

$$F_x'=e^{y}-\frac{2y}{2\sqrt{x^{2}+y^{2}}}=e^{y}-\frac{y}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}},$$

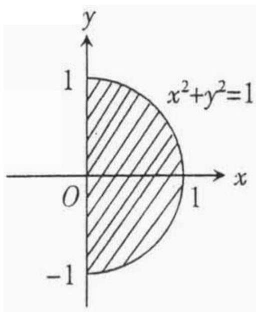
$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{-\dfrac{x}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}}}{e^{y}-\dfrac{y}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}}}=\frac{x}{e^{y}\sqrt{x^{2}+y^{2}}-y}=\frac{x}{e^{2y}-y}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}\bigg|_{\substack{y=0\\x=1}}=1 \ .$$

15．【解析】$\int_0^1\ln(\sqrt{1+x^{2}}+x)dx=x\ln(\sqrt{1+x^{2}}+x)\Big|_0^1-\int_0^1 xd\left[\ln(\sqrt{1+x^{2}}+x)\right]$

$$=\ln(\sqrt{2}+1)-\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1+x^{2}}}dx$$
$$=\ln(\sqrt{2}+1)-\sqrt{1+x^{2}}\,\Big|_0^1$$
$$=\ln(\sqrt{2}+1)-\sqrt{2}+1.$$

16．【解析】



方法一：D=$\{(x,y)\big|x^{2}+y^{2}\le 1,x\ge 0\}$如右图所示：

$$\iint_D xy^{2}d\sigma=\iint_D xy^{2}dxdy=\int_{-1}^{1}dy\int_0^{\sqrt{1-y^{2}}}xy^{2}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(\frac{1}{2}x^{2}y^{2}\bigg|_0^{\sqrt{1-y^{2}}})dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-y^{2})y^{2}dy=\frac{1}{2}(\frac{y^{3}}{3}-\frac{y^{5}}{5})\Big|_{-}^{1}$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{15}.$$

方法二：D= $\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le 1, x\ge 0\right\}$如右图所示

$$\iint\limits_D xy^2 d\sigma = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^4\cos\theta dr$$

$$= \frac{1}{5}\gamma^5\Big|_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\sin\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{5}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^4\cos\theta\sin^2\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}\sin^3\theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{2}{15}$$

（说明：本题不画图，不扣分）

17．【解析】$\because \dfrac{\partial z}{\partial y} = x\dfrac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}(-\dfrac{x}{y^2})$

$$= -\frac{x^2}{x^2+y^2},$$

$$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = \frac{-2x(x^2+y^2)+x^2\cdot 2x}{(x^2+y^2)} = \frac{-2xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\Big|_{\substack{x=1\\y=1}} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

18．【解析】$\because$ 原方程可变形为：$\dfrac{dy}{y\ln y} = \cot x dx$，

$$\therefore \int\frac{dy}{y\ln y} = \int\cot x dx \Rightarrow \ln|\ln y| = \ln|\sin x| + c_1$$

（说明：没写绝对值不扣分）

化简得：$y = e^{c\sin x}$

将初始条件代入得：$e = e^{\frac{1}{2}c} \Rightarrow c = 2$

故所求的特解为 $y = e^{2\sin x}$.

四、综合题（本大题共 2 小题，第 19 小题 14 分，第 20 小题 8 分，共 22 分）

19．【解析】（1）$\because f'(x) = g(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2$,

$\therefore\ f(x)=\int(5x^4-20x^3+15x^2)dx=x^5-5x^4+5x^3+c.$

$\because\ f(0)=0\Rightarrow c=0,$

$\therefore\ f(x)=x^5-5x^4+5x^3.$

（2）$\because\ f'(x)=g(x)=5x^4-20x^3+15x^2(x-3)(x-1)$，

令 $f'(x)=0$，解得 $x=0,x=1,x=3$

列函数性态表如下

x	（$-\infty$,0）	0	（0，1）	1	（1，3）	3	（3，$+\infty$）
y'	+	0	+	0	—	0	+
y	↗	无极值	↗	极大值	↘	极小值	↗

（说明：不列表，分别讨论单调性不扣分）

故 $f(x)$ 在区间（$-\infty$,1）及（3，$+\infty$）单调上升，在区间（1，3）单调下降；

$f(x)$ 的极大值 $f(1)=1$，极小值 $f(3)=-27$。

（3）方法一：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\sin^4 tdt}{f(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^4 x}{f'(x)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^4 x}{5x^4-20x^3+15x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^4 x}{x^4}\cdot\frac{x^2}{5x^2-20x+15}$$
$$=0.$$

方法二：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\sin^4 tdt}{f(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^4 x}{f'(x)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^4 x}{5x^4-20x^3+15x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{5x^2-20x+15}$$
$$=0.$$

20．证明：设 $F(x)=f^2(x)-g^2(x)$，

则 $F'(x)=2f(x)f'(x)-2g(x)g'(x)$。

$\because f'(x)=g(x), g'(x)=f(x)$

$\therefore F'(x)=2f(x)g(x)-2g(x)f(x)=0.$

故 $F(x)=f^2(x)-g^2(x)=C$， C 为常数。

又 $\because f(0)=1, g(0)=0,$

$\therefore C=1 \Rightarrow f^2(x)-g^2(x)=1, x\in(-\infty,+\infty)$。

2007 年广东省普通高校本科插班生招生考试

高 等 数 学

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分。每小题给出的四个选项，只有一项是符合题目要求的）

1．函数 $f(x)=2\ln\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}-1}$ 的定义域是

A. $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$　　B. $(-\infty,0)$

C. $(0,+\infty)$　　D. $\varnothing$

2．极限 $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)\sin\dfrac{1}{2-x}$

A. 等于−1　　B. 等于 0　　C. 等于 1　　D.不存在

3、设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内的一个原函数，下列等式不成立的

A. $\int\dfrac{f(\ln x)}{x}dx = F(\ln x)+C$　　B. $\int\cos xf(\sin x)dx=F(\sin x)+C$

C. $\int 2xf(x^2+1)dx=F(x^2+1)+C$　　D. $\int 2^x f(2^x)dx=F(2^x)+C$

4. 设函数 $\phi(x)=\int_0^x(t-1)dt$，则下列结论正确的是

A. $\phi(x)$ 的极大值为 1　　B. $\phi(x)$ 的极小值为 1

C. $\phi(x)$ 的极大值为 $-\dfrac{1}{2}$　　D. $\phi(x)$ 的极小值为 $-\dfrac{1}{2}$

5、设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2},(x,y)\neq(0,0),\\ 0, \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$ 则 $f_x'(0,0)$

A.等于 1　　B.等于−1　　C.等于 0　　D. 不存在

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^x =$ ____________。

7. 设 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$，要使 $f(x)$ 在 $x=3$ 处连续，应补充定义 $f(3)=$ ____________。

8. 设函数 $y=\dfrac{1-e^{-x^2}}{1+e^{-x^2}}$，则其函数图像的水平渐近线方程是____________。

9. 微分方程 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+4y=0$ 的通解是 $y=$____________。

10. 设 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$，则全微分 $du=$________________。

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\tan x}\right)$ 的值。

12. 设 $y=\cos^2 x+\ln\sqrt{1+x^2}$，求二阶导数 y''。

13. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\arcsin x\cdot\ln y-e^{2x}+y^3=0$ 确定，求 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}$。

14. 计算不定积分 $\displaystyle\int\left[2^x-\frac{1}{(3x+2)^3}+\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\right]dx$。

15. 计算定积分 $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$。

16. 设平面图形由曲线 $y=x^3$ 与直线 $y=0$ 及 $x=2$ 围成，求该图形线 y 轴旋转所得的旋转体体积。

17. 设 $f(x+y,x-y)=\arctan\dfrac{x+y}{x-y}$，计算 $y\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}-x\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ 的值。

18. 计算二重积分 $\displaystyle\iint\limits_D\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}dxdy$，其中积分区域 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 8, y\ge 0\right\}$。

四、综合题（本大题共 2 小题，第 19 小题 10 分，第 20 小题 12 分，共 22 分）

19. 若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且满足 $f(x)+2\int_0^x f(t)dt=x^2$，求 $f(x)$。

20. 设函数 $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$，

（1）求 $f'(x)$；

（2）证明：当 $x>0$ 时，$f(x)$ 单调增加。

2007 年参考答案：

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1.C　　2.B　　3.D　　4.D　　5.A

二、填空题（本大题共 5 小题，每个空 3 分，共 15 分）

6. e^{-2}　　7. $\frac{1}{4}$　　8. $y=1$　　9. $c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$

10. $\frac{2xdx+2ydy+2zdz}{x^2+y^2+z^2}$

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11. 【解析】应用洛必塔法则，

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x\sin x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\sin x+x\cos x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x\cos x}{\cos x+\cos x-x\sin x}$$
$$=0$$

12. 【解析】 $y'=-2\cos x\sin x+\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{1+x^2}=-\sin 2x+\frac{x}{1+x^2}$.

$$\therefore y''=-2\cos 2x+\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

13. 【解析】将 $x=0$ 代入方程 $\arcsin x\cdot\ln y-e^{2x}+y^3=0$ 得：

$$(y|_{x=0})^3=1\Rightarrow y|_{x=0}=1$$

方程 $\arcsin x\cdot\ln y-e^{2x}+y^3=0$ 两边对 x 求导数得：

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\ln y+\frac{\arcsin x}{y}\cdot\frac{dy}{dx}-2e^{2x}+3y^2\cdot\frac{dy}{dx}=0.$$

将 $x=0,y|_{x=0}=1$ 代入上式得：

$$-2+3\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=0}=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=0}=\frac{2}{3}$$

14. 【解析】原式 $=\int 2^x dx-\int\frac{1}{(3x+2)^3}dx+\int\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$

$$=\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{1}{6(3x+2)^2}+\arcsin\frac{x}{2}+C$$

（说明：正确计算$\int 2^x dx$、$\int \frac{1}{(3x+2)^3}dx$和$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$各得2分）

15.【解析】解法一：设$x=\tan t$，则$x=0$时，$t=0$；$x=\sqrt{3}$时，$t=\frac{\pi}{3}$

$$\therefore \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan^3 t}{\sec t}\cdot \sec^2 t dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 t d\sec t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sec^2 t-1) d\sec t$$

$$=\left(\frac{1}{3}\sec^3 t-\sec t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{4}{3}$$

解法二：原式$=\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}d(1+x^2)$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \left(\sqrt{1+x^2}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)d(1+x^2)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}-2\sqrt{1+x^2}\right]\Bigg|_0^{\sqrt{3}}=\frac{4}{3}.$$

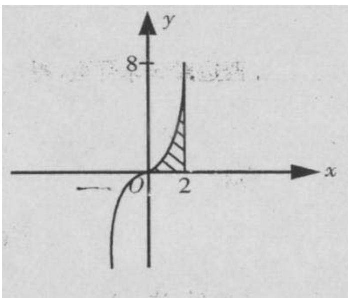


图 1

16.【解析】如图 1 所示，所求旋转体的体积为

$$V_y=\pi\int_0^8 2^2 dy-\pi\int_0^8 y^{\frac{2}{3}}dy$$

$$=32\pi-\frac{3\pi}{5}y^{\frac{5}{3}}\Big|_0^8=\frac{64}{5}\pi.$$

17.【解析】由题意知$f(x,y)=\arctan\frac{x}{y}$，

$$\therefore \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\frac{1}{y}=\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=\frac{-x}{x^2+y^2}.$$

$$故 y\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}-x\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{y^2}{x^2+y^2}+\frac{x^2}{x^2+y^2}=1.$$ …………（6 分）

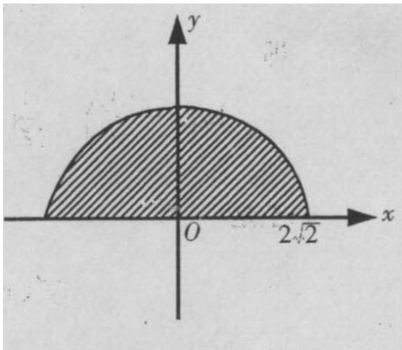


图 2

18.【解析】如图 2 所示

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}dxdty$$

$$=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\sqrt{2}}\frac{r}{\sqrt{1+r^2}}dr$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{2\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1+r^2}}d(1+r^2)$$

$$=\pi\sqrt{1+r^2}\Big|_0^{2\sqrt{2}}$$

$$=2\pi$$

四、综合题（本大题共 2 小题，第 19 小题 14 分，第 20 小题 8 分，共 22 分）

19.【解析】当 $x=0$ 时，有 $f(0)+2\int_0^0 f(t)dt=0^2\Rightarrow f(0)=0.$

由题意知 $f(x)$ 可导，

等式 $f(x)+2\int_0^x f(t)dt=x^2$ 两边对 x 求导数得：$f'(x)+2f(x)=2x.$

记 $y=f(x)$，则有 $\begin{cases} y'+2y=2x \\ y\big|_{x=0}=0 \end{cases}$.

$$\therefore y=e^{-\int 2dx}\left(\int 2xe^{\int 2dx}dx+C\right)$$

$$=e^{-2x}\left(\int 2xe^{2x}dx+C\right)$$

$$=e^{-2x}\left(xe^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x}+C\right)$$

$$= x - \frac{1}{2} + Ce^{-2x}$$

$$\because y\Big|_{x=0} = -\frac{1}{2} + C = 0, \therefore C = \frac{1}{2}$$

故 $f(x) = \frac{1}{2}e^{-2x} + x - \frac{1}{2}$.

20.【解析】（1） $f(x) = (1+\frac{1}{x})^x$ 两边取对数得

$$\ln f(x) = x\ln(1+\frac{1}{x}),$$

两边对 x 求导数得

$$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{1+x},$$

则 $f'(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right]$.

（2）（证法一）当 $x>0$ 时，

记 $g(x) = \ln x$，在 $\left[1,1+\frac{1}{x}\right]$ 上应用拉格朗日中值定理得

$$g\left(1+\frac{1}{x}\right) - g(1) = g'(\xi) \cdot \frac{1}{x}, \left(\ 1 < \xi < 1+\frac{1}{x}\right)$$

即 $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\xi} \cdot \frac{1}{x} > \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{1+x} \Rightarrow \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x} > 0$，

于是 $f'(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right] > 0$，

故当 $x>0$ 时， $f(x)$ 单调增加.

（证法二）当 $x>0$ 时，记 $\varphi(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$，

则 $\phi'(x) = \frac{-1}{x(1+x)} + \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{-1}{x(1+x)^2} < 0$，

所以 $\varphi(x)$ 在（0，$+\infty$）内单调下降.

又 $\because \lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - 1 + \frac{1}{x}\right] = 0$

$\therefore$ 当 $x>0$ 时， $\varphi(x) > 0$，于是 $f'(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \phi(x) > 0$，

故当 $x>0$ 时，$f(x)$ 单调增加.

2008 年广东省普通高校本科插班生招生考试

高 等 数 学

一、**单项选择题**（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分。每小题给出的四个选项，只有一项是符合题目要求的）

1. 下列函数为奇函数的是

A. x^2-x　　B. e^x+e^{-x}　　C. e^x-e^{-x}　　D. $x\sin x$

2. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=$

A. e　　B. e^{-1}　　C. 1　　D. −1

3. 函数在点 x_0 处连续是在该点处可导的

A. 必要非充分条件　　B. 充分非必要条件
C. 充分必要条件　　D. 既非充分也非必要条件

4. 下列函数中，不是 $e^{2x}-e^{-2x}$ 的原函数的是

A. $\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)^2$　　B. $\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)^2$　　C. $\frac{1}{2}\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)$　　D. $\frac{1}{2}\left(e^{2x}-e^{-2x}\right)$

5. 已知函数 $z=e^{xy}$，则 $dz=$

A. $e^{xy}(dx+dy)$　　B. $ydx+xdy$　　C. $e^{xy}(xdx+ydy)$　　D. $e^{xy}(ydx+xdy)$

二、**填空题**（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{e^x-e^{-x}}=$____________。

7. 曲线 $y=x\ln x$ 在点（1，0）处的切线方程是 $y=$____________。

8. 积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)dx=$____________。

9. 设 $u=e^x\cos y, v=e^x\sin y$，则 $\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}=$____________。

10. 微分方程 $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{x}{1+x^2}=0$ 的通解是____________。

三、**计算题**（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}$。

12. 求函数 $f(x)=3-x-\dfrac{4}{(x+2)^2}$ 在区间 $[-1,2]$ 上的最大值及最小值。

13. 设参数方程$\begin{cases} x = e^{2t} \\ y = t - e^{-t} \end{cases}$确定函数$y = y(x)$，计算$\dfrac{dy}{dx}$。

14. 求不定积分$\int \dfrac{\sin x + \sin^2 x}{1 + \cos x} dx$。

15. 计算定积分$\int_0^1 \ln(1 + x^2) dx$。

16. 设方程$e^{-xy} - 2z + e^z = 0$确定隐函数$z = z(x, y)$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$。

17. 计算二重积分$\iint\limits_D ye^{xy} dxdy$，其中 D 是由$y$轴、直线$y = 1, y = 2$及曲线$xy = 2$所围成的平面区域。

18. 求微分方程$y' + y\cos x = e^{-\sin x}$满足初始条件$y|_{x=0} = 2$的特解。

四、综合题（本大题共 2 小题，第 19 小题 10 分，第 20 小题 12 分，共 22 分）

19. 证明：对$x > 0$，$\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} > 1 + \dfrac{x^2}{2}$。

20. 设函数$f(x)$在区间$[0,1]$上连续，且$0 < f(x) < 1$，判断方程

$2x - \int_0^x f(t)dt = 1$ 在区间$(0,1)$内有几个实根，并证明你的结论。

2008 年参考答案:

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. C　　2. B　　3. A　　4. D　　5. D

二、填空题（本大题共 5 小题，每个空 3 分，共 15 分）

6. $\dfrac{1}{2}$　　7. $y = x - 1$　　8. 2　　9. 0　　10. $y = \dfrac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C$

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11. 【解析】$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - x}{x - \sin x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sec^2 x - 1}{1 - \cos x}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\tan^2 x}{1 - \cos x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\tan x \sec^2 x}{\sin x} = 2.$$

12.【解析】由题意，知 $f'(x)=-1+\dfrac{8}{(x+2)^3}$，

令 $f'(x)=0$，即 $(x+2)^3=8$，解得驻点 $x=0$，

又 $f(-1)=0, f(0)=2, f(2)=\dfrac{3}{4}$，所以 $f(x)$ 在区间 $[-1,2]$ 上最大值 $M=2$

及最小值 $m=0$.

13. 【解析】$\because \dfrac{dx}{dt}=2e^{2t},\dfrac{dy}{dt}=1+e^{-t}$，

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1+e^{-t}}{2e^{2t}}.$$

14. 【解析】$\displaystyle\int\frac{\sin x+\sin^2 x}{1+\cos x}dx=\int\frac{\sin x}{1+\cos x}dx+\int\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}dx$

$$=-\int\frac{d(1+\cos x)}{1+\cos x}+\int\frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x}dx$$

$$=-\ln(1+\cos x)+\int(1-\cos x)dx$$

$$=-\ln(1+\cos x)+x-\sin x+C.$$

15. 【解析】$\displaystyle\int_0^1\ln(1+x^2)dx=x\ln(1+x^2)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{2x^2}{1+x^2}dx$.

$$=\ln 2-\int_0^1\left(2-\frac{2}{1+x^2}\right)dx$$

$$=\ln 2-(2x-2\arctan x)\big|_0^1$$

$$=\ln 2-2+\frac{\pi}{2}.$$

16. 【解析】设 $F(x,y,z)=e^{-xy}-2z+e^z$，

则 $\dfrac{\partial F}{\partial x}=-ye^{-xy},\dfrac{\partial F}{\partial y}=-xe^{-xy},\dfrac{\partial F}{\partial z}=-2+e^z$，

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=\frac{ye^{-xy}}{e^z-2},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=\frac{xe^{-xy}}{e^z-2}.$$

17. 【解析】$\displaystyle\iint_D ye^{xy}\,dxdy=\int_1^2 dy\int_0^{\frac{2}{y}} ye^{xy}\,dx$

$$=\int_1^2 [e^{xy}]_0^{\frac{2}{y}} dy$$

$$=\int_1^2 (e^2-1)dy = e^2-1$$

18．【解析】 $y = e^{-\int \cos x dx}\left[C + \int e^{-\sin x} e^{\int \cos x dx} dx\right]$

$= e^{-\sin x}\left[C + \int e^{-\sin x} e^{\sin x} dx\right] = e^{-\sin x}\left[C + \int dx\right] = e^{-\sin x}(C+x)$，

由条件 $y|_{x=0} = 2$ 有 $2 = e^{-\sin 0}(C+0) = C$，

故满足初始条件 $y|_{x=0} = 2$ 的特解为 $y = e^{-\sin x}(2+x)$.

