**例题 22.1.1** 设 $l$: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, 其中 $\varphi$, $\psi$ 连续, 且至少其中之一有连续导数, 则曲线 $l$ 的面积为零.

**证** 不妨设 $\varphi(t)$ 在闭区间 $[\alpha,\beta]$ 上连续, $\psi$ 有连续导函数. $\forall\varepsilon>0$, 可作分割 $\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta$, 使当 $s,t\in[t_{j-1},t_j]$, $j=1,2,\cdots,n$ 时有

$$|\varphi(s)-\varphi(t)|<\varepsilon.$$

令

$$a_j=\min_{t_{j-1}\leqslant t\leqslant t_j}\varphi(t),\quad b_j=\max_{t_{j-1}\leqslant t\leqslant t_j}\varphi(t).$$

则有

$$b_j-a_j\leqslant\varepsilon,\ \ j=1,2,\cdots,n,$$

又令

$$c_j=\min_{t_{j-1}\leqslant t\leqslant t_j}\psi(t),\quad d_j=\max_{t_{j-1}\leqslant t\leqslant t_j}\psi(t),\quad I_j=[a_j,b_j]\times[c_j,d_j],$$

于是当 $t\in[t_{j-1},t_j]$ 时 $(\varphi(t),\psi(t))\in I_j$, 故曲线 $l\subset\bigcup\limits_{j=1}^{n}I_j$. 由于 $\psi'(t)$ 在闭区间 $[\alpha,\beta]$ 上连续, 所以

$$|\psi'(t)|<M,\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta.$$

由微分中值定理得

$$d_j-c_j\leqslant M(t_j-t_{j-1}),\ \ j=1,2,\cdots,n,$$

因而

$$\sum_{j=1}^{n}|I_j|\leqslant\sum_{j=1}^{n}\varepsilon M(t_j-t_{j-1})=\varepsilon M(\beta-\alpha),$$

其中 $|I_j|$ 表示矩形 $I_j$ 的面积. 因为 $\varepsilon$ 是任意的, 故曲线 $l$ 的面积为零. □

**注** 在后面我们将要遇到的大多数区域 (如 $x$ 型区域、$y$ 型区域) 都是由有限条满足上例条件的曲线段所围成的, 因此这样的区域都是可求面积的.

**例题 22.2.7** 求由曲线 $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)^2=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$ 所围的面积.

**解** 应用广义极坐标变换

$$x=a\rho\cos\theta,\quad y=b\rho\sin\theta,$$

则 $J=\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=ab\rho$, 所围成积分区域的曲线变为 $\rho^2=\cos 2\theta$ (双纽线), 于是所求的面积

$$S=\iint\limits_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}}ab\rho\,\mathrm{d}\rho=ab.\quad □$$

**例题 22.2.8** 求 $\iint\limits_D \left(\sqrt{\dfrac{x-c}{a}}+\sqrt{\dfrac{y-c}{b}}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $D$ 由曲线 $\sqrt{\dfrac{x-c}{a}}+\sqrt{\dfrac{y-c}{b}}=1$ 和 $x=c,\ y=c$ 所围成, 并且 $a,b,c>0$.

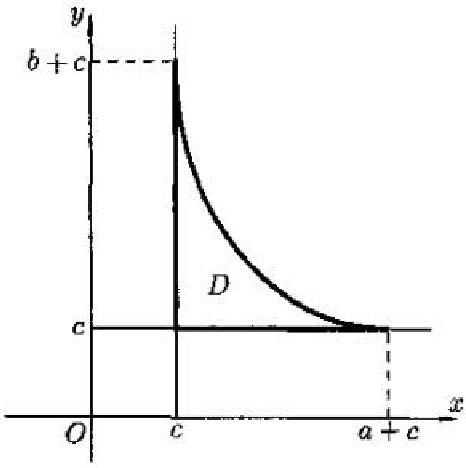


图 22.5

**解** 见图 22.5, 被积函数与积分区域的部分边界具有相同的形式, 因此要设法把被积函数表达式化成简单的形式.

令

$$x=c+a\rho\cos^4\theta,\quad y=c+b\rho\sin^4\theta,$$

则

$$J=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}\right|=4ab\rho\cos^3\theta\sin^3\theta.$$

