

太平华联中学高二数学题解

作者：郑其恩 Fanurs

最后编译时间：2020-04-05 20:32（美东）

提问同学：某某某

1. 求导 $f(x) = x^x$ 。

此题是隐函数微分的经典应用。

首先设 $y := x^x$ ，然后我们对左右两式取自然对数，得

$$\ln y = x \ln x$$

记得我们的目标是求得 $f'(x)$ ，即 $\frac{dy}{dx}$ 。因此针对上式，左右两式求导，

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dx} x \ln x$$

右式，利用导数的乘积法则可化为 $(x \ln x)' = x \cdot \frac{1}{x} + \ln x$ 。由于 $f(x) = x^x$ 的定义域最多只能是 $x \in \mathbb{R}^+$ ，即 x 不可为零或负数，因此右式最终可写成 $1 + \ln x$ 。

左式，我们利用链导法则，

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{dy}{dx} \left(\frac{d}{dy} \ln y \right) = y' \cdot \frac{1}{y}$$

由此，比较左右两式变可得

$$y' = y(1 + \ln x)$$

最后记得把 y 全部换掉，答案应写作

$$f'(x) = x^x (1 + \ln x)$$

□

点评：

- (a) 作为练习，同学可尝试求导 $f(x) = x^{x^x}$ 。