

埃氏筛法

介绍

如果我们要得到自然数 n 以内的全部素数，把**不大于根号 n 的所有素数的倍数**剔除，剩下的就是素数。

算法分析

因此如果 x 是质数，那么大于 x 的 x 的倍数 $2x, 3x, 4x \dots kx$ (k 是整数) 一定不是质数，只要将范围内的数字剔除剩下的就是素数了。是不是很简单-

代码

对于 $1 \sim n$ 的数字，我们先建立一个数组`isprime`并且全部赋值为1

```
bool isprime[N];
memset(isprime, 1, sizeof(isprime));
```

这里也能用vector动态的开辟（推荐）

```
vector<bool>isprime(N, 1); //大小为N 默认为1
```

然后对根号 n 以内的素数 i 然后对其倍数 将其筛掉，标记数组为0

```
for (int i = 2; i * i < N; i++)
{
    if (isprime[i])//如果i是素数 那么就开始剔除它的倍数
    {
        for (int j = i + i; j < N; j=j+i)
        {
            isprime[j] = 0;
        }
    }
}
```

对上述筛法进行说明

根据分解定理：**合数一定能被分解成几个质数的乘积**

当从小到大遍历到数 i 时，倘若它是合数，则它一定是某个小于 i 的质数 x 的整数 k , 既 $i = x * k$ ，故根据此方法的步骤，当最开始遍历到 x 的时候，开始筛选 x 的倍数，会将`isprime[kx]`的标记为0，所以我们会把($i = kx$)这个数字筛掉，故从小到大，合数都一定能被之前的素数通过加倍从而筛掉

进阶优化

结论：当我们找到素数 x 的时候，其实从 $x*x$ 为起点（而不是 $i*2$ ）进行筛选即可-。

因为对于 **小于 x** 的整数倍 $k, 2x, 3x, 4x \dots kx$ 。

1、当 k 为质数的时候， kx 一定会被小于 x 的质数 k ,通过加倍筛掉，

2、当 k 为合数的时候， k 可以分解成 $i * (k/i) * x$ [i 为 k 的质因子,并且 k/i 为整数],所以 当我们之前对质数 i 进行加倍的时候，一定会把 kx 筛掉。

所以我们对素数 x 进行筛的时候，对于小于 x^2 的整数 k , $2x, 3x, 4x \dots x^2$ 都被筛过了，因此从 x^2 开始筛即可。

优化后的代码

```
for (int i = 2; i * i < N; i++)
{
    if (isprime[i])//如果i是素数 那么就开始剔除它的倍数
    {
        for (int j =i*i; j < N; j=j+i)
        {
            isprime[j] = 0;
        }
    }
}
```

线性筛法

介绍

埃氏筛实际上存在重复的部分，比如数字30,会被质数3和质数5重复筛掉，就会浪费时间，因此我们需要优化算法从而使每个数字只被筛一次，使得时间复杂度降成 线性的时间复杂度。所以就出现了线性筛。时间复杂度 $O(n)$

算法思路

数字 x ,其最小质因数 k ，将小于等于 k 的所有质数 p_i 乘上数字 x ，并将 $p_i * x$ 的最小质因数标记为 p_i ，质数的最小质因数是本身。

分析

1. 如何保证每一个合数一定会被筛掉？

每一个合数都能分解成质数的乘积， $p_i * x$ ， p_i 和 x 的最小质因数乘积可以构成新的质数

2. 为什么 $p_i * x$ 的最小质因数是 p_i ？

$p_i \leq k$ ， p_i 是比 x 的最小质因数还小或者相等的质数，乘起来肯定是 p_i 是最小质因数了。因为 $p_i \leq k$ ，所以每个数字只能被筛一次。

代码

```
int p[N]; //最小质因数
int prime[N]; //用来素数集合
int cnt=0; //目前素数集的个数
for(int i=2;i<=N;i++){
    if(p[i]==0){ //如果这个数字没被之前数字筛到，那么就是质数
        p[i]=i;
        prime[cnt++]=i; //把这个放到质数集里面
    }
    for(int j=0;j<cnt && ;j++){
        if(prime[j]*i>N){ //超出范围了 不需要
            break;
        }
    }
}
```

```
        p[prime[j]*i]=prime[j];  
    }  
}
```