云峰朋辈辅学微甲提升 2 组 — 第 5 讲

内容提要: 多元函数微分学的应用 **Date:** May 1 2022

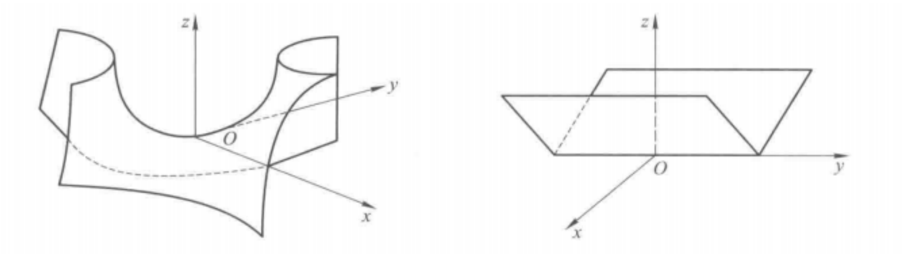
主讲人: Famiglisti @CC98 **Place:** 碧 2 党员之家

1 知识概要

1. **多元函数的极值**

   a) **驻点与极值的关系**

   - 使函数 f 的各个一阶偏导数同时为零的点为驻点
   - 而驻点不一定为极值点
   - 偏导数不存在的点也可能是极值点



   b) **求无条件极值步骤**

   i. 由 $\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = 0 \\ f_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$ 求出驻点

   ii. 设 (x_0, y_0) 为一个驻点,另 $A = f_{xx}(x_0, y_0), B = f_{xy}(x_0, y_0), C = f_{yy}(x_0, y_0)$

   - $AC - B^2 > 0$
     - 若 A>0,(x_0, y_0) 为极小值点
     - 若 A<0,(x_0, y_0) 为极大值点
   - $AC - B^2 < 0$,(x_0, y_0) 一定不是极值点
   - $AC - B^2 = 0$,无法确定 (x_0, y_0) 是否为极值点

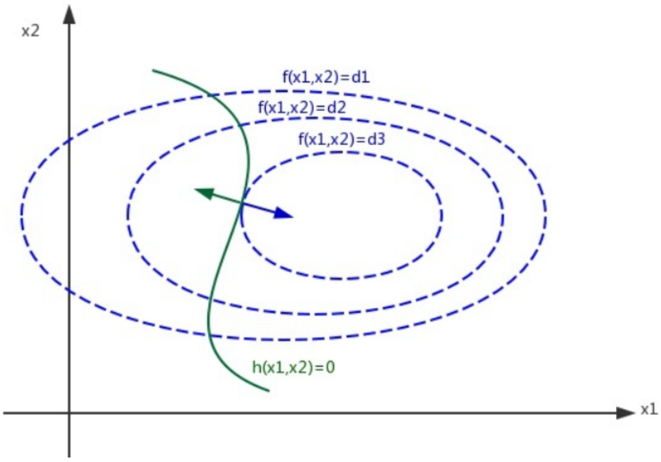
   求无条件极值公式的推导理解了没 QAQ

c) **条件极值：拉格朗日乘数法**

基本方法要掌握

几何解释:

- 等式约束优化



假设优化变量为 x_1, x_2，蓝色虚线为目标函数 $f(x_1, x_2)$ 的等高线，绿线表示约束条件 $h(x_1, x_2) = 0$，因此最优解 x_1^*, x_2^* 一定在绿线上。绿线与蓝色等高线可能相交、相切或没有交点。讨论取到最优解的情形，先排除无交点的情况。若绿线与蓝线相交，说明绿线上存在点在这条等高线的内部和外部，也就说明存在点使得目标函数的值更大或者更小，所以相交的情况也不会是优化问题的可行解。因而蓝线与绿线相切的情况，可能会是优化问题可行解。在代表约束条件的绿线与蓝色等高线相切的情况下，它们的切线相同，法向量相互平行，于是有 λ:

$$f_{x_1}(x_1, x_2) + \lambda h_{x_1}(x_1, x_2) = 0$$

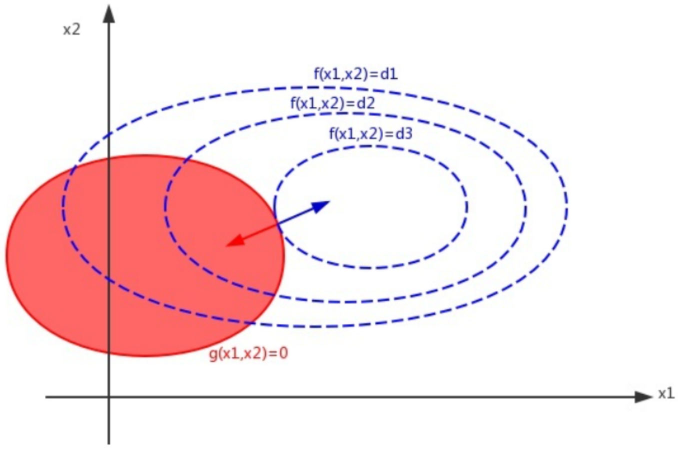
$$f_{x_2}(x_1, x_2) + \lambda h_{x_2}(x_1, x_2) = 0$$

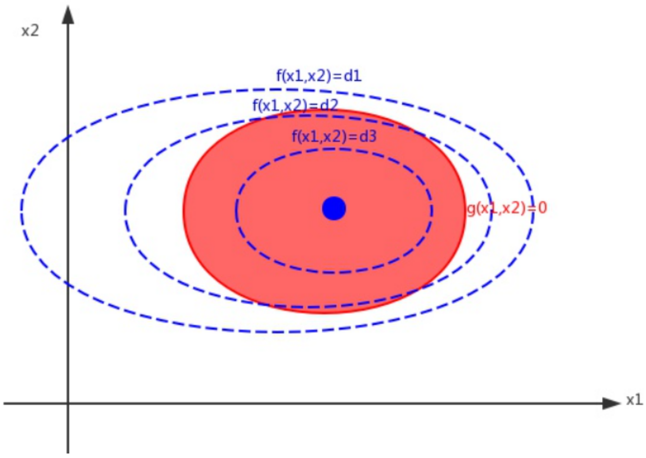
与拉格朗日乘数法的方程相同。

- 不等式约束优化

  设有优化条件：$\min f(x_1, x_2), g(x_1, x_2) \leqslant 0$

  - 当目标函数的最优解不在约束条件区域时，优化问题的解 x_1^*, x_2^* 位于 $g(x_1^*, x_2^*) = 0$ 即边界上，此时优化问题等价为等式约束优化问题
  - 当目标函数 $f(x_1, x_2)$ 的最优解落在约束条件区域，优化问题的解 x_1^*, x_2^* 位于 $g(x_1^*, x_2^*) < 0$ 的区域内，此时，直接极小化目标函数即可





2. **多元函数微分学在几何上的应用**

   a) **方向导数与梯度**

   - 方向导数

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(p_0) = \lim_{t \to 0+} \frac{f(p_0 + t\vec{l}) - f(p_0)}{t}$$

     f 在点 p_0 点沿方向 $\vec{l}$ 的方向导数表示该点沿方向 $\vec{l}$ 的变化率

     特别地

     – 若 $\vec{l} = (1, 0, 0), \frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(p_0) = f_x(p_0)$

     – 若 $\vec{l} = (0, 1, 0), \frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(p_0) = f_y(p_0)$

     若 f 在 p_0 点可微，则 f 在 p_0 点沿任何方向 $\vec{l}$ 的方向导数存在，且

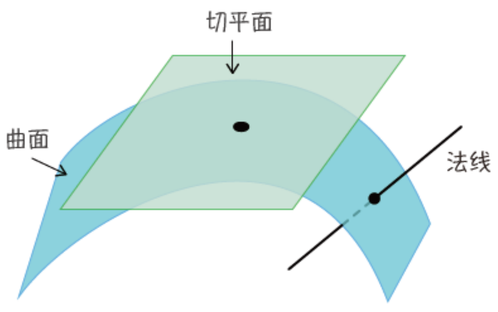
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(p_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0)\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}(p_0)\cos\gamma$$

