14. (根据结果进行的一个构造，看不明白也没关系)

令 $g(x,y)=f(x,y)+2(x^2+y^2)$

由于 $|f(x,y)|\le 1$，则在圆 $x^2+y^2=1$ 上，$g\ge 1$ 必成立

而 $g(0,0)=f(0,0)\le 1$，且 g 为连续函数

类比一元连续函数在闭区间内有最值，

则 g 在圆盘 D 内也应有最值

即在 D 内部，g 必会取到最小值

(要么 D 内有小于1的值 要么 D 内全取1)

此时则必存在 (x^*,y^*)，且 $(x^*)^2+(y^*)^2<1$ 使得

$$\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(x^*,y^*)}=\left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{(x^*,y^*)}=0$$

又 $\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+4x$，$\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+4y$

所以有 $f_1'(x^*,y^*)=-4x^*$，$f_2'(x^*,y^*)=-4y^*$

从而 $\left(f_1'(x^*,y^*)\right)^2+\left(f_2'(x^*,y^*)\right)^2=(-4x^*)^2+(-4y^*)^2$

$$=16(x^{*2}+y^{*2})<16，\text{得证.}$$

11. 用反证法。假设 $z(x,y)$ 在 D 上的最值在 D 的内部 D° 上取到

设取到最值的点为 (x_0,y_0)，则该点也必为极值点.

且在 D° 内 $z(x,y)$ 有连续二阶偏导，

有 $z_x'(x_0,y_0)=z_y'(x_0,y_0)=0$

再令 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x_0,y_0)=A$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)=B$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x_0,y_0)=C$

由已知条件，$A+C=0$，$B\ne 0$

而由于多元函数极值的充分条件，(x_0,y_0) 为极值点时应有 $B^2-AC\le 0$

但此时 $B^2-AC=B^2-A\cdot(-A)=B^2+A^2>0$ $(B\ne 0)$

从而 (x_0,y_0) 不是极值点，产生矛盾.

又由于 z 在 D 上连续则必存在最值.

从而 $z(x,y)$ 在 D 上的最值不能在 D° 上，故只能在 ∂D 上取到.

例题 21.3.2 设 $u=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$, 其中 $a>b>c>0$. 求在 $(0,0,0)$ 处函数增长最快的方向.

解 由于 $\nabla u(0,0,0)$ 为零向量, 故不能应用梯度方向是函数增长最快的方向的性质, 需另想办法. 考虑沿某单位方向 $\boldsymbol{l}=(\alpha,\beta,\gamma)$ 函数 u 的变化

$$u(t\alpha,t\beta,t\gamma)-u(0,0,0),\quad \text{其中 } t \text{ 是参数}.$$

令 $\varphi(t)=u(t\alpha,t\beta,t\gamma)$. 由 Taylor 展式

$$\begin{aligned}\varphi(t)-\varphi(0)&=\varphi'(0)t+\frac{\varphi''(0)}{2}t^2+o(t^2)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}(0,0,0)\alpha^2+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}(0,0,0)\beta^2+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}(0,0,0)\gamma^2\right)t^2+o(t^2)\\&=\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}\right)t^2+o(t^2).\end{aligned}$$

由于 $a>b>c$ 及 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$, 当 $t>0$ 充分小时, 沿方向 $\boldsymbol{l}=(0,0,\pm1)$ $\varphi(t)-\varphi(0)$ 最大, 即函数 u 增加最快. □

例题 21.4.5 求由方程

$$2x^2+y^2+z^2+2xy-2x-2y-4z+4=0 \tag{21.31}$$

所确定的函数 $z=z(x,y)$ 的**极值**.

解 1 (直接法) 由 (21.31) 对隐函数 $z=z(x,y)$ 求导, 得

$$4x+2z\frac{\partial z}{\partial x}+2y-2-4\frac{\partial z}{\partial x}=0, \tag{21.32}$$

$$2y+2z\frac{\partial z}{\partial y}+2x-2-4\frac{\partial z}{\partial y}=0. \tag{21.33}$$

令 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=0$, 则

$$2x+y-1=0,\quad y+x-1=0.$$

由此得驻点为 $(0,1)$, 将之代入 (21.31) 得

$$z^2-4z+3=0.$$

于是 $z_1=1$, $z_2=3$, 在 (21.32), (21.33) 两边求导, 得

$$4+2(\frac{\partial z}{\partial x})^2+2z\frac{\partial^2z}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2z}{\partial x^2}=0, \tag{21.34}$$

$$2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+2z\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}+2-4\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}=0, \tag{21.35}$$

$$2+2(\frac{\partial z}{\partial y})^2+2z\frac{\partial^2z}{\partial y^2}-4\frac{\partial^2z}{\partial y^2}=0. \tag{21.36}$$

在 (21.34)-(21.36) 中令 $(x,y,z)=(0,1,1)$, $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=0$, 得 $A=z_{xx}=2$, $B=z_{xy}=1$, $C=z_{yy}=1$, 于是 $D=AC-B^2>0$. 故 $z=1$ 为极小值.

