太平华联中学数学竞赛题解

作者：郑其恩 Fanurs

最后编译时间：2020-04-05 20:15（美东）

1. $5^{20} \times 4^{17}$ 这个数有几位数？

这种题型的技巧在于，从数字中抽取出 $5^n \times 2^m$ 形式的因数，而后利用 $5^k \times 2^k = 10^k$ 的特性把数字以科学计数法表达。

$$\begin{aligned}
\text{原数} &= 5^{20} \times 4^{17} \\
&= 5^{20} \times 2^{2\times 17} \\
&= (5^{20} \times 2^{20}) \times 2^{34-20} \\
&= 2^{14} \times 10^{20} \\
&= 16384 \times 10^{20} \text{ 。}
\end{aligned}$$

因此，这个数一共有 $5+20=25$ 位数。 $\square$

点评：

(a) 2^n 是竞赛中常出现的数，鼓励参赛同学至少熟记 $n=10$ 以内的数。

2. 已知一数列 $a_1, a_2, a_3, \ldots$ 满足以下条件：

$$\text{对于所有的 } n \geq 1\text{，} a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = n^3\text{。}$$

求 a_{100} 的最后三位数。

根据题目，可列出

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{99} = 99^3$$
$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{99} + a_{100} = 100^3$$

因此，

$$\begin{aligned} a_{100} &= 100^3 - 99^3 \\ &= 100^3 - (100-1)^3 \\ &= 100^3 - (100^3 - 3 \times 100^2 + 3 \times 100 - 1) \\ &= 30000 - 300 + 1 \\ &= 29701 \text{ 。} \end{aligned}$$

a_{100} 的最后三位数为 701。 □

点评：

(a) 本题看似复杂，但利用了所给条件，直接找出所求 a_{100} 的表达式。

(b) 大部分竞赛并不允许使用计算机，因此在进行四则运算时，应尽可能把式子化为容易运算的数字，比如本题的 100^3 等。学过心算或许不需要用到这个技术，但仍鼓励参考，因为很多这些式子的拆解都能直接搬用到代数式的化简。

3. 有多少个正整数 n 使得方程式 $x^2-1001x+n=0$ 的根都是整数？

这类题目基本上都是从二次方程的判别式下手。

判别式为

$$\Delta=(-1001)^2-4(1)(n)=1001^2-4n\ 。$$

写到这，我们应该打住，先不需要去算 1001^2 到底是多少。记得本题的目标是满足整数根。考虑到二次方程的公式解为

$$x=\frac{1001\pm\sqrt{\Delta}}{2}\ ,$$

所以只要 $\sqrt{\Delta}$ 是奇数，则 $1001\pm\sqrt{\Delta}$ 为偶数，最终便可让 x 为整数。换句话说，我们要找出所有能让 Δ 为奇数平方数的正整数 n。

那有什么正整数 n 可以让 $\Delta=1001^2-4n$ 成为奇数平方数？事实上，有“一大堆”。首先，令 $\Delta:=k^2$，其中 k 为奇数。因此，

$$\begin{aligned}1001^2-4n&=k^2\\4n&=1001^2-k^2\\4n&=(1001-k)(1001+k)\ 。\end{aligned}$$

这是个很有趣的式子，因为右式永远是四的倍数——由于 k 为奇数，因此 $(1001-k)$ 和 $(1001+k)$ 皆为偶数，而两个偶数之积必然包含了因数 4。即，任何的奇数 k，只要 $(1001-k)(1001+k)>0$，我们都能找到对应的正整数 n。

满足 $(1001-k)(1001+k)>0$ 的奇数 k 有

$$k=999,997,995,\ldots,3,1,-1,,-3\ldots,-997,-999\ 。$$

但负数 k 给出的 n 其实和其相反数 $-k$ 是一样的，比如 $k=\pm999$ 都会让 $4n=2\times2000$，即 $n=1000$。因此，我们只考虑

$$k=999,997,995,\ldots,3,1\ 。$$

这一共有 $(999+1)/2=500$ 个，即一共有 500 个正整数 n 可使得方程有整数根。 □

点评：

(a) 本题首个技巧是把问题转化，通过判别式，把问题变成“如何让 1001^2-4n 成为奇数平方数”。在实践时，学生会发现并非每一种转化都会是有用的，问题转化的成功率必须通过累积解题经验来提升。

