云峰朋辈辅学微甲提升 2 组 — 第 3 讲

内容提要: 傅里叶级数 **Date:** April 3 2022

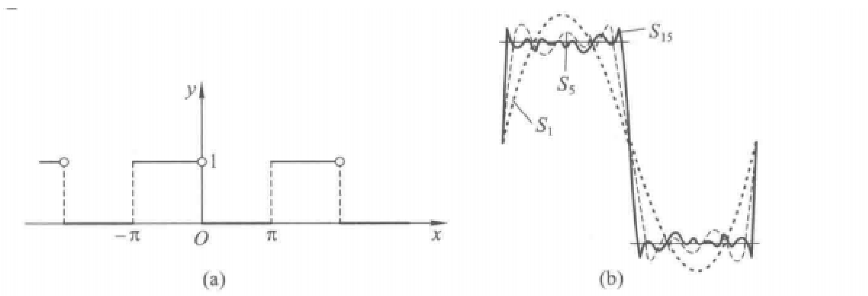
主讲人: Famiglisti @CC98 **Place:** 碧 2 党员之家

数学主要的目标是公众的利益和自然现象的解释。–傅里叶

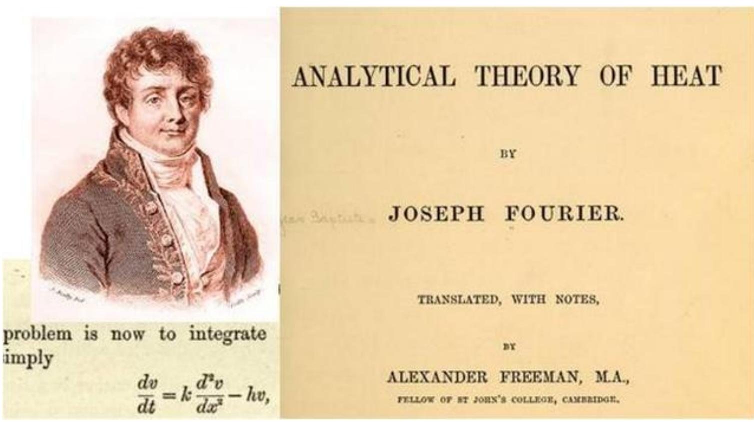
1 知识概要

1. **傅里叶分析之开创性**

   任何周期函数，都可以看作是不同振幅，不同相位正弦波的叠加。就像，利用对不同琴键不同力度，不同时间点的敲击，可以组合出任何一首乐曲。



   除了纯数学之外，主要的受益者不是热力学，而是工程学，特别是电子工程。傅里叶变换已经成为科学和工程中的常规工具; 它的应用包括从声音记录中去除噪音; 利用 x 射线衍射发现 DNA 等大型生物化学分子的结构; 改善无线电接收，处理从空中拍摄的照片。



2. **幂级数与傅里叶级数**

都用于将复杂函数转换成熟悉、易分析的简单函数，幂级数的局限性在于，用 Taylor 级数部分和近似代替函数 f(x) 时, 要求 f(x) 至少有 n 阶的导数, 且一般来说 Taylor 多项式仅在 x_0 附近与 f(x) 吻合得较为理想。与 Taylor 展开相比,Fourier 展开对于 f(x) 的要求要宽容很多, 并且它的部分和在整个区间都与 f(x) 吻合得较为理想。

3. **三角函数系及正交性**

傅立叶分析之所以有效，是因为它的基本波形既正交又完整，而且如果适当地叠加，它们足以表示任何信号。

三角函数系: $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \cos 4x, \sin 4x \cdots\cdots$

a) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 2\pi, m = n = 0, \\ \pi, m = n \geq 1, \\ 0, m \neq n, \end{cases}$

b) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} \pi, m = n, \\ 0, m \neq n, \end{cases}$

