PartA

例 4[4] 求直线 L: $\begin{cases} 2x-y+z-1=0 \\ x+y-z+1=0 \end{cases}$ 在平面 $\pi: x+2y-z=0$ 上的投影直线的方程.

分析 如果作过直线 L 与平面 π 垂直的平面 π_1，那么平面 π_1 与 π 的交线就是直线 L 在平面 π 上的投影直线. 所以问题转化为求过直线 L 与平面 π 垂直的平面方程.

解 过直线 L 的平面束方程为

$$2x-y+z-1+\lambda(x+y-z+1)=0,$$

即

$$(2+\lambda)x+(\lambda-1)y+(1-\lambda)z+(\lambda-1)=0.$$

与平面 $\pi: x+2y-z=0$ 垂直的平面满足的条件是

$$1\times(2+\lambda)+2\times(\lambda-1)-1\times(1-\lambda)=0,$$

得 $\lambda=\frac{1}{4}$. 将 $\lambda=\frac{1}{4}$ 代入平面束方程，得投影平面的方程为

$$(2+\frac{1}{4})x+(\frac{1}{4}-1)y+(1-\frac{1}{4})z+(\frac{1}{4}-1)=0,$$

即

$$3x-y+z-1=0.$$

故直线 L 在平面 π 上的投影直线的方程为

$$\begin{cases} x+2y-z=0, \\ 3x-y+z-1=0. \end{cases}$$

ZT：

8 (法I)(平面束) 过A与已知平面平行的平面π方程为 $3(x+1)-4y+z-4=0$

过已知直线的平面束(先改写已知直线为 $\begin{cases} x+1=y-3 \\ y-3=\frac{z}{2} \end{cases}$)

为 $\lambda(x+1-y+3)+\mu(y-3-\frac{z}{2})=0$

把 $A(-1,0,4)$ 代入上式，有 $3\lambda-5\mu=0$ 化简上式即得 $10x-4y-3z+22=0$

∴所求直线为 $\begin{cases} 3x-4y+z-1=0 \\ 10x-4y-3z+22=0 \end{cases}$

(法II) 所求直线与已知直线交于B. 设 $B(a, a+4, 2a+2)$ (在已知直线上)

∴ $\vec{AB}=(a+1, a+4, 2a-2)$ 又AB与平面 $3x-4y+z=0$ 平行

∴ $\vec{AB}\perp(3,-4,1)$ 即 $3(a+1)-4(a+4)+2a-2=0$ ∴ $a=15$

∴ $\vec{AB}=(16,19,28)$ ∴所求直线方程为 $\frac{x+1}{16}=\frac{y}{19}=\frac{z-4}{28}$

9 设旋转面上一点 $M(x,y,z)$. 过M作与Oz轴垂直的面与L交于 M_1

$M_1(x_1,y_1,z_1)$ 则有 $\begin{cases} x_1^2+y_1^2=x^2+y^2 \\ z_1=z \end{cases}$

又 M_1 在L上 ∴有 $\begin{cases} x_1+y_1+z_1=0 \\ y_1-z_1-1=0 \end{cases}$ ∴有 $\begin{cases} x_1=-2z_1-1=-2z-1 \\ y_1=z_1+1=z+1 \end{cases}$

∴有 $x^2+y^2=(-2z-1)^2+(z+1)^2$

即旋转曲面方程为 $x^2+y^2=5z^2+6z+2$

1、设 $F(x,y,z)=x^2+xy+y^2-z^2-1=0$

则 $F_x'=2x+y$, $F_y'=x+2y$, $F_z'=-2z$

从而在点 $(1,-1,0)$ 处，对应的 $F_x'=1$, $F_y'=-1$, $F_z'=0$

则切平面 π 的法向量 $\vec{n}=(1,-1,0)$

又切平面 π 过点 $(1,-1,0)$，从而 π 的方程为 $(x-1)-(y+1)=0$

即 $x-y-2=0$.