(b) 作者在解此题时，把问题转化后就卡住了，所以开始各种尝试。其中就意外发现把“奇数平方数”写作 k^2，虽然当下看起来不过是把 Δ 写作 k^2，以为没什么用，却最终导出了本题的关键因式，$(1001-k)(1001+k)$。

(c) 偶数之积含因数 4 是基本数论知识。写出 $(1001-k)(1001+k)$ 便发现这是偶数之积，后边的解答随之而生。竞赛同学必须熟悉四则运算的“奇偶特性”，比如“奇 ± 奇 = 偶”等规律。

4. 设 n 是整数使得 $n+100$ 与 $n-24$ 都是平方数，求 n 的最小可能值。

设
$$\begin{cases} n+100=a^2 \\ n-24=b^2 \end{cases} 。$$
由此，可得
$$-100+a^2=24+b^2$$
$$a^2-b^2=124$$
$$(a+b)(a-b)=124 。$$
这里，因数分解得 $124=2^2\times 31$，因此有以下三种乘积组合：
$$\begin{aligned} 124 &= 124\times 1 \\ &= 62\times 2 \\ &= 31\times 4 。\end{aligned}$$
接下来只需要把各组乘积与 $(a+b)(a-b)$ 匹配。由于只需要考虑 $a,b>0$ 的情况（因为它们的相反数 $-a,-b$ 会给出一样的 a^2,b^2 值），所以匹配时，$(a+b)$ 配大的，$(a-b)$ 配小的。另外一个重要的匹配条件是数的奇偶性，即 $(a+b)$ 和 $(a-b)$ 必须是同奇偶性（两数，要么同为奇数，要么同为偶数）。

综合上述所言，唯一的匹配是
$$\begin{cases} a+b=62 \\ a-b=2 \end{cases} ,$$
即 $a=32$ 和 $b=30$。因此，
$$n=-100+a^2=24+b^2=924 。$$
□

点评：

(a) 本解答主要利用了平方差公式和数论的基本方法。

(b) 本题虽然在问 n 的“最小值”，但其实 n 就只有一个整数解。一般在设计竞赛题目时，题目会只要求“最小值”，这样万一还有更大的解，也不会引起分歧。

5. 求满足方程式

$$\frac{|6n-10-n^2|+10n-6-n^2}{n^2-1}=\frac{1}{100}$$

的最小整数 n。

看到绝对值 $|x|$，就直接考虑两种情况：(a) $x>0$，则 $|x|=x$；(b) $x<0$，则 $|x|=-x$。

我们先考虑情况 (a)，即假设 $6n-10-n^2<0$，因为这样能刚好消掉分子的 n^2 项：

$$\begin{aligned}\text{左式}&=\frac{-(6n-10-n^2)+10n-6-n^2}{n^2-1}\\&=\frac{4n+4}{n^2-1}\\&=\frac{4}{n-1}\text{ 。}\end{aligned}$$

到这，显然能满足方程的 n 为 401。

但我们还不能确定这是不是最小的 n，所以现在考虑情况 (b)。

$$\begin{aligned}\frac{(6n-10-n^2)+10n-6-n^2}{n^2-1}&=\frac{1}{100}\\ \frac{-2n^2+16n-16}{n^2-1}&=\frac{1}{100}\\ -200n^2+1600n-1600&=n^2-1\\ 201n^2-1600n+1599&=0\text{ 。}\end{aligned}$$

