【例 1】 设 $f(x)=x^2(0\leqslant x<1)$，且 $f(x)$ 的正弦级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$，其中 $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,\mathrm{d}x\,(n=1,2,\cdots)$，其和函数为 $S(x)$，则 $S\left(-\frac{15}{2}\right)=$ ________.

【解】 显然 $S(x)$ 是周期为 2 的奇函数，故

$$S\left(-\frac{15}{2}\right)=-S\left(8-\frac{1}{2}\right)=-S\left(-\frac{1}{2}\right)=S\left(\frac{1}{2}\right),$$

因为 $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 处连续，所以 $S\left(-\frac{15}{2}\right)=S\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$.

8. 函数进行奇延拓再进行周期为 2 的周期延拓，$S(-3)=S(-1)=\frac{1+(-1)}{2}=0$

【例 2】 将函数 $f(x)=x^2(-\pi<x<\pi)$ 展开成傅里叶级数，并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ 的和.

【解】 将 $f(x)$ 进行周期延拓，显然 $f(x)$ 满足狄利克雷充分条件，

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\mathrm{d}x=\frac{2\pi^2}{3}$,

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{(-1)^n 4}{n^2}(n=1,2,\cdots)$,

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin nx\,\mathrm{d}x=0(n=1,2,\cdots)$,

所以 $x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx\,(-\pi<x<\pi)$,

取 $x=0$ 得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}$.

【例 3】 设 $f(x)=|x|(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$，将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数，并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

【解】 因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,\mathrm{d}x=\pi$,

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]=\begin{cases}-\frac{4}{n^2\pi}, & n=1,3,\cdots,\\ 0, & n=2,4,\cdots,\end{cases}$$

$b_n=0(n=1,2,\cdots)$,

于是 $|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1^2}\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right)(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$.

取 $x=0$ 有

$$0=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right),$$

从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

令 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=S$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=S$,

即 $\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}S=S$，解得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=S=\frac{\pi^2}{6}$.

5、先求对应的傅里叶系数，由于周期为2π，

所以积分上下限也可以取为0与2π.

此时 $a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}e^x dx=\frac{e^{2\pi}-1}{\pi}$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}e^x\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{n}e^x\,d\sin nx$$

$$=\frac{1}{n\pi}\left(e^x\sin nx\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\sin nx\,de^x\right)=-\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}e^x\sin nx\,dx$$

$$=\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{n}e^x\,d\cos nx=\frac{1}{n^2\pi}\left(e^x\cos nx\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\cos nx\,de^x\right)$$

$$=\frac{1}{n^2\pi}\left(e^{2\pi}-1-\int_0^{2\pi}e^x\cos nx\,dx\right)$$ 令 $\int_0^{2\pi}e^x\cos nx\,dx=I$

则 $a_n=\frac{1}{\pi}I=\frac{1}{n^2\pi}(e^{2\pi}-1-I)$

解得 $I=\frac{e^{2\pi}-1}{n^2+1}$ 从而 $a_n=\frac{e^{2\pi}-1}{\pi(n^2+1)}$ $(n=1,2,\cdots)$

而在计算过程中有 $a_n=-\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}e^x\sin nx\,dx$

则 $b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}e^x\sin nx\,dx=-na_n=\frac{-n(e^{2\pi}-1)}{\pi(n^2+1)}$

又由于$f(x)$在$(0,2\pi)$内连续，

从而 $0<x<2\pi$ 时 $f(x)=\frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{2\pi}-1}{(n^2+1)\pi}\cdot(\cos nx-n\sin nx)$

而在$x=0$与$x=2\pi$处，

傅里叶级数取值为 $\frac{f(0)+f(2\pi)}{2}=\frac{e^{2\pi}+1}{2}$

9. 令 $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$，其中 $x\in(0,2\pi)$，将 f 延拓成 $\mathbb{R}$ 上以 2π 为周期的奇函数（奇延拓）

有 $a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx$

$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=0$

对 $\forall n\in Z^+$，$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\,dx$

$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=0$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,dx$

