太平华联中学数学竞赛题解

作者：郑其恩 Fanurs

最后编译时间：2020-04-07 00:51（美东）

今日内容：二元一次不定方程与辗转相除法

昨日的题解中，其中一题其实可以用“不定方程”的知识更轻松地解答，而不定方程也是竞赛中最热门的题型之一，所以今天作者将系统性地介绍不定方程的基本解题技巧。

不定方程，又称为丢番图方程（Diophantine equation），是未知数 x 要求为整数（可正可负可零）的整数系数多项式等式。其一般表达式为

$$a_1x_1^{n_1} + a_2x_2^{n_2} + \cdots + a_kx_k^{n_k} = c \ ,$$

其中所有系数 $a_1, a_2, \ldots, a_k$，所有幂 $n_1, n_2, \ldots, n_k$ 以及 c 均为整数。如果能找到至少一组整数解，即存在着至少一组 $r_1, r_2, \ldots, r_k \in \mathbb{Z}$，使得

$$a_1r_1^{n_1} + a_2r_2^{n_2} + \cdots + a_kr_k^{n_k} = c \ ,$$

我们便说此不定方程有解；反之，我们便说此不定方程无解。

不定方程，时至今日，都是非常困难的问题。著名的“费马大定理”便是一种不定方程，该猜想（被证明之前被称为“费马猜想”）最先由法国数学皮埃尔 · 德 · 费马于 1637 年提出，却一直等到了 358 年后的 1995 年，才被英国数学家安德鲁 · 约翰 · 怀尔斯爵士成功证明。竞赛中出现的不定方程虽然比这简单得多，但也足以给很多参赛同学带来不小的挑战。

二元一次不定方程　中学竞赛中出现的不定方程，很多时候都只是一次不定方程，即所有幂为一的不定方程，其一般表达式为

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_kx_k = c \ 。$$

而多元一次不定方程又是建立在二元一次不定方程，

$$a_1x_1 + a_2x_2 = c \ 。$$

当只有两个未知数，我们一般更倾向把它们写作 x 和 y，对应的系数也习惯改成 a 和 b。本文接下来所有的讨论都将依据以下二元一次不定方程的一般式：

$$ax + by = c \ 。$$

一个可解的例子　首先我们先来看一个具体的例子，

$$2x+3y=5 \text{ 。}$$

显然，大家都应能直接看出 $(x,y)=(1,1)$ 是此方程的一个解。但这解会是唯一的吗？如果不把这看作不定方程，即允许非整数解，显然我们知道存在着无限多个解。这是因为我们能任意选个 x 值，比如 $x:=t\in\mathbb{R}$，那么 y 便直接等于

$$y=\frac{5-2t}{3} \text{ 。}$$

比如，我们可以选 $t:=2$，这样就有 $(x,y)=(2,1/3)$。然而，如果仅考虑整数解，$(2,1/3)$ 便不能被接受了。倘若继续试错，数感强的读者或许能很快得到其它的整数解，比如 $(x,y)=(-2,3),(4,-1)$ 等等。但是这样猜出来的答案，当遇到数字大点的题目，会显得很无力。因此接下来，我们将学习不依赖数感和大量试错的方法。

首先，我们先假设 $(x,y)=(1,1)$ 是我们唯一猜得出来的解。接下来为了得到其它满足此方程的解，我们利用如下的技巧：

$$\begin{aligned}
2x+3y&=5\\
2x+3y+(2\times3)-(2\times3)&=5\\
(2x+2\times3)+(3y-2\times3)&=5\\
2(x+3)+3(y-2)&=5\\
2x_1+3y_1&=5 \text{ 。}
\end{aligned}$$

