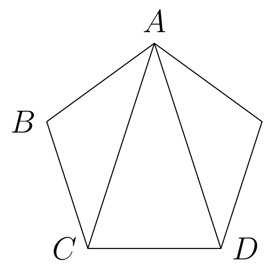
太平华联中学数学竞赛题解

作者：郑其恩 Fanurs

最后编译时间：2020-04-07 23:14（美东）

1. 下图中，$ABCDE$ 是正五边形。若 $\angle CAD = x°$，求 x。



五边形内角和为 540°。如果不知道的同学，可观察五边形 $ABCDE$ 可切割为三个三角形，$\triangle ABC$、$\triangle ACD$ 及 $\triangle ADE$。由于每个三角形内角和为 180°，因此五边形的内角和为 $3 \times 180° = 540°$。

由于正五边形内角和为 540°，所以每个内角皆等于 $540° \div 5 = 108°$。

接下来我们计算 $\angle BAC$。由内角和 180°，可得

$$
\begin{aligned}
\angle BAC + \angle ACB + \angle ABC &= 180° \\
\angle BAC + \angle ACB + 108° &= 180° \\
\angle BAC + \angle ACB &= 72° \text{ 。}
\end{aligned}
$$

记得 $ABCDE$ 是正五边形，意味着所有边长相等，包括 $AB = BC$，即 $\triangle ABC$ 为等腰三角形。因此 $\angle BAC = \angle ACB$。由此，我们得到

$$
\begin{aligned}
2\angle BAC &= 72° \\
\angle BAC &= 36° \text{ 。}
\end{aligned}
$$

同理，$\angle BAC$ 的镜面，$\angle EAD$ 也会等于 36°。因此

$$
\begin{aligned}
\angle BAC + \angle EAD + \angle CAD &= \angle BAE \\
(36° + 36°) + \angle CAD &= 108° \\
\angle CAD &= 36° \\
\therefore x &= 36 \text{ 。}
\end{aligned}
$$

□

点评：

(a) 五边形的几何性质很多都可以从三角形推导而出，这就是为什么它常出现在竞赛题目，就是为了考验学生把课堂所学（通常是三角形和四边形）推广到五边形的能力。其中 AC 和 AD 是解五边形常用的辅助线，但本题因要求得 x 所以直接给出了。

2. 求满足不等式 $4 \le 999 - 3x < 1000$ 的最大整数。

首先，我们把不等式化简。请注意当乘以负数时，不等式会倒过来。

$$\begin{aligned}
4 \le 999 - 3x &< 1000 \\
4 - 999 \le -3x &< 1000 - 999 \\
-995 \le -3x &< 1 \\
(-1) \times (-995) \ge (-1) \times (-3x) &> (-1)(1) \\
995 \ge 3x &> -1 \\
331\frac{2}{3} \ge x &> -\frac{1}{3}\ 。
\end{aligned}$$

显然，$x = 331$ 是最大且又能满足不等式的整数。 $\square$

点评：

(a) 本解答采用了较为冗长但系统性的解法，学生最常犯的错就是在乘以负数时忘了把不等式倒过来。想想看，$1 < 2$，可是 $-1 > -2$，对吧？

(b) 但是这题的不等式其实特别简单，数感强的同学可以很快发现“右边的条件” $999 - 3x < 1000$ 并不是限制因素，因为从 999 扣掉任何正数 $3x$ 都会小于 1000。关键在于“左边的条件”，究竟这 999 能扣多少，而不至于少于 4。

(c) 这两种方法，“正规法”和“观察法”都应该多练习。

3. 求

$$\frac{3\sqrt{3}+5}{3\sqrt{3}-5}+\frac{3\sqrt{3}-5}{3\sqrt{3}+5}$$

的值。

这类题目其实就是直截了当地化简。竞赛中为了加快速度，可以先设 $a := 3\sqrt{3}$ 和 $b := 5$。如此以来，式子也会看得更整齐，最后需要计算时再代入数值：

