Reference09

6. 由题，$y' = \sqrt{\sin x^2}$ 且 $1 \le x \le \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

则 $\int_C x\,ds = \int_1^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x \cdot \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_1^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x \cdot \sqrt{1+\sin x^2}\,dx$

$\overset{u=x^2}{=\!=} \frac{1}{2}\int_1^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\sin u}\,du = \frac{1}{2}\int_1^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2\frac{u}{2}+\cos^2\frac{u}{2}+2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}}\,du$

$= \frac{1}{2}\int_1^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\sin\frac{u}{2}+\cos\frac{u}{2})^2}\,du = \frac{1}{2}\int_1^{\frac{\pi}{2}} \sin\frac{u}{2}+\cos\frac{u}{2}\,du$ ($\sin x+\cos x$ 在 $x\in[\frac{1}{2},\frac{\pi}{4}]$ 时大于0)

$= \sin\frac{u}{2} - \cos\frac{u}{2}\Big|_1^{\frac{\pi}{2}}$

$= \sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4} - (\sin\frac{1}{2} - \cos\frac{1}{2}) = \cos\frac{1}{2} - \sin\frac{1}{2}$

9. 由于 $yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz = d(xyz)$

从而曲线积分与路径无关，只需考察起点与终点。

对 $\gamma: \begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ z=2t \end{cases}$ $t=0$ 时对应点为 $(1,0,0)$，$t=\frac{\pi}{2}$ 时对应点为 $(0,1,\pi)$ 即 γ_1 的起点 $(1,0,0)$ 终点 $(0,1,\pi)$

又 $\begin{cases} x'=-\sin t \\ y'=\cos t \\ z'=2 \end{cases}$ 则在点 $(0,1,\pi)$ 处 $(t=\frac{\pi}{2})$，γ 的切向量为 $(-1,0,2)$

即 L 的方向向量为 $(-1,0,2)$，设 L_1 对应终点为 P

再记 $A(0,1,\pi)$ 则 $\vec{AP} = \sqrt{5}\cdot\frac{(-1,0,2)}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = (-1,0,2)$

因此 $P(-1,1,2+\pi)$

且 γ_1 的终点与 L_1 的起点相同

从而 $\int_{\gamma_1\cup L_1} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz = \int_{\gamma_1\cup L_1} dxyz$

$= \int_{(1,0,0)}^{(-1,1,2+\pi)} d(xyz) = xyz\Big|_{(1,0,0)}^{(-1,1,2+\pi)} = -2-\pi$

12. 证明：由题意可设 $\partial D = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$，其中

$$C_1:\begin{cases} x = t\ , \\ y = y_1(t)\ ,\quad t \in [0,1]; \end{cases}$$

$$C_2:\begin{cases} x = 1\ , \\ y = t\ ,\quad t \in [y_1(1), y_2(1)]; \end{cases}$$

$$C_3^-:\begin{cases} x = t\ , \\ y = y_2(t)\ ,\quad t \in [0,1]; \end{cases}$$

$$C_4^-:\begin{cases} x = 0\ , \\ y = t\ ,\quad t \in [y_1(0), y_2(0)]. \end{cases}$$

直接计算得左边 $= \oint_{\partial D} u dx = \int_{C_1} u dx + \int_{C_2} u dx + \int_{C_3} u dx + \int_{C_4} u dx =$ $\int_0^1 u(t, y_1(t))dt + 0 + (-\int_0^1 u(t, y_2(t))dt) + 0 = \int_0^1 (u(t, y_1(t)) - u(t, y_2(t)))dt$；

$$\begin{aligned} \text{右边} &= -\iint_D \frac{\partial u}{\partial y} dx dy \\ &= -\int_0^1 dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial u}{\partial y} dy \\ &= -\int_0^1 u(x,y)\Big|_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} dx \\ &= -\int_0^1 (u(x, y_2(x)) - u(x, y_1(x)))dx = \text{左边}. \end{aligned}$$

这里要对12题做一个说明，答案中的方法是把D这条曲线分成4部分然后单独计算每个曲线积分再求和，这里相当于是类似格林公式的证明来证明这道题，本意并不是想让大家运用格林公式直接得出结论。

10. 设D内任意一光滑简单封闭曲线C所围区域为 D_*

由格林公式，$\iint_{D_*} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} dxdy = \oint_{C^+} P(x,y)dy - Q(x,y)dx = 0$ (*)

用反证法，若∃点 $M_0 \in D$ 使 $\left.\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right|_{M_0} \neq 0$ 不妨设 $\left.\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right|_{M_0} > 0$