四、综合题（本大题共 2 小题，第 19 小题 10 分，第 20 小题 12 分，共 22 分）

19. 证明：等价于 $e^x + e^{-x} > 2 + x^2$

令 $f(x) = e^x + e^{-x} - 2 - x^2$，

$f'(x) = e^x - e^{-x} - 2x$

$f''(x) = e^x + e^{-x} - 2 = (e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}})^2 > 0$，

于是 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加，从而 $f'(x) > f'(0) = 0$，　　（8 分）

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加，故 $f(x) > f(0) = 0$，即 $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} > 1 + \dfrac{x^2}{2}$

20【解析】设 $F(x) = 2x - \int_0^x f(t)dt - 1$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，

$F(0) = -1$，因为 $0 < f(x) < 1$，可证 $\int_0^1 f(x)dx < 1$，

于是 $F(1) = 1 - \int_0^1 f(t)dt > 0$，

所以 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个零点.

又 $F'(x) = 2 - f(x) > 2 - 1 > 0$， $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，

所以 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 内有唯一零点，即 $2x - \int_0^x f(t)dt = 1$ 在 $(0,1)$ 内有唯一实根

广东省 2009 年普通高等学校本科插班生招生考试

高 等 数 学

一、　单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分。每小题只有一个选项符合题目要求）

1．设 $f(x)=\begin{cases}3x+1, x<0,\\ 1-x,\ x\geq 0,\end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=$　　　（　　）

A．-1　　　　B．1

C．3　　　　D．∞

2. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(x\sin\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x}\sin x)=$　　（　　）

A．0　　　　B．1

C．2　　　　D．∞

3．下列函数中，在点 $x=0$ 处连续但不可导的是　　　（　　）

A．$y=|x|$　　　　B. $y=1$

C. $y=\ln x$　　　　D. $y=\dfrac{1}{x-1}$

4. 积分 $\int\cos x f'(1-2\sin x)dx=$

A．$2f(1-2\sin x)+C$　　　　B. $\dfrac{1}{2}f(1-2\sin x)+C$

C. $-2f(1-2\sin x)+C$　　　　D. $-\dfrac{1}{2}f(1-2\sin x)+C$

5. 改变二次积分 $I=\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy$ 的积分次序，则 $I=$　　（　　）

A．$\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^0 f(x,y)dy$　　　　B．$\int_0^1 dy\int_1^{\sqrt{y}} f(x,y)dy$

B．$\int_0^1 dy\int_{\sqrt{x}}^1 f(x,y)dy$　　　　D．$\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dy$

二、填空题（本小题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6．若当 $x\to 0$ 时，$\sqrt{1-ax^2}-1\sim 2x^2$，则常数 $a=$__。

7．曲线 $y=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ 的水平渐近线方程是__。

8．若曲线 $\begin{cases}x=kt-3t^2\\ y=(1+2t)^2\end{cases}$ 在 $t=0$ 处的切线斜率为 1，则常数 $k=$__。

9．已知二元函数 $z=f(x,y)$ 的全微分 $dz=y^2dx+2xydy$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$__。

10．已知函数 $f(x)$ 满足 $f'(x)=f(x)+1$，且 $f(0)=0$，则 $f(x)=$__。

三、计算题（本小题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11．计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x^3}\int_0^x e^{t^2}dt-\dfrac{1}{x^2})$

12．设 $f(x)=\begin{cases}x(1+2x^2)^{\frac{1}{x^2}}, x\neq 0,\\ 0,\qquad x=0\end{cases}$ 用导数定义计算 $f'(0)$　。

13．已知函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)=x\ln(1+x^2)$，求 $f'''(1)$。

14．计算不定积分 $\int \arctan\sqrt{x}dx$。

15．计算定积分 $\int_{-1}^{1}\frac{|x|+x^3}{1+x^2}dx$。

16．设隐函数 $z=f(x,y)$ 由方程 $x^y+z^3+xz=0$ 所确定，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$。

17．计算二重积分 $\iint\limits_D \frac{(2\sqrt{x^2+y^2}-1)^3}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$，其中积分区域 D：$1\le x^2+y^2\le 4$。

18．求微分方程 $y''+y'-6y=0$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0}=1, y'\big|_{x=0}=-8$ 的特解。

四、综合题（本小题共 2 小题，第 19 小题 10 分，第 20 小题 12 分，共 22 分）

19．用 G 表示由曲线 $y=\ln x$ 及直线 $x+y=1$，$y=1$ 围成的平面图形。

（1）求 G 的面积；

（2）求 G 绕 y 轴旋转一周而成的旋转体的体积。

20．设函数 $f(x)=x^2+4x-4x\ln x-8$。

（1）判断 $f(x)$ 在区间（0，2）上的图形的凹凸性，并说明理由；

（2）证明：当 $0<x<2$ 时，有 $f(x)<0$。

2009 年参考答案：

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1.A　　2.C　　3.A　　4.D　　5.C

二、填空题（本大题共 5 小题，每个空 3 分，共 15 分）

6.−4　　7. $y=0$　　8.4　　9.2y　　10. e^x-1

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11．【解析】原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x e^{t^2}dt-x}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}}{3}=\frac{1}{3}.$$

12．【解析】 $f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$，

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(1+2\Delta x^2)^{\frac{1}{\Delta x^2}}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(1+2\Delta x^2)^{\frac{1}{\Delta x^2}}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}[(1+2\Delta x^2)^{\frac{1}{2\Delta x^2}}]^2=e^2.$$

13. 【解析】$\because\ f''(x)=\ln(1+x^2)+\dfrac{2x^2}{1+x^2}$，

$$f'''(x)=\frac{2x}{1+x^2}+\frac{4x(1+x^2)-4x^3}{(1+x^2)^2}=\frac{2x}{1+x^2}+\frac{4x}{(1+x^2)^2}$$

$\therefore\ f'''(1)=2$.

14. 【解析】设 $\sqrt{x}=t, x=t^2$，则

原式$=\displaystyle\int\arctan t\,dt^2=t^2\arctan t-\int t^2\frac{1}{1+t^2}dt$

$=t^2\arctan t-\displaystyle\int(1-\frac{1}{1+t^2})dt=t^2\arctan t-t+\arctan t+C$

$=x\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+\arctan\sqrt{x}+C$.

15. 【解析】$\because\ \dfrac{x^3}{1+x^2}$ 为奇函数，　$\therefore\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x^3}{1+x^2}dx=0$　，

而 $\dfrac{|x|}{1+x^2}$ 为偶函数，

$$\therefore\int_{-1}^{1}\frac{|x|}{1+x^2}dx=2\int_0^1\frac{|x|}{1+x^2}dx=2\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}d(1+x^2)=\ln(1+x^2)\Big|_0^1=\ln 2$$

故原式$=\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{|x|}{1+x^2}dx+\int_{-1}^{1}\frac{x^3}{1+x^2}dx=\ln 2.$

16. 【解析】设 $F(x,y,z)=x^y+z^3+xz$，则

$F_x'=yx^{y-1}+z$，$F_y'=x^y\ln x$，$F_z'=3z^2+x$.

所以 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x'}{F_z'}=-\dfrac{yx^{y-1}+z}{3z^2+x},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y'}{F_z'}=-\dfrac{x^y\ln x}{3z^2+x}$.

17. 【解析】设 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$，

则原式$=\displaystyle\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2(2r-1)^3dr=2\pi\int_1^2(2r-1)^3dr$

$$=\frac{\pi}{4}(2r-1)^4\Big|_1^2=\frac{81\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=20\pi$$

18. 【解析】因为微分方程的特征方程为 $r^2+r-6=0,$

解得 $r_1=-3, r_2=2$.

$\therefore$ 微分方程的通解为 $y=c_1e^{-3x}+c_2e^{2x}$.

$\because y'=-3c_1e^{-3x}+2c_2e^{2x}$，

$\therefore$ 有 $y\big|_{x=0}=c_1+c_2=1$，

$y'\big|_{x=0}=-3c_1+2c_2=-8$，解得 $c_1=2$， $c_2=-1$，

故特解为 $y=2e^{-3x}-e^{2x}$.

四、综合题（本大题共 2 小题，第 19 小题 10 分，第 20 小题 12 分，共 22 分）

19. 【解析】（1） $A=\int_0^1(e^y+y-1)dy$

$$=(e^y+\frac{1}{2}y^2-y)\Big|_0^1=e+\frac{1}{2}-1-1$$

$$=e-\frac{3}{2}.$$

（2） $V=\pi\int_0^1 e^{2y}dy-\pi\int_0^1(1-y)^2dy$

$$=\frac{\pi}{2}e^{2y}\Big|_0^1+\frac{\pi}{3}(1-y)^3\Big|_0^0$$

$$=\frac{\pi}{2}e^2-\frac{5\pi}{6}.$$

20. 【解析】（1）$\because f'(x)=2x+4-4\ln x-4=2x-4\ln x$，$f''(x)=2-\frac{4}{x}$,

当 $0<x<2$ 时， $f''(x)<0$ ，所以 $f(x)$ 在（0，2）上的图形是凸的。

（2）$\because$ 当 $0<x<2$ 时， $f''(x)<0$，

$\therefore f'(x)$ 在（0，2]上单调减少，由此知：

当 $0<x<2$ 时，有 $f'(x)>f'(2)=4-4\ln 2>0,$

故 $f(x)$ 在区间（0，2]上单调增加.

因此当 $0<x<2$ 时，有

$f(x)<f(2)=4+8-8\ln 2-8=4-8\ln 2=4-4\ln 4<0.$

广东省2010年普通高等学校本科插班生招生考试

高 等 数 学

一、单项选择题（本大题共5小题，每小题3分，共15分。每小题只有一个选项符合题目要求）

1．设函数$y=f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，则函数$y=\dfrac{1}{2}\left[f(x)-f(-x)\right]$在其定义域上是

A．偶函数　　B．奇函数

C．周期函数　　D．有界函数

2． $x=0$是函数$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x<0 \\ 0, & x\ge 0 \end{cases}$的

A．连续点　　B．第一类可去间断点

C．第一类跳跃间断点　　D．第二类间断点

3．当$x\to 0$时，下列无穷小量中，与x等价的是

A．$1-\cos x$　　B.$\sqrt{1+x^2}-1$

C.$\ln(1+x)+x^2$　　D.$e^{x^2}-1$

4.若函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，则下列结论中正确的是

A．在区间(a,b)内至少存在一点ξ，使得$f(\xi)=0$

B．在区间(a,b)内至少存在一点ξ，使得$f'(\xi)=0$

C．在区间(a,b)内至少存在一点ξ，使得$f(a)-f(b)=f'(\xi)(b-a)$

D．在区间(a,b)内至少存在一点ξ，使得$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$

5．设$f(x+y,xy)=x^2+y^2-xy$，则$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=$

A． $2y-x$　　B.-1　　C.$2x-y$　　D.-3

二、填空题（本大题共5小题，每小题3分，共15分）

6．设a,b为常数，若$\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{ax^2}{x+1}+bx)=2$，则$a+b=$______。

7．圆$x^2+y^2=x+y$在0,0点处的切线方程是______。

8．由曲线$y=\dfrac{1}{x}$和直线$x=1,x=2$及$y=0$围成的平面图形绕x轴旋转一周所的旋转体体积$V=$______。

9．微分方程$y''-5y'-14y=0$的通解是$y=$______。

10． 设平面区域$D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 1\}$，则二重积分$\iint\limits_D (x^2+y^2)^2 d\sigma=$______。

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11．计算 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$。

12．设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{2}{x}+\sin 2x, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，用导数定义计算 $f'(0)$。

13．已知点（1，1）是曲线 $y=ae^{\frac{1}{x}}+bx^2$ 的拐点，求常数 a,b 的值。

14．计算不定积分 $\int\dfrac{\cos x}{1-\cos x}dx$。

15．计算定积分 $\int_{\ln 5}^{\ln 10}\sqrt{e^x-1}dx$

16．求微积分方程 $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}=\sin x$ 的通解。

17．已知隐函数 $z=f(x,y)$ 由方程 $x^z-xy^2+z^3=1$ 所确定，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

18．计算二重积分 $\iint\limits_D 2xydxdy$，其中 D 是由抛物线 $y=x^2+1$ 和直线 $y=2x$ 及 $x=0$ 围成的区域。

四、综合题（本大题共 2 小分题，第 19 小题 10 分，第 20 小题 12 分，共 22 分）

19．求函数 $\varphi(x)=\int_0^x t(t-1)dt$ 的单调增减区间和极值。

20．已知 $(1+\dfrac{2}{x})^x$ 是函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的一个原函数，

（1）求 $f(x)$；（2）计算 $\int_1^{+\infty}f(2x)dx$。

2010 年试题参考答案：

一、单项选择题

1．B　2．A　3．C　4．D　5．D

二、填空题

6．0　7．$x+y=0$　8．$\dfrac{\pi}{2}$　9．$y=C_1e^{-2x}+C_2e^{7x}$　10．$\dfrac{\pi}{3}$

三、计算题

11．解：原式$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cot x}{-4(\pi-2x)}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\csc^2 x}{8}=-\frac{1}{8}$$

12．解：$f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x^2\sin\dfrac{2}{\Delta x}+\sin 2\Delta x}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x\sin\frac{2}{\Delta x}+\frac{\sin 2\Delta x}{\Delta x})=0+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin 2\Delta x}{\Delta x}$$

$$=2\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin 2\Delta x}{2\Delta x}=2$$

13．解：由题意知 $ae+b=1$ ①

又因为 $y'=-\frac{a}{x^2}e^{\frac{1}{x}}+2bx, y''=\frac{2a}{x^3}e^{\frac{1}{x}}+\frac{a}{x^4}e^{\frac{1}{x}}+2b$

所以，由题意知 $2ae+ae+2b=3ae+2b=0$ ②

由①和②解得 $a=-\frac{2}{e},b=3$

14．解一：原式 $=\int\frac{\cos x(1+\cos x)}{\sin^2 x}dx=\int\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx+\int\cot^2 xdx$

$$=\int\frac{1}{\sin^2 x}d\sin x+\int(\csc^2 x-1)dx$$

$$=-\frac{1}{\sin x}-\cot x-x+C$$

解二：原式 $=\int\frac{1-2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}dx$

$$=\frac{1}{2}\int\csc^2\frac{x}{2}dx-\int dx=\int\csc^2\frac{x}{2}d(\frac{x}{2})-\int dx$$

$$=-\cot\frac{x}{2}-x+C$$

15．解：令 $\sqrt{e^x-1}=t$，则 $x=\ln(1+t^2),dx=\frac{2t}{1+t^2}dt$

所以 $\int_{\ln 5}^{\ln 10}\sqrt{e^x-1}dx=\int_2^3\frac{2t^2dt}{1+t^2}=2\int_2^3 dt-2\int_2^3\frac{dt}{1+t^2}$

$$=2-2(\arctan 3-\arctan 2)$$

16．解：$y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}(\int\sin xe^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C)$

$$=e^{-\ln x}(\int\sin xe^{\ln x}dx+C)$$

$$=\frac{1}{x}(-x\cos x+\int\cos xdx+C)$$

$$=-\cos x+\frac{\sin x}{x}+\frac{C}{x}$$

17．解：设 $F(x,y,z)=x^z-xy^2+z^3-1$，则

$$F'_x=zx^{z-1}-y^2,F'_y=-2xy,F'_z=x^z\ln x+3z^2$$

所以 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=\frac{y^2-zx^{z-1}}{x^z\ln x+3z^2}$，$\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=\frac{2xy}{x^z\ln x+3z^2}$

18．解：积分区域 D 如图：（略）

解方程组 $\begin{cases} y = x^2 + 1, \\ y = 2x \end{cases}$ 可求得交点为（1，2）

$$\iint_D 2xydxdy = \int_0^1 dx \int_{2x}^{x^2+1} 2xydy$$

$$= \int_0^1 xy^2 \Big|_{2x}^{x^2+1} dx = \int_0^1 x(x^4 + 1 - 2x^2)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2 - 1)^2 dx^2 = \frac{1}{6}(x^2 - 1)^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

四、综合题

19．解：$\Phi(x) = \int_0^x t(t-1)dt$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导

$\Phi'(x) = x(x-1)$

令 $\Phi'(x) = x(x-1) = 0$

得驻点 $x_1 = 0, x_2 = 1$

列表

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$\Phi'(x)$	+	0	-	0	+
$\Phi(x)$	单调增	极大值	单调减	极小值	单调增

极大值 $\Phi(0) = 0$，

极小值 $\Phi(1) = \int_0^1 x(x-1)dx = -\frac{1}{6}$

20．解：（1） $f(x) = [(1+\frac{2}{x})^x]' = [e^{x\ln(1+\frac{2}{x})}]'$

$$= e^{x\ln(1+\frac{2}{x})}[\ln(1+\frac{2}{x}) + x \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{x}}(-\frac{2}{x^2})]$$

$$= (1+\frac{2}{x})^x[\ln(1+\frac{2}{x}) - \frac{2}{x+2}]，$$

（2） $\int_1^{+\infty} f(2x)dx = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} f(2x)d(2x) \underline{\underline{2x=t}} \frac{1}{2}\int_2^{+\infty} f(t)dt$

$$= \frac{1}{2}(1+\frac{2}{t})^t \Big|_2^{+\infty} = \frac{1}{2}\lim_{t\to+\infty}(1+\frac{2}{t})^t - 2$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to+\infty}[(1+\frac{2}{t})^{\frac{t}{2}}]^2-2=\frac{1}{2}e^2-2$$

广东省2011年普通高等学校本科插班生招生考试

高 等 数 学

本试卷共2页，20小题，满分100分。考试时间120分钟。

一、单项选择题（本大题共5小题，每小题3分，共15分。每小题只有一个选项符合题目要求）

1．下列极限等式中，正确的是

A．$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1$　　B．$\lim\limits_{x\to\infty}e^x=\infty$

C．$\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$　　D．$\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}=1$

2．若函数是 $f(x)=\begin{cases}(1+ax)^{\frac{1}{x}}, x>0\\ 2+x, \quad x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则常数 $a=$

A．$-\ln 2$　　A．$\ln 2$

C．2　　D．e^2

3．已知 $f(x)$ 的二阶导数存在，且 $f(2)=1$，则 $x=2$ 是函数 $F(x)=(x-2)^2 f(x)$ 的

A．极小值点　　B．最小值点

C．极大值点　　D．最大值点

4．若 $\int_1^2 xf(x)dx=2$，则 $\int_0^3 f(\sqrt{x+1})dx=$

A．1　　B．2

C．3　　D．4

5．设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin(2x^2-y^2)}{y}, y\ne 0\\ 0, \quad y=0\end{cases}$，则 $f'_y(0,0)=$

A．-1　　B．0

C．1　　D．2

二、填空题（本大题共5小题，每小题3分，共15分）

6．若当 $x\to\infty$ 时，$\frac{kx}{(2x+3)^4}$ 与 $\frac{1}{x^3}$ 是等价无穷小，则常数 $k=$________

7．设 $\begin{cases}x=t-t^3\\ y=2^t\end{cases}$，则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=$________

8．已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $y=\int_0^{2x} f(\frac{1}{2}t)dt-2\int(1+f(x))dx$，则 $y'=$________

9．若二元函数 $z=\frac{4x-3y}{y^2}(y\neq 0)$，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=$________

10．设平面区域 D 由直线 $y=x, y=2x$ 及 $x=1$ 围成，则二重积分 $\iint\limits_D xd\sigma=$______

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11．计算 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{x+1}{\sin x})$。

12．已知函数 $f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数 $f^{(n-1)}(x)=\ln(\sqrt{1+e^{-2x}}-e^{-x})$，求 $f^{(n)}(0)$。

