M2t1e1

【例 2】 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$ 的收敛域.

【解】 令 $\frac{1-x}{1+x}=t$，则级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$ 变为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{2n+1}$.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2n+1}}=1$ 得级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{2n+1}$ 的收敛半径为 $R=1$，

当 $t=-1$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 收敛；当 $t=1$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$ 发散，于是级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{2n+1}$ 的收敛域为 $[-1,1)$，由 $-1\leqslant\frac{1-x}{1+x}<1$ 得 $x>0$，故级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$ 的收敛域为 $(0,+\infty)$.

M2t2q1e1

【例 2】 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n+1}}(x-1)^{2n+1}$ 的收敛域与和函数.

【解】 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^{n+2}}\Big/\frac{n}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}$ 得幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n+1}}(x-1)^{2n+1}$ 的收敛半径为 $R=\sqrt{2}$，

当 $x-1=\pm\sqrt{2}$ 时，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(\pm\sqrt{2})^{2n+1}}{2^{n+1}}=\infty$，所以级数的收敛域为 $x-1\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$，即 $x\in(1-\sqrt{2},1+\sqrt{2})$.

令 $\frac{(x-1)^2}{2}=t$，则

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n+1}}(x-1)^{2n+1}=\frac{(x-1)^3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}n\left[\frac{(x-1)^2}{2}\right]^{n-1}=\frac{(x-1)^3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}nt^{n-1},$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(t^n)'=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}t^n\right)'=\left(\frac{t}{1-t}\right)'=\frac{1}{(1-t)^2}$，

故 $S(x)=\frac{(x-1)^3}{4}\cdot\frac{1}{\left[1-\frac{(x-1)^2}{2}\right]^2}$.

M2t2q2e1

【例 3】 求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)2^n}$的收敛域与和函数.

【解】 由$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\dfrac{1}{2}$得幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)2^n}$的收敛半径为$R=2$,

当$x=\pm2$时,因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{(\pm2)^{n+1}}{n(n+1)2^n}\right|=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$收敛,所以$x=\pm2$时,幂级数

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)2^n}$绝对收敛,于是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)2^n}$的收敛域为$[-2,2]$.

令$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)2^n}$,则$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n2^n}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)2^n}$,

而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n2^n}=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{n}=-x\ln\left(1-\dfrac{x}{2}\right)\ (-2\leqslant x<2)$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)2^n}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}}{n+1}=2\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{n}-\frac{x}{2}\right]=-2\left[\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)+\frac{x}{2}\right]\ (-2\leqslant x<2),$$

所以$S(x)=x+(2-x)\ln\left(1-\dfrac{x}{2}\right)\ (-2\leqslant x<2)$.

当$x=2$时,$S(2)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{n+1}}{n(n+1)2^n}=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}=2$,

$$\text{故 } S(x)=\begin{cases}(2-x)\ln\left(1-\dfrac{x}{2}\right)+x, & -2\leqslant x<2,\\ 2, & x=2.\end{cases}$$

M2t2q2e2

【例 1】 求幂级数$\sum\limits_{n=0}n^2x^n$的收敛域及和函数.

【解】 由$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$得$R=1$,

当$x=\pm1$时,$\lim\limits_{n\to\infty}n^2(\pm1)^n\neq0$,则当$x=\pm1$时,幂级数发散,故收敛域为$(-1,1)$.

$$\begin{aligned}S(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}n^2x^n=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n=\sum_{n=1}^{\infty}[n(n-1)+n]x^n=\sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)x^n+\sum_{n=1}^{\infty}nx^n\\&=x^2\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}+x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x^2\left(\sum_{n=2}^{\infty}x^n\right)''+x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'\\&=x^2\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''+x\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{x+x^2}{(1-x)^3}.\end{aligned}$$

M2t2q3e1

【例 5】 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n n!}x^n$ 的和函数.

【解】 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0$ 得收敛半径为 $R=+\infty$,收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

令 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n n!}x^n$,则 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n n!}x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n$,令 $\frac{x}{2}=t$,

$$
\begin{aligned}
S(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{n!}t^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n!}t^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}t^n+e^t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n-1)+n}{n!}t^n+e^t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n-1)}{n!}t^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}t^n+e^t\\
&=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)}{n!}t^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}t^n+e^t\\
&=t^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}t^{n-2}+t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}+e^t=(t^2+t+1)e^t,
\end{aligned}
$$

于是 $S(x)=\left(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+1\right)e^{\frac{x}{2}}$.

M2t2q3e2

【例 6】 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}\ (-1<x<1)$ 的和函数.

