云峰朋辈辅学微甲提升 2 组 — 第 4 讲

内容提要: 空间解析几何、多元函数微分学 **Date:** April 10 2022

主讲人: Famiglisti @CC98 **Place:** 碧 2 党员之家

Part A : 空间解析几何

1 知识概要

1. **混合积运算性质**

   a) **a,b,c** 共面 ⇔(**a,b,c**)=0

   b) **a,b,c=b,c,a=c,a,b**

   c) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})b-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$

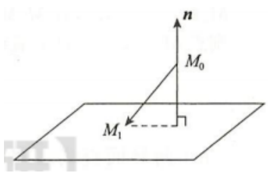
   d) Lagrouge 恒等式 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})=(\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d})-(\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c})$

   e) $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=(\vec{a},\vec{b},\vec{d})\vec{c}-(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\vec{d}=(\vec{a},\vec{c},\vec{d})\vec{b}-(\vec{b},\vec{c},\vec{d})\vec{a}$

   f) $(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\times\vec{d},\vec{e}\times\vec{f})=(\vec{a},\vec{b},\vec{d})(\vec{c},\vec{e},\vec{f})-(\vec{a},\vec{b},\vec{c})(\vec{d},\vec{e},\vec{f})$

2. **几个距离公式**

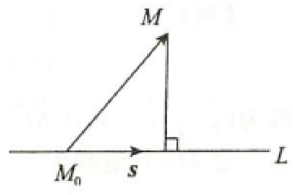
   a) 点到平面：$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$



   b) 点到直线：$d=\frac{\left|M_0\vec{M}\times\vec{s}\right|}{|\vec{s}|}$

   c) 两平行平面：$d=\frac{|D_2-D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

   d) 两异面直线：$d=\frac{\left|M_1\vec{M}_2\cdot(\vec{v_1}\times\vec{v_2})\right|}{|\vec{v_1}\times\vec{v_2}|}$



3. **平面束方程及应用**

设 L:$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ 为一条直线，则过 L 的所有平面成为过直线 L 的平面束，平面束方程为

$$\pi': A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

对于空间直线和平面的问题，解题思路比较灵活，方法往往不唯一，通过对比发现，利用平面束方程求解，思路更加清晰，过程更简洁。(见例题 1、真题 1)

4. **曲面**
   a) 柱面
   b) 旋转曲面
      i. 二维空间曲线的旋转曲面
      ii. 三维空间直线的旋转曲面 (见真题 2)

2 例题

【example 1】求直线 L $\begin{cases} 2x-y+z=1 \\ x+y-z=-1 \end{cases}$ 在平面 $\pi: x+2y-z=0$ 上的投影直线的方程

3 真题解析

【18-19mid】求过点 A(-1,0,4) 且平行于平面 3x-4y+z=0, 又与直线 $\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{2}$ 相交的直线方程

【18-19mid】求直线 L $\begin{cases} x+y+z=0 \\ y-z-1=0 \end{cases}$ 绕 Oz 轴旋转所成的旋转曲面方程

【18-19final】设有二次曲面 $S: x^2+xy+y^2-z^2=1$, 试求曲面 S 上点 (1,-1,0) 处的切平面 π 的平面方程。

【20-21final】求曲面 $S: z=x^2y^3-e^z+e$ 上点 (1,1,1) 处的切平面方程及法线方程

Part B：多元函数微分学

1 知识概要

1. **点集拓扑学的一些术语** 内点、外点、边界、开集、闭集、连通

2. **连续、可偏导、可微** (以二元函数为例)

   a) 连续：$\lim_{x\to x_0,y\to y_0} f(x,y)=f(x_0,y_0)$，称 f(x,y) 在 (x_0,y_0) 处连续

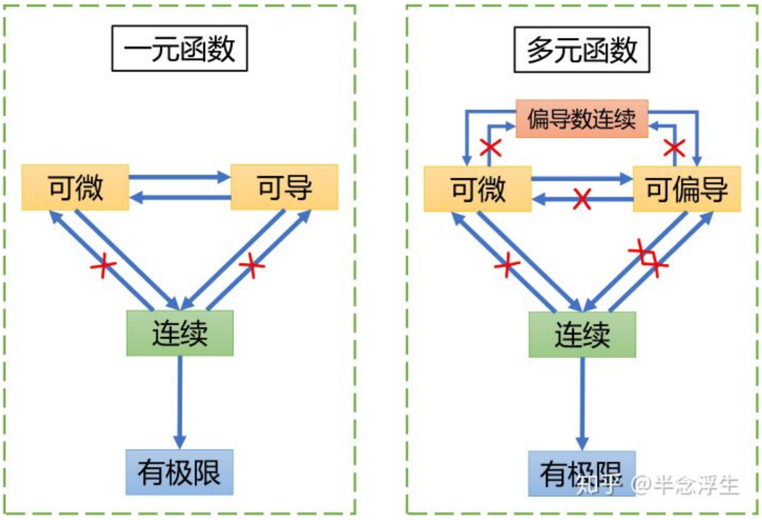
   b) 可偏导：$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ 存在，称 f(x,y) 在 (x_0,y_0) 处对 x 可偏导