13．求曲线 $y=x-\arctan kx(k<0)$ 的凹凸区间和拐点。

14．计算不定积分 $\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx\ (x>1)$。

15．设 $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{1+x^2}, x>0\\ x\cos x, x\leq 0\end{cases}$，计算定积分 $\int_{-\pi}^{1} f(x)dx$。

16．求微分方程 $y''-2y'+10y=0$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0}=0, y'\big|_{x=0}=3$ 的特解。

17．已知二元函数 $z=(3x+y)^{2y}$，求偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$。

18．化二次积分 $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{1+x^2+y^2}dy$ 为极坐标形式的二次积分，并求其值。

四、综合题（本大题共 2 小题，第 19 小题 10 分，第 20 小题 12 分，共 22 分）

19. 过坐标原点作曲线 $y=e^x$ 的切线 l，切线 l 与曲线 $y=e^x$ 及 y 轴围成的平面图形标记为 G，求：

（1）切线 l 的方程；（2）G 的面积；（3）G 绕 x 轴旋转而完成的旋转体体积。

20．若定义在区间 $(0,\pi)$ 内的可导函数 $y=f(x)$ 满足 $xy'=(x\cot x-1)y$ 且 $y\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}$，

（1） 求函数 $y=f(x)$ 的表达式；（2）证明：函数 $y=f(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 内单调递减。

2011 年高等数学参考答案与评分标准

一、单项选择题

1．C　2．B　3．A　4．D　5．A

二、填空题

6．16　7．$\ln 2$　8．-2　9．0　10．$\frac{1}{3}$

三、计算题

11．解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x(x+1)}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-2x-1}{\sin x+x\cos x}$ （3 分）

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x-2}{\cos x+\cos x-x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x-2}{2\cos x-x\sin x}=-1$$ （6 分）

12．解： $f^{(n)}(x)=(\ln(\sqrt{1+e^{-2x}}-e^{-x}))'=\dfrac{1}{\sqrt{1+e^{-2x}}-e^{-x}}(\sqrt{1+e^{-2x}}-e^{-x})'$ （2 分）

$$=\frac{1}{\sqrt{1+e^{-2x}}-e^{-x}}\left(\frac{-e^{-2x}}{\sqrt{1+e^{-2x}}}+e^{-x}\right)=\frac{e^{-x}}{\sqrt{1+e^{-2x}}},$$ （5 分）

$\therefore f^{(n)}(0)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ （6 分）

13．解：函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$, $y'=1-\dfrac{k}{1+k^2x^2}$, $y''=\dfrac{2k^3x}{(1+k^2x^2)^2}$ （2 分）

令 $y''=0$, 解得 $x=0$，

在区间$(-\infty,0)$内， $y''>0$；在区间$(0,+\infty)$内， $y''<0$，

所以该曲线的凸区间是$(0,+\infty)$，凹区间是$(-\infty,0)$； （4 分）

拐点是$(0,0)$。 （6 分）

14．解一：$\displaystyle\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx=\int\frac{1}{x^3\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}d(1-\frac{1}{x^2})$ （2 分）

$$=\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+C=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$$ （6 分）

解二：令 $x=\sec t$，则 $dx=\sec t\tan tdt$ $(0<t<\dfrac{\pi}{2})$，

$$\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx=\int\frac{1}{\sec^2 t\tan t}\sec t\tan t$$ （3 分）

$$=\int\frac{1}{\sec t}dt=\int\cos tdt=\sin t+C=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$$ （6 分）

15．解：$\displaystyle\int_{-\pi}^{0}x\cos xdx=\int_{-\pi}^{0}xd\sin x=x\sin x\Big|_{-\pi}^{0}-\int_{-\pi}^{0}\sin xdx=\cos x\Big|_{-\pi}^{0}=2$； （2 分）

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx = \int_0^1 (1-\frac{1}{1+x^2})dx$$

$$= \left[x - \arctan x\right]\Big|_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4}$$ （4 分）

$$\therefore \int_{-\pi}^1 f(x)dx = \int_{-\pi}^0 x\cos x dx + \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx$$

$$= 2 + 1 - \frac{\pi}{4} = 3 - \frac{\pi}{4}$$ （6 分）

16．解：由微分方程的特征方程 $r^2 - 2r + 10 = 0$ 解得 $r = 1 \pm 3i$ （2 分）

所以此微分方程的通解为

$y = e^x(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$ （4 分）

由 $y|_{x=0} = 0$ 得 $C_1 = 0, \quad \therefore y = C_2 e^x \sin 3x$，

$y' = C_2(e^x\sin 3x + 3e^x\cos 3x)$，由 $y'|_{x=0} = 3$，得 $C_2 = 1$，

故所求特解为 $y = e^x \sin 3x$ （6 分）

17．解法一：设 $u = 3x + y,\ v = 2y$, 则 $z = u^v$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = vu^{v-1}\cdot 3 + u^v \ln u \cdot 0$$

$$= 3vu^{v-1} = 6y(3x+y)^{2y-1};$$ （3 分）

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = vu^{v-1}\cdot 1 + u^v\ln u \cdot 2 = vu^{v-1} + 2u^v \ln u$$

$$= 2y(3x+y)^{2y-1} + 2(3x+y)^{2y}\ln(3x+y)$$

$$= (3x+y)^{2y}\left[\frac{2y}{3x+y} + 2\ln(3x+y)\right]$$ （6 分）

解法二： $\ln z = 2y\ln(3x+y)$，设 $F(x,y,z) = 2y\ln(3x+y) - \ln z$，

则 $F'_x(x,y,z) = \dfrac{6y}{3x+y}, F'_y(x,y,z) = 2y\ln(3x+y) - \dfrac{2y}{3x+y}$，

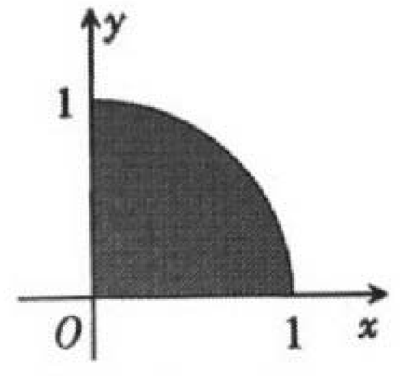
$F'_z(x,y,z) = -\dfrac{1}{z}$。 （4 分）

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} = \frac{6yz}{3x+y}(3x+y)^{2y} = 6y(3x+y)^{2y-1};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)}=z\left[2\ln(3x+y)+\frac{2y}{3x+y}\right]$$

$$=(3x+y)^{2y}\left[2\ln(3x+y)+\frac{2y}{3x+y}\right] \qquad （6 分）$$

18．解：由给定的二次积分知，积分域 $D=\left\{(x,y)\middle|0\le y\le\sqrt{1-x^2},0\le x\le 1\right\}$，如图，



（2 分）

所以 $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{1+x^2+y^2}dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\frac{r}{1+r^2}dr$

（4 分）

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^1\frac{r}{1+r^2}dr=\frac{\pi}{4}\ln(1+r^2)\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}\ln 2 \qquad （6 分）$$

四、综合题（本大题共 2 小题，第 19 小题 10 分，第 20 小题 12 分，共 22 分）

19．解：（1）过原点作曲线 $y=e^x$ 的切线 l，设切点为 (x_0,e^{x_0})，

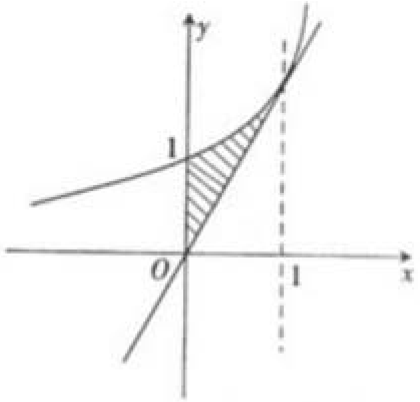
则有 $\frac{e^{x_0}}{x_0}=e^{x_0}$，即 $x_0=1$，因此切点 $(1,e)$，

故切线 l 的方程为 $y-e=e(x-1)$，即 $y=ex$。（4 分）

（2）如图，平面图形 G 的面积为

$$S=\int_0^1(e^x-ex)dx \qquad （6 分）$$

$$=(e^x-\frac{ex^2}{2})\Big|_0^1=\frac{e}{2}-1 \qquad （8 分）$$



（3）G 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积

$V=\pi\int_0^1 e^{2x}dx-\pi\int_0^1 e^2x^2dx$ （10 分）

$=\frac{\pi}{2}e^{2x}\Big|_0^1-\frac{e^2\pi x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{e^{2\pi}}{6}-\frac{\pi}{2}$。 （12 分）

20．（1）解法一：$\frac{dy}{y}=(\cot x-\frac{1}{x})dx$，

$\therefore\int\frac{1}{y}dy=\int(\cot x-\frac{1}{x})dx$， （2 分）

即 $\ln y=\ln\sin x-\ln x+C_1, y=\frac{C\sin x}{x}$

故所求函数为 $y=\frac{\sin x}{x}$。 （5 分）

解法二：$y'-(\cot x-\frac{1}{x})y=0,$

$\therefore y=Ce^{\int(\cot x-\frac{1}{x})dx}=Ce^{\ln\sin x-\ln x}=\frac{C\sin x}{x}$ （2 分）

又 $y|_{x=\frac{\pi}{2}}==\frac{2C}{\pi},\therefore C=1$

故所求函数为 $y=\frac{\sin x}{x}$ （5 分）

（2） 证：$y'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$，令 $g(x)=x\cos x-\sin x$ ， （6 分）

则 $g'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x$

当 $x\in(0,\pi)$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内单调递减，

因此，当 $x\in(0,\pi)$ 时，有 $g(x)<g(0)=0$ （8 分）

由此可知，$x\in(0,\pi)$时，$y'=\dfrac{g(x)}{x^2}<0$

故函数 $y=\dfrac{\sin x}{x}$ 在区间 $(0,\pi)$ 内单调递减　　　　　　（10 分）

广东省 2012 年普通高等学校本科插班生招生考试试题

高 等 数 学

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分。每小题只有一个选项符合题目要求）

1．已知三个数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 满足 $a_n\le b_n\le c_n(n\in N^+)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n$（$a$、$b$ 为常数，且 $a<c$），则数列 $\{b_n\}$ 必定　　（　）

A．有界　　B．无界　　C．收敛　　D．发散

2．$x=0$ 是函数 $f(x)=\begin{cases}(1-2x)^{\frac{1}{x}}, x<0\\ e^2+x, \quad x\ge 0\end{cases}$，的　　（　）

A．连续点　　B．可去间断点　　C．跳跃间断点　　D．第二类间断点

3．极限 $\lim\limits_{x\to\infty}2x\sin\dfrac{3}{x}=$　　（　）

A．0　　B．2　　C．3　　D．6

4．如果曲线 $y=ax-\dfrac{x^2}{x+1}$ 的水平渐近线存在，则常数 $a=$　　（　）

A．2　　B．1　　C．0　　D．-1

5．设 $f(x,y)$ 为连续函数，将极坐标形式的二次积分 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$ 化为直角坐标形式，则 $I=$　　（　）

A．$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_x^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$　　B．$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_x^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dx$

C．$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$　　D．$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_x^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6．设 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，且 $f'(x_0)=3$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$________。

7．若 $f(x)=\int\dfrac{\tan x}{x}dx$，则 $f''(\pi)=$________。

8．若曲线 $y=x^3+ax^2+bx+1$ 有拐点 $(-1,0)$，则常数 $b=$________。

9．广义积分 $\int_{-\infty}^0\dfrac{e^x}{1+e^x}dx=$________。

10．设函数 $f(u)$ 可微，且 $f'(0)=\frac{1}{2}$，则 $z=f(4x^2-y^2)$ 在点 $(1,2)$ 处的全微分 $dz\big|_{(1,2)}=$____。

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11．计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{1}{1+x})^{\frac{1}{\ln x}}$

12．设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\ln(\sqrt{3+t^2}+t) \\ y=\sqrt{3+t^2} \end{cases}$ 所确定，求 $\frac{dy}{dx}$（结果要化为最简形式）

13．确定函数 $f(x)=(x-1)e^{\frac{\pi}{4}+\arctan x}$ 的单调区间和极值

14．求不定积分 $\int\ln(1+x^2)dx$

15．设 $f(x)=\begin{cases} x^3e^{x^4+1}, -\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2} \\ \frac{1}{x^2}, \quad x>\frac{1}{2} \end{cases}$，利用定积分的换元法求定积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(x-1)dx$

16．求微积分方程 $y''-4y'+13y=0$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0}=1$，$y'\big|_{x=0}=8$ 的特解

17．已知二元函数 $z=x(2y+1)^x$，求 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$

18．计算二重积分 $\iint\limits_D\sqrt{y^2-x}\,d\sigma$，其中 D 是由曲线 $y=\sqrt{x}$ 及直线 $y=1,x=0$ 围成的闭区域

四、综合题（本大题共 2 小题，第 19 小题 12 分，第 20 小题 10 分，共 22 分）

19．已知 C 经过点 $M(1,0)$，且曲线 C 上任意点 $P(x,\ ,\ )(x\neq0)$ 处的切线斜率与直线 OP（O 为坐标原点）的斜率之差等于 ax（常数 $a>0$）。

（1）求曲线 C 的方程；

（2）试确定 a 的值，使曲线 C 与直线 $y=ax$ 围成的平面图形的面积等于 $\frac{3}{8}$。

20．若当 $x\to0$，函数 $f(x)=\int_0^x 2^{t^3-3t+a}dt$ 与 x 是等价无穷小量；

（1）求常数 a 的值；

（2）证明：$\frac{1}{2}\le f(2)\le8$。

2012 年高等数学参考答案与评分标准

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1．A　　2．C　　3．D　　4．B　　5．C

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6．-6　　7．$\frac{1}{\pi}$　　8．3　　9．$\ln 2$　　10．$4dx-2dy$

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11．解：原式$=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{-\ln(1+x)}{\ln x}}$，　　（2 分）

$$\because \lim_{x\to+\infty}\frac{-\ln(1+x)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{x}}$$　　（4 分）

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{1+x}$$

$=-1$，

$\therefore$　原式$=e^{-1}$　　（6 分）

12．解：$\because \frac{dx}{dt}=\frac{1}{\sqrt{3+t^2}+t}(\frac{t}{\sqrt{3+t^2}}+1)=\frac{1}{\sqrt{3+t^2}}$；

$$\frac{dy}{dt}=\frac{t}{\sqrt{3+t^2}}$$　　（3 分）

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{y_t'}{x_t'}=t$（结果没有化简扣 2 分）　　（6 分）

13．解：函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，

$$f'(x)=e^{\frac{\pi}{4}+\arctan x}+(x-1)e^{\frac{\pi}{4}+\arctan x}\cdot\frac{1}{1+x^2}$$

$=\frac{x(1+x)}{1+x^2}e^{\frac{\pi}{4}+\arctan x}$，　　（2 分）

令 $f'(x)=0$，解得 $x=0, x=-1$

因为在区间 $(-\infty,-1)$ 内，$f'(x)>0$；在区间 $(-1,0)$ 内，$f'(x)<0$；

在区间 $(0,+\infty)$ 内，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 的递增区间是 $(-\infty,-1)$ 及 $(0,+\infty)$，递减区间是 $(-1,0)$　　（4 分）

$f(x)$ 的极大值是 $f(-1)=-2$，$f(x)$ 的极小值 $f(0)=-e^{\frac{\pi}{4}}$　　（6 分）

14．解：$\int\ln(1+x^2)dx=x\ln(1+x^2)-\int\frac{2x^2}{1+x^2}dx$　　（3 分）

$$=x\ln(1+x^2)-2\int(1-\frac{1}{1+x^2})dx$$

$= x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan x + C$　　　　（6 分）

15．解：$\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x-1)dx \overset{x-1=t}{=} \int_{-\frac{1}{2}}^{1} f(t)dt$　　　　（2 分）

$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(t)dt$

$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx$

$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^3 e^{x^4+1}dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x^2}dx$　　　　（4 分）

$= 0 - \frac{1}{x}\Big|_{1}^{\frac{1}{2}}$

$=1$　　　　（6 分）

16．解：由微分方程的特征方程$r^2 - 4r + 13 = 0$解得$r = 2 \pm 3i$　　　　（2 分）

所以此微分方程的通解为

$y = e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$　　　　（4 分）

因为$y' = 2e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x) + e^{2x}(-3C_1\sin 3x + 3C_2\cos 3x)$

由$y\big|_{x=0} = C_1 = 1$及$y'\big|_{x=0} = 2C_1 + 3C_2 = 8$

解得$C_1 = 1,\ C_2 = 2$，

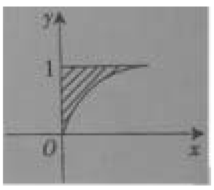
故所求特解为$y = e^{2x}(\cos 3x + 2\sin 3x)$　　　　（6 分）

17．解：$\because \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2(2y+1)^{x-1}$，　　　　（2 分）

$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 4x(2y+1)^{x-1} + 2x^2(2y+1)^{x-1}\ln(2y+1)$　　　　（4 分）

故$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=1}} = 4 + 2\ln 3$　　　　（6 分）

18．解：积分区域 D 如图：



$$\iint\limits_D \sqrt{y^2-x}\,d\sigma=\int_0^1 dy\int_0^{y^2}\sqrt{y^2-x}\,dx$$ （3 分）

$$=\int_0^1\left[-\frac{2}{3}(y^2-x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{y^2}\right]dy$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^1 y^3dy=\frac{1}{6}$$ （6 分）

四、综合题（本大题共 2 小题，第 19 小题 12 分，第 20 小题 10 分，共 22 分）

19．解：（1）设曲线 C 的方程为 $y=f(x)$ 由题意知

$$y'-\frac{y}{x}=ax，\ 且 y\big|_{x=1}=0$$ （2 分）

由 $y'-\dfrac{y}{x}=ax$ 得

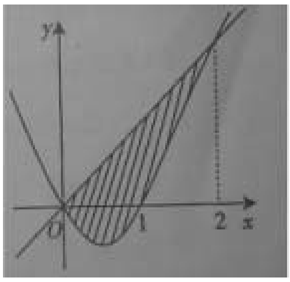
$$y=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left(\int axe^{-\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right)=e^{\ln x}\left(\int axe^{-\ln x}dx+C\right)$$ （4 分）

$$=x\left(\int adx+C\right)=x(ax+C)，$$

因为 $y\big|_{x=1}=a+C=0$，解得 $C=-a$，

故曲线 C 的方程为 $y=ax^2-ax=ax(x-1)$ （6 分）

（2）如图，



由 $ax^2-ax=ax$ 解得 $x=0,x=2$ （10 分） 由题意知 $\int_0^2(ax-ax^2+ax)dx=\dfrac{8}{3}$

即 $\left(ax^2-\dfrac{a}{3}x^3\right)\Big|_0^2=4a-\dfrac{8a}{3}=\dfrac{8}{3}$，

解得 $a=2$ （12 分）

20．解：（1）解：由题意知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x 2^{t^3-3t+a}dt}{x}=\lim\limits_{x\to0}2^{x^3-3x+a}=2^a=1$

$\therefore\ a=0$ （4 分）

（2）证明： $f(2)=\int_0^2 2^{t^3-3t}dt=\int_0^2 2^{x^3-3x}dx$，

设 $g(x)=2^{x^3-3x}$，则 $g'(x)=2^{x^3-3x}(3x^2-3)\ln 2$ （6 分）

令 $g'(x)=0$，在区间 $(0,2)$ 内解得 $x=1$，

因为 $g(0)=1,\ g(1)=\frac{1}{4}$，$g(2)=4$，

所以 $g(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上的最大值为 4，最小值为 $\frac{1}{4}$。 （8 分）

由定积分的估值定理可得 $\frac{1}{2}\le\int_0^2 e^{x^3-3x}dx\le 8$，

所以有 $\frac{1}{2}\le f(2)\le 8$。 （10 分）

2013 年普通高等学校本科插班生招生考试试题

高等数学

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分。每小题只有一个选项符合题目要求）

1．当 $x\to 0$ 时，下列无穷小量中，与 x 不等价的无穷小量是 （ ）

A． $\ln(x+1)$ B． $\arcsin x$

B． $1-\cos x$ D． $\sqrt{1+2x}-1$

2．曲线 $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$ （ ）

A．只有水平渐近线 B．只有铅垂渐进线

C．既有水平渐近线也有铅垂渐近线 D．无渐近线

3．下列函数中，在区间 $[-1,1]$ 上满足罗尔（Rolle）定理条件的是 （ ）

A． $y=x^{\frac{2}{3}}$ B． $y=|x|$

C． $y=x^{\frac{4}{3}}$ D． $y=x^{\frac{5}{3}}$

4．设函数 $f(x)=x\sin x+\cos x$，则下列结论正确的是 （ ）

A． $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值， $f(\frac{\pi}{2})$ 是 $f(x)$ 的极大值