4. **狄利克雷充分条件**

设函数 f(x) 是以 2π 为周期的函数, 若 f(x) 在 $[-\pi, \pi]$ 上满足:

a) f(x) 在 $[-\pi, \pi]$ 上连续或只有有限个第一类间断点

b) f(x) 在 $[-\pi, \pi]$ 上上只有有限个极值点

则函数 f(x) 可展开成三角级数 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, 其中系数计算公式为

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx$$
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

级数的收敛域为 $(-\infty, \infty)$

级数 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ 与 f(x) 的关系:

a) 当 x 为 f(x) 的连续点时,$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=f(x)$

b) 当 x 为 f(x) 的间断点时,$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$

5. **间断点**

   函数连续的定义是什么?

   a) 第一类间断点: $f(x_0+)\neq f(x_0-)$

   b) 第二类间断点:左右极限至少有一个不存在

   c) 第三类间断点:$f(x_0+)=f(x_0-),f(x_0)$

6. **定义于 $[0,\pi]$ 上 f(x) 的正弦级数与余弦级数**

   step1: f(x) 奇延拓 or 偶延拓 F(x)

   step2: 将 F(x) 在 $[-\pi,\pi]$ 上展成傅里叶级数

   a) 奇延拓展成正弦级数

$$
\begin{gathered}
a_0=0\\
a_n=0\\
b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx
\end{gathered}
$$

   正弦级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$

   b) 偶延拓展成余弦级数

$$
\begin{gathered}
a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,dx\\
a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\\
b_n=0
\end{gathered}
\tag{1}
$$

   余弦级数为 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$

7. **一些变形**

a) 周期为 2l 的函数的傅里叶级数

b) 定义于 $[-l,l]$ 上的函数 f(x) 的傅里叶级数

c) 定义于 $[0,l]$ 上的函数 f(x) 的正弦级数与余弦级数

8. **Parseval 等式**

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$$

成立条件,f 在 $[-\pi,\pi]$ 内平方可积, 推广形式:

$$\frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n + b_n\beta_n) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$$

成立条件,f,g 在 $[-\pi,\pi]$ 内平方可积

2 例题

【example 1】$f(x) = x^2 \quad (0 \le x < 1)$ 展成正弦级数级数, 设其和函数为 S(x), 求 $S(-3), S(-\frac{15}{2})$

【example 2】将函数 $f(x) = x^2 \quad (-\pi < x < \pi)$ 展成 Fourier 级数, 并求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

【example 3】将函数 $f(x)=|x|\,(-\pi\le x\le\pi)$ 展成 Fourier 级数, 并求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

3 真题解析

【18-19mid】将函数 $f(x)=e^x \quad (0\le x<2\pi)$ 展成周期为 2π 的 Fourier 级数

【19-20final】利用傅里叶级数理论证明:$\forall x\in(0,\pi),\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{\pi-x}{2}$

【20-21final】$f(x)=e^x \quad (0<x\le 1)$, 将 f 延拓成 $\mathbb{R}$ 上周期为 2 的函数，记为 f, 设其傅里叶级数 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ ，求 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n,\sum_{n=1}^{\infty}a_n$

【20-21final】求 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+\frac{1}{2}}x^{2n}$ 的收敛半径、和函数

4 级数综合

【ex1】设 f(x) 在 $[0,+\infty]$ 上连续，且 $\int_0^{+\infty}f^2(x)\,dx$ 收敛，令 $a_n=\int_0^1 f(nx)\,dx$，证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2}{n}$ 收敛

【ex2】求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$

【ex3】求 $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!x^n}$ 的和函数

5 参考书目

1. 陈纪修, 於崇华, 金路. 数学分析. 下册 [M]. 北京: 高等教育出版社,2019.5
2. 汤家凤. 考研数学复习大全 [M]. 北京: 中国原子能出版社,2019.2
3. 谢惠民. 数学分析习题课讲义. 下册 [M]. 北京: 高等教育出版社,2004.1