由此可见，如果 (x,y) 是方程的解，那么 $(x_1,y_1)=(x+3,y-2)$ 也会是方程的解，比如我们已经知道 $(x,y)=(1,1)$ 是一个解，而这“新鲜出炉的发现”便告诉我们另一组解为

$$(x_1,y_1)=(1+3,1-2)=(4,-1) \text{ 。}$$

我们可以很快地把 $(x_1,y_1)=(4,-1)$ 代入回原方程，发现的确是个解。这个方法巧妙之处在于还能递归式使用，也就是如果把 $(4,-1)$ 重新以 (x,y) 代入，那又能生成一组新的解，$(4+3,-1-2)=(7,-3)$。以此类推，我们可以很快得到

$$(x,y)=(1,1),(4,-1),(7,-3),(10,-5),(13,-7),\ldots \text{ 。}$$

但这些就是方程的所有解了吗？还不是的。

上述所用到的“$+(2\times3)-(2\times3)$”技巧，若添加个可调参数 $t\in\mathbb{Z}$，并设 (x_0,y_0) 为不定方程的其中一组已知的解，则

$$\begin{aligned}
2x_0+3y_0&=5\\
2x_0+3y_0+(2\times3)t-(2\times3)t&=5\\
(2x_0+2\times3t)+(3y_0-2\times3t)&=5\\
2(x_0+3t)+3(y_0-2t)&=5\\
2x+3y&=5
\end{aligned}$$

因此 $2x+3y=5$ 的所有解都可以写成

$$\begin{cases}x=x_0+3t\\ y=y_0-2t\end{cases}$$

的形式，其中 (x_0, y_0) 是方程已知的一个解，在这里我们取之为 $(1,1)$。作者也选了几个 t 值，把其对应的解整理成下表：

t	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
x	$\cdots$	-8	-5	-2	1	4	7	10	$\cdots$
y	$\cdots$	7	5	3	1	-2	-4	-6	$\cdots$

这一次，我们把 $2x+3y=5$ 所有可能的整数解都按规律列出来了——总共有无限多组整数解。

一个不可解的例子　不是每个二元一次不定方程都有解，比如

$$2x+4y=5$$

就无解。不相信的话，可以多尝试几组 (x,y)。此方程之所以无解是因为左式可写作 $2(x+2y)$，即 2 的倍数，而右式 5 却不是 2 的倍数，故此方程无整数解。

一个会漏掉解的例子　从以下的二元一次不定方程

$$2x+4y=6$$

可看出 $(x_0, y_0)=(1,1)$ 是其中一个解。接下来我们根据之前讨论了的方法，试图找出所有其它的解，即我们利用

$$\begin{cases} x = x_0 + 4t \\ y = y_0 - 2t \end{cases}$$

生成以下一系列的解：

t	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
x	$\cdots$	-11	-7	-3	1	5	9	13	$\cdots$
y	$\cdots$	7	5	3	1	-1	-3	-5	$\cdots$

但这一次的表格并不完整。比如我们可以找到一些漏掉的解，像是最明显的 $(3,0)$。之所以会出现“漏掉解”的情况是因为原方程左右两式有共同因数。解决方法很简单，就是要记得先尽可能把两式的共同因数抵消后，再使用上述规律求得剩余的所有解，即

$$2x+4y=6$$
$$x+2y=3\ 。$$

因此对于任意整数 t，

$$\begin{cases} x = x_0 + 4t \\ y = y_0 - 2t \end{cases}$$

都会是原方程 $2x+4y=6$ 的解。整理成表，则有

t	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
x	$\cdots$	-5	-3	-1	1	3	5	7	$\cdots$
y	$\cdots$	4	3	2	1	0	-1	-2	$\cdots$

二元一次不定方程的公式解　现在我们将从前几页讨论的例子中总结归纳出个“公式”。

考虑以下不定方程

$$ax + by = c \ ,$$

其中 $a, b, c \in \mathbb{Z}$，而未知数 x 和 y 必须是整数。当 c 为 a 和 b 的最大公因数（greatest common divisor），$\gcd(a, b)$，的倍数时，则不定方程有解。反之，即 $\gcd(a, b)$ 无法整数 c，则不定方程无解。