由判别式可知，此二次方程并无整数解 n，因此情况 (b) 可不考虑。

最后其实还有第三种情况，即当 $|6n-10-n^2|=0$。但这方程其实并无实数解，因此也不考虑。

故，n 为 401。 □

点评：

(a) 绝对值是竞赛中喜欢拿来吓唬学生的东西，但其实应对方法无他，就是分情况去看，有点繁琐，但并不增加困难度。

(b) 事实上，情况 (a) 也能比对情况 (b) 的做法去解，这样就会算得 $n^2-400n-401=0$，求得 $n=-1$ 和 $n=401$。但是我们不能选 $n=-1$，因为验根时会发现 $n=-1$ 会使原左式分母为零。上述情况 (a) 的做法则是在分子分母抵消掉共同因式 $n+1$ 时，就把这种假根排除掉了。

6. 小明身上没钱，便拿了一张有四位数金额的支票到银行兑现。糊涂的出纳员将金额的四位数 $abcd$ 看成 $cdab$，而给了小明这金额的钱。小明没数就将钱拿走，到超市拿出其中的 RM50 买了 RM50 的东西后，才发现剩下的钱刚好等于支票上数额的 3 倍。问小明支票上原来的金额的最后三位数是什么？

我将用横杠来区分十进制表达式和数的乘积，即 $abcd$ 是 $a \cdot b \cdot c \cdot d$，而 $\overline{abcd}$ 是个千位数为 a 的数字。根据小明的经历，我们便有

$$\overline{cdab} - 50 = 3 \cdot \overline{abcd} 。$$

接下来，我们一个个试，但我们尽可能把可以想到的约束条件都用上:

(a) $a = 1, 2, 3$，因为 4 或以上的千位数乘以三，已经是五位数了。

(b) c 的值可根据 a 估计得出，比如 $a = 1$ 的话，那 $c = 3, 4, 5$，至于是哪一个，还得看 b 的值。

(c) 观察末尾数，会发现 $3d$ 的末尾数（个位数）必须等于 b，比如 $d = 6$ 的话，那么 b 就必须是 3，因为 $3d = 18$，末尾数为 8。这规律之所以成立是因为 $\overline{cdab}$ 减 50，其末尾数不变，仍为 b。

根据最后一项约束条件，我们可列出下表:

d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7

接下来，我们假设 $a = 1$，然后从 $d = 0$（$b = 0$）开始尝试。c 的值则根据 b 估算而得。

- $3 \times \overline{10c0} = \overline{c010} - 50$，取 $c = 3$，目测不符。
- $3 \times \overline{13c1} = \overline{c113} - 50$，可取 $c = 3, 4$，计算不符。
- $3 \times \overline{16c2} = \overline{c216} - 50$，可取 $c = 4, 5$，计算不符。
- $3 \times \overline{19c3} = \overline{c319} - 50$，可取 $c = 5$，目测不符。
- $3 \times \overline{12c4} = \overline{c412} - 50$，可取 $c = 3$，目测不符。
- $3 \times \overline{15c5} = \overline{c515} - 50$，可取 $c = 4$，计算不符。
- $3 \times \overline{18c6} = \overline{c618} - 50$，可取 $c = 5$，计算后发现符合题目。

故，$\overline{abcd} = 1856$，原来金额的最后三位数为 856。 □

点评:

(a) 题目不难，但计算量大，心算强或数感敏锐的同学将有优势。暂时想不到更快速的方法。

7. 将 n^3 个边长等于 1 的立方体拼合在一起形成一个边长为 n 的大立方体，然后将这个立方体的其中 m 个面漆成红色。当红漆干了后，将大立方体又再分拆回原来的边长等于 1 的小立方体，结果发现有 210 个小立方体的任何面都没有红漆。有几个小立方体正好有两个面有红漆？

题目并没有给出 m 的值，也没说是哪 m 面（比如相邻两面或对立两面），所以显然解题过程中会需要一定的试错。这种情况下，首先得知道 n 的取值范围。首先必须有 $n^3 > 210$。接下来，我们考虑涂满所有面的情况，即 $m = 6$，那就要求 $(n-2)^3 < 210$，否则单单计算大正方体内部不接触到外界的小正方体就已经超过 210 了。结合此二条件，我们发现 $n = 6, 7$。但是 $n = 6$ 其实是不可能的，因为仅涂一面 $n = 6$ 的大正方体，变已经涂掉了 $6^2 = 36$ 个小立方体，即剩下 $6^3 - 6^2 = 216 - 36 < 210$ 个小正方体。到这里，我们确定

