太平华联中学数学竞赛题解

作者：郑其恩 Fanurs

最后编译时间：2020-04-15 20:49（美东）

6. 由 2,5,6 这三个数字所组成的数字不重复的三位数中，其中有几个可以被 3 整除？

三的整除规则为：若某数的各位数之和为三的倍数，则该数也会是三的倍数；相反的，若某数为三的倍数，则其各位数之和亦可被三整除。

因此无论我们用 2,5,6 组成任何三位数，且数字不重复，比如 256, 562, 625 等，它们的各位数之和皆为

$$2+5+6=13\ 。$$

由于 13 不是 3 的倍数，因此 256, 562, 625 等数都不会被 3 整除。

因此一共有零个数可以被 3 整除。 □

点评：

(a) 作者昨日才听说数的整除规则似乎已从新数学课本中剔除，故在此会花多点篇幅讲解之。

(b) 课本没有提及，但网络发达的廿一世纪里，是阻挡不住好学的人。上网搜索 "数的整除性"，便可找到许许多多资料。中学竞赛里，至少要熟记 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11 的整除规则。

(c) 整除规则的发明（或发现）是为了能不通过 "直接相除"，也能百分之百判断出整除性。比如简单的 2 的整除性，只要个位数是 0, 2, 4, 6, 8 其中之一，则该数可被 2 整除，即面对比如像 $n=299792458$，我们可通过 2 的整除规则，观察个位数为 8，从而直接判断 $2|n$，即 2 能整除 n。

(d) 感兴趣的同学可以尝试证明或弄明白为什么这些整除规则成立。作者在此将快速证明下 3 的整除规则。考虑一正整数 $n=\overline{a_1a_2\ldots a_k}$，我们想知道此数能否被 3 整除。首先，我们把 n 根据十进制拆解，得

$$n=\overline{a_1a_2\ldots a_k}=10^ka_1+10^{k-1}a_2+\cdots+10^1a_{k-1}+10^0a_k\ 。$$

接下来，我们观察到每一项都能进一步拆解，比如 $10^ka_1=(10^k-1)a_1+a_1$：

$$n=[(10^k-1)a_1+(10^{k-2}-1)a_2+\cdots+(10^1-1)a_{k-1}+(10^0-1)a_k]+(a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}+a_k)\ 。$$

现在我们注意到方括号里的每一项其实都是 3 的倍数。为什么？假设 $k=3$，则方括号里将变成

$$\begin{aligned}(1000-1)a_1+(100-1)a_2+(10-1)a_3+(1-1)a_4&=999a_1+99a_2+9a_3\\&=3(333a_1+33a_2+3a_3)\ 。\end{aligned}$$

事实上，如果学过高阶二项因式分解，我们就会知道 $10^k-1=(10-1)(10^{k-1}+10^{k-2}+\cdots+10^1+10^0)$，所以以上观察对任何正整数 k 都是成立的。因此，如果想知道 n 是否被 3 整除，我们变能直接省略掉方括号里的项（因为他们一定被 3 整除），只需要考虑剩下的 $(a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}+a_k)$。咦？这不就是各位数之和吗？证毕。

(e) 上述证明中，作者尽可能地保留了式子的一般性[1]（generality），所以才会有一大堆的“代数符号”。但整个证明的“核心精神”其实是很直观的。我们以 $n = 46373$ 为例，想知道 3 是否能整除它。依照上述证明的步骤，但这次有具体的数字为例，我们对 n 进行以下一系列拆解和改写：

$$\begin{aligned}
n &= 46373 \\
&= 10000 \times 4 + 1000 \times 6 + 100 \times 3 + 10 \times 7 + 1 \times 3 \\
&= (9999 \times 4 + 4) + (999 \times 6 + 6) + (99 \times 3 + 3) + (9 \times 7 + 7) + (3) \\
&= (9999 \times 4 + 999 \times 6 + 99 \times 3 + 9 \times 7) + (4 + 6 + 3 + 7 + 3) \\
&= 3(3333 \times 4 + 333 \times 6 + 33 \times 3 + 3 \times 7) + (4 + 6 + 3 + 7 + 3) \text{ 。}
\end{aligned}$$