举几个例子。$21x + 91y = 64$ 无整数解，因为 $\gcd(21, 91) = 7$，然而 7 无法整数 64。$1001x - 132y = -198$ 有解，因为 $\gcd(1001, -132) = 11$，而 -198 是 11 的倍数。如果 a 和 b 互质，即 $\gcd(a, b) = 1$，比如 $2x+3y = c$，那么任意 $c \in \mathbb{Z}$，此方程都会有解，因为任何整数 c 都是 $\gcd(a, b) = 1$ 的倍数。

假设 $ax + by = c$ 有解，并设之为 (x_0, y_0)，则其它解能通过

$$\begin{cases} x = x_0 + \dfrac{b}{\gcd(a,b)} \cdot t \\ y = y_0 - \dfrac{a}{\gcd(a,b)} \cdot t \end{cases}$$

产生而得，其中 t 为任意整数，并且每一个 t 值都对应了一组不同的解。当然，如果事先把 $ax + by = c$ 左右两式最大共同因数消掉，那这个“公式”就变成简洁的

$$\begin{cases} x = x_0 + bt \\ y = y_0 - at \end{cases} 。$$

举个例子，$21x + 91y = -56$，应先化简为 $3x + 13y = -8$，再使用以上的“公式”。

最后我们给这方法取个非正式名字，方便日后的讨论。由于上述结论的推导源自

$$ax + by + (ab - ab)t = c \ ,$$

作者一般管它叫“加 ab 减 ab 公式”。

辗转相除法　本文最后一个内容就是探讨如何有系统地找出第一组解 (x_0, y_0)。细心的同学可能已经发现作者至今每每提及 (x_0, y_0) 都是用“猜”的。但这一招显然无法招架数字组合的万千变化。我们可以拿上一段最后一个例子，$3x + 13y = -8$，问读者能否快速看出解呢？如果能，那 $376x - 157y = 101$ 呢？

在检查不定方程是有解之后，我们便演示如何通过辗转相除法为不定方程先求得一个解，之后再用之前的“公式”把其它解一并列出。以

$$3x + 13y = -8$$

为例，在 $|a| = 3$ 和 $|b| = 13$ 当中选一个大的，然后以大的除以小的，并保留余数:

$$13 \div 3 = 4 \text{ 余 } 1 \ 。$$

另一个更适合的写法为，

$$13 = 4(3) + 1 \ 。$$

这就是辗转相除法，它的运算止步于当余数为一，因为一旦有了如上的等式，我们便可以得到

$$\begin{aligned}13-4(3)&=1\\3(-4)+13&=1\\3[(-4)\times(-8)]+13[1\times(-8)]&=-8\\3(32)+13(-8)&=8\ ,\end{aligned}$$

即 $(x_0, y_0) = (32, -8)$ 是不定方程的其中一个解。

第一个例子让人有些意犹未尽，毕竟我们只看到了“相除”，少了“辗转”。所以我们再来看下第二个例子，

$$376x - 157y = 101\ 。$$

首先我们检查发现 376 和 157 互质，因此不定方程有无限个解，且我们不需要左右两式抵消共同因数。接下来我们使用辗转相除法：

$$\begin{aligned}376&=2(157)+62\\157&=2(62)+33\\62&=1(33)+29\\33&=1(29)+4\\29&=7(4)+1\ 。\end{aligned}$$

当余数为一，我们便停止“辗转”。现在，我们从最后一行开始，把 1 表达为 $376X - 157Y$ 的形式：

$$\begin{aligned}1&=29-7(4)\\&=29-7(33-1(29))\\&=-7(33)+8(29)\\&=-7(33)+8(62-1(33))\\&=-15(33)+8(62)\\&=-15(157-2(62))+8(62)\\&=-15(157)+38(62)\\&=-15(157)+38(376-2(157))\\&=-91(157)+38(376)\\\therefore 1&=376(38)-157(91)\ 。\end{aligned}$$

