【例 2】 设常数 $k>0$，且正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sqrt{a_n}}{n+k}$（　）.

(A) 绝对收敛　　(B) 条件收敛　　(C) 发散　　(D) 敛散性与 k 有关

【解】 因为 $\left|(-1)^n\dfrac{\sqrt{a_n}}{n+k}\right|=\dfrac{\sqrt{a_n}}{n+k}\leqslant\dfrac{1}{2}\left[a_n+\dfrac{1}{(n+k)^2}\right]$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+k)^2}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2}\left[a_n+\dfrac{1}{(n+k)^2}\right]$ 收敛，于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{a_n}}{n+k}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sqrt{a_n}}{n+k}$ 绝对收敛，选(A).

【例 6】 设正数列 $\{a_n\}$ 单调增加且有界，判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ 的敛散性.

【解】 因为正数列 $\{a_n\}$ 单调增加且有界，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，令 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$.

令 $b_n=1-\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$，因为 $\{a_n\}$ 单调增加，所以 $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\leqslant 1$，于是 $b_n\geqslant 0$，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ 是正项级数且 $0\leqslant b_n=1-\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}}\leqslant\dfrac{1}{a_1}(a_{n+1}-a_n)$.

对级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_1}(a_{n+1}-a_n)$，

$S_n=\dfrac{1}{a_1}(a_2-a_1)+\dfrac{1}{a_1}(a_3-a_2)+\cdots+\dfrac{1}{a_1}(a_{n+1}-a_n)=\dfrac{1}{a_1}(a_{n+1}-a_1)$，

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{a_1}(A-a_1)$ 存在，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_1}(a_{n+1}-a_n)$ 收敛，根据正项级数的比较审敛法得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ 收敛.

【例 7】 设 $0\leqslant a_n<\dfrac{1}{n}$，判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^na_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^na_n^2$ 中哪些级数一定收敛？

【解】 令 $a_n=\dfrac{1}{n+1}$，显然 $0\leqslant\dfrac{1}{n+1}<\dfrac{1}{n}$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}$ 发散，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 不一定收敛.

令 $a_n=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{n}+(-1)^n\sin\dfrac{1}{n}\right]$，因为 $\sin\dfrac{1}{n}<\dfrac{1}{n}$，所以 $0\leqslant a_n<\dfrac{1}{n}$，

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^na_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n}+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{1}{n}$，因为 $\sin\dfrac{1}{n}\sim\dfrac{1}{n}$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^na_n$ 发散，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^na_n$ 不一定收敛.

取 $a_n=\dfrac{1}{(n+1)^2}$，显然 $0\leqslant\dfrac{1}{(n+1)^2}<\dfrac{1}{n}$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}$ 发散，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$ 不一定收敛.

因为 $0\leqslant a_n<\dfrac{1}{n}$，所以 $0\leqslant a_n^2<\dfrac{1}{n^2}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，由正项级数比较审敛法得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^na_n^2$ 绝对收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^na_n^2$ 一定收敛.

【例 8】 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ 的敛散性，若收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

【解】 令 $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}(x\geqslant 1)$，

$f'(x)=\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$，当 $x>e^2$ 时 $f'(x)<0$，即 $f(x)$ 单调减少，所以 $\left\{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right\}$ 除前面有限项外单调减少，又由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=0$ 得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}=0$，由莱布尼茨审敛法，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ 收敛.

因为 $\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\geqslant\frac{\ln 2}{\sqrt{n}}(n\geqslant 2)$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln 2}{\sqrt{n}}$ 发散，所以由比较审敛法得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ 发散，

即 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ 条件收敛.

【例 9】 判断 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\sqrt{n^2+1}\,\pi$ 的敛散性，当级数收敛时，判断是绝对收敛还是条件收敛.

【解】 $\sin\sqrt{n^2+1}\,\pi=\sin[n\pi+(\sqrt{n^2+1}-n)\pi]=(-1)^n\sin(\sqrt{n^2+1}-n)\pi$

$$=(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n},$$

因为 $\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}>0$，所以原级数为交错级数.

因为 $\left\{\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right\}$ 单调减少且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}=0$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\sqrt{n^2+1}\,\pi$ 收敛.

又因为 $\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\sim\frac{\pi}{2n}$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2n}$ 发散，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$ 发散，

即 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\sqrt{n^2+1}\,\pi$ 条件收敛.