这时候如果我们把 $n \div 3$，则有

$$\begin{aligned}
\frac{n}{3} &= \frac{3(3333 \times 4 + 333 \times 6 + 33 \times 3 + 3 \times 7) + (4 + 6 + 3 + 7 + 3)}{3} \\
&= \frac{3(3333 \times 4 + 333 \times 6 + 33 \times 3 + 3 \times 7)}{3} + \frac{(4 + 6 + 3 + 7 + 3)}{3} \\
&= (3333 \times 4 + 333 \times 6 + 33 \times 3 + 3 \times 7) + \frac{(4 + 6 + 3 + 7 + 3)}{3} \text{ 。}
\end{aligned}$$

由此可见，想知道 n 是否被 3 整除，只需要计算

$$\frac{(4 + 6 + 3 + 7 + 3)}{3} = \frac{23}{3} \text{ 。}$$

因此，46373 无法被 3 整除。

[1]数学中的“一般性”（generality）其实一点都“不一般”，它是指“（一定条件底下）任意情况都能成立”的意思。生活中，我们说“一般情况”是指大部分会发生的情况，而数学里的“一般情况”却是用来表示某数学定理的“普世性”。

3. 若四位数 $\overline{2x79}$ 可以被 99 整除，求 x。

接上一题，作者假设同学已掌握了 $2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11$ 的整除规则。

面对 11 以上的整除规则，通常的做法是把除数因数分解成几个我们已经知道整除规则的数。因此，与其问“四位数 $\overline{2x79}$ 如何才被 99 整除?”，我们可问“四位数 $\overline{2x79}$ 如何才被 9 和 11 同时整除”。这两个问题是等价的。

先考虑 9 的整除规则：计算各位数之和，其结果能被 9 整除。由此，我们要求 $2+x+7+9$ 是 9 的倍数，故 $x=0$ 或 $x=9$。

接着考虑 11 的整除规则：从高位到低位交错加减，其结果能被 11 整除。由此我们要求 $+2-x+7-9$ 是 11 的倍数（可以是负数）。首先，我们先把式子化简，得

$$+2-x+7-9=-x \text{ 。}$$

因此，我们要求 $-x$ 能被 11 整除。由于 x 必须是介于 0 到 9 的整数（因为 $\overline{2x79}$ 是四位数），所以唯一能满足条件的是 $x=0$。

比较以上两个结论，我们发现 $x=0$ 可同时满足 9 和 11 的整除规则，故 $x=0$。 □

点评：

(a) 这类题目在求得解后，不妨进行验证，以确保答题正确。我们求得 2079。这个数字挺接近 $2100=21\times100$，所以我们猜 $2079\div99=21$。最后我们试试看：

$$21\times99=21\times(100-1)=21\times100-21=2100-21=2079 \text{ 。}$$

果然没错。

8. 若 $2x$ 及 $\frac{55}{x}$ 都是正整数，则 x 有几个可能值？

$2x$ 若要成为正整数，则 x 必须是正整数，由此：$x = 1, 2, 3, \ldots$。

$\frac{55}{x}$ 若要成为正整数，则 x 必须能整除 55，由此：

$$x = 55, 11, 5, 1, -1, -5, -11, -55 \text{ 。}$$

因此，若要求 $2x$ 及 $\frac{55}{x}$ 都为正整数，则

$$x = 1, 5, 11, 55 \text{ 。}$$

一共有 4 个可能值。 □

点评：

(a) 这题其实主要就是在问 55 的所有因数。

10. 由 1000000 到 9999999 的整数中，有多少个含有 $0,1,2,3,4,5,6$ 这 7 个数字的每一个各一次？

1000000 到 9999999 的整数范围，其实就是所有的七位数。题目的意思就是问有多少个七位数，是由 $0,1,2,3,4,5,6$ 不重复第组成。比如：6543210, 1023456 等。

显然，我们不能够把 0 作为数字的开头，因为 0123456 并不是一个数，或者说，不是一个合格的七位数。

第一格子：从左边算起第一个格子只能摆入 $1,2,3,4,5,6$ 这6 个数字其中之一。我们就假设先摆入 1 吧!

1	?	?	?	?	?	?

第二格：剩下 6 个空格，而剩下的数字有 $0,2,3,4,5,6$。我们须摆入这6 个数字其中之一，假设摆入 4 吧!