1. 对 $z=x^2y^3-e^z+e$，令 $F(x,y,z)=z-x^2y^3+e^z-e=0$

则 $F_x'(x,y,z)=-2xy^3$，$F_y'(x,y,z)=-3x^2y^2$

$F_z'(x,y,z)=1+e^z$

则对应 $F_x'(1,1,1)=-2$, $F_y'(1,1,1)=-3$, $F_z'(1,1,1)=1+e$

即切平面的法向量为 $(-2,-3,1+e)$

从而切平面方程为 $-2(x-1)-3(y-1)+(1+e)(z-1)=0$

即 $-2x-3y+(1+e)z+4-e=0$

对应法线方向向量也为 $(-2,-3,1+e)$

则法线方程为 $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-1}{1+e}$

PartB

【反例 4】 设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 研究函数 $f(x,y)$ 在(0,0)处的连续性、可偏导性、可微性及一阶偏导的连续性.

【解】 因为 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0=f(0,0)$，所以 $f(x,y)$ 在(0,0)处连续；

因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x^2}=0$，$\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim\limits_{y\to0}y\sin\dfrac{1}{y^2}=0$，所以 $f(x,y)$ 在(0,0)处对 x,y 都可偏导且 $f'_x(0,0)=0$，$f'_y(0,0)=0$；

令 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，因为

$$\lim_{\rho\to0}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}{\rho}=\lim_{\rho\to0}\rho\sin\frac{1}{\rho^2}=0,$$

所以 $f(x,y)$ 在(0,0)处可微；

当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，$f'_x(x,y)=2x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}$，

则 $f'_x(x,y)=\begin{cases}0, & (x,y)=(0,0),\\ 2x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\end{cases}$

同理 $f'_y(x,y)=\begin{cases}0, & (x,y)=(0,0),\\ 2y\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2y}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0).\end{cases}$

因为 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0\\y=x}}f'_x(x,y)=\lim\limits_{x\to0}\left(2x\sin\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{2x^2}\right)$ 不存在，所以 $f'_x(x,y)$ 在(0,0)处不连续，同理 $f'_y(x,y)$ 在(0,0)处也不连续.

10. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y(e^x+y^2)^{y-1}\cdot e^x$

又 $z=e^{y\ln(e^x+y^2)}$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=e^{y\ln(e^x+y^2)}\cdot\left(\dfrac{y\cdot2y}{e^x+y^2}+\ln(e^x+y^2)\right)$

$=(e^x+y^2)^y\left(\dfrac{2y^2}{e^x+y^2}+\ln(e^x+y^2)\right)$

12. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}$

$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=a\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}$

$\frac{\partial u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial y}=a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+(a-1)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}-\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y}+a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial y}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2}$

则方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 可化为

$(1+4a+3a^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+(2+4(a-1)-6a)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0$ 又简化为即为 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0$

2有 $3a^2+4a+1=0$ $\boxed{且}$ $-2-2a\neq 0$ $\therefore a=-\frac{1}{3}$

7. 对 $f(tx,ty)=t^3f(x,y)$，注意到 t，此时对方程两边关于 t 求导，有

$xf_1'(tx,ty)+yf_2'(tx,ty)=3t^2f(x,y)$

且由题 f_1' 与 f_2' 连续，取 $t=1$ 则有

$xf_1'(x,y)+yf_2'(x,y)=3f(x,y)$

而又由于 $f_1'(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$，$f_2'(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

从而即 $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3f(x,y)$ 成立.

13. (1) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$ (分子直接为0)

(2) 要证可微，即证 $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x'(0,0)x-f_y'(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

由(1)，$f_x'(0,0)=f_y'(0,0)=0$

则 $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x'(0,0)x-f_y'(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(xy)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{x^2+y^2}}$

又 $x^2+y^2\geq 2xy$ 则 $(xy)^{\frac{2}{3}}\leq\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$

而 $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{\frac{1}{6}}=0$

又 $(xy)^{\frac{2}{3}}\geq 0$

则由夹逼定理，$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(xy)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

所以由可微的定义，则 f 在点 $(0,0)$ 处可微.

4. 由偏导数定义，$(x,y)\neq(0,0)$ 时，$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{y^3(x^2+y^2)-xy^3\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^5-x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$

而在 $(0,0)$ 处，$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x\cdot 0^3}{x^2+0}=0$

即 $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}0 & (x,y)=(0,0)\\ \frac{y^5-x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$

由二阶偏导数定义，$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{y^5-0}{y^4}-0}{y}=1$

11. 试证明：$\forall x \in (0,1), y \in (0,+\infty)$，成立：$y(1-x)x^{y+1} < e^{-1}$.