B． $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值， $f(\frac{\pi}{2})$ 是 $f(x)$ 的极小值

C． $f(0)$ 和 $f(\frac{\pi}{2})$ 都是 $f(x)$ 的极小值

D. $f(0)$ 和 $f(\frac{\pi}{2})$ 都是 $f(x)$ 的极大值

5．若函数 $f(x)$ 和 $F(x)$ 满足 $F'(x)=f(x)(x\in R)$，则下列等式成立的是　　（　）

A. $\int \frac{1}{x}F(2\ln x+1)dx=2f(2\ln x+1)+C$

B. $\int \frac{1}{x}F(2\ln x+1)dx=\frac{1}{2}f(2\ln x+1)+C$

C. $\int \frac{1}{x}f(2\ln x+1)dx=2F(2\ln x+1)+C$

D. $\int \frac{1}{x}f(2\ln x+1)dx=\frac{1}{2}F(2\ln x+1)+C$

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6．要使函数 $f(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}$ 在 $x=1$ 处连续，应补充定义 $f(1)=$____________ 。

7．曲线 $\begin{cases} x=3^t \\ y=\tan t \end{cases}$ 在 $t=0$ 相应的点处的切线方程是 $y=$________________ 。

8．函数 $f(x)=\begin{cases} x(1-x)^{\frac{1}{x}}, x<0 \\ 0, \quad x\geq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的左导数 $f'_-(0)$_____________。

9．已知平面图形 $G=\left\{(x,y)\middle| x\geq 1, 0\leq y\leq \frac{1}{x}\right\}$，将图形 G 绕 x 轴旋转一周而成的旋转体体积 $V=$__________ 。

10．设 D 为圆环域：$1\leq x^2+y^2\leq 4$，则二重积分 $\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}d\sigma=$_____________ 。

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11．计算 $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin(e^{\frac{1}{x}}-1)$。

12.已知函数 $f(x)$ 具有连续的一阶导数，且 $f(0)\cdot f'(0)\neq 0$，求常数 a 和 b 的值，使 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{af(x)+bf(2x)-f(0)}{x}=0$。

13．求由方程 $xy\ln y+y=e^{2x}$ 所确定的隐函数在 $x=0$ 处的导数 $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}$。

14．求曲线 $y=\ln(\sqrt{x^2+4}+x)$ 的凹、凸区间及其拐点坐标。

15．计算不定积分 $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx$。

16．计算定积分 $\int_0^2 \frac{x}{(x+2)\sqrt{x+1}}dx$。

17．求二元函数 $z=\int_0^{xy} e^{-t^2}dt$ 的全微分 dz 及二阶偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

18．求微分方程 $y''-2y'+(1-k)y=0$（其中常数 $k\geq 0$）的通解。

四、综合题（本大题共 2 小题，第 19 小题 10 分，第 20 小题 12 分，共 22 分）

19．交换二次积分 $I=\int_0^1 dx\int_{e^x}^{e}\frac{(2x+1)(2y+1)}{\ln y+1}dy$ 的积分次序，并求 I 的值。

20．已知 $f(x)$ 是定义在区间 $[0,+\infty)$ 上的非负可导函数，且曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=0,x=0$

及 $x=t(t\geq 0)$ 围成的曲边梯形的面积为 $f(t)-t^2$。

（1）求函数 $f(x)$；

（2）证明：当 $x>0$ 时，$f(x)>x^2+\frac{x^3}{3}$。

2013 年《高等数学》参考答案

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分。每小题只有一个选项符合题目要求）

1．C　　2．B　　3．C　　4．A　　5．D

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6．$\frac{1}{2}$　　7．$\frac{1}{\ln 3}(x-1)$　　8．e^{-1}　　9．π　　10．2π

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11．原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin(e^{\frac{1}{x}}-1)}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos(e^{\frac{1}{x}}-1)\cdot e^{\frac{1}{x}}\cdot(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\cos(e^{\frac{1}{x}}-1)e^{\frac{1}{x}}=1$

12．由题意知：$af(0)+bf(0)-f(0)=0$，$af'(0)+2bf'(0)=0$，

因为 $f(0)\cdot f'(0)\neq 0,即f(0)\neq 0且f'(0)\neq 0,$

由此解得　$a=2$，$b=-1$。

13．方法一

等式两边对 x 求导数得：$(y+xy')\ln y+xy'+y'=2e^{2x}$，

即 $y'(1+x+x\ln y)=2e^{2x}-y\ln y$，

所以 $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{2e^{2x}-y\ln ny}{1+x+x\ln y}$。

又因为 $x=0$ 时，$y=1$，故 $\frac{dy}{dx}|_{x=0}=2$。

方法二

设 $F(x)=xy\ln y+y-e^{2x}$，则

$F_x'=y\ln y-2e^{2x}$，$F_y'=x\ln y+x+1$，

所以$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F'_x}{F'_y}=-\dfrac{y\ln y-2e^{2x}}{x\ln y+x+1}=\dfrac{2e^{2x}-y\ln y}{x\ln y+x+1}$。

又因为$x=0$时，$y=1$，故$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=2$。

14．函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$，

$$y'=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}+x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}+1\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}},$$

$$y''=\frac{-x}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}}。$$

令$y''=0$，解得$x=0$，

当$x<0$时$y''>0$；当$x>0$时$y''<0$。

故曲线的凹区间为$(-\infty,0)$；曲线的凸区间为$(0,+\infty)$；

曲线的拐点为$(0,\ln 2)$。

15．原式$=-\displaystyle\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}d(\cos x)=-\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}d(\cos x)$

$$=-\int\frac{1}{\cos^2 x}d(\cos x)+\int d(\cos x)$$

$$=\frac{1}{\cos x}+\cos x+C。$$

16．令$\sqrt{x+1}=t$，则$x=t^2-1,\ dx=2tdt$，

原式$=\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\frac{t^2-1}{(t^2+1)t}\cdot 2tdt=2\int_1^{\sqrt{3}}(1-\frac{2}{t^2+1})dt$

$$=2(t-2\arctan t)\Big|_1^{\sqrt{3}}=2(\sqrt{3}-1)-\frac{\pi}{3}。$$

17．因为$\dfrac{\partial z}{\partial x}=ye^{-x^2y^2},\dfrac{\partial z}{\partial y}=xe^{-x^2y^2}$，

所以$dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy=ye^{-x^2y^2}dx+xe^{-x^2y^2}dy$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^{-x^2y^2}+ye^{-x^2y^2}(-2x^2y)=e^{-x^2y^2}(1-2x^2y^2)。$$

18．由微分方程的特征方程$r^2-2r+1-k=0$解得

$$r_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-4(1-k)}}{2}=1\pm\sqrt{k},$$

所以当$k>0$时，方程有两个不相等的实根$1+\sqrt{k}$和$1-\sqrt{k}$；

当$k=0$时，方程有唯一实根。

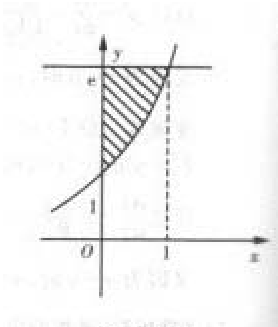
故当$k>0$时，通解为$y=C_1e^{(1+\sqrt{k})x}+C_2e^{(1-\sqrt{k})x}$；

当$k=0$时，通解为$y=(C_1+C_2x)e^x$。

四、综合题（本大题共 2 小题，第 19 小题 10 分，第 20 小题 12 分，共 22 分）

19．由题设条件知，积分区域

$D=\{(x,,)|0\le x\le 1,\ e^x\le y\le e\}$，如图：



第 19 题图

交换积分次序得

$$I=\int_1^e dy\int_0^{\ln y}\frac{(2x+1)(2y+1)}{\ln y+1}dx$$

$$=\int_1^e\left[\frac{(x^2+x)(2y+1)}{\ln y+1}\Bigg|_0^{\ln y}\right]dy=\int_1^e(2y+1)\ln ydy$$

$$=\int_1^e\ln yd(y^2+y)=(y^2+y)\ln y\Big|_1^e-\int_1^e(y^2+y)\frac{1}{y}dy$$

$$=(e^2+e)-(\frac{y2}{2}+y)\Big|_1^e=\frac{e^2}{2}+\frac{3}{2}。$$

20．（1）由题意知$\int_0^t f(x)dx=f(t)-t^2$，

两边对t求导数得：$f(t)=f'(t)-2t$，且$f(0)=0$，

由$f'(x)-f(t)=2t$解得

$$f(t)=e^{\int dt}(\int 2te^{-\int dt}dt+C)=e^t(\int 2te^{-t}dt+C)$$

$$=e^t(-2te^{-t}-2e^{-t}+C)=-2t-2+Ce^t。$$

由$f(0)=-2+C=0$　得$C=2$，

所以$f(t)=-2t-2+2e^t=2(e^t-t-1)$，

故$f(x)=2(e^x-x-1),(x\ge 0)$；

（2）设$F(x)=f(x)-x^2-\dfrac{x^3}{3},(x\ge 0)$，

则 $F'(x)=2(e^x-1)-2x-x^2$，

$F''(x)=2e^x-2-2x=2(e^x-x-1)=f(x)>0,(x>0)$，

所以 $F'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增，因此，当 $x>0$ 时，有

$F'(x)>F'(0)=0$，

由此可知 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增，

故当 $x>0$ 时，有 $F(x)>F(0)=0$，即 $F(x)=f(x)-x^2-\dfrac{x^3}{3}>0$，

所以 $f(x)>x^2+\dfrac{x^3}{3}\quad(x>0)$。

广东省2014年普通班高等学校本科插班生招生考试

高 等 数 学

一、单项选择题（本大题共5小题，每小题3分，共15分。每小题只有一个选项符合题目要求）

1．设函数 $f(x)=\begin{cases}x+2, & x<0\\ 1, & x=0\\ 2+3x, & x>0\end{cases}$ 则下列结论正确的是

A．$\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$　　B．$\lim\limits_{x\to0}f(x)=2$

C．$\lim\limits_{x\to0}f(x)=3$　　D．$\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在

2．函数 $y=\dfrac{x}{x+2\sin x}$ 的图形的水平渐近线是

A．$y=0$　　B．$y=\dfrac{1}{3}$

C．$y=\dfrac{1}{2}$　　D．$y=1$

3．曲线 $y=\ln x+\dfrac{1}{2}x^2+1$ 的凸区间是

A．$(-\infty,-1)$　　B．$(-1,0)$

C．$(0,1)$　　D．$(1,+\infty)$

4．已知 $\arctan x^2$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数，则下列结论中，不正确的是

A．$f(x)=\dfrac{2x}{1+x^4}$　　B．当 $x\to0$ 时，$f(x)$ 和 x 是同阶无穷小量

C. $\int_0^{+\infty} f(x)dx=\frac{\pi}{2}$　　D. $\int f(2x)dx=\arctan 4x^2+C$

5．交换二次积分 $I=\int_0^1 dx\int_{x^2}^1 f(x,y)dy$ 和积分次序，则 $I=$

A. $\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$　　B. $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1 f(x,y)dx$

C. $\int_0^1 dy\int_{y^2}^1 f(x,y)dx$　　D. $\int_0^1 dy\int_0^{y^2} f(x,y)dx$

二、填空题（本大题共 **5** 小题，每小题 **3** 分，共 **15** 分）

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2+3n+1}}{n}=$________ 。

7. $f(x)=x^2+2x-1$ 在区间 $[0,2]$ 上应用拉格朗日（Langrange）中值定理时，满足定理要求的 $\xi=$________ 。

8．若由参数方程 $\begin{cases} x=\ln\cos t \\ y=a\sec t \end{cases}$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 是微分方程 $\frac{dy}{dx}=y+e^{-x}$ 的解，则常数 $a=$________ 。

9，设二元函数 $z=\ln(xy)$，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$________ 。

10．微积分方程 $y''+y'-12y=0$ 的通解是 $y=$________ 。

三、计算题（本大题共 **8** 小题，每小题 **6** 分，共 **48** 分）

11．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}+\frac{1}{e^{-x}-1})$。

12．设 $y=x\arcsin x-\sqrt{1-x^2}$，求 $y''\big|_{x=0}$。

13．求函数 $f(x)=\log_4(4^x+1)-\frac{1}{2}x-\log_4 2$ 的单调区间和极值。

14．计算不定积分 $\int\frac{1}{(x+2)\sqrt{x+3}}dx$。

15．设函数 $f((x)=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$。

（1）求曲线 $y=f(x)$ 上相应于 $0\le x\le 1$ 的弧段长度 s；

（2）求由曲线 $y=f(x)$ 和直线 $x=0$，$x=1$ 及 $y=0$ 围成的平面图绕 x 轴旋转而成的旋转体体积 V_x。

16．已知三元函数 $f(u,v,w)$ 具有连续偏导数，且 $f_v - f_w \neq 0$。若二元函数 $z = z(x,y)$ 是由三元方程 $f(x-y, y-z, z-x) = 0$ 所确定的隐函数，计算 $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y}$。

17．计算二重积分 $\iint\limits_D (x^2+y^2)d\sigma$，其中积分区域 $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \geq 1, |x| \leq 2, |y| \leq 2\}$。

18．求微分方程 $(1+x^2)dy - (x - x\sin^2 y)dx = 0$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0} = 0$ 的特解。

四、综合题（大题共 2 小题，第 19 小题 10 分，第 20 小题 12 分，共 22 分）

19．已知函数 $f(x) = \begin{cases} (1+3x^2)^{\frac{1}{x^2}} \sin 3x + 1, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续。

（1）求常数 a 的值；

（2）求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0,a)$ 处的切线方程。

20．设函数 $f(x) = \int_{\ln x}^{2} e^{t^2} dt$。

（1）求 $f'(e^2)$；

（2）计算定积分 $\int_1^{e^2} \dfrac{1}{x} f(x) dx$。

广东省 2014 年普通高等学校本科插班生招生考试

高等数学参考答案及评分标准

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1．B　　2．D　　3．C　　4．D　　5．A

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6．2　　7．1　　8．$-\dfrac{1}{2}$　　9．0　　10．$C_1 e^{-4x} + C_2 e^{3x}$

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11．解：原式 $= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-x} - 1 + x}{x(e^{-x} - 1)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-e^{-x} + 1}{e^{-x} - 1 - xe^{-x}}$　（3 分）

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-x}}{-e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x}} = -\dfrac{1}{2}$。　（6 分）

12．解：$y' = \arcsin x + \dfrac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$，　（3 分）

$y'' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$，　（5 分）

$\therefore y''\Big|_{x=0} = 3$　　（6 分）

13．解：$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$

$$f'(x)=\frac{4^x\ln 4}{(4^x+1)\ln 4}-\frac{1}{2}=\frac{4^x-1}{2(4^x+1)}$$　　（3 分）

令 $f'(x)=0$，解得 $x=0$

当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$, 当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，　　（6 分）

所以 $f(x)$ 在区间 $\left(-\infty,0\right]$ 内递减，在 $(0,+\infty)$ 内递增；$f(0)=0$ 是 $f(x)$ 的极小值。

（6 分）

14．解：令 $\sqrt{3+x}=t$，则 $x=t^2-3, dx=2tdt$，　　（2 分）

原式=$2\int\frac{1}{t^2-1}dt=\int(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1})dt$

$=\ln|t-1|-\ln|t+1|+C=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\ln\left|\frac{\sqrt{3+x}-1}{\sqrt{3+x}+1}+C\right|$　　（6 分）

15．解：（1）$s=\int_0^1\sqrt{1+x}dx=\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$；　　（3 分）

（2）$V_x=\pi\int_0^1\frac{4}{9}x^3dx=\frac{\pi}{9}x^4\Big|_0^1=\frac{\pi}{9}$　　（6 分）

16．解：设 $F(x,y,z)=f(x-y,y-z,z-x)=f(u,v,w)$，

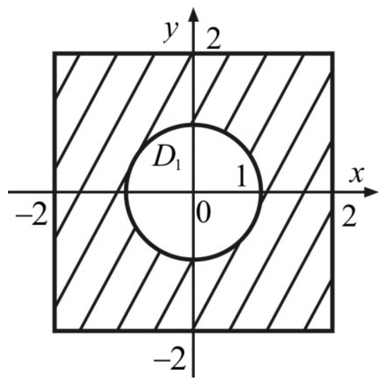
其中 $u=x-y, v=y-z, w=z-x$，

则 $F_x=f_u-f_w, F_y=-f_u+f_v, F_z=-f_v+f_w$　　（2 分）

$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{f_u-f_w}{f_v-f_w}, \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{-f_u+f_v}{f_v-f_w}$

故 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{f_u-f_w-f_u+f_v}{f_v-f_w}=1$　　（6 分）

17.解：D 如图：



记圆域 $x^2+y^2\le 1$ 为 D_1，

原式=$\iint\limits_{D+D_1}(x^2+y^2)d\sigma-\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)d\sigma$　　（2 分）

$=\int_{-2}^{2}dx\int_{-2}^{2}(x^2+y^2)dy-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr$　　（4 分）

$$=\int_{-2}^{2}(4x^2+\frac{16}{3})dx-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr$$

$$=\int_{-2}^{2}(4x^2+\frac{16}{3})dx-\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{128}{3}-\frac{\pi}{2}$$ （6 分）

18．解：将原方程变形为 $\frac{dy}{\cos^2 y}=\frac{x}{1+x^2}dx$ （2 分）

两边积分得：$\int\frac{dy}{\cos^2 y}=\int\frac{x}{1+x^2}dx$

即 $\tan y=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$ （5 分）

又 $\because$ $x=0$ 时，$y=0$，$\therefore$ $C=0$

故原方程的特解为 $\tan y=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$ （6 分）

四、综合题（大题共 2 小题，第 19 小题 10 分，第 20 小题 12 分，共 22 分）

19．解：（1）$\because$ $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x^2)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+3x^2)^{\frac{1}{3x^2}}\right]^3=e^3$ （2 分）

$$\therefore \lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left[(1+3x^2)^{\frac{1}{x^2}}\sin 3x+1\right]=e^3\times 0+1=1$$

又 $\because$ $f(0)=a,$ 由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续知 $a=1$ （4 分）

（2）$\because$ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(1+3\Delta x^2)^{\frac{1}{\Delta x^2}}\sin 3\Delta x+1-1}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(1+3\Delta x^2)^{\frac{1}{\Delta x^2}}\frac{\sin 3\Delta x}{3\Delta x}\times 3=3e$$ （4 分）

故曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,a)$ 即 $(0,1)$ 处的切线方程为 $y=3ex+1$

（10 分）

20．解：（1）$\because$ $f'(x)=-e^{\ln^2 x}\frac{1}{x}$，

$$\therefore f'(e^2)=-e^{\ln^2 e^2}\frac{1}{e^2}=-e^2$$

（2）解一：$\int_1^{e^2}\frac{1}{x}f(x)dx=\int_1^{e^2}f(x)d\ln x=f(x)\ln x\Big|_1^{e^2}-\int_1^{e^2}\ln x f'(x)dx$

$$=\int_1^{e^2}\ln x e^{\ln^2 x}\frac{1}{x}dx$$ （9 分）

$$=\frac{1}{2}\int_1^{e^2}e^{\ln^2 x}d\ln^2 x=\frac{1}{2}e^{\ln^2 x}\Big|_1^{e^2}=\frac{1}{2}e^4-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(e^4-1)$$ （12 分）

解二：$\int_1^{e^2}\frac{1}{x}f(x)dx=\int_1^{e^2}(\frac{1}{x}\int_{\ln x}^2 e^{y^2}dy)dx=\int_1^{e^2}dx\int_{\ln x}^2\frac{1}{x}e^{y^2}dy$ （7 分）

$$=\int_0^2 dy\int_1^{e^y}\frac{1}{x}e^{y^2}dx \quad （10 分）$$

$$=\int_0^2 (lnxe^{y^2}\Big|_1^{e^y})dy$$

$$=\int_0^2 ye^{y^2}dy=\frac{1}{2}e^{y^2}\Big|_0^2=\frac{1}{2}(e^4-1) \quad （12 分）$$