【例 4】 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内二阶连续可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x^2}=2$，

证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right]$ 绝对收敛.

【证明】 因为 $f(x)$ 二阶连续可导，所以在 $x=0$ 的邻域内有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2).$$

由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x^2}=2$ 得 $f(0)=1$，

由洛必达法则，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=2$，于是 $f'(0)=0$，

根据导数定义，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\frac{f''(0)}{2}=2$，于是 $f''(0)=4$，

故 $f(x)=1+2x^2+o(x^2)$，当 n 充分大时，$f\left(\frac{1}{n}\right)=1+\frac{2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

因为 $\left|f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right|=\left|\frac{2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right|\sim\frac{2}{n^2}$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right|$ 收敛，即 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right]$ 绝对收敛.

【例 7】 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n (u_n > 0)$ 发散，$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{u_n}{S_n^2}$ 收敛.

【证明】 显然 $\{S_n\}$ 单调增加，因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$.

$$0 \leqslant \frac{u_n}{S_n^2} \leqslant \frac{u_n}{S_{n-1}S_n} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}S_n} = \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n},$$

对级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\dfrac{1}{S_{n-1}} - \dfrac{1}{S_n}\right)$，$S'_n = \left(\dfrac{1}{S_1} - \dfrac{1}{S_2}\right) + \left(\dfrac{1}{S_2} - \dfrac{1}{S_3}\right) + \cdots + \left(\dfrac{1}{S_n} - \dfrac{1}{S_{n+1}}\right) = \dfrac{1}{S_1} - \dfrac{1}{S_{n+1}}$，

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} S'_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{S_1} - \dfrac{1}{S_{n+1}}\right) = \dfrac{1}{S_1}$，所以 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\dfrac{1}{S_{n-1}} - \dfrac{1}{S_n}\right)$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{u_n}{S_n^2}$ 收敛.

【例 10】 设 $u_n > 0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} = q$ 存在，证明：当 $q > 1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；当 $q < 1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

【证明】 当 $q > 1$ 时，取 $\varepsilon_0 = \dfrac{q-1}{2} > 0$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} = q$，所以由极限定义，存在 $N > 0$，

当 $n > N$ 时，$\left| \dfrac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} - q \right| < \dfrac{q-1}{2}$，从而有 $\ln \dfrac{1}{u_n} > \dfrac{q+1}{2} \ln n$ 或 $0 \leqslant u_n < \dfrac{1}{n^{\frac{q+1}{2}}}$，

因为 $\dfrac{q+1}{2} > 1$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\frac{q+1}{2}}}$ 收敛，根据比较审敛法得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

当 $q < 1$ 时，取 $\varepsilon_0 = \dfrac{1-q}{2} > 0$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} = q$，所以由极限定义，存在 $N > 0$，

当 $n > N$ 时，$\left| \dfrac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} - q \right| < \dfrac{1-q}{2}$，从而有 $\ln \dfrac{1}{u_n} < \dfrac{q+1}{2} \ln n$ 或 $u_n > \dfrac{1}{n^{\frac{q+1}{2}}}$，

因为 $\dfrac{q+1}{2} < 1$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\frac{q+1}{2}}}$ 发散，根据比较审敛法得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

【例 12】 设 $f_0(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，又 $f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t)\mathrm{d}t$，证明：级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[0,a]$ 上绝对收敛.

【证明】 因为 $f_0(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，所以 $|f_0(x)|$ 在 $[0,a]$ 上连续，于是 $|f_0(x)|$ 在 $[0,a]$ 上取到最大值，令 $M = \max\limits_{0\leqslant x\leqslant a} |f_0(x)|$，

$$|f_1(x)| = \left| \int_0^x f_0(t)\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_0^x |f_0(t)| \mathrm{d}t \leqslant Mx,$$

$$|f_2(x)| = \left| \int_0^x f_1(t)\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_0^x |f_1(t)| \mathrm{d}t \leqslant \int_0^x Mt\,\mathrm{d}t = \frac{M}{2}x^2,$$

由归纳法得 $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{M}{n!}x^n \leqslant \dfrac{Ma^n}{n!}$.

对 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{Ma^n}{n!}$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{Ma^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{Ma^n}{n!}} = 0 < 1$，所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{Ma^n}{n!}$ 收敛，根据比较审敛法得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|$ 收敛，即 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[0,a]$ 上绝对收敛.