在 (21.34)-(21.36) 中令 $(x,y,z)=(0,1,3)$, $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=0$, 得 $A=z_{xx}=-2$, $B=z_{xy}=-1$, $C=z_{yy}=-1$, 于是 $D=AC-B^2>0$. 故 $z=3$ 为极大值.

解 2 以 (21.31) 为约束条件, 取目标函数 $f(x,y,z)=z$, 则 Lagrange 函数为

$$L(x,y,z,\lambda)=z+\lambda(2x^2+y^2+z^2+2xy-2x-2y-4z+4).$$

令

$$L_x=4\lambda x+2\lambda y-2\lambda=0, \tag{21.37}$$

$$L_y=2\lambda x+2\lambda y-2\lambda=0, \tag{21.38}$$

$$L_z=1+2\lambda z-4\lambda=0. \tag{21.39}$$

显然 $\lambda\neq 0$, 于是由 (21.37) 和 (21.38) 得驻点为 $(0,1)$. 代入 (21.31) 得 $z_1=1$, $z_2=3$. 再由 (21.39) 得 $\lambda_1=\frac{1}{2}$, $\lambda_2=-\frac{1}{2}$. 由于

$$L_{xx}=4\lambda,\ L_{yy}=L_{zz}=2\lambda,\ L_{xy}=2\lambda,\ L_{xz}=L_{yz}=0,$$

于是 L 在 $(0,1,1)$ 与 $(0,1,3)$ 的 Hesse 矩阵分别为

$$\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-2&-1&0\\-1&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},$$

前者正定, 后者负定, 所以 $z=1$ 为极小值, $z=3$ 为极大值. □

【例 4】 设 $F(u,v)$ 一阶连续可微, 证明: 曲面 $F\left(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c}\right)=0$ 上任意一点处的切平面都过一个固定点.

【证明】 设 $M(x,y,z)$ 为曲面上任意一点, 曲面在该点处的法向量为

$$\vec{n}=\left\{\frac{F'_1}{z-c},\frac{F'_2}{z-c},-\frac{x-a}{(z-c)^2}F'_1-\frac{y-b}{(z-c)^2}F'_2\right\},$$

过 $M(x,y,z)$ 的切平面为

$$\frac{F'_1}{z-c}(X-x)+\frac{F'_2}{z-c}(Y-y)-\left[\frac{x-a}{(z-c)^2}F'_1+\frac{y-b}{(z-c)^2}F'_2\right](Z-z)=0,$$

显然 $X=a,Y=b,Z=c$ 满足上述方程, 故曲面 $F\left(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c}\right)=0$ 上任意一点的切平面过固定点 (a,b,c).

曲线 Γ 在 M_0 点的法平面方程为

$$-ax+cz-\frac{c^2\pi}{2}=0.$$

例 12.5.2 求曲线 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2-2y=4,\\x+y+z=0\end{cases}$ 在点 $(1,1,-2)$ 处的切线和法平面的方程(见图12.5.3).

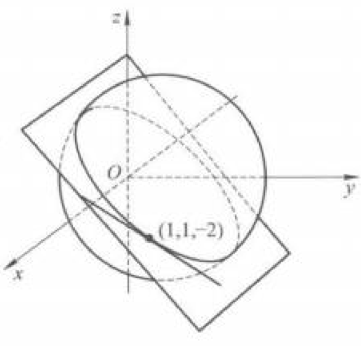

图 12.5.3

解法一 直接利用公式求解.

