云峰朋辈辅学微甲提升 2 组 — 第 2 讲

内容提要: 幂级数 **Date:** March 27 2022

主讲人: Famiglisti @CC98 **Place:** 碧 2 党员之家

1 知识概要

1. 函数项级数的定义
2. 幂级数基本定理——Abel 定理
3. 求收敛半径与收敛域的两种基本方法（根值、比值）
4. 幂级数的分析性质（连续性、逐项可导性、逐项可积性、收敛半径不变性）
5. 绝对收敛与条件收敛

2 基本题型

题型一：求幂级数的收敛半径和收敛域

根值法、比值法、换元法

【example 1】求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}(\frac{1-x}{1+x})^n$ 的收敛域

题型二：幂级数求和函数

别忘了求收敛半径和收敛域!

情形一: 求 $\sum_{n=0}^{\infty}P(n)x^n$ 的和函数，其中 P(n) 为 n 的多项式, 求和函数常用工具

a 级数的逐项可积性

b $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}(-1<x<1)$

c $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n=\frac{1}{1+x}(-1<x<1)$

【example1】$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n+1}}(x-1)^{2n+1}$

【example2】$\sum_{n=0}^{\infty}n^2x^n$

情形二： 求 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{P(n)}$ 的和函数，其中 P(n) 为 n 的多项式, 求和函数常用工具

a 级数的逐项可导性

b $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}=\ln(1+x)(-1<x\leqslant 1)$

c $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)(-1\leqslant x<1)$

【example1】$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)2^n}$

【example2】$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n-1}}{n(2n-1)}$

情形三：幂级数系数的分母中含 n!, 求和函数常用工具

a $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x(-\infty<x<+\infty)$

b $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!}=\cos x(-\infty<x<+\infty)$

c $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sin x(-\infty<x<+\infty)$

d 求和函数满足的微分方程

【example1】$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n n!}x^n$

【example2】$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}$ (-1<x<1)

情形四：求 $\sum_{n=0}^{\infty}P(n)x^n$ 的和函数, 其中 P(n) 为复杂分式，常通过换元等方法将分式化为标准多项式或标准分式

【example1】$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n-1)^2}{n+1}x^n$

题型三：**函数展成幂级数**

积分法、微分法、裂项法、熟记常用级数展开公式

【example1】将 $f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}$ 展成 x 的幂级数

【example2】求 $\ln\frac{\sin x}{x}$ 在 x=0 的幂级数展开 (到 x^4)

题型四：特殊的常数项级数的求和

将数项级数中的 a^n 代换为 x^n, 并求和函数

【example1】$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n(n^2-1)}$

3 真题解析

【18-19mid】判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}$ 的敛散性

【18-19mid】将 $f(x)=\arcsin x$ 展开成 x 的幂级数, 并求 $f^{(99)}(0)$

【18-19mid】设 $0 < a_0 < 1, a_{n+1} = a_n(1-a_n)(n=0,1,2,\cdots)$, 证明

1. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛
2. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 发散

【18-19final】求幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n+1}$ 的收敛半径与和函数

【19-20final】求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(2^n+3^n)n!}$ 的收敛半径