证明：令 $f(x,y)=y(1-x)x^{y+1}$

则 $f(x,y)$ 在 $x=0, x=1, y=0$ 上均取 0

在区域 $D=\{(x,y)|0<x<1, y>0\}$ 上内恒大于 0

则 f 的最大值只能在 D 内部取到

则最大值点必为 f 驻点，设其为 (x_0,y_0)

又 $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}= y x^{y}(1-2x+ y(1-x)) \\ \frac{\partial f}{\partial y}= x^{y+1}(1+y\ln x)(1-x) \end{cases}$

则在 (x_0,y_0) 处 $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$

有 $\begin{cases} 2x_0-1=y_0(1-x_0) \\ 1+y_0\ln x_0=0 \end{cases}$ （忽略上述方程中恒大于0项）

$y_0\ln x_0=-1$

则 $x_0^{y_0}=\frac{1}{e}$

（而此时 $f(x_0,y_0)$

$=y_0(1-x_0)x_0^{y_0+1}$

$=(2x_0-1)\cdot x_0\cdot\frac{1}{e}$

又 $x_0\in(0,1)$

对 $g(x)=2x^2-x$，$g'(x)=4x-1$

$g(x)$ 在 $(0,\frac{1}{4})$ 上减 在 $(\frac{1}{4},1)$ 上增

则在 $(0,1)$ 上 $g(x)<g(0)$ 且 $g(x)<g(1)$

又 $g(0)=0$, $g(1)=1$

则 $2x_0^2-x_0<1$ 恒成立

则 $f(x_0,y_0)<1\cdot\frac{1}{e}=\frac{1}{e}$

又 $f(x_0,y_0)$ 为最大值

则对 $\forall(x,y)\in D$，有 $y(1-x)x^{y+1}<\frac{1}{e}$ 成立

7. 由题，对 $f(x^2+1,e^x)=e^{(x+1)^2}$ 两边关于 x 求导，有

$f_1'(x^2+1,e^x)\cdot 2x + f_2'(x^2+1,e^x)\cdot e^x = e^{(x+1)^2}\cdot 2(x+1)$

把 $x=0$ 代入，有 $f_1'(1,1)\cdot 0+f_2'(1,1)\cdot 1 = e^{1^2}\cdot 2\cdot 1=2e$

即 $f_2'(1,1)=2e$

再对 $f(x^2,x)=x^2e^{x^2}$ 两边关于 x 求导，有

$f_1'(x^2,x)\cdot 2x + f_2'(x^2,x)\cdot 1 = 2xe^{x^2}+x^2e^{x^2}\cdot 2x$

代入 $x=1$，有 $f_1'(1,1)\cdot 2+f_2'(1,1)=2\cdot e^1+1^2\cdot e^1\cdot 2$

即 $2f_1'(1,1)+f_2'(1,1)=4e$

从而 $f_1'(1,1)=e$

因此 $df|_{(1,1)} = f_1'(1,1)dx+f_2'(1,1)dy$

$= edx+2edy$

11. 用反证法。假设 $z(x,y)$ 在D上的最值在D的内部 D° 上取到

设取到最值的点为 (x_0, y_0)，则该点也必为极值点

且在 D° 内 $z(x,y)$ 有连续二阶偏导，

有 $z_x'(x_0, y_0) = z_y'(x_0, y_0) = 0$

再令 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x_0, y_0) = A$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = B$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x_0, y_0) = C$

由已知条件，$A + C = 0$，$B \neq 0$

而由于多元函数极值的充分条件，(x_0, y_0) 为极值点时应有 $B^2 - AC \leq 0$

但此时 $B^2 - AC = B^2 - A \cdot (-A) = B^2 + A^2 > 0$ $(B \neq 0)$

从而 (x_0, y_0) 不是极值点，产生矛盾.

又由于 z 在D上连续则必存在最值.

从而 $z(x,y)$ 在D上的最值不能在 D° 上，故只能在 ∂D 上取到.