云峰朋辈辅学微甲提升 2 组 — 第 6 讲

内容提要: 二重积分　　**Date:** May 15 2022

主讲人: Famiglisti @CC98　　**Place:** 碧 2 党员之家

1 知识概要

1. **一些概念**
   - 区域分割、区域的直径
   - 区域的面积、零面积
   - 黎曼积分 vs 勒贝格积分
2. **二重积分的一些性质**
   - 积分中值定理
     设 f(x,y) 在平面有限闭区域上连续,A 为 D 的面积,则存在 $(\xi,\eta)\in D, s.t. \iint_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)A$
   - 线性性、可加性、区域可加性
3. **计算技巧**

   a) 对称区域求积
   - 区域 D 关于 y 轴对称, 右侧区域为 D_1
     - 当 f(-x,y)=f(x,y) 时，$\iint_D f(x,y)dxdy = 2\iint_{D_1} f(x,y)dxdy$
     - 当 f(-x,y)=-f(x,y) 时，$\iint_D f(x,y)dxdy = 0$
   - 区域 D 关于 x 轴对称, 上侧区域为 D_1
     - 当 f(x,-y)=f(x,y) 时，$\iint_D f(x,y)dxdy = 2\iint_{D_1} f(x,y)dxdy$
     - 当 f(x,-y)=-f(x,y) 时，$\iint_D f(x,y)dxdy = 0$
   - 区域 D 关于 y=x 对称,$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(y,x)dxdy$
   - 区域 D 关于 y=-x 对称,$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(-y,-x)dxdy$

b) 坐标变换

- 变量替换公式推导
  设 $x = x(u,v), y = y(u,v), (u,v) \in D'$
  这一代换满足：

  i. 建立了 D 与 D' 之间的一一对应；

  ii. x,y 在 D' 内具有各个变元的连续偏导数,并且其逆变换 u=u(x,y),v=v(x,y) 在 D 内也具有各个变元的连续偏导数

  iii. 代换的 Jacobi 行列式 $J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ 在 D' 内无零点

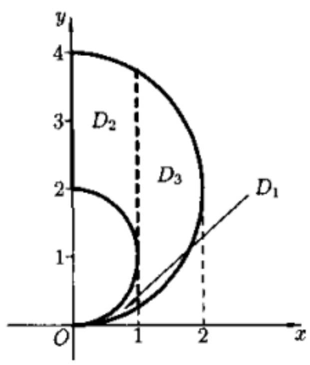
  则，$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D' f(x(u,v),y(u,v))|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|dudv$

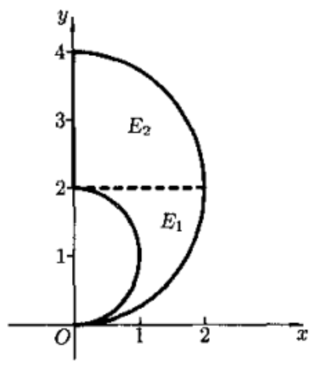
- 极坐标变换
  $\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} rf(r\cos\theta, r\sin\theta)\,dr$ 用极坐标计算二重积分一般至少需要满足如下两个特征之一：

  – 积分区域的边界曲线含 $x^2 + y^2$

  – 被积函数 f(x,y) 的表达式中含 $x^2 + y^2$

c) x 型区域与 y 型区域





4. **应用**

设 $\sum: z = \varphi(x,y)((x,y) \in D)$ 为空间曲面，则该曲面段的面积为：

$$A = \iint_D \sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2} d\sigma$$

2 例题

【example 1】设 $l: x=\varphi(t), y=\psi(t), \alpha \leq t \leq \beta$ φ, ψ 连续，且至少其中之一有连续导数，则曲线 l 的面积为零。

【example 2】求由曲线 $(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})^2=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ 所围的面积。

【example 3】求 $\iint(\sqrt{\frac{x-c}{a}}+\sqrt{\frac{y-c}{b}})dxdy$, 其中 D 由曲线 $\sqrt{\frac{x-c}{a}}+\sqrt{\frac{y-c}{b}}=1, x=c, y=c$ 围成，且 a,b,c>0 【example 4】求 $I=\iint_{\Omega}(x+y)dxdy$，其中 Ω 由 $y^2=2x, x+y=4, x+y=12$ 围成

【example 5】设 $D: x^2+y^2 \leq 4$, 则 $\iint_D (x-2y)^2 d\sigma =$

【example 6】设 $D: x^2+y^2 \leq 1(x \geq 0, y \geq 0)$, 则 $\iint_D \frac{x^2 \sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} d\sigma =$

5 参考书目

1. 陈纪修, 於崇华, 金路. 数学分析. 下册 [M]. 北京: 高等教育出版社,2019.5
2. 汤家凤. 考研数学复习大全 [M]. 北京: 中国原子能出版社,2019.2
3. 谢惠民. 数学分析习题课讲义. 下册 [M]. 北京: 高等教育出版社,2004.1
4. 苏德矿， 吴明华. 微积分. 下 [M]. 北京: 高等教育出版社,2007.7