云峰朋辈辅学微甲提升 2 组 — 第 8 讲

内容提要: 曲线积分　　　　**Date:** May 29 2022

主讲人: Famiglisti @CC98　　　　**Place:** 碧 2 党员之家

1 知识概要

1. **第一类曲线积分————对弧长的曲线积分**
   $\int_L f(x,y)ds = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$
   $\int_L f(x,y,z)ds = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\Delta s_i$
   积分可视化:

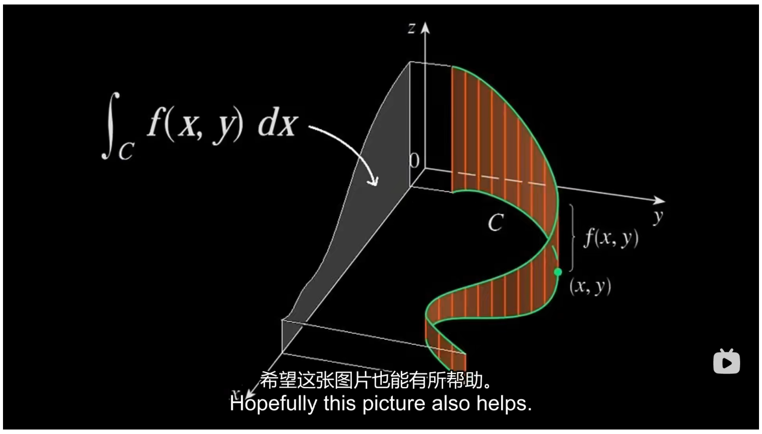

图 1: 积分值为红色区域面积

   $\int_L ds = l$,l 为曲线长度

2. **第二类曲线积分————对坐标的曲线积分**
   a) 二维空间: $\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$
   b) 三维空间: $\int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$

   $\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_L (P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta)ds$
   $\int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int_L (P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma)ds$

3. **Green 公式**
$\iint_D(-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial x})dxdy=\int_{\partial D}Pdx+Qdy$
使用条件:
   - D 为 $\mathbb{R}^2$ 内的一个有界闭区域
   - ∂D 由光滑曲线或逐段光滑曲线组成
   - 函数 P(x,y),Q(x,y) 在 D 内有关于自变量 x,y 的连续偏导数
   - ∂D 的方向关于 D 是正向的

   推论: 由逐段光滑的简单曲线 C 所界的面积 S 可用曲线积分表示为 $S=\oint_C xdy=-\oint_C ydx=\frac{1}{2}\oint_C xdy-ydx$

2 真题

【18-19final】设曲线 C 为一元函数 $y=\int_1^x\sqrt{sin(t^2)}dt, x\in[1,\sqrt{\frac{\pi}{2}}]$ 的图像，试计算第一类曲线积分 $\int_C xds$

【18-19final】设 γ 为圆柱螺线的一段 $x=\cos t, y=\sin t, z=2t, 0\leq t\leq\pi$ 其中 γ 的正向为参数 t 增加的方向，并设 γ_1 为 γ 的前半段有向弧 ($t\in[0,\frac{\pi}{2}]$), 其正向与 γ 一致，又设 L 为圆柱螺线 γ 上点 $(0,1,\pi)$ 处的切线，并设 L_1 为切线 L 上一段以点 $(0,1,\pi)$ 为起点，正向与 γ 正向一致，长度为 $\sqrt{5}$ 的有向直线段，试计算第二类曲线积分 $\int_{\gamma_1\cup L_1}yzdx+xzdy+xydz$

【18-19final】设 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|0\le x\le 1, y_1(x)\le y\le y_2(x)\}$, 其中 $y=y_1(x), y=y_2(x)$ 是 [0,1] 上的连续函数，u(x,y) 在包含 D 的一个开集上有连续的一阶偏导函数，设 D 的边界 ∂D 的正向为逆时针方向

证明：$\oint_{\partial D} udx=-\iint \frac{\partial u}{\partial y}dxdy$

【19-20final】设二元函数 P(x,y),Q(x,y) 在平面但联通区域 D 上有所有连续的一阶偏导函数, 且在 D 内的任意一条光滑的简单封闭曲线 C 上, 都有 $\oint_{C+} P(x,y)dy-Q(x,y)dx=0$ 成立。试证明在 D 内有 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}=0$ 恒成立

【20-21final】设空间曲线 C 为 $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x=t, y=\frac{t^2}{2}, z=\frac{t^3}{3}, t\in[0,e]\right\}$，计算第一类曲线积分

$$I_1=\int_C \frac{xz}{\sqrt{1+2y+4y^2}}ds$$

3 例题

【example 1】计算积分

$$I = \oint_C \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r} ds$$

其中 C 为逐段光滑的简单闭曲线,(0,0) 在 C 外,$\vec{r} = (x, y)$,$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$,$\vec{n}$ 为 C 上的单位外法向量。

思考：(0,0) 在 C 内,(0,0) 在 C 上的情形

【example 2】计算

$$I = \oint_C \frac{e^y}{x^2 + y^2}[(x \sin x + y \cos x)dx + (y \sin x - x \cos x)dy]$$

其中 $C : x^2 + y^2 = 1$, 取逆时针方向

【example 3】设 a,b,c 为常数，满足 $ac-b^2>0$,

$$w=\frac{xdy-ydx}{ax^2+2bxy+cy^2}$$

求 w 关于原点 (0,0) 的循环常数 $\oint_C w$, 其中 C 可取围绕 (0,0) 的任一简单封闭曲线，并取逆时针方向为正向

【example 4】计算 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 在第一卦限部分的边界的质心坐标

4 参考书目

1. 陈纪修, 於崇华, 金路. 数学分析. 下册 [M]. 北京: 高等教育出版社,2019.5
2. 汤家凤. 考研数学复习大全 [M]. 北京: 中国原子能出版社,2019.2
3. 谢惠民. 数学分析习题课讲义. 下册 [M]. 北京: 高等教育出版社,2004.1
4. 苏德矿，吴明华. 微积分. 下 [M]. 北京: 高等教育出版社,2007.7