1	4	?	?	?	?	?

第三格：剩下 5 个空格，而剩下的数字有 $0,2,3,5,6$。我们须摆入这5 个数字其中之一，假设摆入 0 吧!

1	4	0	?	?	?	?

第四格：剩下 4 个空格，而剩下的数字有 $2,3,5,6$。我们须摆入这4 个数字其中之一，假设摆入 5 吧!

1	4	0	5	?	?	?

第五格：剩下 3 个空格，而剩下的数字有 $2,3,6$。我们须摆入这3 个数字其中之一，假设摆入 6 吧!

1	4	0	5	6	?	?

第六格：剩下 2 个空格，而剩下的数字有 $2,3$。我们须摆入这2 个数字其中之一，假设摆入 2 吧!

1	4	0	5	6	2	?

第七格：剩下 1 个空格，而剩下的数字有 3。我们须摆入这1 个数字其中之一，即 3。最终得

1	4	0	5	6	2	3

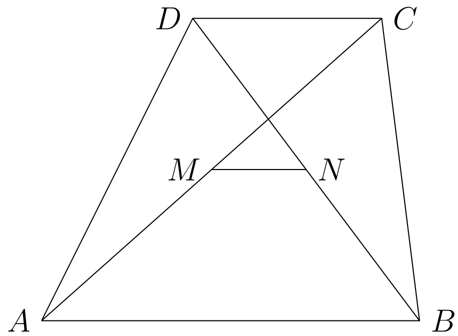
以上过程中的每一步，依序都分别有$6,6,5,4,3,2,1$种选择。因此如果我们不断重复上述过程，并且要排出不同的七位数，则一共的排列数有 $6\times6\times5\times4\times3\times2\times1=5040$ 。 □

点评：

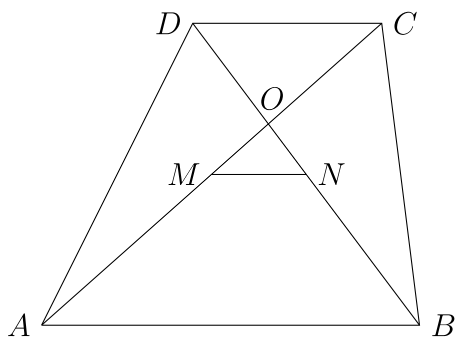
(a) 初中竞赛遇到组合排列的题目（更深入内容，可见高二的高级数学课本）一般都能通过奇思妙想找出答案。本题把组合一个七位数的过程一步步拆解，然后观察每一步有多少中可能性。最后利用组合排列里的“乘法原理”，把所有可能性相乘得到答案。

(b) 所谓乘法原理，初次听闻的读者可以通过以下例子去直观理解。考虑一个人的穿搭，只考虑上半身的衣服和下半身的裤子。假设这人有 3 件上衣以及 1 条裤子，那显然他只有 3×1 种选择。而如果另外有一个人有 3 件上衣以及 2 条裤子条裤子，那么可搭配的数量就翻倍，一共有 3×2 种选择。

21. 下图中，$ABCD$ 是一梯形，$AB > CD$，$AB \parallel CD$。M 与 N 分别是线段 AC 与 BD 的中点。若 $AB = 1024$，$MN = 124$，求 CD 的长。



显然 AC 与 BD 的交点是个重要的点，设之为 O。



接下来我们需要多次用到相似三角形性质。由于已知 AB 和 MN 的长度，所以我们先从 $\triangle OAB$ 和 $\triangle OMN$ 开始。首先，因为 M 与 N 分别是线段 AC 与 BD 的中点，所以 MN 比如平行于 AB 和 CD，即得

$$\triangle OAB \sim \triangle OMN \text{ 。}$$

由于 $\triangle OAB$ 相似于 $\triangle OMN$，所以对应的边比例相等，即

$$\frac{AB}{MN} = \frac{AO}{MO} := \lambda \text{ 。}$$

为了方便，我们暂时将 $AB : MN$ 这个比例设为 λ。

记得，我们的最终目标是找到 CD，所以一定要想办法跟 $\triangle OCD$“扯上关系”。再一次，我们根据 $MN \parallel CD$，可以推理出

$$\triangle OMN \sim \triangle OCD \text{ 。}$$

有了以上的准备，我们可以开始演算出 CD 了：

$$\begin{aligned}
\frac{AO}{MO} &= \lambda \\
\frac{AM+MO}{MO} &= \lambda \\
\frac{CM+MO}{MO} &= \lambda \\
\frac{(CM-MO)+2MO}{MO} &= \lambda \\
\frac{CO+2MO}{MO} &= \lambda \\
\frac{CO}{MO}+2 &= \lambda \\
\frac{CO}{MO} &= \lambda-2 \text{ 。}
\end{aligned}$$