$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$

$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx\,dx$

$=\int_0^{\pi}\sin nx\,dx-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx$

$=\frac{-\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}x\,d\cos nx$

$=\frac{1}{n}-\frac{\cos n\pi}{n}+\frac{1}{n\pi}\left(x\cos nx\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right)$

$=\frac{1}{n}-\frac{\cos n\pi}{n}+\frac{1}{n\pi}\left(\pi\cos n\pi-\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right)=\frac{1}{n}$

则有 $f(x)\sim\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}$

又 $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 上连续

由狄利克雷收敛定理，傅里叶级数收敛

有 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=f(x)$

则有 $\forall x\in(0,2\pi)$，$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin kx}{k}=\frac{\pi-x}{2}$ （代入 a_0,a_n,b_n）

本题关键点在于，延拓和狄利克雷收敛定理这两点一定要有说明，前者是保证积分过程中0到2π积分和正常计算中-π到π的积分相同，后者是为了得出证明中的等号，因为题中没考虑边界所以有等号成立。（因为这写着是证明和单纯计算还是有区别的）

8. 先计算 $a_0=\frac{1}{1}\int_{-1}^{1}e^x\,dx=e-e^{-1}$ （注意到这里的周期是2）

而这里进一步的由 Dirichlet 定理，

$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos(n\pi x)+b_n\sin(n\pi x)=e^x$，当 $-1<x<1$

且 $x=\pm1$ 时，上式 $=\frac{f(1^+)+f(1^-)}{2}=\frac{f(-1^+)+f(1^-)}{2}=\frac{e^{-1}+e}{2}$

（因为没说让求 a_n,b_n，所以先避免直接去求）

取 $x=1$，$\cos n\pi=(-1)^n$，$\sin n\pi=0$

则 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cdot(-1)^n+0=\frac{e+e^{-1}}{2}$

有 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n=\frac{e+e^{-1}}{2}-\frac{a_0}{2}=\frac{e+e^{-1}-(e-e^{-1})}{2}=\frac{1}{e}$

当 $x=0$ 时，$\sin n\pi\cdot0=0$，$\cos n\pi\cdot0=1$

有 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cdot1+b_n\cdot0=e^0=1$

则 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n=1-\frac{a_0}{2}=1-\frac{e-e^{-1}}{2}$.

9、先对 x^{2n} 转化，令 $t=x^2$，$a_n=(-1)^n\frac{n}{n+\frac{1}{2}}$

则原级数可写为 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n t^n$

则 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}(n+1)\cdot(n+\frac{1}{2})}{(n+\frac{3}{2})\ (-1)^n\cdot n}\right|=1$

收敛半径 $r=\frac{1}{1}=1$ ，

即 $x^2<1$ 时 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n x^{2n}$ 是绝对收敛的.

考虑 $x^2=1$，即 $x=\pm1$ 时，原级数化为 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{n}{n+\frac{1}{2}}$

而 $\lim_{n\to\infty}(-1)^n\cdot\frac{n}{n+\frac{1}{2}}$ 不存在，从而该级数发散.

（n为奇时为-1，n为偶时为1）

再求和函数，令 $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n}{n+\frac{1}{2}}x^{2n}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{2n}{2n+1}x^{2n}$（不要出现$\frac{1}{2}$在分母上）

令 $T(x)=xS(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2n}{2n+1}x^{2n+1}$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{2n+1-1}{2n+1}x^{2n+1}$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n x^{2n+1}-\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$=x\sum_{n=1}^{+\infty}(-x^2)^n-\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$=x\cdot\frac{-x^2}{1-(-x^2)}-\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

再令 $R(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

而 $R'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}=\frac{-x^2}{1-(-x^2)}=\frac{-x^2-1+1}{1+x^2}=-1+\frac{1}{1+x^2}$