由于 $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$ 在D内连续，由局部保号性可知，存在 M_0 的一个小闭圆邻域 $D_0 \subset D$

使 $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ 在 D_0 上恒大于 $\frac{1}{2}\left(\left.\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right|_{M_0}\right)$，设 D_0 面积为 $S > 0$

则 $\iint_{D_0} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dxdy \geq S \cdot \frac{1}{2}\left(\left.\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right|_{M_0}\right) > 0$，与(*)式矛盾，

则在D内恒有 $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0$ 成立

用了格林公式之后，题中＊式不能直接就推出那个积分内的值是0，或者说，直接用D*的任意性去推叙述上会有问题存在，这种时候就最好是利用反证法考察。

2、由于 $\frac{dx}{dt}=1$，$\frac{dy}{dt}=t$，$\frac{dz}{dt}=t^2$

从而 $I_1=\int_0^e \frac{t\cdot\frac{t^3}{3}}{\sqrt{1+2\cdot\frac{t^2}{2}+4\cdot(\frac{t^2}{2})^2}}\cdot\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2+(\frac{dz}{dt})^2}\,dt$

$=\int_0^e \frac{t^4}{3\sqrt{1+t^2+t^4}}\cdot\sqrt{1+t^2+t^4}\,dt$

$=\int_0^e \frac{1}{3}t^4dt=\frac{1}{15}t^5\Big|_0^e=\frac{e^5}{15}$

例题 24.3.2 计算积分

$$I=\oint_C \frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\,\mathrm{d}s,$$

其中 C 为逐段光滑的简单闭曲线，$\boldsymbol{r}=(x,y),r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2},\boldsymbol{n}$ 是 C 上的单位外法向量.

解 由 $\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})=\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r}=\frac{1}{r}(x\cos(\boldsymbol{n},x)+y\cos(\boldsymbol{n},y))$ 得到

$$I=\oint_C\Big(\frac{x}{r^2}\cos(\boldsymbol{n},x)+\frac{y}{r^2}\cos(\boldsymbol{n},y)\Big)\,\mathrm{d}s.$$

当 $(0,0)$ 在 C 外时，利用 Green 公式 (24.10)，则

$$I=\iint\limits_D\Big[\partial_x(\frac{x}{r^2})+\partial_y(\frac{y}{r^2})\Big]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0,$$

其中 D 是以 C 为边界的区域.

当 $(0,0)$ 在 C 内时，以 $(0,0)$ 为原心，以充分小的 ε 为半径作圆 C_ε，使得 C_ε 在 C 内，以 C 及 C_ε 为边界的区域为 D_ε，则

$$I=\oint_C\Big(\frac{x}{r^2}\cos(\boldsymbol{n},x)+\frac{y}{r^2}\cos(\boldsymbol{n},y)\Big)\,\mathrm{d}s+\oint_{C_\varepsilon}\Big(\frac{x}{r^2}\cos(\boldsymbol{n},x)+\frac{y}{r^2}\cos(\boldsymbol{n},y)\Big)\,\mathrm{d}s$$
$$-\oint_{C_\varepsilon}\Big(\frac{x}{r^2}\cos(\boldsymbol{n},x)+\frac{y}{r^2}\cos(\boldsymbol{n},y)\Big)\,\mathrm{d}s.$$

其中 C_ε 上的单位法向量 $\boldsymbol{n}$ 的方向指向坐标原点. 对前两项用 Green 公式，则

$$I=-\oint_{C_\varepsilon}\Big(\frac{x}{r^2}\cos(\boldsymbol{n},x)+\frac{y}{r^2}\cos(\boldsymbol{n},y)\Big)\,\mathrm{d}s.$$

在圆周 C_ε 上，

$$\cos(\boldsymbol{n},x)=-\frac{x}{\varepsilon},\ \ \cos(\boldsymbol{n},y)=-\frac{y}{\varepsilon},\ \ r=\varepsilon,$$

从而

$$I=\oint_{C_\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon}\,\mathrm{d}s=2\pi.$$

当 $(0,0)\in C$ 时, 过原点作曲线 C 的切线 OA, OB, 设 OA, OB 的夹角为 θ (见图 24.4), 如果曲线 C 在原点光滑, 则 $\theta=\pi$.