最后，根据 $\triangle OMN \sim \triangle OCD$，我们有

$$\frac{CD}{MN} = \frac{CO}{MO} = \lambda - 2 \text{ 。}$$

因此

$$CD = (\lambda-2)MN = \left(\frac{AB}{MN}-2\right)MN = AB - 2MN = 776 \text{ 。}$$

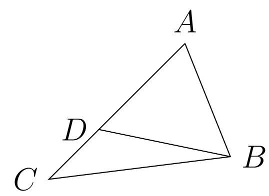
□

点评：

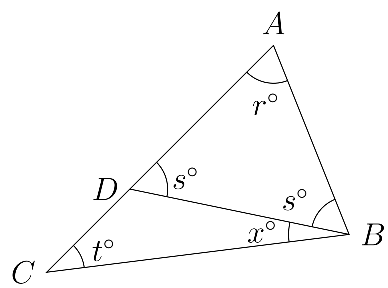
(a) 相似三角形是初中竞赛中最常使用到的知识点之一，也是初中几何的课程范围。参赛同学若正课里还没学过，可以先自己预习或上网观看相关视频。

(b) 好习惯：从最后解答中我们发现其实我们没必要真的算出 $\lambda = 1024/124$ 的值，因为最后 $(\lambda-2)MN$ 刚好把分母抵消掉了。所以一个良好的习惯是，先把“已知数字”先设成一个符号，尽可能保留到最后再决定是否需要真的算出来。

20. 下图中，D 是 AC 上的一点使得 $AD = AB$。若 $\angle ABC - \angle ACB = 42^\circ$，$\angle CBD = x^\circ$，求 x。



这类题目，在图上把角度写上个代号会很方便。由于 $AD = AB$，故 $\triangle ABD$ 为等腰三角形，所以 $\angle ABD = \angle ADB := s^\circ$。另外我们也设 $\angle DAB := r^\circ$ 及 $\angle ACB := t^\circ$。见下图。



有了这些“代号”，题目的已知便可改写如下：

$$\begin{aligned} \angle ABC - \angle ACB &= 42^\circ \\ (s + x) - t &= 42 \text{ 。} \end{aligned} \tag{Eq. 1}$$

另外根据三角形内角和为 180°，从 $\triangle ABD$ 及 $\triangle ABC$ 分别可得

$$2s + r = 180 \tag{Eq. 2}$$

及

$$(s + x) + r + t = 180 \text{ 。} \tag{Eq. 3}$$

观察发现 (Eq. 1) + (Eq. 3) 的左式包含 (Eq. 2) 的左式，因此

$$\begin{aligned} [(s + x) - t] + [(s + x) + r + t] &= 42 + 180 \\ (2s + r) + 2x &= 42 + 180 \\ 180 + 2x &= 42 + 180 \\ \therefore x &= 21 \text{ 。} \end{aligned}$$

□

点评：

(a) 本题主要考验“三角形内角和”知识的应用能力和方程求解能力。简单的几何题可通过编写“代号”，让运算变得更简洁而快速。

12. 两支蜡烛，一支红色，一支黄色。它们一样长，且同一时间被点燃。红色蜡烛烧了 6 小时才烧完，黄色蜡烛烧了 3 小时就烧完。若点燃 x 小时后，红色蜡烛的长度是黄色蜡烛的 2 倍，求 $60x$ 的值。

假设蜡烛长度为 L，则两支蜡烛的燃烧速度分别为 $L/6$（红色）和 $L/3$（黄色），而点燃了 x 小时之后的长度分别为 $L-(L/6)x$ 和 $L-(L/3)x$。最后根据题目，我们可写出

$$\begin{aligned}
L-\frac{L}{6}x &= 2\left(L-\frac{L}{3}x\right)\\
1-\frac{1}{6}x &= 2\left(1-\frac{1}{3}x\right)\\
\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right)x &= 2-1\\
\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right)x &= 2-1\\
\therefore x &= 2\ 。
\end{aligned}$$

