广东省 2023 年普通学校专升本招生考试
高等数学

（本试卷共 3 页，20 小题，满分 100 分，考试时间 120 分钟）

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1.$\lim\limits_{x\to 0}(2^x+1)=$________.

$A.0$　　$B.1$　　$C.2$　　$D.3$

2.若函数$f(x)=\begin{cases}(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}, x\neq 0\\ a, x=0\end{cases}$在$x=0$处连续，则$a$=_______.

$A.0$　　$B.1$　　$C.e$　　$D.e^2$

3.曲线$y=xe^{-x}$在点$(1,e^{-1})$处的切线斜率是______.

$A.-e^{-1}$　　$B.0$　　$C.e^{-1}$　　$D.2e^{-1}$

4.设$2x$是$f(x)$的一个原函数，则$\int_0^{\frac{\pi}{2}}[f(x)-\sin x]dx$=_______.

$A.\pi-1$　　$B.\pi+1$　　$C.\frac{\pi^2}{4}-1$　　$D.\frac{\pi^2}{4}+1$

5.设级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则下列级数发散的是_______.

$A.\sum_{n=1}^{\infty}4u_n$　　$B.\sum_{n=1}^{\infty}u_{n+4}$

$C.\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-u_{n+1})$　　$D.\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-1)$

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6.曲线$y=\frac{\sin x}{x}$的水平渐近线方程为y=_________.

7.已知常数$k>0$，若$\int_k^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=1$，则$k$=_________.

8.设二元函数$z=x^x+(x-y)^2(x>0)$，则$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$=________.

9.改换二次积分$\int_0^1 dx\int_{\sqrt{x}}^1 f(x,y)\,dy$的积分次序，则$\int_0^1 dx\int_{\sqrt{x}}^1 f(x,y)\,dy$=________.

10.微分方程$y''-8y'+7y=0$的通解为y=_________.

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11.求极限$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3+3x^2-20}{x^2-4}$.

12.求函数$y=\sqrt{x+\cos x}$在$x=0$处的微分$dy|_{x=0}$.

13.已知函数$f(x)$的导数$f'(x)=\frac{\ln x}{x}$，求曲线$y=f(x)$在$(0,+\infty)$内的凹凸区间.

14.求不定积分$\int(2x-1)e^{x}\,dx$.

15.设函数$f(x)=\begin{cases}\frac{2x^3}{1+x^2}, x\leq 1\\ 1, x>1\end{cases}$，计算定积分$\int_{-1}^{4}f(x)dx$.

16.设$z=\ln 3-x^2e^{y^2z}$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$.

17.计算二重积分$\iint_D(x^2+y^2)^2d\sigma$，其中$D$是由圆周$x^2+y^2=1$所围成的区域.

18.已知u_n满足 $\left(\frac{1}{2}\right)^n\leq u_n\leq\frac{n^2}{2^n}(n=1,2\ldots)$，判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的收敛性.

四、综合题（本大题共 2 小题，第 19 题 10 分，第 20 题 12 分，共 22 分）

19.证明：当$x>0$时，

（1）$\arctan x=\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{x}$;

（2）$\arctan x<\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

20.设定义在区间$[0,+\infty)$上的连续函数$f(x)$满足 $f(x)\geq\sqrt{1+x^4}$，且由曲线$y=f(x),y=\sqrt{1+x^4}$及直线$x=0,x=t(t>0)$围成的图形的面积为t^3.

（1）求$f(x)$；

（2）若可导函数$g(x)$满足 $f(x)g'(x)+f'(x)g(x)=5x\sqrt{x}$，且$g(0)=1$，求$g(x)$.

1. $\lim_{x\to0}(2^x+1)=2^0+1=2$ 选C

2. $a=\lim_{x\to0} e=e$ 选C

3. B

4. A $f(x)=(2x)'=2$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2-\sin x\,dx=\pi-1$

5. D $\sum_{n=1}^{\infty}u_n - \sum_{n=1}^{\infty}1$
收 发

6. $y=0$ 7. $k=1$ 8. -2 9. $\int_0^1 dy\int_0^{y^2} f(x,y)\,dx$

10. $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$ (C_1、C_2为任意常数)

11. $\lim_{x\to2}\frac{x^3+3x^2-20}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{3x^2+6x}{2x}=\lim_{x\to2}\frac{6+6}{2}=6$

12. $dy\Big|_{x=0}=y'dx=\frac{1}{2}dx$

13. 定义域 $x>0$ $f''(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$ 令 $f''(x)=0$ $x=e$

$x\in(0,e)$ $f''(x)>0$ 凹区间 $(0,e)$

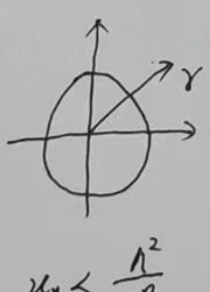
$x\in(e,+\infty)$ $f''(x)<0$ 凸区间 $(e,+\infty)$

14. $\int(2x-1)e^x dx=\int 2xe^x dx-\int e^x dx = 2xe^x-3e^x+C$ (C为任意常数)

15. $\int_{-1}^4 f(x)dx=\int_{-1}^1 f(x)dx+\int_1^4 f(x)dx=\int_{-1}^1\frac{2x^3}{1+x^2}dx+\int_1^4 dx=3$

16. $f(x,y,z)=\ln3-x^2e^{y^2z}-z$ $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{-2xe^{y^2z}}{1+x^2y^2e^{y^2z}}$

$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{-2x^2yze^{y^2z}}{1+x^2y^2e^{y^2z}}$

17. 

$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^4\cdot r\,dr=\frac{\pi}{3}$

18. $u_n<\frac{n^2}{2^n}$ $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}}=\frac{1}{2}<1$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ 收敛

则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

19. (1) 令 $f(x) = \arctan\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x}$ $(x>0$

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2}(-\frac{1}{x^2}) = 0$ ∴ $f(x)$ 为常数

$f(1)=0$ ∴ $f(x)=0$ 即 $\arctan\frac{\pi}{2} = \arctan\frac{1}{x}$

(2) 令 $f(x) = \arctan x - \ln(x+\sqrt{1+x^2})$ $(x>0)$

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ 当 $x>0$ $f'(x)<0$

∴ $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单减. $g(x)<g(0)$ ∴ $\arctan x < \ln(x+\sqrt{1+x^2})$

20. (1) $t^3 = \int_0^t (f(x) - \sqrt{1+x^4})\,dt$

求导: $3t^2 = f(t) - \sqrt{1+t^4}$

$f(t) = 3t^2 + \sqrt{1+t^4}$ $f(x) = 3x^2 + \sqrt{1+x^4}$

(2) $f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = 5x\sqrt{x}$

$[f(x)g(x)]' = 5x\sqrt{x}$

∴ $f(x)g(x) = \int 5x\sqrt{x}\,dx = 2x^{\frac{5}{2}} + C$

$f(0)=1$ $g(0)=1$ ∴ $f(0)g(0)=1$ ⇒ $C=1$

∴ $g(x) = (2x^{\frac{5}{2}} + 1)\frac{1}{f(x)} = (2x^{\frac{5}{2}}+1)\frac{1}{3x^2+\sqrt{1+x^4}}$