广东省 2015 年普通高等学校本科插班生招生考试

高等数学

一、单项选择题（本在题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分。每小题只有一个选项符合题目要求）

1．若当 $x\to 0$ 时，$kx-2x^2+3x^3$ 与 x 是等价无穷小，则常数 $k=$

A．0　　B．1
C．2　　D．3

2．已知函数 $f(x)$ 在 x_0 处有二阶导数，且 $f'(x_0)$ =0，$f''(x_0)=1$，则下列结论正确的是

A．x_0 为 $f(x)$ 的极小值点　　B．x_0 为 $f(x)$ 的极大值点

C．x_0 为 $f(x)$ 的极值点　　D．$(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

3．设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，C 为任意实数，则 $\int f(2x)dx=$

A．$F(x)+C$　　B．$F(2x)+C$

C．$\frac{1}{2}F(2x)+C$　　D．$2F(2x)+C$

4．若函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}+kx$ 数在区间 $[0,1]$ 上满足罗尔（Rolle）定理的条件，则常数 $k=$

A．-1　　B．0
C．1　　D．2

5．下列级数中，收敛的是

A．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}$　　B．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^2+1}$

C．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$　　D．$\sum_{n=1}^{\infty}\left[(\frac{3}{4})^n+\frac{1}{n^2}\right]$

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6．曲线 $y=(1-\frac{5}{x})^x$ 的水平渐进线为 $y=$__________________ 。

7．设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\tan t \\ y=t^3+2t \end{cases}$ 所确定，则 $\frac{dy}{dx}\bigg|_{t=0}=$____________________ 。

8．广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^6}dx=$____________________ 。

9．微分方程 $y'-xy=0$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0}=1$ 的特解为 $y=$____________________ 。

10．设函数 $f(x)=\log_2 x(x>0)$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=$____________________ 。

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11．已知函数 $f(x)=\begin{cases} \frac{\sin 2(x-1)}{x-1}, & x<1 \\ a, & x=1 \\ x+b, & x>1 \end{cases}$ 在点 $x=1$ 处连续，求常数 a 和 b 的值。

12．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x-x}{x^3}$ 。

13．设 $y=\ln\frac{e^x}{e^x+1}$，求 $y''\big|_{x=0}$ 。

14．计算不定积分 $\int\frac{\sqrt{x+2}}{x+3}dx$ 。

15．求由曲线 $y=x\cos 2x$ 和直线 $y=0,x=0$ 及 $\frac{\pi}{4}$ 围成的平面图形的面积。

16．将二次积分 $I=\int_{-1}^{1}dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}e^{x^2+y^2}dy$ 化为极坐标形式的二次积分，并计算 I 的值。

17．求微分方程 $y''+2y'+5y=0$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0}=2$，$y'\big|_{x=0}=0$ 的特解。

18．判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n+1}$ 的收敛性。

四、综合题（大题共 2 小题，第 19 小题 12 分，第 20 小题 10 分，共 22 分）

19．设二元函数 $z=f(x,y)=x^y\ln x(x>0,x\neq 1)$，平面区域 $D=\{(x,y)\big|2\le x\le e,-1\le y\le 1\}$。

（1）求全微分 dz；

（2）求 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 。

20．已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的单调递减的可导函数，且 $f(1)=2$，

函数 $F(x)=\int_0^x f(t)dt-x^2-1$ 。

（1）判别曲线 $y=F(x)$ 在 R 上的凹凸性，并说明理由；

（2）证明：方程 $F(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内有且仅有一个实根。

2015年广东省普通高校本科插班生招生考试

《高等数学》参考答案及评分标准

一、单项选择题（本大题共5小题，每小题3分，共15分）

1．B　　2．A　　3．C　　4．C　　5．D

二、填空题（本大题共5小题，每个空3分，共15分）

6．e^{-5}　　7．2　　8．$\dfrac{1}{5}$　　9．$e^{\frac{1}{2}x^2}$　　10．$-\dfrac{1}{x\ln 2}$

三、计算题（本大题共8小题，每小题6分，共48分）

11．解：$\because \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sin 2(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sin 2(x-1)}{2(x-1)}\times 2=2$，　　（3分）

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+b)=1+b$，

$f(1)=a$，　　（4分）

$\therefore$ 当 $a=1+b=2$，即 $a=2,b=1$ 时，$f(x)$ 在 $x=1$ 处连续。　　（6分）

12．解法一：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x^2}-1}{3x^2}$　　（3分）

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{-2x}{(1+x^2)^2}}{6x}=-\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{(1+x^2)^2}=-\dfrac{1}{3}$。　　（6分）

解法二：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{-1}{1+x^2}-1}{3x^2}$　　（3分）

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{3(1+x^2)}=-\dfrac{1}{3}$　　（6分）

13．解：$\because y=x-\ln(e^x+1)$,

$\therefore y'=1-\dfrac{e^x}{e^x+1}=\dfrac{1}{e^x+1}$,　　（3分）

$y''=\dfrac{-e^x}{(1+e^x)^2}$，

故 $y''\Big|_{x=0}=-\dfrac{1}{4}$　　（6分）

14．解：设 $\sqrt{x+2}=t$, 则 $x=t^2-2, dx=2tdt,$ （2 分）

$$\therefore \int \frac{\sqrt{x+2}}{x+3}dx=\int \frac{t}{t^2+1}\cdot 2tdt$$ （2 分）

$$=2\int \frac{t^2}{t^2+1}dt=2\int (1-\frac{1}{1+t^2})dt$$ （4 分）

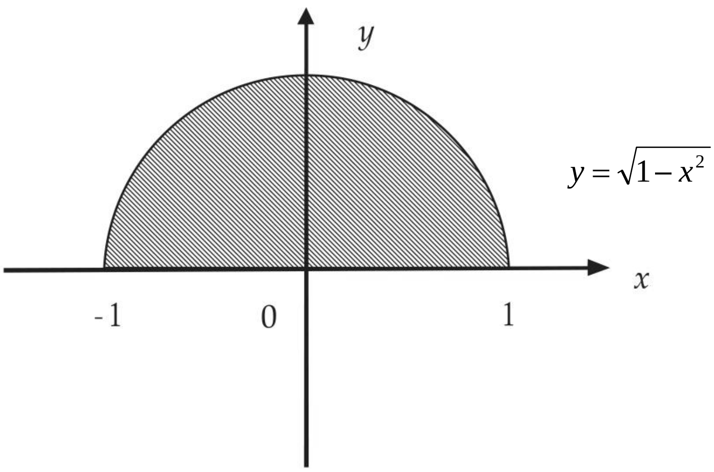
$$=2(t-\arctan t)+C=2(\sqrt{x+2}-\arctan\sqrt{x+2})+C$$ （6 分）

15．解：所求面积：$A=\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x dx$ （2 分）

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} xd\sin 2x=\frac{1}{2}(x\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2xdx)$$ （4 分）

$$=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\cos 2x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$$ （6 分）

16．解：由给定的二次积分知，积分区域 $D=\{(x,y)|-1\le x\le 1, 0\le y\le\sqrt{1-x^2}\}$,



（2 分）

如图：

$$\therefore I=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1 e^{r^2}rdr$$ （4 分）

$$=\int_0^{\pi}(\frac{1}{2}e^{r^2}\Big|_0^1)d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}(\frac{1}{2}e-\frac{1}{2})d\theta$$

$$=\frac{\pi}{2}(e-1)$$

（6 分）

17．解：微分方程的特征方程为 $r^2+2r+5=0$，

解得 $r=-1\pm 2i$， （2 分）

微分方程的通解为 $y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$ （4 分）

$\because y'=-e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+e^{-x}(-2C_1\sin 2x+2C_2\cos 2x)$，

$\therefore y\big|_{x=0}=C_1=2, y'\big|_{x=0}=-C_1+2C_2=0$, 解得 $C_1=2, C_2=1$

故微分方程的特解为 $y=e^{-x}(2\cos 2x+\sin 2x)$ （6 分）

18．解法一：显然 $\frac{n^2}{3^n+1}<\frac{n^2}{3^n}$，

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{3^n+1}\cdot\frac{3^n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{3n^2}=\frac{1}{3}<1$，

则由比值审敛法知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$ 收敛， （3 分）

$\therefore$ 由比较审敛法知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n+1}$ 收敛。 （6 分）

解法二：$\because \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}+1}\cdot\frac{3^n+1}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}\cdot\frac{1+\frac{1}{3^n}}{3+\frac{1}{3^n}}=\frac{1}{3}<1$， （3 分）

$\therefore$ 由比较审敛法知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n+1}$ 收敛。 （6 分）

四、综合题（大题共 2 小题，第 19 小题 12 分，第 20 小题 10 分，共 22 分）

19．解：（1）$\because \frac{\partial z}{\partial x}=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x=x^{y-1}(1+y\ln x), \frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln^2 x$， （4 分）

$\therefore dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=x^{y-1}(1+y\ln x)dx+x^y\ln^2 xdy$ 。 （6 分）

（2）$\iint\limits_D f(x,y)d\theta=\int_2^e dx\int_{-1}^1 x^y\ln xdy$ （8 分）

$=\int_2^e (x^y\big|_{-1}^1)dx$ （10 分）

$=\int_2^e (x-\frac{1}{x})dx=(\frac{1}{2}x^2-\ln x)\big|_2^e=\frac{1}{2}e^2+\ln 2-3$ 。 （12 分）

20．（1）解：$\because F'(x)=f(x)-2x, F''(x)=f'(x)-2$, 且由题意知 $f'(x)\le 0(x\in R)$， （3 分）

$\therefore F''(x)<0(x\in R)$，

故曲线 $y=F(x)$ 在 R 上是凸的。 （4 分）

（2）证：显然$F(x)$在$[0,1]$上连续，且$F(0)=-1<0$，

$$F(1)=\int_0^1 f(t)dt-2>\int_0^1 2dt-2=0,$$

$\therefore$方程$F(x)=0$在区间$(0,1)$内至少有一个实根。　　（7 分）

由$F''(x)<0$知$F'(x)$在R上单调递减，

$\therefore x<1$时，有$F'(x)>F'(1)=f(1)-2=0$，

由此知$F(x)$在$(0,1)$内单调递增。

因此方程$F(x)=0$在$(0,1)$内至多只有一个实根，

故方程$F(x)=0$在区间$(0,1)$内有且仅有一个实根。　　（10 分）

广东省 2016 年普通高等学校本科插班生招生考试

高等数学

一、单项选择题（本在题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分。每小题只有一个选项符合题目要求）

1．若函数 $f(x)=\begin{cases}3x+a, x\geq 1\\ x+1, x<1\end{cases}$ 在点$x=1$处连续,则常数$a=$

A．-1　　B．0

C．1　　D．2

2．已知函数$f(x)$满足$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=6$,则$f'(x_0)=$

A．1　　B．2

C．3　　D．6

3．若点$(1,2)$为曲线$y=ax^3+bx^2$的拐点,则常数a与b的值应分别为

A．-1和3　　B．3和-1

C．-2和6　　D．6和-2

4．设函数$f(x)$在区间$[-1,1]$上可导，C为任意实数,则$\int \sin x f'(\cos x)dx=$

A．$\cos x f(\cos x)+C$　　B．$-\cos x f(\cos x)+C$

C．$f(\cos x)+C$　　D．$-f(\cos x)+C$

5．已知常数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和$S_n=\dfrac{n}{n+1}(n\in N^*)$,则下列常数项级数下列级数中，发散的是

A．$\sum\limits_{n=1}^{\infty}2u_n$　　B．$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$

C．$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+\dfrac{1}{n})$　　D．$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[u_n-(\dfrac{3}{5})^n\right]$

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6．极限 $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{3}{x}=$______________

7．设 $y=\dfrac{x}{1+x^2}$,则 $dy\big|_{x=0}=$______________

8．设二元函数 $z=x\ln y$,则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=$ ______________ 。

9．设平面区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$,则 $\iint\limits_D (x^2+y^2)d\sigma=$ ______________ 。

10．椭圆曲线 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 围成的平面图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体体积 $V=$ ______________

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\sin x}{x^3})$

12．求曲线 $3x^2+y+e^{xy}=2$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程

13．求不定积分 $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx$ 。

14．计算定积分 $\displaystyle\int_0^1 x2^x dx$

15．设 $z=u^v$,而 $u=2x+y, v=x$,求 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}$ 和 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}$

16．设平面区域 D 由曲线 $xy=1$ 和直线 $y=x$ 及 $x=2$ 围成,计算 $\iint\limits_D \dfrac{x}{y^2}d\sigma$

17．已知函数 $y=e^{2x}$ 是微分方程 $y''-2y'+ay=0$ 的一个特解,求常数 a 的值,并求该微分方程的通解

18．已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 满足 $u_{n+1}=\dfrac{1}{3}(1+\dfrac{1}{n})^n u_n(n\in N^*)$,且 $u_1=1$,判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的收敛性。

四、综合题（大题共 2 小题，第 19 小题 12 分，第 20 小题 10 分，共 22 分）

19．设函数 $f(x)=\ln(1+x)-x+\dfrac{1}{2}x^2$, 证明:

（1）当 $x\to 0$ 时, $f(x)$ 是比 x 高阶的无穷小量;

（2）当 $x>0$ 时, $f(x)>0$

20．已知定义在区间 $[0,+\infty)$ 上的非负可导函数 $f(x)$ 满足

$$f^2(x)=\int_0^x\frac{1+f^2(t)}{1+t^2}dt(x\ge 0)$$

（1）判断函数 $f(x)$ 是否存在极值,并说明理由；

（2）求 $f(x)$

2016年广东省普通高校本科插班生招生考试

《高等数学》参考答案及评分标准

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1.A　　2.B　　3.A　　4.D　　5.C

二、填空题（本大题共 5 小题，每个空 3 分，共 15 分）

6.3　　7. dx　　8. $\frac{1}{y}$　　9. $\frac{\pi}{2}$　　10. $\frac{8\pi}{3}$

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11. $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\frac{\sin x}{x^3})=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}$

12. 解：等式两边对 x 求导得：$6x+\frac{dy}{dx}+e^{xy}(y+x\frac{dy}{dx})=0$

$$\frac{dy}{dx}(1+xe^{xy})=-6x-ye^{xy}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{-6x-ye^{xy}}{1+xe^{xy}},\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=0\\ y=1}}=-1$$

故曲线在点 $(0,1)$ 处切线方程为 $y-1=-(x-0)$，即 $y=-x+1$

13. 解：设 $\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2,dx=2tdt$

$$\int\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx=\int\frac{1}{t\sqrt{1-t^2}}2tdt=2\int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt=2\arcsin t+C$$
$$=2\arcsin\sqrt{x}+C$$

14. 解：

$$\int_0^1 x2^x dx=\frac{1}{\ln 2}\int_0^1 xd2^x=\frac{1}{\ln 2}(x2^x\Big|_0^1-\int_0^1 2^x dx)$$
$$=\frac{1}{\ln 2}(2-\left.\frac{2^x}{\ln 2}\right|_0^1)=\frac{1}{\ln 2}(2-\frac{1}{\ln 2})$$

15. 解：

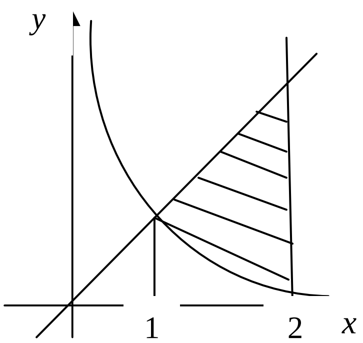
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=2vu^{v-1}+u^{v}\ln u$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=vu^{v-1}$$

又$\because$ 当 $x=1, y=0$ 时，$u=2, v=1$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{\substack{x=1\\y=0}}=2+2\ln 2, \frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{\substack{x=1\\y=0}}=1$$

16. 解：

$$\iint_D \frac{x}{y^2}d\delta=\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x}{y^2}dy=\int_1^2\left(-\frac{x}{y}\bigg|_{\frac{1}{x}}^{x}\right)dx=\int_1^2\left(-1+x^2\right)dx$$
$$=(-x+\frac{x^3}{3})\Big|_1^2=\frac{4}{3}$$



17. 解：$\because y'=2e^{x}, y''=4e^{2x}$

由题意知 $4e^{2x}-4e^{2x}+ae^{2x}=0$, 即 $ae^{2x}=0, a=0$

当 $a=0$ 时微分方程为 $y''-2y'=0$

其特征方程为 $r^2-2r=0$ ，解得 $r=0, r=2$

所以，微分方程的通解为 $y=c_1+c_2e^{2x}$

18．解由题意知，该级数为正项级数，用比值审敛法判断

$\because \lim\limits_{x\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{3}(1+\frac{1}{n})^n=\frac{e}{3}<1$ $\therefore$ 该级数收敛

19. 证明：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1+x}{1}$

$=\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{1+x}-1+x)=0$

所以当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是比 x 高阶的无穷小量

(2) 当 $x\geq 0$ 时，$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x=\frac{1+(1+x)(x-1)}{1+x}=\frac{x^2}{1+x}\geq 0$ ，且等号仅在 $x=0$ 处成立

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 单调递增

20. （1）对条件等式两边对 x 求导得

$2f(x)f'(x)=\frac{1+f^2(x)}{1+x^2}$,

$\because \frac{1+f^2(x)}{1+x^2}\neq 0, \therefore f'(x)\neq 0$

即 $f(x)$ 无驻点，故 $f(x)$ 不存在极值

（2）令 $f(x)=y$，则由（1）式得 $2yy'=\frac{1+y^2}{1+x^2}$ ，且 $y\big|_{x=0}=0$，

即 $\frac{2y}{1+y^2}dy=\frac{1}{1+x^2}dx$

即 $\ln(1+y^2)=\arctan x+c$

由 $y\big|_{x=0}=0\Rightarrow c=0$

故 $1+y^2=e^{\arctan x}$ ，因此 $f(x)=y=(e^{\arctan x}-1)^{\frac{1}{2}}\quad (x\geq 0)$

广东省 2017 年普通高等学校本科插班生招生考试

高等数学

一、单项选择题（本在题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分。每小题只有一个选项符合题目要求）

1．下列极限等式不正确的是

A．$\lim\limits_{n\to\infty} e^{-n}=0$　　B．$\lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}}=1$

C．$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x^2-1}=0$　　D．$\lim\limits_{x\to0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$

2．若 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{a}{x})^x=4$，则常数 $a=$

A．$\ln 2$　　B．$2\ln 2$

C．1　　D．4

3．设 $F(x)$ 是可导函数 $f(x)$ 的一个原函数，C 为任意常数，则等式不正确的是

A．$\int f'(x)dx=f(x)+C$　　B．$\left[\int f(x)dx\right]'=f(x)$

C．$\int f(x)dx=F(x)+C$　　D．$\int F(x)dx=f(x)+C$

4．已知函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0,2\right]$ 上连续，且 $\int_0^2 xf(x)dx=4$，则 $\int_0^4 f(\sqrt{x})dx=$

A．2　　B．4

C．6　　D．8

5．将二次积分 $I=\int_{-1}^{1}dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x^2+y^2)dy$ 化为极坐标形式的二次积分，则 $I=$

A．$\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1 rf(r^2)dr$　　B．$\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1 f(r^2)dr$

C．$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rf(r^2)dr$　　D．$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 f(r^2)dr$

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6．已知当 $x\to0$ 时，$f(x)\sim 2x$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 6x}{f(x)}=$ ________

7．若常数 $p>1$，则广义积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^p}dx=$ ________

8．设二元函数 $z=f(x,y)$ 的全微分 $dz=\dfrac{-y}{x^2}dx+\dfrac{1}{x}dy$,则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=$ ________ 。

9．微分方程 $y''-9y=0$ 的通解为 $y=$ ________ 。

10．级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$ 的和为 ________

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11．求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-3x-1}{1-\cos x}$

12．设 $y=x^{x^2}(x>0)$，求 y'

13．设函数 $f(x)=\int_1^x\sqrt{(t-1)^2+1}\,dt$，求曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间和拐点

14．求不定积分 $\int x\cos(x+2)dx$

15．设 $(x-y)^3+z+\tan z=0$，计算 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}$

