云峰朋辈辅学微甲提升 2 组 — 第 7 讲

内容提要: 三重积分 **Date:** May 22 2022

主讲人: Famiglisti @CC98 **Place:** 碧 2 党员之家

1 preface

时间过得太快太快~

本学期微积分的内容只剩下第一类曲线积分、第二类曲面积分，按照历年情况，重积分、曲线、曲面积分在期末考卷中占有较大的分值：

- 21.6 6 题 50-60 分，1 三重积分，3 曲线积分，2 曲面积分
- 20.9 6 题 50-60 分，1 二重积分，1 三重积分，2 曲线积分，2 曲面积分
- 19.6 6 题 50-60 分，1 二重积分，1 三重积分，2 曲线积分，1 曲面积分，1 二重积分与曲面积分结合

积分题目，涉及到大量的计算，容易出错，大家做题的时候仔细些，耐心一些，问题不大。同时，对于积分计算中的常用技巧，如对称区域求积、变量替换法、极坐标法需熟练掌握，由于这些内容在上一份讲义中以详细解说过，本次课程不再重复讲解。

另外，重积分的物理应用，质量、质心坐标、转动惯量怎么求也需要知道。

这次课程我们先来做一些历年考卷中涉及二重积分、三重积分的题目，熟悉一下应试难度，之后再做一些积分相关证明题。

2 真题

【18-19final】试求三重累次积分 $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_y^1 \frac{e^{-z^2}}{x^2+1}\, dz$

【18-19final】设 $\mathbb{R}^3$ 中有一抛物面壳 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)(0\le x\le 1)$, 已知其面密度为正常数 c, 试求其重心坐标。

【19-20final】求 $\mathbb{R}^3$ 中封闭曲线 S 由二元连续函数 $\rho=\rho(\theta,\varphi),(\theta,\varphi)\in[0,2\pi]\times[0,\pi],(\rho,\theta,\varphi)$ 为球坐标, 证明：S 所围的有界闭立体 Ω 的体积为

$$V(\Omega)=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}[\rho(\theta,\varphi),(\theta,\varphi)]^3\sin\varphi\,d\varphi$$

【19-20final】求封闭曲面 $(x^2+y^2)^2+z^4=y$ 所围的空间有界闭立体 K 的体积 V(K)

【20-21final】设 $K=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x^2+y^2+z^2\le z\}$, 计算 $\iiint_K(z+\sqrt{x^2+y^2+z^2})dxdydz$

3 例题

【example 1】设 f(u) 为连续函数, $F(t)=\iiint_\Omega[z^2+f(x^2+y^2)]dv$, 其中 $\Omega=\{(x,y,z)|0\le z\le h,x^2+y^2\le$
求 $\lim_{t\to0^+}\frac{F(t)}{t^2}$

【example 2】设 $f,\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial t},\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ 均为 $[0,1]\times[0,1]$ 中的连续函数，且在 $[0,1]\times[0,1]$ 中成立 $\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ 和 $\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\le1$, 证明:

1. 对任何 $(x,t_1),(x,t_2)\in[0,1]\times[0,1]$，存在 $\xi\in[0,1],s.t.|\xi-x|\le\frac{1}{2}|t_1-t_2|$ 且 $|f(\xi,t_1)-f(\xi,t_2)|\le4|t_1-t_2|^{\frac{1}{2}}$
2. 由 (1) 的结论证明，对任何 $(x,t_1),(x,t_2)\in[0,1]\times[0,1]$ 成立 $|f(x,t_1)-f(x,t_2)|\le5|t_1-t_2|^{\frac{1}{2}}$

提示：交换积分次序

【example 3】若直线 x=0,x=a,y=0 与正连续曲线 y=f(x) 围成的区域的质心的 x 坐标是 g(a), 证明:

$$f(x) = \frac{Ag'(x)}{[x-g(x)]^2} exp(\int \frac{1}{x-g(x)} \, dx)$$

其中 A 为正常数，a 是参数

4 参考书目

1. 陈纪修, 於崇华, 金路. 数学分析. 下册 [M]. 北京: 高等教育出版社,2019.5
2. 汤家凤. 考研数学复习大全 [M]. 北京: 中国原子能出版社,2019.2
3. 谢惠民. 数学分析习题课讲义. 下册 [M]. 北京: 高等教育出版社,2004.1
4. 苏德矿，吴明华. 微积分. 下 [M]. 北京: 高等教育出版社,2007.7