而积分区域变为 $\{0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2},0\leqslant\rho\leqslant1\}$, 于是

$$\iint\limits_D\left(\sqrt{\frac{x-c}{a}}+\sqrt{\frac{y-c}{b}}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^1 4ab\rho\cos^3\theta\sin^3\theta\sqrt{\rho}\,\mathrm{d}\rho=\frac{2ab}{15}.\quad\Box$$

**注** 一般而言, 广义极坐标变换

$$x=\frac{1}{a}(c+r^{\frac{1}{p}}\cos^{\frac{2}{p}}\theta),\quad y=\frac{1}{b}(d+r^{\frac{1}{p}}\sin^{\frac{2}{p}}\theta),$$

能把 $(ax-c)^p+(by-d)^p$ 变为 $r$, 但其中的 $r$, $\theta$ 一般不再具有通常的极径, 极角的意义.

**例题 22.2.9** 求 $I=\iint\limits_{\Omega}(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $\Omega$ 是由 $y^2=2x$, $x+y=4$, $x+y=12$ 围成.

**解** 积分区域如图 22.6, 作变换

$$u=x+y,\quad v=y,$$

则变换后的积分区域为

$$4\leqslant u\leqslant 12,$$
$$-1-\sqrt{2u+1}\leqslant v\leqslant -1+\sqrt{2u+1},$$

且 $J=\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=1$. 于是

$$\begin{aligned}I&=\int_4^{12}u\,\mathrm{d}u\int_{-1-\sqrt{2u+1}}^{-1+\sqrt{2u+1}}\mathrm{d}v\\&=\int_4^{12}2u\sqrt{2u+1}\,\mathrm{d}u\quad(\sqrt{2u+1}=t)\\&=\int_3^5(t^2-1)t^2\,\mathrm{d}t=\frac{8\,156}{15}.\quad\square\end{aligned}$$

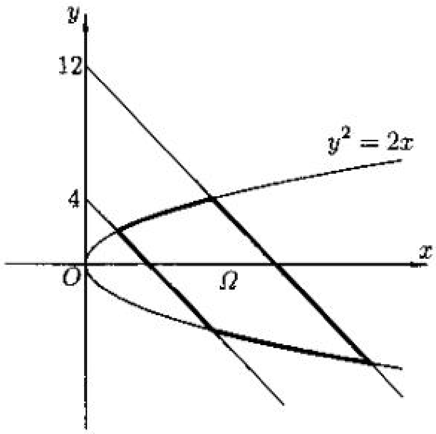


图 22.6

【例 5】 设 $D:x^2+y^2\leqslant 4$, 则 $\iint\limits_D(x-2y)^2\mathrm{d}\sigma=$ ________ ,

【解】 由二重积分奇偶性性质得 $\iint\limits_D(x-2y)^2\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D(x^2+4y^2)\mathrm{d}\sigma$,

由对称性得 $\iint\limits_D(x^2+4y^2)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D(y^2+4x^2)\mathrm{d}\sigma$,

故 $\iint\limits_D(x-2y)^2\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{2}[\iint\limits_D(x^2+4y^2)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_D(y^2+4x^2)\mathrm{d}\sigma]$

$$=\frac{5}{2}\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=\frac{5}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^3\mathrm{d}r=20\pi.$$

【例 6】 计算 $\iint\limits_D\dfrac{x^2\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $D:x^2+y^2\leqslant 1(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$.

【解】 由对称性得 $I=\iint\limits_D\dfrac{x^2\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_D\dfrac{y^2\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,

则 $2I=\iint\limits_D\dfrac{x^2\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint\limits_D\dfrac{y^2\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$=\iint_D \sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\sin r^2\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\pi}{4}\int_0^1 \sin r^2\,\mathrm{d}(r^2)=-\frac{\pi}{4}\cos r^2\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}(1-\cos 1),$$

故$\displaystyle\iint_D \frac{x^2\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{\pi}{8}(1-\cos 1).$