16．求二重积分 $\iint\limits_D e^{x^3}d\sigma$，其中 D 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $x=1$ 及 $y=0$ 围成的有界闭区域

17．若曲线经过点 $(0,1)$，且该曲线上一点 (x,y) 处的切线斜率为 $2y+e^x$，求这条曲线的方程

18．判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{4^n}{n!})$ 敛散性。

四、综合题（大题共 2 小题，第 19 小题 12 分，第 20 小题 10 分，共 22 分）

19．设函数 $f(x)=\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}$

（1）求曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线方程；

（2）求由曲线 $y=f(x)$ 和直线 $x=0,x=1$ 及 $y=0$ 围成的平面图形绕 x 轴旋转而成的旋转体体积 V

20．已知 $f(x)=\arctan\frac{1}{x}$

（1）证明：当 $x>0$ 时，恒有 $f(x)+f(\frac{1}{x})=\frac{\pi}{2}$；

（2）试问方程 $f(x)=x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有几个实根？

广东省 2017 年普通高等本科插班生招生考试《高等数学》答案

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1．C　2．B　3．D　4．D　5．A

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6．3　7．$\frac{1}{p-1}$　8．$-\frac{1}{x^2}$　9．$C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}$　10．1

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11．$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{3x}-3x-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{3x}-3x-1}{\frac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{3e^{3x}-3}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{3\bullet3e^{3x}}{1}=9$

12．$y=x^{x^2}=e^{x^2\ln x}$，故 $y'=e^{x^2\ln x}\bullet(2x\ln x+x^2\bullet\frac{1}{x})=x^{x^2}(2x\ln x+x)=x^{x^2+}(2\ln x+1)$

13．$f'(x)=\sqrt{(x-1)^2+1}$，$f''(x)=\frac{2(x-1)}{2\sqrt{(x-1)^2+1}}=\frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+1}}$，

令 $f''(x)=0$，解得 $x=1$

当 $x>1$ 时， $f''(x)>0$；当 $x<1$ 时， $f''(x)<0$，

故函数 $f(x)$ 的凹区间为 $(1,+\infty)$，凸区间为 $(-\infty,1)$；

拐点为 $(1,0)$。

14. $\int x\cos(x+2)dx=\int xd\sin(x+2)=x\sin(x+2)-\int\sin(x+2)dx$

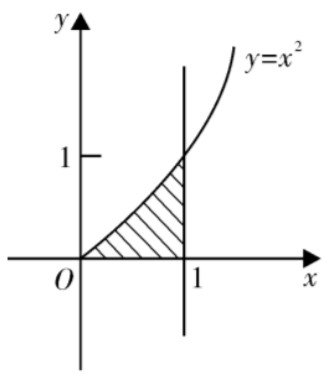
$$=x\sin(x+2)+\cos(x+2)+C$$

15. 令 $F(x,y,z)=(x-y)^3+z+\tan z$，则

$F_x=3(x-y)^2, F_y=-3(x-y)^2, F_z=1+\sec^2 z$，

故 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{-(x-y)^2}{1+\sec^2 z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{3(x-y)^2}{\sec^2 z+1}$，

因此 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{3(x-y)^2}{1+\sec^2 z}+\frac{3(x-y)^2}{\sec^2+1}=0$。



16. 积分区域 D 如图所示，由被积函数的特点选择先 y 后 x 的积分，

即 $D:0\le X\le 1,0\le y\le x^2$。则

$$\iint_D e^{x^3}d\sigma=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}e^{x^3}dy=\int_0^1 e^{x^3}\bullet y\Big|_0^{x^2}dx$$

$$=\int_0^1 x^2e^{x^3}dx=\frac{1}{3}e^{x^3}\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{3}(e-1)$$

17. 设曲线 D 的方程为 $y=y(x)$，由题可知 $y'=2y+e^x$，变换为 $y'-2y=e^x$，这是一个一阶线性微分方程，由其通解公式得

$$y=e^{-\int -2dx}(\int e^xe^{-\int 2dx}dx+C)$$

$$=e^{2x}(\int e^{-x}dx+C)$$

$$=e^{2x}(-e^{-x}+C)$$

$=-e^x+Ce^{2x}$（C 为任意常数），

又由 $y(0)=1$，可知 $C=2$，即 $y=-e^x+2e^{2x}$。

18. $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{4^n}{n!})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n!}$，

令$\upsilon_n=\frac{4^n}{n!},\lim_{n\to\infty}\frac{\upsilon_n+1}{\upsilon_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}}{(n+1)!}\bullet\frac{n!}{4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n+1}=0<1$，

可知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n!}$收敛，

而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$为$p>1$的$p^-$级数，可知其收敛，

故由级数的基本性质可知原级数收敛。

四、综合题（本大题共 2 小题，第 19 小题 10 分，第 20 小题 12，共 22 分）

19. （1）$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}=1$，

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+x}{-x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}=-1$$

故函数$y=f(x)$有两条水平渐近线，方程分别为$y=1,y=-1$；

（2）当$0\le x\le1$时，$f(x)>0$，故所求旋转体体积为

$$V_x=\pi\int_0^1\left(\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2dx$$

$$=\pi\int_0^1\frac{1+x^2+2x}{1+x^2}dx$$

$$=\pi(\int_0^1 1dx+\int_0^1\frac{2x}{1+x^2}dx)$$

$$=\pi\left(1+\ln(1+x^2)\Big|_0^1\right)$$

$$=(1+\ln2)\pi$$

20. （1）令$F(x)=f(x)+f(\frac{1}{x})=\arctan\frac{1}{x}+\arctan x$，

$$F'(x)=\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\bullet\left(-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{1+x^2}$$

$$=-\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{1+x^2}=0,$$

则可知 $F(x)=C$，C 为常数

当 $x=1$ 时，$F(1)=C=f(1)+f(1)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，

故当 $x>0$ 时，$F(x)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$ 恒成立；

（2）令 $g(x)=f(x)-x$，则 $g'(x)=(\arctan\frac{1}{x}-x)'=-\frac{1}{1+x^2}-1<0$，

故 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，又

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\arctan\frac{1}{x}-x\right)=\frac{\pi}{2}>0,$$

$$\lim_{x\to +\infty} g(x)=\lim_{x\to +\infty}\left(\arctan\frac{1}{x}-x\right)=-\infty,$$

则 $g(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有且仅有一个实根，

即 $f(x)=x$ 在 $(0,+\infty)$ 上只有一个实根。

广东省2018年普通高等学校本科插班生招生考试

高等数学

一、单项选择题（本在题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分。每小题只有一个选项符合题目要求）

1．$\lim\limits_{x\to 0}\left(3x\sin\frac{1}{x}+\frac{\sin x}{x}\right)=$

A． 0　　B． 1

C． 3　　D． 4

2．设函数 $f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(0)=-1, f'(1)=0, f''(0)=-1, f''(1)=3$，则下列结论正确的是

A．点 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点　　B．点 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点

C．点 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点　　D．点 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极大值点

3．已知 $\int f(x)dx=x^2+C$, 其中 C 为任意常数，则 $\int f(x^2)dx=$

A．x^5+C　　B．x^4+C

C．$\frac{1}{2}x^4+C$　　D．$\frac{2}{3}x^3+C$

4．级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{3^n}=$

A．2　　B．1

C．$\frac{3}{4}$　　D．$\frac{1}{2}$

5．已知$D=\{(x,y)\,|\,4\le x^2+y^2\le 9\}$，则$\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}d\sigma=$

A．2π　　B．10π

C．$2\pi\ln\frac{3}{2}$　　D．$4\pi\ln\frac{3}{2}$

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6．已知$\begin{cases} x=\log_3 t \\ y=3^t \end{cases}$，则$\frac{dy}{dx}\Big|_{t=1}=$ ________________

7．$\int_{-2}^{2}(|x|+\sin x)dx=$________________

8．$\int_0^{+\infty}e^{1-2x}dx=$__________________

9．二元函数$z=x^{y+1}$，当$x=e,y=0$时的全微分$dz\Big|_{\substack{x=e\\y=0}}=$__________________

10．微分方程$x^2dy=ydx$，满足初始条件$y|_{x=1}=1$的特解为$y=$___________________

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11．确定常数a,b的值，使函数$f(x)=\begin{cases} \frac{x+a}{x^2+1}, & x<0 \\ b, & x=0 \\ \left(1+\frac{2}{x}\right)^x, & x>0 \end{cases}$，在点$x=0$处连续

12．求$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{\ln(1+x)}{x^2}\right)$

13．求由方程$(1+y^2)\arctan y=xe^x$所确定的隐函数的导数$\frac{dy}{dx}$

14．已知$\ln(1+x^2)$是函数$f(x)$的一个原函数，求$\int xf'(x)dx$

15．求由曲线$y=1+\frac{\sqrt{x}}{1+x}$和直线$y=0,x=0$及$x=1$所围成的平面图形的面积

16．已知二元函数 $z=\frac{xy}{1+y^2}$,，求 $\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$

17．求 $\iint\limits_D \sqrt{1-\frac{x}{y}}d\sigma$，其中 D 是由直线 $y=x$ 和 $y=1,y=2$ 及 $x=0$ 所围成的闭区域

18．判定设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{|\sin n|+2}$ 的收敛性

四、综合题（大题共 2 小题，第 19 小题 12 分，第 20 小题 10 分，共 22 分）

19．已知函数 $f(x)$ 满足 $f''(x)-4f(x)=0,$ 且曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线与直线 $y=2x+1$ 平行

（1）求 $f(x)$；

（2）求由曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间与拐点

20．已知函数 $f(x)=\int_0^x \cos t^2 dt$

（1）求 $f'(0)$；

（2）判断函数 $f(x)$ 的奇偶性，并说明理由；

（3）证明：当 $x>0$ 时，$f(x)>x-\frac{(1+\lambda)x^3}{3\lambda}$，其中 $\lambda>0$ 常数

2018 年广东省普通高校本科插班生招生考试

《高等数学》参考答案及评分标准

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. B　2. C　3. D　4. C　5. A

二、填空题（本大题共 5 小题，每个空 3 分，共 15 分）

6. $3(\ln 3)^2$　7. 4　8. $\frac{e}{2}$　9. $dx+edy$　10. $e^{1-\frac{1}{x}}$

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11．解：

【精析】 因为函数在 $x=0$ 处连续，所以 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)$，

又 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{x+a}{x^2+1}=a$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to0^+}e^{x\ln(1+\frac{2}{x})}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{\ln(1+\frac{2}{x})}{\frac{1}{x}}}=$

$\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{2x}{x+2}}=1$，$f(0)=b$，所以 $a=b=1$.

12. 解：

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{\ln(1+x)}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2(1+x)}=\frac{1}{2}$$

13. 解：等式两边对求导得

$$2y\arctan y+(1+y^2)\frac{1}{1+y^2}\frac{dy}{dx}=e^x+xe^x$$
$$\frac{dy}{dx}(1+2y\arctan y)=(1+x)e^x$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{(1+x)e^x}{1+2y\arctan y}$$

14. 解：

$$\int xf'(x)dx=\int xdf(x)=xf(x)-\int f(x)dx$$
$$=x[\ln(1+x^2)]'-\ln(1+x^2)+C$$
$$=\frac{2x^2}{1+x^2}-\ln(1+x^2)+C$$

15. 解：$A=\int_0^1(1+\frac{\sqrt{x}}{1+x})dx=1+\int_0^1\frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$

设 $\sqrt{x}=t$, 则 $x=t^2, dx=2tdt$

$$A=1+\int_0^1\frac{\sqrt{x}}{1+x}dx=1+2\int_0^1(1-\frac{1}{1+t^2})dt$$
$$=1+2(t-\arctan t)|_0^1=3-\frac{\pi}{2}$$

16. 解：

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x(1+y^2)-2xy^2}{(1+y^2)^2}=\frac{x(1-y^2)}{(1+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{1-y^2}{(1+y^2)^2}$$

17. 解：

$$\iint_D \sqrt{1-\frac{x}{y}}d\sigma=\int_1^2 dy\int_0^y \sqrt{1-\frac{x}{y}}dx$$

$$=\int_1^2\left[-2\frac{2y}{3}(1-\frac{x}{y})^{\frac{3}{2}}\Big|_0^y\right]dy$$

$$=\int_1^2\frac{2y}{3}dy=\frac{y^2}{3}\Big|_1^2=1$$

18．解：此级数为正项级数，且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{|\sin n|+2}\le\frac{n}{2^n}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}}=\lim_{x\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}<1$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{|\sin n|+2}$ 收敛

19. 解：（1）由 $f''(x)-4f'(x)=0$ 得

$y''-4y'=0$，其特征方程 $r^2-4=0$ 的解为 $r=\pm 2$

$y''-4y'=0$ 的通解为 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$

由题意知 $y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=2$， $\therefore C_1+C_2=0, 2C_1-2C_2=2,$ 得 $\therefore C_1=\frac{1}{2}, C_2=-\frac{1}{2}$

故 $f(x)=\frac{1}{2}(e^{2x}+e^{-2x})$

⑵ 由题意得 $\because f'(x)=e^{2x}+e^{-2x}, f''(x)=2e^{2x}-2e^{-2x}$

令 $f''(x)=0$ 得 $x=0$

当 $x<0$ 时， $f''(x)<0$， 当 $x>0$ 时， $f''(x)>0$

所以曲线的凹区间为 $(0,+\infty)$，凸区间为 $(-\infty,0)$，点 $(0,0)$ 为曲线的拐点

20. 解：（1）$\because\ f'(x)=\cos x^2, \therefore\ f'(0)=1,$

（2）$f(-x)=\int_0^{-x}\cos t^2 dt$

令 $u=-t,$ 则

$$f(-x)=\int_0^{-x}\cos t^2 dt=-\int_0^{x}\cos u^2 du=-\int_0^{x}\cos t^2 dt=-f(x)$$

$\therefore\ f(x)$ 为奇函数

（3）设 $g(x)=f(x)-x+\dfrac{(1+\lambda)x^3}{3\lambda},$

则 $g'(x)=f'(x)-1+=\cos x^2-1+\dfrac{(1+\lambda)x^2}{\lambda},$

$\therefore\ g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 区间内单调递增，

所以，当 $x>0$ 时，$g'(x)>g'(0)=0$

由此知 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 区间内单调递增

故当 $x>0$ 时，$g(x)>g(0)=f(0)$

即当 $x>0$ 时，$f(x)-x+\dfrac{(1+\lambda)x^3}{3\lambda}>0$

所以，当 $x>0$ 时，$f(x)>x-\dfrac{(1+\lambda)x^3}{3\lambda}$

广东省 2019 年普通高等学校本科插班生招生考试

高等数学

一、单项选择题（本在题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分。每小题只有一个选项符合题目要求）

1．函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2+x-2}$ 的间断点是

A．$x=-2$ 和 $x=0$　　B．$x=-2$ 和 $x=1$

C．$x=-1$ 和 $x=2$　　D．$x=0$ 和 $x=1$

2．设函数 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0 \\ 2, & x=0 \\ \cos x, & x>0 \end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

A．等于1　　　　B．等于2

C．等于1 或2　　　　D．不存在

3．已知 $\int f(x)dx=\tan x+C, \int g(x)dx=2^x+C$　　C 为任意常数，则下列等式正确的是

A．$\int [f(x)+g(x)]dx=2^x\tan x+C$　　　　B．$\int \frac{f(x)}{g(x)}dx=2^{-x}+\tan x+C$

C．$\int f[g(x)]dx=\tan(2^x)+C$　　　　D．$\int [f(x)+g(x)]dx=\tan x+2^x+C$

4．下列级数收敛的是

A．$\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{n}}$　　　　B．$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{3}{2})^n$

C．$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{2}{3^n}-\frac{1}{n^3})$　　　　D．$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[(\frac{2}{3})^n+\frac{1}{n}\right]$.

5．已知函数 $f(x)=ax+\frac{b}{x}$ 在点 $x=-1$ 处取得极大值，则常数 a,b 应满足条件

A．$a-b=0, b<0$　　　　B．$a-b=0, b>0$

C．$a+b=0, b<0$　　　　D．$a+b=0, b>0$

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6．曲线 $\begin{cases} x=t^3+3t \\ y=\arctan t \end{cases}$，则 $t=0$ 的对应点处切线方程为 $y=$ ________________

7．微分方程 $ydx+xdy=0$ 满足初始条件的 $y|_{x=1}=2$ 特解为 $y=$________________

8．若二元函数 $z=f(x,y)$ 的全微分 $dz=e^x\sin ydx+e^x\cos ydy$, ,则

$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=$ __________________

9．设平面区域 $D=\{(x,y)\,|\,0\le y\le x, 0\le x\le 1\}$，则 $\iint\limits_D xdxdy=$ __________________

10．已知 $\int_1^t f(x)dx=t\sin\frac{\pi}{t}\ (t>1)$，则 $\int_1^{+\infty} f(x)dx=$___________________

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11．求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-1}{x^2}$

12．设 $y=\dfrac{x^x}{2x+1}(x>0)$，求 $\dfrac{dy}{dx}$

13．求不定积分 $\int\dfrac{2+x}{1+x^2}dx$

14．计算定积分 $\int_{-\frac{1}{2}}^{0}x\sqrt{2x+1}dx$

15．设 $x-z=e^{xyz}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

16．计算二重积分 $\iint\limits_D\ln(x^2+y^2)d\sigma$，其中平面区域 $D=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4\}$

17．已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 满足 $0\le a_n\le b_n$，且 $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{(n+1)^4}{3n^4+2n-1}$，判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的收敛性

18．设函数 $f(x)$ 满足 $\dfrac{df(x)}{de^{-x}}=x$，求曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间

四、综合题（大题共 2 小题，第 19 小题 12 分，第 20 小题 10 分，共 22 分）

19．已知函数 $\varphi(x)$ 满足 $\varphi(x)=1+x+\int_0^x t\varphi(t)dt+x\int_x^0\varphi(t)dt$

（1）求 $\varphi(x)$；

（2）求由曲线 $y=\varphi(x)$ 和 $x=0,x=\dfrac{\pi}{2}$ 及 $y=0$ 围成的平面图形绕 x 轴旋转而成的立体的体积

20．设函数 $f(x)=x\ln(1+x)-(1+x)\ln x$

（1）证明：$f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内单调减少；

（2）比较数值 2018^{2019} 与 2019^{2018} 的大小，并说明理由；

2019 年广东省普通高校本科插班生招生考试

《高等数学》参考答案及评分标准

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. B　2. A　3. D　4. C　5. B

二、填空题（本大题共 5 小题，每个空 3 分，共 15 分）

6. $\dfrac{1}{3}x$　7. $\dfrac{2}{x}$　8. $e^x\cos y$　9. $\dfrac{1}{3}$　10. π

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11. 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\cos x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\sin x}{2}=\dfrac{1}{2}$

12. 解：

$$\because y=\frac{x^x}{2x+1}$$
$$\therefore \ln y=x\ln x-\ln(2x+1)$$
$$\therefore \frac{1}{y}y'=\ln x+1-\frac{2}{2x+1}$$
$$\therefore \frac{dy}{dx}=(\ln x+1-\frac{2}{2x+1})\frac{x^x}{2x+1}$$

13. 解：

$$\int\frac{2+x}{1+x^2}dx$$
$$=2\int\frac{1}{1+x^2}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}d(1+x^2)$$
$$=2\arctan x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$$

14. 解：令$\sqrt{2x+1}=t$, 则$x=\dfrac{1}{2}t^2-\dfrac{1}{2}, dx=tdt$

$$\sqrt{2x+1}=t, x=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}, dx=tdt$$
$$\int_{-\frac{1}{2}}^{0}x\sqrt{2x+1}dx=\int_0^1 t(\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2})\bullet tdt$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1(t^4-t^2)dt$$
$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{3}t^3)\Big|_0^1$$
$$=-\frac{1}{15}$$

15. 解：设 $f(x,y,z)=x-z-e^{xyz}$

$\therefore f_x(x,y,z)=1-yze^{xyz}$

$f_y(x,y,z)=-xze^{xyz}$

$f_z(x,y,z)=-1-xye^{xyz}$

$\therefore \dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1-yze^{xyz}}{1+xye^{xyz}},\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{xze^{xyz}}{1+xye^{xyz}}$

