例题

21. 令 $F(x,y,z)=2x^2+3y^2+z^2-6$，$\vec{n}=\{4x,6y,2z\}_P=\{4,6,2\}$，方向余弦为 $\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{14}}$，$\cos\beta=\dfrac{3}{\sqrt{14}}$，$\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{14}}$. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{6x}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{8y}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}=-\dfrac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z^2}$，则 $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\Big|_P=\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_P\cos\alpha+\dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_P\cos\beta+\dfrac{\partial u}{\partial z}\Big|_P\cos\gamma=\dfrac{11}{7}$.

【例 4】 设 $F(u,v)$ 一阶连续可微，证明：曲面 $F\left(\dfrac{x-a}{z-c},\dfrac{y-b}{z-c}\right)=0$ 上任意一点处的切平面都过一个固定点.

【证明】 设 $M(x,y,z)$ 为曲面上任意一点，曲面在该点处的法向量为

$$\vec{n}=\left\{\frac{F'_1}{z-c},\frac{F'_2}{z-c},-\frac{x-a}{(z-c)^2}F'_1-\frac{y-b}{(z-c)^2}F'_2\right\},$$

过 $M(x,y,z)$ 的切平面为

$$\frac{F'_1}{z-c}(X-x)+\frac{F'_2}{z-c}(Y-y)-\left[\frac{x-a}{(z-c)^2}F'_1+\frac{y-b}{(z-c)^2}F'_2\right](Z-z)=0,$$

显然 $X=a,Y=b,Z=c$ 满足上述方程，故曲面 $F\left(\dfrac{x-a}{z-c},\dfrac{y-b}{z-c}\right)=0$ 上任意一点的切平面过固定点 (a,b,c).

例题 21.3.9 在平面上给定不在同一直线上的三点 $M_i(a_i, b_i)$, $i = 1, 2, 3$. 求平面内的这样一点, 使它至此三定点的距离之和为最小.

解 任取点 $M(x, y)$, 令

$$\rho_i = \sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2}, \quad i = 1, 2, 3.$$

于是所给问题为研究函数

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^{3} \rho_i = \sum_{i=1}^{3} \sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2}$$

的最小值. 除了在三个给定点以外, 它处处存在着偏导数

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{i=1}^{3} \frac{x - a_i}{\rho_i} = \sum_{i=1}^{3} \cos\theta_i,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sum_{i=1}^{3} \frac{y - a_i}{\rho_i} = \sum_{i=1}^{3} \sin\theta_i,$$

其中 θ_i 表示 x 轴正向与以 M_i 为起点的射线 M_iM 的夹角 (见图 21.1).

首先找驻点 M_0, 令两个偏导数为 0 得

$$\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cos\theta_3 = 0,$$

$$\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \sin\theta_3 = 0.$$

第一式乘以 $\sin\theta_2$, 第二式乘以 $\cos\theta_2$, 相减得

$$\sin(\theta_2 - \theta_1) = \sin(\theta_3 - \theta_2). \tag{21.7}$$

同样可得

$$\sin(\theta_3 - \theta_2) = \sin(\theta_1 - \theta_3). \tag{21.8}$$

由图 21.1 可以算出 $\angle M_1M_0M_2 = \theta_2 - \theta_1$, $\angle M_2M_0M_3 = \theta_3 - \theta_2$, $\angle M_3M_0M_1 = \theta_1 - \theta_3 + 2\pi$. 由 (21.7), (21.8) 得

$$\sin\angle M_1M_0M_2 = \sin\angle M_2M_0M_3 = \sin\angle M_3M_0M_1.$$

由于三个角都在 0 与 2π 之间, 且三个角之和为 2π, 于是

$$\angle M_1M_0M_2 = \angle M_2M_0M_3 = \angle M_3M_0M_1 = \frac{2}{3}\pi.$$

于是点 M_0 可由下列方法求得: 在三角形 $M_1M_2M_3$ 的三边上各作一含圆周角为 $\frac{2}{3}\pi$ 的弧, 三弧的公共点为 M_0.

若三角形没有大于或等于 $\frac{2\pi}{3}$ 的内角, 则此弧确能在三角形之内相交而确定 M_0, 这时, 各边显然都对着顶点在 M_0 的等于 $\frac{2\pi}{3}$ 的角 (见图 21.1), 在这种情形, 就必须比较 $u(x,y)$ 在 M_0, M_1, M_2, M_3 这四个点的值. 我们将证明, 在驻点 M_0 处的 $u(x,y)$ 的数值必小于其他三个数值. 实际上由余弦定理以及 $\angle M_1M_0M_2 = \frac{2}{3}\pi$, 有