【解】 令 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}=x+\frac{2}{3}x^3+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}x^5+\cdots$,

$$
\begin{aligned}
S'(x)&=1+2x^2+\frac{2\cdot 4}{3}x^4+\cdots=1+x\left(2x+\frac{2}{3}\cdot 4x^3+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}6x^5+\cdots\right)\\
&=1+x[xS(x)]'=1+xS(x)+x^2S'(x),
\end{aligned}
$$

于是得和函数满足的微分方程为

$$S'(x)+\frac{x}{x^2-1}S(x)=\frac{1}{1-x^2},$$

解得 $S(x)=\left[\int\frac{1}{1-x^2}e^{\int\frac{x}{x^2-1}dx}dx+C\right]e^{-\int\frac{x}{x^2-1}dx}=\left(\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+C\right)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$=\frac{C}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}},$$

因为 $S(0)=0$,所以 $C=0$,于是幂级数的和函数为 $S(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

M2t2q4e1

【例 3】 求$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n-1)^2}{n+1}x^n$的收敛域与和函数.

【解】 由$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$得$R=1$,当$x=\pm1$时,$\frac{(n-1)^2}{n+1}(\pm1)^n\to\infty(n\to\infty)$,则当$x=\pm$时,级数发散,故收敛域为$(-1,1)$.

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n-1)^2}{n+1}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2-4(n+1)+4}{n+1}x^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n-4\sum_{n=0}^{\infty}x^n+4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1},$$

当$x=0$时,$S(0)=1$;

当$x\neq0$时,$S(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}\right)'-4\sum_{n=0}^{\infty}x^n+\frac{4}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$

$$=\left(\frac{x}{1-x}\right)'-\frac{4}{1-x}+\frac{4}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x x^n\mathrm{d}x=\frac{4x-3}{(1-x)^2}+\frac{4}{x}\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{4x-3}{(1-x)^2}+\frac{4}{x}\int_0^x\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x=\frac{4x-3}{(1-x)^2}-\frac{4}{x}\ln(1-x),$$

故$S(x)=\begin{cases}1, & x=0,\\ \frac{4x-3}{(1-x)^2}-\frac{4}{x}\ln(1-x), & 0<|x|<1.\end{cases}$

M2t3e1

【例 2】 将$f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}$展开成$x$的幂级数.

【解】 $f(0)=\frac{\pi}{4}$, $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}(-1<x<1)$,

由逐项可积性得

$f(x)-f(0)=\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x$,于是$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}(-1\leqslant x<1)$.

M2t3e2

例 10.4.6 求 $\ln\frac{\sin x}{x}$在 $x=0$ 的幂级数展开(到 x^4),其中函数$\frac{\sin x}{x}$应理解为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

解 首先,利用 $\sin x$ 的幂级数展开,可以得到

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots.$$

另外,我们有

$$\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\cdots,$$

将 $u=-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots$代入上式,即得

$$\ln\frac{\sin x}{x}=\left(-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots\right)^2+\cdots=-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}-\cdots.$$

利用上例,我们可以得到一些有趣的结果.在例 9.5.7 中,我们已得到等式

$$\frac{\sin x}{x}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right),$$

两边取对数,再将 $\ln\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$ 展开成幂级数,

$$\ln\frac{\sin x}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{n^2\pi^2}+\frac{1}{2}\frac{x^4}{n^4\pi^4}+\cdots\right).$$

将上式与例 10.4.6 中的结果相比较,它们的 x^2 系数,x^4 系数都对应相等,于是就得到等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}.$$

如果我们在计算时更精细些,也就是将 $\ln\frac{\sin x}{x}$的幂级数展开计算到 $x^6,x^8,\cdots$还可以获得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6},\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8},\cdots$的精确值.

M2t4e1

【例 3】 求$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n(n^2-1)}$的和.

【解】 令$S(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n^2-1)}$,收敛区间为$(-1,1)$.

$S(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n^2-1)}=\frac{1}{2}\left(\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n-1}-\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$,

令$S_1(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n-1}=x^2\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1}=x^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-x^2\ln(1-x)$,

$S_2(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-x-\frac{x^2}{2}=-\ln(1-x)-x-\frac{x^2}{2}$,

则$S(x)=\frac{1}{2}\left[(1-x^2)\ln(1-x)+x+\frac{x^2}{2}\right]$,

于是$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}(n^2-1)}=S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\ln 2\right)$,

故$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n(n^2-1)}=\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\ln 2$.