16. 解：由题意得$1\le r\le 2,0\le\theta\le\pi$

$\therefore \iint\limits_D \ln(x^2+y^2)d\sigma=$

$=\int_0^{2\pi}(4\ln 2-\dfrac{3}{2})d\theta$

$=(4\ln 2-\dfrac{3}{2})\theta\,|_0^{2\pi}$

$=\pi(8\ln 2-3)$

17. 解：由题意得$\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{(n+1)^4}{3n^4+2n-1}$,

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(n+1)^4}{3n^4+2n-1}=\dfrac{1}{3}<1,$

由比值判别法可知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛

$\because 0\le a_n\le b_n$, 由比较判别法可知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛

18．解

$\because \dfrac{df(x)}{de^{-x}}=x$

$\therefore df(x)=xde^{-x}$

$\therefore f'(x)=-xe^{-x}$

$\therefore f''(x)=e^{-x}(x-1)$

$\therefore f(x)$的凹区间为$(1,+\infty)$，凸区间为$(-\infty,1)$

19.（1）由题意得$\varphi'(x)=1+x\varphi(x)+\int_x^0\varphi(t)dt-x\varphi(x)=1+\int_x^0\varphi(t)dt$

$\therefore \varphi''(x) = -\varphi(x)$
$\therefore \varphi''(x) + \varphi(x) = 0$

特征方程 $r^2 + 1 = 0$，解得 $r = \pm i$

通解为 $\varphi(x) = \cos x + \sin x + C$

$\because \varphi(0) = 1, \therefore C = 0$
$\therefore \varphi(x) = \cos x + \sin x$

(2) 由题意得

$$V_x = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + \sin x)^2 dx$$
$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin 2x) dx$$
$$= \pi(x - \frac{1}{2}\cos 2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{2} + \pi$$

20. 证明（1）

$\because\ f(x) = x\ln(1+x) - (1+x)\ln x$
$\therefore\ f'(x) = \ln(1+x) - \ln x + \dfrac{x}{1+x} - \dfrac{1+x}{x}$
$= \ln(1+x) - \ln x - (\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{x})$

证明 $\ln(1+x) - \ln x - (\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{x}) < 0$ 即可

即证 $\ln(1+x) - \ln x < (\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{x})$

令 $g(x) = \ln x$

$\because g(x) = \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 连续可导，由拉格朗日中值定理得

$\ln(1+x) - \ln x = \dfrac{\ln(1+x) - \ln x}{1+x-x} = g'(x) = \dfrac{1}{\xi}$　　且 $x < \xi < 1+x$

$\because x < \xi < 1+x \quad \therefore 0 < \dfrac{1}{1+x} < \dfrac{1}{\xi} < \dfrac{1}{x}$

$\therefore \ln(1+x)-\ln x<(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{x})$成立

$\therefore \ln(1+x)-\ln x-(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{x})<0$

$\therefore f(x)$在$(0,+\infty)$单调递减

（2）设$a=2019,b=2018$则$a^b=2019^{2018},b^a=2018^{2019}$

比较b^a,a^b即可，假设$b^a>a^b$

即$a\ln b>b\ln a$

即$\frac{\ln b}{b}>\frac{\ln a}{a}$

设$g(x)=\frac{\ln x}{x}$，则$g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$

$\because g(x)$在$(0,+\infty)$单调递减即$\therefore g(b)>g(a)$，即$b^a>a^b$成立

即$2018^{2019}>2019^{2018}$

2020年专插本高等数学真题

广东省2020年普通高等学校本科插班生招生考试
高等数学

本试卷共2页，20小题，满分100分。考试时间120分钟。

一、选择题（3分×5=15分）：

1、设$\lim\limits_{x\to0}[\cos x-f(x)]=1$**，则下列等式正确的是（　　）**

A. $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$	**B.** $\lim\limits_{x\to0}f(x)\cos x=1$
C. $\lim\limits_{x\to0}f(x)=-1$	**D.** $\lim\limits_{x\to0}[f(x)+\cos x]=1$

2、函数$f(x)=2x^3-3x^2$**的极小值点为（　　）**

A. $x=-1$	**B.** $x=0$
C. $x=1$	**D.** $x=2$

3、已知3^x**是函数**$f(x)$**的一个原函数，则**$f(x)=$**（　　）**

A. 3^x	**B.** $3^x\ln3$
C. $x3^x$	**D.** $\frac{3^x}{\ln3}$

4、设平面区域$D=\{(x,y)\|x^2+y^2\leqslant1,y\geqslant0\}$**，则**$\iint\limits_D(x^2+y^2)^4\mathrm{d}\sigma$**（　　）**

A. $\frac{\pi}{10}$	**B.** $\frac{\pi}{9}$
C. $\frac{\pi}{5}$	**D.** $\frac{2\pi}{9}$

5、设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$**满足**$0\leqslant a_n\leqslant\frac{1}{5^n}$**，则下列级数发散的是（　　）**

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3a_n$	**B.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{n+3}$
C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}})$	**D.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-\frac{1}{\sqrt{n^3}})$

二、填空题（3分×5=15分）：

6、若函数$f(x)=\begin{cases}(1+a)x^2, & x\leqslant 1\\ a(x-2)^3+3, & x>1\end{cases}$在$x=1$处连续，则常数$a=$__________。

7、曲线$\frac{x^2}{2}+y^2=3$在点$(2,-1)$处的切线方程为$y=$__________。

8、微分方程$y''+3y'-4y=0$的通解为$y=$__________。

9、设二元函数$f(x,y)$在点$(0,0)$的某个邻域内有定义，且当$x\neq 0$时，$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=3x+2$，则$f'_x(0,0)=$__________。

10、设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导，且满足$f(x)=f'(x)$，$f(0)=m$，如果$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{e^x}\mathrm{d}x=8$，则$m=$__________。

三、计算题（6分×8=48分）：

11、求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x t\arctan t\mathrm{d}t}{x^3}$。

12、已知y是x的函数，且$y'=\ln\sqrt{x}+\sqrt{\ln x}+2\ln 2$，求$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}|_{x=e}$。

13、求不定积分$\int(\cos 2x-x\sin x^2)\mathrm{d}x$。

14、设函数$f(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{1+x^2}, & x\leqslant 1\\ x, & x>1\end{cases}$，求定积分$\int_{-3}^{0}f(x+2)\mathrm{d}x$。

15、求二元函数$z=3xy^2+\frac{x^2}{y}$的全微分$\mathrm{d}z$，并求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

16、计算$\iint\limits_D y\mathrm{d}\sigma$，其中$D$是由直线$y=x$，$y=x-2$与$y=0$，$y=2$围成的有界闭区域。

17、求微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\sec^2 x}{y^2}$满足初始条件$y|_{x=0}=1$的特解。

18、判定级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{2^n n!}$的收敛性。

四、综合题（19题10分，20题12分，共22分）：

19、设有界平面图形G由曲线$y=e^{ax}$和直线$y=e$，$x=0$围成，其中常数$a>0$。若G的面积等于1。

（1）求a的值；

（2）求G绕y轴旋转一周而成的旋转体的体积V。

20、设函数$f(x)=\frac{a}{1+e^{bx}}$，其中a,b为常数，且$ab\neq 0$。

（1）判别$f(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$内的单调性；

（2）求曲线$y=f(x)$的拐点；

（3）求曲线$y=f(x)$的水平渐近线方程。

2020年专插本高等数学真题答案

一、选择题（3分×5=15分）：

1	2	3	4	5
D	C	B	A	C

1、解析：$\lim\limits_{x\to 0}[\cos x-f(x)]=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\cos x-\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$**，又因为**$\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$**，所以**$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$**，因此**

- A、C错误
- $\lim\limits_{x\to 0}f(x)\cos x=0$，B错误
- $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)+\cos x]=0+1$，D正确

知识点：函数极限

2、解析：$f^{'}(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$**，令**$f^{'}(x)=0$**，得**$x=0,x=1$**；**

当$x<0$时，$f^{'}(x)>0$；当$0<x<1$时，$f^{'}(x)<0$；当$x>1$时，$f^{'}(x)>0$。

因此，当$x=1$时，$f(x)$取得极小值。C正确。

知识点：导数的应用：函数的极值

3、解析：已知3^x**是函数**$f(x)$**的一个原函数，即**$f(x)=(3^x)^{'}=3^x\ln 3$**，B正确。**

知识点：原函数的概念

4、解析：$\iint\limits_D(x^2+y^2)^4\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(r^2)^4r\mathrm{d}r=\pi\int_0^1r^9\mathrm{d}r=\frac{\pi}{10}$**，A正确**

知识点：极坐标系计算二重积分

5、解析：设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$**满足**$0\leqslant a_n\leqslant\frac{1}{5^n}$**，又**$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}$**收敛，根据比较判别法知，级数**$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$**收敛，因此**

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3a_n$收敛（乘以常数）
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{n+3}$收敛（去掉前2项）
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$发散（$p=\frac{2}{3}<1$），$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}})$发散（相加发散）
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$收敛（$p=\frac{3}{2}>1$），$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-\frac{1}{\sqrt{n^3}})$收敛（相减收敛）

知识点：级数的性质、比较判别法

二、填空题（3分×5=15分）：

6	7	8	9	10
1	$x-3$	$C_1e^x+C_2e^{-4x}$	2	4

6、解析： $\begin{aligned}\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}(1+a)x^2=1+a=f(1)\\ \lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}a(x-2)^3+3=3-a\end{aligned}$ **，因此**$1+a=3-a\Rightarrow a=1$**。**

知识点：函数连续性

7、解析：方程$\frac{x^2}{2}+y^2=3$**两边同时对**x**求导得**$x+2yy^{'}=0$**，将**$x=2,y=-1$**代入得**
$2-2y^{'}=0\Rightarrow y^{'}=1$，

因此切线方程为：$y+1=x-2\Rightarrow y=x-3$。

知识点：隐函数方程求导、切线方程

8、解析：特征方程为$r^2+3r-4=0\Rightarrow(r-1)(r+4)=0\Rightarrow r_1=1,r_2=-4$，

因此微分方程的通解为：$y=C_1e^x+C_2e^{-4x}$。

知识点：二阶常系数线性齐次微分方程的通解公式

9、解析： $f_x^{'}(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}(3x+2)=2$。

知识点：偏导数的定义

10、解析：由$f(x)=f^{'}(x)$**，易知**$f(x)=Ce^x$**；又**$f(0)=m$**，即**$f(0)=C=m$**；因此**$f(x)=me^x$**。**

因此$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{e^x}\mathrm{d}x=8\Rightarrow\int_{-1}^{1}\frac{me^x}{e^x}\mathrm{d}x=8\Rightarrow\int_{-1}^{1}m\mathrm{d}x=8\Rightarrow2m=8\Rightarrow m=4$。

知识点：一阶线性微分方程

三、计算题（6分×8=48分）：

11、解析：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x t\arctan t\mathrm{d}t}{x^3}&=\lim_{x\to0}\frac{x\arctan x}{3x^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\arctan x}{3x}\\&=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

知识点：变上限积分求导、洛必达法则求极限

12、解析： $y^{'}=\ln\sqrt{x}+\sqrt{\ln x}+2\ln 2=\frac{1}{2}\ln x+\sqrt{\ln x}+2\ln 2$，

$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=y^{''}=\frac{1}{2x}+\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$

$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}|_{x=e}=\frac{1}{2e}+\frac{1}{2e\sqrt{\ln e}}=\frac{1}{e}$

知识点：复合函数求导

13、解析：

$$\begin{aligned}\int(\cos 2x-x\sin x^2)\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int\cos 2x\mathrm{d}2x-\frac{1}{2}\int\sin x^2\mathrm{d}x^2\\&=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos x^2+C\end{aligned}$$

知识点：不定积分计算：凑微分法

14、解析：

令$t=x+2,\quad x=t-2,\quad \mathrm{d}x=\mathrm{d}t$；当$x=-3$时，$t=-1$；当$x=0$时，$t=2$则

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{0}f(x+2)\mathrm{d}x&=\int_{-1}^{2}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}f(t)\mathrm{d}t+\int_{1}^{2}f(t)\mathrm{d}t\\&=\int_{-1}^{1}\frac{t^3}{1+t^2}\mathrm{d}t+\int_{1}^{2}t\mathrm{d}t=\int_{1}^{2}t\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}t^2\ |_1^2=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

$\frac{x^3}{1+x^2}$是奇函数，所以$\int_{-1}^{1}\frac{t^3}{1+t^2}\mathrm{d}t=0$

知识点：定积分计算：换元法、分段函数、奇偶函数的积分性质

15、解析： $z=3xy^2+\frac{x^2}{y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3y^2+\frac{2x}{y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=6xy-\frac{x^2}{y^2}$$

$\mathrm{d}z=(3y^2+\frac{2x}{y})\mathrm{d}x+(6xy-\frac{x^2}{y^2})\mathrm{d}y$

$\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}=6y-\frac{2x}{y^2}$

知识点：偏导数、全微分

16、解析：积分次序选择：里面先对x积分，外面再对y积分：

$\iint\limits_D y\mathrm{d}\sigma=\int_0^2 y\mathrm{d}y\int_y^{y+2}\mathrm{d}x=\int_0^2 2y\mathrm{d}y=y^2\ |_0^2=4$

知识点：二重积分

17、解析：

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\sec^2 x}{y^2}\Rightarrow y^2\mathrm{d}y=\sec^2 x\mathrm{d}x\Rightarrow\int y^2\mathrm{d}y=\int\sec^2 x\mathrm{d}x\Rightarrow\frac{1}{3}y^3=\tan x+C$

将$x=0,y=1$代入得$\frac{1}{3}=0+C$，即$C=\frac{1}{3}$

因此特解为$y^3=3\tan x+1$

知识点：可分离变量的微分方程的通解

18、判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{2^n n!}$ 的收敛性。

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}\cdot\frac{2^n n!}{n^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{(n+1)^n}{n^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot(1+\frac{1}{n})^n=\frac{e}{2}>1$

因此，根据比值判别法知，原级数发散。

知识点：比值判别法

四、综合题（19题10分，20题12分，共22分）：

19、解析：

（1）由$\begin{matrix}y=e^{ax}\\y=e\end{matrix}$得$e^{ax}=e\Rightarrow ax=1\Rightarrow x=\frac{1}{a}$，即曲线与直线相交于点$(\frac{1}{a},e)$，因此$G$的面积为

$$\begin{aligned}S_G&=\int_0^{\frac{1}{a}}(e-e^{ax})\mathrm{d}x\\&=(ex-\frac{1}{a}e^{ax})\mid_0^{\frac{1}{a}}\\&=(\frac{e}{a}-\frac{e}{a})-(0-\frac{1}{a})=\frac{1}{a}=1\end{aligned}$$

因此：$a=1$

（2）旋转体体积为：

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_1^e(\ln y)^2\mathrm{d}y\\&=\pi y(\ln y)^2\mid_1^e-\pi\int_1^e y\mathrm{d}(\ln y)^2\\&=(\pi e-0)-2\pi\int_1^e\ln y\mathrm{d}y\\&=\pi e-2\pi(y\ln y-y)\mid_1^e\\&=\pi e-2\pi[(e-e)-(0-1)]\\&=\pi e-2\pi=\pi(e-2)\end{aligned}$$

知识点：定积分的应用：平面图形的面积、旋转体的体积

20、解析：

（1）$f^{'}(x)=\frac{-abe^{bx}}{(1+e^{bx})^2}$，其中$\frac{e^{bx}}{(1+e^{bx})^2}>0$恒成立，因此：

当$ab>0$时，$f^{'}(x)<0$，$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递减；

当$ab<0$时，$f^{'}(x)>0$，$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增。

（2）$f^{''}(x)=\frac{-ab^2e^{bx}(1+e^{bx})^2+abe^{bx}2(1+e^{bx})b}{(1+e^{bx})^4}=\frac{-ab^2e^{bx}(1+e^{bx})+2ab^2e^{bx}}{(1+e^{bx})^3}=\frac{ab^2e^{bx}(e^{bx}-1)}{(1+e^{bx})^3}$

令$f^{''}(x)=0$，得$e^{bx}-1=0\Rightarrow x=0$，在$x=0$的左右两侧，$f^{''}(x)$的符号发生变化，

因此，点$(0,\frac{a}{2})$为曲线的拐点。

（3）分类讨论：

当$b>0$时：$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{a}{1+e^{bx}}=0\\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{a}{1+e^{bx}}=a\end{aligned}$

当$b<0$时：$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{a}{1+e^{bx}}=a\\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{a}{1+e^{bx}}=0\end{aligned}$

因此，曲线有两条水平渐近线：$y=0$和$y=a$。

知识点：导数的应用：函数单调性、拐点、水平渐近线

机密★启用前

广东省2021年普通高等学校专升本招生考试

高等数学

本试卷共 4 页，20 小题，满分 100 分。考试时间 120 分钟。

注意事项：

1．考生必须在答题卡上作答，否则答案无效。

2．答卷前，考生务必按答题卡要求填写考生信息栏、粘贴条形码。

3．选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应试题答案的信息点涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。

4．非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔在答题卡各题目指定区域内作答；如需改动，先划掉需改动部分，再重新书写；不得使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。

5．考生必须保持答题卡的整洁，考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分，每小题只有一项符合题目要求）

得分	阅卷人

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 6x}{2x}=$（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

2. 点 $x=3$ 是 $f(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x-3}$ 的（　　）

A. 连续点　　B. 可去间断点　　C. 无穷间断点　　D. 跳跃间断点

3. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，C 为任意函数，则下列正确的是（　　）

A. $\int F(x)dx=f(x)$　　B. $F'(x)=f(x)+C$

C. $f'(x)=F(x)+C$　　D. $\int f(x)dx=F(x)+C$

4. 设常数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则下列收敛的是（　　）

A. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n+\frac{1}{n}\right)$　　B. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n+\frac{1}{2}\right)$

C. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n+\frac{1}{3^n}\right)$　　D. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

5. 设 $f(x)=\int_0^{x^2}\sin t^2dt$， $g(x)=3x^6+4x^5$，当 $x\to 0$ 时（　　）

A. $f(x)$ 比 $g(x)$ 低阶无穷小　　B. $f(x)$ 比 $g(x)$ 高阶无穷小

C. $f(x)$ 与 $g(x)$ 等价无穷小　　D. $f(x)$ 与 $g(x)$ 同阶非等价无穷小

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

得分	阅卷人

6. $\begin{cases}x=2t^3+3\\y=t^2-4\end{cases}$ 在 $t=1$ 相应的点处切线斜率为_______.

7. 求 $z=x^2y$ 的全微分 $dz=$_______.

8. 已知 $\frac{dx}{dy}=y+2$，求在初始条件 $y|_{x=0}=-1$ 下的特解为 $y=$_______.

9. 设平面区域 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,0\le y\le 3-x\}$，则 $\iint\limits_D d\sigma$ 的值为_______.

10. 设连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^{2x+1}f(t)dt=-2x^3+1$，则 $f(3)=$_______.

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

得分	阅卷人

11. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+3}-x)$.

12. 设 $y=2^{x}+x^{x}(x>0)$，求 $\frac{dy}{dx}$.

13. 求不定积分 $\int(x+5)\cos 3xdx$.

14. 求定积分 $\int_{-2}^{2}\frac{x^{2021}+|x|}{x^{2}+1}dx$.

15. 已知 $z=z(x,y)$ 是由方程 $e^{zy}-xz=1$ 所确定的隐函数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}$.

16. 已知区域 D 是由曲线 $x^{2}+y^{2}\leq 4$ 与坐标轴在第一象限所围成的平面区域，求二重积分 $\iint\limits_{D}e^{x^{2}+y^{2}}d\sigma$.

17. 判断 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}$ 的收敛性。

18. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 2 \\ 6-x, & x>2 \end{cases}$，已知 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.求 $F(x)$ 表达式，并讨论 $F(x)$ 在 $x=2$ 处的连续性。

四、综合题（本大题共 2 小题，第 19 小题 10 分，第 20 小题 12 分，共 22 分）

得分	阅卷人

19. 做一个容积为 64π 立方米的圆柱形无盖容器，底面与侧面材质相同且厚度不计。

问：底面半径为何值时，才能使所用材料最省？

20. 过坐标原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线 L，该切线与直线 $x=1$ 及 $y=\ln x$ 围成平面图形 D.

（1）求切线 L 的方程；

（2）求平面图形 D 的面积 A。

广东省2021年普通高等学校专升本招生考试

高等数学参考答案

一、单项选择题

1. 【答案】C

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 6x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x}{2x}=3$.