   c) 可微：若 z=f(x,y) 在 (x,y) 处全增量 $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$ 可表示为

   $$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)\quad \left(\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0\right)$$
   $$A=f'_x(x,y),\quad B=f'_y(x,y)$$

   则称函数 f(x,y) 在点 (x,y) 处可微，其中全微分 $dz=A\Delta x+B\Delta y$

   d) 关系图解



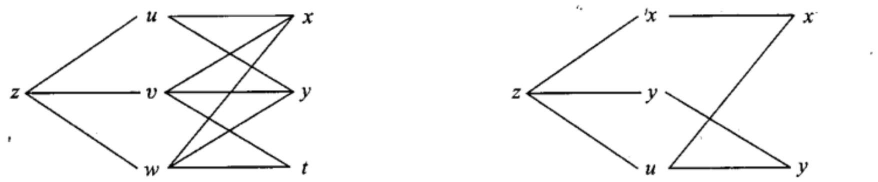
3. **偏导数计算法则**

   a) 复合函数：链导法则

   b) 隐函数

      i. 由一个方程确定的隐函数

      ii. 由多个方程确定的隐函数——Jacobi 行列式法



2 例题

【example 1】设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2},(x,y)\neq(0,0)\\0,(x,y)=(0,0)\end{cases}$ 研究函数 f(x,y) 在 (0,0) 处的连续性、可偏导性、可微性及一阶偏导的连续性。

3 真题解析

【18-19mid】已知 $z=(e^x+y^2)^y$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$

【18-19mid】设 $u=u(x,y)$ 对新变量 ξ,η 具有二阶偏导数, 求 a, 使得在变换 $\xi=x+ay,\eta=x-y$ 下, 将方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 简化为 $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$

【18-19final】设 f(x,y) 在 $\mathbb{R}^2$ 上有连续的一阶偏导数，且 $\forall t>0, \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, f(tx,ty)=t^3 f(x,y)$ 证明：$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3f(x,y)$

【18-19final】设 $f(x,y)=(xy)^{\frac{2}{3}}$,

1. 求 $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$
2. 证明：f 在点 (0,0) 处可微

【19-20final】设 $f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0,0) \\ 0, (x,y)=(0,0) \end{cases}$ 试求 $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$

【19-20final】证明：$\forall x\in(0,1), y\in(0,+\infty)$，不等式 $y(1-x)x^{y+1}<e^{-1}$ 成立.

【20-21final】设 z=f(u,v) 在平面上可微，且满足

$$\forall x\in\mathbb{R}, f(x^2+1,e^x)=e^{(x+1)^2}, f(x^2,x)=x^2e^{x^2}$$

求 f 在点 (1,1) 处的全微分 $df|_{(1,1)}$

【20-21final】设 D 是平面上的一个有界闭区域,z=z(x,y) 在 D 上连续，在 D^o 上有所有的连续二阶偏导函数，且满足 $\forall(x,y)\in D^o, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y)=0, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(x,y)\neq 0$
证明：z(x,y) 在 D 上的最值只能在 D 的边界上取到。

4 参考文献

1. 陈纪修, 於崇华, 金路. 数学分析. 下册 [M]. 北京: 高等教育出版社,2019.5
2. 汤家凤. 考研数学复习大全 [M]. 北京: 中国原子能出版社,2019.2
3. 谢惠民. 数学分析习题课讲义. 下册 [M]. 北京: 高等教育出版社,2004.1
4. 张艳敏, 申子慧. 平面束方程的详细证明及应用举例 [J]. 湖南理工学院学报 (自然科学版),2016,29(04):20-23.DOI:10.16740/j.cnki.cn43-1421/n.2016.04.004.
5. 苏德矿， 吴明华. 微积分. 下 [M]. 北京: 高等教育出版社,2007.7
6. 丘维声. 解析几何.3 版 [M]. 北京： 北京大学出版社,2015.7