$$n = 7 \text{ 。}$$

剩下的就是尝试涂不同的面，然后计算干净的小正方体数，看是否等于 210。

- 如果只涂任意一面，则干净的小正方体数为 $7^3 - 7^2 = 294$。
- 如果涂对立的两面，则干净的小正方体数为 $7^3 - 2(7^2) = 259$。
- 如果涂相邻的两面，则干净的小正方体数为 $7^3 - 2(7^2) + 7 = 252$。
- 如果涂相邻的三面（比如左面 + 前面 + 低面），则干净的小正方体数为 $7^3 - 3(7^2) + 3(7) - 1 = 216$。
- 如果涂相连的三面（比如左面 + 前面 + 右面），则干净的小正方体数为 $7^3 - 3(7^2) + 2(7) = 210$。

因此，正好两面涂有红漆的小立方体个数为 $7 + 7 = 14$。 □

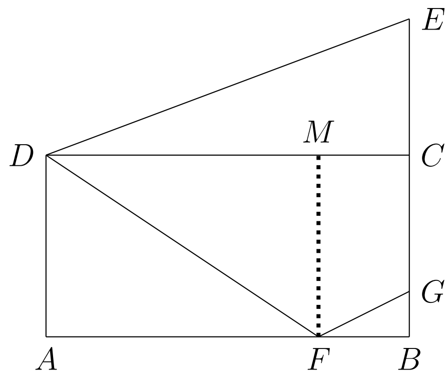
点评：

(a) 本题所给的已知条件并不多，因此参赛同学必须尽可能地利用“210 个小立方体这个条件”去约束题目。作者在解题时，本来只是想利用此条件去估算 n 的取值范围，却意外发现能直接得出 $n = 7$ 的结论。

(b) 本题考验了参赛同学的空间能力，比如 n^3 的大立方体，内部所藏的小立方体应该是 $(n-2)^3$，而非 $(n-1)^3$。

(c) 在计算干净的小正方体数时，一定要把边上和角上的小正方体考虑清楚，避免重复计算。

8. 下图中，$ABCD$ 是面积为 240 的长方形，ECG 是直线，$EC = CG$。$DEGF$ 是梯形，$DE \parallel FG$。若 $\triangle ADF$ 为 90，求 $\triangle BGF$ 的面积。



作 FM，垂直相交于 CD。因 $\triangle ADC$ 面积为 90，所以长方形 $AFMD$ 面积为 $2 \times 90 = 180$。由此，可得

$$\begin{aligned} S(\square AFMD) : S(\square ABCD) &= 180 : 240 \\ \overline{AD} \cdot \overline{AF} : \overline{AD} \cdot \overline{AB} &= 3 : 4 \qquad 。\\ \overline{FB} : \overline{AB} &= 1 : 4 \text{ 。} \end{aligned}$$

另，由于 $DE \parallel FG$，且 $\triangle BGF$ 和 $\triangle CED$ 皆为直角三角形，因此这两个三角形所有内角相等，即互为相似三角形。由此可得，

$$\begin{aligned} \overline{FB} : \overline{DC} &= \overline{BG} : \overline{CE} \\ \overline{FB} : \overline{AB} &= \overline{BG} : \overline{CG} \\ \overline{BG} : \overline{CG} &= 1 : 4 \\ \overline{BG} : \overline{BC} &= 1 : 5 \text{ 。} \end{aligned}$$

最后，我们得到

$$\begin{aligned} S(\triangle BGF) &= \frac{1}{2}\overline{FB} \cdot \overline{BG} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\overline{AB}\right)\left(\frac{1}{5}\overline{BC}\right) \\ &= \frac{1}{40} S(\square ABCD) \\ &= 6 \text{ 。} \end{aligned}$$

□

点评：

(a) 几何题求面积，一般上有两种手段，一种是尽可能计算出边长的值，第二种是通过各种比例。前者一般需要更多的已知条件，后者则能避免前者的局限。