因此，$60x=120$。 □

点评：

(a) 要记得点然后剩下的长度是 $L-(L/6)x$，而不是 $(L/6)x$。

(b) 记得，速度等于距离除以时间，并以此推导出其他关系式，比如距离等于速度乘以时间。

(c) 其实这题的数字设计得比较小而巧，所以数感不错的同学其实很快就能看到 $6-2$ 恰好是 $3-2$ 的两倍，而蜡烛剩下的长度其实就和要染尽所剩余的时间成比例。

13. 一个课程一共有 n 次考试，已经考了 $(n-1)$ 次。若小明最后一次考试考 100 分，则他在 n 次考试的平均分数是 90 分。若他在最后一次考试考 60 分，则他在 n 次考试的平均分数是 85 分。求 n 的值。

假设前 $(n-1)$ 次考试的总分为 S，则根据题目，可列出

$$\begin{cases} \dfrac{S+100}{n} = 90 \\ \dfrac{S+60}{n} = 85 \end{cases} 。$$

由此可得

$$\begin{cases} S+100 = 90n \\ S+60 = 85n \end{cases} 。$$

两式相减后得

$$(S+100)-(S+60) = 90n-85n$$
$$5n = 40$$
$$\therefore n = 8 \ 。$$

□

点评:

(a) 作者最近才知道二元一次联立方程式是初二数学下半年的课程，但这在竞赛中是属于比较基本的代数知识了。

(b) 参赛同学如果熟悉了一元一次方程，可以先自习二元一次联立方程式的内容。网上有许多资源，比如:

https://www.youtube.com/watch?v=x6MhCsllVP0

(c) 其实二元一次方程的主要技巧就是两个（甚至更多）方程式，互相可以加减。只要加减过程中能成果抵消掉其中一个未知数，比如这题里的 S 便通过相减后消失了，那剩下的方程就只有一个未知数 n，“退化”为一元一次方程式。

14. 一间珠宝店所卖的每粒宝石的价格都是整数，它们的价格在每周一开始就调整。在这个星期，一粒红宝石与一粒蓝宝石的价格一样。红宝石这星期的价格比上星期的上涨了 10%，蓝宝石这星期的价格比上星期的下跌了 10%。求蓝宝石上星期的价格的最小可能值。

显然这是一题代数题。

设上周红蓝宝石的价格分别为 x 和 y，再根据题目对价格变化的描述，得出

$$110\% \times x = 90\% \times y$$
$$1.1x = 0.9y \text{ 。}$$

到目前位置，方程有无限个解。但是我们有另外一个条件还没用上，那就是“每粒宝石的价格都是整数”。虽然题目没说，但是价格应该也是正数，所以不考虑负数。

当 x 和 y 被局限于正整数范围，这题目其实就变成了“数论题”，因此我们把方程改写为

$$\frac{x}{y} = \frac{9}{11} \text{ 。}$$

显然，一个最直接的解就是 $x = 9$，$y = 11$。这价格还可能更大，比如 $(x, y) = (18, 22), (27, 33), \ldots$。但是由于 9 和 11 为质数，所以 $(x, y) = (9, 11)$ 是最小的解了。

答，蓝宝石上星期的价格的最小可能值为 11。 □

点评：

(a) 应用题其实考的就是一点：如何把文字的描述转化为方程式。一旦写成了方程式，我们就能把它转化为我们熟悉的东西（假设你学过），然后求解。这也是数学能在各领域得到广泛应用的主要原因。

(b) 所谓“数论题”就是问“因数”、“整除性”、“质数”等的问题。数论的研究对象一般局限在整数（有时还只考虑正整数），而代数题目一般允许未知数为任意实数（允许小数点）。在初中阶段或许看不出，但数论一直都是几百年来纯数学里的“皇冠”，因为它的问题几乎没太多实际应用（是最纯的数学领域），但却极奇困难，于是吸引了每个时代最顶尖数学家的挑战，也是业余数学爱好者最喜欢的内容。