作者把这过程非正式地称为“辗转代入法”。其过程就是不断使用辗转相除法过程中的每一行，并逐步替换掉括号里数字，直到有了 $1 = 376X - 157Y$，我们变能算得原方程 $376x - 157y = 101$ 的解：

$$\begin{aligned}376(38\times101)-157(91\times101)&=101\\376(3838)-157(9191)&=101\ 。\end{aligned}$$

因此，我们得到 $(x_0, y_0) = (3838, 9191)$。剩下的解，则可通过“加 ab 减 ab 公式”一一求得。

上回的题目 小明身上没钱，便拿了一张有四位数金额的支票到银行兑现。糊涂的出纳员将金额的四位数 $abcd$ 看成 $cdab$，而给了小明这金额的钱。小明没数就将钱拿走，到超市拿出其中的 RM50 买了 RM50 的东西后，才发现剩下的钱刚好等于支票上数额的 3 倍。问小明支票上原来的金额的最后三位数是什么？

作者将用横杠来区分十进制表达式和数的乘积，即 $abcd$ 是 $a \cdot b \cdot c \cdot d$，而 $\overline{abcd}$ 是个千位数为 a 的数字。根据小明的经历，我们便有

$$\overline{cdab} - 50 = 3 \cdot \overline{abcd} \text{ 。}$$

接着我们把十进制展开，

$$\begin{aligned}(10^3c + 10^2d + 10a + b) - 50 &= 3(10^3a + 10^2b + 10c + d)\\ 2990a + 299b - 970c - 97d &= -50 \text{ 。}\end{aligned}$$

这是一个四元一次不定方程。但我们可把它化成二元一次：

$$\begin{aligned}299(10a + b) - 97(10c + d) &= -50\\ 299x - 97y &= -50 \text{ 。}\end{aligned}$$

这里我们设 $x := 10a + b$ 和 $y := 10c + d$。由于 a, b, c, d 皆为 $0, \ldots, 9$ 的个位数，因此 x 和 y 的取值范围是 $10, \ldots, 99$。接下来，我们把刚才所学给用起来。

首先，$\gcd(299, 97) = 1$，因此 $299x - 97y = -50$ 有整数解。接下来，我们利用辗转相除法：

$$\begin{aligned}299 &= 3(97) + 8\\ 97 &= 12(8) + 1 \text{ 。}\end{aligned}$$

再用“辗转代入法”，得

$$\begin{aligned}1 &= 97 - 12(8)\\ &= 97 - 12(299 - 3(97))\\ &= 37(97) - 12(299) \text{ 。}\end{aligned}$$

因此，不定方程 $299x - 97y = -50$ 的解可由

$$\begin{aligned}299(-12) - 97(-37) &= 1\\ 299[(-12) \times (-50)] - 97[(-37) \times (-50)] &= -50\\ 299(600) - 97(1850) &= -50\end{aligned}$$

得 $(x_0, y_0) = (600, 1850)$。

然而并不是所有解都能满足题目，因为 x 和 y 的取值范围必须是 $10, \ldots, 99$。为此我们从 $(x_0, y_0) = (600, 1850)$ 开始生成更小的解。“加 ab 减 ab 公式”告诉我们其它解为

$$\begin{cases} x = x_0 + (-97)t \\ y = y_0 - 299t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 600 - 97t \\ y = 1850 - 299t \end{cases} \text{ 。}$$

而为了让 x 和 y 都介于 $10, \ldots, 99$，不难发现 $t = 6$ 是唯一能满足此条件的整数参数。因此算得

$$\begin{cases} x = 18 \\ y = 56 \end{cases} \text{ 。}$$

也就是说 $\overline{abcd} = 1856$。我们可以做最后的验算：

$$3 \times 1856 = 5618 - 50 = 5568 \ 。$$

故，小明支票上原来金额的最后三位数是 856。 $\square$