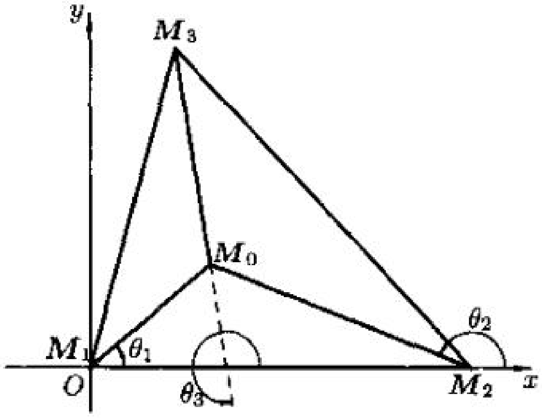

图 21.1

$$\begin{aligned}(M_1M_2)^2 &= (M_0M_2)^2 + (M_0M_1)^2 + M_0M_2\cdot M_0M_1\\ &> (M_0M_2 + \frac{1}{2}M_0M_1)^2,\end{aligned}$$

于是 $M_1M_2 > M_0M_2 + \frac{1}{2}M_0M_1$, 同理 $M_1M_3 > M_0M_3 + \frac{1}{2}M_0M_1$, 两式相加得

$$M_1M_2 + M_1M_3 > M_0M_1 + M_0M_2 + M_0M_3,$$

即 $u(M_1) > u(M_0)$. 显然此处的 M_1 可以换成 M_2 或 M_3.

若三角形 $M_1M_2M_3$ 有一个内角大于或等于 $\frac{2\pi}{3}$ 时, 情形就不同了, 这时三条圆弧没有公共点, 驻点也就不存在了. 而函数 $f(x,y)$ 在 M_1, M_2, M_3 中之一处, 也就是在钝角的顶点处达到其最小值. □

注 这一问题再一次说明, 在探求函数的最大最小值时, 除了驻点以外, 导数不存在的点也必须考虑在内.

例题 21.4.2 椭球面 $\frac{x^2}{3}+y^2+\frac{z^2}{2}=1$ 被通过原点的平面 $2x+y+z=0$ 截成一个椭圆 l. 求此椭圆的面积.

解 只要求出椭圆 l 的长短半轴即可. 于是问题转化为在约束条件

$$F(x,y,z)\equiv\frac{x^2}{3}+y^2+\frac{z^2}{2}-1=0, \tag{21.15}$$

$$G(x,y,z)\equiv 2x+y+z=0 \tag{21.16}$$

下求 $r^2=x^2+y^2+z^2$ 之最大最小值. 为此定义

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2+\lambda(\frac{x^2}{3}+y^2+\frac{z^2}{2}-1)+\mu(2x+y+z).$$

令

$$L_x=2x+\frac{2}{3}\lambda x+2\mu=0, \tag{21.17}$$

$$L_y=2y+2\lambda y+\mu=0, \tag{21.18}$$

$$L_z=2z+\lambda z+\mu=0. \tag{21.19}$$

将 (21.17)-(21.19) 分别乘 x,y,z, 然后相加, 利用 (21.15), (21.16) 得

$$\lambda=-r^2. \tag{21.20}$$

将 (21.20) 代入 (21.17), 得

$$(r^2-3)x=3\mu.$$

若 $r^2=3$, 则 $\mu=0$. 代入 (21.18), (21.19), 得 $y=z=0$, 显然不满足 (21.15) 和 (21.16). 因此 $r^2-3\neq 0$. 所以

$$x=\frac{3\mu}{r^2-3}. \tag{21.21}$$

同理将 (21.20) 代入 (21.18), (21.19) 得

$$y=\frac{\mu}{2(r^2-1)},\qquad z=\frac{\mu}{r^2-2}. \tag{21.22}$$

将(21.21), (21.22) 代入 (21.16), 得

$$\frac{6\mu}{r^2-3}+\frac{\mu}{2(r^2-1)}+\frac{\mu}{r^2-2}=0. \tag{21.23}$$

由于 $\mu\neq 0$, 消去 μ, 得

$$15(r^2)^2-49r^2+36=0.$$

由此解出两个根 r_1^2 和 r_2^2 即为条件驻点对应的函数值. 由于约束集合是有界闭集, 故 r^2 的最值存在, 又因在约束集合上 $\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}$, $\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}$, $\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}$ 不同时为 0, 故最值必定在条件驻点达到, 因而这两个值也即为 r^2 的最大最小值, 即长、短半轴的平方. 根据 Viète 定理有 $r_1^2\cdot r_2^2=\frac{36}{15}=\frac{12}{5}$, 于是所求的面积为

$$s=\pi r_1r_2=2\pi\sqrt{\frac{3}{5}}.\quad\square$$

例题 21.4.4 求 $f(x,y,z)=\ln x+2\ln y+3\ln z$ 的最大值, 其中 $x^2+y^2+z^2=6r^2(r>0)$, $x>0$, $y>0$, $z>0$. 且证明对任何正数 a,b,c, 有

$$ab^2c^3 \leqslant 108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6. \tag{21.24}$$

分析 原问题等价于求 $u=xy^2z^3$ 的最大值, 这样做是因为对数函数在零点无定义, 而幂函数则不然, 因而可将约束条件化为 $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$. 注意到在边界上 u 取最小值. 故在 $D_1=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=6r^2, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0\}$ 的内部一定有 u 的最大值点.