曲线 Γ 的方程为

$$\begin{cases}F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2y-4=0,\\G(x,y,z)=x+y+z=0.\end{cases}$$

所以

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}=\begin{vmatrix}2y-2&2z\\1&1\end{vmatrix}=2(y-z-1),\quad \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}=\begin{vmatrix}2z&2x\\1&1\end{vmatrix}=2(z-x),$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} 2x & 2y-2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2(x-y+1).$$

因此

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{(1,1,-2)}=4,\quad \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_{(1,1,-2)}=-6,\quad \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{(1,1,-2)}=2.$$

于是所求的切线方程为

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-1}{-6}=\frac{z+2}{2},\text{即}\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+2}{1};$$

法平面方程为

$$4(x-1)-6(y-1)+2(z+2)=0,\text{即 } 2x-3y+z+3=0.$$

解法二 依照推导公式的方法来求解.

在所给的两个曲面方程两边对 x 求导,

$$\begin{cases} 2x+2y\dfrac{dy}{dx}+2z\dfrac{dz}{dx}-2\dfrac{dy}{dx}=0, \\ 1+\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dz}{dx}=0. \end{cases}$$

解这个方程组,得到

$$\frac{dy}{dx}=\frac{z-x}{y-z-1},\quad \frac{dz}{dx}=\frac{1-y+x}{y-z-1}.$$

于是

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,1,-2)}=-\frac{3}{2},\quad \left.\frac{dz}{dx}\right|_{(1,1,-2)}=\frac{1}{2},$$

曲线 Γ 在(1,1,-2)处的切向量为$\left(1,-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$.因此所求的切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-\frac{3}{2}}=\frac{z+2}{\frac{1}{2}},\quad \text{即}\quad \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+2}{1};$$

法平面方程为

$$(x-1)-\frac{3}{2}(y-1)+\frac{1}{2}(z+2)=0,\quad \text{即}\quad 2x-3y+z+3=0.$$

L6、求过点P(1,1,1)且与两直线 $l_1: \frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$. $l_2: \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{4}$ 都相交的直线方程

解. 设直线 $l: \frac{x-1}{A}=\frac{y-1}{B}=\frac{z-1}{C}$.

l与l_1相交 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ A & B & C \end{vmatrix}=0 \Rightarrow A-2B+C=0$ l与l_2相交 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ A & B & C \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 2A+4B-2C=0$

$\Rightarrow A=0,\ C=2B$ $\Rightarrow l: \frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}.$

7. $a_n=\int_0^1 f(nx)\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_0^1 f(nx)\mathrm{d}(nx)=\frac{1}{n}\int_0^n f(x)\mathrm{d}x$. $a_n^2=\frac{1}{n^2}\left(\int_0^n f(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\frac{1}{n^2}\int_0^n 1^2\mathrm{d}x\int_0^n f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_0^n f^2(x)\mathrm{d}x$. 令 $\int_0^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x=A$ 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^n f^2(x)\mathrm{d}x=A$, 取 $\varepsilon_0=\frac{A}{2}$, 则存在 $N>0$, 当 $n>N$ 时有 $\left|\int_0^n f^2(x)\mathrm{d}x-A\right|<\frac{A}{2}$, 即 $\int_0^n f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{3A}{2}$, 于是当 $n>N$ 时, $0\leqslant\frac{a_n^2}{n}\leqslant\frac{1}{n^2}\int_0^n f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{3A}{2}\frac{1}{n^2}$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3A}{2}\frac{1}{n^2}$ 收敛, 于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2}{n}$ 收敛.

例题 14.3.5 求 $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n$ 的和函数.

解 用 Wallis 公式 (11.29) 容易确定收敛域为 $[-1,1)$.

设和函数为 $S(x)$. 并在 $(-1,1)$ 中试用逐项求导, 得到

$$
\begin{aligned}
S'(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot nx^{n-1}=\frac{1}{2}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}x^n\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot(2n+1)x^n\right)=\frac{1}{2}S(x)+xS'(x).
\end{aligned}
$$

因此 $S(x)$ 在 $(-1,1)$ 中满足微分方程

$$(1-x)S'(x)=\frac{1}{2}S(x).$$

这时可以看出在区间 $(-1,1)$ 上成立恒等式:

$$[\sqrt{1-x}S(x)]'=\frac{1}{\sqrt{1-x}}[(1-x)S'(x)-\frac{1}{2}S(x)]\equiv 0.$$

因此 $\sqrt{1-x}S(x)$ 在 $(-1,1)$ 上为常值函数. 再利用 $S(0)=1$, 就得到

$$S(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}},\ -1<x<1. \tag{14.15}$$

从 Abel 第二定理知道 $S(x)$ 于 $[-1,1)$ 上连续, 而上式右边的表达式也是如此, 因此 (14.15) 对 $x=-1$ 也成立. □