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b} \\
&= \frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{(a-b)(a+b)} \\
&= \frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2} \\
&= 2\cdot\frac{(3\sqrt{3})^2+5^2}{(3\sqrt{3})^2-5^2} \\
&= 2\cdot\frac{27+25}{27-25} \\
&= 52\ 。
\end{aligned}$$

□

点评：

(a) 完全平方公式 $(a\pm b)^2 = a^2+b^2\pm 2ab$ 大家应该都会。而两个完全平方式的加减不妨也熟悉下：

$$\begin{aligned}
(a+b)^2+(a-b)^2 &= 2(a^2+b^2) \\
(a+b)^2-(a-b)^2 &= 4ab
\end{aligned}$$

当然这些关系式真的不用硬记，一般多遇到几次就能记得了。这里特别提一下，只是为了竞赛是可以跳点步骤，加快解题速度。

4. 若三位数 $\overline{2a7}$ 可以被 11 整除，求 a 的值。

这里重新温故 11 的整除规则：一个数如果起“偶位数之和”和“奇位数之和”之差为 11 的倍数，则该数可被 11 整除。比如 63525 的“偶位数之和”是 $2+3=5$，“奇位数之和”是 $6+5+5=16$。两和之差为 11，因此 63535 是 11 的倍数。

若三位数 $\overline{2a7}$ 可以被 11 整除，则根据 11 的整除法，

$$|(2+7)-a| = |9-a|$$

必须是 11 的倍数。由于 a 只能是介于 0 到 9 的个位数，所以唯一满足的解为 $a=9$。 $\square$

点评：

(a) 请复习数的整除规则。

5. 下课时，1001 位学生去食堂，每位男生吃了两碗饭，每位女生吃了一碗饭，结果这些学生一共吃了 1654 碗饭。问女生有几人？

设有 x 位男生，y 位女生。则我们可列出以下二元一次联立方程：

$$\begin{cases} x + y = 1001 \\ 2x + y = 1654 \end{cases} 。$$

把第二个方程减掉第一个方程，得

$$x = 653 。$$

因此，

$$y = 1001 - x = 1001 - 653 = 348 。$$

□

点评：

(a) 这是基本的课堂题目。

6. 有一群学生，其中 $\frac{1}{3}$ 是男生，女生中，有 $\frac{3}{8}$ 戴眼镜。若没有戴眼镜的女生有 45 人，问这群学生有多少人？

- 女生中，有 $\frac{3}{8}$ 戴眼镜，所以有 $\frac{5}{8}$ 没戴眼镜。
- 没有戴眼镜的女生有 45 人并占了 $\frac{5}{8}$，所以一共有 $45 \times \frac{5}{8} = 72$ 位女生。
- 这群学生中，$\frac{1}{3}$ 是男生，因此女生占了 $\frac{2}{3}$。
- 所以一共有 $72 \times \frac{3}{2} = 108$ 位学生。

$\square$

点评：

(a) 别粗心。

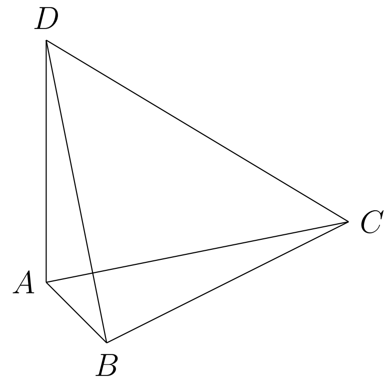
7. 架子上有 23 盒蓝色原子笔及 17 盒红色原子笔。每个盒子都密封着，盒子的表面积完全一样，没有注明里面所含原子笔的颜色。林老师赶着去上课，却需要一盒红色原子笔。因此她打算先拿走若干盒原子笔，去到班上才打开找一盒红色的。林老师必须取走最少多少盒原子笔，才能保证至少有一盒是红色的？

如果是最“幸运”的情况，那林老师只要随便拿一盒就是红色的了。但题目要我们考虑任何情况，并且是要保证带走的盒子里有红色原子笔。为此，我们假设最“倒霉”的情况，也就是林老师先是把所有 23 盒蓝色原子笔都带走了，然后再多拿一盒，则那一盒必然是红色。因此林老师必须至少取走 24 盒原子笔才能每次都保证有带上红色原子笔。 □