证 构造 Lagrange 函数

$$L(x,y,z,\lambda)=xy^2z^3+\lambda(x^2+y^2+z^2-6r^2).$$

令

$$L_x=y^2z^3+2\lambda x=0, \tag{21.25}$$

$$L_y=2xyz^3+2\lambda y=0, \tag{21.26}$$

$$L_z=3xy^2z^2+2\lambda z=0, \tag{21.27}$$

$$x^2+y^2+z^2=6r^2. \tag{21.28}$$

在 (21.25)-(21.27) 两边分别乘以 x,y,z, 然后相加, 利用 (21.28) 得

$$xy^2z^3=-2\lambda r^2. \tag{21.29}$$

再将 (21.29) 代入 (21.25)-(21.27) 中, 明显地 $\lambda\neq 0$, 则

$$x=r,\ \ y=\sqrt{2}\,r,\ \ z=\sqrt{3}\,r,\ \ \lambda=-3\sqrt{3}\,r^4.$$

对应了惟一驻点, 于是 xy^2z^3 的最大值为 $6\sqrt{3}\,r^6$, 即

$$xy^2z^3\leqslant 6\sqrt{3}\,r^6.$$

两边平方得

$$x^2y^4z^6\leqslant 108r^{12}.$$

令 $a=x^2, y^2=b, z^2=c$, 则 $r^2=\dfrac{a+b+c}{6}$. 于是

$$ab^2c^3\leqslant 108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6. \quad \square$$

真题

1、设 $F(x,y,z)=x^2+xy+y^2-z^2-1=0$

则 $F_x'=2x+y$, $F_y'=x+2y$, $F_z'=-2z$

从而在点 $(1,-1,0)$ 处，对应的 $F_x'=1$, $F_y'=-1$, $F_z'=0$

则切平面 π 的法向量 $\vec{n}=(1,-1,0)$

又切平面 π 过点 $(1,-1,0)$，从而 π 的方程为 $(x-1)-(y+1)=0$

即 $x-y-2=0$.

14、（根据结果进行的一个构造，看不明白也没关系）

令 $g(x,y)=f(x,y)+2(x^2+y^2)$

由于 $|f(x,y)|\le 1$，则在圆 $x^2+y^2=1$ 上，$g\ge 1$ 必成立

而 $g(0,0)=f(0,0)\le 1$，且 g 为连续函数

类比一元连续函数在闭区间内有最值，

则 g 在圆盘 D 内也应有最值

即在 D 内部，g 必会取到最小值

（要么 D 内有小于 1 的值，要么 D 内全取 1）

此时则必存在 (x^*,y^*)，且 $(x^*)^2+(y^*)^2<1$ 使得

$$\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(x^*,y^*)}=\left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{(x^*,y^*)}=0$$

又 $\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+4x$, $\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+4y$

所以有 $f_1'(x^*,y^*)=-4x^*$, $f_2'(x^*,y^*)=-4y^*$

从而 $\left(f_1'(x^*,y^*)\right)^2+\left(f_2'(x^*,y^*)\right)^2=(-4x^*)^2+(-4y^*)^2$

$=16({x^*}^2+{y^*}^2)<16$，得证.

3. （若先对 f 求 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$，则在 $(0,0)$ 处其无意义，如 $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$）

由方向导数定义，$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(0,0)=\lim\limits_{\rho\to0^+}\frac{f(\rho\cos\alpha,\rho\sin\alpha)-f(0,0)}{\rho}$

$=\lim\limits_{\rho\to0^+}\frac{\rho^{\frac{2}{3}}\cos^{\frac{2}{3}}\alpha\cdot\rho^{\frac{1}{3}}\sin^{\frac{1}{3}}\alpha}{\rho}=\cos^{\frac{2}{3}}\alpha\sin^{\frac{1}{3}}\alpha=\sqrt[3]{\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)}$

令 $t=\sin\alpha$，$g(t)=t-t^3$，则 $t\in[-1,1]$，又 $g'(t)=1-3t^2$

$g'(t)=0$ 时 $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $t=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 又 $g'(t)$ 在 $(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3})$ 上小于0，$(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$ 上大于0

$(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty)$ 上小于0，$g(t)$ 是减增减，则 $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时有极大值

而 $g(\frac{\sqrt{3}}{3})=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$，$g(1)=-1+1=0$ 故 $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时 $g(t)$ 有最大值

即 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时 方向导数 $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(0,0)$ 取最大值.

11. 用反证法。假设 $z(x,y)$ 在 D 上的最值在 D 的内部 D° 上取到

设取到最值的点为 (x_0,y_0)，则该点也必为极值点

且在 D° 内 $z(x,y)$ 有连续二阶偏导，

有 $z'_x(x_0,y_0)=z'_y(x_0,y_0)=0$

再令 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x_0,y_0)=A$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)=B$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x_0,y_0)=C$

由已知条件，$A+C=0$，$B\neq0$

而由于多元函数极值的充分条件，(x_0,y_0) 为极值点时应有 $B^2-AC\leq0$

但此时 $B^2-AC=B^2-A\cdot(-A)=B^2+A^2>0$ $(B\neq0)$

从而 (x_0,y_0) 不是极值点，产生矛盾.

又由于 z 在 D 上连续则必存在最值.

从而 $z(x,y)$ 在 D 上的最值不能在 D° 上，故只能在 ∂D 上取到.