
云峰朋辈辅学微甲提升 2 组 — 第 1 讲

内容提要: 数项级数的概念与理论

Date: March 20 2022

主讲人: Famiglisti @CC98

Place: 碧 2 党员之家

1 知识概要

1. 常数项级数的定义、收敛定义、常数项级数的基本性质
2. 两个重要的常数项级数 (p 级数、几何级数)
 1. p 级数: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$;
当 $p > 1$ 时, 级数收敛; 当 $p \leq 1$ 时, 级数发散
 2. 几何级数: $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$;
当 $|q| \geq 1$ 时, 级数发散;
当 $|q| < 1$ 时, 级数收敛
3. 正项级数审敛法
比较审敛法、比值审敛法、根值审敛法、积分审敛法
4. 交错级数及其审敛法
莱布尼茨判别法
5. 绝对收敛与条件收敛

2 习题解析

Problem 1 设常数 $k > 0$, 且正向级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n+k}$

- [A] 绝对收敛
- [B] 条件收敛
- [C] 发散
- [D] 敛散性与 k 有关

Problem 2 设正数列 $\{a_n\}$ 单调增加且有界, 判断 $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{a_n}{a_{n+1}})$ 的敛散性。

Problem 3 设 $0 \leq a_n < \frac{1}{n}$, 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n, \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}, \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n^2$ 中那些级数一定收敛?

Problem 4 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ 的敛散性, 若收敛, 是绝对收敛还是条件收敛?

Problem 5 判断 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \sqrt{n^2 + 1} \pi$ 的敛散性, 当级数收敛时, 判断是绝对收敛还是条件收敛。

Problem 6 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内二阶连续可导, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)-1}{x^2} = 2$. 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} [f(\frac{1}{n}) - 1]$ 绝对收敛。

Problem 7 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n (u_n > 0)$ 发散, $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$, 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{S_n^2}$ 收敛。

Problem 8 设 $u_n > 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} = q$ 存在, 证明: 当 $q > 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$; $q < 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

Problem 9 设 $f_0(x)$ 在 $[0, a]$ 上连续, 又 $f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t) dt$, 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[0, a]$ 上绝对收敛.