
云峰朋辈辅学微甲提升 2 组 — 习题课 01

内容提要: 习题课

Date: May 8 2022

主讲人: Famiglisti @CC98

Place: 碧 2 党员之家

0.1 多元函数微分学

【18-19final】 设 $f(x,y)$ 在包含单位闭圆盘 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 的一个开集上具有连续的一阶偏导函数, 且满足 $\forall (x,y) \in D, |f(x,y)| \leq 1$

试证: 存在一点 $(x^*, y^*) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\}$ 使得 $[f'_1(x^*, y^*)]^2 + [f'_2(x^*, y^*)]^2 \leq 16$ 成立

【20-21final】 设 D 是平面上的一个有界闭区域, $z=z(x,y)$ 在 D 上连续, 在 D° 上所有的连续二阶偏导函数, 且满足 $\forall (x,y) \in D^\circ, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y) = 0, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x,y) \neq 0$

证明: $z(x,y)$ 在 D 上的最值只能在 D 的边界上取到。

【example 1】 设 $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$, ($a > b > c > 0$), 求在 $(0,0,0)$ 处函数增长最快的方向。

【example 2】 求由方程

$$2x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2x - 2y - 4z + 4 = 0$$

所确定的函数 $z=z(x,y)$ 的极值

【example 3】 设 $F(u,v)$ 一阶连续可微, 证明: 曲面 $F(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}) = 0$ 上任意一点处的切平面都过一个固定点。

0.2 几何学

【example 1】求曲线 $\Gamma : \begin{cases} F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 4 = 0 \\ G(x, y, z) = x + y + z = 0 \end{cases}$ 在 $(1, 1, -2)$ 处的切线和法平面的方程。

【example 2】求过点 $P(1, 1, 1)$ 且与两直线 $l_1 : \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}, l_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{4}$ 都相交的直线的方程。

0.3 级数

【ex1】 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty]$ 上连续, 且 $\int_0^{+\infty} f^2(x) dx$ 收敛, 令 $a_n = \int_0^1 f(nx) dx$, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{n}$ 收敛

【ex3】 求 $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!x^n}$ 的和函数