作一个以 $(0,0)$ 点为心, ε 为半径的圆 B_ε, 记 B_ε 的圆周在 C 内的部分为 C_ε, 由上面的计算知

$$I=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon}\,\mathrm{d}s=\lim_{\varepsilon\to 0}\theta_\varepsilon=\theta,$$

其中 θ_ε 是 C_ε 所对应的圆心角. □

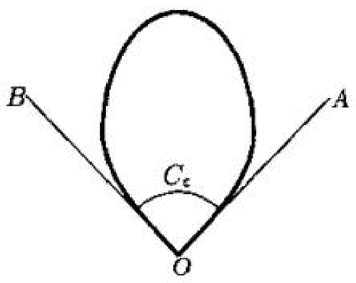

图 24.4

注 注意使用 Green 公式的条件: P, Q 在 D 上连续可微. 这正是在本题中要分 $(0,0)$ 在 C 外, C 内和 C 上三种情况讨论的缘故. 许多学生并不注意到这里的区别, 尤其是 $(0,0)$ 在 C 内时, 他们会错误地认为被积函数在 C 上是连续可微的, 因而 Grren 公式就可以用了.

例题 24.3.3 计算

$$I=\oint_C\frac{\mathrm{e}^y}{x^2+y^2}\left[(x\sin x+y\cos x)\,\mathrm{d}x+(y\sin x-x\cos x)\,\mathrm{d}y\right],$$

其中 $C: x^2+y^2=1$, 取逆时针方向.

解 令

$$P(x,y)=\frac{\mathrm{e}^y}{x^2+y^2}(x\sin x+y\cos x),$$
$$Q(x,y)=\frac{\mathrm{c}^y}{x^2+y^2}(y\sin x-x\cos x),$$

由计算知 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, 从而可在不包含原点的区域上用 Green 公式. 为此取 $C_\varepsilon: x^2+y^2=\varepsilon^2$, 取逆时针方向, 则

$$I=\oint_C-\oint_{C_\varepsilon}+\oint_{C_\varepsilon}.$$

对等式右边前两项用 Green 公式, 于是

$$\begin{aligned}I&=\oint_{C_\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^y}{x^2+y^2}\left[(x\sin x+y\cos x)\,\mathrm{d}x+(y\sin x-x\cos x)\,\mathrm{d}y\right]\\&=\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{C_\varepsilon}\mathrm{e}^y\left[(x\sin x+y\cos x)\,\mathrm{d}x+(y\sin x-x\cos x)\,\mathrm{d}y\right].\end{aligned}$$

记 C_ε 围成的区域为 D_ε, 再用一次 Green 公式, 则

$$I=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{D_\varepsilon}-2\mathrm{e}^y\cos x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

应用积分中值定理得到

$$I=\frac{1}{\varepsilon^2}(-2\mathrm{e}^\xi\pi\varepsilon^2\cos\eta)=-2\pi\mathrm{e}^\xi\cos\eta,$$

其中 $(\xi,\eta)\in D_\varepsilon$. 上述等式对 $\forall\varepsilon>0$ 都对, 令 $\varepsilon\to 0$, 得

$$I=\lim_{\varepsilon\to 0^+}(-2\pi\mathrm{e}^\xi\cos\eta)=-2\pi.\quad\square$$

例题 24.1.3 计算球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 在第一卦限部分的边界的质心坐标 (x_0, y_0, z_0).

解 应用质心坐标公式, 其中 $\rho \equiv 1$, $m=\dfrac{3}{2}\pi a$. 如图 24.1 所示, 在 Γ_1 上用极坐标系 $x=a\cos\theta, y=a\sin\theta$, 则 $\mathrm{d}s=a\,\mathrm{d}\theta$, 且

$$\int_{\Gamma_1} x\,\mathrm{d}s=\int_0^{\pi/2} a\cos\theta a\,\mathrm{d}\theta=a^2.$$

由对称性 $\displaystyle\int_{\Gamma_2} x\,\mathrm{d}s=a^2$, 且

$$\int_{\Gamma_3} x\,\mathrm{d}s=0.$$

于是

$$x_0=\frac{2}{3\pi a}\left(\int_{\Gamma_1} x\,\mathrm{d}s+\int_{\Gamma_2} x\,\mathrm{d}s\right)=\frac{4a}{3\pi}.$$

再用对称性得

$$y_0=z_0=\frac{4a}{3\pi}. \quad \square$$

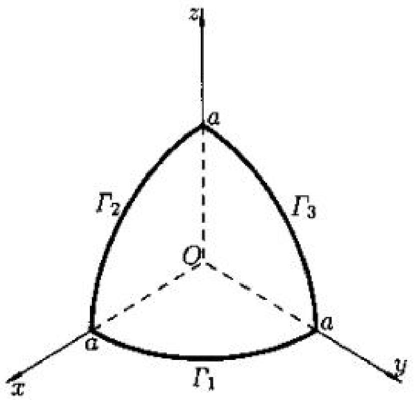

图 24.1