2. 【答案】B

【解析】$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+2)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(x+2)=5$ ，极限存在，故为可去间断点。

3. 【答案】D

【解析】由不定积分与原函数的关系得 D 选项正确。

4. 【答案】C

【解析】A 选项调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散；B 选项显然发散；D 选项 $p=\dfrac{1}{2}$的 p 级数发散。

5. 【答案】B

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin t^2 dt}{3x^6+4x^5}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x^4}{18x^5+20x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{9x+10}=0$.

二、填空题

6. 【答案】$\dfrac{1}{3}$

【解析】$\dfrac{dy}{dt}=2t$， $\dfrac{dx}{dt}=6t^2$， $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{3t}$，当 $t=1$ 时， $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{3}$，故切线的

斜率为$\frac{1}{3}$.

7. 【答案】$2xydx+x^2dy$

【解析】$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=2xydx+x^2dy$.

8. 【答案】e^x-2

【解析】$\frac{dy}{dx}=y+2\Rightarrow\frac{1}{y+2}dy=dx$，等式两边同时积分得

$\int\frac{1}{y+2}dy=\int dx\Rightarrow\ln(y+2)=x+C$，代入初始条件解得$C=0$，

故$\ln(y+2)=x\Rightarrow y=e^x-2$.

9. 【答案】$\frac{5}{2}$

【解析】积分区域为梯形区域，此二重积分的意义即为求梯形面积，

故$\iint\limits_D d\sigma=\frac{(2+3)\times 1}{2}=\frac{5}{2}$.

10. 【答案】-3

【解析】等式两边同时对x求导得$2f(2x+1)=-6x^2\Rightarrow f(2x+1)=-3x^2$，

令$x=1$可得，$f(3)=-3$.

三、计算题

11. 【解析】

$$\lim_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+3}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(\sqrt{x^2+3}+x)(\sqrt{x^2+3}-x)}{\sqrt{x^2+3}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+3}+x}=\frac{3}{2}.$$

12. 【解析】$y=2^x+x^x=2^x+e^{x\ln x}$，

故$\dfrac{dy}{dx}=(2^x)'+(e^{x\ln x})'=2^x\ln 2+e^{x\ln x}\cdot(\ln x+1)=2^x\ln 2+x^x(\ln x+1)$.

13. 【解析】

$$\int(2x+5)\cos 3xdx=\int 2x\cos 3xdx+\int 5\cos 3xdx=\frac{1}{3}\int 2xd\sin 3x+\frac{5}{3}\sin 3x$$

$$=\frac{1}{3}(2x\sin 3x-2\int\sin 3xdx)+\frac{5}{3}\sin 3x=\frac{1}{3}(2x\sin 3x+\frac{2}{3}\cos 3x)+\frac{5}{3}\sin 3x+C$$

$$=\frac{2}{3}x\sin 3x+\frac{2}{9}\cos 3x+\frac{5}{3}\sin 3x+C.$$

14. 【解析】

$$\int_{-2}^{2}\frac{x^{2021}+|x|}{x^2+1}dx=\int_{-2}^{2}\frac{x^{2021}}{x^2+1}dx+\int_{-2}^{2}\frac{|x|}{x^2+1}dx=0+2\int_{0}^{2}\frac{x}{x^2+1}dx$$

$$=\int_0^2\frac{1}{x^2+1}d(x^2+1)=\ln(x^2+1)\Big|_0^2=\ln 5-\ln 1=\ln 5 .$$

15. 【解析】令$F(x,y,z)=e^{zy}-xz-1$，则$F'_x=-z$，$F'_y=ze^{zy}$，$F'_z=ye^{zy}-x$，

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F'_x}{F'_z}=\dfrac{z}{ye^{zy}-x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F'_y}{F'_z}=\dfrac{-ze^{zy}}{ye^{zy}-x}$，故$\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z-ze^{zy}}{ye^{zy}-x}$.

16. 【解析】将直角坐标系下的二重积分转化为极坐标系下的二重积分可得$0\le r\le 2$，

$0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$，

故$\displaystyle\iint_D e^{x^2+y^2}d\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^2 e^{r^2}\cdot rdr=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^2 e^{r^2}dr^2=\frac{\pi}{4}e^{r^2}\Bigg|_0^2=\frac{\pi}{4}(e^4-1)$.

17. 【解析】令$u_n=(\dfrac{n}{2n+1})^n$，此级数为正项级数，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{n+1}{2n+3}\right)\cdot\left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^{n}}{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n+1}{2n+3}\right)\left(\frac{n+1}{2n+3}\cdot\frac{2n+1}{n}\right)^{n}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(\frac{2n^2+3n+1}{2n^2+3n})^n=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2n^2+3n})^n=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[(1+\frac{1}{2n^2+3n})^{2n^2+3n}\right]^{\frac{1}{2n^2+3n}n}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{2n^2+3n}n}=\frac{1}{2}e^0=\frac{1}{2}<1，$$

由比值审敛法知原级数收敛。

18. **【解析】**当 $x\le 2$ 时，$F(x)=\int_0^x t^2dt=\frac{1}{3}x^3$，

当 $x>2$ 时，$F(x)=\int_0^2 t^2dt+\int_2^x(6-t)dt=\frac{8}{3}+(6t-\frac{1}{2}t^2)\Big|_2^x=6x-\frac{1}{2}x^2-\frac{22}{3}$

故 $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3,x\le 2\\ 6x-\frac{1}{2}x^2-\frac{22}{3},x>2\end{cases}$，

由于 $F(2)=\lim\limits_{x\to 2^-}F(x)=\frac{8}{3}$，$\lim\limits_{x\to 2^+}F(x)=\frac{8}{3}$，故函数在 $x=2$ 处函数值等于极限值，即 $F(x)$ 在 $x=2$ 处是连续的。

四、综合题

19. **【解析】**设底面半径为 r，容器高为 h，容器的表面积为 S，

由圆柱体体积公式得 $V=\pi r^2h=64\pi\Rightarrow h=\frac{64}{r^2}$，

而 $S=\pi r^2+2\pi rh=\pi r^2+\dfrac{128}{r}\pi$，$S'(r)=2\pi r-\dfrac{128}{r^2}\pi=\dfrac{2\pi r^3-128\pi}{r^2}$，

令 $S'(r)=0\Rightarrow r=4$，此为唯一驻点，故当半径为 4 米时，表面积 S 有最小值，此时用料最省。

20. **【解析】**（1）设切点坐标为 $(x_0,\ln x_0)$，切线的斜率为 $y'\big|_{x=x_0}=\dfrac{1}{x_0}$，

故切线方程为 $y-\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}(x-x_0)$，

已知切线 L 经过坐标原点（0,0），代入曲线可得 $x_0=e$，故切线方程为 $y=\dfrac{1}{e}x$.

（2）

$$A=\int_1^e\left(\frac{1}{e}x-\ln x\right)dx=\frac{1}{e}\int_1^e xdx-\int_1^e \ln xdx=\frac{1}{2e}x^2\Big|_1^e-(x\ln x-x)\Big|_1^e=\frac{e}{2}-\frac{1}{2e}-1.$$

机密★启用前

广东省2022年普通高等学校专升本招生考试

高等数学

本试卷共 4 页，20 小题，满分 100 分。考试时间 120 分钟。

注意事项：

1．考生必须在答题卡上作答，否则答案无效。

2．答卷前，考生务必按答题卡要求填写考生信息栏、粘贴条形码。

3．选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应试题答案的信息点涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。

4．非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔在答题卡各题目指定区域内作答；如需改动，先划掉需改动部分，再重新书写；不得使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。

5．考生必须保持答题卡的整洁，考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

得分	阅卷人

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分，每小题只有一项符合题目要求）

1. 若函数 $f(x)=\begin{cases} x+1, x\neq 1 \\ a, x=1 \end{cases}$， 在$x=1$处连续，则常数 $a=$（　　）

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

2. $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}=$（　　）

A. e^{-3}　　B. $e^{-\frac{1}{3}}$　　C. 1　　D. e^{3}

3. $\lim\limits_{x\to 0}u_n=0$是级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的（　　）

A. 充分条件　　B. 必要条件　　1

C. 充要条件　　D. 即非充也非公必要条件

4. 已知$\frac{1}{x^2}$是函数$f(x)$的一个原函数，则$\int_1^{+\infty} f(x)dx =$（　　）

A. 2　　　　B. 1　　　　C. -1　　　　D. -2

5. 将二次积分$I=\int_0^1 dx\int_x^1 f(x^2+y^2)dy$化为极坐标形成的二次积分，则 $I=$（　　）

A. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta\int_0^{\sec\theta} f(p^2)dp$　　　　B. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta\int_0^{\csc\theta} pf(p^2)dp$

B. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\sec\theta} f(p^2)dp$　　　　D. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\csc\theta} pf(p^2)dp$

得分	阅卷人

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6. 若$x\to 0$时，无穷小量$2x$与$3x^2+mx$等价，则常数$m=$______

7. 设$\begin{cases} x=5t-t^2 \\ y=\log_2 t \end{cases}$,则$\frac{dy}{dx}\Big|_{t=2}=$______

8. 椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$所围成的图形绕$x$轴旋转一周而成的旋转体体积为______

9. 微分方程$e^{-x}y'=2$的通解是______

10. 函数$Z=x^{\ln y}$在点(e,e)处的全微分$dz\Big|_{(e,e)}=$ ______

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

得分	阅卷人

11、求极限$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+3x^2-9x+5}{x^3-3x+2}$

12. 设$y=arc\tan x^2$,求$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=1}$

13. 设函数$\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$，利用导数定义$f'(0)$.

14. 求不定积分$\int\frac{2x^2+3x}{\sqrt[x]{1-x^2}}dx$.

15. 已知$\int\tan xdx=-\ln\left|\cos x\right|+C$，求定积分$\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\sec^2 xdx\cdot$

16. 设$Z=f(x,y)$是由方程$Z=2x-y^2e^z$所确定的隐函数，计算$\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}$.

17. 计算二重积分$\iint\limits_D\cos xd\sigma$,其中$D$是曲线$y=\sin x(0\leq x\leq\frac{\pi}{2})$和曲线$y=0$,

$x=\dfrac{\pi}{2}$围成的有界闭区域。

18. 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{3^n}-\frac{3}{2^n})$的敛散性。

四、综合题（本大题共 2 小题，第 19 小题 10 分，第 20 小题 12 分，共 22 分）

得分	阅卷人

19. 设函数 $f(x)=2x\ln x-x-\dfrac{1}{x}+2$

（1）求曲线$y=f(x)$的拐点；

（2）讨论曲线 $y=f(x)$ 上是否存在经过坐标原点的切线。

20. 设函数$f(x)$连续

（1）证明$\int_0^{x} f(x-t)\,dt=\int_0^{x} f(t)\,dt$;

（2）若$f(x)$满足$f(x)=3x+1+\int_0^{x} tf(t)\,dt-x\int_0^{x} f(x-t)\,dt$，求$f(x)$.

广东省2022年普通高等学校专升本招生考试

高等数学参考答案

一、单项选择题

1. 【答案】D

【解析】$f(1)=a,\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}(x+1)=2,$ 若函数 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(x_0)$，

则 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=2=f(1)=a,$ 所以 $a=2.$

2. 【答案】A

【解析】$\lim\limits_{x\to0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left[(1+(-3x))^{\frac{1}{-3x}}\right]^{-3}=\left[\lim\limits_{x\to0}(1+(-3x))^{\frac{1}{-3x}}\right]^{-3}=e^{-3}$

3. 【答案】B

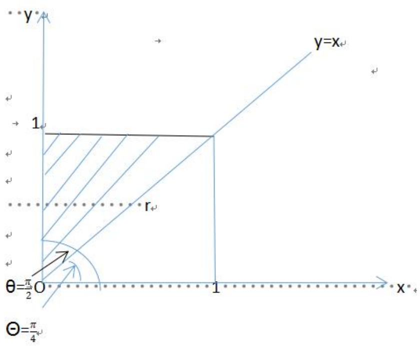
【解析】级数收敛，一般项趋于零；一般项趋于零，级数不一定收敛；一般项趋于零是级数收敛的必要条件，非充分条件。

4. 【答案】C

【解析】$\int_1^{+\infty}f(x)dx=\left.\frac{1}{x^2}\right|_1^{+\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1}=-1$

5. 【答案】D

【解析】作出积分区域



由图可知，$\sin\theta_1=\frac{1}{r}$， $r=\frac{1}{\sin\theta_1}=\csc\theta_1$。

已知θ的积分区域为$[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$，$y$的积分区域为$[0,\frac{1}{\sin\theta}]$，即$[0,\csc\theta]$，故

$$I=\int_0^1 dx\int_x^1 f(x^2+y^2)dy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\cos\theta} f((r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2)rdr$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\csc\theta} rf(r^2)dr$$

二、填空题

6.　**【答案】**2

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2+Mx}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{2}x+\frac{M}{2}=\frac{M}{2}$, 又$\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$为等价无穷，所以$M=2.$

7.　**【答案】**$\frac{1}{2\ln 2}$

【解析】$\frac{dx}{dt}=5-2t,\frac{dy}{dt}=\frac{1}{t\ln 2}$,所以$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{t\ln 2}}{5-2t},\frac{dy}{dx}=\Big|_{t=2}$

$$=\frac{\frac{1}{t\ln 2}}{5-4}=\frac{1}{2\ln 2}=\frac{1}{\ln 4}.$$

8.　**【答案】**8π

【解析】$V=2\cdot 2\pi\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{3(1-\frac{x^2}{4})}} ydy=4\pi\int_0^2\frac{1}{2}y^2\Big|_0^{\sqrt{3(1-\frac{x^2}{4})}}dx=$

$$2\pi\int_0^2 3(1-\frac{x^2}{4})dx=2\pi\int_0^2(3-\frac{3}{4}x^2)dx=2\pi(3x-\frac{x^3}{4})\Big|_0^2=2\pi(6-2)=8\pi$$

9.　**【答案】**$y=2e^x+C$

【解析】$e^{-x}y'=e^{-x}\dfrac{dy}{dx}=2$,化简得$\dfrac{dy}{dx}=2e^{x}$,对等式两边积分得$\int\dfrac{dy}{dx}=\int 2e^{x}$,

得$y=2e^{x}+C$,即方式通解为$y=2e^{x}+C$

10. 【答案】$dx+dy$

【解析】$dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy$

法一:$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\ln y\cdot x^{\ln y-1},\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^{\ln y}\ln x$,故$dz=(\ln y\cdot x^{\ln y-1})dx+(x^{\ln y}\ln x\dfrac{1}{y})dy,\ln e=1$

$dz\Big|_{(e,e)}=(\ln e\cdot e^{\ln e-1})dx+(e^{\ln e}\ln e\dfrac{1}{e})dy=dx+dy.$

法二:$Z=x^{\ln y}=e^{\ln y\ln x}$

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^{\ln y\ln x}\cdot\ln y\cdot\dfrac{1}{x},\dfrac{\partial z}{\partial y}=e^{\ln y\ln x}\cdot\ln x\cdot\dfrac{1}{y},dz\Big|_{(e,e)}=(e^{\ln y\ln x}\cdot\ln y\cdot\dfrac{1}{x})dx+$

$(e^{\ln y\ln x}\cdot\ln x\cdot\dfrac{1}{y})dy=dx+dy.$

三、计算题

11. 【答案】原式$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2+6x-9}{3x^2-3}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3(x+3)+(x-1)}{3(x+1)+(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+3}{x+1}=2$

由题$y'=\dfrac{1}{1+x^4}\bullet 2x=\dfrac{2x}{1+x^4}$

12. 【答案】$y''=\dfrac{2(1+x^4)}{(1+x^4)^2}=\dfrac{2-6x^4}{(1+x^4)^2}$

$\therefore\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=1}=y''\Big|_{x=1}=-1$

13. 【答案】根据导数定义得

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x+0)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2\cdot\sin\frac{1}{x}+2x}{x}=\lim_{x\to0}(x^2\cdot\sin\frac{1}{x}+2)=2$$

14. 【答案】原式=

$$\int\frac{2x+3}{\sqrt{1-x^2}}dx=-2\int\frac{d(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}}+3\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=-2\sqrt{1-x^2}+3\arcsin x+C$$

15. 【答案】$\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\sec^2 xdx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}xd\tan x$$

$$=x\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan xdx$$

$$=\frac{\pi}{4}+\ln|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\pi}{4}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$$

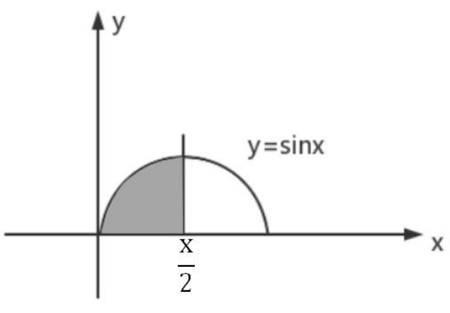
16. 【答案】对方程$F(x,y,z)=2x-y^2e^z-z=0$, 有$F'_x=2, F'_y=-2ye^z$,

$F'_z=-y^2e^z-1$, 所以$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{2}{-y^2e^z-1}=\frac{2}{y^2e^z+1}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{-2ye^z}{-y^2e^z-1}=-\frac{2ye^z}{y^2e^z+1}$$

故$\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{y^2e^z+1}-y\cdot(-\frac{2ye^z}{y^2e^z+1})=\frac{2}{y^2e^z+1}+\frac{2y^2e^z}{y^2e^z+1}=2$

17. 【答案】由题可知，区域 D 为下图



所以 $\iint\limits_D \cos x d6 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\sin x} \cos x dy$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx y \cos x \Big|_0^{\sin x} dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx$

$= \frac{\sin^2 x}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{1}{2}$

18. **【答案】**由题意知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ 为正项级数

令 $a_n = \frac{n}{3^n}$， $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n} = \frac{1}{3} < 1$

根据正项级数比值审敛法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ 是收敛的。

而 $\sum\limits_{n<1}^{\infty} \frac{3}{2^n}$ 为等比级数，公比 $q = \frac{1}{2} < 1$，也收敛。

故由级数的线性性质可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{n}{3^n} - \frac{3}{2^n})$ 是收敛的。

四、综合题

19. **【答案】**（1）由 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$

$f'(x) = 2\ln x + 2 - 1 + \frac{1}{x^2} = 2\ln x + \frac{1}{x^2} + 1$

$f''(x) = \frac{2}{x} - \frac{2}{x^3} = \frac{2(x^2-1)}{x^3}$

令 $f''(x)=0$，即 $x^2-1=0$　　$x_1=1,x_2=-1$（舍掉）

代入原式 $f(x)=0$，故曲线 $y=f(x)$ 拐点为 $(1,0)$

（2）由于 $f(x)$ 定义域为 $(0,+\infty)$，设 $y=kx$ 是曲线 $y=f(x)$ 的切线，切点为 (x_0,y_0)

根据题意，可列出方程组 $\begin{cases} 2x_0\ln x_0-x_0-\dfrac{1}{x_0}+2=kx_0 \\ 2\ln x_0+1+\dfrac{1}{x_0}=k \end{cases}$

消去 k，可得 $x_0+\dfrac{1}{x_0}=1$

此方程无实数解，故不存在经过原点的切线。

20.　**【答案】**（1）证　令 $x-t=u$，则 $t=x-u$，$dt=-du$

令 $t=x$，$t=0$，$u=x$

故 $\int_0^x f(x-t)dt=-\int_x^0 f(u)du=\int_0^x f(u)du=\int_0^x f(t)dt$

故原命题成立

（2）由（1）知　$f(x)=3x+1+\int_0^x tf(t)dt-x\int_0^x f(t)dt$　　①

两边求导得

$f'(x)=3+xf(x)-x\int_0^x f(t)dt-xf(x)=3-\int_0^x f(t)dt$　　②

求二阶导得 $f''(x)=-f(x)$，故 $f''(x)+f(x)=0$

其特征方程为 $r^2+1=0$，解得 $r=\pm i$

$\therefore f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$　　$\therefore f'(x)=-C_1\sin x+C_2\cos x$

将 $x=0$ 代入①②两式得，$f(0)=1$，$f'(0)=3$

并代入 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 得 $C_1=1$，$C_2=3$

故 $f(x)=\cos x+3\sin x$