M3e1

1、① 设 $a_n=\frac{1}{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}$ 利用定积分想法,

$\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n})$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{a_n}$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n\sqrt{n}}}=\frac{1}{\int_0^1\sqrt{x}dx}=\frac{1}{\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1}=\frac{3}{2}$

从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ 敛散性相同，又由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}$ 收敛

② 当n为偶数时，$1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}>\underbrace{\sqrt{\frac{n}{2}}+\cdots+\sqrt{n}}_{(\frac{n}{2}\text{项})}>\frac{n}{2}\cdot\sqrt{\frac{n}{2}}$

n为奇数时，$1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}>\underbrace{\sqrt{\frac{n+1}{2}}+\cdots+\sqrt{n}}_{(\frac{n+1}{2}\text{项})}>\frac{n+1}{2}\sqrt{\frac{n+1}{2}}>\frac{n}{2}\sqrt{\frac{n}{2}}$

即对 $\forall n$，有 $1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}>\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot n^{\frac{3}{2}}$ 成立

则 $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}<\frac{2\sqrt{2}}{n^{\frac{3}{2}}}$，又由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}$ 收敛

M3e2

3、注意到 $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\left[1+(-x^2)\right]^{-\frac{1}{2}}$ （利用 $(1+x)^\alpha$ 的展开）

$$=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{3}{2})\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}(-x^2)^n$$

$$=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{2n}=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$$ （双阶乘即隔一个相乘）

且 $f(0)=0$

则 $f(x)=\int_0^x f'(t)dt+f(0)=\int_0^x 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n}dt$

$$=x+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1}$$

而 $f^{(99)}(0)$ 应为 $f(x)$ 幂级数展开式中 x^{99} 的系数再乘 $99!$

对应 x^{99} 项系数为 $\frac{97!!}{98!!\cdot 99}$

则 $f^{(99)}(0)=\frac{97!!\cdot 99!}{98!!\cdot 99}=\frac{97!!\cdot 98!}{98!!}=(97!!)^2$

M3e3

13. (1) 说明 $0<a_n<1$

（归纳法）显然 $a_0\in(0,1)$

若 $n=k$ 时成立，$k\in N$

则 $a_k\in(0,1)$，$1-a_k\in(0,1)$

又 $a_{k+1}=a_k(1-a_k)$

∴ $a_{k+1}\in(0,1)$ 成立

∴ 对 $\forall n$ 均有 $0<a_n<1$

又 $a_{n+1}=a_n(1-a_n)<a_n\cdot 1$

∴ $\{a_n\}$ 单调递减，且有下界 0

∴ $\{a_n\}$ 有极限，且设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$

∴ $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$

∴ $A=A(1-A)$，$A=0$

由莱布尼兹定理，则级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$ 收敛

(2) ∵ $a_{n+1}=a_n(1-a_n)$

∴ $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{1-a_n}$

则 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{1-a_n}<\frac{1}{1-a_0}$ （对 $n\geq1$）

又 $\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_0}=\frac{1}{1-a_0}$

∴ $\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_0}<\frac{n}{1-a_0}$ （累项相加）

则 $\frac{1}{a_n}<\frac{n}{1-a_0}+\frac{1}{a_0}$

∴ $a_n>\frac{1}{\frac{n}{1-a_0}+\frac{1}{a_0}}$

又 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\frac{n}{1-a_0}+\frac{1}{a_0}}$ 发散

（即看成 $\sum\frac{1}{n}$）

∴ $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ 发散

M3e4

2、令 $a_n=\frac{(-1)^n}{n+1}$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=1$

从而幂级数的收敛半径 $r=1$

设 $S(x)=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n+1}$. 此时 $-1<x<1$ ，有 $S(0)=0$

则 $T(x)=xS(x)=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum\limits_{n=3}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$

从而求导有 $T'(x)=\sum\limits_{n=3}^{+\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(-1)^n x^n=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(-x)^n$

$$=\frac{(-x)^2}{1-(-x)}=\frac{x^2}{1+x}$$

则 $T(x)-T(0)=\int_0^x T'(t)\,dt=\int_0^x\frac{t^2+t-t-1+1}{1+t}\,dt$

$$=\int_0^x t-1+\frac{1}{t+1}\,dt=\ln|t+1|-t+\frac{1}{2}t^2\Big|_0^x=\frac{1}{2}x^2-x+\ln|x+1|$$

又 $T(0)=0$, 从而 $T(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\ln|x+1|$

从而 $x\neq0$ 时 $S(x)=\frac{T(x)}{x}=\frac{1}{2}x-1+\frac{\ln(x+1)}{x}$, 此时还有 $-1<x<1$ 成立.

再考虑 $x=\pm1$ 情形. $x=-1$ 时 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n+1}=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散

$x=1$ 时 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^n}{n+1}=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ 由莱布尼兹判别法易知其收敛

综上, 则幂级数的和函数 $S(x)=\begin{cases}\frac{\ln(x+1)}{x}+\frac{1}{2}x-1 & -1<x<0 \text{ 或 } 0<x\leq1\\ 0 & x=0\end{cases}$

M3e5

1. 令 $a_n=(-1)^n\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(2^n+3^n)n!}$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(2^n+3^n)n!(\alpha-n)}{(2^{n+1}+3^{n+1})(n+1)!}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}\cdot\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right|$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\frac{2}{3})^n+1}{2\cdot(\frac{2}{3})^n+3}=\frac{1}{3}$ 则收敛半径 $r=3$