则 $R(x)-R(0)=\int_0^x R'(t)dt=\int_0^x -1+\frac{1}{1+t^2}dt$

$=-t+\arctan t\Big|_0^x=-x+\arctan x$

又 $R(0)=0$， 则 $R(x)=-x+\arctan x$

则 $T(x)=x\cdot\frac{-x^2}{1+x^2}-R(x)=\frac{-x^3}{1+x^2}+x-\arctan x=xS(x)$

当 $x=0$时，$S(0)=0$

当 $x\neq0$时，$S(x)=\frac{T(x)}{x}=\frac{-x^2}{1+x^2}+1-\frac{\arctan x}{x}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{\arctan x}{x}$

综上 $S(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ \frac{1}{1+x^2}-\frac{\arctan x}{x} & x\in(-1,0)\cup(0,1)\end{cases}$

7. $a_n = \int_0^1 f(nx)\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_0^1 f(nx)\mathrm{d}(nx) = \frac{1}{n}\int_0^n f(x)\mathrm{d}x$. $a_n^2 = \frac{1}{n^2}\left(\int_0^n f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \frac{1}{n^2}\int_0^n 1^2\mathrm{d}x\int_0^n f^2(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_0^n f^2(x)\mathrm{d}x$. 令 $\int_0^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x = A$ 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^n f^2(x)\mathrm{d}x = A$，取 $\varepsilon_0 = \frac{A}{2}$，则存在 $N > 0$，当 $n > N$ 时有 $\left|\int_0^n f^2(x)\mathrm{d}x - A\right| < \frac{A}{2}$，即 $\int_0^n f^2(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{3A}{2}$，于是当 $n > N$ 时，$0 \leqslant \frac{a_n^2}{n} \leqslant \frac{1}{n^2}\int_0^n f^2(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{3A}{2}\frac{1}{n^2}$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3A}{2}\frac{1}{n^2}$ 收敛，于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2}{n}$ 收敛.

例题 15.2.2 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$ 的和.

解 由例题 15.1.2 以及收敛性定理, 我们有

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,\ x \in [-\pi, \pi],$$

用 $x = \pi$ 代入就得到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. 然后利用

$$a_0 = \frac{2\pi^2}{3},\ a_n = \frac{4\cdot(-1)^n}{n^2},\ b_n = 0,\ n = 1, 2, \cdots,$$

由 Parseval 等式, 就得到

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi^2}{3}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4}.$$

由此解得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

同样, 对 $f(x) = x^3$, $x \in (-\pi, \pi)$ 的 Fourier 展开式

$$x^3 = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(6 - \pi^2 n^2)\frac{\sin nx}{n^3},\ x \in (-\pi, \pi)$$

应用 Parseval 等式, 可以得到

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^6\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\left(2\cdot(-1)^n(6 - \pi^2 n^2)\frac{1}{n^3}\right)^2,$$

整理后得到

$$\frac{2}{7}\pi^6 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4\pi^4}{n^2} - \frac{48\pi^2}{n^4} + \frac{144}{n^6}\right),$$

再利用 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, 即可解得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$. □

例题 14.3.5 求 $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n$ 的和函数.

解 用 Wallis 公式 (11.29) 容易确定收敛域为 $[-1,1)$.

设和函数为 $S(x)$. 并在 $(-1,1)$ 中试用逐项求导, 得到

$$\begin{aligned}S'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot nx^{n-1} = \frac{1}{2}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}x^n\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot(2n+1)x^n\right) = \frac{1}{2}S(x)+xS'(x).\end{aligned}$$

因此 $S(x)$ 在 $(-1,1)$ 中满足微分方程

$$(1-x)S'(x) = \frac{1}{2}S(x).$$

这时可以看出在区间 $(-1,1)$ 上成立恒等式:

$$[\sqrt{1-x}S(x)]' = \frac{1}{\sqrt{1-x}}[(1-x)S'(x)-\frac{1}{2}S(x)] \equiv 0.$$

因此 $\sqrt{1-x}S(x)$ 在 $(-1,1)$ 上为常值函数. 再利用 $S(0)=1$, 就得到

$$S(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}},\ -1<x<1. \tag{14.15}$$

从 Abel 第二定理知道 $S(x)$ 于 $[-1,1)$ 上连续, 而上式右边的表达式也是如此, 因此 (14.15) 对 $x=-1$ 也成立. □