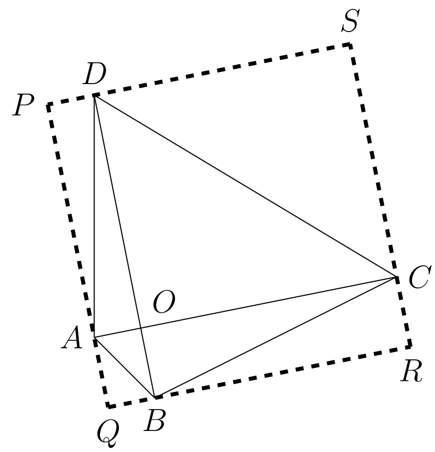
点评：

(a) 把问题考虑成最“幸运”和最“倒霉”的情况就比较好理解了。

8. 如下图所示，$ABCD$ 是一四边形，其对角线 AC 与 BD 互相垂直。若 $AC = 19$，$BD = 22$，求四边形 $ABCD$ 的面积。



如果 AC 与 BD 互相垂直，那我们便能利用“补形法”，建构出以下长方形 $PQRS$：



整个图形可被 AC 和 BD 切割成四份。我们以长方形 $AOPD$ 为例，因 $\triangle AOD$ 为直角三角形，所以其面积恰好为长方形 $AOPD$ 的一半。同样的推理也适用于长方形 $CODS$、长方形 $COBR$ 及长方形 $AOBQ$。因此，四边形 $ABCD$ 的面积为

$$\begin{aligned} S(\square ABCD) &= \frac{1}{2}S(\square PQRS) \\ &= \frac{1}{2}(\overline{AC}\cdot\overline{BD}) \\ &= \frac{1}{2}(19\times 22) \\ &= 209 \text{ 。} \end{aligned}$$

□

点评：

(a) 初中竞赛中最常用到的“补形法”就是把三角形补成长方形。

9. 将 4 支一样的蓝笔与 3 支一样的红笔排成一行，其中 3 支红笔必须相邻，有几种排法？

由于题目要求 3 支红笔必须相邻，所以我们不妨把它们视为一体。由此，可列出以下排列法：

1. 红 蓝 蓝 蓝 蓝
2. 蓝 红 蓝 蓝 蓝
3. 蓝 蓝 红 蓝 蓝
4. 蓝 蓝 蓝 红 蓝
5. 蓝 蓝 蓝 蓝 红

排法一共 5 种。 □

点评：

(a) 在高中，这类题目一般要求学生利用“组合排列”去计算。但是对于初中生来说，面对不太复杂的题目，更好且直观的方法应该是穷举法，并且通过练习和经验的累积，确保自己能系统性地把所有可能一次列出。穷举法能培养学生对组合排列的“感觉”，对将来学习“组合排列”也很有帮助。

10. 考完试后，老师计算班上学生的平均分数，得平均分为 70 分。后来发现少算了一位考 87 分的学生李大卫的成绩。重新计算及确认后得全班的平均分数是 71 分。问这班上（包括李大卫）有多少位学生？

假设班上，包括李大卫，一共有 n 个学生，则从题目，我们可得

$$\begin{cases} \dfrac{S_{n-1}}{n-1} = 70 \\ \dfrac{S_{n-1}+87}{n} = 71 \end{cases},$$

其中 S_{n-1} 全班同学，除了李大卫，的分数之和。

上述联立方程，可整理成

$$\begin{cases} S_{n-1} = 70n - 70 \\ S_{n-1} + 87 = 71n \end{cases}。$$

将第二个方程减去第一个方程，得

$$87 = (71-70)n + 70$$

$$\therefore n = 17 \text{ 。}$$

班上，包括李大卫，一共有 17 位学生。 □

点评：

(a) 二元一次联立方程的基本题。参赛同学须意识到“其他学生的分数”应该以总和作为 n 以外的第二个未知数，其他同学个别的分数，由本题条件不得而知。