- 梯度

$$gradf(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\vec{k}$$

梯度的方向是函数在该点增长最快的方向

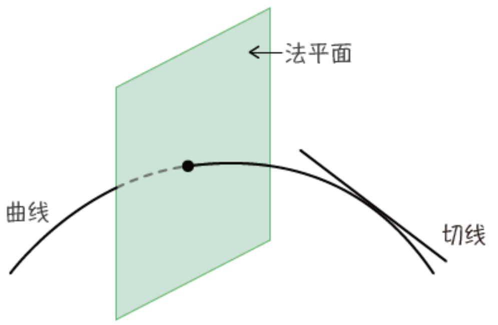
b) **空间曲面的切平面与法线**



曲面 $F(x,y,z)=0$ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面方程为:

$$\pi: F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

c) **空间曲线的切线与法平面**



曲线 L: $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的法平面方程为:

$$\pi: \begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}_{M_0}\cdot(x-x_0)+\begin{vmatrix} F'_z & F'_x \\ G'_z & G'_x \end{vmatrix}_{M_0}\cdot(y-y_0)+\begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix}_{M_0}\cdot(z-z_0)=0$$

2 例题

【example 1】设 $\vec{n}$ 为曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 在点 P(1,1,1) 处的外法向量, 求 $u=\frac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$ 在点 P 处沿 $\vec{n}$ 的方向导数

【example 2】设 F(u,v) 一阶连续可微，证明：曲面 $F(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c})=0$ 上任意一点处的切平面都过一个固定点。

【example 3】设 f(x,y) 在 $p_0(x_0,y_0)$ 点可微，$\vec{l_1},\cdots,\vec{l_n}$ 为 n 个单位向量，相邻两向量夹角为 $\frac{2\pi}{n}$. 证明：$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial \vec{l_i}}(x_0,y_0)=0$

【example 4】在平面上给定不在同一条直线上的三点 $M_i(a_i, b_i), i = 1, 2, 3$, 求平面内的这样一点，使它至此三定点的距离之和最小。

【example 5】椭球面 $\frac{x^2}{3} + y^2 + \frac{z^2}{2} = 1$ 被通过原点的平面 $2x + y + z = 0$ 截成一个椭圆 l, 求此椭圆的面积

【example 6】求 $f(x, y, z) = \ln x + 2\ln y + 3\ln z$ 的最大值，其中 $x^2 + y^2 + z^2 = 6r^2 (r > 0), x > 0, y > 0, z > 0$, 且证明对任何正数 a,b,c, 有

$$ab^2c^3 \leq 108(\frac{a+b+c}{6})^6$$

3 真题解析

【18-19final】设有二次曲面 $S: x^2+xy+y^2-z^2=1$, 试求曲面 S 上点 (1,-1,0) 处的切平面 π 的平面方程。

【18-19final】设 f(x,y) 在包含单位闭圆盘 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2\leqslant 1\}$ 的一个开集上具有连续的一阶偏导函数，且满足 $\forall(x,y)\in D, |f(x,y)|\leqslant 1$
试证：存在一点 $(x^*,y^*)\in\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2<1\}$ 使得 $[f_1'(x^*,y^*)]^2+[f_2'(x^*,y^*)]^2\leqslant 16$ 成立

【19-20final】设 $f(x,y)=x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$, 试求 f 在点 (0,0) 处沿方向 $\vec{l}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 的方向导数 $\frac{\partial f}{\partial l}(0,0)$, 并求当该方向导数取到最大值时，对应的 $\sin\alpha$ 的值

【20-21final】设 D 是平面上的一个有界闭区域,z=z(x,y) 在 D 上连续，在 D^o 上有所有的连续二阶偏导函数，且满足 $\forall(x,y)\in D^o, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y)=0, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(x,y)\neq 0$ 证明：z(x,y) 在 D 上的最值只能在 D 的边界上取到。

5 参考书目

1. 陈纪修, 於崇华, 金路. 数学分析. 下册 [M]. 北京: 高等教育出版社,2019.5
2. 汤家凤. 考研数学复习大全 [M]. 北京: 中国原子能出版社,2019.2
3. 谢惠民. 数学分析习题课讲义. 下册 [M]. 北京: 高等教育出版社,2004.1
4. 苏德矿，吴明华. 微积分. 下 [M]. 北京: 高等教育出版社,2007.7